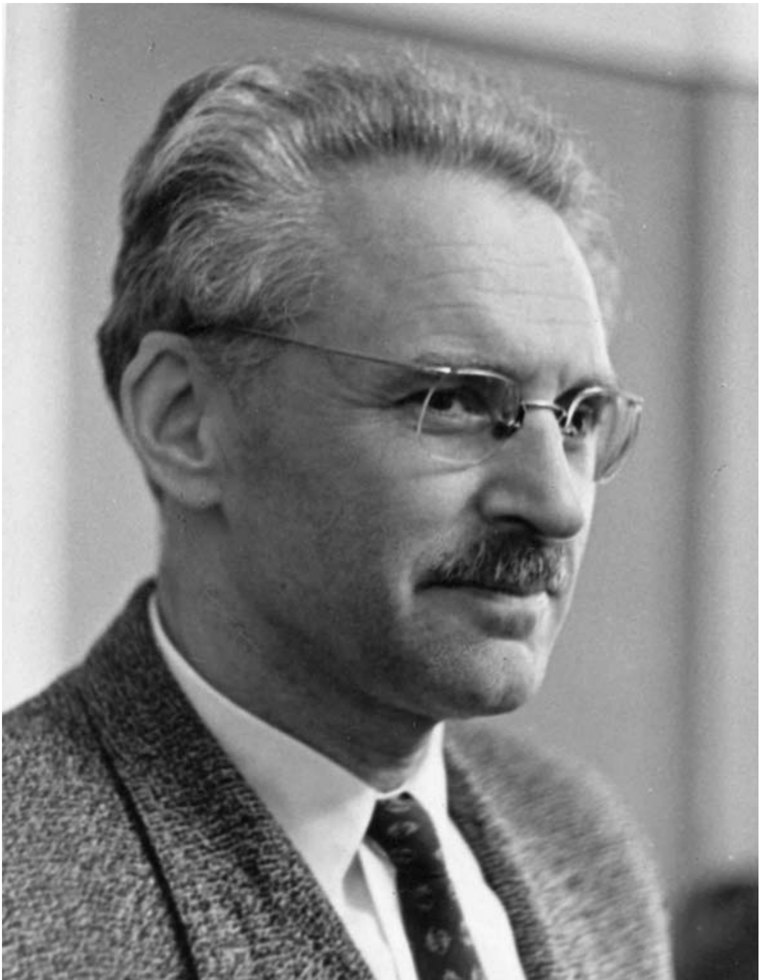
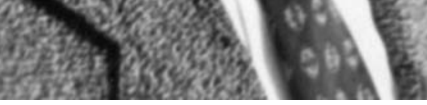
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Отделение математических наук　　Сибирское отделение
Институт математики им. С. Л. Соболева





А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

Избранные труды

Том 1

ГЕОМЕТРИЯ
и
ПРИЛОЖЕНИЯ

Новосибирск
«Наука»
2006

УДК 51(01) + 514 + 517.9
ББК 22.1
А46

Серия основана в 1932 г.

Александров А. Д. Геометрия и приложения / А. Д. Александров. — Новосибирск: Наука, 2006. — lii + 748 с. — (Избранные труды; Т. 1).
ISBN 5–02–032428–0 (т. 1).
ISBN 5–02–032427–2.

Академик А. Д. Александров (1912–1999) — один из крупнейших геометров XX в. В том 1 включены его статьи по теории смешанных объемов, геометрии «в целом», дифференциальным уравнениям эллиптического типа и основаниям теории относительности, оказавшие существенное влияние на развитие математики и вошедшие в золотой фонд достижений отечественной науки. Книга содержит также библиографию трудов А. Д. Александрова и очерк его жизни и творчества.

Издание предназначено для научных работников в области математики и истории науки, аспирантов и студентов старших курсов физико-математических специальностей.

Alexandrov A. D. Geometry and Applications / A. D. Alexandrov. — Novosibirsk: Nauka, 2006. — lii + 748 p. — (Selected Works; Vol. 1).

Academician A. D. Alexandrov (1912–1999) is one of the greatest geometers of the XXth century. This issue contains his articles on mixed volumes, geometry “in the large”, elliptic partial differential equations, and fundamentals of relativity which greatly affected the development of mathematics and are reckoned among the best contributions of the Russian science. The book also contains a list of Alexandrov’s publications and an overview of his life and scientific heritage.

The book is aimed at scientific researchers in mathematics and history of science, as well as graduate and postgraduate students of physics and mathematics departments.

Утверждено к печати Ученым советом
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

ТП–05–I–№ 79

ISBN 5–02–032428–0 (т. 1)
ISBN 5–02–032427–2

От редколлегии

В конце 2003 г. Российская академия наук приняла решение издать в трех томах избранные труды Александра Даниловича Александрова.

В том 1 вошли математические статьи академика А. Д. Александрова, опубликованные им на русском языке. Том 2 составит переиздание книги «Выпуклые многогранники». В том 3 войдут математические статьи Александра Даниловича, изданные на иностранных языках, а также статьи по философии, этике и общим вопросам развития науки.

Творчество А. Д. Александрова исключительно многогранно. В его трудах по теории смешанных объемов и теории поверхностей «в целом», теории многообразий ограниченной кривизны и теории уравнений Монжа — Ампера, в работах по принципу максимума для эллиптических дифференциальных уравнений и основаниям теории относительности решены фундаментальные проблемы и поставлены новые принципиальные вопросы, вызвавшие к жизни огромное число публикаций. А. Д. Александров стал одним из основателей отечественной школы геометрии «в целом».

В томе 1 собраны статьи по математике (за исключением опубликованных на иностранных языках), охватывающие теорию выпуклых тел, геометрию «в целом» и теорию дифференциальных уравнений. За его пределами остались работы по квантовой механике, основаниям геометрии (мотивированные написанием школьных учебников по геометрии), по функциональному анализу (некоторые из них войдут в том 3) и др. Статьи расположены в основном в хронологическом порядке. Исключение сделано лишь для публикаций, образующих единые циклы: в таком случае они помещены непосредственно друг за другом.

Творчество А. Д. Александрова охватывает длительный период времени, за который не раз менялись не только математические стандарты, но и общие правила русского языка. Поэтому в оригинальных статьях, написанных в разные годы, для одинаковых объектов порой использованы разные термины и символы. Для удобства читателя редколлегия сочла возможным единообразно оформить теоремы, следствия, замечания, доказательства и т. п., приводя все тексты к современным стандартам правописания, оформления библиографии и, по мере возможности, к современным математическим обозначениям. Чтобы дать представление о характере сделанных изменений, приведем несколько примеров: вместо «итти» мы пишем «идти», «вариируется» — «варьируется», «нумер» — «номер», «двухмерное многообразие» — «двумерное многообразие», «подинтегральный» — «подынтегральный», «Боннэ» — «Бонне», «Броуэр» — «Брауэр», «лоренцово преобразование» — «лоренцево преобразование», «Эвклид» — «Евклид», «эвклидовский шар» — «евклидов шар», «Христоффель» — «Кристоффель». Мы единообразно использовали наиболее распространенные сейчас символы $\cap$, $\cup$ и $\setminus$ для обозначения теоретико-множественных операций. Кроме того, в процессе редактирования были устранены замеченные опечатки, очевидные описки и стилистические погрешности.

В том 1 включен очерк о научной, педагогической и общественной деятельности А. Д. Александрова, а также указатель его трудов, который мы стремились сделать по возможности более полным. Читатель может найти дополнительные сведения о жизни и творчестве Александра Даниловича в следующих книгах:

• *Академик Александр Данилович Александров. Воспоминания. Публикации. Материалы / Ред. Г. М. Идлис, О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 2002.*

• *Александр Данилович Александров (1912–1999): Биобиблиографический сборник / Ред. Ю. Г. Решетняк, С. С. Кутателадзе. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.*

Издание трудов А. Д. Александрова было бы невозможно без титанических усилий по его организации, затраченных Ольгой Александровной Ладыженской (1922–2004), одной из самых замечательных женщин в истории науки. Даже за несколько часов до своей кончины Ольга Александровна обсуждала с одним из нас технические и научные детали будущего издания.

Мы благодарим всех, кто содействовал подготовке этой книги к печати, и прежде всего сотрудников отдела анализа и геометрии Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научное наследие А. Д. Александрова вошло в золотой фонд отечественной науки, стало неотъемлемой частью современной математики. Мы надеемся, что издание трудов первого геометра России XX в. будет способствовать сохранению и развитию науки в нашей стране.

В. А. Александров, С. С. Кутателадзе, Ю. Г. Решетняк

Первый геометр России XX века

Ю. Ф. Борисов, В. А. Залгаллер, С. С. Кутателадзе,
О. А. Ладыженская, *А. В. Погорелов*, *Ю. Г. Решетняк*

Первым геометром России XIX в. был Николай Иванович Лобачевский. Первым геометром России XX в. стал Александр Данилович Александров.

А. Д. Александров родился 4 августа 1912 г. в деревне Волыни бывшей Рязанской губернии. Его родители были учителями средней школы. В 1929 г. он поступил на физический факультет Ленинградского университета, который окончил в 1933 г.

В 1935 г. Александр Данилович защитил кандидатскую, а в 1937 г. — докторскую диссертацию. В 1946 г. он был избран членом-корреспондентом, а в 1964 г. — действительным членом Академии наук СССР.

С 1952 по 1964 г. А. Д. Александров — ректор Ленинградского университета.

В 1964 г. Александр Данилович переехал в Новосибирск, где до 1986 г. возглавлял один из отделов Института математики Сибирского отделения Академии наук, который теперь носит имя своего основателя — С. Л. Соболева. В те же годы А. Д. Александров преподавал в Новосибирском государственном университете.

С апреля 1986 г. до конца жизни А. Д. Александров работал в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова.

Александр Данилович Александров скончался 27 июля 1999 г. в Санкт-Петербурге, где и похоронен на Богословском кладбище.

Учителями Александра Даниловича были Борис Николаевич Делоне (1890–1980) — выдающийся геометр и алгебраист и Владимир Александрович Фок (1898–1974) — один из крупнейших физиков прошлого века.

Первые научные работы А. Д. Александрова посвящены некоторым вопросам теоретической физики и математики. В дальнейшем основной его специальностью стала математика, к которой и относятся главные достижения Александра Даниловича.

А. Д. Александров — автор около 300 опубликованных статей, многих монографий и учебников. Основным направлением научной деятельности Александра Даниловича была геометрия. В этой области он создал большую научную школу. Среди его учеников много достойных ученых, а двое из них — А. В. Погорелов и Ю. Г. Решетняк — стали действительными членами Российской академии наук.

Научные интересы Александра Даниловича охватывали обширный круг вопросов, включая геометрию выпуклых тел, теорию меры, теорию дифференциальных уравнений в частных производных и математические основания теории относительности.

В работах Александрова получила развитие теория смешанных объемов выпуклых тел. Он доказал фундаментальные теоремы о выпуклых многогранниках, стоящие в одном ряду с теоремами Эйлера и Коши. В частности, в связи с решением проблемы Вейля А. Д. Александров разработал новый метод доказательства теорем существования. Результаты этого цикла работ поставили имя Александрова в один ряд с именами Евклида и О. Коши.

Одно из основных достижений Александра Даниловича Александрова в геометрии — создание теории двумерных многообразий ограниченной кривизны, или, что то же самое, внутренней геометрии нерегулярных поверхностей. В связи с этой теорией он разработал удивительный по силе и наглядности метод разрезывания и склеивания, который оказался весьма эффективным в теории изгибания выпуклых поверхностей. Используя этот метод, А. Д. Александров получил решение целого ряда экстремальных задач для многообразий ограниченной кривизны.

Александр Данилович построил теорию метрических пространств с односторонними ограничениями на кривизну. Этот класс пространств представляет собой в настоящее время единственный известный класс метрических пространств, которые можно рассматривать как обобщенные римановы пространства в том смысле, что в них появляется центральное для римановой геометрии понятие кривизны.

В работах А. Д. Александрова по теории двумерных многообразий ограниченной кривизны и теории пространств с односторонними ограничениями на кривизну дано развитие геометрической концепции пространства в продолжение традиции, идущей от Н. И. Лобачевского, К. Ф. Гаусса, Б. Римана, А. Пуанкаре и Э. Картана.

Исследования по теории выпуклых тел привели Александра Даниловича к проблематике общей теории меры. В частности, он осуществил глубокое исследование слабой сходимости функций множеств. Его результаты в этой области включаются в руководства по функциональному анализу и находят неожиданные применения как в геометрии, так и в теории вероятностей. А. Д. Александров является одним из авторов теории нерегулярных кривых, в которой нашли свое продолжение и развитие идеи классиков геометрии — К. Жордана, Дж. Пеано и др.

Работы А. Д. Александрова по дифференциальным уравнениям имели своим истоком его исследования по теоремам существования и единственности в теории выпуклых тел. По существу, в этих работах возникает понятие обобщенного решения уравнения в частных производных и притом для случая трудных нелинейных задач. Александр Данилович Александров заложил основы геометрической теории уравнений типа Монжа — Ампера. Он развил геометрический подход к принципу максимума в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Его исследования по этим вопросам на много лет опередили аналогичные исследования специалистов по дифференциальным уравнениям.

А. Д. Александров решил вопрос о линейности отображений, сохраняющих конусы в пространстве специальной теории относительности. Эта работа переоткрывалась физиками разных стран с опозданием на десятилетия. Она дала начало исследованиям по хроногеометрии.

Вопросы методологии и истории науки, проблемы преподавания занимали важное место среди интересов Александра Даниловича. Ему принадлежит обширная, неизменно актуальная и острая научная публицистика. Статьи А. Д. Александрова о содержании и роли математики используются преподавателями философии и истории науки. Нашли свое место в практике школьного преподавания и его учебники по курсу геометрии.

В задачу геометрии входит изучение абстрактных наглядных форм: кривых, поверхностей, римановых и других многообразий, наделенных теми или иными дополнительными структурами. В рамках дифференциальной геометрии был разработан мощный аналитический аппарат, приспособленный для исследования и описания главным образом локальных свойств геометрических образов.

К началу прошлого века в теории поверхностей возникло большое число задач, касающихся соотношений между всевозможными величинами, характеризующими строение геометрических образов «в целом». Классические методы дифференциальной геометрии не давали подходов к этим задачам без ограничительных предположений гладкости. Усилиями таких выдающихся математиков, как Я. Штейнер, Д. Гильберт, Г. Минковский, Г. Либман, Г. Вейль, С. Кон-Фоссен, были получены только отдельные результаты геометрии «в целом». Вместе с тем работы этих геометров содержали постановки ряда нерешенных проблем, определивших развитие геометрии «в целом» на многие десятилетия.

Сейчас основные из этих проблем решены. Большая заслуга в этом принадлежит самому А. Д. Александрову и его прямым ученикам. Их усилиями геометрия «в целом» обогатилась многими плодотворными идеями и методами. Созданная А. Д. Александровым научная школа заняла ведущее положение в мире в области геометрии «в целом». Во всей современной дифференциальной геометрии в соответствии с прогнозом, сделанным Александром Даниловичем еще в 1948 г. в ходе дискуссии об учебниках по дифференциальной геометрии, на передний план вышли задачи, касающиеся именно строения дифференциально-геометрических объектов «в целом».

А. Д. Александрову принадлежат фундаментальные результаты в теории выпуклых тел. Развивая классические исследования Г. Минковского, Александр Данилович установил новые неравенства для смешанных объемов выпуклых тел. Попутно им были найдены аналогичные алгебраические неравенства для матриц, которые спустя 40 лет получили совершенно неожиданное применение к решению известной, поставленной еще в 1926 г., проблемы Ван дер Вардена об оценке перманента. Неравенства Александрова для смешанных объемов в настоящее время нашли интересные обобщения и приложения также в алгебраической геометрии и теории нелинейных эллиптических уравнений, а понятие о смешанных объемах проникло даже в теорию случайных процессов.

Одновременно А. Д. Александров ввел в теорию выпуклых тел аппарат теории меры и функционального анализа, предложив рассматривать функциональное пространство, порожденное опорными функциями, и специальные меры над ним — «поверхностные функции» и родственные «функции кривизны». Он доказал теоремы единственности с точностью до переноса выпуклого тела с заданной функцией кривизны, охватившие как частные случаи известные ранее теоремы Кристоффеля и Минковского. При этом Александр Данилович определил обобщенные дифференциальные уравнения в мерах и соответствующие обобщенные решения.

Достижения Александра Даниловича в теории выпуклых многогранников, полученные в середине прошлого века, и сегодня производят большое впечатление силой и законченностью результатов и красотой применяемых методов. Он предложил общие методы доказательства теорем существования и единственности выпуклых многогранников и поверхностей, удовлетворяющих тем или иным условиям. На их основе А. Д. Александров получил большое число конкретных результатов. Наиболее замечательным из них является принадлежащее ему решение проблемы Вейля, поставленной последним еще в 1918 г. Проблема Вейля состоит в том, чтобы доказать, что всякое двумерное риманово многообразие положительной кривизны, гомеоморфное сфере, изометрично замкнутой выпуклой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Решение, найденное Александром Даниловичем, давало ответ на вопрос в значительно более общей ситуации, чем та, которую требовалось рассмотреть первоначально. Способ решения, указанный Г. Вейлем (но не доведенный им до конца), основан на сведéнии рассматриваемой проблемы к некоторой задаче для дифференциальных уравнений. В противоположность этому примененные А. Д. Александровым методы — чисто геометрические.

А. Д. Александровым был рассмотрен сначала аналог проблемы Вейля для многогранников. В этом случае получается задача о существовании выпуклого многогранника с заранее заданной разверткой, удовлетворяющей некоторым простым необходимым условиям (условия эти состоят в том, что, во-первых, при склеивании многоугольников развертки должно получаться многообразие, гомеоморфное сфере, и, во-вторых, сумма углов при каждой вершине развертки должна быть не больше 2π). На поверхности выпуклого многогранника возникает внутренняя метрика, в которой за расстояние между двумя точками принимается точная нижняя граница длин кривых, соединяющих эти точки.

Аналогично вводится метрика и на произвольной абстрактно заданной развертке. Разрезая произвольным образом поверхность выпуклого многогранника на многоугольники, мы получим различные развертки, которые все изометричны друг другу. Для многогранников проблема Вейля превращается в конечномерную задачу. Имеются два множества — множество M_n выпуклых многогранников с n вершинами и множество Q_n разверток, имеющих n вершин и удовлетворяющих указанным выше условиям. Две изометричные развертки при этом рассматриваются как одна и та же. На каждом из этих множеств вводится естественным образом топология, в силу которой M_n и Q_n становятся многообразиями размерности $3n-6$. Более того, M_n и Q_n можно считать даже дифференцируемыми многообразиями. Сопоставляя каждому выпуклому многограннику P его развертку S, получим отображение $\varphi : M_n \to Q_n$.

Задача состоит в том, чтобы доказать, что $\varphi(M_n) = Q_n$. Для этого достаточно показать, что справедливы следующие утверждения: (А) множество $\varphi(M_n)$ открыто в Q_n; (Б) каждая связная компонента пространства Q_n содержит элемент множества $\varphi(M_n)$; (В) множество $\varphi(M_n)$ замкнуто в Q_n.

Утверждение (В) доказывается сравнительно просто. Оно означает, что если развертка $S_0 \in Q_n$ есть предел разверток S_m, $m = 1, 2, \ldots$, каждая из которых реализуется как поверхность подходящего выпуклого многогранника, то и развертка S_0 является в этом же смысле реализуемой. Основная трудность заключается в утверждении (А). Александр Данилович указал два различных его доказательства. Одно основывается на теореме Брауэра об инвариантности области. Предварительно устанавливается, что отображение φ непрерывно (что почти очевидно) и взаимно однозначно. Взаимная однозначность φ следует из того, что если поверхности двух выпуклых многогранников изометричны, то они могут быть совмещены движением. (Последнее утверждение, доказанное также А. Д. Александровым, представляет собой усиление классической теоремы Коши, согласно которой два выпуклых многогранника, одинаково составленные из соответственно равных граней, конгруэнтны.) Непрерывность и взаимная однозначность φ обеспечивают его топологичность. Теорема Брауэра теперь позволяет заключить, что $\varphi(M_n)$ — открытое подмножество в Q_n. Другое доказательство предложения (А), также указанное А. Д. Александровым, основано на том, что отображение φ дифференцируемо и якобиан его всюду отличен от нуля. Последнее свойство отображения φ геометрически есть не что иное, как некоторая теорема о жесткости выпуклых многогранников. Доказательство утверждения (Б), так же как и того факта, что множество Q_n есть $(3n-6)$-мерное многообразие, составляет емкую в техническом отношении отдельную часть доказательства.

Решение проблемы Вейля для общего случая получается из теоремы А. Д. Александрова для многогранников путем приближения римановых метрик многогранниками и последующим предельным переходом.

План доказательства самого Г. Вейля был доведен до конца Г. Леви в 1938 г. средствами теории аналитических функций, при этом Г. Вейль и Г. Леви рассматривали только задачу о реализации аналитической римановой метрики. Александр Данилович сделал несравненно больше: он отказался не только от аналитичности, но даже от гладкости метрики. На принятом сейчас в теории дифференциальных уравнений языке, он ввел и разработал в этой сугубо нелинейной задаче теорию ее обобщенных решений — и это в то время, когда такой подход в самой теории дифференциальных уравнений с частными производными обретал права гражданства еще только в задачах вариационного исчисления.

А. Д. Александров получил нетривиальные обобщения своих результатов по проблеме Вейля для случая пространства Лобачевского и сферического пространства. Позднее важного продвижения в этой теме добился А. В. Погорелов. Он установил теоремы о связи между степенью гладкости выпуклой поверхности и ее внутренней метрики, а также получил обобщение теоремы А. Д. Александрова, касающееся погружения римановой метрики в риманово пространство ограниченной сверху кривизны.

Работы А. Д. Александрова по проблеме Вейля положили начало многочисленным исследованиям по теории изгибаний выпуклых поверхностей, в числе которых следует назвать прежде всего работы самого А. Д. Александрова, а также С. П. Оловянишникова, А. В. Погорелова, и стимулировали другие подходы к теории изгибаний в работах Н. В. Ефимова, И. Н. Векуа и их учеников. Созданный Александром Даниловичем на основе его теорем существования метод разрезывания и склеивания поразительно изменил всю теорию изгибаний. Кроме того, эти работы Александра Даниловича послужили источником целого нового направления в современной геометрии, называемого теорией нерегулярных римановых пространств. Создателем этого направления и автором наиболее значительных из относящихся к нему результатов по праву считается Александр Данилович Александров.

Полученное им решение проблемы Вейля основывается на приближении римановой метрики положительной кривизны многогранными метриками положительной кривизны. Естественно, возникает вопрос, какие вообще метрики допускают подобного рода приближения. Александр Данилович дал полный ответ на этот вопрос. Он ввел понятие двумерного многообразия с метрикой положительной кривизны и детально исследовал свойства таких многообразий.

Многочисленные результаты А. Д. Александрова, посвященные этому предмету, собраны в его книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», вышедшей в 1948 г. Для двумерных многообразий с метрикой положительной кривизны определены такие понятия, как кратчайшая, угол между кривыми, площадь множества. Кроме того, для них определена еще некоторая неотрицательная вполне аддитивная функция множеств, называемая кривизной.

В частности, когда данное многообразие римановo (класса C^2), эта функция множеств совпадает с интегралом от гауссовой кривизны по площади. В общем случае кривизна может не быть абсолютно непрерывной относительно площади функцией и даже быть сосредоточенной в изолированных точках и на линиях. Например, для поверхности прямого кругового конуса кривизна сосредоточена на множестве, состоящем из его вершины и окружности основания конуса.

Среди прочих результатов А. Д. Александрова, относящихся к геометрии многообразий положительной кривизны, отметим следующую замечательную теорему.

Пусть дан треугольник на выпуклой поверхности, образованный кратчайшими, соединяющими три точки X, Y, Z. На евклидовой плоскости построим треугольник $X'Y'Z'$ с теми же длинами сторон. Оказывается, что углы при вершинах этого плоского треугольника порознь не превосходят соответствующих углов исходного треугольника на выпуклой поверхности.

Этот факт ранее не был известен даже для двумерных римановых пространств положительной кривизны. Обобщение данной теоремы (в литературе именуемой обычно теоремой сравнения А. Д. Александрова) на случай римановых пространств положительной кривизны произвольной размерности, полученное В. А. Топоноговым, сыграло важную роль и способствовало прогрессу, достигнутому в последние годы при изучении строения таких пространств «в целом». Эти результаты послужили образцом и одним из толчков для целого ряда теорем сравнения, полученных в современной римановой геометрии «в целом».

После построения теории двумерных многообразий положительной кривизны возникла задача рассмотрения многообразий, у которых кривизна является вполне аддитивной функцией множеств произвольного знака. Теория таких многообразий, получивших наименование двумерных многообразий ограниченной кривизны, была в основном построена А. Д. Александровым еще в начале 1950-х годов. Ее полное изложение дано в 1962 г. в монографии «Двумерные многообразия ограниченной кривизны», написанной совместно с В. А. Залгаллером.

Александр Данилович предложил два различных по подходу определения двумерных многообразий ограниченной кривизны: аксиоматическое и конструктивное, основанное на приближении многообразий ограниченной кривизны многогранниками. А. Д. Александров доказал эквивалентность этих определений. Мы приведем только второе из них.

Пусть M — двумерное многообразие, наделенное метрикой ρ, причем метрика ρ внутренняя, т. е. для любых двух точек X, $Y \in M$ величина $\rho(X, Y)$ равна точной нижней границе длин спрямляемых кривых, соединяющих эти точки. Для всякой области $G \subset M$ естественно определяется метрика ρ_G, где $\rho_G(X, Y)$ есть точная нижняя граница длин кривых, лежащих в области G и соединяющих точки X и Y. Говорят, что ρ_G есть индуцированная метрика области G.

Кривую в M называют кратчайшей, если ее длина равна расстоянию между ее концами. Для любых двух достаточно близких точек существует соединяющая их кратчайшая. Многообразие M, наделенное внутренней метрикой ρ, является локально плоским, если каждая его точка X имеет окрестность U, которая (в метрике ρ) изометрична кругу $x^2 + y^2 < \delta^2$ на обычной евклидовой плоскости. Многообразие M называется многогранником, если можно указать такое конечное его подмножество $H = \{A_1, \ldots, A_k\}$, что множество $M \backslash H$ будет локально плоским. Точки $A_1, \ldots, A_k$ — это вершины многогранника. Метрику ρ, заданную на двумерном многообразии M, именуют многогранной, если она внутренняя и многообразие M, наделенное метрикой ρ, является многогранником. Каждой вершине $A \in M$ может быть сопоставлено некоторое число $\theta(A)$ — полный угол при вершине. Это число определяется следующим образом.

Достаточно малая окрестность точки A кратчайшими, исходящими из точки A, может быть разделена на конечное число областей, граница каждой из которых (в индуцированной метрике) изометрична плоскому треугольнику. Тогда $\theta(A)$ равно сумме углов этих плоских треугольников в точке A. (Легко устанавливается, что эта сумма не зависит от выбора окрестности и ее разбиения.) Всегда $\theta(A) > 0$. Если $\omega(A) \equiv 2\pi - \theta(A) = 0$, то некоторая окрестность точки A изометрична кругу на плоскости, так что величину $\omega(A)$ можно рассматривать как некоторую меру неевклидовости многогранника в окрестности точки A. В соответствии с этим $\omega(A)$ называется кривизной в вершине A.

Обозначим через $\omega(E)$ сумму кривизн всех вершин многогранника M, принадлежащих множеству $E \subset M$, а через $|\omega|(E)$ — сумму абсолютных величин кривизн этих вершин. Величина $\omega(E)$ называется кривизной, а $|\omega|(E)$ — абсолютной кривизной множества E. Двумерное многообразие M с внутренней метрикой ρ является двумерным многообразием ограниченной кривизны, если для всякой его точки A можно указать окрестность U и последовательность многогранных метрик ρ_n, $n = 1, 2, \dots$, в U, сходящуюся равномерно к метрике ρ и такую, что последовательность $|\omega_n|(U)$, $n = 1, 2, \dots$, ограничена (ω_n — кривизна в метрике ρ_n).

Двумерное риманово многообразие, метрика которого определяется линейным элементом $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, где функции E, F и G удовлетворяют требованиям гладкости, необходимым для того, чтобы можно было определить гауссову кривизну в точке (достаточно считать, что E, F, $G \in C^2$), является частным случаем двумерного многообразия ограниченной кривизны. Другой частный случай — многообразия с многогранной метрикой.

Фундаментальные понятия классической двумерной римановой геометрии, такие как длина кривой, кривизна кривой, геодезическая, площадь множества, кривизна многообразия, имеют аналог в общем случае двумерных многообразий ограниченной кривизны. (При этом вместо кривизны кривой в ее точках рассматривается поворот кривой — величина, в регулярном случае равная интегралу кривизны по длине дуги, а вместо кривизны самого многообразия в точке — некоторая функция множеств, аналог интеграла от кривизны.) А. Д. Александрову принадлежит большое число конкретных результатов теории двумерных многообразий ограниченной кривизны, многие из которых являются новыми и для двумерных римановых многообразий. Им развит аппарат, позволяющий свободно ориентироваться в этой теории. Это функции множеств (кривизны множеств и односторонние повороты участков кривых) и теоремы сравнения. Другим столь же эффективным аппаратом оказался обобщенный изотермический линейный элемент, введенный для таких пространств учеником А. Д. Александрова — Ю. Г. Решетняком. Появилась некоторая неожиданная область приложений многообразий ограниченной кривизны в теории мероморфных функций.

Таким образом, класс двумерных римановых многообразий получил допускающую исследование компактификацию при сохранении структуры многообразия и ограниченности интегральной кривизны. Это позволило Александру Даниловичу и его ученикам дать исчерпывающее решение большого числа экстремальных задач теории поверхностей. В регулярном случае многие из этих задач просто не имели решений, так как экстремум реализовался на нерегулярных объектах. Примером может служить решенная А. Д. Александровым задача о нахождении поверхности наибольшей площади среди гомеоморфных кругу поверхностей с данным периметром, у которых положительная часть кривизны $\omega^+(S)$ (т. е. верхняя вариация функции множеств ω) не превосходит данного числа $\eta > 0$. В случае $\eta \geq 2\pi$ задача не имеет решения, а в случае $\eta < 2\pi$ ее решением является боковая поверхность прямого кругового конуса, у которого полный угол при вершине конуса равен $2\pi - \eta$. (Если разрезать ее по образующей конуса, то полученная поверхность развертывается в плоскость так, что в результате получается круговой сектор с углом, равным $2\pi - \eta$.)

Доказательство этой теоремы в общих чертах таково. Достаточно рассмотреть случай, когда многообразие есть многогранник. Многогранник S с данным периметром и $\omega^+(S) \leq \eta < 2\pi$ последовательно преобразуется так, что площадь его возрастает, а кривизна в конечном итоге оказывается сосредоточенной в одной точке. Каждый отдельный шаг преобразования состоит в разрезывании и вклеивании в разрез некоторого многогранника.

Аналогичного рода приемы оказываются полезными и в других вопросах геометрии многообразий ограниченной кривизны. В совокупности они и составляют метод разрезывания и склеивания А. Д. Александрова.

Исследованию двумерных многообразий ограниченной кривизны посвящено большое число работ других авторов, в основном учеников А. Д. Александрова. В частности, вопросы теории многообразий ограниченной кривизны рассматривались Ю. Ф. Борисовым, Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллером, Ю. Г. Решетняком, В. В. Стрельцовым и др. Одна из задач, возникших в теории многообразий ограниченной кривизны, — указание классов двумерных поверхностей, определенных естественными условиями, которые по своей внутренней геометрии были бы многообразиями такого рода. В этом плане некоторые важные результаты получены Александром Даниловичем, который доказал, что если поверхность определяется уравнением $z = f(x, y)$, где f есть разность двух выпуклых функций, то она есть двумерное многообразие ограниченной кривизны. (Другие классы поверхностей, обладающих тем же свойством, указаны А. В. Погореловым, Ю. Д. Бураго и др.)

Следует сказать, что в изучении внешней геометрии нерегулярных поверхностей с метрикой ограниченной кривизны по А. Д. Александрову имеется много нерешенных вопросов и в целом эта область исследования далека от завершения. (Этот круг вопросов породил интересное новое направление в теории погруженных многообразий, развитое С. З. Шефелем.)

Теория многообразий ограниченной кривизны, построенная А. Д. Александровым, является двумерной. Задача построения ее многомерного аналога представляется достаточно трудной. Наиболее существенное продвижение в ее решении принадлежит Александру Даниловичу. Частным случаем двумерных многообразий ограниченной кривизны являются многообразия кривизны, ограниченной снизу или сверху некоторым числом K_0. (В регулярном случае это римановы многообразия, у которых гауссова кривизна $K(X)$ либо не превосходит K_0 в каждой точке X, либо для всех X не меньше K_0.) А. Д. Александров показал, что такие многообразия могут быть описаны системой аксиом, в которой двумерность многообразия не используется. Это позволяет ввести общее понятие метрического пространства односторонне ограниченной кривизны, топология которого удовлетворяет достаточно слабым (с точки зрения дифференциальных геометров) условиям. Такое пространство может вообще не быть многообразием. Александр Данилович детально исследовал пространства кривизны, не превосходящей $K_0 < \infty$.

Эти работы были продолжены и развиты другими сибирскими геометрами, учениками и последователями А. Д. Александрова. В частности, ими решена задача об аксиоматическом построении классической римановой геометрии; именно И. Г. Николаев и В. Н. Берестовский доказали следующее. Пространство с внутренней метрикой, являющееся n-мерным многообразием с ограниченной кривизной в смысле Александрова, представляет собой риманово пространство, столь гладкое, что для него справедлива классическая теория кривизны.

В дифференциальной геометрии и теории выпуклых тел хорошо известны теоремы единственности, устанавливающие равенство (в том или ином смысле) геометрических объектов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Такого рода результаты были получены в свое время О. Коши, Дж. Лиувиллем и другими выдающимися математиками.

Теоремы единственности, как и теоремы существования, занимают большое место в научном творчестве А. Д. Александрова. Этой теме посвящен цикл его работ, выполненных в 1956–1966 гг. Основным инструментом исследования этого цикла служили теоремы о решениях дифференциальных уравнений эллиптического типа в сочетании с разного рода соображениями геометрического характера. Чтобы дать представление об указанных работах Александра Даниловича, приведем следующую его теорему.

Теорема А. *Пусть S и S_0 — аналитические замкнутые выпуклые поверхности и $k_1 \geq k_2$, $k_{01} \geq k_{02}$ — их главные кривизны в точках $x \in S$, $x_0 \in S_0$ с параллельными нормалями. Пусть $f(\xi, \eta, \bar{n})$ — такая функция численных параметров ξ, η и единичного вектора $\bar{n}$, что при $\xi > \xi'$ и $\eta > \eta'$ имеет место $f(\xi, \eta, \bar{n}) > f(\xi', \eta', \bar{n})$. Тогда если для всякой $x \in S$ выполняется $f(k_1, k_2, \bar{n}) = f(k_{01}, k_{02}, \bar{n})$, где $\bar{n}$ — нормаль в точке $\bar{x}$, то поверхности S и S_0 совмещаются параллельным переносом.*

Теорема А в этой формулировке доказана Александром Даниловичем в 1938 г. Естественно было предположить, что требование аналитичности в ней может быть заменено каким-либо более слабым. А. Д. Александров получил также некоторый аналог теоремы А для выпуклых многогранников — доказательство его основывается на идее, близкой к той, на которой основано доказательство теоремы Коши о равенстве многогранников.

Другой естественный вопрос: существует ли какой-либо аналог теоремы А для поверхностей в n-мерном пространстве в случае $n > 3$?

В отношении теоремы А А. В. Погорелов показал, что требование аналитичности поверхностей может быть снижено до четырехкратной дифференцируемости. (Относительно функции f предполагается, что она принадлежит классу C^1, причем $\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \eta} > 0$ всюду в области определения.) Александр Данилович обратился к этим вопросам в исследованиях, выполненных в 1956–1966 гг. В 1956 г. он доказал, что (при таких же предположениях относительно f) требование аналитичности может быть заменено двукратной дифференцируемостью, а в 1966 г. — что если S и S_0 — аналитические поверхности, гомеоморфные сфере, то от условия выпуклости S можно вообще отказаться.

А. Д. Александров доказал большое число теорем для выпуклых поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве при произвольном $n \geq 3$, для поверхностей в общих римановых пространствах и пространствах постоянной кривизны, по своей формулировке аналогичных теореме А, хотя буквальный перенос теоремы А на многомерный случай, по-видимому, невозможен.

В качестве приложения теорем единственности Александр Данилович получил общие теоремы о характеристическом свойстве $(n-1)$-мерной сферы. Именно, если на поверхности S, служащей границей тела в E^n, выполняется соотношение $\Phi(k_1, \ldots, k_{n-1}) = \text{const}$, где $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_{n-1}$ — главные кривизны в точке поверхности, а функция Φ такова, что производные $\partial\Phi/\partial k_i$ непрерывны и имеют один знак для любых $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, то S является сферой. В частности, замкнутая поверхность постоянной средней кривизны в трехмерном пространстве, не имеющая самопересечений, есть сфера. (На языке физики это означает, что не существует мыльного пузыря, который не имел бы форму шара.)

К вопросам единственности примыкают проблемы оценок изменения объекта при малом изменении однозначно определяющих его характеристик. И здесь А. Д. Александрову принадлежат новые методы и результаты. Трудная проблема Кон-Фоссена об оценке изменения формы замкнутой выпуклой поверхности при малом изменении ее внутренней метрики была решена учеником А. Д. Александрова — Ю. А. Волковым.

А. Д. Александров стал создателем нового направления в теории дифференциальных уравнений эллиптического типа — геометрической теории уравнений эллиптического типа.

Мы приведем очень краткий обзор результатов исследований А. Д. Александрова по дифференциальным уравнениям, выполненных в период с 1956 по 1965 г. Это прежде всего теоремы о существовании обобщенных решений первой краевой задачи для уравнений типа Монжа — Ампера, а именно уравнений вида

$$f(\nabla z, z, x)\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = h(x), \tag{1}$$

где f и h — неотрицательные функции. Решение ищется в классе выпуклых функций. Это естественно, ибо только на таких функциях (1) эллиптично.

Уравнение (1) позволяет по каждой выпуклой функции z построить две функции множеств, обозначаемые через $\omega_f(M, z)$ и $\nu(M)$. При этом

$$\nu(M) = \int\limits_M h(x)dx,$$

так что ν определяется функцией h. В регулярном случае (а именно при $z \in C^2$)

$$\omega_f(M, z) = \int\limits_M f(\nabla z(x), z(x), x)\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) dx.$$

В общем случае функция $\omega_f(M, z)$ определяется с помощью понятия нормального отображения, которое вводится так. Предположим, что $z = z(x)$ — выпуклая функция, заданная в замкнутой выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Вектор $\zeta(x) = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ называется обобщенным градиентом функции z в точке x_0, если гиперплоскость $z = \langle \zeta, x - x_0 \rangle + z(x_0)$ является опорной для гиперповерхности $S = \{(x, z) | z = z(x)\}$. Если функция z дифференцируема в точке x_0, то ее обобщенный градиент в этой точке, разумеется, совпадает с обычным. Сопоставляя каждой точке $x \in \Omega$ все векторы, являющиеся обобщенными градиентами функции z в этой точке, получим некоторое, вообще говоря, многозначное отображение φ области Ω в $\mathbb{R}^n$, которое и называется нормальным отображением. Пусть $E = \varphi(\Omega)$. Для каждой точки $\zeta \in E$ существует точка $(x, z) \in S$ такая, что ζ есть обобщенный градиент в точке x. Полагаем $x = x(\zeta)$, $z = z(\zeta)$. Функция $\omega_f(M, z)$ определяется равенством

$$\omega_f(M, z) = \int\limits_{\varphi(M)} f(\zeta, z(\zeta), x(\zeta))d\zeta.$$

Александр Данилович рассматривал следующую задачу: найти выпуклую функцию z, принимающую заданные значения на границе $\partial\Omega$, и такую, что функция множеств $\omega_f(M, z)$ совпадает с заранее заданной функцией множеств $\nu(M)$. Если эта функция окажется принадлежащей классу C^2, то она, очевидно, будет решением уравнения (1). В 1958 г. А. Д. Александров установил существование обобщенного решения сформулированной задачи при условии, что f и заданные граничные значения искомого решения удовлетворяют некоторым естественным ограничениям. В дальнейшем А. В. Погорелов доказал, что обобщенные решения А. Д. Александрова являются гладкими, если $f \equiv 1$ и, кроме того, $z|_{\partial\Omega}$ и h — достаточно гладкие положительные функции.

В 1950-х годах Александр Данилович разработал метод оценок сверху и снизу для функций, удовлетворяющих эллиптическим уравнениям или неравенствам 2-го порядка, но не обладающих классической гладкостью (не имеющих производных 2-го порядка в каждой точке, а принадлежащих лишь пространству $W_n^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Приведем лишь одну из этих оценок, далеко не самую общую, но позволившую существенно продвинуться в изучении квазилинейных и даже некоторого класса сугубо нелинейных задач эллиптического типа. Она имеет вид

$$\max_{x\in\Omega} z(x) \le \max_{x\in\partial\Omega} z(x) + C_1 \operatorname{diam}\Omega e^{C_2\|b\|_{n,\Omega}} \|Lz(x)_-\|_{n,\Omega}. \tag{2}$$

Здесь $Lz(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) z_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) z_{x_i}(x)$; $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge 0$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$; C_1 и C_2 — постоянные, зависящие только от n; Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а $z \in W_n^2(\Omega)$. Полунорма $\|\cdot\|_{n,\Omega}$ вычисляется по правилу

$$\|\nu\|_{n,\Omega} = \left(\int_\Omega |\nu(x)|^n (\operatorname{Det}(a_{ij}(x)))^{-1} dx\right)^{1/n},$$

а $\nu_-(x) = \max\{0, -\nu(x)\}$. Неравенство (2) замечательно во многих отношениях (в том числе характером зависимости от Ω), и его чисто аналитическое доказательство представляется маловероятным.

Поясним на простейшем примере основную идею метода А. Д. Александрова доказательства неравенства (2). Пусть $z(x)$ — решение уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(x) = f(x) \tag{3}$$

в области G пространства $\mathbb{R}^n$, где функции $a_{ij}(x)$ таковы, что собственные числа квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

лежат в некотором интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, где $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \infty$ для всех $x \in G$. Предположим, что область G выпукла, $z(x) = 0$ на границе, и требуется оценить $\min z(x)$. Пусть $\Gamma_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in G,\ y \geq z(x)\}$ — надграфик функции z, а V_z — выпуклая оболочка Γ_z. Множество V_z ограничено снизу поверхностью $y = \widetilde{z}(x)$. При этом $z(x) \geq \widetilde{z}(x)$ для всех $x \in G$ и функция $\widetilde{z}(x)$ выпукла. Предположим, что функция $z(x)$ достигает минимума в точке $x_0 \in G$. Построим еще выпуклый конус K в $\mathbb{R}^{n+1}$, образованный отрезками, соединяющими точку $(x_0, z(x_0))$ с граничными точками G. Если $z(x_0)$ велико́ по абсолютной величине, то конус K оказывается сильно вытянутым и его опорное сферическое изображение будет велико́. С другой стороны, ясно, что опорное изображение K содержится в опорном изображении поверхности $z = \widetilde{z}(x)$. Последнее, однако, не может быть слишком большим по следующей причине. При вычислении опорного изображения поверхности $z = \widetilde{z}(x)$ достаточно принимать во внимание только те точки, где $\widetilde{z}(x) = z(x)$. Они являются точками выпуклости функции $z(x)$, и, значит, в них квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} z_{ij}\xi_i\xi_j$, где $z_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$, неотрицательна. В силу неотрицательности этой формы получаем, что в точках, где $\widetilde{z}(x) = z(x)$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_{ij} \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} z_{ii} \geq n\lambda_1 (\operatorname{Det}(z_{ij}))^{1/n}. \tag{4}$$

Из (4) вытекает, что опорное изображение поверхности $z = \widetilde{z}(x)$ не превосходит

$$\frac{1}{(n\lambda_1)^n} \int\limits_G (f(x))^n dx. \tag{5}$$

Мы видим, таким образом, что конус K не может быть сколь угодно длинным, ибо площадь его нормального изображения не превосходит величину (5). Нетрудно получить и явную оценку высоты конуса K. Это дает оценку для величины

$$|z(x_0)| = |\min_{x \in G} z(x)|.$$

Все сделанные заключения заведомо справедливы для функций z, принадлежащих классу $W_n^2(G)$, т. е. имеющих обобщенные вторые производные, суммируемые в степени n.

Нет возможности описать в одной статье все то новое и ценное, что было сделано Александром Даниловичем в работах указанного цикла. Многое из этого еще ожидает своего потребителя и, несомненно, несет богатые плоды. Примером тому может служить неравенство (2), способствовавшее прогрессу в исследовании нелинейных эллиптических уравнений, достигнутому в работах О. А. Ладыженской, Н. В. Крылова, М. В. Сафонова, Н. Н. Уральцевой и др. Аналоги этого неравенства для параболических операторов, доказанные Н. В. Крыловым, Н. Н. Уральцевой и А. И. Назаровым, стали важным событием в изучении квазилинейных параболических уравнений.

В 1970-е годы научные интересы А. Д. Александрова были связаны главным образом с геометрическими вопросами оснований теории относительности. Начало этим исследованиям было положено в его работе, выполненной еще в 1953 г. совместно с В. В. Овчинниковой. К теории относительности Александр Данилович регулярно обращался в разные периоды своей жизни. Продолжению и развитию его идей в этой области посвящены работы учеников А. Д. Александрова — Ю. Ф. Борисова, А. К. Гуца, А. В. Кузьминых, А. В. Левичева, Р. И. Пименова и А. В. Шайденко.

Геометрически пространство-время, т. е. совокупность всех событий, происходящих в физическом мире, можно рассматривать как четырехмерное аффинное пространство с введенным в нем отношением порядка, когда событие x предшествует событию y, если x может воздействовать на y. Для каждой точки x определено множество K_x — совокупность всех событий, следующих за x. В ньютоновской механике K_x — полупространство. В механике теории относительности K_x — прямой круговой конус с вершиной x и конусы K_x, соответствующие разным точкам x, получаются один из другого параллельными переносами. Взаимно однозначное преобразование четырехмерного пространства, сохраняющее отношение порядка специальной теории относительности, является лоренцевым. В физике этот факт доказывается в предположении гладкости преобразования. Из работы А. Д. Александрова и В. В. Овчинниковой, опубликованной в 1953 г., следует, что никакие условия гладкости на самом деле не нужны.

Александр Данилович ввел общее понятие кинематики, т. е. упорядоченного топологического пространства, в котором отношение порядка должным образом согласовано с топологией. Задача состоит в описании минимальных условий (аксиом), при которых данная кинематика является кинематикой специальной теории относительности.

А. Д. Александров внес большой вклад и в теорию функций действительной переменной. Это связано с его установкой на исследование нерегулярных геометрических образов, распространение на такие образы некоторых основных концепций дифференциальной геометрии.

Один из результатов Александра Даниловича, относящихся к теории функций действительной переменной, — классическая теорема о двукратной дифференцируемости почти всюду выпуклой функции n переменных. Но наиболее значительным его достижением в этой области являются работы по абстрактной теории функций множеств. Исследование различных вполне аддитивных функций множеств, естественным образом возникающих в теории выпуклых тел, явилось для него стимулом для изучения общих вопросов теории меры в самой абстрактной форме.

К основным результатам А. Д. Александрова в этой области относится теорема об общем виде линейного функционала в пространстве $C(X)$ ограниченных непрерывных функций в нормальном топологическом пространстве X. Александр Данилович рассматривал пространства несколько более общие, чем традиционно принятые в общей топологии. Согласно теореме Рисса, всякий непрерывный линейный функционал в $C[a, b]$ представляется интегралом Стилтьеса. А. А. Марков доказал, что если X — компактное топологическое пространство, то всякий линейный функционал в $C(X)$ представляется интегралом относительно вполне аддитивной функции множеств. Однако для некомпактных пространств теорема Маркова неверна. Александр Данилович показал, что если требование полной аддитивности заменить требованием регулярности (эквивалентным ему для случая компактных пространств), то теорема о представимости линейного функционала в виде интеграла аддитивной функции множеств остается верной и в общем случае. Другое важное достижение А. Д. Александрова в теории функций множеств — построенная им теория слабой сходимости для последовательностей таких функций. Результаты данного цикла работ Александра Даниловича составили содержание его докторской диссертации. Они широко используются в теории вероятностей и функциональном анализе.

Математические работы А. Д. Александрова при всей их глубине, оригинальности и значительности не исчерпывают его творчества.

Философские вопросы математики и теоретической физики постоянно находились в поле его интересов. Философские труды и устные выступления Александра Даниловича охватывают чрезвычайно широкий круг вопросов жизни. Не случайно преподаватели гуманитарных дисциплин на факультетах точных наук часто рекомендуют студентам читать общенаучные сочинения А. Д. Александрова. Более чем 20-летний опыт его размышлений о сущности математики был подытожен в статье «Математика и диалектика» [1]. А. Д. Александрову принадлежат также глубокие статьи по философским проблемам теории относительности и квантовой механики.

Много сил и энергии А. Д. Александров отдал воспитанию новых кадров. Общеизвестна научная щедрость Александра Даниловича не только как научного лидера, но и как непосредственного руководителя аспирантов и молодых ученых. Он всегда увлекал их, побуждая к творчеству и научному поиску. Идеи, высказанные им на лекциях и семинарах, записанные в его рабочих тетрадях, намеченные в личных разговорах, легли в основу

[1] Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 2. С. 243–263.

многих работ его учеников.

А. Д. Александров со свойственной ему отзывчивостью не мог отстраниться от одной из важнейших проблем реформы школьного образования — создания новых учебников по геометрии для средних школ. Он привлек к участию в этой работе А. Л. Вернера и опытного учителя В. И. Рыжика. Вместе они написали два пробных учебника по стереометрии, а затем в 1983 г. — учебник по геометрии для 9–10 классов, принятый для школ и классов с углубленным изучением математики. С 1981 г. Александр Данилович начал разрабатывать новую структуру учебного курса планиметрии. Сначала была опубликована серия препринтов. В 1984–1986 гг. вышли написанные совместно с А. Л. Вернером и В. И. Рыжиком соответствующие пробные учебники для 6–8 классов. Эксперимент по всему курсу завершился целой серией учебников как для обычных школ, так и для школ с углубленным изучением математики.

На протяжении 12 лет (с 1952 по 1964 г.) А. Д. Александров был ректором Ленинградского государственного университета (ЛГУ). Начинал он в трудные послевоенные годы. Сумел мобилизовать оставшиеся в университете силы, привлек хороших ученых из других мест, всячески способствовал росту молодых кадров. В результате его 12-летней деятельности на посту ректора в университете появились новые направления и школы, расширилась сеть семинаров. Кадры, выросшие в тот период, и сегодня являются ведущими наряду с новой научной сменой.

Как ректор университета А. Д. Александров активно и эффективно поддерживал университетских биологов в их борьбе с лысенковской лженаукой. Преподавание научной генетики в ЛГУ началось уже в 1950-е годы, тогда как в других университетах генетика была восстановлена в своих правах лишь в 1965 г. Это было очень непросто — достаточно вспомнить окрик Н. С. Хрущева, который квалифицировал отказ А. Д. Александрова выполнить приказ министерства о восстановлении в ЛГУ одного печально известного мракобеса от «мичуринской» биологии как проявление меньшевизма. Александр Данилович не дрогнул, и деятель не был принят на работу в ЛГУ. В то же время студенты-биологи, отчисленные из других университетов за попытки нелегально изучать генетику, получали возможность продолжить образование в ЛГУ. В октябре 1990 г. за особый вклад в сохранение и развитие генетики и селекции А. Д. Александров, единственный математик среди группы биологов, был удостоен ордена Трудового Красного Знамени. Это необычное награждение стало следствием той высокой оценки благородной деятельности Александра Даниловича, которую дало большинство ученых нашей страны.

С именем ректора А. Д. Александрова связано и становление таких новых в свое время направлений, как социология и математическая экономика, получивших в стенах ЛГУ его действенную поддержку в период гонений.

Александр Данилович имел огромный авторитет и у маститых ученых, и у молодежи. «Он руководил университетом не силой приказа, а моральным авторитетом», — отметил В. И. Смирнов в адресе, написанном по случаю ухода А. Д. Александрова с поста ректора. «Александр Данилович — совесть факультета», — сказал тогда же Д. К. Фаддеев.

25 лет жизни Александр Данилович провел в Сибири. В 1964 г. по приглашению М. А. Лаврентьева он переехал с семьей в Новосибирск, где нашел много верных друзей и учеников. Сибири А. Д. Александров отдал не только душу и сердце, но и здоровье, перенеся клещевой энцефалит.

А. Д. Александров создал большую и разветвленную научную школу. Среди его ленинградских учеников многие десятки докторов и кандидатов наук. И в Новосибирске под влиянием Александра Даниловича выросли новые доктора наук и целая плеяда молодых кандидатов-геометров. Они творчески работают во многих городах планеты.

А. Д. Александров обладал цельным научным мировоззрением, позволявшим ему глубоко анализировать философские и общественные проблемы, а также отвечать на вызовы современности на протяжении всей жизни. В основе системы своих нравственных установок он называл человечность или универсальный гуманизм, научность и ответственность. Идеалам своей юности А. Д. Александров был верен до последних дней.

Заслуги А. Д. Александрова отмечены множеством наград и отличий. За исследования по проблеме Вейля в 1942 г. он был удостоен Сталинской (Государственной) премии. В 1951 г. его работы отмечены международной Премией имени Н. И. Лобачевского. А. Д. Александров особо ценил Золотую медаль имени Л. Эйлера, присужденную ему Президиумом Российской академии наук в 1992 г.: он был первым, удостоенным этой награды.

Александру Даниловичу было свойственно неукротимое стремление добиваться высших результатов в любом деле, за которое он брался, — как в математике, так и в спорте (он был мастером спорта по альпинизму), как в философии, так и в вопросах истории науки (в Ленинградском и Новосибирском университетах он читал курс лекций по истории математики) и во многом другом. Его близкие и друзья, его ученики и товарищи по работе хорошо помнят характерную для Александра Даниловича преданность истине, его постоянную готовность поддерживать и защищать истину до конца.

Научные идеи академика А. Д. Александрова будут долго жить в трудах его учеников и последователей. Неповторимое обаяние, сочетание молодости духа и мудрости опыта, яростный темперамент и тонкий ум, самоотверженность и нежность Александра Даниловича стали дорогими воспоминаниями и утешением тех, кто имел счастье быть рядом с ним.

Указатель трудов А. Д. Александрова [1)]

1933

Одна теорема о выпуклых многогранниках // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. 1933. Т. 4. С. 87.

Элементарное доказательство существования центра симметрии у трехмерных выпуклых параллелоэдров // Там же. С. 89–99.

1934

Математические основы структурного анализа кристаллов и определение основного параллелепипеда повторяемости при помощи рентгеновских лучей. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 328 с. Совместно с Б. Н. Делоне, Н. Н. Падуровым.

Замечание о правилах коммутации и уравнении Шрёдингера // Докл. АН СССР. 1934. Т. 4, № 4. С. 198–200.

То же на англ. яз.: On the quantum conditions and Schrödinger equation // Там же. С. 201–202.

О вычислении энергии двухвалентного атома по методу Фока // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4, вып. 4. С. 326–341.

Вывод четырехмерных ненормальных параллелоэдров // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. 1934. № 6. С. 803–817.

1935

Новое доказательство неизгибаемости поверхности шара // Докл. АН СССР. 1935. Т. 1, № 6. С. 353–355.

То же на англ. яз.: A new proof of the non-flexibility of the sphere // Там же. С. 355–356.

[1)] Первые указатели трудов А. Д. Александрова были составлены В. М. Пестуновой в 1975 г. и В. А. Залгаллером в 1992 г. Затем они многократно пополнялись и дорабатывались. За основу настоящей публикации взят указатель из 3-го издания книги *Александр Данилович Александров (1912–1999): Биобиблиографический сборник* / Ред. Ю. Г. Решетняк, С. С. Кутателадзе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.

1936

О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей // Мат. сб. 1936. Т. 1, № 3. С. 307–321.

То же на англ. яз.: On infinitesimal bendings of nonregular surfaces // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 1–18.

Рассеяние света в бесконечном плоском слое // Тр. Оптич. ин-та. 1936. Т. 11, вып. 99. С. 56–71. Совместно с Н. Г. Болдыревым.

О четырехмерных ненормальных параллелоэдрах // Тр. 2-го Всесоюз. мат. съезда, Ленинград, 1934 г. М.; Л., 1936. Т. 2: Секц. докл. С. 21.

1937

Über die Frage nach der Existenz eines konvexen Körpers, bei dem die Summe der Hauptkrümmungsradien eine gegebene positive Funktion ist, welche den Bedingungen der Geschlossenheit genügt // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 2. С. 59–60.

Новые неравенства для смешанных объемов выпуклых тел // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 4. С. 155–157.

О разбиениях и покрытиях плоскости // Мат. сб. 1937. Т. 2, вып. 2. С. 307–317.

К теории смешанных объемов выпуклых тел. I: Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. 1937. Т. 2, вып. 5. С. 947–970.

То же на англ. яз.: To the theory of mixed volumes of convex bodies. Part I: Extension of certain concepts of the theory of convex bodies // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 31–60.

К теории смешанных объемов выпуклых тел. II: Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения // Мат. сб. 1937. Т. 2, вып. 6. С. 1205–1235.

То же на англ. яз.: To the theory of mixed volumes of convex bodies. Part II: New inequalities for mixed volumes and their applications // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 61–98.

Элементарное доказательство теоремы Минковского и некоторых других теорем о выпуклых многогранниках // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. Т. 1, № 4. С. 597–606.

То же на англ. яз.: An elementary proof of the Minkowski and some other theorems on convex polyhedra // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 19–30.

Ошибки колориметрических измерений и метрика цветового пространства // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1937. Т. 7, вып. 6. С. 785–791.

К теории смешанных объемов Минковского: Тез. к дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1937. 4 с.

1938

Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей // Докл. АН СССР. 1938. Т. 19, № 4. С. 233–236.

То же на англ. яз.: A general uniqueness theorem for closed surfaces // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 145–148.

К теории смешанных объемов выпуклых тел. III: Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела // Мат. сб. 1938. Т. 3, вып. 1. С. 27–44.

То же на англ. яз.: To the theory of mixed volumes of convex bodies. Part III: Extension of two Minkowski theorems on convex polyhedra to all convex bodies // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 99–118.

К теории смешанных объемов выпуклых тел. IV: Смешанные дискриминанты и смешанные объемы // Мат. сб. 1938. Т. 3, вып. 2. С. 227–249.

То же на англ. яз.: To the theory of mixed volumes of convex bodies. Part IV: Mixed discriminants and mixed volumes // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 119–144.

Об одном классе замкнутых поверхностей // Мат. сб. 1938. Т. 4, вып. 1. С. 69–76.

1939

О теоремах единственности для замкнутых поверхностей // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22, № 3. С. 99–102.

То же на англ. яз.: Uniqueness theorems for closed surfaces // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 149–154.

О выпуклых поверхностях с плоскими границами теней // Мат. сб. 1939. Т. 5, вып. 2. С. 309–316.

О поверхностной функции выпуклого тела: (Замечание к работе «К теории смешанных объемов выпуклых тел») // Мат. сб. 1939. Т. 6, вып. 1. С. 167–173.

То же на англ. яз.: On the area function of a convex body // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 155–162.

Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 243–255.

Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей // Учен. зап. ЛГУ. 1939. № 37. Сер. мат. наук. Вып. 6. С. 3–35.

1940

Additive set-functions in abstract spaces // Мат. сб. 1940. Т. 8, вып. 2. С. 307–348.

Реф. ст.: О. К. Житомирский. О неизгибаемости овалоидов // Докл. АН СССР. 1939. Т. 25, № 5. С. 347–349. Опубл.: Физ.-мат. реф. журн. 1940. Т. 3, вып. 4. С. 311.

Преданность науке: [О сталинском стипендиате С. П. Оловянишникове] // Ленингр. ун-т. 1940. 7 окт.

1941

Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30, № 2. С. 103–106.

То же на англ. яз.: Existence of a convex polyhedron and a convex surface with given metric // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 169–174.

Внутренняя геометрия произвольной выпуклой поверхности // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 7. С. 467–470.

То же на англ. яз.: Intrinsic geometry of an arbitrary convex surface // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 163–168.

Additive set-functions in abstract spaces. II, III // Мат. сб. 1941. Т. 9, вып. 3. С. 563–621.

Теория многогранников // Сов. наука. 1941. № 4. С. 91–117.

Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой // Науч.-исслед. работы ин-тов, входящих в Отд-ние физ.-мат. наук АН СССР за 1940 г.: Сб. реф. М.; Л., 1941. С. 19–21.

Аддитивные функции множества в абстрактных пространствах // Там же. С. 32–33.

1942

О группах с инвариантной мерой // Докл. АН СССР. 1942. Т. 34, № 1. С. 7–11.

Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной // Докл. АН СССР. 1942. Т. 35, № 5. С. 143–147.

Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной // Докл. АН СССР. 1942. Т. 36, № 7. С. 211–216.

О расширении хаусдорфова пространства до H-замкнутого // Докл. АН СССР. 1942. Т. 37, № 4. С. 138–141.

Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой // Мат. сб. 1942. Т. 11, вып. 1–2. С. 15–61.

1943

Additive set-functions in abstract spaces. IV // Мат. сб. 1943. Т. 13, вып. 2–3. С. 169–243.

1944

Внутренняя метрика выпуклой поверхности в пространстве постоянной кривизны // Докл. АН СССР. 1944. Т. 45, № 1. С. 3–6.

Русская и советская математика и ее влияние на мировую науку // Роль русской науки и культуры: Науч. конф., 1944 г. (МГУ): Программы и тез. докл. М., 1944. С. 7.

Синтетический метод в теории поверхностей // Научная сессия, посвящ. 125-летию Ленингр. ун-та: Тез. докл. Л.: ЛГУ, 1944. С. 9–10.

1945

Изопериметрические неравенства на кривых поверхностях // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47, № 4. С. 239–242.

Кривые на выпуклых поверхностях // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47, № 5. С. 319–322.

О треугольниках на выпуклых поверхностях // Докл. АН СССР. 1945. Т. 50, № 1. С. 19–22.

Кривизна выпуклых поверхностей // Там же. С. 23–26.

Выпуклые поверхности как поверхности положительной гауссовой кривизны // Там же. С. 27–30.

Одна изопериметрическая задача // Там же. С. 31–34.

Полные выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. Т. 9, вып. 2. С. 113–118.

Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей // Научная сессия Ленингр. ун-та: Тез. докл. Л.: ЛГУ, 1945. С. 7.

Метрика выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны // Рефераты науч.-исслед. работ за 1943–1944 гг.: Отд-ние физ.-мат. наук АН СССР. М.; Л., 1945. С. 68.

О кривизне выпуклых поверхностей // Там же. С. 68.

О площади поверхностей // Там же. С. 68.

Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей вращения // Там же. С. 68.

Реализуемость общей метрики положительной кривизны // Там же. С. 69.

Теория кривых на выпуклых поверхностях // Там же. С. 69.

1946

О метрике выпуклой поверхности в пространстве постоянной кривизны // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51, № 6. С. 407–410.

О склеивании выпуклых поверхностей // Докл. АН СССР. 1946. Т. 54, № 2. С. 99–102.

Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей // Успехи мат. наук. 1946. Т. 1, вып. 3–4. С. 196.

Основания внутренней геометрии поверхностей // Науч. бюл. ЛГУ. 1946. № 7. С. 3–4.

Что такое топология // Математика в школе. 1946. № 1. С. 7–19.

Теория кривых на основе приближения ломаными // Научная сессия Ленингр. ун-та: Тез. докл. по секции мат. наук. Л.: ЛГУ, 1946. С. 11–12.

Основания внутренней геометрии выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны // Рефераты науч.-исслед. работ за 1945 г.: Отд-ние физ.-мат. наук АН СССР. М.; Л., 1946. С. 56–57.

1947

Метод склеивания в теории поверхностей // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57, № 9. С. 863–865.

То же на фр. яз.: Chirurgie et mathématiques // Etudes Soviétiques. 1949. Fevr., No. 10. P. 31–32.

О работах С. Э. Кон-Фоссена // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, вып. 3. С. 107–141.

Теория кривых на основе приближения ломаными // Там же. С. 182–184.

Геометрия и топология в Советском Союзе. I, II // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, вып. 4. С. 3–58; вып. 5. С. 9–92.

То же на рум. яз.: Geometria si topologia in Uiunea Sovietica. I, II // An. Rom.-Sov. Ser. Mat.-Fiz. 1956. Vol. 10, No. 1. P. 5–35; No. 2. P. 5–28.

Геометрия в Ленинградском университете // Вестн. ЛГУ. 1947. № 11. С. 124–148.

Рец. на кн.: Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 512 с. // Сов. книга. 1947. № 11. С. 21–26.

1948

Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 387 с.

То же на нем. яз.: A. D. Alexandrow. Die innere Geometrie der konvexen Flächen. (Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abt. Bd IV.) Berlin: Akademie-Verlag, 1955. 522 S.

То же на англ. яз.: A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 2: Intrinsic Geometry of Convex Surfaces / Ed. by S. S. Kutateladze. Boca etc.: CRC Press, 2005. 448 p.

Основы внутренней геометрии поверхностей // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1483 –1486.

Кривые в многообразиях ограниченной кривизны // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63, № 4. С. 349–352.

Аддитивные функции области в теории выпуклых поверхностей // Учен. зап. ЛГУ. 1948. № 96. Сер. мат. наук. Вып. 15. С. 82–100.

[Обобщение одной теоремы Герглотца] // Пар. 19 в ст.: Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, вып. 2. С. 89–98.

То же на англ. яз.: Section 19 in the article: Efimov N. V. Qualitative problems of the theory of deformations of surfaces // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1951. No. 37. P. 60–72; 2-е изд.: 1962. Ser. 1. Vol. 6.

Геометрия «в целом» // Математика в СССР за тридцать лет: 1917–1947. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. С. 919–938.

Внутренняя геометрия поверхностей // Науч. сессия Ленингр. ун-та: Тез. докл. Л.: ЛГУ, 1948. С. 6–7.

О формализме в математических науках // Вестн. ЛГУ. 1948. № 12. С. 137–144.

Рец. на кн.: Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 407 с. // Сов. книга. 1948. № 9. С. 31–34.

Пытливость, глубина знаний: [Беседа на общегород. студ. науч.-техн. конф.] // Веч. Ленинград. 1948. 7 апр.

1949

Квазигеодезические // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69, № 6. С. 717–720.

Об основах дифференциальной геометрии и их изложении // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, вып. 3. С. 139–170.

То же на рум. яз.: Bazele geometriei diferentiále şi modul lor de expaneze // An. Rom.-Sov. Ser. Mat.-Fiz. 1954. No. 3. P. 15–43.

О поверхностях, представимых разностью выпуклых функций // Изв. АН КазССР. Сер. математика и механика. 1949. Вып. 3. С. 3–20.

Против идеализма и путаницы в понимании квантовой механики // Вестн. ЛГУ. 1949. № 4. С. 48–68.

Принцип неопределенности и партийность в науке: [Сокращ. докл. на филос. семинаре «Обсуждение философского содержания принципа неопределенности в квантовой механике»] // Ленингр. ун-т. 1949. 12 янв.

Рец. на кн.: Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1–2 // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, вып. 1. С. 213–217.

1950

Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 428 с.

То же на нем. яз.: A. D. Aleksandrov. Konvexe Polyeder. Berlin: Akademie-Verlag, 1958. 419 S. (Math. Lehrbücher und Monographien, Bd 8).

То же на англ. яз.: A. D. Alexandrov. Convex Polyhedra / English translation by N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze and A. B. Sossinsky. Comments and bibliography by V. A. Zalgaller. Appendices by L. A. Shor and Yu. A. Volkov. Berlin etc.: Springer-Verlag, 2005. 520 p.

Квазигеодезические на многообразиях, гомеоморфных сфере // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 4. С. 557–560.

Поверхности, представимые разностями выпуклых функций // Докл. АН СССР. 1950. Т. 72, № 4. С. 613–616.

Однозначная определенность выпуклых поверхностей вращения // Мат. сб. 1950. Т. 26, вып. 2. С. 183–204. Совместно с А. В. Погореловым.

О преобразованиях Лоренца // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, вып. 3. С. 187.

О некоторых общих вопросах научной работы и преподавания математики // Вестн. ЛГУ. 1950. № 1. С. 3–20.

Ленинская диалектика и математика // Вестн. ЛГУ. 1950. № 4. С. 24–30.

[Заключительное слово по обсуждению статьи «Об основах дифференциальной геометрии и их изложении» на кафедре дифференциальной геометрии МГУ] // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, вып. 6. С. 176–179.

1951

Внутренняя геометрия // БСЭ. 2-е изд. 1951. Т. 8. С. 298.

Выпуклое тело (геометрическое) // БСЭ. 2-е изд. 1951. Т. 9. С. 457–458.

Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1951. Т. 38. С. 5–23.

Ленинская диалектика и математика // Природа. 1951. № 1. С. 5–15.

То же на болг. яз.: Ленинската диалектика и математиката // Природа (София). 1954. Т. 3, № 3. С. 37–45.

То же на чеш. яз.: Leninska dialektika a matematika // Časopis Pěst. Mat. 1951. Vol. 76. P. 237–250.

То же на кит. яз.: Ленинская диалектика и математика // Кит. мат. журн. 1952. Т. 1, № 4.

То же на фр. яз.: La dialectique leniniste et les mathematiques. Paris: Centre Culturel et Économique France–USSR, 1954.

О логике // Вопр. философии. 1951. № 3. С. 152–163.

Об идеализме в математике // Природа. 1951. № 7. С. 3–11; № 8. С. 3–9.

То же на чеш. яз.: O idealismu v matematice // Časopis pěst. mat. 1951. Vol. 76. P. 251–270.

То же на кит. яз.: Об идеализме в математике // Кит. мат. журн. 1952. Т. 1, № 3.

То же на фр. яз.: Sur l'idéalisme en mathématiques. Paris: Centre Culturel et Économique France–USSR, 1954.

1952

Геометрия // БСЭ. 2-е изд. 1952. Т. 10. С. 533–550.

То же на польск. яз.: Co to jest geometria // Wiadom. Mat. 1955. Vol. 1, No. 1. P. 4–46.

То же на кит. яз.: Геометрия // Щусюэ тукабао (Мат. бюл.). 1955. № 4–5.

Геометрия выпуклых тел // БСЭ. 2-е изд. 1952. Т. 10. С. 551–552.

Ефимов Николай Владимирович // БСЭ. 2-е изд. 1952. Т. 15. С. 566.

О парадоксе Эйнштейна в квантовой механике // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84, № 2. С. 253–256.

То же на нем. яз.: Über das Einsteinische Paradoxen in den Quantenmechanik // Sowietwissenschaft. Naturwiss. Abt. 1953. Hf. 2. S. 263–267.

О смысле волновой функции // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85, № 2. С. 291–294.

Рец. на кн.: Энциклопедия элементарной математики. Кн. 1–2. М.; Л.: Гостехиздат, 1951 // Сов. книга. 1952. № 5. С. 19–25.

Грандиозные перспективы советской науки // Веч. Ленинград. 1952. 27 авг.

Готовить полноценных научных работников // Ленингр. ун-т. 1952. 13 нояб.

1953

Вводная глава: [Общее представление о сущности математики] // Математика, ее содержание, методы и значение: (Пробное издание). М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1953. С. 5–73.

Кривые и поверхности // Там же. С. 494–552.

Абстрактные пространства // Там же. С. 632–719.

Оценки длины кривой на поверхности // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93, № 2. С. 221–224. Совместно с В. В. Стрельцовым.

О сущности теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1953. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 103–128.

Замечания к основам теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1953. № 11. Сер. математики, физики и химии. Вып. 4. С. 95–110. Совместно с В. В. Овчинниковой.

По поводу некоторых взглядов на теорию относительности // Вопр. философии. 1953. № 5. С. 225–245.

Ред.: Математика, ее содержание, методы и значение: (Пробное издание) / АН СССР. Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 831 с.

Задачи нового учебного года // Ленингр. ун-т. 1953. 4 сент.

1954

Лобачевского геометрия // БСЭ. 2-е изд. 1954. Т. 25. С. 317–320.

О заполнении пространства многогранниками // Вестн. ЛГУ. 1954. № 2. Сер. математики, физики и химии. Вып. 1. С. 33–43.

То же на англ. яз.: On tiling a space with polyhedra // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 175–186.

Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка // Вестн. ЛГУ. 1954. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 3–17.

Об условиях неизгибаемости выпуклых поверхностей с краем // Научная сессия ЛГУ: Тез. докл. по секции мат. наук. Л.: ЛГУ, 1954. С. 45–46.

Synthetic methods in the theory of surfaces // Convegno Internationale di Geometria Differentiale, Italia, 1953. Roma: Ed. Gremonese, 1954. P. 162–175.

L'ideálisme de la théorie des ensembles // Pensée. 1954. No. 58. P. 83–90.

[Выступление на дискуссии «Проблема вида и видообразования» на философском семинаре биолого-почвенного фак-та ЛГУ, 24 марта 1954 г.] // Вестн. ЛГУ. 1954. № 10. Сер. биологии, географии и геологии. Вып. 4. С. 81–84.

Восхождение на высшую точку земного шара [вершину Эверест] // Природа. 1954. № 8. С. 62–72. Совместно с В. П. Берковым.

С новым годом, дорогие друзья! // Ленингр. ун-т. 1954. 1 янв.

Университет перед новым учебным годом: Беседа // Веч. Ленинград. 1954. 26 авг.

С новым учебным годом! // Ленингр. ун-т. 1954. 3 сент.

О состоянии и мерах улучшения идеологической работы в университете [Сокращ. докл.] // Там же. 1 окт.

1955

On a generalization of Riemannian geometry // Jahresber. Humb. Univ., Berlin. 1955. P. 3–65.

То же // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 187–249.

Относительности теория (теоретико-познавательное значение) // БСЭ. 2-е изд. 1955. Т. 31. С. 411–413.

Риманова геометрия // БСЭ. 2-е изд. 1955. Т. 36. С. 520–523. Совместно с Ю. Ф. Борисовым.

О неизгибаемости выпуклых поверхностей // Вестн. ЛГУ. 1955. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 3–13. Совместно с Е. П. Сенькиным.

Про суть теорії відності // Досягнення сучасної фізики (Київ). 1955. Вип. 4. С. 3–28.

Важнейшее средство развития научного творчества // Ленингр. ун-т. 1955. 9 дек.

1956

Предисловие [От редакционной коллегии] // Математика, ее содержание, методы и значение. В 3 томах. М.: АН СССР, 1956. Т. 1. С. 3–4. Совместно с А. Н. Колмогоровым, М. А. Лаврентьевым.

Общий взгляд на математику // Там же. С. 5–78.

То же на англ. яз.: A general view of mathematics // Mathematics, Its Content, Methods, and Meaning. Cambridge, 1969. Vol. 1. P. 1–64.

То же на рум. яз.: Privire generală asupră matematicii // Matematică, conţinutul, metodele şi importanţa. Bucureşti, 1962. Vol. 1. P. 7–98.

То же на кит. яз.: Общий взгляд на математику. Пекин, Кэсюэ Пуцзи губаньшэ, 1958.

Кривые и поверхности // Математика, ее содержание, методы и значение. М.: АН СССР, 1956. Т. 2. С. 97–152.

То же на англ. яз.: Curves and surfaces // Mathematics, Its Content, Methods, and Meaning. Cambridge, 1969. Vol. 2. P. 57–118.

То же на нем. яз.: Kurven und Flächen. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959. 82 S.

То же на рум. яз.: Curbe şi suprafeţe // Matematică, conţinutul, metodele şi importanţa. Bucureşti, 1962. Vol. 2. P. 123–191.

То же на кит. яз.: Кривые и поверхности. Пекин, Кэсюэ Цзищу Чубаньшэ, 1959.

Абстрактные пространства // Математика, ее содержание, методы и значение. М.: АН СССР, 1956. Т. 3. С. 93–180.

То же на англ. яз.: Non-Euclidean geometry // Mathematics, Its Content, Methods, and Meaning. Cambridge, 1969. Vol. 3. P. 97–192.

То же на рум. яз.: Spatii abstracte // Matematică, conţinutul, metodele şi importanţa. Bucureşti, 1962. Vol. 3. P. 110–217.

Топология // Математика, ее содержание, методы и значение. М.: АН СССР, 1956. Т. 3. С. 181–212.

То же на англ. яз.: Topology // Mathematics, Its Content, Methods, and Meaning. Cambridge, 1969. Vol. 3. P. 193–226.

То же на рум. яз.: Topologia // Matematică, conţinutul, metodele şi importanţa. Bucureşti, 1962. Vol. 3. P. 217–255.

Теоремы Г. Минковского и А. Д. Александрова // Гл. V в кн.: Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. М.: Гостехиздат, 1956. С. 149–170.

То же на англ. яз.: Ch. V in the book: Lyusternik L. A. Convex Figures and Polyhedra. New York: Dover Publ., Inc., 1963. P. 132–149.

О вычислении энергии двухвалентного атома по методу Фока // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1956. Т. 4, вып. 4.

Дополнение к статье «О неизгибаемости выпуклых поверхностей» // Вестн. ЛГУ. 1956. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 104–106. Совместно с Е. П. Сенькиным.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I // Вестн. ЛГУ. 1956. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–17.

То же на англ яз.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. I // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1962. Vol. 21. P. 341–354.

Об одном обобщении римановой геометрии // Тр. 3-го Всесоюз. мат. съезда, Москва, 1956 г. М., 1956. Т. 2: Крат. содерж. обзор. и секц. докл. С. 138.

Теоремы единственности для дифференциальных уравнений и поверхностей // Науч. сессия Ленингр. ун-та: Тез. докл. по секции мат. наук. Л.: ЛГУ, 1965. С. 4–7.

Las definitions axiomaticas en las matematicas. Mexico: Univ. Nac, Suplementos del Seminario de problemas cientificas y filosoficas, 1956. Ser. 1. No. 6. 21 p. With J. S. Hadamard.

The space-time of the theory of relativity // Fünfzig Jahre Relativitätstheorie. Bern, 1955; Basel, 1956. P. 44–45.

On mathematical education in the USSR // Math. Student. 1956. Vol. 24, No. 1–2. P. 99–108.

[О философской трактовке теории относительности: Крат. содерж. докл.] // Вестн. АН СССР. 1956. № 10. С. 96–97.

Важнейшее средство развития научного творчества // Вестн. высш. школы. 1956. № 7. С. 18–25.

Ред.: Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 1–3 / АН СССР. Мат ин-т им. В. А. Стеклова. М.: АН СССР, 1956.

В стране великого народа: Из индийских впечатлений // Веч. Ленинград 1956. 4 авг.

Школа творческой мысли: [Обсуждение статьи «Высшая школа и ее питомцы»] // Лит. газ. 1956. 4 сент.

1957

Элементарная геометрия // БСЭ. 2-е изд. 1957. Т. 48. С. 645–648.

Линейчатые поверхности в метрических пространствах // Вестн. ЛГУ. 1957. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–26.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». II // Вестн. ЛГУ. 1957. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 15–44.

То же на англ. яз.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. II // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1962. Vol. 21. P. 354–388.

Über eine Verallgemeinerung der riemannschen Geometrie // Der Begriff des Räumes in der Geometrie. Bericht von der Riemann–Tagung des Forschungs-instituts für Mathematik. Berlin, 1957. S. 33–84. (Schriftenreihe Institute für Mathematik, Hf. I).

Диалектика и наука // Вестн. АН СССР. 1957. № 6. С. 3–17.

Воспитание студенчества — важнейшая политическая задача // Вестн. высш. школы. 1957. № 3. С. 12–19.

Наш ученый — это воспитатель: [Крат. излож. докл. на открытом заседании Учен. совета ун-та] // Ленингр. ун-т. 1957. 8 янв.

Снежный человек — миф или действительность? // Лит. газ. 1957. 21 марта. Совместно с Е. Симоновым.

В первых рядах отечественной науки: [Об ученых Ленинграда] // Правда. 1957. 22 июня.

Ленинград — наша гордость! // Ленингр. ун-т. 1957. 25 июня.

Новые вехи истории // Известия. 1957. 18 окт.

Наше общее счастье // Ленингр. ун-т. 1957. 19 нояб.

1958

Задача Дирихле для уравнения $\mathrm{Det}\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. I // Вестн. ЛГУ. 1958. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–24.

То же на англ. яз.: The Dirichlet problem for the equation det $\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. Part I // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 251–272.

Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». III // Вестн. ЛГУ. 1958. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 14–26.

То же на англ. яз.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. III // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1962. Vol. 21. P. 389–403.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». IV // Вестн. ЛГУ. 1958. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 27–34. Совместно с Ю. А. Волковым.

То же на англ. яз.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. IV // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1962. Vol. 21. P. 403–411. With Yu. A. Volkov.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». V // Вестн. ЛГУ. 1958. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–8.

То же на англ. яз.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. V // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1962. Vol. 21. P. 412–416.

Философское содержание и значение теории относительности. М.: АН СССР, 1958. 35 с. (Материалы к Всесоюз. совещ. по филос. вопр. естествознания).

Воспитывать умело, творчески // Ленингр. ун-т. 1958. 10 марта.

Наши планы на семилетие: [Сокращ. докл. на общеуниверситетском партийном собрании] // Ленингр. ун-т. 1958. 31 марта.

[Говорят читатели «Ленинградского университета»] // Ленингр. ун-т. 1958. 5 мая.

Путеводная звезда // Сов. Россия. 1958. 5 мая.

Помнить о требованиях жизни // Известия. 1958. 9 авг.

Путь к высшему образованию // Там же. 10 дек.

Главное — творческая активность: [Перестройка высш. школы в связи с Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР] // Сов. Россия. 1958. 12 дек.

1959

Исследования о принципе максимума. II, III // Изв. вузов. Математика. 1959. № 3. С. 3–12; № 5. С. 16–32.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». VI // Вестн. ЛГУ. 1959. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–13.

Теория относительности как теория абсолютного пространства-времени // Философские вопросы современной физики. М.: АН СССР, 1959. С. 269–323.

Философское содержание и значение теории относительности // Философские проблемы современного естествознания: Тр. Всесоюз. совещ. по филос. вопр. естествознания. М.: АН СССР, 1959. С. 93–136.

То же на рум. яз.: Conţinutul filozofic şi însemnătatea teoriei relativitatii // An. Rom.-Sov. Ser. Mat.-Fiz. 1959. Vol. 13, No. 3. P. 125–152.

То же на итал. яз.: Contenuto filosofico e importanza della teoria della relativita // La Nova Critica. 1960–1961. Vol. IX (La teoria fisica in URSS). P. 17–64.

Заключительное слово // Философские проблемы современного естествознания: Тр. Всесоюз. совещ. по филос. вопр. естествознания. М.: АН СССР, 1959. С. 573–575.

Философское содержание и значение теории относительности: [Сокращ. докл. по филос. вопр. естествознания] // Вопр. философии. 1959. № 1. С. 67–84.

Григорий Михайлович Фихтенгольц: (Некролог) // Вестн. ЛГУ. 1959. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 158–159. Совместно с Г. П. Акиловым, И. Я. Ашневиц, С. В. Валландером и др.

Education in the USSR // Proc. 4 Canadian Mathematical Congress. Toronto, 1959. P. 14–19.

Examen de la theoria de la relatividad restingida. Mexico, 1959. P. 353–389.

[Доклад на Всесоюзном совещании по философским вопросам естествознания. Москва, октябрь, 1958 г.] // Природа. 1959. № 4. С. 55.

Первые шаги // Веч. Ленинград. 1959. 10 апр. (Новое в высш. школе. Говорят руководители ленингр. вузов).

1960

Modern development of surface theory // Proc. Intern. Congr. Math., Edinburgh, 1958. Cambridge, 1960. P. 3–18.

То же на рус. яз.: Современное развитие теории поверхностей // Международный мат. конгр. в Эдинбурге, 1958 г.: (Обзор. докл.). М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. С. 7–26.

Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 5. С. 1001–1004.

То же на англ. яз.: Certain estimates for the Dirichlet problem // Soviet Math. Dokl. 1961. Vol. 1. P. 1151–1154.

Исследования о принципе максимума. IV, V // Изв. вузов. Математика. 1960. № 3. С. 3–15; № 5. С. 16–26.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». VII // Вестн. ЛГУ. 1960. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 5–13.

Николай Владимирович Ефимов: (К 50-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 6. С. 175–177. Совместно с А. В. Погореловым.

Роль Ленина в развитии науки // Вопр. философии. 1960. № 8. С. 35–45.

Mathematics in the humanities // Report of the Second Conference on Mathematical Education in South Asia. Bombay, 1960. Bombay: The Commercial Printing Press Ltd., 1960. P. 107–113.

Повышение уровня учебной и научной работы кафедр педагогики // О перестройке работы кафедр педагогики в свете закона об укреплении связи школы с жизнью. М., 1960. С. 154–159.

Ленин — это целый мир! (90-летие со дня рождения В. И. Ленина) // Ленингр. ун-т. 1960. 18 апр.

Ленин и наука // Известия. 1960. 21 апр.

Об отношении биологии к физике и химии // Ленингр. ун-т. 1960. 9 мая.

Важнейшая проблема коммунистического строительства // Там же. 11 окт.

Вашу руку, коллега! // Комс. правда. 1960. 22 дек.

1961

Исследования о принципе максимума. VI // Изв. вузов. Математика. 1961. № 1. С. 3–20.

Одно условие равенства замкнутых выпуклых поверхностей // Вестн. ЛГУ. 1961. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 5–7.

О принципе максимума // Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск: СО АН СССР, 1961. С. 25–41.

От оргкомитета // Программа 4-го Всесоюз. мат. съезда, Ленинград, 1961 г. Л.: ЛГУ, 1961. С. 3. Совместно с В. В. Петровым.

Теория поверхностей и дифференциальные уравнения с частными производными // 4-й Всесоюз. мат. съезд, Ленинград, 1961 г.: Аннот. пленар. докл. Л.: ЛГУ, 1961. С. 3–4. Совместно с А. В. Погореловым.

[Выступление в прениях по докл. М. В. Келдыша на Всесоюз. совещ. науч. работников 12–14 июня 1961 г.] // Вестн. АН СССР. 1961. № 7. С. 42–43.

[Выступление на Всесоюз. совещ. работников науки о перестройке работы науч. учреждений в связи с Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О мерах по улучшению координации научно-исследовательских работ в стране и деятельности АН СССР»] // Всесоюз. совещ. науч. работников в Кремле, Москва, 12–14 июня 1961 г. М.: ВИНИТИ, 1961. С. 61–65.

Великое достигается ценой больших усилий // Смена. 1961. 15 апр.

Работать и учиться с напряжением. К вершинам знаний // Таджикский гос. ун-т. 1961. 1 янв.

Основное звено — высшая школа // Правда. 1961. 8 февр.

Главное богатство // Известия. 1961. 23 марта.

Дерзающим, пытливым, любознательным // Ленингр. ун-т. 1961. 2 июня.

[Выступление на Всесоюзном совещании научных работников (сокращ.)] // Правда. 1961. 14 июня.

Подготовка кадров — дело первостепенной важности // Экон. газета. 1961. 14 июня.

Дело первостепенной важности // Ленингр. ун-т. 1961. 23 июня.

Высшая школа и развитие науки // Правда. 1961. 20 сент.

Мерой коммунизма // Ленингр. ун-т. 1961. 13 окт.

Мечта становится реальностью: [О проекте программы КПСС] // Известия. 1961. 14 окт.

В защиту философии // Ленингр. ун-т. 1961. 10 нояб.

Пусть больше будет одержимых // Комс. правда. 1961. 22 нояб.; Ленингр. ун-т. 1961. 8 дек.

1962

Двумерные многообразия ограниченной кривизны: (Основы внутренней геометрии поверхностей). М.; Л.: АН СССР, 1962. 262 с. (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР; Т. 63). Совместно с В. А. Залгаллером.

То же на англ. яз.: Intrinsic Geometry of Surfaces. Providence: Amer. Math. Soc., 1967. 327 p. (Transl. Math. Monogr. Vol. 15). With V. A. Zalgaller.

Об изгибании многогранника с твердыми гранями // Вестн. ЛГУ. 1962. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 138–141. Совместно с С. М. Владимировой.

A characteristic property of spheres // Ann. Mat. Pura Appl. 4 Ser. 1962. Vol. 58. P. 303–315.

[Выступление на Общем собрании АН СССР, проходившем 19–20 октября 1962 г.] // Вестн. АН СССР. 1962. № 12. С. 22–23.

[Выступление на Общем собрании АН СССР, проходившем 19–20 октября 1962 г.]: (крат. изложение) // Коммунист. 1962. № 17. С. 67.

Геометрия и диалектика: [Тема доклада на Всесоюз. геометрической конф., Киев, 1962 г.] // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, вып. 6. С. 234.

Многообразие задач науки о человеке. Строительство коммунизма и общественные науки // Материалы сессии Общего собрания АН СССР. М.: АН СССР, 1962. С. 71–73.

Алмазы надо гранить // Ленингр. ун-т. 1962. 20 мая.

Эстафета поколений // Учит. газета. 1962. 7 июля.

Растить таланты // Там же. 26 июля.

Дорогу увлеченным // Известия. 1962. 28 июля.

Не ассигнования, а внимание // Там же. 11 авг. Совместно с М. Артамоновым.

Человек и конвейер // Правда. 1962. 19 нояб. Совместно с Б. Ф. Ломовым.

1963

Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле // Вестн. ЛГУ. 1963. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 5–29.

То же на англ. яз.: Uniqueness conditions and estimates for the solution of the Dirichlet problem // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1968. Vol. 68. P. 89–119.

Метод опорного изображения в исследовании решений краевых задач. Новосибирск, 1963. 10 с. (Материалы к совместн. сов.-амер. симпоз. по уравнениям с част. производными).

Теория поверхностей и дифференциальные уравнения в частных производных // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда, Ленинград, 1961 г. Л.: ЛГУ, 1963. Т. 1: Пленар. докл. С. 3–16. Совместно с А. В. Погореловым.

К вопросу об улучшении преподавания иностранных языков в высших учебных заведениях СССР // Тез. докл. Межвуз. конф. по вопр. преподавания иностр. языков в системе веч. и заоч. образования. Л.: ЛГУ, 1963. С. 3–6. Совместно с Л. П. Ступиным.

Ред.: Труды 4-го Всесоюз. мат. съезда, Ленинград, 1961 г. Т. 1: Пленар. докл. Л.: Наука, 1963. 275 с.

Наука и степени // Ленингр. ун-т. 1963. 12 февр.

Воспитатели талантов // Известия. 1963. 17 мая.

Развивать теоретические исследования // Правда. 1963. 3 июня.

Живые ученья и мертвые схемы // Лит. газета. 1963. 8 июня.

1964

Математика // Философская энциклопедия. 1964. Т. 3. С. 329–335.

К вопросу о преподавании иностранных языков в высшей школе // Вестн. ЛГУ. 1964. № 2. Сер. истории, языка и литературы. Вып. 1. С. 145–158.

Коммунистическое воспитание студентов в процессе учебных занятий // Вопросы воспитания и преподавания в университете. Л., 1964. С. 5–17.

Ред.: Труды 4-го Всесоюз. мат. съезда. Ленинград, 1961 г. Т. 2: Секц. докл. Л.: Наука, 1964. 706 с.

Могутнiй iнструмент пiзнания // Наука i життя. 1964. № 6. С. 3–4.

Мерой 70-х годов // Смена. 1964. 20 июня.

Воспитывать идейных, убежденных // Известия. 1964. 7 янв.

От дважды два до интеграла: Дискус. о проблемах нар. образования // Там же. 28 янв.

Поэзия науки // Там же. 9 марта.

Углубление квалификации или привесок интеллигентности // Там же. 29 апр. Совместно с Л. П. Ступиным.

Гореть, а не тлеть // Ленингр. ун-т. 1964. 26 июня.

Не для степени, а для науки: [О порядке получения ученой степени] // Известия. 1964. 31 окт.

1965

Квазигеодезические // Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Ч. 2. Сборник статей по внутренней геометрии поверхностей (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР; Т. 76). М.; Л.: Наука, 1965. С. 49–63. Совместно с Ю. Д. Бураго.

То же на англ. яз.: Quasigeodesics // Proc. Steklov Inst. Math. 1967. Vol. 76. P. 58–76. With Yu. D. Burago.

Изопериметрическая задача и оценки длины кривой на поверхности // Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Ч. 2. Сб. статей по внутр. геометрии поверхностей (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР; Т. 76). М.; Л.: Наука, 1965. С. 67–80. Совместно с В. В. Стрельцовым.

То же на англ. яз: Isoperimetric problem and estimates of the length of a curve on a surface // Proc. Steklov Inst. Math. 1967. Vol. 76. P. 81–99. With V. V. Strel′tsov.

The method of normal map in uniqueness problems and estimations for elliptic equations // Seminari 1962/63 di me analisi, algebra, geometria e topologia. Roma, 1965. Vol. 2. P. 744–786.

Предисловие // Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Ч. 2. Сб. статей по внутр. геометрии поверхностей (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР; Т. 76). М.; Л.: Наука, 1965. С. 3. Совместно с В. А. Залгаллером.

Ред.: Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Ч. 2. Сб. статей по внутр. геометрии поверхностей (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР; Т. 76). М.; Л.: Наука, 1965. 152 с. Совместно с В. А. Залгаллером.

То же на англ. яз.: Two-Dimensional Manifolds of Bounded Curvature. Proc. Steklov Inst. Math. 1965. Vol. 76. 183 p. With V. A. Zalgaller.

1966

Метод проекций в исследовании решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169, № 4. С. 751–754.

То же на англ. яз.: The projection method in the study of solutions of elliptic equations // Soviet Math. Dokl. 1966. Vol. 7. P. 984–987.

Мажорирование решений линейных уравнений второго порядка // Вестн. ЛГУ. 1966. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–25.

То же на англ. яз.: Majorization of solutions of second-order linear equations // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1968. Vol. 68. P. 120–143.

О мажорантах решений и условиях единственности для эллиптических уравнений // Вестн. ЛГУ. 1966. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 5–20.

То же на англ. яз.: Majorants of solutions and uniqueness conditions for elliptic equations // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1968. Vol. 68. P. 144–161.

Невозможность общих оценок решений и условий единственности для линейных уравнений с нормами, более слабыми, чем в L_n // Вестн. ЛГУ. 1966. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 5–10.

То же на англ. яз.: The impossibility of general estimates for solutions and of uniqueness conditions for linear equations with norms weaker than in L_n // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1968. Vol. 68. P. 162–168.

О кривизне поверхностей // Вестн. ЛГУ. 1966. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–11.

Один общий метод мажорирования решений задачи Дирихле // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 3. С. 486–498.

То же на англ. яз.: General method for majorizing the solutions of the Dirichlet problem // Siberian Math. J. 1967. Vol. 7, No. 3. P. 394–403.

То же на англ. яз.: A general method for dominating solutions of the Dirichlet problem // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 273–288.

[Выступление в прениях по докладам, посвящ. проблемам экономики и техн. прогресса на Общем собрании АН СССР 13 дек. 1965 г.] // Вестн. АН СССР. 1966. № 2. С. 45.

Коммунист в науке // Ленинским курсом. М.: Правда, 1966. С. 218–227.

То же // Правда. 1966. 12 февр.

Ответ на вопрос «Правды»: «Что дает Вам изучение марксистско-ленинской теории?» // Там же. 4 окт.

1967

О средних значениях опорной функции // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172, № 4. С. 755–758.

То же на англ. яз.: On mean values of support functions // Soviet Math. Dokl. 1967. Vol. 8. P. 149–153.

Принцип максимума // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 2. С. 247–250.

То же на англ. яз.: The maximum principle // Soviet Math. Dokl. 1967. Vol. 8. P. 352–355.

Некоторые оценки для производной решения задачи Дирихле на границе // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 3. С. 487–490.

То же на англ. яз.: Some estimates for the derivative of a solution of the Dirichlet problem on the boundary // Soviet Math. Dokl. 1967. Vol. 8. P. 396–400.

Исследование некоторых свойств решений задач Дирихле путем сведения к случаю одной переменной // Вестн. ЛГУ. 1967. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–20.

Некоторые оценки решений задачи Дирихле // Вестн. ЛГУ. 1967. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 19–29.

A contribution to chronogeometry: To H. S. M. Coxeter on his sixtieth birthday // Canad. J. Math. 1967. Vol. 19, No. 6. P. 1119–1128.

Теоремы единственности в теории поверхностей // 2-й Всесоюз. симпоз. по геометрии в целом: Программа заседаний и крат. содерж. докл. Петрозаводск, 1967. С. 7. Текст докл. не опубликован.

Человеческие проблемы и математика // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, вып. 6. С. 5–7.

Истина и заблуждение // Вопр. философии. 1967. № 4. С. 66–76.

Наука и нравственность // Известия. 1967. 12 марта.

Нравственное значение науки // Лит. газета. 1967. 29 марта.

Мораль нового мира // Правда. 1967. 29 нояб.

1968

Еще раз о деятельной сущности человека // Вопр. философии. 1968. № 7. С. 121–129.

Наука и нравственность // Общество и молодежь. М.: Молодая гвардия, 1968. С. 191–218.

Нравственная роль науки // Проблемы повышения эффективности научно-исследовательской работы: (Материалы науч.-практ. конф. Новосибирск, 1968 г.). Новосибирск: СО АН СССР, 1968. Ч. 3. С. 3–25.

Еще раз о науке и нравственности // Лит. газ. 1968. 3 марта.

Против легкомыслия и безответственности: [Об идеологической диверсии «Голоса Америки»] // Веч. Новосибирск. 1968. 5 апр. Совместно с С. Соболевым, А. Окладниковым.

1969

Конусы с транзитивной группой // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, № 4. С. 695–698.

То же на англ. яз.: Cones with a transitive group // Soviet Math. Dokl. 1970. Vol. 10. P. 1460–1463.

A general method of majorating of Dirichlet problem solutions // Differential Equations and Their Applications: Proc. of the conference held in Bratislava in Sept. 1966. Bratislava, 1969. P. 243–248.

Конусы с транзитивной группой // 3-й Всесоюз. симпоз. по геометрии в целом: Программа заседаний и крат. содерж. докл. Петрозаводск, 1969. С. 7–8.

Ленинская диалектика в геометрии // Там же. С. 3. Совместно с Ю. Ф. Борисовым.

Пространство и время в современной физике в свете философских идей Ленина // Ленин и современное естествознание. М.: Мысль, 1969. С. 202–229.

Убежденность: [О значении речи В. И. Ленина на III съезде комсомола] // Смена. 1969. № 18. С. 2.

1970

Отображения семейств множеств // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 502–505.

То же на англ. яз.: Mappings of families of sets // Soviet Math. Dokl. 1970. Vol. 11. P. 116–120.

Отображения семейств множеств // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191, № 3. С. 503–506.

То же на англ. яз.: Mappings of families of sets // Soviet Math. Dokl. 1970. Vol. 11. P. 376–380.

Об одном обобщении функционального уравнения $f(x + y) = f(x) + f(y)$ // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 2. С. 264–278.

То же на англ. яз.: On a certain generalization of the functional equation $f(x+y)=f(x)+f(y)$ // Siberian Math. J. 1970. Vol. 11, No. 2. P. 198–209.

Математика и диалектика // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 2. С. 243–263.

То же на англ. яз.: Mathematics and dialectics // Siberian Math. J. 1970. Vol. 11, No. 2. P. 185–197.

То же на нем. яз.: Mathematik und Dialektik // Ideen des exakten Wissen. Stuttgart: Deutsche Verlagsanstatt, 1971. H. 4. S. 251–257.

То же в кн.: Mathematiker uber die Mathematik. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1974. S. 47–63.

Пространство и время в современной физике в свете философских идей Ленина / АН СССР. Науч. совет по филос. вопр. соврем. естествознания. Ин-т философии. М.: АН СССР, 1970. 45 с. (Материалы ко 2-му Всесоюз. совещ. по филос. вопр. соврем. естествознания, посвящ. 100-летию со дня рождения В. И. Ленина).

Наука и нравственность // Наука и религия. 1970. № 3. С. 66–73.

[Ответ на вопрос редакции. Наш быт вчера, сегодня, завтра] // Аврора. 1970. № 3. С. 41.

Перечитывая Лобачевского // Семья и школа. 1970. № 8. С. 35–36.

Покорение вершин творчества: К 80-летию со дня рождения Б. Н. Делоне // Наука и жизнь. 1970. № 8. С. 10–11.

Раз уж заговорили о науке // Новый мир. 1970. № 10. С. 205–220.

Мир абстракций // За науку в Сибири. 1970. 11 марта.

Утверждай себя истиной // Комс. правда. 1970. 23 июня.

Истинный гуманизм и гуманность истины // Лит. газ. 1970. 4 нояб.

1971

Геометрия // БСЭ. 3-е изд. 1971. Т. 6. С. 307–313.

Отображение семейств конусов // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 5. С. 991–994.

То же на англ. яз.: Mapping of families of cones // Soviet Math. Dokl. 1971. Vol. 12. P. 582–586.

Николай Владимирович Ефимов: (К 60-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 1. С. 237–242. Совместно с П. С. Александровым, А. В. Погореловым, Э. Г. Позняком.

То же на англ. яз.: Nikolaĭ Vladimirovich Efimov: (On the occasion of his sixtieth birthday) // Russian Math. Surveys. 1972. Vol. 26, No. 1. P. 205–210. With P. S. Aleksandrov, A. V. Pogorelov, and È. G. Poznyak.

Пространство и время в современной физике в свете философских идей В. И. Ленина: [Докл. на 2-м Всесоюз. совещ. по филос. вопр. естествознания] // Вопр. философии. 1971. № 3. С. 49–52.

То же на англ. яз.: Summary of speeches: [Materials of the Second All-Union Conf. on Philos. and Modern Natur. Sci.] // Social Sci. 1971. Vol. 4. P. 116–117.

Научная установка нравственности // Наука и нравственность. М.: Политиздат, 1971. С. 26–73.

«Взрыв обучения» и ТВ: [Беседа за круглым столом] // Журналист. 1971. № 2. С. 41–42.

Грани таланта: Академику М. В. Келдышу 60 лет // Физика в школе. 1971. № 3. С. 7–8.

То же // Известия. 1971. 10 февр.

1972

Отображение аффинных пространств с системами конусов // Зап. науч. семинаров. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 27. С. 7–16.

То же на англ. яз.: Mapping of affine spaces with systems of cones // J. Soviet Math. 1975. Vol. 3. P. 387–394.

Отображения упорядоченных пространств. I // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 128. С. 3–21.

То же на англ. яз.: Mappings of ordered spaces. I // Proc. Steklov Inst. Math. 1974. Vol. 128. P. 1–24.

В защиту социологии: По поводу одной публикации // Вестн. АН СССР. 1972. № 7. С. 55–65.

Математика и диалектика. I, II // Математика в школе. 1972. № 1. С. 3–9; № 2. С. 4–10.

Поворот к «человековедению»: Ответ на анкету ЛГ «XX век: наука и общество» // Лит. газ. 1972. 1 мая.

Твой важный шаг: [О чертах характера ученого] // Комс. правда. 1972. 8 июля.

Ты не один: [О вступающих в науку] // Там же. 22 июля.

«...Как в горах, так и в жизни — только вверх!»: Беседа об альпинизме // За науку в Сибири. 1972. 13 сент.

Как я стал альпинистом // Лит. газ. 1972. 1 нояб.

Инструмент познания // Правда. 1972. 24 нояб.

1973

Об отображениях, сохраняющих конгруэнтность // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 6. С. 1257–1260.

То же на англ. яз.: On congruence-preserving mappings // Soviet Math. Dokl. 1974. Vol. 14. P. 1201–1205.

Пространство и время в современной физике в свете философских идей Ленина // Физическая наука и философия: Тр. 2-го Всесоюз. совещ. по филос. вопр. соврем. естествознания. М.: Наука, 1973. С. 102–135.

[Выступление на совещании] // Там же. С. 135–140.

Заключительное слово // Там же. С. 347–348.

Связь и причинность в квантовой области // Современный детерминизм. М., 1973. С. 335–364.

Ученый — профессия или потребность? // Кругозор. 1973. № 1. С. 3. (Прил. пластинка.)

1974

Характеристика евклидовых движений // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214, № 1. С. 11–14.

То же на англ. яз.: Characterization of Euclidean motions // Soviet Math. Dokl. 1974. Vol. 15. P. 1–6.

К основаниям геометрии пространства-времени. I, II // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 1. С. 11–14; № 2. С. 265–267.

То же на англ. яз.: On the foundations of the geometry of space-time. I, II // Soviet Math. Dokl. 1975. Vol. 15. P. 1497–1501, 1543–1547.

Научный поиск и религиозная вера. М.: Политиздат, 1974. 63 с.

1975

Об экстремальном свойстве конусов в пространстве Лобачевского // Тр. пед. ин-тов ГрузССР. Сер. физ. и мат. 1975. Т. 2. С. 3–27. Совместно с Ю. Ф. Борисовым, Г. И. Русиешвили.

Mappings of spaces with families of cones and space-time transformations // Ann. Math. Pura Appl. 1975. Vol. 103. P. 229–257.

1976

К основам теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1976. № 19. Сер. математики, механики, астрономии. Вып. 4. С. 5–28.

То же на англ. яз.: On the foundations of the theory of relativity // Vestnik Leningrad Univ. Math. 1981. Vol. 9. P. 217–243.

То же на англ. яз.: On the principles of relativity theory // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. P. 289–318.

Об отображениях семейств конусов // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 932–935. Совместно с А. П. Копыловым, А. В. Кузьминых, А. В. Шайденко.

То же на англ. яз.: Mappings of families of cones // Siberian Math. J. 1976. Vol. 17, No. 4. P. 699–702. With A. P. Kopylov, A. V. Kuz′minykh, and A. V. Shaĭdenko.

1977

Геометрия в целом // Мат. энцикл. Т. 1. М.: Сов. энцикл., 1977. С. 943–944. Совместно с В. А. Залгаллером.

Отображения областей псевдоевклидовых пространств // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, № 2. С. 265–268.

То же на англ. яз.: Mappings of domains of pseudo-Euclidean spaces // Soviet Math. Dokl. 1977. Vol. 18. P. 304–308.

О хроногеометрии // Фундаментальные исследования: Физ.-мат. и техн. науки. Новосибирск: Наука, 1977. С. 20–22. Совместно с Ю. Ф. Борисовым.

Наука и общество: Ответы на анкету «Лит. газ.» // Наука и общество. М.: Знание, 1977. С. 31–32, 85–86, 127–128, 158–159.

1979

О философском содержании теории относительности // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. М.: Наука, 1979. С. 117–137.

Алексей Васильевич Погорелов: (К 60-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, вып. 4. С. 221–226. Совместно с Я. П. Бланком, Н. В. Ефимовым, В. А. Марченко.

То же на англ. яз.: Alekseĭ Vasil′evich Pogorelov // Russian Math. Surveys. 1979. Vol. 34, No. 4. P. 199–207. With Ja. P. Blank, N. V. Efimov, and V. A. Marchenko.

1980

Основы стереометрии. Новосибирск, 1980. 48 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики). Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Перпендикуляр. Расстояние. Проекция. Новосибирск, 1980. 45 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики). Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

О геометрии // Математика в школе. 1980. № 3. С. 56–62.

Mathematics. Its essential nature and objective law of development // Science and Nature. 1980. No. 3. P. 22–42.

Борис Николаевич Делоне // Природа. 1980. № 3. С. 25–35.

В пути полвека: [О Полетаеве И. А.] // За науку в Сибири. 1980. 11 дек. Совместно с Ю. Ф. Борисовым, Ю. И. Гильдерманом, Е. П. Волокитиным и др.

1981

Начала стереометрии. 9: (Пробный учебник: Материалы для ознакомления). М.: Просвещение, 1981. 224 с. (Библиотека учителя математики). Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Что такое многогранник? // Математика в школе. 1981. № 1. С. 8–16; № 2. С. 19–26.

Величины и фигуры. Новосибирск, 1981. 48 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики).

Многогранники. Новосибирск, 1981. 23 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики). Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Начала геометрии. Новосибирск, 1981. 45 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики).

Тела. Новосибирск, 1981. 42 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики). Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Николай Владимирович Ефимов: (К 70-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, вып. 3. С. 233–238. Совместно с Ю. А. Аминовым, О. А. Олейник, А. В. Погореловым и др.

То же на англ. яз.: Nikolaĭ Vladimirovich Efimov: (On his seventieth birthday) // Russian Math. Surveys. 1981. Vol. 36, No. 3. P. 272–278. With Yu. A. Aminov, O. A. Oleĭnik, A. V. Pogorelov, et al.

[О роли биологических факторов в формировании и развитии человека: Выступление на заседании Общего собрания АН СССР 21 нояб. 1980 г.] // Вестн. АН СССР. 1981. № 6. С. 42–46.

Бедная аксиома!: О русском языке в учебнике геометрии // Лит. газ. 1981. 7 окт.

1982

Начала стереометрии. 10: (Пробный учебник: Материалы для ознакомления). М.: Просвещение, 1982. 191 с. (Библиотека учителя математики). Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Многомерная геометрия // Мат. энцикл. Т. 3. М.: Сов. энцикл., 1982. С. 729–731.

Треугольники. Новосибирск, 1982. 47 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 6).

Подобные треугольники. Новосибирск, 1982. 42 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 11).

Параллельные прямые и векторы. Новосибирск, 1982. 49 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 15).

Многоугольники и окружности. Новосибирск, 1982. 31 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 26).

Многогранники. Новосибирск, 1982. 22 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики). Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

О пробном учебнике «Начала стереометрии» // Математика в школе. 1982. № 4. С. 53–58. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Леонид Витальевич Канторович: (К 70-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, вып. 3. С. 201–209. Совместно с М. К. Гавуриным, С. С. Кутателадзе, В. Л. Макаровым и др.

То же на англ. яз.: Leonid Vital′evich Kantorovich: (On his seventieth birthday) // Russian Math. Surveys. 1982. Vol. 37, No. 3. P. 229–238. With M. K. Gavurin, S. S. Kutateladze, V. L. Makarov, et al.

Тупость и гений. I. II // Квант. 1982. № 11. С. 12–17; № 12. С. 7–15.

К основаниям геометрии // Intern. Congr. Math.: Short Communications (Abstracts) Warszawa. Warszawa, 1982. Vol. 14, sect. 19. P. 11.

1983

Геометрия: (Пробный учебник для 9–10-го классов сред. школы). М.: Просвещение, 1983. 336 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

О мере, внутренности и границе // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 5. С. 12–14.

То же на англ. яз.: Measure, interior, and boundary // Siberian Math. J. 1983. Vol. 24, No. 5. P. 657–659.

Векторы и координаты. Новосибирск, 1983. 46 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 37).

Окружность и круг. Новосибирск, 1983. 12 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 43).

Отображения. Новосибирск, 1983. 43 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 45).

Николай Владимирович Ефимов: (Некролог) // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 5. С. 111–117. Совместно с С. П. Новиковым, А. В. Погореловым, Э. Г. Позняком и др.

То же на англ. яз.: Nikolaĭ Vladimirovich Efimov: (Obituary) // Russian Math. Surveys. 1983. Vol. 38, No. 5. P. 123–130. With S. P. Novikov, A. V. Pogorelov, Eh. G. Poznyak et al.

Ольга Александровна Ладыженская: (К 60-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 5. С. 215–224. Совместно с А. П. Осколковым, Н. Н. Уральцевой, Л. Д. Фаддеевым.

То же на англ. яз.: Ol′ga Aleksandrovna Ladyzhenskaya: (On her sixtieth birthday) // Russian Math. Surveys. 1983. Vol. 38, No. 5. P. 170–181. With A. P. Oskolkov, N. N. Ural′tseva, and L. D. Faddeev.

1984

Геометрия. Для 9–10-го классов: (Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изучением математики). М.: Просвещение, 1984. 480 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия: (Пробный учебник для 6-го кл. сред. школы). М.: Просвещение, 1984. 176 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Пространство // Мат. энцикл. Т. 4. М.: Сов. энцикл., 1984. С. 712–713.

Риманово пространство обобщенное // Там же. С. 1022–1026. Совместно с В. Н. Берестовским.

К основаниям геометрии // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 21–34.

То же на англ. яз.: Foundations of geometry // Siberian Math. J. 1984. Vol. 25, No. 2. P. 183–194.

О понятии множества в курсе геометрии // Математика в школе. 1984. № 1. С. 47–52.

Так что же такое вектор? // Там же. № 5. С. 39–46.

Нет ничего прекраснее истины // Знание сила. 1984. № 7. С. 27–29.

... Минус математика? // Комс. правда. 1984. 22 февр.

Два этажа математики: [Об учебнике геометрии] // Волга (газ.) 1984. 11 марта.

1985

Геометрия. 7: (Пробный учебник). М.: Просвещение, 1985. 192 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Финслерово пространство обобщенное // Мат. энцикл. М., 1985. Т. 5. С. 624–625. Совместно с В. Н. Берестовским.

О строгости изложения в учебном пособии А. В. Погорелова // Математика в школе. 1985. № 5. С. 64–68.

Истина и «парадигма» // Наука в Сибири. 1985. 14 февр.

[Заседание памяти студентов, преподавателей и сотрудников ЛГУ, погибших на фронтах войны] // Ленингр. ун-т. 1985. 24 мая.

«Покори свою вершину» // Сов. спорт. 1985. 13 нояб.

1986

Геометрия. 8: (Пробный учебник). М.: Просвещение, 1986. 192 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Обобщенные римановы пространства // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 3. С. 3–44. Совместно с В. Н. Берестовским, И. Г. Николаевым.

То же на англ. яз.: Generalized Riemannian spaces // Russian Math. Surveys. 1986. Vol. 41, No. 3. P. 1–54. With V. N. Berestovskiĭ and I. G. Nikolaev.

Об одном изложении геометрии. Новосибирск, 1986. 25 с. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 15).

Николай Степанович Синюков: (К 60-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, вып. 2. С. 215–216. Совместно с А. М. Васильевым, Э. Г. Позняком.

То же на англ. яз.: Nikolaĭ Stepanovich Sinyukov (On the occasion of his sixtieth birthday) // Russian Math. Surveys. 1986. Vol. 41, No. 2. P. 215–216. With A. M. Vasil′ev and È. G. Poznyak.

Диалектика геометрии // Математика в школе. 1986. № 1. С. 12–19.

Об основаниях геометрии // Междунар. конф. по геометрии и ее приложениям (Смолян, июль 1986 г.): Тез. докл. 1986. С. 100.

Размышления об экономике и этике // ЭКО. 1986. № 2. С. 78–90.

Кадры решают все // Наука в Сибири. 1986. 30 янв.

Школьник и ЭВМ: [О курсе «Основы информатики и вычислительной техники»] // Соц. индустрия. 1986. 19 февр.

Научность подлинная и мнимая: [О научности преподавания] // Учит. газ. 1986. 15 марта.

Еще раз об истине и парадигме // Наука в Сибири. 1986. 24 июля.

1987

Геометрия. 7–9: (Конкурсный учебник). М.: Просвещение, 1987. 408 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия. 10–11: (Конкурсный учебник). М.: Просвещение, 1987. 207 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Основания геометрии: (Учеб. пособие). М.: Наука, 1987. 288 с.

Об основаниях геометрии // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 9–28. С дополнением Г. Я. Перельмана.

То же на англ. яз.: Foundations of geometry // Siberian Math. J. 1987. Vol. 28, No. 4. P. 523–539. With a supplement by G. Ya. Perel′man.

Леонид Витальевич Канторович: (Некролог) // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, № 2. С. 177–182. Совместно с А. Г. Аганбегяном, М. К. Гавуриным, С. С. Кутателадзе и др.

То же на англ. яз.: Leonid Vital′evich Kantorovich (Obituary) // Russian Math. Surveys. 1987. Vol. 42, No. 2. P. 225–232. With A. G. Aganbegyan, M. K. Gavurin, S. S. Kutateladze, et al.

Адольф Павлович Юшкевич: (К 80-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, №. 4. С. 211–212. Совместно с М. И. Башмаковым, С. С. Демидовым, А. Н. Колмогоровым и др.

То же на англ. яз.: Adol′f Pavlovich Yushkevich: (On the occasion of his eightieth birthday) // Russian Math. Surveys. 1987. Vol. 42, No. 4. P. 179–181. With M. I. Bashmakov, S. S. Demidov, A. N. Kolmogorov, et al.

Ред.: Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление. Новосибирск, 1987. 223 с.

Пути развития школы // Математика в школе. 1987. № 5. С. 9–14.

[Выступление на годичном собрании АН СССР] // Вестн. АН СССР. 1987. № 8. С. 39–41.

Истина как моральная ценность // Наука и ценности. Новосибирск: Наука, 1987. С. 23–43.

Ищите истину // Комс. правда. 1987. 25 авг.

Не бойтесь брать решение на себя // Ленингр. ун-т. 1987. 6 нояб.

1988

Геометрия. 9–10: (Для школ и классов с углубл. изучением математики). 2-е изд., дораб. М.: Просвещение, 1988. 480 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Поворот кривой в n-мерном евклидовом пространстве // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 1. С. 3–22. Совместно с Ю. Г. Решетняком.

То же на англ. яз.: Rotation of a curve in n-dimensional Euclidean space // Siberian Math. J. 1988. Vol. 29, No. 1. P. 1–16. With Yu. G. Reshetnyak.

Проблемы науки и позиция ученого: (Статьи и выступления) (В серии: «Наука. Мировоззрение. Жизнь»). Л.: Наука, 1988. 510 с.

Вклад В. А. Фока в релятивистскую теорию пространства, времени и тяготения (К 90-летию со дня рождения) // Исследования по истории физики и механики. М.: Наука, 1988. С. 106–113. Совместно с Г. М. Идлисом.

Геометрия // Мат. энцикл. слов. М.: Сов. энцикл., 1988. С. 143–150.

Лобачевского геометрия // Там же. С. 324–327.

Многомерная геометрия // Там же. С. 375–376.

Пространство // Там же. С. 503–504.

Риманова геометрия // Там же. С. 528–531. Совместно с Ю. Ф. Борисовым.

Глеб Павлович Акилов: [Некролог] // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 1. С. 181–182. Совместно с А. М. Вершиком, В. В. Ивановым, А. Г. Кусраевым и др.

То же на англ. яз.: Gleb Pavlovich Akilov (Obituary) // Russian Math. Surveys. 1988. Vol. 43, No. 1. P. 221–223. With A. M. Vershik, V. V. Ivanov, A. G. Kusraev, et al.

Boris A. Rozenfel′d: (On the 70th anniversary of his birth) // Historia Math. 1988. Vol. 15, No. 1. P. 1–8. With S. S. Demidov, A. T. Grigoryan, G. P. Matvievskaya, et al.

На чем человек держится // Студенческий меридиан. 1988. № 8. С. 10–13.

То же // Наука в Сибири. 1989. 10 марта.

Университет подобен монастырю: (В защиту идеи загородного университетского городка) // Ленингр. ун-т. 1988. 17 июня.

Конкурс есть, а учебников нет // Известия. 1988. 3 авг. Совместно с Д. А. Александровым.

1989

General Theory of Irregular Curves. Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1989. x+288 p. (Mathematics and Its Appl.: Soviet Ser.; Vol. 29.) With Yu. G. Reshetnyak.

Роман Николаевич Щербаков: (Некролог) // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 1. С. 177–178. Совместно с И. А. Александровым, Ю. Е. Боровским, Ю. Г. Решетняком и др.

То же на англ. яз.: Roman Nikolaevich Shcherbakov: (Obituary) // Russian Math. Surveys. 1989. Vol. 44, No. 1. P. 223–224. With I.A. Aleksandrov, Yu. E. Borovskiĭ, Yu. G. Reshetnyak, et al.

Дмитрий Константинович Фаддеев: (К 80-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 3. С. 187–193. Совместно с М. И. Башмаковым, З. И. Боревичем, В. Н. Кублановской и др.

То же на англ. яз.: Dmitriĭ Konstantinovich Faddeev (On the occasion of his eightieth birthday) // Russian Math. Surveys. 1989. Vol. 44, No. 3. P. 223–231. With M. I. Bashmakov, Z. I. Borevich, V. N. Kublanovskaya, et al.

Алексей Васильевич Погорелов: (К 70-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 4. С. 245–249. Совместно с В. А. Марченко, С. П. Новиковым, Ю. Г. Решетняком.

То же на англ. яз.: Alekseĭ Vasil′evich Pogorelov (On the occasion of his seventieth birthday)// Russian Math. Surveys. 1989. Vol. 44, No. 4. P. 217–223. With V. A. Marchenko, S. P. Novikov, and Yu. G. Reshetnyak.

Юрий Григорьевич Решетняк: (К 60-летию со дня рождения) // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 3–8. Совместно с Ю. Ф. Борисовым, В. М. Гольдштейном, С. Л. Крушкалем и др.

Юрий Григорьевич Решетняк: (К 60-летию со дня рождения) // Современные проблемы геометрии и анализа / Тр. Ин-та математики; Т. 14. Новосибирск: Наука, 1989. С. 3–8. Совместно с С. Л. Крушкалем, С. С. Кутателадзе.

О сущности университета // Вестн. высш. школы. 1989. № 5. С. 8–10.

Искать таланты! Всесоюзной олимпиаде школьников нужна поддержка общественности // Известия. 1989. 23 янв. Совместно с В. И. Арнольдом, Р. З. Сагдеевым.

В озлоблении нет добра // Ленингр. ун-т. 1989. 10 марта.

Что-нибудь да останется // Наука в Сибири. 1989. 7 апр.

Сущность университетского образования: (Лекция по просьбе студентов) // Ленингр. ун-т. 1989. 8 сент.

Не штопать прорехи: (Прагматический подход к науке тормозит ее развитие) // Известия. 1989. 14 окт.

О марксистском мировоззрении // Ленингр. ун-т. 1989. 8 дек.

1990

Геометрия: (Для педагогических институтов и педагогических специальностей университетов). М.: Наука, 1990. 671 с. Совместно с Н. Ю. Нецветаевым.

Об основаниях геометрии // Математика в школе. 1990. № 3. С. 70–71.

Юрий Григорьевич Решетняк: (К 60-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 1. С. 231–238. Совместно с С. Л. Крушкалем, С. С. Кутателадзе, С. П. Новиковым.

То же на англ. яз.: Yuriĭ Grigor′evich Reshetnyak (On the occasion of his 60th birthday) // Russian Math. Surveys. 1990. Vol. 45, No. 1. P. 199–204. With S. L. Krushkal′, S. S. Kutateladze, and S. P. Novikov.

Всесоюзная конференция по геометрии и анализу // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, вып. 3. С. 211–212. Совместно с С. С. Кутателадзе, П. С. Филатовым.

Выступление на Годичном общем собрании АН СССР (март 1990) // Вестн. АН СССР. 1990. № 7. С. 126.

Философия как осмысление совести // Какая философия нам нужна. Л.: Лениздат, 1990. С. 107–122.

В Президиум Верховного Совета СССР. В Комитет по гласности, правам и обращениям граждан Верховного Совета СССР: (Письмо от 24 января 1990 г.) // Ленингр. ун-т. 1990. 2 февр. Совместно с Е. Б. Александровым, О. А. Ладыженской.

Сознательная акция?: (Открытое письмо председателю Исполкома Ленингр. горсовета В. Я. Ходыреву и начальнику Главного управления внутр. дел Леноблисполкома Г. П. Вощинину) // Смена. 1990. 4 февр. Совместно с О. Б. Божковым, В. В. Кавториным.

Провал лысенковщины в Ленинграде // Ленингр. ун-т. 1990. 14 и 21 дек.

1991

Геометрия. 8–9: (Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изучением математики). М.: Просвещение, 1991. 415 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Теория относительности // Математика в школе. 1991. № 3. С. 4–8.

Виктор Абрамович Залгаллер: (К 70-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1991. Т. 46, № 1. С. 215–216. Совместно с С. С. Кутателадзе, Ю. Г. Решетняком, Г. Ш. Рубинштейном и др.

То же на англ. яз.: Viktor Abramovich Zalgaller (On the occasion of his seventieth birthday) // Russian Math. Surveys. 1991. Vol. 46, No. 1. P. 257–259. With S. S. Kutateladze, Yu. G. Reshetnyak, G. Sh. Rubinshteĭn, et al.

Вступление (предисловие) к воспоминаниям Вадима Делоне «Портреты в колючей раме»// Аврора. 1991. № 5. С. 68–71.

Просим прислушаться: (В Верховный Совет Грузии. Господину З. Гамсахурдия. Тбилисский университет. АН Грузии. Абастуманская астрономическая обсерватория) // Ленингр. правда. 1991. 26 февр. Совместно с С. С. Лавровым, А. А. Никитиным и др.

Заявление по поводу референдума в СССР // Ленингр. ун-т. 1991. 15 марта. Совместно с П. П. Араповым, А. Ф. Бережной, А. О. Бороноевым и др.

К достойной жизни — вместе! // Ленингр. ун-т. 1991. 16 марта.

Дамба строится вопреки требованиям ленинградцев // Известия. 1991. 3 июня. Совместно с Д. С. Лихачевым, Ж. И. Алферовым, Ю. И. Полянским и др.

Призыв к миру // С.-Петербург. ун-т. 1991. 15 нояб.

Ред.: Алгебра и анализ: Сб. трудов 1-й Сибирской зимней школы, Кемерово, март 9–17, 1987. Совместно с О. В. Белеградеком, Л. А. Бокутем, Ю. Л. Ершовым.

То же на англ. яз.: Algebra and Analysis. Proceedings of the First Siberian Winter School Held at Kemerovo State University, Kemerovo, March 9–17, 1987. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. viii+112 p. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; Vol. 148). With O. V. Belegradek, L. A. Bokut′, and Yu. L. Ershov.

1992

Геометрия: (Учебник для 7–9-го классов сред. школы). М.: Просвещение, 1992. 320 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия. 10–11: (Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изучением математики). 3-е изд., перераб. М.: Просвещение, 1992. 464 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Лицемерие конституции // Совесть (СПб). 1992. № 7 (июнь).

Восхождение к истине или горная геометрия // С.-Петербург. ун-т. 1992. 25 сент.

То же // Слово и дело (СПб). 1992. 2 дек.

«Труднее были времена, но не было подлей» // Народная правда (СПб). 1992. 7 дек.

1993

О геометрии Лобачевского // Математика в школе. 1993. № 2. С. 2–7; № 3. С. 2–5.

Если бы урок вел я ... // Эврика. 1993. № 2.

1994

Геометрия. 7: (Эксперим. учеб. пособие для учащихся 7-го кл. сред. учеб. завед.). М.: Московск. ин-т развития образоват. систем, 1994. 199 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия. 10–11: (Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изучением математики). М.: Просвещение, 1994. 463 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Минимальные основания геометрии // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1195–1209.

То же на англ. яз.: Minimal foundations of geometry // Siberian Math. J. 1994. Vol. 35, No. 6. P. 1057–1069.

1995

Геометрия. 7–9: (Учебник для 7–9-го классов общеобразовательных учреждений). 2-е изд. М.: Просвещение, 1995. 318 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия. 8–9: (Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изучением математики). 2-е изд. М.: Просвещение, 1995. 415 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия // Мат. энцикл. слов. 2-е (репр.) изд. 1988 г. М.: Большая Рос. энцикл., 1995. С. 143–150.

Лобачевского геометрия // Там же. С. 324–327.

Многомерная геометрия // Там же. С. 375–376.

Пространство // Там же. С. 503–504.

Риманова геометрия // Там же. С. 528–531. Совместно с Ю. Ф. Борисовым.

Семён Самсонович Кутателадзе: (К 50-летию со дня рождения) // Линейные операторы, согласованные с порядком / Тр. Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН; Т. 29 / Ред. Ю. Г. Решетняк. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. С. 3–6. Совместно с А. Г. Кусраевым, Ю. Г. Решетняком.

Нельзя молчать // Веч. Ленинград. 1995. 7 янв.

1996

A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1: Selected Scientific Papers / Ed. by Yu. G. Reshetnyak and S. S. Kutateladze. Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. x+322 p.

1997

Геометрия. 9: (Эксперим. учеб. пособие для учащихся 9-го кл. сред. учеб. завед.). М.: Мирес, 1997. 347 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Семён Самсонович Кутателадзе: (К 50-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1997. Т. 52, № 2. С. 201–204. Совместно с О. А. Ладыженской, Ю. Г. Решетняком.

То же на англ. яз.: Semën Samsonovich Kutateladze (On his 50th birthday) // Russian Math. Surveys. 1997. Vol. 52, No. 2. P. 447–450. With O. A. Ladyzhenskaya and Yu. G. Reshetnyak.

1998

Геометрия. 7: (Учебник для 7-го кл. сред. школы). СПб.: Спецлит, 1998. 236 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия: (Учебник для 10–11-го классов общеобразовательных учреждений). М.: Просвещение, 1998. 271 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия // Математика. Большой энцикл. слов. 3-е (репр.) изд. «Мат. энцикл. слов.» 1988 г. М.: Большая Рос. энцикл., 1998. С. 143–150.

Лобачевского геометрия // Там же. С. 324–327.

Многомерная геометрия // Там же. С. 375–376.

Пространство // Там же. С. 503–504.

Риманова геометрия // Там же. С. 528–531. Совместно с Ю. Ф. Борисовым.

Ученые всегда с народом: (Письмо на первую полосу) // Правда России. 1998. 13–19 мая.

1999

Геометрия. 10: (Учебник для 10-го класса с углубл. изучением математики). М.: Просвещение, 1999. 228 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Алексей Васильевич Погорелов: (К 80-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 4. С. 188–190. Совместно с А. А. Борисенко, В. А. Залгаллером, В. А. Марченко и др.

То же на англ. яз.: Alekseĭ Vasil′evich Pogorelov (On his 80th birthday) // Russian Math. Surveys. 1999. Vol. 54, No. 4. P. 869–872. With A. A. Borisenko, V. A. Zalgaller, V. A. Marchenko, et al.

Юрий Григорьевич Решетняк: (К 70-летию со дня рождения) // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 725–731. Совместно с С. С. Кутателадзе.

Юрий Григорьевич Решетняк: (К 70-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5. С. 191–195. Совместно с С. С. Кутателадзе, С. П. Новиковым.

То же на англ. яз.: Yuriĭ Grigor′evich Reshetnyak (On his 70th birthday) // Russian Math. Surveys. 1999. Vol. 54, No. 5. P. 1069–1075. With S. S. Kutateladze and S. P. Novikov.

Интервью с И. Г. Абрамсоном // Альтернативы. 1999. № 1. С. 134–142.

A general view of mathematics // Mathematics, Its Content, Methods, and Meaning. Mineola; New York: Dover Publications, 1999. xviii + 372 p. (Reprint of the 2nd 1969 ed.)

Curves and surfaces // Ibid.

Non-Euclidean geometry // Ibid.

Topology // Ibid.

Ред.: Mathematics: Its Content, Methods and Meaning / Eds.: A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, and M. A. Lavrent′ev. Mineola; New York: Dover Publications, 1999. xviii + 372 p. (Reprint of the 2nd 1969 ed.)

2000

Геометрия. 11: (Учебник для 11-го класса с углубленным изучением математики). М.: Просвещение, 2000. 320 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Вклад В. А. Фока в релятивистскую теорию пространства, времени и тяготения // Исследования по истории физики и механики (1998–1999). М.: Наука, 2000. С. 36–50. Совместно с Г. М. Идлисом.

2001

Геометрия. 10–11: (Учебник для 10–11-го класса общеобразовательных учреждений). 2-е изд. М.: Просвещение, 2001. 272 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

2002

Геометрия. 8: (Учеб. пособие для 8-го класса с углубленным изучением математики). М.: Просвещение, 2002. 240 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

2003

Геометрия. 10: (Учебник для 10-го класса с углубленным изучением математики). 2-е изд. М.: Просвещение, 2003. 240 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия. 7–9: (Учебник для 7–9-го классов). 3-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2003. 272 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

2004

Геометрия. 9: (Учеб. пособие для 9-го класса с углубленным изучением математики). М.: Просвещение, 2004. 240 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком.

Геометрия. 10–11: (Книга для учителя). М.: Просвещение, 2004. 132 с. Совместно с А. Л. Вернером, В. И. Рыжиком, Л. П. Евстафьевой.

2005

A. D. Alexandrov. Convex Polyhedra / English translation by N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze and A. B. Sossinsky. Comments and bibliography by V. A. Zalgaller. Appendices by L. A. Shor and Yu. A. Volkov. Berlin etc.: Springer-Verlag, 2005. xi + 539 p.

2006

A. D. Alexandrov. Selected Works. Part II: Intrinsic Geometry of Convex Surfaces / Ed. by S. S. Kutateladze. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006. xii + 426 p.

О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей

Математический сборник. 1936. Т. 1, № 3. С. 307–321

Рассмотрение непрерывных деформаций поверхностей, сохраняющих длины, имеет смысл не только для поверхностей регулярных; достаточно, конечно, чтобы на поверхности существовало достаточно много кривых, о длине которых имело бы смысл говорить. Соответствующий класс так называемых спрямляемых поверхностей (la famille des surfaces rectifiables) был определен А. Лебегом [1, с. 315] следующим образом.

Мы говорим, что поверхность S

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

определенная для данной области D плоскости (u, v), спрямляема, если каждой спрямляемой кривой на D соответствует спрямляемая кривая на S.

Если речь идет о поверхностях, гомеоморфных сфере, то за область параметров естественно принять сферу единичного радиуса. Тогда, например, всякая выпуклая поверхность будет спрямляемой, если отображать на нее помещенную внутри сферу так, что точка сферы переходит в точку поверхности, лежащую на том же радиусе. Пусть вектор $\overline{x}(u, v)$ во время $t = 0$ описывает сферу. Если начать ее постепенно продавливать, то мы получим непрерывное семейство поверхностей $\overline{x}(u, v; t)$, изометрических со сферой, такое, что $\overline{x}(u, v; 0) = \overline{x}(u, v)$, причем в каждый момент времени каждая точка поверхности будет иметь определенную скорость $\partial\overline{x}/\partial t$. Этот пример показывает, что всякая поверхность изгибаема, если дать понятию изгибания слишком общее определение. Поэтому мы ограничимся рассмотрением бесконечно малых изгибаний, определенных следующим образом.

Пусть на спрямляемой поверхности $\overline{x}(u, v)$ задано непрерывное поле скоростей $\overline{z}(u, v)$ такое, что всякая спрямляемая кривая на исходной поверхности переходит в спрямляемую кривую на деформированной поверхности $\overline{x}(u, v) + t\overline{z}(u, v)$. Как будет показано в § 1, при таком условии всегда существует односторонняя производная $\partial s/\partial t$ от длины любой спрямляемой кривой по времени. Если при $t = 0$ для всякой спрямляемой кривой на поверхности $\partial s/\partial t = 0$, то я буду говорить, что поверхность $\overline{x}(u, v)$ подвергается бесконечно малому изгибанию со скоростью $\overline{z}(u, v)$ и что поле $\overline{z}(u, v)$ является изгибающим полем.

Если поверхность не допускает бесконечно малых изгибаний, отличных от движений, то говорят, что она жесткая. Такое определение соответствует, видимо, механической жесткости, обнаруживающейся при попытке деформировать поверхность, сделанную из гибкого, но практически нерастяжимого материала. Конечно, и нерегулярные поверхности могут быть реально изготовлены. Правда, понятие о поверхностях, не имеющих касательной плоскости в повсюду плотном множестве точек, и другие подобные идеи, вводимые теорией функций вещественной переменной, не имеют, надо думать, непосредственно реального смысла; но, к сожалению, мы не имеем достаточно общего метода исследования сколь угодно, в пределах реального, нерегулярных функций, поверхностей и т. п.; поэтому неизбежно мы следуем по пути, проложенному А. Лебегом.

В первых двух параграфах этой работы выводится известное уравнение

$$d\overline{x}\, d\overline{z} = 0,$$

которому удовлетворяет изгибающее поле почти везде. Далее доказывается жесткость выпуклых и не имеющих плоских кусков поверхностей вращения, сферическое изображение которых покрывает всю сферу, т. е. или замкнутых, или имеющих полюс и один параллельный круг, лежащий в касательной плоскости, или два таких параллельных круга[1]. При этом ничего кроме выпуклости меридиана не предполагается.

§ 1. О *бесконечно малых изгибаниях кривых*

Пусть конец вектора $\overline{x}(s)$ описывает непрерывную спрямляемую кривую, где s — длина ее дуги. Рассмотрим деформацию этой кривой со скоростью $\overline{z}(s)$ такую, что кривая $\overline{x}(s) + t\overline{z}(s)$ непрерывна и спрямляема. Иными словами, функция $\overline{z}(s)$ непрерывна и ограниченной вариации. Для краткости мы говорим, что векторная функция некоторых параметров удовлетворяет какому-нибудь условию (непрерывность, ограниченность вариации, абсолютная непрерывность, условие Липшица), если все три ее составляющие, как функции тех же параметров, удовлетворяют этому условию. Длину дуги деформированной кривой обозначим через $s(t)$. Найдем выражение для

[1] Под параллельным понимается круг, лежащий в плоскости, ортогональной оси вращения, с центром в точке оси. — *Прим. ред.*

$\partial s(t)/\partial t$ и покажем тем самым, что она существует при $t \geqslant 0$:

$$s(t) = \int\limits_0^s |\overline{x}' + t\overline{z}'|\, ds + \sigma(s,t). \tag{1}$$

Штрихами обозначены производные по s, а прямыми черточками — длина вектора. Добавка $\sigma(s,t)$ есть нижний предел суммы длин дуг деформированной кривой, содержащих все те точки, в которых $|\overline{x}' + t\overline{z}'|$ бесконечна, или, так как $|\overline{x}'| \leqslant 1$, все те точки, где $|\overline{z}'|$ бесконечна (см., например, [2, с. 166]).

Выбрав последовательность множеств дуг $\Delta s(t)$ так, что

$$\lim \sum \Delta s(t) = \sigma(s,t),$$

и замечая, что по определению длины дуги

$$\Delta s(t) = \lim \sum |\delta\overline{x} + t\delta\overline{z}|,$$

где $\delta\overline{x} + t\delta\overline{z}$ — хорда, можно написать, что

$$\sigma(s,t) = \lim \sum \lim \sum |\delta\overline{x} + t\delta\overline{z}|. \tag{2}$$

Из того, что при $t > 0$

$$t|\delta\overline{z}| - |\delta\overline{x}| \leqslant |\delta\overline{x} + t\delta\overline{z}| \leqslant t|\delta\overline{z}| + |\delta\overline{x}|,$$

явствует, что

$$t \lim \sum \lim \sum |\delta\overline{z}| - \lim \sum \lim \sum |\delta\overline{x}| \leqslant \sigma(s,t) \leqslant$$
$$\leqslant t \lim \sum \lim \sum |\delta\overline{z}| + \lim \sum \lim \sum |\delta\overline{x}|.$$

Но, как известно, $\overline{x}(s)$ есть абсолютно непрерывная функция s, и множество точек, где $|\overline{z}'(s)|$ бесконечна, имеет по s меру нуль, так как $\overline{z}(s)$ ограниченной вариации. Поэтому вторые члены в левой и правой частях неравенства исчезают, и мы получаем

$$\sigma(s,t) = t \lim \sum \lim \sum |\delta\overline{z}| = tv(s). \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = \lim_{\tau\to 0} \int\limits_0^s \frac{|\overline{x}' + (t+\tau)\overline{z}'| - |\overline{x}' + t\overline{z}'|}{\tau} ds + v(s).$$

Применяя неравенство треугольника, легко видеть, что стоящее под интегралом выражение не превосходит по абсолютной величине $|\overline{z}'(s)|$, которая суммируема, так как $\overline{z}(s)$ ограниченной вариации. Поэтому мы можем перейти к пределу под знаком интеграла и получим [2)]

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = \int\limits_0^s \frac{\overline{x}'\overline{z}' + t\overline{z}'^2}{|\overline{x}' + t\overline{z}'|} ds + v(s). \tag{4}$$

В частности, при $t = 0$, так как почти везде $|\overline{x}'| = 1$,

$$\frac{\partial s(0)}{\partial t} = \int\limits_0^s \overline{x}'\overline{z}'\, ds + v(s). \tag{5}$$

Потребуем теперь, чтобы $\overline{z}(s)$ было изгибающим полем, т. е. потребуем, чтобы $\frac{\partial s}{\partial t}(0) = 0$ для всякой дуги. Тогда

$$\int\limits_0^s \overline{x}'\overline{z}'\, ds = -v(s).$$

Интеграл, стоящий здесь, является, конечно, абсолютно непрерывной функцией s, в то время как $v(s)$, если она не тождественный нуль, претерпевает полное изменение на множестве меры нуль, где $|\overline{z}'|$ бесконечна, как это явствует из определения $v(s)$, данного в формуле (3). Отсюда следует, что $v(s) = 0$ и

$$\int\limits_0^s \overline{x}'\overline{z}'\, ds = 0$$

для всех s, а значит, $\overline{x}'\overline{z}' = 0$ почти везде по s.

Если $v(s) = 0$, то $\overline{z}(s)$ абсолютно непрерывна, так как при вычислении ее изменения на множестве сколь угодно малой меры конечный результат дает только та его часть, которая содержит точки, где $|\overline{z}'(s)|$ бесконечна.

Достаточность абсолютной непрерывности $\overline{z}(s)$ и соблюдения почти везде равенства $\overline{x}'\overline{z}' = 0$ для того, чтобы $\overline{z}(s)$ было изгибающим полем, очевидна из предыдущих рассуждений. Таким образом мы получаем теорему:

Для того, чтобы на спрямляемой кривой $\overline{x}(s)$ поле скоростей $\overline{z}(s)$ было изгибающим, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{z}(s)$ была абсолютно непрерывной функцией длины дуги s и чтобы почти везде по s выполнялось уравнение

$$\overline{x}'(s)\overline{z}'(s) = 0.$$

[2)] Это — производная справа. Производная слева будет содержать $-v(s)$.

Условия, которым подчиняется изгибающее поле, линейны, т.е. если $\overline{z}_1(s)$ и $\overline{z}_2(s)$ — изгибающие поля, то и $a\overline{z}_1(s) + b\overline{z}_2(s)$ — изгибающее поле. Пусть на данной кривой определено непрерывное семейство изгибающих полей $\overline{z}(s, v)$, зависящее от параметра $v\,(0 \leqslant v \leqslant 1)$. Пусть длины изогнутых кривых $\overline{x}(s) + t\overline{z}(s, v)$ равномерно ограничены при всяком t. Тогда

$$\overline{z}(s) = \int\limits_0^1 \overline{z}(s, v)\,dv$$

будет также изгибающим полем на нашей кривой. Если речь идет о достаточно регулярных изгибаниях гладкой кривой, то это замечание тривиально: все сводится к дифференцированию по s под знаком интеграла, так как

$$\overline{x}'(s)\overline{z}'(s) = \overline{x}'(s)\frac{d}{ds}\int\limits_0^1 \overline{z}(s, v)dv = \int\limits_0^1 \overline{x}'(s)\overline{z}'(s, v)dv = 0,$$

потому что $\overline{x}'(s)\overline{z}'(s, v) = 0$ при всяком v. Оправдание этого простого соображения в случае наших общих предположений требует некоторых замечаний. Интеграл

$$\int\limits_0^s \left|\frac{\partial}{\partial s}\overline{z}(s, v)\right|\,dv$$

ограничен как функция v, так как по предположению длина изогнутой кривой $\overline{x}(s) + t\overline{z}(s, v)$ ограничена как функция v. Отсюда на основании одной известной теоремы (см., например, [3, с. 108, п. 94]) следует поверхностная суммируемость $\left|\frac{\partial \overline{z}}{\partial s}(s, v)\right|$, а значит, и $\frac{\partial \overline{z}}{\partial s}(s, v)$ в области переменных s и v. Это позволяет утверждать (см. [3, с. 109–110, п. 97]), что почти для всех s

$$\overline{z}'(s) = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\overline{z}(s, v)\,dv.$$

Отсюда уже легко видеть, что $\overline{z}(s)$ абсолютно непрерывна (является интегралом своей производной) и что почти для всех s

$$\overline{x}'(s)\overline{z}'(s) = 0,$$

так что $\overline{z}(s)$ — действительно изгибающее поле. Это замечание пригодится нам при рассмотрении бесконечно малых изгибаний поверхностей вращения.

§ 2. *О бесконечно малых изгибаниях поверхностей*

Пусть конец вектора $\overline{x}(u, v)$ описывает спрямляемую поверхность, когда параметры u, v меняются в некоторой области D. А. Лебег [2] показал, что для того, чтобы $\overline{x}(u, v)$ представляла спрямляемую поверхность, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{x}(u, v)$ удовлетворяла условию Липшица:

$$|\overline{x}(u_1, v_1) - \overline{x}(u_2, v_2)| < M\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}.$$

Как показал Г. Радемахер [4, с. 52], при этих условиях почти везде в области D существует полный дифференциал

$$d\overline{x} = \overline{x}_u du + \overline{x}_v dv.$$

Пусть на нашей поверхности задано изгибающее поле $\overline{z}(u, v)$. Тогда, как ясно из определения изгибающего поля, поверхность $\overline{x}(u, v) + t\overline{z}(u, v)$ спрямляема и, следовательно, $\overline{z}(u, v)$ также удовлетворяет условию Липшица, и почти везде в D существует полный дифференциал

$$d\overline{z} = \overline{z}_u du + \overline{z}_v dv.$$

Возьмем в D три семейства прямых $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $u - v = \text{const}$. Образы этих прямых на поверхности спрямляемы и подвергаются изгибанию со скоростью $\overline{z}$; поэтому на каждой из них почти везде выполняется уравнение

$$\frac{d\overline{x}}{ds}\frac{d\overline{z}}{ds} = 0,$$

где s — длина дуги. Если du/ds конечно, то

$$\frac{d\overline{x}}{ds}\frac{d\overline{z}}{ds} = \overline{x}_u\frac{du}{ds}\ \overline{z}_u\frac{du}{ds} = 0,$$

и, так как из условия Липшица

$$\frac{du}{ds} \geqslant \frac{1}{M} > 0,$$

то $\overline{x}_u\overline{z}_u = 0$. Если же $ds/du = 0$, то тем более $\overline{x}_u = 0$.

Как очевидно, на всяком множестве положительной меры на прямой $v = \text{const}$, которое переходит в множество меры нуль по длине дуги s на поверхности, почти везде $\overline{x}_u = 0$, а так как $\overline{z}(u, v)$ удовлетворяет условию Липшица, то $\overline{z}_u$ ограничена. Из этих соображений следует, что на каждой прямой $v = \text{const}$ $\quad \overline{x}_u\overline{z}_u = 0$ почти везде.

Те же рассуждения приложимы к прямым $u = \mathrm{const}$ и $u - v = \mathrm{const}$, если на последних ввести параметр $w = \sqrt{u^2 + v^2}$, так что на этих прямых почти везде выполняются соответственно уравнения $\overline{x}_v \overline{z}_v = 0$, $\overline{x}_w \overline{z}_w = 0$. Все производные $\overline{x}_u, \ldots, \overline{z}_w$ поверхностно измеримы в области D, и раз наши уравнения выполняются почти везде на прямых, то они выполняются и почти везде в D (в смысле поверхностной меры). Если почти везде в D $\overline{x}(u, v)$ и $\overline{z}(u, v)$ имеют полный дифференциал, то почти везде

$$\overline{x}_w \overline{z}_w = \overline{x}_u \overline{z}_u \left(\frac{du}{dw}\right)^2 + (\overline{x}_u \overline{z}_v + \overline{x}_v \overline{z}_u) \frac{du}{dw} \frac{dv}{dw} + \overline{x}_v \overline{z}_v \left(\frac{dv}{dw}\right)^2,$$

и в силу того, что почти везде

$$\overline{x}_u \overline{z}_u = \overline{x}_v \overline{z}_v = \overline{x}_w \overline{z}_w = 0,$$

почти везде

$$\overline{x}_u \overline{z}_v + \overline{x}_v \overline{z}_u = 0.$$

Таким образом мы получаем следующий результат.

Если на спрямляемой поверхности $\overline{x}(u, v)$ *задано изгибающее поле* $\overline{z}(u, v)$, *то*

1) $\overline{z}(u, v)$ *удовлетворяет условию Липшица*:

$$|\overline{z}(u_1, v_1) - \overline{z}(u_2, v_2)| < M \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2};$$

2) *почти везде в области параметров* u, v *имеет место уравнение*

$$d\overline{x}\, d\overline{z} = 0$$

или в развернутой форме

$$\overline{x}_u \overline{z}_u = \overline{x}_v \overline{z}_v = \overline{x}_u \overline{z}_v + \overline{x}_v \overline{z}_u = 0.$$

Эти условия, как нетрудно убедиться на примерах, не являются достаточными для того, чтобы $\overline{z}(u, v)$ было изгибающим полем. Для того чтобы получить дальнейшие результаты, мы ограничимся более частным классом поверхностей, нежели класс поверхностей только спрямляемых. Мы будем предполагать, что если последовательность многоугольников $P_1, P_2, \ldots$ в D сходится к кривой L так, что длина L равна пределу длин P_n, то предел длин образов этих многоугольников на поверхности равен длине образа L. Поверхность, обладающую этим свойством, назовем непрерывно спрямляемой. Например, всякая поверхность, составленная из гладких кусков, на которых E, F, G непрерывны, или рассматриваемые далее поверхности вращения будут непрерывно спрямляемы.

Для того чтобы на непрерывно спрямляемой поверхности, описываемой концом вектора $\overline{x}(u, v)$, *поле* $\overline{z}(u, v)$ *было изгибающим, необходимо и достаточно:*

1) *чтобы* $\overline{z}(u, v)$ *удовлетворяло условию*

$$|\overline{z}(u_1, v_1) - \overline{z}(u_2, v_2)| < M\rho,$$

где (u_1, v_1) *и* (u_2, v_2) — *две произвольные точки;* ρ — *геодезическое расстояние между ними на поверхности;*

2) *чтобы почти везде в* D *выполнялось уравнение*

$$d\overline{x}\, d\overline{z} = 0.$$

Необходимость второго условия уже доказана. Для доказательства необходимости первого допустим противное, а именно, что существует такая последовательность пар точек $A_1, B_1,\ A_2, B_2, \ldots,$ что

$$\frac{|\overline{z}(A_n) - \overline{z}(B_n)|}{\rho(A_n, B_n)}$$

неограниченно возрастает, если n стремится к бесконечности. Можно, очевидно, считать, что точки A_n сходятся к одной точке A и точки B_n— к B, причем A и B совпадают, так как иначе $|\overline{z}(u, v)|$ была бы неограничена. Возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ конечна. Выберем из нашей последовательности пар точек подпоследовательность $A_{\alpha_1}, B_{\alpha_1},\ A_{\alpha_2}, B_{\alpha_2}, \ldots,$ удовлетворяющую трем условиям:

$$\left.\begin{aligned} \rho(A, A_{\alpha_n}) \quad &< \varepsilon_n, \\ \rho(A_{\alpha_n}, B_{\alpha_n}) \quad &< \varepsilon_n, \\ \frac{|\overline{z}(A_n) - \overline{z}(B_n)|}{\rho(A_n, B_n)} &> \frac{1}{\varepsilon_n}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Из условия непрерывной спрямляемости поверхности явствует, что любую пару точек A_{α_n}, B_{α_n} можно соединить бесконечным числом дуг, не имеющих общих точек кроме концов, и с длинами, сколь угодно близкими к $\rho(A_{\alpha_n}, B_{\alpha_n})$. Проведя достаточное число таких дуг между точками A_{α_n} и B_{α_n}, можно получить непрерывную кривую с длиной, большей ε_n, но меньшей $2\varepsilon_n$. На изогнутой поверхности, описываемой концом вектора $\overline{x}(u,v)+t\overline{z}(u,v)$, наши дуги получат длины

$$s_n \geqslant |\overline{x}(A_{\alpha_n})+t\overline{z}(A_{\alpha_n})-\overline{x}(B_{\alpha_n})-t\overline{z}(B_{\alpha_n})| \geqslant$$
$$\geqslant t\big|\overline{z}\,|(A_{\alpha_n})-\overline{z}(B_{\alpha_n})|-\rho(A_{\alpha_n},B_{\alpha_n})\big|,$$

или в силу последнего из неравенств (1)

$$s_n > \left|t\frac{1}{\varepsilon_n}-1\right|\,\rho(A_{\alpha_n},B_{\alpha_n}).$$

Поэтому длина всей построенной нами кривой на изогнутой поверхности станет $>|t/\varepsilon_n-1|\,\varepsilon_n$. Проделав наше построение для всех пар точек A_{α_n}, B_{α_n} и соединяя все A_{α_n} с A, мы получим на исходной поверхности непрерывную кривую длины, меньшей $3\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n$, так как по (1) $\rho(A,A_{\alpha_n})<\varepsilon_n$. С другой стороны, на изогнутой поверхности длина соответствующей кривой будет больше $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t-\varepsilon_n|$, т. е. бесконечна, так что поле $\overline{z}(u,v)$ не является изгибающим.

Для доказательства достаточности вышеуказанных условий возьмем в D какую-нибудь непрерывную спрямляемую кривую L. Длину образа кривой L на поверхности обозначим $s(L)$, а на изогнутой поверхности — $s(L,t)$. Построим в D непрерывную последовательность многоугольников P_r, покрывающих некоторую окрестность L, и такую, что P_r сходятся к L и длины их сходятся к длине L при r, стремящемся к бесконечности[3)]. Тогда по условию непрерывной спрямляемости

$$\lim_{r=\infty} s(P_r)=s(L).$$

На изогнутой поверхности будет

$$\lim_{r=\infty} s(P_r,t)\geqslant s(L,t).$$

Отсюда получаем

$$\frac{s(L,t)-s(L)}{t}\leqslant \lim_{r\to\infty}\frac{s(P_r,t)-s(P_r)}{t}. \tag{2}$$

Так как почти везде в D

$$d\overline{x}\,d\overline{z}=0$$

[3)] r пробегает, конечно, континуум значений.

и P_r покрывают некоторую площадь, то среди них найдутся такие P_{r_1}, $P_{r_2}, \ldots$, которые сходятся к L, и почти везде на их образах на поверхности будет

$$\overline{x}'(s)\,\overline{z}'(s) = 0.$$

Так как

$$|\overline{z}(u_1, v_1) - \overline{z}(u_2, v_2)| < M\rho, \tag{3}$$

то $\overline{z}(s)$ абсолютно непрерывна и

$$|\overline{z}'(s)| \leqslant M.$$

Воспользовавшись формулой (4) § 1, мы получим

$$\frac{\partial s(P_r, t)}{\partial t} = t \int_0^s \frac{\overline{z}'^2}{|\overline{x}' + t\overline{z}'|}\, ds \leqslant tM^2 \frac{s(P_r)}{1 - tM} \tag{4}$$

при $t < 1/M$, когда знаменатель положителен. По формуле конечных приращений

$$\frac{s(P_r, t) - s(P_r)}{t} = \frac{\partial s(P_r, \tau)}{\partial t} \leqslant \frac{\tau M^2 s(P_r)}{1 - \tau M}. \tag{5}$$

Отсюда по формуле (2)

$$\frac{s(L, t) - s(L)}{t} \leqslant \frac{\tau M^2 s(P_r)}{1 - \tau M}, \tag{6}$$

и, переходя к пределу при $t \to 0$,

$$\frac{\partial s(L, 0)}{\partial t} \leqslant 0. \tag{7}$$

Это неравенство выполняется для любой кривой. Но по формуле (5) § 1

$$\frac{\partial s(L, 0)}{\partial t} = \int_0^s \overline{x}'\overline{z}'\, ds.$$

Заменив изгибающее поле $\overline{z}(u, v)$ на $-\overline{z}(u, v)$, получим, очевидно, снова изгибающее поле, удовлетворяющее условиям теоремы. При этом $\frac{\partial s}{\partial t}(L, 0)$ изменит знак, в то время как неравенство (7) допускает для этой производной значения только одного знака или нуль. Отсюда ясно, что

$\frac{\partial s}{\partial t}(L,0)=0$ и если кривая L любая, то наша поверхность подвергается изгибанию. Этот результат ведет к следующему любопытному приложению. Возьмем в D прямые $u=a$, $v=b$, $u-v=c$, где постоянные a,b,c принимают всюду плотное, во всем допустимом для каждой из них интервале, множество значений. Соответствующую фигуру на определенной для D непрерывно спрямляемой поверхности назовем плотной триангуляционной сеткой. Пусть $\rho(A,B)$ означает геодезическое расстояние точек A,B на поверхности, а $\rho'(A,B)$ — геодезическое расстояние их на сетке. Потребуем, чтобы для любой пары точек A и B на сетке

$$\frac{\rho'(A,B)}{\rho(A,B)}<N. \tag{8}$$

Пусть на плотной триангуляционной сетке задано изгибающее поле $\overline{z}(u,v)$. Можно, пользуясь рассуждениями, примененными для доказательства только что установленной теоремы, показать, что на сетке

$$|\overline{z}(A)-\overline{z}(B)|<M\rho'(A,B)$$

и, в силу неравенства (8),

$$|\overline{z}(A)-\overline{z}(B)|<MN\rho(A,B).$$

Отсюда ясно, что можно распространить заданное на сетке изгибающее поле $\overline{z}(u,v)$ на всю поверхность так, что на ней оно будет удовлетворять первому условию выше доказанной теоремы. Возьмем, скажем, прямую $u=\alpha$ (α не равно ни одному из выбранных a). Взяв последовательность прямых: $u=a_1$, $u=a_2,\ldots,\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, и применяя рассуждения, развитые выше, получим для любой дуги образа прямой $u=\alpha$ на поверхности

$$\frac{\partial s(0)}{\partial t}=0$$

и, следовательно, почти везде на этой прямой

$$\overline{x}_v\overline{z}_v=0.$$

Аналогично на прямых $v=\beta$ почти везде $\overline{x}_u\overline{z}_u=0$ и, вводя на прямых $u-v=\mathrm{const}$ параметр $w=\sqrt{u^2+v^2}$, почти везде на каждой из них $\overline{x}_w\overline{z}_w=0$. Из равенств $\overline{x}_u\overline{z}_u=\overline{x}_v\overline{z}_v=\overline{x}_w\overline{z}_w=0$, как и в начале этого параграфа, следует, что почти везде в D

$$d\overline{x}\,d\overline{z}=0.$$

Таким образом, поле, распространенное на всю поверхность, удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и, следовательно, является на ней изгибающим.

Легко, конечно, видеть, что тот же результат получится, если рассматривать и другие плотные триангуляционные сетки, а не только нашу специальную.

Таким образом, мы приходим к теореме:

Если на плотной триангуляционной сетке, удовлетворяющей условию (8) *на непрерывно спрямляемой поверхности, задано изгибающее поле, то оно может быть распространено на всю поверхность. Следовательно, если такая поверхность жесткая, то и плотная триангуляционная сетка на ней жесткая.*

(Заметим, что если условие (8) не выполняется, то, как показывают примеры, эта теорема не выполняется, т. е. изгибающее поле на сетке может и не дать изгибающего поля на поверхности.) На поверхностях вращения можно построить плотную триангуляционную сетку, беря плотные на ней множества меридианов, параллелей и, так сказать, диагональных для них линий. Из доказательства жесткости замкнутых (и некоторых других) выпуклых поверхностей вращения, которое дается ниже, следует, например, жесткость таких сеток.

§ *3. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей вращения*

С. Кон-Фоссен в одной из своих работ [5], посвященной доказательству существования нежестких замкнутых поверхностей вращения, разлагал изгибающее поле в ряд Фурье и сводил, таким образом, задачу к изучению отдельных коэффициентов разложения. Между прочим, он получил доказательство жесткости замкнутых выпуклых поверхностей вращения, меридиан которых имеет всюду определенную кривизну. Покажем, что метод Кон-Фоссена легко обобщается на произвольные выпуклые поверхности вращения и что имеет место

Теорема. *Выпуклая поверхность вращения, не имеющая плоских кусков и такая, что сферическое изображение ее покрывает всю сферу, жесткая.*

Термин «сферическое изображение» введен здесь для краткости. Для выпуклых поверхностей, допускающих ребра, конические точки и другие особенности, ему можно придать следующий смысл. Через все внутренние точки поверхности проводятся все возможные опорные плоскости, а в точках, лежащих на краю, только те, которые являются предельными для опорных плоскостей во внутренних точках. Единичные векторы, направленные по внешним нормалям по всем этим плоскостям, дадут сферическое изображение поверхности, если их отложить из одной точки. Из этого разъяснения видно, что в нашей теореме речь идет о трех типах выпуклых поверхностей вращения: 1) замкнутых, 2) имеющих полюс и один параллельный круг, лежащий в плоскости, касательной к поверхности, 3) имеющих два таких параллельных круга (подобно внешней части тора). Такие круги я буду называть параболическими.

Все выпуклые поверхности вращения, являющиеся замкнутыми множествами и не относящиеся ни к одному из перечисленных типов, нежесткие [4)].

Пусть конец вектора $\overline{x}(u,v)$ описывает поверхность вращения, где u — высота по оси, а v — угол по параллельному кругу. Введем в каждой точке поверхности три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$; $\overline{a}$ — параллельный оси, $\overline{c}$ — касательный к параллельному кругу и связанный с $\overline{b}$ так, что

$$\frac{\partial \overline{b}}{\partial v} = \overline{c}, \qquad \frac{\partial \overline{c}}{\partial v} = -\overline{b}. \tag{1}$$

Мы будем рассматривать векторы в таких вращающихся осях и считать, что вектор $\overline{z}(u)$ зависит только от u, если составляющие его на $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ не зависят от v, т. е. если поле векторов $\overline{z}$ на поверхности переходит само в себя при вращениях вокруг оси.

Пусть на поверхности вращения задано изгибающее поле $\overline{z}(u,v)$. Возьмем на ней спрямляемую кривую $\overline{x}(s)$, на ней индуцировано изгибающее поле $\overline{z}(s)$. Вращая изгибающее поле вокруг оси, мы будем получать снова изгибающие поля $\overline{z}(u, v-v')$, где v' — угол поворота. Это ясно из того, что при вращениях вокруг оси поверхность переходит сама в себя. Таким образом, мы получим семейство изгибающих полей на кривой $\overline{x}(s)$. Оно удовлетворяет, конечно, тому условию, которое было сформулировано в конце § 1, а потому, например,

$$\overline{z}_k(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{z}(u, v-v')\cos kv'\,dv'$$

будет изгибающим полем. Сделав подстановку $v - v' = v''$, легко получить, что

$$\overline{z}_k(u,v) = \overline{\zeta}_k(u)\cos kv + \overline{\eta}_k(u)\sin kv, \tag{2}$$

где $\overline{\zeta}_k(u)$ и $\overline{\eta}_k(u)$ — коэффициенты Фурье функции $\overline{z}(u,v)$.

[4)] Нежесткие поверхности — это те, на которых можно задать нетривиальное изгибающее поле. Они вовсе не обязаны допускать непрерывные регулярные изгибания. Так, Э. Рембс показал, что кусок аналитической поверхности с параболическим кругом таких изгибаний не допускает, хотя он нежесткий [6].

Точно так же будет изгибающим полем и

$$\overline{z}_k^*(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{z}(u, v - v')\sin kv'\,dv',$$

$$\overline{z}_k^*(u,v) = \overline{\zeta}_k(u)\sin kv - \overline{\eta}_k(u)\cos kv. \tag{3}$$

Таким образом, если на поверхности вращения можно задать изгибающее поле, то из него можно получить поля вида (2) и (3). Возможность разложить всякую функцию, удовлетворяющую условию Липшица, единственным образом в ряд Фурье обеспечивает нам право ограничиться исследованием полей вида (2) и (3). Вычисления, как обычно, упрощаются, если взять

$$\overline{z}_k(u,v) \pm i\overline{z}_k^*(u,v) = (\overline{\zeta}_k(u) \mp i\overline{\eta}_k(u))e^{\pm ikv} = \overline{\xi}_{\pm k}(u)e^{\pm ikv}. \tag{4}$$

Стоящие в правой части члены представляют k-й и $-k$-й члены ряда Фурье

$$\overline{z}(u,v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\xi}_k(u)e^{ikv},$$

каждый член которого представляет изгибающее поле. Положим вектор, описывающий поверхность,

$$\overline{x}(u) = \overline{a}u + \overline{b}r(u) \tag{5}$$

и

$$\overline{\xi}_k(u) = \overline{a}\varphi_k(u) + \overline{b}\psi_k(u) + \overline{c}\chi_k(u). \tag{6}$$

Подставим в уравнения изгибания

$$\overline{x}_u\overline{z}_u = \overline{x}_v\overline{z}_v = \overline{x}_u\overline{z}_v + \overline{x}_v\overline{z}_u = 0, \tag{7}$$

вместо $\overline{x}$ выражение (5) и вместо $\overline{z}$

$$\overline{\xi}_k(u)e^{ikv}$$

и получим, применяя соотношение (1),

$$\varphi_k'(u) + r'(u)\psi_k'(u) = 0, \tag{8}$$

$$\psi_k(u) + ik\chi_k(u) = 0, \tag{9}$$

$$ik\varphi_k(u) + r'(u)[ik\psi_k(u) - \chi_k(u)] + r(u)\chi_k'(u) = 0. \tag{10}$$

Воспользовавшись уравнением (9), можно исключить $\psi_k(u)$ и получить

$$\varphi_k'(u) = ikr'(u)\chi_k'(u), \tag{11}$$

$$ik\varphi_k(u) + (k^2-1)r'(u)\chi_k(u) + r(u)\chi_k'(u) = 0. \tag{12}$$

В случаях $k = 0, 1, -1$ эти уравнения легко интегрируются, если

$$r(u) = \int r'(u)\,du,$$

и можно убедиться, что соответствующие изгибающие поля будут представлять движения поверхности и притом такие, что любое движение представляется их комбинацией. Поэтому собственно изгибания получаются при $|k| \geqslant 2$ (см. [5]).

В полюсах скорость имеет определенное значение, а потому там должно быть $\varphi_k = \psi_k = \chi_k = 0$ при $|k| \geqslant 2$.

Для того чтобы судить о φ_k и χ_k на параболическом круге, примем за независимую переменную r, тогда уравнения (11), (12) перепишутся в форме

$$u'(r)\varphi_k'(r) = ik\chi_k'(r), \tag{11$'$}$$

$$iku'(r)\varphi_k(r) + (k^2-1)\chi_k(r) + r\chi_k'(r) = 0. \tag{12$'$}$$

Если изгибающее поле удовлетворяет условию Липшица, то $\varphi_k'(r)$ должна быть конечна в окрестности параболического круга, а в случае выпуклого меридиана $u'(r)$ монотонно стремится к нулю при приближении к параболическому кругу. Отсюда и на основании уравнения (11$'$) ясно, что ${\chi_k}'(r)$ стремится к нулю при приближении к этому кругу. Поэтому из уравнения (12$'$) заключаем, что $\chi_k = 0$ на параболическом круге, если $k^2 - 1 \neq 0$.

Итак, мы получили, что на концах промежутка изменения u $\chi_k(u) = 0$ при $|k| \geqslant 2$.

Из (12) следует, что

$$\chi_k(u) = -\int\limits_0^u \frac{ik\varphi_k(u) + (k^2-1)r'(u)\chi_k(u)}{r(u)}\,du,$$

и так как $r(u), \varphi_k(u), \chi_k(u)$ непрерывны, а $r'(u)$ монотонна, то подынтегральное выражение при всяком u имеет определенные предельные значения слева и справа. (Исключение могут представлять только концы промежутка, где возможно $r(u) = 0$ и $r'(u) = \infty$.) Отсюда на основании известной теоремы мы заключаем, что $\chi_k(u)$ имеет при всех u определенные односторонние производные, которые везде удовлетворяют уравнению (12), если в нем под $r'(u)$ понимать соответствующую одностороннюю производную. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением, скажем, производных справа, и для них уравнение (12) будет иметь место всюду. По тем же соображениям то же относится и к уравнению (11).

Введя обозначение

$$f(u+\Delta u) - f(u) = \Delta f(u),$$

можно при любом u и $\Delta u > 0$ получить из (12)

$$\begin{aligned} ik\Delta\varphi_k(u) + (k^2-1)r'(u)\Delta\chi_k(u) + (k^2-1)\chi_k(u+\Delta u)\Delta r'(u) + \\ + \chi'_k(u)\Delta r(u) + r(u+\Delta u)\Delta\chi'_k(u) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Из уравнения (11) следует, что

$$\Delta\varphi_k(u) = \varphi'_k(u)\Delta u + \varepsilon\Delta u = ikr'(u)\chi'_k(u)\Delta u + \varepsilon\Delta u. \tag{14}$$

Вместе с тем

$$\Delta\chi_k(u) = \chi'_k(u)\Delta u + \delta\Delta u \tag{15}$$

и

$$\Delta r(u) = r'(u)\Delta u + \gamma\Delta u. \tag{16}$$

Подставляя (14)–(16) в (13) и приводя подобные члены, получим

$$(k^2-1)\chi_k(u+\Delta u)\Delta r'(u) + r(u+\Delta u)\Delta\chi'_k(u) = \alpha\Delta u, \tag{17}$$

где $\alpha = -ik\varepsilon - (k^2-1)r'(u)\delta - \chi'_k(u)\gamma$ стремится к нулю при Δu, стремящемся к нулю.

Так как меридиан выпуклый, то $\Delta r'(u) \leqslant 0, r(u+\Delta u) > 0$, и, положив для определенности $\chi_k(u) > 0$, получим, что при достаточно малых Δu

$$\chi_k(u+\Delta u) > 0\,^{5)}.$$

Если $\Delta r'(u)/\Delta u$ остается меньше некоторого отрицательного числа, то $\Delta\chi'_k(u)/\Delta u > 0$. Если $\Delta r'(u)/\Delta u$ стремится к нулю по мере приближения Δu к нулю по какому-нибудь закону, то и $\Delta\chi'_k(u)/\Delta u$ стремится к нулю. Следовательно,

$$\varliminf_{\Delta u \to +0} \frac{\Delta\chi'_k(u)}{\Delta u} \geqslant 0. \tag{18}$$

[5] Берем вещественную или мнимую часть.

Так как $\Delta u > 0$ и речь идет о правой производной, то мы не получаем ничего о скачках $\chi_k'(u)$. Но пусть $r'(u)$ терпит разрыв в точке u_0. (Из (12) ясно, что в точках непрерывности $r'(u)$ $\chi_k'(u)$ непрерывна.) Тогда, взяв уравнение (12) для правых производных в u_0 и для левых в той же точке и вычитая второе из первого, получим для скачков $\Delta r'(u_0)$ и $\Delta\chi_k'(u)$

$$(k^2-1)\chi_k(u_0)\Delta r'(u_0) + r(u_0)\Delta\chi_k'(u_0) = 0 \tag{19}$$

и так как $\Delta r'(u_0) < 0$, то, предполагая $\chi_k(u_0) > 0$,

$$\Delta\chi_k'(u_0) > 0. \tag{20}$$

Поскольку левая производная является в данном случае предельным значением слева правой производной, то (20) показывает, что во всякой точке, где $\chi_k'(u)$ претерпевает скачок, величина скачка положительна, если $\chi_k(u) > 0$. Отсюда и из (18) следует, что $\chi_k'(u)$ — неубывающая функция, если $\chi_k(u) > 0$.

В левом конце промежутка изменения u $\chi_k(u) = 0$. Пусть где-нибудь в промежутке $\chi_k(u) > 0$, тогда имеется такая точка u_0, где $\chi_k(u_0) > 0$ и $\chi_k'(u_0) > 0$. Так как $\chi_k'(u)$ не убывает, то $\chi_k'(u) > \chi_k'(u_0)$, если $u > u_0$, и, следовательно, $\chi_k(u)$ не может обращаться в нуль в правом конце промежутка изменения u, что противоречит установленному выше. Таким образом, $\chi_k(u) = 0$ везде при $|k| \geqslant 2$ и на основании (10) и (9) $\varphi_k(u) = \psi_k(u) = 0$, т. е. собственно изгибания невозможны.

Не останавливаясь подробно на доказательстве нежесткости выпуклых поверхностей вращения, являющихся замкнутыми множествами и отличных от поверхностей трех указанных выше типов, отметим только, что оно основано на следующих замечаниях:

1. Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в разрешенной относительно производных форме имела решения с абсолютно интегрируемыми производными при любых начальных значениях, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты системы были абсолютно интегрируемы. Эту лемму следует применить к уравнениям для $\varphi_k(u)$ и $\chi_k(u)$, получающимся из (11) и (12).

2. Существование решений, обращающихся в нуль в полюсе или на параболическом круге, можно доказать, если взять решения $\varphi_k(u)$ и $\chi_k(u)$, не удовлетворяющие этому условию, и искать требуемые решения в том виде, в каком по известным формулам выражаются линейно независимые от них решения. Именно, если $y' = py + qz$, $z' = ry + sz$ и y_1, z_1 — одна система решений, то другая получается в виде

$$y_2 = y_1 \int\limits_0^x \frac{q}{y_1^2} e^{\int (p+s)\,dx} dx, \quad z_2 = z_1 \int\limits_0^x \frac{q}{y_1^2} e^{\int (p+s)\,dx} dx + \frac{e^{\int (p+s)\,dx}}{y_1}.$$

Любопытно отметить, что из этих замечаний следует возможность построения ограниченного поля скоростей, удовлетворяющего уравнению $d\overline{x}d\overline{z} = 0$ на поверхностях с полюсом и одним параболическим кругом или с двумя такими кругами, если $r(u)^2$ имеет конечный интеграл в промежутке, заключающем то значение u, которому соответствует один из параболических кругов. Это, вообще говоря, возможно, хотя там $r'(u)^2 = \infty$. (Например, тогда, когда кривизна меридиана достаточно быстро обращается там в бесконечность.) Отсюда, однако, вовсе не следует изгибаемость такого рода поверхностей.

Пример того же обстоятельства представляют острия, получающиеся при вращении выпуклой дуги вокруг касательной в одном из ее концов. На таких остриях можно задать непрерывное и ограниченное поле скоростей, удовлетворяющее уравнению $d\overline{x}d\overline{z} = 0$. Но по условию, установленному в § 2, если s — дуга параллельного круга,

$$\left|\frac{\partial\overline{z}}{\partial s}\right| = \frac{1}{r}\left|\frac{\partial\overline{z}}{\partial v}\right| \leqslant M.$$

Если $\overline{z}(u,v) = [\overline{a}\varphi_k(u) + \overline{b}\psi_k(u) + \overline{c}\chi_k(u)]e^{ikv}$, то из написанного неравенства следует, что

$$|\chi_k(u)| \leqslant Mr(u).$$

Если $r(u)$ — аналитическая функция, то, переходя к пределу при $\Delta u \to 0$ в уравнении (17), получим

$$\chi_k''(u) + (k^2-1)\frac{r''(u)}{r(u)}\chi_k(u) = 0.$$

Полагая в самом острие $u = 0$, получим

$$\frac{r''(u)}{r(u)} = \frac{a}{u^2}(1 + f(u)),$$

где $f(u)$ — аналитическая функция, исчезающая при $u = 0$, $a > 1$. Полагая, как обычно,

$$\chi_k(u) = u^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n,$$

получим для ρ уравнение

$$\rho(\rho-1) + (k^2-1)a = 0,$$

из которого видно, что при $|k| \geqslant 2$ ρ комплексно и вещественная часть его равна $1/2$, так что $\chi_k(u)$ убывает при u, стремящемся к нулю, как $\sqrt{u}$. Вместе с тем

$$r(u) = u^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n,$$

а потому при достаточно малых u получим

$$|\chi_k(u)| > Mr(u),$$

что противоречит установленному выше неравенству. Таким образом, рассмотренные острия представляют любопытный пример хотя и сколь угодно малых, но жестких поверхностей.

Статья поступила в редакцию
1.XII.1935

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lebesgue H.* Intégrale, longueur, aire // Annali di Mat. Ser. 3. 1902. T. 7. P. 231–359.
2. *Лебег А.* Интегрирование и отыскание примитивных функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
3. *Валле-Пуссен Ш. Ж.* Курс анализа бесконечно малых. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1933.
4. *Rademacher H.* Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale. II // Math. Ann. 1920. Bd 81. S. 52–63.
5. *Cohn-Vossen St.* Unstarre geschlossene Flächen // Math. Ann. 1929. Bd 102. S. 10–29.
6. *Rembs E.* Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen // Math. Zeitschr. 1932. Bd 36. S. 110–121.

Элементарное доказательство теоремы Минковского и некоторых других теорем о выпуклых многогранниках

(Представлено академиком И. М. Виноградовым)

Известия Академии Наук СССР. Серия мат. 1937. № 4. С. 597–606

Дается элементарное доказательство теоремы Минковского о том, что выпуклый многогранник вполне определяется площадями и направлениями своих граней. Кроме того, доказывается, что выпуклый многогранник также вполне определяется направлениями и периметрами своих граней.

Г. Минковский во вступлении к своей работе «Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder» [1] писал:

«Der vorliegende Aufsatz entstand bei Gelegenheit von Versuchen den folgenden Satz zu beweisen, den ich seit längerer Zeit vermutete und dessen elementare Fassung nicht auf die Schwierigkeiten seiner Verifizierung schliessen lässt: Wenn aus einer endlichen Anzahl von lauter Körpern mit Mittelpunkt, die unter einander nur in den Begrenzungen zusammenstossen, sich ein konvexer Körper aufbaut, so hat dieser stets ebenfalls einer Mittelpunkt».

Г. Минковский получил эту теорему как следствие другой, более общей теоремы, являющейся основным результатом его упомянутой работы о многогранниках:

Выпуклый многогранник однозначно, с точностью до параллельного переноса, определяется заданием направлений и площадей его граней. Направление грани означает здесь направление внешней нормали к ней.

Доказательство этой теоремы, данное Г. Минковским, основано на неравенстве Брунна, установление которого требовало далеко не элементарных и довольно сложных рассуждений. Это обстоятельство, отмеченное Г. Минковским в цитированной выше фразе, ставило его теорему в особое положение среди других результатов теории многогранников. Поэтому оставалась потребность в таком ее доказательстве, которое по своей элементарности вполне соответствовало бы ее формулировке.

В предлагаемой работе эта задача решается тем более неожиданным образом, что, основываясь на результатах, уже давно известных в теории многогранников, мы элементарным путем доказываем даже более общую теорему, из которой теорема Минковского получается как частный случай, правда, только для трехмерных многогранников.

Связь теоремы Минковского с неравенством Брунна оказывается обратимой: воспользовавшись теоремой Минковского, мы доказываем неравенство Брунна для выпуклых многогранников.

§ *1. Основные элементы применяемого метода*

В основании теории многогранников лежит известная теорема Эйлера. Опираясь на некоторое ее расширение, О. Коши доказал другую замечательную топологическую теорему о многогранниках, которую он применил к доказательству теоремы о равенстве выпуклых многогранников, одинаково составленных из равных граней.

Теорема Коши, о которой идет речь, состоит в следующем: *невозможно сопоставить каждому ребру выпуклого многогранника положительный или отрицательный знак, или нуль так, чтобы хоть одно ребро получило определенный знак (а не нуль) и чтобы при обходе вокруг каждой грани, на ребрах которой не стоят сплошь нули, получалось не менее четырех перемен знака* [2] [1].

Эта теорема и служит главной основой применяемого мною метода. Таким образом, идея О. Коши еще раз обнаруживает свою силу как средство доказательств, а потому я буду говорить о ней как о «принципе Коши».

Другой важный элемент моих рассуждений представляет смешение выпуклых многогранников или многоугольников. Эта операция, введенная Г. Брунном, состоит в следующем. Пусть имеются два выпуклых многогранника H_1 и H_2 (или два выпуклых многоугольника в параллельных плоскостях). Соединим каждую точку одного из них (включая и внутренние точки) с каждой точкой другого прямолинейным отрезком и возьмем геометрическое место середин этих отрезков. Оно будет выпуклым многогранником (или многоугольником, лежащим в плоскости, параллельной плоскостям смешиваемых многоугольников), который обозначается $\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ [4, 5].

Основное свойство операции смешения, которое нам понадобится, состоит в том, что каждый элемент огранения — грань, ребро, вершина — многогранника $\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ получается в результате смешения элементов огране-

---

[1] Сам О. Коши не дал, как известно, исчерпывающего доказательства этой теоремы. Полное доказательство см., напр., [3, с. 39–40]. Теорема Коши формулируется обычно иначе: вместо обхода вокруг граней говорят об обходе вокруг вершин, что не составляет разницы, как это видно, если перейти от данного многогранника к дуальному.

ния, лежащих на многогранниках H_1 и H_2 в параллельных опорных плоскостях. (Здесь и в дальнейшем параллельность опорных плоскостей, опорных прямых, граней и т. п. мы понимаем в смысле параллельности внешних нормалей к ним.) Грань на $\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ может получаться от смешения пары параллельных граней, от смешения грани с ребром или с вершиной либо от смешения пары непараллельных ребер, лежащих в параллельных опорных плоскостях на H_1 и H_2. Ребро на $\frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ получается от смешения пары параллельных ребер или ребра и вершины, лежащих на H_1 и H_2 в параллельных опорных плоскостях.

При смешении многоугольников P_1 и P_2 получается многоугольник $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, стороны которого суть полусуммы параллельных сторон многоугольников P_1 и P_2. При этом если стороне одного из них не соответствует параллельная сторона на другом, то считается, что она есть, только имеет длину нуль. Это условие мы будем далее иметь в виду без специальных оговорок.

§ 2. *Одна теорема о выпуклых многоугольниках*

Мы будем говорить, что многоугольник P_1 помещается в многоугольнике P_2, если все точки P_1 лежат в P_2. Если, кроме того, хотя бы одна сторона P_1 попадает внутрь P_2, то будем говорить, что P_1 помещается внутри P_2. При рассмотрении сторон двух многоугольников будем сравнивать только стороны с параллельными внешними нормалями (помня условие о сторонах нулевой длины), поэтому для краткости будем опускать указание на это. Наконец, будем еще говорить, что стороны $l_1, l_2, \ldots, l_n$ больше сторон $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$, если $l_1 \geqslant l'_1, \ldots, l_n \geqslant l'_n$ и хотя бы для одной пары $l_i > l'_i$.

Теорема. *Если два выпуклых многоугольника P_1, P_2 не могут быть помещены один в другом путем параллельного переноса, то разности длин их сторон меняют знак не менее четырех раз при обходе вокруг любого из них.*

Лемма А. *Если у P_1 все стороны, кроме одной l_0, меньше, чем у P_2, то P_1 может быть параллельным переносом помещен внутри P_2.*

Возьмем на P_1 и P_2 соответственные вершины A_1 и A_2, через которые проходят опорные прямые с внешними нормалями, антипараллельными нормали к l_0, и совместим P_1 и P_2 этими вершинами. Вершина A_1 и сторона l_0 разделяют на P_1 две ломаные P'_1 и P''_1. Аналогично на P_2 будут две ломаные P'_2 и P''_2. P'_1 не выходит из P_2 через P'_2. Иначе, как легко усмотреть, на P'_1 была бы сторона большая, чем на P'_2. Таким образом, и P''_1 не выходит из P_2 через P''_2. Поэтому P_1 оказывается внутри P_2.

Лемма В. *Пусть у двух многоугольников P_1 и P_2 есть пара общих опорных прямых, пересекающихся в точке O. Пусть P'_1 и P'_2 — части границ P_1 и P_2, обращенные выпуклостью в сторону O. Если какой-нибудь луч из O пересекает P'_1 раньше P'_2, то на P'_1 есть сторона меньшая, чем на P'_2.*

Для доказательства будем подобно сжимать P_2' к O. В тот момент, когда P_2' окажется уже в области угла с вершиной O, ограниченной P_1', но будет еще соприкасаться с P_1', любая их общая сторона будет на P_2' не меньше, чем на P_1'. Этим лемма доказана.

Пусть теперь P_1 и P_2 — многоугольники, удовлетворяющие условиям теоремы. Если все стороны на P_1 меньше, чем на P_2, то P_1 можно поместить в P_2. Поэтому разности длин их сторон меняют знак не менее двух раз. Допустим, что имеются всего две перемены знака. Можно, конечно, предположить, при заданном направлении отсчета углов, что углы между нормалями к крайним сторонам, большим на P_1, чем на P_2, меньше π (иначе переменим номера у многоугольников). Разобьем границы P_1 и P_2 на части P_1', P_1'' и P_2', P_2'' такие, что стороны на P_1' меньше, чем на P_2', а на P_1'' и P_2'' наоборот.

Из леммы А следует, что P_1' можно поместить внутри P_2. Однако по условию теоремы P_1'' будет выходить из P_2. Возьмем на P_1'' точку, где есть опорная прямая, не пересекающая P_2. Двигая эту точку по P_1'' и поворачивая вместе с тем опорную прямую сперва в одну, а потом в другую сторону, мы получим пару общих опорных прямых a и b к P_1 и P_2, касающихся P_1 в точках, принадлежащих P_1''.

Так как угол между нормалями к крайним сторонам на P_1'' меньше π, то P_1'' обращено выпуклостью к точке пересечения O прямых a и b. Точки касания опорных прямых a и b к P_2 лежат от O дальше, чем точки их касания к P_1. Вместе с тем эти точки касания принадлежат P_2''. (Это, как легко усмотреть, следует из того, что стороны P_1' и P_2' параллельны и P_1' лежит внутри P_2.) Отсюда, по лемме В, на P_2'' есть стороны больше, чем на P_1''. Теорема доказана.

Замечание. Наша теорема вместе с ее доказательством, очевидно, обобщается на произвольные замкнутые выпуклые кривые. Возьмем такую кривую P и на единичной окружности E дугу φ. Пусть $l(\varphi)$ — длина дуги на P, состоящей из всех тех точек, через которые проходят опорные прямые с внешними нормалями, направленными в φ, если они проведены из центра E. Обобщение нашей теоремы гласит:

Если две замкнутые выпуклые кривые P_1 и P_2 не могут быть помещены одна в другой параллельными переносами, то единичная окружность разбивается минимум на четыре такие дуги φ_k, что $l_1(\varphi_k) - l_2(\varphi_k)$ меняет знак при переходе от одной дуги к соседней ($l_1(\varphi_k)$ — длина дуги P_1, $l_2(\varphi_k)$ — длина дуги P_2).

В случае дважды дифференцируемых кривых $l(\varphi)$ есть интеграл от радиуса кривизны по $d\varphi$. Поэтому из указанной теоремы сразу следует известная «теорема о четырех вершинах» (Vierscheitelsatz).

§ 3. Доказательство теоремы Минковского

Теорема. *Если у двух выпуклых многогранников грани одного соответствует грань другого с параллельной внешней нормалью и обратно, и если их соответственные грани не могут быть помещены одна внутри другой параллельными переносами, то многогранники равны и параллельно расположены.* (Здесь можно даже считать, что если на одном из многогранников нет грани с той же внешней нормалью, что и на другом, то она есть, но вырождается в ребро, лежащее в соответствующей опорной плоскости.)

Пусть H_1 и H_2 два многогранника, удовлетворяющие условиям теоремы. Построим многогранник

$$H = \frac{1}{2}(H_1 + H_2).$$

Каждое ребро многогранника H возникает или в результате смешения пары параллельных ребер, лежащих в параллельных опорных плоскостях на H_1 и H_2, или в результате смешения ребра одного из многогранников H_1 и H_2 с вершиной другого, причем смешивающиеся ребро и вершина лежат в параллельных опорных плоскостях. Во втором случае можно также считать, что ребро на H возникает при смешении ребер на H_1 и H_2, но только одно из них имеет длину нуль. При этом условии можно сказать, что каждому ребру многогранника H соответствует по ребру на H_1 и H_2, результатом смешения которых оно является.

Отнесем каждому ребру многогранника H знак плюс или минус, в зависимости от того, длиннее или короче соответствующее ребро на H_1, чем на H_2; в случае же равенства этих ребер относим ребру на H нуль. (Помним условие о ребрах длины нуль.)

Докажем, что при обходе вокруг каждой грани многогранника H, хоть одно ребро которой снабжено знаком, мы должны получить не менее четырех перемен знака.

Грани многогранника H будут двух родов. Грани первого рода получаются при смешении параллельных граней многогранников H_1 и H_2, второго — при смешении пар непараллельных ребер, лежащих в параллельных опорных плоскостях на H_1 и H_2. (Другие возможности исключены из-за попарной параллельности граней H_1 и H_2.)

Так как параллельные грани многогранников H_1 и H_2 имеют равные площади, то по теореме § 2 мы заключаем, что при обходе вокруг каждой грани первого рода будет не менее четырех перемен знака, если хоть одно ее ребро снабжено знаком.

Каждая грань P второго рода, как результат смешения двух непараллельных ребер, является параллелограммом. Пусть L_1 ребро на H_1 и L_2 ребро на H_2, дающие при смешении такую грань P. В плоскости, опорной к H_2 и параллельной плоскости грани P, нет ребра, параллельного L_1, иначе там имелась бы целая грань, потому что там уже есть ребро L_2. Ребро L_1 смешивается с двумя вершинами, являющимися концами ребра L_2, и дает две противоположные стороны параллелограмма P. То же относится к ребру L_2. Отсюда видно, что при обходе вокруг каждой грани второго рода мы имеем ровно четыре перемены знака.

Теперь, воспользовавшись принципом Коши, мы убеждаемся в том, что всем ребрам многогранника H должен соответствовать нуль. Это значит, что параллельные грани многогранников H_1 и H_2 равны, а потому сами эти многогранники также равны и параллельно расположены.

Если у многогранников H_1 и H_2 соответственно параллельные грани имеют равные площади, то они не могут быть помещены одна в другую. Поэтому теорема Минковского есть частный случай нашей теоремы. Точно так же получается, например, следующая теорема.

Если каждой грани одного выпуклого многогранника соответствует грань другого с параллельной внешней нормалью и с тем же периметром и обратно, то такие многогранники равны и параллельно расположены.

§ 4. *Жесткость выпуклого многогранника при стационарности направлений и площадей его граней*

Возьмем в плоскости начало и проведем из него n лучей так, чтобы они не были направлены в одну полуплоскость. Прямые, перпендикулярные этим лучам и пересекающие их, ограничат выпуклый многоугольник. Мы назовем эти прямые ограничивающими этот многоугольник.

Лемма. *Если прямые, ограничивающие данный многоугольник, претерпевают бесконечно малые смещения так, что площадь многоугольника стационарна* (*т. е. не изменяется с точностью до величин второго порядка малости*), *то изменения длин его сторон не менее четырех раз меняют знак при обходе вокруг него, если только получающаяся деформация многоугольника не сводится к бесконечно малому переносу. При этом считается, что если на многоугольнике возникает новая сторона, то она удлиняется.* Новая сторона может возникнуть, если какая-нибудь из ограничивающих прямых соприкасалась с исходным многоугольником в вершине, но не по стороне.

Пусть dl_i $(i = 1, \ldots, n)$ — изменения длин сторон многоугольника. Допустим, что dl_i только дважды меняют знак при обходе вокруг многоугольника. Пусть вершины A_1 и A_2 разделяют удлиняющиеся стороны от укорачивающихся. Возьмем начало на пересечении двух опорных прямых, проходящих через эти вершины. Тогда опорные числа многоугольника h_i меняют знак при переходе через A_1 и A_2, а произведения $h_i dl_i$ вовсе не меняют знака. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\, dl_i \tag{1}$$

равна нулю только тогда, когда все dl_i равны нулю. Но сумма (1) есть дифференциал площади многоугольника и, следовательно, по условию равна нулю [2]. Поэтому или все $dl_i = 0$ и многоугольник не деформируется, а лишь смещается, или dl_i меняют знак более 2, а значит не менее 4 раз.

Теорема. *Если плоскости граней выпуклого многогранника испытывают бесконечно малые смещения, так что площади граней стационарны, то сам многогранник претерпевает только бесконечно малое параллельное смещение.*

Прямые, получающиеся в пересечении плоскости данной грани P с плоскостями других граней, являются ограничивающими для грани P. При бесконечно малых смещениях граней они также смещаются, и если при этом грань P не испытывает просто параллельный перенос и площадь ее стационарна, то по предыдущей лемме изменения длин ее ребер не менее четырех раз меняют знак при обходе вокруг нее. (Условие о вновь возникающих ребрах то же, что и в лемме.)

Если отнести удлиняющемуся ребру знак плюс, укорачивающемуся — минус, а неизменяющемуся — нуль, то по принципу Коши всем ребрам должен быть отнесен нуль. Это значит, что длины всех ребер стационарны и, следовательно, многогранник испытывает только бесконечно малый параллельный перенос.

Доказанная таким образом теорема также относится к теореме Минковского, как теорема о жесткости выпуклого многогранника при неизменности его граней относится к теореме Коши о равенстве выпуклых многогранников, одинаково составленных из равных граней [3].

§ 5. *Неравенство Брунна — Минковского для выпуклых многогранников*

Пусть H и L — два выпуклых многогранника. Соединив каждую точку одного из них с каждой точкой другого прямолинейным отрезком и взяв геометрическое место точек, делящих эти отрезки в отношении $\vartheta : (1-\vartheta)$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$, получим выпуклый многогранник $K_\vartheta = (1-\vartheta)H + \vartheta L$.

---

[2] Площадь многоугольника $S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i l_i$; $dS = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i dl_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} l_i dh_i$. Вместе с тем $dS = \sum_{i=1}^{n} l_i dh_i$, так как $l_i dh_i$ есть площадь, зачерчиваемая i-й стороной при смещении dh_i. Отсюда $dS = \sum_{i=1}^{n} h_i dl_i$.

[3] Соответствующая теорема о жесткости многогранника при стационарности периметров и направлений его граней не отличается от теоремы, сформулированной в конце § 3, так как изменения периметров зависят от смещений граней линейно, почему условие их стационарности равносильно их точной неизменности.

Как показал Г. Минковский, объем этого многогранника равен

$$V(K_\vartheta) = (1-\vartheta)^3\, V(H,H,H) + 3(1-\vartheta)^2\,\vartheta V(H,H,L) + \\ + 3(1-\vartheta)\,\vartheta^2\, V(H,L,L) + \vartheta^3\, V(L,L,L), \tag{1}$$

где $V(H,H,H)$ и $V(L,L,L)$ — объемы H и L, а $V(H,H,L)$ и $V(H,L,L)$ — их так называемые смешанные объемы, равные

$$V(H,H,L) = \frac{1}{3}\sum L_i\, F_i(H), \tag{2}$$

$$V(H,L,L) = \frac{1}{3}\sum H_i\, F_i(L). \tag{3}$$

Здесь L_i — расстояние от начала до опорной плоскости к L, параллельной плоскости i-й грани многогранника H, площадь которой есть $F_i(H)$.

Аналогичный смысл имеют H_i и $F_i(L)$.

Если мы покажем, что имеют место два неравенства Минковского:

$$\left.\begin{aligned} V(H,H,L)^3 \geqslant V(H,H,H)^2\, V(L,L,L), \\ V(H,L,L)^3 \geqslant V(H,H,H)\, V(L,L,L)^2, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где знаки равенства стоят только при гомотетичности H и L, то тем самым, как сразу видно из (1), будет доказано, что если объемы H и L равны, то объем K_ϑ не меньше объема каждого из них и равен ему только тогда, когда H и L равны и параллельно расположены. А это и есть неравенство Брунна с дополнением Г. Минковского.

Пусть H — заданный выпуклый многогранник и L — переменный многогранник, имеющий, однако, только грани, параллельные граням H. Пусть $L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_n$ — опорные числа L, т. е. расстояние плоскостей его граней от начала. Они, конечно, его вполне определяют.

Рассмотрим функцию опорных чисел L_i

$$\Phi(L) = \frac{V(H,H,L)^3}{V(L,L,L)}. \tag{5}$$

Это — однородная функция нулевой степени в силу (2). Поэтому она одинакова для всех гомотетичных друг другу многогранников L, так что ее достаточно рассматривать для многогранников, имеющих один и тот же объем.

Если i-е опорное число L неограниченно растет, то в силу формулы (2) $V(H,H,L)$ также неограниченно растет, а по условию $V(L,L,L)$ остается постоянным. Отсюда следует, что $\Phi(L)$ достигает минимума для конечного многогранника L.

Минимум $\Phi(L)$ не может достигаться для таких многогранников L, у которых хоть одна грань вырождается в ребро или вершину. Пусть i-я грань вырождается таким образом. Сдвинем ее плоскость внутрь многогранника L на маленький отрезок δL_i. Изменение объема $\delta V(L,L,L)$ будет порядка $\delta L_i F_i(L)$, где $F_i(L)$ — площадь возникшей при этом грани. Поэтому объем уменьшается на величину не ниже второго порядка малости. А между тем уменьшение $V(H,H,L)$ будет равно $\delta L_i F_i(H)$ (как видно из (2)) и, следовательно, будет первого порядка малости. Отсюда видно, что при проделанном сдвиге плоскости исчезающей грани $\Phi(L)$ убывает.

Следовательно, минимум $\Phi(L)$ достигается для многогранника L, имеющего все невырождающиеся грани, параллельные граням H. Поэтому в точке минимума $\Phi(L)$ имеет частные производные по всем опорным числам L_i и все они должны равняться нулю. Как известно,

$$\frac{\partial V(L,L,L)}{\partial L_i} = F_i(L), \tag{6}$$

а по формуле (2)

$$\frac{\partial V(H,H,L)}{\partial L_i} = \frac{1}{3} F_i(H). \tag{7}$$

Вычисляя производные $\dfrac{\partial \Phi(L)}{\partial L_i}$ и приравнивая их нулю, получим

$$F_i(L) = \lambda F_i(H) \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{8}$$

где

$$\lambda = \frac{V(L,L,L)}{V(H,H,L)}. \tag{9}$$

Равенства (8) означают, что площади параллельных граней многогранников H и L пропорциональны. Поэтому, на основании теоремы Минковского, многогранники H и L гомотетичны. В этом случае

$$\Phi(L) = \frac{V(H,H,L)^3}{V(L,L,L)} = V(H,H,H)^2,$$

а так как это есть минимум $\Phi(L)$, то

$$V(H,H,L)^3 \geqslant V(H,H,H)^2\, V(L,L,L).$$

Это неравенство доказано нами пока только для случая, когда многогранник L имеет те же грани, что и многогранник H.

Если взять два любых многогранника H и L, то при всяком ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ многогранники $(1-\vartheta)H + \vartheta L$ и $\vartheta H + (1-\vartheta)L$ будут иметь соответственно параллельные грани. Поэтому для таких многогранников неравенства (4) справедливы. Но они перейдут в те же неравенства для самих H и L, если ϑ устремить к нулю.

Если в неравенствах (4) стоит знак равенства, то, как видно из формулы (1), при равенстве объемов H и L все многогранники K_ϑ имеют тот же объем. При $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ многогранник

$$K_\vartheta = \frac{\vartheta_2 - \vartheta}{\vartheta_2 - \vartheta_1} K_{\vartheta_1} + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} K_{\vartheta_2}$$

и его объем равен объемам K_{ϑ_1} и K_{ϑ_2}. Эти последние имеют соответственно параллельные грани, а значит, должны быть гомотетичными. Отсюда следует, что и многогранники H и L должны быть гомотетичными.

Статья поступила в редакцию
28.IV.1937

ЛИТЕРАТУРА

1. *Minkowski H.* Allgemeine Lehrzätze über die konvexen Polyeder // Gött. Nachr. 1897. S. 198–219. (Русский перевод: *Минковский Г.* Общие теоремы о выпуклых многогранниках // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 55–71.)
2. *Cauchy A.* Sur les polygones et les polyèdres. Second mémoire // J. Ecole Polytéchnique. 1813. T. 9. P. 87–98.
3. *Кон-Фоссен С. Э.* Изгибаемость поверхностей в целом // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 1. С. 33–76.
4. *Minkowski H.* Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs // Gesammelte Abhandlungen. Leipzig; Berlin: Teubner, 1911. Bd 2. S. 131–229.
5. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)

К теории смешанных объемов выпуклых тел. I: Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел [1)]

Математический сборник. 1937. Т. 2, № 5. С. 947–972

Обзор содержания

В настоящей работе мы будем заниматься выпуклыми телами в n-мерном евклидовом пространстве, n всегда будет обозначать число измерений пространства.

Выпуклым телом называется замкнутое ограниченное множество, содержащее вместе с любой парой своих точек и весь соединяющий их отрезок. Согласно этому определению, выпуклое тело может и не иметь внутренних точек; в этом случае мы будем говорить, что оно вырождается.

Г. Брунн и вслед за ним Г. Минковский ввели в теорию выпуклых тел операцию смешения, определяемую следующим образом.

Пусть $H_1, \ldots, H_m$ — выпуклые тела и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — неотрицательные числа. Выберем начало координат и будем проводить из него в точки тел $H_1, \ldots, H_m$ векторы $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m$. Когда концы этих векторов независимо друг от друга зачерчивают каждый свое выпуклое тело, то конец вектора $\lambda_1\overline{x}_1 + \ldots + \lambda_m\overline{x}_m$ опишет некоторое множество точек. Легко доказать, что оно будет выпуклым телом. Это записывается так:

$$H = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_m H_m.$$

Если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ изменяются, оставаясь неотрицательными, то тело H также изменяется; при этом, как показал Г. Минковский, его объем будет однородным многочленом степени n относительно переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$V(H) = \sum_{k_1,\ldots,k_n} \lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_n} V_{k_1,\ldots,k_n},$$

[1)] Подзаголовок добавлен в настоящем издании. — *Прим. ред.*

где сумма берется по всем индексам $k_1, \dots, k_n$, пробегающим независимо все значения от 1 до m. Коэффициенты $V_{k_1,\dots,k_n}$ определяются при этом так, чтобы они не зависели от порядка индексов. Полагая все λ равными нулю, кроме входящих в данное произведение $\lambda_{k_1} \dots \lambda_{k_n}$, убеждаемся, что $V_{k_1,\dots,k_n}$ зависит только от тел $H_{k_1}, \dots, H_{k_n}$. Поэтому естественно записывать его в виде $V(H_{k_1}, \dots, H_{k_n})$. Эти коэффициенты называются смешанными объемами. Из указанного ясно, что, вообще говоря, смешанный объем выпуклых тел в n-мерном пространстве зависит от n тел. Таким образом, определен функционал, зависящий от n выпуклых тел, — их смешанный объем $V(H_1, \dots, H_n)$.

В дальнейшем мы будем предполагать известными основные свойства выпуклых тел и их смешанных объемов и не будем каждый раз оговаривать, где было дано Г. Минковским их доказательство [1, 2].

Исходя из неравенства Брунна, Г. Минковский вывел ряд неравенств между смешанными объемами и показал, что они дают решение некоторых экстремальных задач о выпуклых телах. Кроме того, Г. Минковский, основываясь на том же неравенстве Брунна, доказал единственность выпуклого многогранника с заданными площадями граней и нормалями к ним, а также единственность выпуклого тела с заданной как функция внешней нормали гауссовой кривизной его поверхности [3–5]. Тем самым Г. Минковский указал новый сильный метод исследования в теории выпуклых тел. Интересно, например, отметить, что доказательство жесткости выпуклых многогранников и регулярных замкнутых выпуклых поверхностей, данное Вейлем, основано на применении результатов, относящихся к смешанным объемам. Естественно выделить круг вопросов, связанных с понятиями и методами Минковского, как теорию смешанных объемов выпуклых тел.

Настоящая работа ставит своей целью дальнейшее развитие этой теории. Она разбита мною на четыре части, первая из которых следует ниже, а три остальные появятся в последующих номерах Математического сборника. Содержание этих частей сводится, в общих чертах, к следующему.

Часть I. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел

До сих пор многие теоремы о выпуклых телах доказывались или для многогранников, или для тел с достаточно регулярной поверхностью. Однако и, так сказать, более «скверные» выпуклые тела заслуживают внимания. Поэтому представляется рациональным так видоизменить и расширить понятия о гауссовой кривизне и о функции кривизны вообще (Krümmungsfunktion — элементарно-симметрическая функция главных радиусов кривизны), чтобы они годились не только для регулярных, но и для любых выпуклых тел.

Это и является основной целью первой части работы. Результаты двух следующих частей доказываются и формулируются во введенных общих понятиях, благодаря чему они простираются на любые выпуклые тела.

Часть II. Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения

Здесь доказывается неравенство между смешанными объемами

$$V(H_1, \ldots, H_n)^2 \geqslant V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1})\, V(H_1, \ldots, H_{n-2}, H_n, H_n).$$

Исходя из него получается ряд дальнейших неравенств. Для смешанных объемов

$$V(\underbrace{H, \ldots, H,}_{m} E, \ldots, E) = V_m(H),$$

где E — единичный шар, получается теорема, аналогичная теореме Брунна — Минковского.

Если $H_\vartheta = (1-\vartheta)H_0 + \vartheta H_1 \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$, *то*

$$\sqrt[m]{V_m(H_\vartheta)} \geqslant (1-\vartheta)\, \sqrt[m]{V_m(H_0)} + \vartheta\, \sqrt[m]{V_m(H_1)}, \tag{$*$}$$

причем для тел H_0 *и* H_1, *имеющих внутренние точки, знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда* H_0 *и* H_1 *гомотетичны.*

$V_m(H)$ есть с точностью до множителя среднее всех проекций тела H на m-мерные плоскости; $V_{n-1}(H)$ есть деленная на n площадь поверхности тела H.

Доказывается единственность выпуклого тела с заданной любой функцией кривизны и, наконец, устанавливаются новые экстремальные свойства шара, непосредственно вытекающие из неравенства $(*)$.

Часть III. Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела

Эта часть непосредственно примыкает к работе Г. Минковского «Общие теоремы о выпуклых многогранниках» [5].

Воспользовавшись результатами части I, удается обобщить прежде всего теорему о существовании многогранника с заданными нормалями и площадями граней, непосредственно перенося рассуждения Г. Минковского в пространство непрерывных функций. В результате получается возможность реализовать любую абсолютно аддитивную неотрицательную функцию множеств на поверхности шара посредством выпуклой поверхности. Помимо этого получаются и некоторые другие результаты.

Часть IV. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы

Устанавливаются некоторые свойства инвариантов пучка квадратичных форм, которые мы называем смешанными дискриминантами; в частности, в случае положительных форм доказываются неравенства, совершенно аналогичные неравенствам между смешанными объемами. Эти результаты прилагаются к задачам теории выпуклых тел.

I. РАСШИРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

§ 1. *О площади выпуклых поверхностей*

Выпуклой поверхностью называется кусок границы или, как мы будем говорить, поверхности выпуклого тела. Если выпуклое тело, о котором идет речь, не имеет внутренних точек, то оно вырождается в плоскую область. В этом случае вопрос о площади любого куска его поверхности решается так же, как для плоских областей. Поэтому мы отбросим этот случай как тривиальный и ограничимся рассмотрением кусков поверхностей выпуклых тел с внутренними точками.

Пусть H — данное выпуклое тело с внутренними точками. Возьмем начало O внутри тела H и опишем вокруг него единичный шар E. Каждый луч, исходящий из O, протыкает поверхность E, а также поверхность H в одной точке. Таким образом, между точками поверхностей E и H устанавливается взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. Это соответствие мы назовем «радиальным, с началом O». (Точно так же можно установить радиальное соответствие между поверхностями любых выпуклых тел, содержащих начало внутри. При этом между множествами на поверхностях этих тел также устанавливается радиальное соответствие или, как мы еще будем говорить, множество σ_1 на поверхности H_1 радиально отображается на множество σ_2 на поверхности H_2.)

Построим последовательность выпуклых многогранников $H_1, H_2, \ldots$, содержащих H (а следовательно, и начало) и сходящихся к H. Пусть σ — множество точек поверхности тела H; пусть ω — множество точек на E, радиально соответствующее σ, и пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — множества точек на $H_1, H_2, \ldots$, также радиально соответствующие σ, а значит, и ω [2]. Площадь, или, что то же, меру множества σ, мы определим как предел площадей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, которые имеют смысл, если множества $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ не «слишком скверные», а при развертывании многогранников $H_1, H_2, \ldots$ на плоскость дают измеримые множества.

[2] Здесь и в дальнейшем выражение «на H» значит «на поверхности H».

Пусть $R, R_1, R_2, \dots$ — расстояния точек поверхностей $H, H_1, H_2, \dots$ от начала. Пусть $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ — углы между радиусами, идущими из начала в точки поверхностей $H, H_1, H_2, \dots$, и нормалями к опорным плоскостям тел $H, H_1, H_2, \dots$ в этих точках. В силу радиального соответствия между E, с одной стороны, и $H, H_1, H_2, \dots$ — с другой, указанные величины будут функциями точки на единичном шаре E. Обычным путем нетрудно, конечно, убедиться в том, что площадь $F(\sigma_k)$ многогранной поверхности σ_k, радиально соответствующей области ω на E, может быть выражена следующим образом:

$$F(\sigma_k) = \int\limits_{\omega} \frac{R_k^{n-1}}{\cos\varphi_k}\, d\omega, \tag{1}$$

где $d\omega$, так же как и всюду далее, — элемент поверхности единичного шара.

Если принять стоящий в (1) интеграл за меру множества σ_k и в том случае, когда ω — любое измеримое множество, то определенная таким образом мера будет обладать всеми требуемыми от этого понятия свойствами. Кроме того, она, конечно, совпадает с мерой развертки множества σ_k на плоскость. Нам нужно путем предельного перехода распространить это понятие меры, или площади $F(\sigma)$, на множества на поверхности любого выпуклого тела.

Здесь, как и на протяжении всей работы, мы будем обозначать точку тем же символом $\overline{x}$, что и вектор, проведенный в нее из начала. Мы будем говорить, что в точке $\overline{x}$ на теле H есть нормаль $\overline{n}$ к телу H, если через $\overline{x}$ проходит плоскость, опорная к H с внешней нормалью $\overline{n}$.

Лемма I. *Пусть последовательность выпуклых тел $H_1, H_2, \dots$ сходится к H и пусть $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots$ — сходящаяся последовательность точек, лежащих на поверхностях $H_1, H_2, \dots$. Предельная точка $\overline{x}$ этой последовательности лежит на поверхности H. Пусть $\overline{n}_1, \overline{n}_2, \dots$ — последовательность нормалей к $H_1, H_2, \dots$ в точках $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots$. Всякая сходящаяся подпоследовательность из этой последовательности сходится к нормали к H в точке $\overline{x}$.*

Пусть последовательность $\overline{n}_{k_1}, \overline{n}_{k_2}, \dots$ сходится к $\overline{n}$. Пусть $P_1, P_2, \dots$ — опорные плоскости к $H_{k_1}, H_{k_2}, \dots$ в точках $\overline{x}_{k_1}, \overline{x}_{k_2}, \dots$ с нормалями $\overline{n}_{k_1}, \overline{n}_{k_2}, \dots$. Они сходятся к плоскости P, проходящей через точку $\overline{x}$ и имеющей нормаль $\overline{n}$. Так как H_{k_ν} лежит по одну сторону от P_ν, то и предельное тело H лежит по ту же сторону от предельной плоскости P. Следовательно, плоскость P — опорная для тела H и проходит через его точку $\overline{x}$. Отсюда следует наше утверждение.

Лемма II. *Множеству тех точек на H, в которых есть более одной нормали (т. е. таких, где нет касательной плоскости), радиально соответствует множество меры нуль на E.*

Доказательство этой известной леммы мы опускаем (см. [6]).

Из этих двух лемм сразу следует, что введенные нами выше углы φ_1, $\varphi_2, \ldots$ сходятся к φ почти везде на E. Если все тела $H_1, H_2, \ldots$ заключаются в шаре радиуса A и содержат шар радиуса a, оба с центрами в начале, то

$$\frac{R_k^{n-1}}{\cos\varphi_k} \leqslant \frac{A^n}{a}.$$

Следовательно, подынтегральные функции в формуле (1) равномерно ограничены и почти везде на E сходятся к $R^{n-1}/\cos\varphi$. Поэтому при любом измеримом ω существует предел интегралов в формуле (1), а значит, и предел площадей $F(\sigma_k)$, который и принимается за площадь $F(\sigma)$ множества σ на H, радиально соответствующего ω.

Так как каждому замкнутому (открытому) множеству на H радиально соответствует замкнутое (открытое) множество на E, то, в частности, всякое замкнутое (открытое) множество на выпуклом теле имеет площадь (меру).

На основании этих результатов можно утверждать следующее.

Лемма III. *Вся теория меры и измеримых функций на шаре может быть перенесена на любые выпуклые тела. Конкретно это может быть произведено посредством радиального отображения поверхности шара на поверхность данного выпуклого тела.*

Благодаря этому за основное тело (Eichkörper) может быть принят не единичный шар, а любое выпуклое тело.

Пусть H_1 и H_2 — выпуклые тела, а σ_1 и σ_2 — радиально соответствующие друг другу измеримые множества на их поверхностях.

$$F(\sigma_k) = \int\limits_{\omega} \frac{R_k^{n-1}}{\cos\varphi_k}\, d\omega \qquad (k = 1, 2). \tag{1}$$

Так как почти везде $R_k^{n-1}/\cos\varphi_k$ является производной от своего неопределенного интеграла, то

$$F(\sigma_2) = \int\limits_{\sigma_1} \frac{R_2^{n-1}\cos\varphi_1}{R_1^{n-1}\cos\varphi_2}\, dF(\sigma_1). \tag{2}$$

Лемма IV. *Если последовательность выпуклых тел $H_1, H_2, \ldots$ сходится к H и $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — измеримые множества на $H_1, H_2, \ldots$, радиально соответствующие множеству σ на H, то*

$$F(\sigma) = \lim_{k\to\infty} F(\sigma_k).$$

Эта лемма есть непосредственное следствие того, что из сходимости почти везде функций $R_k^{n-1}/\cos\varphi_k$ следует сходимость их интегралов.

§ 2. *Поверхностная функция выпуклого тела*

Пусть на поверхности единичного шара E задано множество ω. Обозначим через $\sigma(\omega)$ множество всех тех точек поверхности заданного выпуклого тела H, в которых есть нормали $\overline{n}$ такие, что, будучи отложены из центра E, они оказываются направленными в ω. Про так определенное множество $\sigma(\omega)$ будем говорить, что оно сферически отображается на ω. Всем тем множествам ω, для которых $\sigma(\omega)$ измеримы, будут соответствовать числа $F(\sigma(\omega))$, равные площадям $\sigma(\omega)$. Таким образом, мы определили некоторую функцию множества на единичном шаре, которую будем называть поверхностной функцией тела H и обозначать $F(H,\omega)$. Наша задача — выделить класс тех множеств ω, для которых поверхностная функция любого выпуклого тела оказывается определенной, и установить основные свойства этой функции [3].

Лемма I. *Пусть $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots$ — последовательность точек поверхности выпуклого тела H, сходящаяся к точке $\overline{x}$. Пусть $\overline{n}_1, \overline{n}_2, \ldots$ — последовательность нормалей к H в точках $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots$. Всякая сходящаяся последовательность из $\overline{n}_1, \overline{n}_2, \ldots$ сходится к нормали в точке $\overline{x}$.*

Можно представить себе, что тело H есть последовательность совпадающих друг с другом тел $H_1, H_2, \ldots$, сходящихся к H. На теле H_1 в точке $\overline{x}_1$ взята нормаль $\overline{n}_1$, на теле H_2 в точке $\overline{x}_2$ — нормаль $\overline{n}_2$ и т. д. Таким образом, эта лемма сводится к лемме, доказанной в предыдущем параграфе.

Лемма II. *Если ω замкнуто, то и $\sigma(\omega)$ замкнуто.*

Пусть $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots$ — последовательность точек, принадлежащих $\sigma(\omega)$, сходящаяся к точке $\overline{x}$. Нам нужно показать, что $\overline{x}$ также принадлежит $\sigma(\omega)$.

Возьмем в точках $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots$ нормали такие, что соответствующие им точки на E попадают в ω. Выделим из полученной последовательности нормалей сходящуюся подпоследовательность. Предел этой последовательности, по лемме I, есть нормаль в точке $\overline{x}$, а по замкнутости ω ей соответствует на E точка, лежащая в ω. Следовательно, $\overline{x}$ принадлежит $\sigma(\omega)$.

В § 1 было показано, что всякое замкнутое множество на поверхности выпуклого тела измеримо. Поэтому при любом H поверхностная функция $F(H,\omega)$ определена для всех замкнутых множеств ω.

Лемма III. *Если ω_1 и ω_2 не имеют общих точек, то пересечение множеств $\sigma(\omega_1)$ и $\sigma(\omega_2)$ имеет меру нуль.*

Пусть $\sigma(\omega_1)$ и $\sigma(\omega_2)$ имеют общие точки и пусть $\overline{x}$ — одна из таких точек. (Если $\sigma(\omega_1)$ и $\sigma(\omega_2)$ не имеют общих точек, то утверждение, высказанное в лемме, тривиально.) Тогда в $\overline{x}$ есть нормаль $\overline{n}_1$, идущая в ω_1, и нормаль $\overline{n}_2$, идущая в ω_2 [4]. Следовательно, в $\overline{x}$ есть разные нормали. Но, по лемме II § 1,

[3] О функциях множеств см., напр., [7, гл. VIII].

[4] «Идущая в ω» значит: конец $\overline{n}$ попадает в ω, если $\overline{n}$ проведена из центра E.

множество всех таких точек на H имеет меру нуль[5)]. Поэтому и пересечение $\sigma(\omega_1) \cap \sigma(\omega_2)$ имеет меру нуль.

Лемма IV. $\sigma(\omega_1 \cup \omega_2) = \sigma(\omega_1) \cup \sigma(\omega_2)$.

Действительно, если $\overline{x}$ принадлежит $\sigma(\omega_1)$, то в ней есть нормаль, идущая в ω_1, а значит, и в $\omega_1 \cup \omega_2$. То же верно и для точек $\sigma(\omega_2)$. Если $\overline{x}$ принадлежит $\sigma(\omega_1 \cup \omega_2)$, то нормаль в ней, идущая в $\omega_1 \cup \omega_2$, идет или в ω_1, или в ω_2, а значит, $\overline{x}$ принадлежит или $\sigma(\omega_1)$, или $\sigma(\omega_2)$ (или обоим вместе).

Пусть ω — открытое множество и пусть Ω означает полную поверхность единичного шара E. Множество $\Omega \setminus \omega$ замкнуто и не имеет с ω общих точек. Поэтому пересечение $\sigma(\omega) \cap \sigma(\Omega \setminus \omega)$ имеет меру нуль. Кроме того, $\sigma(\Omega \setminus \omega) \cup \sigma(\omega) = \sigma(\Omega)$. Множества $\sigma(\omega)$ и $\sigma(\Omega)$ измеримы как замкнутые. ($\sigma(\Omega)$ есть просто вся поверхность H.) Поэтому множество $\sigma(\Omega \setminus \omega)$ также измеримо и

$$F(\sigma(\omega)) = F(\sigma(\Omega)) - F(\sigma(\Omega \setminus \omega)).$$

Таким образом, функция $F(H, \omega)$ оказывается определенной для всех открытых множеств ω.

Пусть ω_1 и ω_2 — два множества без общих точек, для которых функция $F(H, \omega)$ имеет смысл. Покажем, что тогда $F(H, \omega_1 \cup \omega_2)$ также имеет смысл и

$$F(H, \omega_1 \cup \omega_2) = F(H, \omega_1) + F(H, \omega_2). \tag{1}$$

Поскольку $\sigma(\omega_1)$ и $\sigma(\omega_2)$ измеримы, то и $\sigma(\omega_1) \cup \sigma(\omega_2) = \sigma(\omega_1 \cup \omega_2)$ измеримо, и, следовательно, $F(H, \omega_1 \cup \omega_2)$ имеет смысл. А так как пересечение $\sigma(\omega_1) \cap \sigma(\omega_2)$ имеет меру нуль (поскольку ω_1 и ω_2 не имеют общих точек), то мера их суммы равна сумме их мер. Отсюда и следует (1).

Лемма V. *Если множества* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots$, *для которых определена* $F(H, \omega)$, *образуют исчезающую последовательность* (*т. е.* $\omega_k \supset \omega_{k+1}$ *и* $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k = \varnothing$), *то*

$$\lim_{k \to \infty} F(H, \omega_k) = 0.$$

Из того, что $\omega_k \supset \omega_{k+1}$, следует $\sigma(\omega_k) \supset \sigma(\omega_{k+1})$. Если пересечение всех $\sigma(\omega_k)$ пусто, то предел их мер равен нулю. Пусть $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \sigma(\omega_k) = \sigma$ не пусто, и пусть точка $\overline{x} \in \sigma$. В точке $\overline{x}$ есть нормали $\overline{n}_1, \overline{n}_2, \ldots$ (необязательно различные), идущие в множества $\omega_1, \omega_2, \ldots$. Все эти нормали не могут совпадать, так как тогда получающаяся таким образом нормаль шла бы во все ω_k и пересечение их не было бы пустым. Значит, в точке $\overline{x}$ есть разные

[5)]Из формулы (1) § 1 ясно, что множеству меры нуль на E радиально соответствует множество меры нуль на H.

нормали. Множество всех таких точек имеет меру нуль, а потому $F(\sigma) = 0$. Как известно, если $\sigma(\omega_k) \supset \sigma(\omega_{k+1})$, то

$$\lim_{k\to\infty} F(\sigma(\omega_k)) = F\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma(\omega_k)\right),$$

и так как $F(\sigma(\omega_k)) = F(H, \omega_k)$, то $\lim\limits_{k\to\infty} F(H, \omega_k) = 0$, что и требовалось доказать.

Пусть ω_k — множества без общих точек, $F(H, \omega)$ определена для ω_k и

$$\omega_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \omega_k.$$

Множества

$$\omega^{(m)} = \omega_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \omega_k$$

образуют исчезающую последовательность, а значит, $\lim\limits_{m\to\infty} F(H, \omega^{(m)}) = 0$.

$$F(H, \omega^{(m)}) = F(H, \omega_0) - \sum_{k=1}^{m} F(H, \omega_k),$$

так что

$$F(H, \omega_0) = \sum_{k=1}^{\infty} F(H, \omega_k).$$

Полученный результат можно формулировать так.

Теорема. *Поверхностная функция выпуклого тела есть неотрицательная абсолютно аддитивная функция множеств на поверхности единичного шара, определенная для объединений замкнутых и открытых множеств.*

Если H — многогранник, то $F(H, \omega) = 0$ при условии, что в ω не идет ни одна из нормалей к его граням. Если же в ω идут нормали к граням с площадями $F_1, F_2, \ldots, F_m$, то $F(H, \omega) = F_1 + F_2 + \ldots + F_m$. Про такую функцию $F(H, \omega)$ можно сказать, что она «дискретна». Пусть H имеет в каждой точке своей поверхности положительную гауссову кривизну K. Тогда $F(H, \omega)$ абсолютно непрерывна и ее производная в любой точке $\overline{n}$ на шаре

$$\lim_{\omega\to\overline{n}} \frac{F(H, \omega)}{\operatorname{mes}(\omega)} = \frac{1}{K(\overline{n})},$$

где $K(\overline{n})$ — гауссова кривизна той точки поверхности H, нормаль в которой есть $\overline{n}$.

§ 3. *Выражение смешанного объема через поверхностную функцию*

Г. Минковский доказал, что смешанный объем любого выпуклого тела L и выпуклого многогранника H может быть выражен следующим образом:

$$V(L, H, \dots, H) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{N} L(\overline{n}_\nu)\, F_\nu, \tag{1}$$

где $\overline{n}_\nu$ — нормали к граням H, а F_ν — их площади; $L(\overline{n})$ — опорная функция тела L[6)].

Мы обобщим этот результат, доказав такую лемму.

Лемма I. *Смешанный объем $V(L, H, \dots, H)$ любых двух выпуклых тел L и H выражается формулой*

$$V(L, H, \dots, H) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} L(\overline{n})\, F(H, d\omega). \tag{2}$$

Стоящий здесь интеграл есть интеграл Стилтьеса — Радона. Он имеет смысл, так как $L(\overline{n})$ непрерывна, а $F(H, \omega)$ абсолютно аддитивна.

Доказательство этой леммы проводится путем предельного перехода от многогранников к любому выпуклому телу H, как это обычно делается в подобных случаях. При этом, естественно, конечная сумма переходит в интеграл. Однако строгое проведение такого доказательства оказалось бы, пожалуй, слишком громоздким и скучным.

Если тело H вырождается и не имеет внутренних точек, то или $F(H, \omega) = 0$, когда оно менее чем $(n-1)$-мерное, и тогда $V(L, H, \dots, H) = 0$, или H — $(n-1)$-мерное, и если $\overline{n}$ и $-\overline{n}$ — нормали к плоскости, в которой оно лежит, а F — его $(n-1)$-мерный объем, то

$$V(L, H, \dots, H) = \frac{1}{n}(L(\overline{n}) + L(-\overline{n}))\, F. \tag{3}$$

Эта формула верна, если H — $(n-1)$-мерный многогранник.

Построим последовательность $H_1, H_2, \dots, H_k, \dots$ таких многогранников, лежащих в той же плоскости, что и H, сходящихся к H. Тогда по непрерывной зависимости смешанных объемов от входящих в них тел получим,

[6)] $L(\overline{n})$, $H(\overline{n})$ будут обозначать опорные функции «на единичном шаре» тел L, H. Опорная функция определяется по Г. Минковскому для всех векторов. Здесь же она берется только для единичных векторов $\overline{n}$, т. е. для соответствующих точек на единичном шаре. $L(\overline{n})$ есть расстояние от начала до опорной плоскости к телу L с внешней нормалью $\overline{n}$. Оно считается положительным в направлении $\overline{n}$ и отрицательным в противоположном направлении.

что $V(L, H_k, \ldots, H_k)$ сходятся к $V(L, H, \ldots, H)$. С другой стороны, $(n-1)$-мерные объемы многогранников H_k сходятся к $(n-1)$-мерному объему H. Отсюда получаем формулу (3). То, что она является частным случаем (2), ясно, так как, если в ω идет $\overline{n}$, но не идет $-\overline{n}$, или наоборот, то $F(H, \omega) = F$, а если в ω не идет ни $\overline{n}$ ни $-\overline{n}$, то

$$F(H, \omega) = 0.$$

Положим теперь, что H имеет внутренние точки. Построим последовательность выпуклых многогранников, заключающих H и сходящихся к H. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выделим из построенной последовательности многогранников такую подпоследовательность $H_1, H_2, \ldots$, чтобы было при всех k

$$|V(L, H, \ldots, H) - V(L, H_k, \ldots, H_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Это возможно в силу непрерывности смешанных объемов [7)].

Возьмем еще $\rho > 0$ столь малое, чтобы при $|\overline{n}_1 - \overline{n}_2| < \rho$ было

$$|L(\overline{n}_1) - L(\overline{n}_2)| < \frac{\varepsilon}{8A}, \tag{5}$$

где A — верхняя граница площадей поверхностей $H_1, H_2, \ldots, H_k, \ldots$.

Разобьем поверхность единичного шара на области $\omega_1, \ldots, \omega_N$ такие, что если $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ идут в любую из этих областей, то

$$|\overline{n}_1 - \overline{n}_2| < \frac{\rho}{2} \qquad (\overline{n}_1, \overline{n}_2 \in \omega_\nu). \tag{6}$$

Множествам $\omega_1, \ldots, \omega_N$ соответствуют сферически на них отображенные множества $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu, \ldots, \sigma_N$ на поверхности H.

Возьмем начало внутри H, а значит, и внутри всех $H_1, H_2, \ldots, H_k, \ldots$. Установим между всеми этими телами радиальное соответствие. Множество на H_k, радиально соответствующее какому-нибудь множеству σ на H, обозначим σ^k. Пусть σ^k_μ — грани многогранника H_k; σ_ν — множества $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ и σ^k_ν — множества, радиально им соответствующие на H_k; наконец, $\sigma^k_{\mu\nu}$ — пересечение σ^k_μ и σ^k_ν.

Вспомним рассуждения § 1. Каждому направлению $\overline{r}$ радиусов, идущих из начала, соответствует по одной точке на телах $H, H_1, H_2, \ldots$. Нормали $\overline{n}, \overline{n}^1, \overline{n}^2, \ldots$ в этих точках суть функции $\overline{r}$, а значит, функции точки $\overline{x}$

---

7) «Непрерывность смешанных объемов» есть краткое выражение того, что если тела $H_1^{(k)}, \ldots, H_n^{(k)}$ сходятся соответственно к телам $H_1, \ldots, H_n$, то и их смешанный объем $V(H_1^{(k)}, \ldots, H_n^{(k)})$ сходится к смешанному объему предельных тел.

на H. При этом $\overline{n}^1, \overline{n}^2, \ldots$ почти везде на H сходятся к $\overline{n}$. Поэтому по теореме Егорова можно на поверхности H выделить совершенное множество Σ, отличающееся по мере от всей поверхности H не более чем на любое заданное $\delta > 0$, и такое, что на нем $\overline{n}^1, \overline{n}^2, \ldots$ сходятся к $\overline{n}$ равномерно.

Пусть C — верхняя граница для всех $\dfrac{R_k^{n-1} \cos\varphi}{R^{n-1}\cos\varphi_k}$ (обозначения § 1), тогда по формуле (2) § 1 мера множества, радиально соответствующего Σ на H_k, будет при всех k меньше чем на $C\delta$ отличаться от площади всей поверхности H_k. Возьмем

$$\delta = \frac{\varepsilon}{8C \max |L(\overline{n})|}.$$

Пересечения всех введенных выше множеств σ с Σ или с радиально соответствующими ему множествами на H_k будем отмечать черточкой сверху. В силу выбора δ все множества с черточками отличаются по мере от множеств без черточек не более чем на

$$C\delta = \frac{\varepsilon}{8 \max\, |L(\overline{n})|}.$$

Теперь приступим к оценкам. В силу выбора размеров областей $\omega_1, \ldots, \omega_N$,

$$\left| \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} L(\overline{n})\, F(H, d\omega) - \frac{1}{n} \sum_{\nu} L(\overline{n}_\nu)\, F(\sigma_\nu) \right| < \frac{\varepsilon}{8}, \tag{7}$$

где $\overline{n}_\nu$ идет в ω_ν и $F(\sigma_\nu)$ — мера σ_ν, равная $F(H, \omega_\nu)$.

В силу выбора множества Σ,

$$\sum_{\nu} |F(\sigma_\nu) - F(\overline{\sigma}_\nu)| < \frac{\varepsilon}{8 \max |L(\overline{n})|},$$

поэтому

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu} L(\overline{n}_\nu)\, F(\sigma_\nu) - \frac{1}{n} \sum_{\nu} L(\overline{n}_\nu)\, F(\overline{\sigma}_\nu) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \tag{8}$$

и

$$\left| \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} L(\overline{n})\, F(H, d\omega) - \frac{1}{n} \sum_{\nu} L(\overline{n}_\nu)\, F(\overline{\sigma}_\nu) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9}$$

Так как по формуле (1)

$$V(L, H_k, \ldots, H_k) = \frac{1}{n} \sum_{\mu} L\left(\overline{n}_\mu^k\right)\, F\left(\sigma_\mu^k\right) \tag{10}$$

и в силу выбора множества Σ

$$\sum_{\mu}\left|F\left(\sigma_{\mu}^{k}\right)-F\left(\overline{\sigma}_{\mu}^{k}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{8\max|L(\overline{n})|},$$

то

$$\left|V(L,H_k,\ldots,H_k)-\frac{1}{n}\sum_{\mu}L\left(\overline{n}_{\mu}^{k}\right)\ F\left(\overline{\sigma}_{\mu}^{k}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{8}; \tag{11}$$

или, так как

$$\overline{\sigma}_{\mu}^{k}=\sum_{\nu}\overline{\sigma}_{\mu\nu}^{k},$$

то

$$\left|V(L,H_k,\ldots,H_k)-\frac{1}{n}\sum_{\mu,\nu}L\left(\overline{n}_{\mu}^{k}\right)\ F\left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}^{k}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{8}. \tag{12}$$

В силу равномерной сходимости $\overline{n}^k(\overline{x})$ к $\overline{n}(\overline{x})$ на Σ найдется такое m, что при всяком $k>m$ и при всякой $\overline{x}$, принадлежащей Σ, будет (ρ имеет смысл формулы (5))

$$\left|\overline{n}^k(\overline{x})-\overline{n}(\overline{x})\right|<\frac{\rho}{2}. \tag{13}$$

В частности, нормаль к грани H_k $\overline{n}_{\mu}^{k}$ будет отличаться не более чем на $\rho/2$ от нормали $\overline{n}$ в соответствующей точке на H. Если эта точка принадлежит $\overline{\sigma}_{\mu\nu}$, то по выбору областей ω_ν [8)] $|\overline{n}-\overline{n}_\nu|<\rho/2$ и так как

$$\left|\overline{n}-\overline{n}_{\mu}^{k}\right|<\frac{1}{2}\rho,$$

то

$$\left|\overline{n}_{\mu}^{k}-\overline{n}_{\nu}\right|<\rho, \tag{14}$$

если точка с нормалью $\overline{n}_{\mu}^{k}$ принадлежит $\overline{\sigma}_{\mu\nu}^{k}$, а $\overline{n}_\nu$ идет в ω_ν. Следовательно, при этом условии

$$\left|L\left(\overline{n}_{\mu}^{k}\right)-L\left(\overline{n}_{\nu}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{8A}. \tag{15}$$

Благодаря этому при $k>m$ получаем

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\mu,\nu}L\left(\overline{n}_{\mu}^{k}\right)\ F\left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}^{k}\right)-\frac{1}{n}\sum_{\mu,\nu}L\left(\overline{n}_{\nu}\right)\ F\left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}^{k}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{8}. \tag{16}$$

[8)] Σ не содержит тех точек, где есть более одной нормали. Поэтому, если $\overline{x}\in\overline{\sigma}_\nu$, то в $\overline{x}$ есть только одна нормаль, и она идет в ω_ν.

Суммируя во втором члене по μ и принимая во внимание неравенство (12), получим (так как $\overline{\sigma}_\nu^k = \sum_\mu \overline{\sigma}_{\mu\nu}^k$)

$$\left| V(L, H_k, \ldots, H_k) - \frac{1}{n} \sum_\nu L(\overline{n}_\nu)\, F(\overline{\sigma}_\nu) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{17}$$

Теперь, соединяя неравенства (9) и (17), получим

$$\left| V(L, H_k, \ldots, H_k) - \frac{1}{n} \int\limits_\Omega L(\overline{n})\, F(H, d\omega) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

Наконец, обратившись к неравенству (4), получим из (18)

$$\left| V(L, H, \ldots, H) - \frac{1}{n} \int\limits_\Omega L(\overline{n})\, F(H, d\omega) \right| < \varepsilon, \tag{19}$$

и так как ε произвольно, то формула (2) доказана. Если в формуле (2) положить $L = H$, то $V(L, H, \ldots, H)$ будет объемом тела H, так что объем выпуклого тела может быть выражен формулой

$$V(H) = \frac{1}{n} \int\limits_\Omega H(\overline{n})\, F(H, d\omega). \tag{20}$$

Лемма II. *Поверхностная функция выпуклого тела удовлетворяет условию*

$$\int\limits_\Omega \overline{n}\, F(H, d\omega) = 0. \tag{21}$$

(Интеграл от вектора, как всегда, есть вектор, составляющие которого суть интегралы составляющих.)

Формула (21) имеет следующий наглядный смысл. Представим себе поверхность единичного шара, нагруженную массами так, что масса области ω равна $F(H, \omega)$. Тогда формула (21) означает, что центр тяжести такой системы лежит в центре шара.

Если тело H параллельно переносится вдоль вектора $\overline{a}$, то к его опорной функции на единичном шаре прибавляется слагаемое $(\overline{a}\,\overline{n})$. Объем тела не изменяется при параллельном переносе, а потому при всяком $\overline{a}$

$$\int\limits_\Omega (\overline{a}\,\overline{n})\, F(H, d\omega) = 0, \tag{22}$$

откуда и следует (21).

Лемма III. *Площадь проекции*[9] *выпуклого тела H в направлении $\overline{n}_0$ равна*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0\overline{n}|\, F(H, d\omega). \tag{23}$$

$|\overline{n}_0\overline{n}|$ есть абсолютная величина косинуса угла между $\overline{n}_0$ и $\overline{n}$.

Эта формула известна и доказывается элементарно, если H — многогранник. Тогда интеграл сводится к сумме членов, каждый из которых представляет площадь проекции грани H в направлении $\overline{n}_0$.

Легко также убедиться в том известном факте, что $|\overline{n}_0\overline{n}|/2$ есть опорная функция (на единичном шаре) единичного отрезка L с серединой в начале и параллельного $\overline{n}_0$. Поэтому интеграл, стоящий в (23), равен умноженному на $\overline{n}$ смешанному объему $V(L, H, \ldots, H)$. Если теперь построить последовательность многогранников, сходящихся к H, то, с одной стороны, площади их проекций будут сходиться к площади проекции H в том же направлении, а с другой — смешанные объемы их с L будут сходиться к $V(L, H, \ldots, H)$. Таким образом в пределе получим (23).

Если H имеет внутренние точки, то существует шар, помещающийся в H. Поэтому площади всех проекций H будут ограничены снизу площадью проекции этого шара. Из этого замечания следует

Лемма IV. *Поверхностная функция выпуклого тела с внутренними точками удовлетворяет условию: при всяком $\overline{n}_0$*

$$\int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0\overline{n}|\, F(H, d\omega) > a > 0, \tag{24}$$

где a — одна и та же постоянная для всех $\overline{n}_0$.

§ 4. Определение смешанных поверхностных функций

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ — данные выпуклые тела и L — переменное выпуклое тело. Смешанный объем $V(L, H_1, \ldots, H_{n-1})$ есть аддитивный и непрерывный функционал, определенный в области всех выпуклых тел, или, что то же самое, в области всех положительно-однородных выпуклых функций $L(\overline{u})$[10]. Действительно, $V(L, H_1, \ldots, H_{n-1})$ зависит от L непрерывно и при

[9] Проекция в направлении $\overline{n}$ — это ортогональная проекция на плоскость с нормалью $\overline{n}$. — *Прим. ред.*

[10] Как, собственно говоря, показал еще Г. Минковский [2, § 2], для того чтобы функция векторов $L(\overline{u})$ была опорной функцией выпуклого тела, необходимо и достаточно, чтобы она была положительно-однородной первой степени, т. е. $L(\lambda\overline{n}) = \lambda L(\overline{n})$ при $\lambda \geqslant 0$, и выпуклой, т. е. $L((1-\vartheta)\overline{u} + \vartheta\overline{v}) \leqslant (1-\vartheta)L(\overline{u}) + \vartheta L(\overline{v})$ или, принимая во внимание условие однородности, $L(\overline{u} + \overline{v}) \leqslant L(\overline{u}) + L(\overline{v})$.

$\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$,

$$V(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \\ = \lambda_1 V(L_1, H_1, \ldots, H_{n-1}) + \lambda_2 V(L_2, H_1, \ldots, H_{n-1}). \qquad (1)$$

Мы будем рассматривать функции, заданные на единичном шаре. Такую функцию называем выпуклой, если она представляет значения опорной функции выпуклого тела на единичном шаре. Распространим функционал $V(L, H_1, \ldots, H_{n-1})$, определенный в области выпуклых функций $L(\overline{n})$, на функции $Z(\overline{n})$, являющиеся разностями выпуклых функций. Пусть $Z(\overline{n}) = L_1(\overline{n}) - L_2(\overline{n})$, где $L_1(\overline{n})$, $L_2(\overline{n})$ — выпуклые. Положим

$$V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) = V(L_1, H_1, \ldots, H_{n-1}) - V(L_2, H_1, \ldots, H_{n-1}). \qquad (2)$$

Это определение однозначно. Действительно, пусть $Z(\overline{n}) = L'_1(\overline{n}) - L'_2(\overline{n})$, тогда

$$L'_1(\overline{n}) + L_2(\overline{n}) = L_1(\overline{n}) + L'_2(\overline{n}),$$

но тогда

$$V(L'_1, H_1, \ldots, H_{n-1}) + V(L_2, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \\ = V(L_1, H_1, \ldots, H_{n-1}) + V(L'_2, H_1, \ldots, H_{n-1}),$$

т. е.

$$V(L'_1, H_1, \ldots, H_{n-1}) - V(L'_2, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \\ = V(L_1, H_1, \ldots, H_{n-1}) - V(L_2, H_1, \ldots, H_{n-1}),$$

что и требовалось доказать.

Лемма I. *Функционал $V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})$ — линейный.*

Пусть $Z = Z' + Z''$ и $Z' = L'_1 - L'_2$, $Z'' = L''_1 - L''_2$, тогда

$$Z = (L'_1 + L''_1) - (L'_2 + L''_2).$$

Функции $L'_1(\overline{n}) + L''_1(\overline{n})$ и $L'_2(\overline{n}) + L''_2(\overline{n})$ — выпуклые. Применяя к ним формулу (2) и используя аддитивность смешанных объемов $V(L, H_1, \ldots, H_{n-1})$, получим

$$V(Z' + Z'', H_1, \ldots, H_{n-1}) = V(Z', H_1, \ldots, H_{n-1}) + V(Z'', H_1, \ldots, H_{n-1}). \quad (3)$$

Пусть $Z = L_1 - L_2$ и $\lambda \geqslant 0$. Тогда, воспользовавшись формулой (2) для λZ и принимая во внимание однородность $V(L, H_1, \ldots, H_{n-1})$, получим

$$V(\lambda Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \lambda V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}). \tag{4}$$

Если же $\lambda < 0$, то $\lambda Z = |\lambda| L_2 - |\lambda| L_1$. Поэтому точно так же получим тот же результат и для отрицательных λ.

Г. Минковский показал, что если L — любое выпуклое тело и $H_1, \ldots, H_{n-1}$ — выпуклые многогранники, то

$$V(L, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{N} L(\overline{n}_\nu)\, F_\nu(H_1, \ldots, H_{n-1}), \tag{5}$$

где $F_\nu(H_1, \ldots, H_{n-1})$ — смешанные объемы (т. е. смешанные площади) граней многогранников $H_1, \ldots, H_{n-1}$, лежащих в параллельных плоскостях с нормалями $\overline{n}_\nu$. При этом речь идет о гранях всех измерений $\leqslant n-1$.

Если $Z(\overline{n}) = L_1(\overline{n}) - L_2(\overline{n})$ и $H_1, \ldots, H_{n-1}$ — многогранники, то из (5) и (2) получим

$$V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{N} Z(\overline{n}_\nu)\, F_\nu(H_1, \ldots, H_{n-1}). \tag{6}$$

Отсюда следует, во-первых, что при $Z(\overline{n}) \geqslant 0$

$$V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) \geqslant 0, \tag{7}$$

и во-вторых, что

$$|V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(H_1, \ldots, H_{n-1}) \max |Z(\overline{n})|. \tag{8}$$

Если E обозначает единичный шар, то

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu(H_1, \ldots, F_{n-1}) = V(E, H_1, \ldots, H_{n-1}), \tag{9}$$

откуда

$$|V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})| \leqslant V(E, H_1, \ldots, H_{n-1}) \max |Z(\overline{n})|. \tag{10}$$

Если наши многогранники сходятся к любым выпуклым телам, то при заданной $Z(\overline{n}) = L_1(\overline{n}) - L_2(\overline{n})$ значения функционалов $V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})$

сходятся к значению такого же функционала для предельных тел, так как этим свойством обладают смешанные объемы

$$V(L_1, H_1, \ldots, H_{n-1}) \quad \text{и} \quad V(L_2, H_1, \ldots, H_{n-1}).$$

Следовательно, результаты (7) и (10) могут быть перенесены на случай любых выпуклых тел $H_1, \ldots, H_{n-1}$.

Формулы (3), (4), (10) показывают, что функционал $V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})$ — линейный.

Лемма II. *Всякую непрерывную функцию на единичном шаре можно равномерно с любой степенью точности аппроксимировать разностью выпуклых функций.*

Из теоремы Вейерштрасса об аппроксимируемости непрерывных функций полиномами следует, конечно, что всякую непрерывную функцию на единичном шаре можно равномерно, с любой точностью, аппроксимировать дважды непрерывно дифференцируемой функцией. А мы покажем, что всякая такая функция есть разность выпуклых.

Пусть $Z(\overline{n})$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на единичном шаре. Распространим ее на все пространство, полагая

$$Z(\overline{u}) = |\overline{u}|\, Z\left(\frac{\overline{u}}{|\overline{u}|}\right),$$

где $|\overline{u}|$ — длина вектора $\overline{u}$, так что вектор $\overline{u}/|\overline{u}|$ — единичный.

Второй дифференциал функции $Z(\overline{u})$ $d^2Z(\overline{u})$ будет квадратичной формой, все собственные значения которой являются непрерывными функциями всюду кроме точки $\overline{u} = 0$ и положительно-однородными минус первой степени (так как $Z(\overline{u})$ — положительно-однородная первой степени). Поэтому найдется такое число C, что

$$Cd^2|\overline{u}| - d^2Z(\overline{u}) = d^2(C|\overline{u}| - Z(\overline{u}))$$

будет при всех $\overline{u} \neq 0$ положительной формой. Но тогда, как известно, положительно-однородная первой степени функция $H(\overline{u}) = C|\overline{u}| - Z(\overline{u})$ является опорной функцией некоторого выпуклого тела [11]. Переходя обратно от всего пространства на шар, получим

$$Z(\overline{n}) = C - H(\overline{n}),$$

где $H(\overline{n})$ — выпуклая функция на единичном шаре.

---

[11] Из условия $d^2H(\overline{u}) \geqslant 0$ легко выводится выпуклость функции $H(\overline{u})$. Функция $C|\overline{u}|$ есть опорная функция шара радиуса C.

Пусть теперь $Z(\overline{n})$ — произвольная непрерывная функция на единичном шаре и пусть $Z_1(\overline{n}), \ldots, Z_m(\overline{n}), \ldots$ — последовательность разностей выпуклых функций, равномерно сходящаяся к $Z(\overline{n})$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдется M такое, что при $m \geqslant M$ и при всяком k

$$|Z_{m+k}(\overline{n}) - Z_m(\overline{n})| < \varepsilon.$$

Поэтому при $m > M$ из неравенства (10) следует, что

$$|V(Z_{m+k}, H_1, \ldots, H_{n-1}) - V(Z_m, H_1, \ldots, H_{n-1})| < \varepsilon\, V(E, H_1, \ldots, H_{n-1}),$$

где $H_1, \ldots, H_{n-1}$ — все те же заданные выпуклые тела. Отсюда видно, что распространенные смешанные объемы $V(Z_m, H_1, \ldots, H_{n-1})$ сходятся к некоторому пределу, который мы положим равным значению функционала $V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})$ для данной непрерывной функции $Z(\overline{n})$. Определение это единственное, так как если $Z_1(\overline{n}), Z_2(\overline{n}), \ldots$ и $Z'_1(\overline{n}), Z'_2(\overline{n}), \ldots$ — две последовательности разностей выпуклых функций, сходящиеся к $Z(\overline{n})$, то последовательность $Z_1(\overline{n})$, $Z'_1(\overline{n})$, $Z_2(\overline{n})$, $Z'_2(\overline{n}), \ldots$ обладает тем же свойством. То, что определенный таким образом для всех непрерывных функций функционал $V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})$ будет линейным, доказывается очевидным образом. Неравенство (10) в пределе сохранится, и, значит, наш функционал непрерывен. Норма его, как показывает неравенство (10), равна

$$V(E, H_1, \ldots, H_{n-1}).$$

По теореме Ф. Рисса линейный функционал, определенный для всех непрерывных функций $Z(\overline{n})$, может быть представлен как интеграл Стилтьеса — Радона от непрерывной функции $Z(\overline{n})$ по однозначно определенной абсолютно аддитивной функции множеств на единичном шаре. Так как из наших рассуждений видно, что функционал $V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})$ вполне определяется заданием выпуклых тел $H_1, \ldots, H_{n-1}$, то

$$V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n})\, F(H_1, \ldots, H_{n-1}; d\omega), \tag{11}$$

где $F(H_1, \ldots, H_{n-1}; \omega)$ — функция множеств ω на единичном шаре, однозначно определяемая заданием выпуклых тел $H_1, \ldots, H_{n-1}$. Эту функцию мы называем смешанной поверхностной функцией выпуклых тел $H_1, \ldots,$ H_{n-1}. Так как при $Z(\overline{n}) \geqslant 0 \quad V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) \geqslant 0$ (см. (7)), то [12)]

$$F(H_1, \ldots, H_{n-1}; \omega) \geqslant 0. \tag{12}$$

[12)] Пусть $Z_1, Z_2, \ldots$ — последовательность неотрицательных функций, сходящихся к единице в точках $\overline{n} \in \omega$ и к нулю во всех остальных точках на единичном шаре. При всех $m \quad V(Z_m, H_1, \ldots, H_{n-1}) \geqslant 0$. По определению $F(H_1, \ldots, H_{n-1}; \omega) = \lim\limits_{m\to\infty} V(Z_m, H_1, \ldots,$ $H_{n-1})$ и, следовательно, $F(H_1, \ldots, H_{n-1}; \omega) \geqslant 0$.

Пусть $Z(\overline{n}) = \overline{a}\,\overline{n}$ есть опорная функция точки, являющейся концом вектора $\overline{a}$. Тогда, как известно,

$$V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) = 0.$$

Подставляя в (11) $Z(\overline{n}) = \overline{a}\,\overline{n}$ и замечая, что вектор $\overline{a}$ — произвольный, получим

$$\int\limits_{\Omega} \overline{n} F(H_1, \ldots, H_{n-1}; d\omega) = 0. \tag{13}$$

§ 5. *Геометрический смысл смешанных поверхностных функций*

1. В § 3 было найдено выражение смешанного объема $V(L, H, \ldots, H)$ через поверхностную функцию тела H:

$$V(L, H, \ldots, H) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} L(\overline{n})\, F(H, d\omega). \tag{1}$$

Отсюда следует, что если $Z(\overline{n})$ есть разность выпуклых функций, то

$$V(Z, H, \ldots, H) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n})\, F(H, d\omega). \tag{2}$$

Так как всякую непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать разностью выпуклых, то эта формула верна и для любой непрерывной функции $Z(\overline{n})$, если под $V(Z, H, \ldots, H)$ понимать определенный в § 4 функционал. Сравнивая (2) с формулой (11) § 4 при $H_1 = H_2 = \ldots = H_{n-1} = H$, получим

$$F(H, \ldots, H; d\omega) = F(H, \omega), \tag{3}$$

т. е. абстрактно определенная нами функция $F(H, \ldots, H; d\omega)$ есть не что иное, как поверхностная функция тела H.

2. Из формулы (11) § 4, полагая $Z = H_n$, получаем для смешанного объема тел $H_1, \ldots, H_n$:

$$V(H_1, \ldots, H_n) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} H_n(\overline{n})\, F(H_1, \ldots, H_{n-1}; d\omega). \tag{4}$$

Заменив в формуле (11) § 4 тело H_1 на H_n, а $Z(\overline{n})$ на $H_1(\overline{n})$, получим

$$V(H_1, \ldots, H_n) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} H_1(\overline{n})\, F(H_2, \ldots, H_n; d\omega). \tag{5}$$

Принимая еще во внимание неизменность $V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})$ при перестановках тел $H_1, \ldots, H_{n-1}$, можно утверждать, что в выражении (4) для смешанного объема тела $H_1, \ldots, H_n$ можно произвольно переставлять. Это важное свойство смешанных поверхностных функций можно, по естественной аналогии, назвать их самосопряженностью.

3. Пусть $H_1 = \lambda' H' + \lambda'' H''$, тогда

$$V(H_1, \ldots, H_n) = \lambda' V(H', H_2, \ldots, H_n) + \lambda'' V(H'', H_2, \ldots, H_n) \tag{6}$$

и по формуле (6)

$$\begin{aligned} V(H_1, \ldots, H_n) = \lambda' \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} H_n(\overline{n})\, F(H', \ldots, H_{n-1}; d\omega) + \\ + \lambda'' \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} H_n(\overline{n})\, F(H'', \ldots, H_{n-1}; d\omega). \end{aligned} \tag{7}$$

Из рассуждений предыдущего параграфа следует, что в этой формуле $H_n(\overline{n})$ может быть заменена любой непрерывной функцией и, так как

$$V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n})\, F(\lambda' H' + \lambda'' H'',\, H_2, \ldots, H_{n-1}; d\omega), \tag{8}$$

то

$$\begin{aligned} F(\lambda' H' + \lambda'' H'', H_2, \ldots, H_{n-1}; \omega) = \\ = \lambda' F(H', H_2, \ldots, H_{n-1}; \omega) + \lambda''(H'', H_2, \ldots, H_{n-1}; \omega). \end{aligned} \tag{9}$$

Положим

$$H = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, H_k,$$

тогда, применяя последовательно формулу (9) к функции $F(H, \ldots, H; \omega) = F(H, \omega)$, получим, что она является однородным многочленом степени $n-1$ относительно λ_k, а именно

$$F\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k H_k, \omega\right) = \sum_{k_1, \ldots, k_{n-1}} \lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_{n-1}}\, F(H_{k_1}, \ldots, H_{k_{n-1}}; \omega), \tag{10}$$

где индексы $k_1, \ldots, k_{n-1}$ независимо друг от друга пробегают все значения от 1 до m.

Эта формула дает геометрическую интерпретацию смешанных поверхностных функций и оправдывает их название по аналогии со смешанными объемами. Так как поверхностная функция (как ясно из ее определения) не изменяется при переносе тела H, то и смешанные поверхностные функции не изменяются при переносах входящих в них тел.

Теперь резюмируем все полученные результаты.

Теорема. *Поверхностная функция линейной комбинации выпуклых тел $F\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k H_k, \omega\right)$ есть однородный многочлен степени $n-1$ относительно коэффициентов λ_k. Именно*

$$F\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k H_k, \omega\right) = \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_{n-1}} F(H_{k_1}, \ldots, H_{k_{n-1}}; \omega),$$

где индексы $k_1, \ldots, k_{n-1}$ пробегают независимо друг от друга все значения от единицы до m. Коэффициент $F(H_{k_1}, \ldots, H_{k_{n-1}}; \omega)$ зависит только от тел $H_{k_1}, \ldots, H_{k_{n-1}}$ и не зависит от других тел, входящих в рассматриваемую линейную комбинацию. Он определяется так, что не изменяется при перестановках тел $H_{k_1}, \ldots, H_{k_{n-1}}$. Эти коэффициенты называются смешанными поверхностными функциями.

Смешанные поверхностные функции обладают следующими свойствами:

1) *они являются неотрицательными и абсолютно аддитивными функциями множеств на единичном шаре, определенными для объединений замкнутых и открытых множеств;*

2) *они не изменяются при параллельных переносах тех тел, к которым они относятся;*

3) *если все тела $H_1, \ldots, H_{n-1}$ равны и параллельны одному и тому же H, то $F(H_1, \ldots, H_{n-1}, \omega)$ есть поверхностная функция тела H;*

4) *смешанный объем выражается через смешанную поверхностную функцию*

$$V(H_1, \ldots, H_n) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H_n(\overline{n})\, F(H_1, \ldots, H_{n-1}; d\omega),$$

причем здесь тела $H_1, \ldots, H_n$ можно произвольно переставлять;

5) *они всегда удовлетворяют условию*

$$\int_{\Omega} \overline{n} F(H_1, \ldots, H_{n-1}; d\omega) = 0;$$

6) *если одно из тех тел, к которым относится данная смешанная поверхностная функция, является линейной комбинацией каких-то тел, т. е. если*

$$H_1 = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k H^{(k)},$$

то

$$F(H_1, \ldots, H_{n-1}; \omega) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F(H^{(k)}, H_2, \ldots, H_{n-1}; \omega),$$

т. е. является такой же точно линейной комбинацией соответствующих смешанных поверхностных функций. Следовательно, и вообще при

$$H = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, H^{(k)},$$

$$F(H, \ldots, H, \, H_1, \ldots, H_{n-p-1}; \, \omega) =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_p} \lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_p} \, F\left(H^{(k_1)}, \ldots, H^{(k_p)}, H_1, \ldots, H_{n-p-1}; \, \omega\right),$$

где индексы $k_1, \ldots, k_p$ *пробегают независимо друг от друга все значения от* 1 *до* m.

Если тела $H_1, \ldots, H_{n-1}$ — многогранники, то $F(H_1, \ldots, H_{n-1}; \omega)$ дискретна и имеет следующий смысл. Пусть $\overline{n}_\nu$ — нормали к $(n-1)$-мерным граням многогранника $H_1 + H_2 + \ldots + H_{n-1}$. Грани эти являются линейными комбинациями граней (любого числа измерений) многогранников $H_1, \ldots, H_{n-1}$, лежащих в их опорных плоскостях с нормалями $\overline{n}_\nu$. Обозначим такие грани через $H_1^\nu, \ldots, H_{n-1}^\nu$, а их $(n-1)$-мерные смешанные объемы — через $F(H_1^\nu, \ldots, H_{n-1}^\nu)$.

Если ω содержит точку, соответствующую нормали $\overline{n}_\nu$, и не содержит других подобных точек, то

$$F(H_1, \ldots, H_{n-1}; \, \omega) = F\left(H_1^\nu, \ldots, H_{n-1}^\nu\right). \tag{11}$$

Если же ω вовсе не содержит точек, соответствующих нормалям $\overline{n}_\nu$, то $F(H_1, \ldots, H_{n-1}; \, \omega) = 0$.

Другой специальный случай, для которого наша теорема является известной, представляют регулярные выпуклые тела (см. [2, § 8, п. 37, 38]).

Смешанную поверхностную функцию $F(\underbrace{H, \ldots, H}_{m}, E, \ldots, E; \omega)$ будем называть m-й функцией кривизны тела H и обозначать $F_m(H; \omega)$. В частности, $(n-1)$-я функция кривизны есть поверхностная функция.

Пусть H — многогранник. Возьмем на единичном шаре область ω и область $\sigma(\omega)$ на H, сферически отображаемую на ω. Построим тело $H + \lambda E$, параллельное H, и рассмотрим на нем область $\sigma_\lambda(\omega)$, сферически отображаемую на ω, получающуюся из $\sigma(\omega)$ так, что в каждой точке $\sigma(\omega)$ восстанавливаются всевозможные нормали в ней, идущие в ω и по длине равные λ. Над кусками $(n-1)$-мерных граней, принадлежащих $\sigma(\omega)$, получим такие же точно плоские куски, и сумма их площадей будет $F_{n-1}(H;\omega)$. Над кусками $(n-2)$-мерных граней, принадлежащих $\sigma(\omega)$, получим цилиндрические поверхности, сумма площадей которых, очевидно, пропорциональна λ и будет равна $\lambda F_{n-2}(H;\omega)(n-1)$. Над кусками $(n-3)$-мерных граней получатся цилиндрические поверхности с $(n-3)$-мерными образующими и т. д. Наконец, над вершинами мы получим сферические секторы, поверхности которых дадут, очевидно, площадь $\lambda^{n-1}\omega$. Итак, в этом простом случае все функции кривизны имеют совершенно наглядный смысл и формула

$$F_{n-1}(H+\lambda E,\,\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\,C_{n-1}^k\,F_{n-k-1}(H,\omega), \tag{12}$$

являющаяся частным случаем общей формулы, указанной в свойстве 6, выводится, как видно, совсем просто.

Пусть тело H — регулярное, т. е. имеет в каждой точке своей поверхности определенные и нигде не равные нулю главные радиусы кривизны $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$, которые являются непрерывными функциями нормали $\overline{n}$. Площадь области $\sigma(\omega)$, сферически отображаемой на ω, представляется для такого тела известной формулой

$$F_{n-1}(H,\omega)=\int\limits_{\omega} R_1\ldots R_{n-1}\,d\omega. \tag{13}$$

Главные радиусы кривизны на поверхности параллельного тела $H+\lambda E$ будут, как известно, равны $R_i+\lambda$. Поэтому площадь области на $H+\lambda E$, соответствующей $\sigma(\omega)$, будет

$$F_{n-1}(H+\lambda E,\,\omega)=\int\limits_{\omega}(R_1+\lambda)\ldots(R_{n-1}+\lambda)\,d\omega. \tag{14}$$

Разлагая по степеням λ, получим в качестве коэффициента при λ^k элементарную симметрическую функцию $S_{n-k-1}(R_1,\ldots,R_{n-1})$ степени $n-k-1$ от $R_1,\ldots,R_{n-1}$. Эта элементарно-симметрическая функция радиусов кривизны называется обычно $(n-k-1)$-й функцией кривизны [2, § 8, п. 38]. Принятое нами изменение смысла этого термина представляется обоснованным тем, что обычные функции кривизны имеют смысл только для регулярных тел, в то время как наши функции кривизны определены для любого выпуклого тела.

Из формулы (14) получаем

$$F_{n-1}(H+\lambda E,\,\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\int\limits_{\omega}S_{n-k-1}(R_1,\ldots,R_{n-1})\,d\omega, \tag{15}$$

и так как

$$F_{n-1}(H+\lambda E,\,\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\,C_{n-1}^k\,F_{n-k-1}(H,\omega), \tag{16}$$

то

$$F_m(H,\omega)=\frac{1}{C_{n-1}^m}\int\limits_{\omega} S_m(R_1,\ldots,R_{n-1})\,d\omega. \tag{17}$$

Это замечание устанавливает связь наших общих понятий с хорошо известными понятиями дифференциальной геометрии.

§ 6. *Некоторое обобщение введенных понятий*

Понятия смешанного объема и смешанной поверхностной функции, определенные для выпуклых тел, легко распространяются на разности выпуклых функций на единичном шаре [13]. Для этого достаточно повторить рассуждения, которые привели нас в § 1 к определению функционала $V(Z,H_1,\ldots,H_{n-1})$ для разностей выпуклых функций $Z(\overline{n})$.

Пусть мы уже определили «смешанный объем» $V(Z_1,\ldots,Z_m,H_1,\ldots,H_{n-m})$, где $Z_1(\overline{n}),\ldots,Z_m(\overline{n})$ — данные разности выпуклых функций. Пусть

$$Z_{m+1}(\overline{n})=H'_{n-m}(\overline{n})-H''_{n-m}(\overline{n}).$$

Положим

$$\begin{gathered}V(Z_1,\ldots,Z_{m+1},\,H_1,\ldots,H_{n-m-1})=\\=V(Z_1,\ldots,Z_m,\,H_1,\ldots,H'_{n-m})-V(Z_1,\ldots,Z_m,\,H_1,\ldots,H''_{n-m}).\end{gathered} \tag{1}$$

Единственность этого определения доказывается так же, как и раньше.

Таким образом, будет определен функционал $V(Z_1,\ldots,Z_n)$, где $Z_1(\overline{n})$, $Z_2(\overline{n}),\ldots,Z_n(\overline{n})$ — разности выпуклых функций. Он симметричен относительно функций $Z_1,\ldots,Z_n$. Точно так же, как и раньше, легко доказываются его однородность и аддитивность относительно каждой из функций $Z_1(\overline{n}),\ldots,Z_n(\overline{n})$ в отдельности, т. е.

$$\begin{gathered}V(\lambda'Z'+\lambda''Z'',\,Z_1,\ldots,Z_{n-1})=\\=\lambda'\,V(Z',\,Z_1,\ldots,Z_{n-1})+\lambda''\,V(Z'',\,Z_1,\ldots,Z_{n-1}).\end{gathered} \tag{2}$$

Непрерывность $V(Z,Z_1,\ldots,Z_{n-1})$ относительно $Z(\overline{n})$ при заданных $Z_1(\overline{n}),\ldots,Z_{n-1}(\overline{n})$ легко устанавливается следующим рассуждением. Пусть

$$Z_1(\overline{n})=H_1^0(\overline{n})-H_1^1(\overline{n}),\ldots,Z_{n-1}(\overline{n})=H_{n-1}^0(\overline{n})-H_{n-1}^1(\overline{n}).$$

[13] Определение дано в § 5.

Разлагая $V(Z, Z_1, \ldots, Z_{n-1})$, получим

$$V(Z, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = \sum (-1)^{\sum i_k} V(Z, H_1^{i_1}, \ldots, H_{n-1}^{i_{n-1}}), \tag{3}$$

где сумма берется по всем комбинациям индексов $i_1, \ldots, i_{n-1}$, принимающих значения 0 и 1. Беря в этой сумме все члены по модулю и пользуясь доказанным ранее неравенством

$$|V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1})| \leqslant V(E, H_1, \ldots, H_{n-1}) \max |Z(\overline{n})|, \tag{4}$$

получим

$$|V(Z, Z_1, \ldots, Z_{n-1})| \leqslant \max |Z(\overline{n})| \sum V(E, H_1^{i_1}, \ldots, H_{n-1}^{i_{n-1}}),$$

или, короче,

$$|V(Z, Z_1, \ldots, Z_{n-1})| \leqslant A \cdot \max |Z(\overline{n})|, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, приходим к результату:

Существует единственный функционал $V(Z_1, \ldots, Z_n)$, определенный для разностей выпуклых функций, линейный относительно каждой из функций $Z_1(\overline{n}), \ldots, Z_n(\overline{n})$ и равный смешанному объему выпуклых тел $H_1, \ldots, H_n$, когда $Z_1(\overline{n}) = H_1(\overline{n}), \ldots, Z_n(\overline{n}) = H_n(\overline{n})$ суть опорные функции этих тел.

Точно так же, как и раньше, можно при заданных $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ распространить функционал $V(Z, Z_1, \ldots, Z_{n-1})$ на произвольные непрерывные функции $Z(\overline{n})$ на единичном шаре. Видно, что он однозначно представляется в виде

$$V(Z, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n})\, F(Z_1, \ldots, Z_{n-1}; d\omega), \tag{6}$$

и если

$$Z_1(\overline{n}) = H_1^0(\overline{n}) - H_1^1(\overline{n}), \ldots, Z_{n-1}(\overline{n}) = H_{n-1}^0(\overline{n}) - H_{n-1}^1(\overline{n}),$$

то

$$F(Z_1, \ldots, Z_{n-1}; \omega) = \sum (-1)^{\sum i_k} F(H_1^{i_1}, \ldots, H_{n-1}^{i_{n-1}}; \omega), \tag{7}$$

где сумма берется по всем комбинациям индексов $i_1, \ldots, i_{n-1}$, принимающих значения 0 и 1.

Этим самым однозначно определены «смешанные поверхностные функции» $F(Z_1, \ldots, Z_{n-1}; \omega)$ для разностей выпуклых функций. Нет надобности доказывать, что они обладают всеми свойствами смешанных поверхностных функций выпуклых тел, кроме, конечно, свойства неотрицательности.

Введенное нами формальное распространение смешанных объемов и поверхностных функций на разности выпуклых функций преследует следующую цель. Г. Минковский, а также Д. Гильберт показали, что ряд вопросов теории выпуклых тел решается путем сведе́ния их на вариационные задачи. Сюда относятся в первую очередь знаменитая теорема Минковского о существовании выпуклого многогранника с заданными площадями граней и метод, данный Д. Гильбертом, для доказательства неравенств между смешанными объемами. Допустим, что какая-нибудь задача сведена нами на изучение экстремума некоторого функционала $f(H)$, определенного для выпуклых тел. Допустим также, что существование экстремума доказано, как это удается сделать без особого труда в ряде вопросов, относящихся к выпуклым телам. Однако для исследования этого экстремума формальные правила вариационного исчисления оказываются, вообще говоря, неприложимыми. Для возможности их приложения необходимо, чтобы функционал имел смысл как для $H(\overline{n}) + \delta H(\overline{n})$, так и для $H(\overline{n}) - \delta H(\overline{n})$. Между тем разность $H(\overline{n}) - \delta H(\overline{n})$, вообще говоря, не будет выпуклой функцией, когда $H(\overline{n})$ и $H(\overline{n}) + \delta H(\overline{n})$ — выпуклые функции. Если же наш функционал определен для разностей выпуклых функций и допускает первую вариацию, то это затруднение отпадает. Во втором сообщении мы воспользуемся возможностью прилагать к распространенному смешанному объему $V(Z, Z, H_1, \dots, H_{n-1})$ правила вариационного исчисления при доказательстве однозначной определяемости выпуклого тела заданием его функции кривизны. Конечно, можно было бы пользоваться линейными комбинациями смешанных объемов и поверхностных функций выпуклых тел, даваемыми формулами (3) и (7), но это сделало бы вычисления и результаты слишком громоздкими.

Те же общие соображения обусловливают другое распространение понятия об объеме на положительные непрерывные функции на единичной сфере, даваемое в третьем сообщении. Оно позволяет дать широкое обобщение теоремы Минковского о многогранниках, не отступая, по существу, от простой идеи ее доказательства.

Пусть $Z(\overline{n}), Z_1(\overline{n}), \dots, Z_{n-m}(\overline{n})$ — данные разности выпуклых функций. По определению

$$\delta V(Z, \dots, Z,\, Z_1, \dots, Z_{n-m}) = \lim_{t\to 0} \frac{V(Z + t\delta Z, \dots) - V(Z, \dots)}{t}, \tag{8}$$

где $\delta Z(\overline{n})$ — также разность выпуклых функций.

$$V(Z + t\delta Z, \dots,\, Z + t\delta Z,\, Z_1, \dots, Z_{n-m}) = \\ = \sum_{k=0}^{m} t^k C_m^k\, V(\underbrace{\delta Z, \dots, \delta Z}_{k}, Z, \dots, Z,\, Z_1, \dots, Z_{n-m}). \tag{9}$$

Поэтому $\delta V(Z, \ldots, Z,\, Z_1, \ldots, Z_{n-m})$ существует и равна

$$m\,V(\delta Z,\, Z, \ldots, Z,\, Z_1, \ldots, Z_{n-m}). \tag{10}$$

С точностью до множителя найденная вариация является распространенным смешанным объемом. Поэтому, следуя методу § 1, ее можно распространить, и притом единственным образом, на произвольные непрерывные функции $\delta Z(\overline{n})$ на единичном шаре. Из формулы (10) следует, что

$$\delta V(Z, \ldots, Z,\, Z_1, \ldots, Z_{n-m}) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} \delta\, Z(\overline{n})\, F(Z, \ldots, Z,\, Z_1, \ldots, Z_{n-m};\, d\omega). \tag{11}$$

Если эта вариация определена, то и $F(Z, \ldots, Z,\, Z_1, \ldots, Z_{n-m}; \omega)$ также определена, потому что по теореме Ф. Рисса линейный функционал, определенный для всех непрерывных функций $\delta Z(\overline{n})$, допускает единственное представление в виде интеграла от $\delta Z(\overline{n})$ по абсолютно аддитивной функции множеств.

Докажем еще одну лемму, которая нам впоследствии понадобится.

Лемма. *Если последовательности выпуклых тел* $H_1^{(1)}, H_1^{(2)}, \ldots, H_1^{(m)}, \ldots, \ldots, H_{n-1}^{(1)}, H_{n-1}^{(2)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)}, \ldots$ *сходятся к телам* $H_1, \ldots, H_{n-1}$, *то при всякой непрерывной* $Z(\overline{n})$

$$V(Z,\, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \lim_{m\to\infty} V\left(Z,\, H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)}\right). \tag{12}$$

Иными словами, из сходимости указанных последовательностей выпуклых тел следует слабая сходимость функционалов $V(Z,\, H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)})$.

Аппроксимируем данную непрерывную функцию $Z(\overline{n})$ разностью выпуклых $Z'(\overline{n})$ так, чтобы имели место неравенства (как обычно, ε — произвольное положительное число)

$$|V(Z,\, H_1, \ldots, H_{n-1}) - V(Z',\, H_1, \ldots, H_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{13}$$

и при всяком m

$$\left| V\left(Z,\, H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)}\right) - V\left(Z',\, H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14}$$

Это возможно сделать, так как при любых $H_1, \ldots, H_{n-1}$

$$\begin{gathered} |V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) - V(Z', H_1, \ldots, H_{n-1})| \leqslant \\ \leqslant \max|Z - Z'|\; V(E, H_1, \ldots, H_{n-1}). \end{gathered} \tag{15}$$

Поэтому достаточно выбрать $Z'(\overline{n})$ так, чтобы было

$$|Z(\overline{n}) - Z'(\overline{n})| < \frac{\varepsilon}{3B},$$

где B — верхняя грань $V(E, H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)})$.

Пусть $Z'(\overline{n}) = H'(\overline{n}) - H''(\overline{n})$. По непрерывности смешанных объемов найдется такое M, что при $m > M$ $V(H', H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)})$ и $V(H'', H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)})$ будут отличаться от своих предельных значений столь мало, что для их разности, т. е. для $V(Z', H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)})$ будем иметь

$$\left|V(Z', H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)}) - V(Z', H_1, \ldots, H_{n-1})\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Из неравенств (13), (14) и (16) сразу следует, что при $m > M$

$$\left| V(Z, H_1, \ldots, H_{n-1}) - V(Z, H_1^{(m)}, \ldots, H_{n-1}^{(m)})\right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

В заключение можно заметить, что полученные результаты могут быть перенесены на тот случай, когда в духе геометрии Минковского за основное тело принимается не шар, а любое выпуклое тело с внутренними точками. Тогда n-мерное пространство, в котором мы рассматриваем выпуклые тела, будет уже не евклидово, а любое линейное и нормированное, с необязательно симметричной метрикой.

Статья поступила в редакцию
31.III.1937

ЛИТЕРАТУРА

1. *Minkowski H.* Volume und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd 57. S. 447–495.
2. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)
3. *Делоне Б. Н.* Доказательство неравенства Брунна — Минковского // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 37–45.
4. *Люстерник Л. А.* Применение неравенства Брунна — Минковского к экстремальным задачам // Там же. С. 46–54.
5. *Минковский Г.* Общие теоремы о выпуклых многогранниках // Там же. С. 55–71.
6. *Reidemeister K.* Über die singulären Randpunkte eines konvexen Körpers // Math. Ann. 1921. Bd 83. S. 116–118.
7. *Гливенко В. И.* Интеграл Стилтьеса. М.; Л.: ОНТИ, 1936.

К теории смешанных объемов выпуклых тел. II: Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения [1)]

Математический сборник. 1937. Т. 2, № 6. С. 1205–1238

Г. Минковский, опираясь на теорему Брунна, доказал для смешанных объемов двух выпуклых тел неравенство

$$V(H_1, \ldots, H_1, H_2)^2 \geqslant V(H_1, \ldots, H_1)\, V(H_1, \ldots, H_1, H_2, H_2).$$

Мы же, опираясь на этот результат Г. Минковского, докажем:

Теорема. *Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ — выпуклые тела в n-мерном пространстве и Z — разность выпуклых функций на единичной сфере* [2)]; *тогда*

$$V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z)^2 \geqslant V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1})\, V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z).$$

В частности, если $Z = H_n$ есть опорная функция на единичной сфере выпуклого тела H_n, то

$$V(H_1, \ldots, H_n)^2 \geqslant V(H_1, \ldots, H_{n-1},\, H_{n-1})\, V(H_1, \ldots, H_{n-2},\, H_n, H_n).$$

Если выпуклые тела $H_1, \ldots, H_{n-1}$ имеют внутренние точки, то $V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1}) > 0$; поэтому если Z удовлетворяет условию $V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z) = 0$, то $V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z) \leqslant 0$.

§ 1. Аналогичные многогранники

Мы будем рассматривать выпуклые невырождающиеся (т. е. имеющие внутренние точки) многогранники в n-мерном пространстве. Так как ни о каких других многогранниках речи не будет, то прилагательные «выпуклые» и «невырождающиеся» мы будем опускать.

[1)] Первую часть этой работы «Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел» см. в [1]. В дальнейшем мы предполагаем известными результаты части I.

[2)] Согласно определению, данному в [1], выпуклой функцией на сфере мы называем опорную функцию выпуклого тела, взятую только для единичных векторов.

Два многоугольника назовем аналогичными друг другу, если каждой стороне одного соответствует параллельная ей сторона другого и обратно [3]. Два многогранника будут называться аналогичными, если каждой $(n-1)$-мерной грани одного соответствует параллельная и аналогичная ей грань другого и обратно. Многогранники в любом числе называются аналогичными друг другу, если все они попарно аналогичны между собой.

Лемма I. *Если многогранники H_1 и H_2 аналогичны друг другу, то они имеют одинаковые хабитусы* [4]*, т. е.*

1) *каждой грани на H_1 соответствует параллельная и аналогичная грань на H_2 и обратно;*

2) *соответственные грани соприкасаются друг с другом по соответственным граням;*

3) *каждой вершине многогранника H_1 соответствует вершина многогранника H_2 и обратно*; *в соответственных вершинах грани обоих многогранников образуют гомотетичные, т. е. равные и параллельно расположенные многогранные углы.*

Соответственные грани и вершины многогранников H_1 и H_2 будем различать индексами 1 и 2, поставленными сверху. Многогранные углы будем для краткости называть просто углами.

1. По определению аналогичности $(n-1)$-мерные грани H_1 аналогичны параллельным им граням H_2. Поэтому, опять-таки по определению, грани этих граней параллельны и аналогичны и т. д.

2. Пусть $P_i^{(1)}$, $P_k^{(1)}$ — $(n-1)$-мерные грани на H_1, соприкасающиеся по $(n-2)$-мерной грани $P_{ik}^{(1)}$. Если грани $P_i^{(2)}$, $P_k^{(2)}$ на H_2 не соприкасаются по $P_{ik}^{(2)}$, то к $P_i^{(2)}$ по $P_{ik}^{(2)}$ прилегает $P_k^{(2)}$. Пусть нормали к $P_i^{(2)}$, $P_k^{(2)}$, $P_j^{(2)}$ будут $\overline{n}_i$, $\overline{n}_k$, $\overline{n}_j$. Они параллельны одной и той же двумерной плоскости, перпендикулярной $P_{ik}^{(2)}$, а значит, и $P_{ik}^{(1)}$. Спроектируем H_1 и H_2 на эту плоскость. Проекции $P_i^{(2)}$ и $P_j^{(2)}$ будут сходиться в вершине, являющейся проекцией $P_{ik}^{(2)}$. Напротив, на проекции H_1 соответствующие стороны не будут сходиться в одной вершине, а в одной вершине будут сходиться стороны с нормалями $\overline{n}_i$ и $\overline{n}_k$. При таком положении вещей проекция, по крайней мере одного из многогранников H_1 и H_2, не может быть выпуклой. Следовательно, наше предположение неверно и $P_i^{(2)}$ соприкасается с $P_k^{(2)}$ по $P_{ik}^{(2)}$. Это рассуждение можно продолжить для граней меньшего числа измерений.

[3] Под параллельностью понимается параллельность внешних нормалей.

[4] Ха́битус — то же, что га́битус (лат. — habitus): совокупность внешних признаков, внешний вид живого организма, кристалла. — *Прим. ред.*

3. Третья часть леммы очевидна для многоугольников. Допустим, что она верна для $(n-1)$-мерных многогранников, т. е. для граней n-мерных многогранников. Пусть $A^{(1)}$ — вершина многогранника H_1, в которой сходятся $(n-1)$-мерные грани $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \ldots$. Пусть $A^{(2)}$ — соответствующая вершина на H_2. Перенесем H_2 параллельно так, чтобы $A^{(2)}$ совпала с $A^{(1)}$. При этом угол при вершине $A^{(2)}$ на $P_1^{(2)}$ совпадет с углом при $A^{(1)}$ на $P_1^{(1)}$, так как, по предположению, лемма верна для граней. Если грань $P_2^{(2)}$ прилегает к $P_1^{(2)}$ по $P_{12}^{(2)}$, то (так как угол на $P_{12}^{(2)}$ совпал с углом на $P_{12}^{(1)}$) и углы на $P_2^{(2)}$ и $P_2^{(1)}$ при вершинах $A^{(2)}$ и $A^{(1)}$ также совпадут. Продолжая это рассуждение, получим, что углы на всех гранях $P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, \ldots$ совпали с углами на гранях $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \ldots$, а значит, совпали и углы при $A^{(2)}$ и $A^{(1)}$ на самих многогранниках.

Лемма II. *Если вершины многогранников H_1 и H_2 можно попарно сопоставить так, что многогранные углы при соответственных вершинах гомотетичны, то многогранники H_1 и H_2 аналогичны друг другу.*

Для многоугольников лемма очевидна, так как из гомотетичности их углов вытекает попарная параллельность их сторон. Допустим, что лемма верна для $(n-1)$-мерных многогранников.

Пусть $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — поставленные в соответствие вершины многогранников H_1 и H_2. Так как углы при $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ гомотетичны, то, во-первых, в них сходятся соответственно параллельные грани H_1 и H_2, так что каждой грани на H_1 соответствует параллельная ей грань H_2 и обратно, а во-вторых, углы при вершинах $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ на этих гранях также гомотетичны. Следовательно, параллельные грани H_1 и H_2 аналогичны, т. е. H_1 и H_2 сами аналогичны.

Лемма III. *Пусть $H_1, \ldots, H_m$ — данные, не обязательно невырождающиеся, многогранники и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — переменные положительные числа. Тогда все многогранники $H = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_m H_m$ аналогичны между собой, если они не вырождаются*[5].

На многограннике $H = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_m H_m$ $(n-1)$-мерные грани получаются как такие же линейные комбинации граней, лежащих на $H_1, \ldots, H_m$ в параллельных опорных плоскостях. Пусть $(n-1)$-мерная грань на H будет $P = \lambda_1 P^{(1)} + \ldots + \lambda_m P^{(m)}$. Она получается тогда и только тогда, когда в $P^{(1)}, \ldots, P^{(m)}$ можно провести $n-1$ отрезков, не параллельных одной, менее чем $(n-1)$-мерной, плоскости[6]. Если это невозможно, то парал-

---

[5] Эта лемма доказана еще Г. Минковским [2, § 19].

[6] Плоскостью без указания числа измерений мы называем $(n-1)$-мерное линейное подпространство. В других случаях будет указываться число измерений.

лельными переносами $P^{(1)}, \ldots, P^{(m)}$ можно будет поместить в одну такую плоскость, в которой окажется и результат их смешения — грань P, которая, следовательно, менее чем $(n-1)$-мерная. Если же это возможно и $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — нужные нам отрезки, то, как ясно из определения смешения, P будет содержать $(n-1)$-мерный параллелепипед со сторонами $\lambda_{i_1} a_1, \lambda_{i_2} a_2, \ldots, \lambda_{i_{n-1}} a_{n-1}$, если a_1 лежит в $P^{(i_1)}$, a_2 — в $P^{(i_2)}$ и т. д. Поэтому, если все $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$, то грань P будет на всех многогранниках H, когда она есть хоть на одном из них.

Отсюда сразу следует, что наша лемма верна для многоугольников. Пусть она верна для менее чем $(n-1)$-мерных многогранников. Так как $(n-1)$-мерные грани на многогранниках H получаются в результате смешения граней многогранников $H_1, \ldots, H_m$, то по предположению они аналогичны. Поэтому и сами многогранники $(n-1)$ аналогичны друг другу.

Лемма IV. *Любое конечное число аналогичных многогранников можно сколь угодно малыми смещениями плоскостей их $(n-1)$-мерных граней сделать примитивными, оставив их аналогичными между собой.*

Примитивным называется многогранник, в вершинах которого сходится не более чем по n $(n-1)$-мерных граней. Все грани примитивного многогранника также примитивны. Число $(n-1)$-мерных граней, сходящихся в данной вершине, мы будем называть ее кратностью.

Нашу лемму достаточно, конечно, доказать для пары аналогичных многогранников, которые мы обозначим H_1 и H_2. Пусть $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — соответственные вершины H_1 и H_2. По лемме I кратности их одинаковы. Предположим, что кратность их больше n. Сместим плоскости двух соответственных граней, сходящихся в $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, в направлении внешней нормали. Если смещение достаточно мало, то кратности вершин многогранников H_1 и H_2 не увеличатся. Кратность вершин $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ уменьшится. Кроме того, появятся новые вершины и новые грани. Новых $(n-1)$-мерных граней, понятно, не появится, и при достаточно малом смещении ни одна из них не исчезнет. Новые вершины получаются в результате «расщепления» тех вершин, которые принадлежат смещенным граням. Поэтому при достаточно малом смещении новые вершины будут лежать вблизи старых. Так как углы при старых вершинах были гомотетичны, то углы при новых вершинах также будут гомотетичны. Следовательно, после проделанной операции многогранники H_1 и H_2 останутся аналогичными. Но, повторяя эту операцию с разными гранями достаточно большое число раз, мы придем, наконец, к тому, что кратности всех вершин станут минимальными, т. е. равными n.

Лемма V. *Любое конечное число выпуклых тел можно с любой точностью аппроксимировать аналогичными друг другу примитивными многогранниками.*

Пусть дано m выпуклых тел. Аппроксимируем их невырождающимися многогранниками $H_1, \ldots, H_m$, что, как известно, возможно. Затем, взяв достаточно малое $\varepsilon > 0$, построим многогранники $H_1 + \varepsilon H_2 + \ldots + \varepsilon H_m$, $\varepsilon H_1 + H_2 + \ldots + \varepsilon H_m$, ..., $\varepsilon H_1 + \ldots + \varepsilon H_{m-1} + H_m$, которые будут, согласно лемме III, аналогичными между собой. После этого, воспользовавшись леммой IV, сделаем их примитивными.

§ 2. *Смешение аналогичных примитивных многогранников*

Мы будем рассматривать примитивные многогранники, аналогичные между собой. Системы внешних нормалей $\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_N$ к их $(n-1)$-мерным граням одинаковы, т. е. все они имеют одну и ту же систему внешних нормалей. Расстояния плоскостей $(n-1)$-мерных граней многогранника H от начала (положительные в направлении внешней нормали и отрицательные в противоположную сторону) назовем опорными числами $H_1, \ldots, H_N$. Систему произвольных чисел $Z_1, \ldots, Z_N$, отнесенных к нормалям $\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_N$, обозначим Z. При этом λZ будет обозначать систему чисел $\lambda Z_1, \ldots, \lambda Z_N$, а $Z + Y$ — систему чисел $Z_1 + Y_1, \ldots, Z_N + Y_N$. Если H — многогранник, то H обозначает также систему его опорных чисел. Очевидно, что задание системы опорных чисел при заданной системе нормалей вполне определяет многогранник.

Лемма I. *Если H — примитивный многогранник и Z — произвольная система чисел, отнесенных к его нормалям, то при достаточно малых ε $H + \varepsilon Z$ будет многогранником, аналогичным H.*

Переход от H к $H + \varepsilon Z$ состоит в смещении плоскости каждой $(n-1)$-мерной грани на расстояния εZ_i в направлении нормали. Если ε достаточно мало́, то кратность вершин при этом не увеличится и новых вершин не появится, так как кратности всех вершин многогранника H наименьшие возможные. Поэтому у $H + \varepsilon Z$ будут те же вершины, что и у H, и в соответственных вершинах будут сходиться соответственно параллельные грани. Отсюда по лемме II § 1 следует, что $H + \varepsilon Z$ аналогичен H. Заметим еще, что многогранник, аналогичный примитивному, сам примитивный, как это явствует из гомотетичности углов аналогичных многогранников.

Лемма II. *Если многогранники $H^{(1)}, \ldots, H^{(m)}$ аналогичны между собой, то при любых неотрицательных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не равных одновременно нулю, многогранник $H = \lambda_1 H^{(1)} + \ldots + \lambda_m H^{(m)}$ будет аналогичен им.*

В параллельных опорных плоскостях к многогранникам $H^{(1)}, \ldots, H^{(m)}$ лежат параллельные и аналогичные друг другу грани [7]. Поэтому $(n-1)$-

[7] Это следует из леммы I § 1. Из гомотетичности углов вытекает, что параллельные опорные плоскости содержат только соответственные вершины, а значит, и соответственные грани.

мерные грани на H получаются только от смешения соответственных $(n-1)$-мерных граней многогранников $H^{(1)},\ldots,H^{(m)}$. Отсюда следует, во-первых, что $(n-1)$-мерные грани многогранника H соответственно параллельны таким же граням многогранников $H^{(1)},\ldots,H^{(m)}$, а во-вторых, что наша лемма верна для многоугольников. Будем считать ее верной для граней многогранников (т. е. для менее чем n-мерных многогранников). Тогда, так как грани на H получаются от смешения аналогичных граней на $H^{(1)},\ldots,H^{(m)}$, то H аналогичен $H^{(1)},\ldots,H^{(m)}$.

Опорное число H_i есть не что иное, как значение опорной функции многогранника, т. е.

$$H_i = H(\overline{n}_i).$$

Опорная функция многогранника $H = \lambda_1 H^{(1)} + \ldots + \lambda_m H^{(m)}$ есть такая же линейная комбинация опорных функций многогранников $H^{(1)}$, ..., $H^{(m)}$. Поэтому и для его опорных чисел получаем

$$H_i = \lambda_1 H_i^{(1)} + \ldots + \lambda_m H_i^{(m)}.$$

Так как на H нет граней, не параллельных граням многогранников $H^{(1)}$, ..., $H^{(m)}$, то этим исчерпывается система его опорных чисел. Таким образом, смешение аналогичных многогранников сводится к такому же линейному комбинированию их опорных чисел.

Лемма III. *Пусть $H^{(1)},\ldots,H^{(n)}$ — переменные многогранники, остающиеся неизменно аналогичными одному и тому же данному многограннику. Тогда их смешанный объем $V(H^{(1)},\ldots,H^{(n)})$ есть однородный многочлен n-й степени относительно их опорных чисел.* (Коэффициенты многочлена, конечно, постоянные. Они изменяются, если $H^{(1)},\ldots,H^{(n)}$ перестают быть аналогичными данному многограннику.)

Известно, что

$$V(H^{(1)},\ldots,H^{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_i H^{(1)}(\overline{n}_i) F_i(H^{(2)},\ldots,H^{(n)}), \tag{1}$$

где $F_i(H^{(2)},\ldots,H^{(n)})$ — смешанный $(n-1)$-мерный объем граней многогранников $H^{(2)},\ldots,H^{(n)}$, лежащих в опорных плоскостях с нормалями $\overline{n}_i$. Когда $H^{(2)},\ldots,H^{(n)}$ аналогичны между собой, то $(n-1)$-мерные грани на многограннике, получающемся в результате их смешения, получаются в результате смешения соответственных граней многогранников $H^{(2)}$, ..., $H^{(n)}$. Поэтому $F_i(H^{(2)},\ldots,H^{(n)}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{n}_i$ — нормаль к i-м $(n-1)$-мерным граням этих многогранников. В этом случае

$H^{(1)}(\overline{n}_i) = H_i^{(1)}$ есть i-е опорное число многогранника $H^{(1)}$. Таким образом, для аналогичных многогранников

$$V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} H_i^{(1)} F_i(H^{(2)}, \ldots, H^{(n)}). \tag{2}$$

Пусть угол между $\overline{n}_i$ и $\overline{n}_k$ будет θ_{ik} [8]. Примем за начало O в плоскости i-й грани многогранника H проекцию на нее начала в пространстве. Расстояние от O до пересечения плоскостей i-й и k-й граней будет

$$H_{ik} = \frac{H_k - H_i \cos\theta_{ik}}{\sin\theta_{ik}}, \tag{3}$$

как это показывает совершенно элементарное вычисление. Число H_{ik} будет опорным числом i-й грани, если только соответствующее пересечение плоскостей действительно дает на этой грани какую-то $(n-2)$-мерную грань.

Применяя формулу (2) к смешанному объему $F_i(H^{(2)}, \ldots, H^{(n)})$ граней многогранников $H^{(2)}$, …, $H^{(n)}$, получим

$$F_i(H^{(2)}, \ldots, H^{(n)}) = \frac{1}{n-1} \sum_k H_{ik}^{(2)} F_{ik}(H^{(3)}, \ldots, H^{(n)}), \tag{4}$$

где $F_{ik}(H^{(3)}, \ldots, H^{(n)})$ — смешанные $(n-2)$-мерные объемы граней многогранников $H^{(3)}$, …, $H^{(n)}$. Так как грани аналогичных многогранников аналогичны, то к формуле (4) применимо замечание, сделанное нами относительно формулы (1). Поэтому в формуле (4) $F_{ik}(H^{(3)}, \ldots, H^{(n)}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда на всех многогранниках $H^{(3)}$, …, $H^{(n)}$ есть ik-е $(n-2)$-мерные грани, т. е. тогда и только тогда, когда

$$H_{ik}^{(2)} = \frac{H_k^{(2)} - H_i^{(2)} \cos\theta_{ik}}{\sin\theta_{ik}}$$

суть опорные числа i-й грани многогранника $H^{(2)}$.

Продолжая это рассуждение по отношению к смешанным объемам граней все меньшего и меньшего числа измерений, мы дойдем, наконец, до ребер. При этом, как видно из формулы (3), каждый раз опорные числа $(k-1)$-мерных граней будут линейно выражаться через опорные числа k-мерных граней, а значит, и через опорные числа данных многогранников.

[8] Система нормалей у нас все время заданная.

Коэффициенты в этих линейных выражениях зависят только от направлений $\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_N$. В выражениях для смешанных объемов k-мерных граней (типа формулы (4)) коэффициенты $F_{ik\ldots p}$ будут обращаться в нуль всегда для одних и тех же комбинаций индексов $i, k, \ldots, p$, если только переменные многогранники $H^{(1)}, \ldots, H^{(n)}$ остаются аналогичными данному многограннику. Наконец, длина q-го ребра, принадлежащего какой-нибудь двумерной грани с опорными числами $h_1, \ldots, h_r$ и с углами $\varphi_{12}, \ldots, \varphi_{rl}$ между нормалями к соседним ребрам, будет

$$l_q = \frac{h_{q-1} - h_q \cos\varphi_{q-1,q}}{\sin\varphi_{q-1,q}} + \frac{h_{q+1} - h_q \cos\varphi_{q,q+1}}{\sin\varphi_{q,q+1}}, \tag{5}$$

как это следует из формулы (3).

Подставляя все получающиеся таким образом выражения в формулу (2), получим $V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)})$ в виде однородного многочлена n-й степени относительно опорных чисел многогранников $H^{(1)}, \ldots, H^{(n)}$. Как показали наши рассуждения, коэффициенты этого многочлена действительно будут оставаться постоянными, когда многогранники $H^{(1)}, \ldots, H^{(n)}$ остаются аналогичными данному многограннику. В определенный таким способом многочлен можно вместо систем опорных чисел $H^{(1)}, \ldots, H^{(n)}$ подставить любые системы чисел $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)}$.

Все проведенные рассуждения с таким же успехом приложимы к соответственным граням наших многогранников, так как они сами суть аналогичные многогранники. Поэтому $F_i(H^{(2)}, \ldots, H^{(n)})$ будет однородным многочленом $(n-1)$-й степени относительно опорных чисел i-х граней, а в силу формулы (3) — однородным многочленом $(n-1)$-й степени относительно опорных чисел многогранников $H^{(2)}, \ldots, H^{(n)}$. Таким образом, понятно, что мы будем понимать под

$$F_i(Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n)}).$$

Лемма IV. *Многочлены $V(Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)})$ и $F_i(Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n)})$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *они не изменяются при перестановках систем чисел $Z^{(k)}$;*

2) $V(Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} Z_i^{(1)} F_i(Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n)})$;

3) $V(\lambda Z + \mu Y, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n)}) = \lambda V(Z, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n)}) + \mu V(Y, Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n)})$ *и то же для $F_i(Z^{(2)}, \ldots, Z^{(n)})$.*

1) и 3) следуют из таких же свойств смешанных объемов, а 2) — из формулы (2).

§ 3. *Доказательство основного неравенства*

Теорема. *Если многогранники $H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}$ примитивны и аналогичны друг другу и Z — произвольная система чисел, отнесенных к нормалям этих многогранников, то*

$$V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}, Z)^2 \geqslant$$
$$\geqslant V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}, H^{(n-1)}) V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-2)}, Z, Z), \tag{1}$$

причем знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда Z — система опорных чисел многогранника, гомотетичного $H^{(n-1)}$ [9].

Покажем прежде всего, что эта теорема равносильна следующей:

Пусть $H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}$ имеют тот же смысл и, кроме того, Z удовлетворяет условию

$$V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}, Z) = 0, \tag{2}$$

тогда

$$V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-2)}, Z, Z) \leqslant 0 \tag{3}$$

и равно нулю тогда и только тогда, когда Z есть система опорных чисел одной точки. Мы будем доказывать именно это утверждение.

Прежде всего напомним, что многогранник, гомотетичный H, представляется в виде $\lambda H + \overline{a}$, где λ — коэффициент подобного преобразования, которому подвергается H, и $\overline{a}$ — вектор переноса. Поэтому система опорных чисел многогранника, гомотетичного H, представляется в виде $\lambda H_i + \overline{a}\,\overline{n}_i$, где $\overline{a}\,\overline{n}_i$ — не что иное, как опорные числа точки $\overline{a}$. Верно также и обратное: многогранник с той же системой нормалей, что и H, и с опорными числами $\lambda H_i + \overline{a}\,\overline{n}_i$ гомотетичен H. Систему опорных чисел точки $\overline{a}$ для краткости обозначим A. Применяя это обозначение, можем сказать, что, как известно,

$$V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}, A) = 0. \tag{4}$$

Так как $V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}, H^{(n-1)}) > 0$, то из (1) при условии (2) действительно следует неравенство (3).

Пусть теперь Z произвольно. Выберем λ так, чтобы

$$V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}, Z) = \lambda V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}, H^{(n-1)}). \tag{5}$$

---

[9] Идея доказательства этой теоремы опубликована в [3]. Там, однако, опущено условие примитивности многогранников, а требуется только их аналогичность. Поэтому фигурирующие там Z — не произвольные системы чисел, а разности систем опорных чисел многогранников, аналогичных данным.

Такое λ есть, так как $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-1)},H^{(n-1)})>0$. Положим

$$Z-\lambda H^{(n-1)}=Z', \tag{6}$$

тогда

$$V(H^{(1)},\dots,H^{(n-1)},Z')=0. \tag{7}$$

Если верна наша вторая теорема, то

$$V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z',Z')\leqslant 0. \tag{8}$$

Подставляя сюда $Z'=Z-\lambda H^{(n-1)}$, разлагая по степеням λ (см. п. 3 леммы IV из § 2), после очевидных преобразований получим неравенство (1). Знак равенства в нем будет стоять только тогда, когда он стоит в (8), т. е., согласно утверждению, тогда, когда $Z'=A$, т. е. тогда, когда $Z=\lambda H^{(n-1)}+A$.

Таким образом, для того чтобы доказать нашу теорему, действительно достаточно доказать вторую, ей равносильную.

Лемма I. *В случае, когда $H^{(1)}=\dots=H^{(n-1)}=H$, наша теорема равносильна утверждению, что в неравенстве Минковского*

$$V(H,\dots,H,H')^2\geqslant V(H,\dots,H)V(H,\dots,H,H',H'), \tag{9}$$

где H и H' примитивны и аналогичны друг другу, знак равенства стоит тогда и только тогда, когда H и H' гомотетичны.

То, что из нашей теоремы следует это утверждение, получается, если в формуле (1) заменить Z на H', а $H^{(1)},\dots,H^{(n-1)}$ на H. Пусть теперь верно наше утверждение относительно знака равенства в неравенстве Минковского. Пусть Z удовлетворяет условию

$$V(H,\dots,H,Z)=0. \tag{10}$$

Возьмем $\varepsilon\neq 0$ столь малое, что $H'=H+\varepsilon Z$ будет многогранником, аналогичным H. Так как $\varepsilon Z=H'-H$, то из условия (10) вытекает, что

$$V(H,\dots,H,H')=V(H,\dots,H). \tag{11}$$

При этом условии из неравенства Минковского (9) получаем

$$V(H,\dots,H,H')\geqslant V(H,\dots,H,H',H'). \tag{12}$$

Вычитая в этом неравенстве из правой части левую и имея в виду, что $H'-H=\varepsilon Z$, получим

$$V(H,\dots,H,H',\varepsilon Z)\leqslant 0. \tag{13}$$

Вычитая отсюда умноженное на ε равенство (10), получим

$$V(H,\dots,H,\varepsilon Z,\varepsilon Z)\leqslant 0. \tag{14}$$

Вынося и сокращая положительный множитель ε^2, получаем, наконец,

$$V(H,\dots,H,Z,Z)\leqslant 0, \tag{15}$$

где равенство будет тогда, когда оно будет в (12), т. е. в неравенстве Минковского.

Лемма II. *Наша теорема верна для многоугольников.*

Действительно, в этом случае знак равенства в неравенстве Минковского

$$V(H,H')^2\geqslant V(H,H)\;\;V(H',H')$$

стоит только при гомотетичных H и H', поэтому из леммы I получаем лемму II.

Основываясь на этом, мы можем доказывать нашу теорему по индукции, т. е. будем предполагать, что для граней многогранников она верна.

Как следует из леммы IV § 2, $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z,Z)$ представляет собой квадратичную форму переменных $Z_1,\dots,Z_N$. Доказательство нашей теоремы построим на изучении собственных значений этой формы.

Лемма III. *Квадратичная форма $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z,Z)$ имеет при всяких примитивных и аналогичных друг другу $H^{(1)},\dots,H^{(n-2)}$ n-кратное нулевое собственное значение, к которому относятся собственные «векторы» Z, представляющие системы опорных чисел точек.*

Линейно независимых систем опорных чисел точки при заданной системе нормалей $\overline{n}_1,\dots,\overline{n}_N$ всегда имеется n и только n, где n, как всегда, — число измерений пространства. Действительно, если A — система опорных чисел точки $\overline{a}$, то $A_i=\overline{a}\,\overline{n}_i$ и так как в n-мерном пространстве есть всего n линейно независимых векторов $\overline{a}$, то и линейно независимых систем чисел A_i всегда n и только n.

Собственные векторы Z формы $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z,Z)$, принадлежащие ее нулевому собственному значению, представляют решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial Z_i}V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z,Z)=0. \tag{16}$$

Обращаясь к п. 2 леммы IV § 2, мы можем переписать эти уравнения в виде

$$F_i(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z)=0\qquad(i=1,\dots,N). \tag{17}$$

$F_i(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z)$ — линейная форма, имеющая тот же смысл для i-х граней, какой имеет $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-1)},Z)$ для самих многогранников.

Поэтому, считая нашу теорему верной для граней, получим, благодаря (17), что

$$F_i(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-3)}, Z, Z) \leqslant 0. \tag{18}$$

Мы будем неизменно предполагать, что все $H_i^{(k)} > 0$. Этого можно добиться, перенося наши многогранники параллельно так, чтобы начало оказалось внутри их всех. Так как параллельные переносы многогранников не влияют на их смешанные объемы, то это допущение не ограничивает общности наших рассуждений.

Поскольку $H_i^{(n-2)} > 0$, то, умножая на них соответствующие неравенства (18) и суммируя, получим (см. п. 2 леммы IV § 2)

$$V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-2)}, Z, Z) \leqslant 0 \tag{19}$$

и равно нулю тогда и только тогда, когда во всех неравенствах (18) стоит знак равенства.

Но точно так же, умножая (15) на Z_i и суммируя по i, получим

$$V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-2)}, Z, Z) = 0. \tag{20}$$

Следовательно, во всех неравенствах (18) стоит знак равенства. Согласно предположению индукции, это возможно только тогда, когда Z дает в плоскости каждой из $(n-1)$-мерных граней систему опорных чисел одной точки, которую мы обозначим для i-й грани через $Z_{(i)}$. Поскольку многогранник $H^{(n-2)}$ примитивный, то при достаточно малом ε $H^{(n-2)} + \varepsilon Z$ также будет многогранником, аналогичным $H^{(n-2)}$. При сложении опорных чисел многогранников складываются и опорные числа граней, как это видно из линейной зависимости этих последних от первых (см. формулу (3) § 2). То же верно, конечно, и для сложения произвольных систем чисел, так как им точно так же относятся системы чисел $Z_{(i)}$ в плоскостях граней. Числа системы $Z_{(i)}$ относятся к нормалям к $(n-2)$-мерным граням i-й $(n-1)$-мерной грани. Поэтому в наших обозначениях

$$(H^{(n-2)} + \varepsilon Z)_{(i)} = H_{(i)}^{(n-2)} + \varepsilon Z_{(i)}. \tag{21}$$

Так как $Z_{(i)}$ суть системы опорных чисел точек, то грани многогранника $H^{(n-2)} + \varepsilon Z$ равны и параллельны граням многогранника $H^{(n-2)}$. Следовательно, эти многогранники сами равны и параллельно расположены. Значит, Z — система опорных чисел одной точки (конца вектора, представляющего перенос от $H^{(n-2)}$ к $H^{(n-2)} + \varepsilon Z$, увеличенного в $1/\varepsilon$ раз и отложенного из начала).

Лемма IV. *Наша теорема равносильна утверждению, что квадратичная форма* $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z,Z)$ *имеет только одно положительное собственное значение и* n*-кратное нулевое собственное значение, указанное в лемме* III.

Будем рассматривать приведение формы $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z,Z)$ к сумме квадратов преобразованиями, сохраняющими неизменной форму

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\frac{F_i(H^{(1)},\dots,H^{(n-1)})}{H_i^{(n-1)}}Z_i^2, \tag{22}$$

которая положительно-определенная, так как

$$H_i^{(n-1)}>0 \quad \text{и} \quad F_i(H^{(1)},\dots,H^{(n-1)})>0.$$

Поставленная задача приводит к системе уравнений (см. п. 2 леммы IV § 2)

$$F_i(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z)=\lambda\frac{F_i(H^{(1)},\dots,H^{(n-1)})}{H_i^{(n-1)}}Z_i. \tag{23}$$

При $\lambda=1$ эта система допускает очевидное решение $Z=H^{(n-1)}$. Поэтому условие

$$V(H^{(1)},\dots,H^{(n-1)},Z)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\frac{F_i(H^{(1)},\dots,H^{(n-1)})}{H_i^{(n-1)}}H_i^{(n-1)}Z_i=0 \tag{24}$$

представляет не что иное, как условие «нагруженной» ортогональности допустимых Z к $H^{(n-1)}$, т. е. к собственному вектору, относящемуся к собственному значению $\lambda=1$. Если $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z,Z)$ не имеет других положительных собственных значений, то при условии (24) она неположительна и равна нулю тогда, когда Z относится к собственному значению нуль. Обратно, если $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z,Z)$ при условии (24) неположительна и равна нулю только тогда, когда Z — система опорных чисел одной точки, то $\lambda=1$ есть ее единственное положительное собственное значение, так как если бы Z относилось к такому собственному значению, то условие ортогональности (24) было бы выполнено, а сама форма была бы положительна.

Таким образом, для того чтобы доказать нашу теорему, осталось доказать следующее.

Лемма V. *Квадратичная форма* $V(H^{(1)},\dots,H^{(n-2)},Z,Z)$ *имеет только одно положительное собственное значение.*

В лемме I, исходя из неравенства Минковского, мы показали, что при

$$V(H, \ldots, H, Z) = 0 \tag{25}$$

$$V(H, \ldots, H, Z, Z) \leqslant 0. \tag{26}$$

Так как при условии ортогональности (25) квадратичная форма (26) неположительна, то она имеет единственное положительное собственное значение $\lambda = 1$, найденное при доказательстве предыдущей леммы.

Построим семейства многогранников $H^{(1)}, (1-\vartheta)H^{(1)} + \vartheta H^{(2)}, \ldots, (1-\vartheta)H^{(1)} + \vartheta H^{(n-2)}$. Когда ϑ растет от 0 до 1, многогранники эти непрерывно переходят от $H^{(1)}$ к $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(n-2)}$. При этом, как показывает лемма II § 2, они остаются аналогичными $H^{(1)}$. Коэффициенты формы

$$V(H^{(1)}, (1-\vartheta)H^{(1)} + \vartheta H^{(2)}, \ldots, (1-\vartheta)H^{(1)} + \vartheta H^{(n-2)}, Z, Z)$$

также будут изменяться непрерывно, поэтому и собственные значения ее будут изменяться непрерывно. Но по лемме III ни одно из них не может пройти через нуль (исключая случай, когда оно было, а значит, и остается равным нулю). В результате число положительных собственных значений остается при этом постоянным. При $\vartheta = 0$ оно равно единице, следовательно, и при $\vartheta = 1$ оно тоже равно единице, что и требовалось доказать.

Таким образом, мы доказали, наконец, основное неравенство между смешанными объемами для аналогичных, примитивных многогранников. Остается распространить его на общий случай. Для этого нам послужит, конечно, лемма IV § 1, согласно которой любое конечное число выпуклых тел может быть с любой степенью точности аппроксимировано примитивными и аналогичными между собою многогранниками.

Пусть $H_1, \ldots, H_{n-1}$ — произвольные выпуклые тела и Z — разность выпуклых функций: $Z = H_n - H_{n+1}$. Аппроксимируем тела $H_1, \ldots, H_{n+1}$ примитивными и аналогичными друг другу многогранниками $H^{(1)}, \ldots, H^{(n+1)}$. Для них по доказанной теореме имеем

$$V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}, H^{(n)} - H^{(n+1)})^2 \geqslant$$
$$\geqslant V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}, H^{(n-1)})\, V(H^{(1)}, \ldots, H^{(n)} - H^{(n+1)}, H^{(n)} - H^{(n+1)}).$$

При уточнении сделанных приближений $H^{(1)}, \ldots, H^{(n-1)}$ стремятся к $H_1, \ldots, H_{n-1}$, а $H^{(n)} - H^{(n+1)}$ стремится к Z, поэтому стоящие в последнем неравенстве смешанные объемы стремятся к соответствующим смешанным объемам и в пределе получается

$$V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z)^2 \geqslant$$
$$\geqslant V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1})\, V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z).$$

§ 4. *Неравенства между смешанными объемами выпуклых тел*

Из основного неравенства между смешанными объемами

$$V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z)^2 \geqslant V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1})\, V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z), \qquad (1)$$

выведенного в предыдущем параграфе, можно получить целый ряд интересных неравенств между смешанными объемами выпуклых тел. Вывод этих неравенств носит уже формальный характер, а потому мы остановимся только на тех неравенствах, которые будут важны для приложений.

Полагая в основном неравенстве (1) $Z = H_n$, получим неравенство между смешанными объемами выпуклых тел:

$$V(H_1, \ldots, H_n)^2 \geqslant V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1})\, V(H_1, \ldots, H_{n-2}, H_n, H_n). \qquad (2)$$

Закрепим тела $H_1, H_2, \ldots, H_{n-m}$ и построим линейное семейство тел $H^\vartheta = (1-\vartheta)H^0 + \vartheta H^1$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$, соединяющее данные выпуклые тела H^0 и H^1. Рассмотрим смешанный объем

$$V(\vartheta) = V(\underbrace{H^\vartheta, \ldots, H^\vartheta}_{m}, H_1, \ldots, H_{n-m}). \qquad (3)$$

Имеет место следующее обобщение неравенства Брунна:

$$\sqrt[m]{V(\vartheta)} \geqslant (1-\vartheta)\sqrt[m]{V(0)} + \vartheta\sqrt[m]{V(1)}. \qquad (4)$$

Для доказательства рассмотрим функцию

$$\Phi(\vartheta) = \sqrt[m]{V(\vartheta)} - (1-\vartheta)\sqrt[m]{V(0)} - \vartheta\sqrt[m]{V(1)}. \qquad (5)$$

Она обращается в нуль на границах промежутка $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. Поэтому для доказательства ее неотрицательности (а значит, и (4)) достаточно показать, что ее первая производная вначале неотрицательна и потом убывает, т. е. достаточно показать, что $\Phi''(\vartheta) \leqslant 0$. Для этого же достаточно показать, что $\Phi''(0) \leqslant 0$. Действительно, пусть ϑ_1 — данное значение параметра ϑ, при котором мы хотим вычислить вторую производную $\Phi''(\vartheta)$. Часть семейства тел H^ϑ при $\vartheta \geqslant \vartheta_1$ можно опять представить в виде линейного семейства, соединяющего тела H^{ϑ_1} и H^1. Положим для этого

$$\vartheta' = \frac{\vartheta - \vartheta_1}{1 - \vartheta_1} \qquad (0 \leqslant \vartheta' \leqslant 1) \qquad (6)$$

и при $\vartheta \geqslant \vartheta_1 \quad H^{\vartheta} = H^{\vartheta'}$, тогда

$$H^{\vartheta'} = (1-\vartheta')H^{\vartheta_1} + \vartheta' H^1. \tag{7}$$

Этому семейству соответствует функция $\overline{\Phi}(\vartheta')$, отличающаяся от $\Phi(\vartheta)$ на линейное слагаемое, и [10)]

$$\frac{d^2\overline{\Phi}(0)}{d\vartheta'^2} = (1-\vartheta_1)^2 \frac{d^2\Phi(\vartheta_1)}{d\vartheta^2}, \tag{8}$$

так что если $\overline{\Phi}''(0) \leqslant 0$, то и $\overline{\Phi}''(\vartheta_1) \leqslant 0$. Вспомним, что

$$V(H^{\vartheta}, \ldots, H^{\vartheta}, H_1, \ldots, H_{n-m}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (1-\vartheta)^{m-k} \vartheta^k C_m^k V(\underbrace{H^0, \ldots, H^0}_{m-k}, \underbrace{H^1, \ldots, H^1}_{k}, H_1, \ldots, H_{n-m}), \tag{9}$$

или в очевидных, более кратких, обозначениях

$$V(\vartheta) = \sum_{k=0}^{m} (1-\vartheta)^{m-k} \vartheta^k C_m^k V_k. \tag{10}$$

При этом $V(0) = V_0$ и $V(1) = V_m$.

Вычисляя теперь $\Phi''(0)$, получим

$$\Phi''(0) = (m-1)\frac{V_0 V_2 - V_1^2}{V_0^{2-1/m}}. \tag{11}$$

В знаменателе здесь стоит положительная величина. V_0 могло бы равняться нулю, если бы рассматриваемые тела вырождались. Однако этот случай мы отбросим, так как для него обобщенное неравенство Брунна (4) получается тривиальным предельным переходом от тел невырождающихся (имеющих внутренние точки) к телам вырождающимся. В числителе дроби (11) стоит $V_0 V_2 - V_1^2$. Эта величина неположительная, так как, полагая в основном неравенстве (2) $H_n = H^1$, $H_{n-m+1} = \ldots = H_{n-1} = H^0$, получим

$$V_1^2 \geqslant V_0 V_2. \tag{12}$$

Следовательно,

$$\Phi''(0) \leqslant 0.$$

[10)] $\overline{\Phi}(\vartheta') = \Phi(\vartheta) + \left[(1-\vartheta)\sqrt[m]{V(0)} + \vartheta\sqrt[m]{V(1)}\right] - \left[(1-\vartheta')\sqrt[m]{V(\vartheta_1)} + \vartheta'\sqrt[m]{V(1)}\right]$.

Положим в основном неравенстве (2) из m последних тел первые k равными H^1 и остальные $m-k$ равными H^0. Тогда получится неравенство, которое в наших сокращенных обозначениях будет иметь вид

$$V_k^2 \geqslant V_{k-1}\, V_{k+1}. \tag{13}$$

k здесь может меняться от 1 до $m-1$. Все такие неравенства мы назовем промежуточными квадратичными неравенствами. Допустим, что в обобщенном неравенстве Брунна стоит знак равенства. Тогда

$$V(\vartheta) = \left[(1-\vartheta)\sqrt[m]{V(0)} + \vartheta\sqrt[m]{V(1)}\,\right]^m. \tag{14}$$

Разлагая правую часть по формуле бинома Ньютона и сравнивая ее с выражением $V(\vartheta)$ через смешанные объемы V_k (см. формулу (10)), получим

$$V_k^m = V_0^{m-k}\, V_m^k. \tag{15}$$

В этом случае во всех промежуточных квадратичных неравенствах (13) будет стоять знак равенства.

Резюмируем полученные результаты.

Теорема. *Пусть* $H_1, \ldots, H_{n-m}, H^0, H^1$ — *данные выпуклые тела и* $H^\vartheta = (1-\vartheta)H^0 + \vartheta H^1 \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$. *Имеет место следующее обобщение неравенства Брунна*:

$$\sqrt[m]{V(\vartheta)} \geqslant (1-\vartheta)\sqrt[m]{V(0)} + \vartheta\sqrt[m]{V(1)},$$

где для краткости положено $V(\vartheta) = V(H^\vartheta, \ldots, H^\vartheta, H_1, \ldots, H_{n-m})$,

$$V(\vartheta) = \sum_{k=0}^{m} (1-\vartheta)^{m-k}\vartheta^k C_m^k V_k.$$

Имеют место промежуточные квадратичные неравенства

$$V_k^2 \geqslant V_{k-1}V_{k+1} \qquad (k = 1, \ldots, m-1),$$

и если в обобщенном неравенстве Брунна стоит знак равенства, то он стоит также во всех этих неравенствах.

Укажем на один специальный случай обобщенного неравенства Брунна, который будет играть в приложениях основную роль. Положим $H_1 = \ldots = H_{n-m} = E$, где E — единичный шар (это обозначение единичного шара будет неизменно употребляться далее). Вспоминая результаты § 2 части I, можно написать, что

$$V(\underbrace{H, \dots, H}_{m}, E, \dots, E) = V_m(H) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} F_m(H, d\omega), \tag{16}$$

так как $E(\overline{n}) = 1$, если начало взято в центре единичного шара E. Короче:

$$V_m(H) = \frac{1}{n} F_m(H, \Omega)$$

(Ω — полная поверхность единичного шара),

$$F_m(H, \omega) = F(\underbrace{H, \dots, H}_{m}, E, \dots, E; \omega)$$

есть m-я функция кривизны тела H и для регулярного тела представляет интеграл от функции кривизны в обычном смысле (т. е. от элементарно-симметрической функции главных радиусов кривизны), взятый по области ω. Таким образом, $V_m(H)$ представляют с точностью до множителя интеграл кривизны тела H. В частности, при $m = n - 1$ $V_{n-1}(H)$ есть деленная на n площадь поверхности тела H.

Смешанные объемы $V_m(H)$ имеют еще другой геометрический смысл. Назовем m-мерной поперечной мерой тела H m-мерный объем его проекции на какую-нибудь m-мерную плоскость. Тогда $V_m(H)$ представляет с точностью до постоянного множителя среднюю m-мерную поперечную меру тела H или m-й интеграл поперечных мер (m-tes Quermassintegral [4, § 7 п. 32 и § 8 п. 38]).

Из обобщенного неравенства Брунна при $H_1 = \ldots = H_{n-m} = E$ мы получаем: если тела H^0 и H^1 имеют равные m-е интегралы кривизны (или, что то же самое, равные средние m-мерные поперечные меры), то у тела $H^\vartheta = (1-\vartheta)H^0 + \vartheta H^1$ тот же интеграл кривизны не меньше, чем у них [11)]. Дальше мы покажем, что он всегда больше, кроме того случая, когда тела H^0 и H^1 равны и параллельно расположены (исключая, конечно, случай $m = 1$, при котором всегда $V_1(H^\vartheta) = (1-\vartheta)V_1(H^0) + \vartheta V_1(H^1)$, а также случай вырождающихся тел). (Заметим, что объем тела H можно трактовать как n-й интеграл кривизны. Тогда только что формулированная теорема включает и теорему Брунна.)

[11)] Эта теорема для частных случаев $m = n - 1$ и $m = 2$ была доказана еще Г. Минковским [2, § 7]. Однако вопрос о знаке равенства оставался открытым.

Обратимся снова к функции $\Phi(\vartheta) = \sqrt[m]{V(\vartheta)} - (1-\vartheta)\sqrt[m]{V(0)} - \vartheta\sqrt[m]{V(1)}$. Мы доказали, что она неотрицательна, а так как $\Phi(0) = 0$, то ее первая производная также должна быть неотрицательной при $\vartheta = 0$ и равной нулю тогда и только тогда, когда $\Phi(\vartheta) = 0$, т. е. когда в обобщенном неравенстве Брунна стоит знак равенства. Обращаясь к выражению $V(\vartheta)$ через смешанные объемы V_k, получим

$$\Phi'(0) = \frac{V_1 - V_0}{V_0^{1-1/m}} + V_0^{1/m} - V_m^{1/m} \geqslant 0, \tag{17}$$

откуда

$$V_1^m \geqslant V_0^{m-1} V_m, \tag{18}$$

или в развернутом виде

$$V(\underbrace{H^0, \ldots, H^0}_{m-1}, H^1, H_1, \ldots, H_{n-m})^m \geqslant$$
$$\geqslant V(\underbrace{H^0, \ldots, H^0}_{m}, H_1, \ldots, H_{n-m})^{m-1}\, V(\underbrace{H^1, \ldots, H^1}_{m}, H_1, \ldots, H_{n-m}).$$

Здесь m может быть любое от 2 до n.

Докажем теперь, что имеет место следующее общее неравенство, охватывающее, в частности, неравенства (2) и (18):

$$\boxed{V(H_1, \ldots, H_n)^m \geqslant \prod_{k=1}^{m} V(\underbrace{H_k, \ldots, H_k}_{m}, H_{m+1}, \ldots, H_n).} \tag{19}$$

При $m = 2$ оно сводится к неравенству (2). Предположим, что оно верно для m, и докажем, что оно верно и для $m+1$. Для этого заметим, что неравенство (18) можно переписать, беря вместо m $m+1$, в виде

$$\begin{gathered} V(H_k, \ldots, H_k, H_{m+1}, \ldots, H_n)^{m+1} \geqslant \\ \geqslant V(H_k, \ldots, H_k, H_{m+2}, \ldots, H_n)^m\, V(H_{m+1}, \ldots, H_{m+1}, \ldots, H_n) \end{gathered} \tag{20}$$

для $1 \leqslant k \leqslant m$.

Возведем неравенство (19) в $(m+1)$-ю степень. Тогда, воспользовавшись неравенствами (20) и извлекая корень m-й степени, получим

$$V(H_1, \ldots, H_n)^{m+1} \geqslant \prod_{k=1}^{m+1} V(H_k, \ldots, H_k, H_{m+2}, \ldots, H_n). \tag{21}$$

Тем самым наше общее неравенство доказано.

Как видно из доказывающих его рассуждений, знак равенства в нем стоит тогда и только тогда, когда он стоит в неравенствах вида (20), или, что то же самое, в соответствующих им обобщенных неравенствах Брунна вида (4).

В частном случае $m = n$ неравенство (19) дает

$$V(H_1, \ldots, H_n)^n \geqslant \prod_{k=1}^{n} V(H_k, \ldots, H_k), \tag{22}$$

т. е. n-я степень смешанного объема больше или равна произведению объемов входящих в него тел.

Для приложений нам понадобится неравенство между интегралами кривизны, получающееся из (19). Если в (19) положить $H_1 = \ldots = H_k = H$ $(k < m)$, $H_{k+1} = \ldots = H_n = E$, то получим

$$V_k(H)^m \geqslant V_m(H)^k\, V(E)^{m-k}, \tag{23}$$

где $1 \leqslant k < m \leqslant n$, $V(E)$ — объем единичного шара и $V_m(H), V_k(H)$ имеют смысл, указанный выше (см. формулу (16)).

Знак равенства в этом неравенстве будет стоять тогда и только тогда, когда он стоит во всех неравенствах вида

$$\sqrt[l]{V_l(H_\vartheta)} \geqslant (1-\vartheta)\sqrt[l]{V_l(H)} + \vartheta\sqrt[l]{V_l(E)},$$

где $H_\vartheta = (1-\vartheta)H + \vartheta E$ и $l \leqslant m$. Это непосредственно следует из только что сделанного замечания относительно знака равенства в общем неравенстве (19).

Вопрос об условиях наличия знака равенства в полученных нами общих неравенствах представляет большие трудности для окончательного решения. Он не решен даже для квадратичного неравенства Минковского в трехмерном пространстве. Можно видеть, что все сводится к изучению условий равенства в основном неравенстве. Относительно него мы докажем лемму, которая пригодится нам впоследствии и, может быть, позволит также пойти еще дальше в установлении условий равенства в общих неравенствах между смешанными объемами.

Лемма. *Для того чтобы в основном неравенстве*

$$V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z)^2 \geqslant V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1})V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z)$$

стоял знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы функция Z удовлетворяла уравнению

$$\lambda F(H_1, \ldots, H_{n-1}; \omega) = \mu F(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z;\ \omega), \tag{24}$$

где $\lambda = V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z)$, $\mu = V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1})$ [12].

[12] Об употребляемых здесь обобщенных смешанных объемах $V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z)$ и смешанных поверхностных функциях $F(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z;\ \omega)$ см. [1, § 6].

Достаточность. Интегрируя $Z(\overline{n})$ по функциям множеств, стоящим в уравнении (24), получим

$$\lambda \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n}) F(H_1, \ldots, H_{n-1}; d\omega) = \mu \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n}) F(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; d\omega),$$

или, деля на n,

$$V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z)^2 = V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1})\, V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z). \quad (25)$$

Необходимость. Пусть имеет место равенство (25). Так как для любой разности выпуклых функций на единичной сфере верно основное неравенство (1), то функция $Z(\overline{n})$, удовлетворяющая условию (25), дает минимум разности

$$V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z)^2 - V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1}) V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z). \quad (26)$$

Из природы обобщенных смешанных объемов вытекает, что они являются дифференцируемыми функционалами, т. е. допускают первую вариацию. При Z, удовлетворяющей условию (25), вариация разности (26) должна равняться нулю. Выполняя варьирование, получим

$$\lambda \int\limits_{\Omega} \delta Z(\overline{n}) F(H_1, \ldots, H_{n-1}; d\omega) = \mu \int\limits_{\Omega} \delta Z(\overline{n}) F(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; d\omega). \quad (27)$$

Согласно указанию, сделанному в § 6 части I этой работы, $\delta Z(\overline{n})$ может рассматриваться здесь как произвольная непрерывная функция. Поэтому из равенства (27) следует

$$\lambda F(H_1, \ldots, H_{n-1};\ \omega) = \mu F(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z;\ \omega).$$

Прежде чем приступить к приложениям полученных общих результатов, докажем две вспомогательные леммы, которые нам дальше понадобятся.

§ 5. *Две леммы о проекциях выпуклых тел*

Лемма I. *Если проекции двух выпуклых тел при любом направлении проектирования равны и параллельно расположены, то и сами тела равны и параллельно расположены*[13]. (Речь идет о телах в не менее чем

[13] Лемма эта впервые доказана В. Зюссом [5]. Приведенное здесь изящное доказательство этой леммы принадлежит И. М. Либерману, студенту Ленинградского университета.

трехмерном пространстве, так как лемма заведомо неверна для выпуклых областей на плоскости.)

Пусть H_1 и H_2 — два выпуклых тела с равными и параллельно расположенными проекциями (в n-мерном пространстве). Возьмем два взаимно перпендикулярных направления проектирования $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$. Перенесем тело H_2 так, чтобы проекция его в направлении $\overline{n}_1$ совпала с соответствующей проекцией тела H_1. После этого тело H_2 может перемещаться только в направлении $\overline{n}_1$. Передвинем его вдоль этого направления так, чтобы проекция тела H_2 в направлении $\overline{n}_2$ совпала с соответствующей проекцией тела H_1. Это возможно сделать, так как проекция тела H_2 в направлении $\overline{n}_2$ имеет тот же проектирующий цилиндр, что и соответствующая проекция тела H_1, с образующими, параллельными $\overline{n}_1$. А так как совмещаемые проекции равны и параллельно расположены, то движением одной из них в этом цилиндре можно привести их к совпадению. Покажем, что после этого все проекции тел H_1 и H_2 также совпадают друг с другом. Возьмем какое-нибудь направление проектирования $\overline{n}$, не параллельное плоскости, определяемой направлениями $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$. Тогда у тел H_1 и H_2 найдется по $n-1$ опорных плоскостей, параллельных $\overline{n}_1$ и $\overline{n}$ или $\overline{n}_2$ и $\overline{n}$ и находящихся в общем расположении [14]. Эти опорные плоскости будут также опорными для проекций в направлениях $\overline{n}_1$ или $\overline{n}_2$. Так как упомянутые проекции у обоих тел совпадают, то и рассматриваемые опорные плоскости совпадают. Но рассматриваемые опорные плоскости параллельны $\overline{n}$, а значит, они будут опорными для проекций в направлении $\overline{n}$. Таким образом, у двух равных и параллельно расположенных проекций $n-1$ опорных плоскостей, находящихся в общем расположении, совпадают. Значит, и самые проекции совпадают. Они отличаются только расположением их в плоскости. Вектор переноса от одной из них до другой имеет нулевые проекции на нормали к $n-1$ опорным плоскостям, находящимся в общем расположении. Поэтому и сам этот вектор равен нулю.

После того как совпадение проекций доказано для всех направлений, не параллельных плоскости направлений $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$, его можно доказать и для любого направления в этой плоскости. Для этого достаточно взять за $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ направления, уже не параллельные этой плоскости. Всякая опорная плоскость выпуклого тела опорная и для какой-нибудь его проекции. Поэтому из совпадения всех проекций двух выпуклых тел следует совпадение всех их опорных плоскостей, а значит, и совпадение самих тел.

Лемма II. *Пусть $H_1, \ldots, H_{n-1}$ — данные выпуклые тела и $H'_1, \ldots$ $\ldots, H'_{n-1}$ — их проекции в направлении $\overline{n}_0$. Смешанный объем проекций*

[14] $n-1$ плоскостей находятся в общем расположении, если они не параллельны никакой двумерной плоскости. Тогда нормали к ним не помещаются в менее чем $(n-1)$-мерную плоскость.

выражается через смешанную поверхностную функцию проектируемых тел в виде

$$V(H_1', \ldots, H_{n-1}') = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0 \overline{n}| \; F(H_1, \ldots, H_{n-1}; d\omega), \tag{1}$$

где $|\overline{n}_0 \overline{n}|$ *— абсолютная величина косинуса угла между* $\overline{n}_0$ *и* $\overline{n}$.

Еще в § 3 части I было показано, что площадь проекции тела H в направлении $\overline{n}_0$

$$V(H', \ldots, H') = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0 \overline{n}| \; F(H, \ldots, H;\; d\omega) \tag{2}$$

[1, § 3, формула (23)]. Положим

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i H_i.$$

Так как проекция линейной комбинации выпуклых тел есть такая же линейная комбинация их проекций в том же направлении, то

$$H' = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i H_i'.$$

По формуле (2) получим

$$V\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i H_i', \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i H_i'\right) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0 \overline{n}| \; F\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i H_i, \ldots; d\omega\right). \tag{3}$$

Развертывая правую и левую части этого равенства по произведениям чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ и сравнивая коэффициенты при произведении $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$, получим формулу (1).

Мы уже упоминали, что смешанный объем выпуклого тела H и единичного шара E $V_m(H)$ пропорционален m-му интегралу кривизны тела H, а именно

$$V_m(H) = \frac{1}{n} F_m(H, \Omega), \tag{4}$$

где Ω, как всегда, — полная поверхность единичного шара. Поэтому не возникает недоразумений, если называть $V_m(H)$ m-м интегралом кривизны тела H, как это и будет делаться в дальнейшем. Из доказанной только что леммы следует важный для дальнейшего результат: *если у двух тел m-е функции кривизны $F_m(H; \omega)$ равны, то и m-е интегралы кривизны их проекций тоже равны.*

§ 6. *Предварительные замечания о вырождающихся телах*

Мы ставим перед собой две задачи: 1) найти необходимые и достаточные условия наличия знака равенства в обобщенном неравенстве Брунна для интегралов кривизны и 2) установить, в какой мере задание какой-нибудь функции кривизны определяет выпуклое тело. Уже из доказательства Минковского теоремы о единственности многогранника с заданными нормалями и площадями граней можно усмотреть теснейшую связь обеих задач. Мы будем их решать одновременно, путем сведения друг на друга. Первая задача полностью была решена до сих пор только для неравенства Брунна для объемов (n-х интегралов кривизны). Вторая — для $(n-1)$-й и первой функций кривизны, но только для функций кривизны в обычном смысле, т. е. только в случае регулярных тел, и еще для $(n-1)$-й функции кривизны многогранников [2; 4, § 13; 6]. Благодаря введенному нами общему понятию смешанных поверхностных функций, в частности функций кривизны, мы сможем решить поставленные задачи в полном объеме, без каких бы то ни было предположений регулярности и т. п. Прежде всего рассмотрим случаи, относящиеся к слишком сильно вырождающимся телам, для которых обе поставленные задачи оказываются, по существу, тривиальными. Первые интегралы кривизны следует вовсе исключить из рассмотрения, потому что всегда

$$V_1((1-\vartheta)H_0+\vartheta H_1)=(1-\vartheta)V_1(H_0)+\vartheta V_1(H_1).$$

Для того чтобы смешанный объем $V(H_1,\dots,H_n)$ не равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы в телах $H_1,\dots,H_n$ можно было провести отрезки $a_1,\dots,a_n$, не параллельные одной плоскости. Этот легко доказываемый факт был установлен еще Г. Минковским [2, § 21, 22; 4, § 7 п. 29].

Мы будем рассматривать, как всегда, выпуклые тела в n-мерном пространстве. Какое-нибудь тело H назовем m-мерным, если оно помещается, самое меньшее, в m-мерной плоскости. Из только что приведенного условия неравенства смешанного объема нулю следует: $V_m(H)>0$ тогда и только тогда, когда тело H не менее чем m-мерное. Поэтому, если в обобщенном неравенстве Брунна при $H_\vartheta=(1-\vartheta)H_0+\vartheta H_1$

$$\sqrt[m]{V_m(H_\vartheta)}\geqslant(1-\vartheta)\ \sqrt[m]{V_m(H_0)}+\vartheta\ \sqrt[m]{V_m(H_1)}, \tag{1}$$

одно из тел H_0 и H_1 менее чем m-мерное, то неравенство тривиально. Пусть именно H_1 менее чем m-мерное, тогда

$$V_m(H_1)=0. \tag{2}$$

Вместе с тем

$$V_m(H_\vartheta) = \sum_{k=0}^{m} (1-\vartheta)^k \vartheta^{m-k} C_m^k V(\underbrace{H_0, \ldots, H_0}_{k}, \underbrace{H_1, \ldots, H_1}_{m-k}, E, \ldots, E), \tag{3}$$

следовательно, всегда

$$V_m(H_\vartheta) \geqslant (1-\vartheta)^m V_m(H_0), \tag{4}$$

а это и доказывает наше утверждение. Кроме того, из разложения (3) вытекает, что в неравенстве (4) будет стоять знак равенства тогда и только тогда, когда

$$V(\underbrace{H_0, \ldots, H_0}_{k}, \underbrace{H_1, \ldots, H_1}_{m-k}, E, \ldots, E) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{5}$$

Отсюда, на основании приведенного выше условия равенства смешанного объема нулю, легко заключить:

Если в обобщенном неравенстве Брунна (1) *тело H_1 менее чем m-мерное, то знак равенства стоит там тогда и только тогда, когда H_1 — точка и H_0 — любое или, если H_1 — не точка, когда оба тела H_0 и H_1 можно поместить* (*путем параллельного переноса*) *в одной менее чем m-мерной плоскости*[15].

Пусть тело H менее чем m-мерное. Тогда, как ясно из условия равенства смешанного объема нулю, при всяком выпуклом теле L и для всех $k \geqslant m$

$$V(L, \underbrace{H, \ldots, H}_{k}, E, \ldots, E) = 0. \tag{6}$$

Из определения смешанного объема для любых непрерывных функций отсюда следует, что

$$V(Z, \underbrace{H, \ldots, H}_{k}, E, \ldots, E) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n}) F_k(H, d\omega) = 0, \tag{7}$$

откуда, в силу произвольности $Z(\overline{n})$,

$$F_k(H, \omega) = 0. \tag{8}$$

[15] Иначе в H_0 и H_1 можно выбрать m отрезков, не параллельных никакой менее чем m-мерной плоскости, и тогда хоть одно из равенств (5) невозможно.

Следовательно, *если выпуклое тело менее чем m-мерное, то все его функции кривизны, порядка бо́льшего или равного m, тождественно равны нулю.*

Пусть теперь тело H m-мерное. Вспомним наглядный смысл функций кривизны для многогранников, установленный нами в § 5 части I. Построим тело $H+\lambda E$, параллельное H. Тогда та часть поверхности этого тела, которая представляет собой цилиндр с образующими H и направляющей поверхностью $(n-m)$-мерного шара, будет по величине пропорциональна λ^{n-m}. Площадь куска этого цилиндра, сферически отображаемого на область ω, и будет представлять значение m-й функции кривизны. Площадь этого куска пропорциональна m-мерному объему H. Опорные плоскости к нему параллельны той m-мерной плоскости, в которой лежит H, и только нормали к этим опорным плоскостям определяют ту область на единичной сфере, в которой m-я функция кривизны не равна нулю, т. е. если ω не имеет общих точек с этой областью, то $F_m(H,\omega)=0$. Указанная область на единичной сфере есть сечение ее $(n-m)$-мерной плоскостью, перпендикулярной той плоскости, в которой лежит H. Если ω' — та часть области ω, которая принадлежит этому сечению, то площадь сферически отображаемого на ω куска нашей цилиндрической поверхности будет пропорциональна ω'. Следовательно, m-я функция кривизны m-мерного выпуклого тела вполне определяется заданием его m-мерного объема и той m-мерной плоскости, в которой тело лежит.

В случае $m=n-1$ все эти соображения становятся тривиальными. Здесь мы имеем $(n-1)$-мерное тело, и его $(n-1)$-я функция кривизны, т. е. поверхностная функция, дискретна. Если $\overline{n}$ — нормаль к той плоскости, где лежит наше тело, то его поверхностная функция сводится к двум точечным «нагрузкам» в точках $\overline{n}$, $-\overline{n}$ на поверхности единичного шара. Полученный результат можно, конечно, формулировать еще так:

У двух m-мерных выпуклых тел m-е функции кривизны равны тогда и только тогда, когда оба тела имеют равные m-мерные объемы и лежат в параллельных m-мерных плоскостях.

§ 7. Единственность выпуклого тела с данной функцией кривизны

После того как мы рассмотрели случаи, по существу, тривиального решения вопроса о знаке равенства в обобщенном неравенства Брунна и об определяемости выпуклого тела его функцией кривизны, обратимся к тому случаю, когда поставленный вопрос имеет уже полное содержание. Мы докажем две теоремы.

Теорема I. *Если два не менее чем m-мерных выпуклых тела имеют одинаковые $(m-1)$-е функции кривизны, то они равны и параллельно расположены.*

Теорема II. *Пусть H_0 и H_1 — два не менее чем m-мерных выпуклых тела и $H_\vartheta = (1-\vartheta)H_0 + \vartheta H_1$. В обобщенном неравенстве Брунна для m-х интегралов кривизны*

$$\sqrt[m]{V_m(H_\vartheta)} \geqslant (1-\vartheta)\sqrt[m]{V_m(H_0)} + \vartheta\sqrt[m]{V_m(H_1)} \tag{1}$$

знак равенства стоит тогда и только тогда, когда H_0 и H_1 гомотетичны.

Лемма I. *Для того чтобы в обобщенном неравенстве Брунна (1) стоял знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы тела H_0 и H_1 имели пропорциональные $(m-1)$-е функции кривизны.*

Необходимость. В § 4 мы доказали, что если в обобщенном неравенстве Брунна стоит знак равенства, то он стоит также во всех промежуточных квадратичных неравенствах, т. е. при наличии равенства в (1) имеет место ряд равенств:

$$V(\underbrace{H_0,\ldots,H_0}_{k},\underbrace{H_1,\ldots,H_1}_{m-k},E,\ldots,E)^2 =$$

$$= V(\underbrace{H_0,\ldots,H_0}_{k-1},\underbrace{H_1,\ldots,H_1}_{m-k-1},E,\ldots,E)\,V(\underbrace{H_0,\ldots,H_0}_{k-1},\underbrace{H_1,\ldots,H_1}_{m-k+1},E,\ldots,E), \tag{2}$$

где k меняется от 1 до $m-1$.

В § 4 была доказана лемма, дающая условие наличия равенства в основном неравенстве между смешанными объемами. Полученный там результат приложим, конечно, к нашему частному случаю (2) основного неравенства. Таким образом мы получаем ряд уравнений[16)]:

$$\lambda_k F(\underbrace{H_0,\ldots,H_0}_{k},\underbrace{H_1,\ldots,H_1}_{m-k-1},E,\ldots,E;\omega) =$$

$$= \lambda_{k+1} F(\underbrace{H_0,\ldots,H_0}_{k-1},\underbrace{H_1,\ldots,H_1}_{m-k},E,\ldots,E;\omega), \tag{3}$$

где

$$\lambda_k = V(\underbrace{H_0,\ldots,H_0}_{k},\underbrace{H_1,\ldots,H_1}_{m-k},E,\ldots,E).$$

Эти равенства образуют целую цепь равенств при k, меняющемся от 1 до $m-1$. Каждое из них указывает на пропорциональность смешанных поверхностных функций. Поэтому крайние члены этой цепи также пропорциональны между собой. Они получаются при $k=0$ и $k=m-1$, а это и будут $(m-1)$-е функции кривизны тел H_0 и H_1.

[16)] Здесь мы пользуемся тем, что H_0 и H_1 не менее чем m-мерны. Иначе все $\lambda_k = 0$, и равенства (3) хотя и верны, но теряют смысл.

Достаточность. Пусть $(m-1)$-е функции кривизны двух тел H_0 и H_1 пропорциональны:

$$F_{m-1}(H_0,\ \omega) = \lambda F_{m-1}(H_1,\ \omega). \tag{4}$$

Увеличив H_0 подобно в $\sqrt[m-1]{\lambda}$ раз, получим два тела с равными функциями кривизны. Эти тела мы также обозначим H_0 и H_1. «Дифференцируя» равенство (4), умножая на H_0 и интегрируя по поверхности единичного шара, получаем

$$V_m(H_0) = V(\underbrace{H_0, \ldots, H_0}_{m}, E, \ldots, E) = V(H_0, \underbrace{H_1, \ldots, H_1}_{m-1}, E, \ldots, E), \tag{5}$$

так как теперь $\lambda = 1$.

В § 4 из обобщенного неравенства Брунна было выведено обобщенное неравенство Брунна — Минковского (см. формулу (18) § 4), которое для нашего частного случая имеет вид

$$V(H_0, \underbrace{H_1, \ldots, H_1}_{m-1}, E, \ldots, E)^m \geqslant V_m(H_1)^{m-1} V_m(H_0). \tag{6}$$

Пользуясь равенством (5), получим

$$V_m(H_0) \geqslant V_m(H_1). \tag{7}$$

Но так как тело H_1 ничем не хуже H_0, то должно иметь место и обратное неравенство, а значит,

$$V_m(H_0) = V_m(H_1), \tag{8}$$

и в обобщенном неравенстве Брунна — Минковского стоит знак равенства. В том же § 4 было показано, что отсюда следует наличие знака равенства в обобщенном неравенстве Брунна (1). То, что мы заменили первоначально данное тело H_0 ему гомотетичным, ничего не меняет, так как при умножении H_0 на любое $\lambda > 0$ равенство в неравенстве (6) сохранится.

Мы сейчас, собственно, показали, что если у двух тел H_0 и H_1 $(m-1)$-е функции кривизны равны, то их m-е интегралы кривизны равны (см. формулу (8)), а кроме того, в обобщенном неравенстве Брунна стоит в этом случае знак равенства. Отсюда следует

Лемма II. *Если у тел H_0 и H_1 $(m-1)$-е функции кривизны равны, то все тела $H_\vartheta = (1-\vartheta)H_0 + \vartheta H_1$ имеют одинаковые m-е интегралы кривизны.*

Если мы выделим из всего семейства $(1-\vartheta)H_0+\vartheta H_1$ подсемейство для $\vartheta \geqslant \vartheta_1$, то, конечно, и для крайних тел H_{ϑ_1}, H_1 этого подсемейства будет иметь место знак равенства в обобщенном неравенстве Брунна. Поэтому у тел H_{ϑ_1}, H_1 $(m-1)$-е функции кривизны пропорциональны:

$$F_{m-1}(H_{\vartheta_1},\omega)=\lambda F_{m-1}(H_1,\omega). \tag{9}$$

Отсюда, как и раньше, получим

$$V_m(H_{\vartheta_1})=\lambda V(H_{\vartheta_1},H_1,\dots,H_1,E,\dots,E), \tag{10}$$

а из равенства в обобщенном неравенстве Брунна — Минковского (6), заменяя H_0 на H_{ϑ_1}, найдем

$$V_m(H_{\vartheta_1})^{m-1}=\lambda^m V_m(H_1)^{m-1}. \tag{11}$$

Так как тела H_{ϑ_1} и H_1 имеют одинаковые m-е интегралы кривизны, то $\lambda=1$. Поэтому из формулы (9) получается:

Лемма III. *Если у тел H_0 и H_1 $(m-1)$-е функции кривизны равны, то все тела $H_\vartheta=(1-\vartheta)H_0+\vartheta H_1$ имеют те же самые $(m-1)$-е функции кривизны.*

Лемма IV. *Если у двух тел первые функции кривизны равны, то эти тела равны и параллельно расположены.*

Пусть H — выпуклое тело с дважды непрерывно дифференцируемой опорной функцией $H(\overline{u})$. Представим все векторы $\overline{u}$ отложенными из начала. Пусть r — радиус, проведенный из начала, т. е. $r=|\overline{u}|$, и пусть $\overline{n}$ — переменный единичный вектор или, что то же самое, точка на единичной сфере:

$$\overline{u}=\overline{n}r. \tag{12}$$

В силу положительной однородности опорной функции,

$$H(\overline{u})=rH(\overline{n}). \tag{13}$$

Как известно, сумма главных радиусов кривизны тела H, т. е. его первая функция кривизны в обычном смысле, получается, если применить к $H(\overline{u})$ оператор Лапласа

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial u_k^2} \tag{14}$$

и в результате положить $r=|\overline{u}|=1$, см. [4, § 8] или [7, § 94]. Введя сферические координаты, получим элемент длины в виде

$$ds^2=dr^2+r^2d\sigma^2, \tag{15}$$

где $d\sigma$ — элемент длины на единичной сфере. Поэтому в сферических координатах оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta^*, \tag{16}$$

где Δ^* — «оператор Лапласа на единичной сфере», не содержащий производных по r. Благодаря этому сумма главных радиусов кривизны тела H будет ($\Delta r H(\overline{n})$ при $r = 1$) равна

$$\Delta^* H(\overline{n}) + (n-1)H(\overline{n}). \tag{17}$$

Следовательно, если тело H имеет дважды непрерывно дифференцируемую опорную функцию, то его первая функция кривизны [17)]

$$F_1(H,\omega) = \int\limits_{\omega} [\Delta^* H(\overline{n}) + (n-1)H(\overline{n})]\, d\omega. \tag{18}$$

Если теперь $Z(\overline{n})$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция на единичной сфере, то, как показано в § 4 части I, она представляется как разность опорных функций на единичной сфере:

$$Z(\overline{n}) = H'(\overline{n}) - H''(\overline{n}),$$

и, по определению, данному для смешанных поверхностных функций, для любых таких функций $Z(\overline{n})$

$$F_1(Z,\omega) = F_1(H',\omega) - F_1(H'',\omega) = \int\limits_{\omega} [\Delta^* Z(\overline{n}) + (n-1)Z(\overline{n})]\, d\omega. \tag{19}$$

Пусть теперь H_1 и H_2 — два выпуклых тела с равными первыми функциями кривизны

$$F_1(H_1,\ \omega) = F_1(H_2,\ \omega) \tag{20}$$

и пусть $Y_l(\overline{n})$ — шаровая функция (на n-мерной единичной сфере). Из равенства (20) получим

$$\int\limits_{\Omega} Y_l(\overline{n}) F_1(H_1,\ d\omega) = \int\limits_{\Omega} Y_l(\overline{n}) F_1(H_2,\ d\omega) \tag{21}$$

[17)] Согласно формуле (17) § 5 части I, интеграл в (18) следовало бы делить на $n-1$, но ради краткости мы опускаем этот несущественный коэффициент.

или, воспользовавшись свойством самосопряженности смешанных поверхностных функций, —

$$\int_\Omega H_1(\overline{n})F_1(Y_l,\,d\omega) = \int_\Omega H_2(\overline{n})F_1(Y_l,\,d\omega). \tag{22}$$

Так как шаровые функции дважды непрерывно дифференцируемы, то мы можем воспользоваться равенством (19) и получим

$$\int_\Omega H_1(\overline{n})[\Delta^* Y_l(\overline{n})+(n-1)Y_l(\overline{n})]\,d\omega = \int_\Omega H_2(\overline{n})[\Delta^* Y_l(\overline{n})+(n-1)Y_l(\overline{n})]\,d\omega. \tag{23}$$

Шаровые функции на n-мерном единичном шаре удовлетворяют уравнению

$$\Delta^* Y_l(\overline{n}) + l(l+n-2)Y_l(\overline{n}) = 0 \tag{24}$$

или, полагая $-l(l+n-2)+(n-1)=\lambda_l$,

$$\Delta^* Y_l(\overline{n}) + (n-1)Y_l(\overline{n}) = \lambda_l Y_l(\overline{n}). \tag{25}$$

При $\lambda_l = 0$, т. е. при $l = 1$, получаем шаровые функции первого порядка:

$$Y_1(\overline{n}) = (\overline{a}\,\overline{n}), \tag{26}$$

где $\overline{a}$ — произвольный вектор. Это представляет то слагаемое, которое получает опорная функция на единичной сфере $H(\overline{n})$ тела H при переносе его на вектор $\overline{a}$ [18)].

Благодаря равенству (25) мы можем переписать формулу (23) в виде

$$\lambda_l \int_\Omega H_1(\overline{n})Y_l(\overline{n})\,d\omega = \lambda_l \int_\Omega H_2(\overline{n})Y_l(\overline{n})\,d\omega. \tag{27}$$

[18)] Все указанные свойства шаровых функций на n-мерном шаре получаются сразу из их определения: если $P_l(\overline{u})$ — гармонический полином степени l, то $P_l(\overline{u}) = r^l Y_l(\overline{n})$. Полнота системы шаровых функций доказывается, как известно, сразу, если заметить, что всякий однородный многочлен степени l представим в виде

$$U_1(\overline{u}) = P_l(\overline{u}) + r^2 P_{l-2}(\overline{u}) + r^4 P_{l-4}(\overline{u}) + \dots,$$

а этот факт доказывается простым подсчетом числа произвольных коэффициентов в обеих частях написанного равенства.

Идея применения шаровых функций к доказательству единственности выпуклого тела с заданной суммой главных радиусов кривизны принадлежит А. Гурвицу [8].

Следовательно, при $\lambda_l \neq 0$ все коэффициенты Фурье функций $H_1(\overline{n})$ и $H_2(\overline{n})$ соответственно равны друг другу. Так как система шаровых функций замкнута, то это возможно только в том случае, когда $H_1(\overline{n})$ и $H_2(\overline{n})$ отличаются на собственную функцию, относящуюся к собственному значению $\lambda_l = 0$, а эта собственная функция представляет параллельный перенос от одного тела к другому.

Таким образом, наши две теоремы доказаны соответственно для первых функций кривизны и вторых интегралов кривизны. Остается доказать их для функций и интегралов кривизны более высокого порядка. Для этого заметим, что так как для плоских выпуклых областей существуют функции кривизны только первого порядка, то для них обе теоремы доказаны в полном объеме. Поэтому предположим, что обе теоремы верны для тел в $(n-1)$-мерном пространстве, и докажем их для тел в n-мерном пространстве.

Пусть тела H_0 и H_1 имеют равные m-е функции кривизны, где $m > 1$. Тогда по лемме III то же верно для всех тел семейства $H_\vartheta = (1-\vartheta)H_0 + \vartheta H_1$. В § 5 было доказано, что в таком случае m-е интегралы кривизны их проекций в одних и тех же направлениях тоже равны. Проекции тел линейного семейства $(1-\vartheta)H_0 + \vartheta H_1$ образуют такие же линейные семейства, и для этих семейств в обобщенном неравенстве Брунна для интегралов кривизны m-го порядка стоит знак равенства. Наши тела H_0 и H_1 мы предполагаем, конечно, более чем m-мерными (раз речь идет о их m-х функциях кривизны). Поэтому их проекции не менее чем m-мерные, так что по предположению индукции знак равенства в неравенстве Брунна для них стоит только тогда, когда они гомотетичны (заметим, что $m > 1$), а кроме того, m-е интегралы кривизны у них равны. Значит, проекции тел H_0 и H_1 при одинаковых направлениях проектирования равны и параллельно расположены. Отсюда на основании леммы I § 1 следует, что и сами тела H_0 и H_1 равны и параллельно расположены.

Мы доказали, таким образом, теорему I. Но так как, благодаря лемме I, обе теоремы равносильны, то тем самым доказана и теорема II.

§ 8. *Единственность центрально-симметричного выпуклого тела с данными поперечными мерами*

В этом параграфе мы дадим приложение общей теоремы единственности выпуклого тела с данной функцией кривизны.

Проекция выпуклого тела H на любую менее чем $(n-1)$-мерную плоскость P есть вместе с тем проекция его проекции на любую $(n-1)$-мерную плоскость, параллельную P. Поэтому, если все m-мерные поперечные меры выпуклого тела известны, то известны и средние m-мерные поперечные меры всех его плоских проекций. При этом под средней $(n-1)$-мерной поперечной мерой плоской проекции мы подразумеваем ее площадь.

В дальнейшем плоские, т. е. $(n-1)$-мерные, проекции выпуклого тела будем называть просто проекциями. Проекцию тела H в направлении $\overline{n}$ обозначим $H_{\overline{n}}$, m-е интегралы и функции кривизны тела H — $V_m(H)$ и $F_m(H, \omega)$; $V_m(H_{\overline{n}})$ будет m-м интегралом кривизны проекции $H_{\overline{n}}$ и при $m = n-1$ — ее площадью. Так как средние поперечные меры пропорциональны интегралам кривизны, то является несущественным, какие именно из этих величин мы рассматриваем.

Еще в § 5 было показано, что

$$V_m(H_{\overline{n}}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega'} |\overline{n}\overline{n}'| F_m(H,\, d\omega'). \tag{1}$$

Штрихами отмечены переменные и области, по которым производится интегрирование. Наша ближайшая задача — выяснить вопрос о том, в какой мере знание m-х интегралов кривизны проекций выпуклого тела определяет его m-ю функцию кривизны [9].

Лемма I. *Интегральное уравнение*

$$Y(\overline{n}) = \lambda \int\limits_{\Omega'} |\overline{n}\overline{n}'| Y(\overline{n}')\, d\omega' \tag{2}$$

имеет собственными функциями шаровые функции четных порядков.

Пусть $Y_{2l}(\overline{n}')$ — шаровая функция четного порядка. Закрепим на единичной сфере точку $\overline{n}$ и примем ее за полюс. Тогда $Y_{2l}(\overline{n}')$ представится как линейная комбинация шаровых функций того же порядка, для которых $\overline{n}$ — полюс системы координат на сфере:

$$Y_{2l}(\overline{n}') = \sum_m a_m Y^{(\overline{n})}_{2l,m}(\overline{n}'). \tag{3}$$

Если θ' — полярное расстояние от точки $\overline{n}$ и $\overline{\nu}'$ — точка на $(n-1)$-мерной сфере, получающейся в экваториальном сечении n-мерной сферы, то

$$Y^{(\overline{n})}_{2l,m}(\overline{n}') = P_{2l,m}(\theta') Y_m(\overline{\nu}'). \tag{4}$$

(Этот результат получается сразу, если как обычно выразить оператор Лапласа на сфере Δ^* в переменных θ' и $\overline{\nu}'$.) Здесь $Y_m(\overline{\nu}')$ — шаровая функция на $(n-1)$-мерной сфере. Поэтому при $m \neq 0$

$$Y^{(\overline{n})}_{2l,m}(\overline{n}) = P_{2l,m}(0) Y_m(\overline{\nu}') = 0, \tag{5}$$

так как иначе имелась бы многозначность в полюсе, и

$$Y_{2l}(\overline{n}) = a_0 Y_{2l,0}^{(\overline{n})}(\overline{n}). \tag{6}$$

Так как $|\overline{n}\,\overline{n}'| = |\cos\theta'|$, то при $m \neq 0$

$$\int\limits_{\Omega'} |\overline{n}\,\overline{n}'| Y_{2l,m}^{(\overline{n})}(\overline{n}')\,d\omega' = 0 \tag{7}$$

и поэтому

$$\int\limits_{\Omega'} |\overline{n}\,\overline{n}'| Y_{2l}(\overline{n}')\,d\omega' = a_0 \int\limits_{\Omega'} |\overline{n}\,\overline{n}'| Y_{2l,0}^{(\overline{n})}(\overline{n}')\,d\omega'. \tag{8}$$

Стоящий здесь справа интеграл не зависит от выбора точки $\overline{n}$. Положим

$$\frac{1}{Y_{2l,0}^{(\overline{n})}(\overline{n})} \int\limits_{\Omega'} |\overline{n}\,\overline{n}'| Y_{2l,0}^{(\overline{n})}(\overline{n}')\,d\omega' = \frac{1}{\lambda_l}. \tag{9}$$

Тогда, сравнивая равенства (6) и (8), получим

$$Y_{2l}(\overline{n}) = \lambda_l \int\limits_{\Omega'} |\overline{n}\,\overline{n}'| Y_{2l}(\overline{n}')\,d\omega', \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

Уравнение (2) не имеет других собственных функций, так как из четности его ядра (т. е. из $|\overline{n}\,\overline{n}'| = |-\overline{n}\,\overline{n}'|$) следует, что все его собственные функции четные; а шаровые функции четного порядка образуют полную систему в совокупности четных функций.

Умножим теперь равенство (1) на $Y_{2l}(\overline{n})$ и проинтегрируем, тогда

$$\int\limits_{\Omega} V_m(H_{\overline{n}}) Y_{2l}(\overline{n})\,d\omega = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} Y_{2l}(\overline{n})\,d\omega \int\limits_{\Omega'} |\overline{n}\,\overline{n}'| F_m(H,\ d\omega'). \tag{11}$$

Изменяя в правой части порядок интегрирования и замечая, что $Y_{2l}(\overline{n})$ удовлетворяет уравнению (2), получим

$$\int\limits_{\Omega} V_m(H_{\overline{n}}) Y_{2l}(\overline{n})\,d\omega = \frac{2}{\lambda} \int\limits_{\Omega} Y_{2l}(\overline{n}) F_m(H,\ d\omega). \tag{12}$$

Следовательно, как только $V_m(H_{\overline{n}})$ заданы, так стоящие здесь справа интегралы известны.

Пусть теперь $Z(\overline{n})$ — функция, равная единице в некоторой области ω и в симметричной ей области $-\omega$ и равная нулю в остальных точках поверхности единичного шара. $Z(\overline{n})$ — функция четная, а потому можно построить последовательность сходящихся к ней линейных комбинаций шаровых функций четных порядков $Z_k(\overline{n})$:

$$Z(\overline{n}) = \lim_{k\to\infty} Z_k(\overline{n}). \tag{13}$$

Интегралы

$$\int\limits_{\Omega} Z_k(\overline{n}) F_m(H,\, d\omega)$$

известны, а потому известен их предел, равный (предполагается, что ω и $-\omega$ не имеют общих точек)[19)]

$$\int\limits_{\Omega} Z(\overline{n}) F_m(H, d\omega) = F_m(H,\omega) + F_m(H,-\omega). \tag{14}$$

Следовательно, задание m-х средних поперечных мер выпуклого тела определяет четную часть

$$F_m(H,\omega) + F_m(H,-\omega)$$

его m-й функции кривизны, иными словами справедлива

Лемма II. *Если у двух выпуклых тел средние m-мерные поперечные меры их проекций равны, то четные части их m-х функций кривизны тоже равны, т. е.*

$$F_m(H_1,\omega) + F_m(H_1,-\omega) = F_m(H_2,\omega) + F_m(H_2,-\omega). \tag{15}$$

Если тела H_1 и H_2 имеют центры симметрии, то их функции кривизны четные, и в таком случае

$$F_m(H_1,\omega) = F_m(H_2,\omega). \tag{16}$$

Отсюда, на основании доказанной ранее теоремы единственности, следует

Теорема. *Если средние поперечные меры данного измерения всех проекций выпуклого тела с центром симметрии заданы, то такое тело, с точностью до параллельного переноса, единственное.*

---

19) Пусть ω замкнуто. $Z(\overline{n})$ можно аппроксимировать равномерно ограниченными непрерывными функциями, так что они будут сходиться к $Z(\overline{n})$ равномерно в ω и $-\omega$ и будут исчезать за пределами некоторого множества $\omega\cup\omega^*$ и $-(\omega\cup\omega^*)$. Эти непрерывные функции можно, в свою очередь, равномерно аппроксимировать линейными комбинациями шаровых функций четных порядков $Z_k(\overline{n})$. Тогда, как показывают тривиальные оценки,

$$\lim_{k\to\infty}\int Z_k(\overline{n})F_m(H,\, d\omega) = \int Z(\overline{n})F_m(H,\, d\omega).$$

Например, если у двух тел с центрами симметрии площади проекций в параллельных направлениях равны, то такие тела равны и параллельно расположены.

Задание поперечных мер дает нам знание их средних для всех проекций. Имеет ли место также и обратное для всех выпуклых тел — остается невыясненным, кроме одного случая (исключая тривиальный, когда речь идет о $(n-1)$-мерных поперечных мерах, так как здесь среднее просто совпадает с самой поперечной мерой). Это случай одномерных поперечных мер. Из равенства средних одномерных поперечных мер всех проекций двух тел следует

$$F_1(H_1,\omega)+F_1(H_1,-\omega)=F_1(H_2,\omega)+F_1(H_2,-\omega) \tag{17}$$

или, если положить $B(\overline{n})=H(\overline{n})+H(-\overline{n})$,

$$F_1(B_1,\omega)=F_1(B_2,\omega), \tag{18}$$

откуда следует равенство $B_1(\overline{n})=B_2(\overline{n})$.

§ 9. Экстремальные свойства шара

В конце § 4 мы получили неравенство между интегралами кривизны

$$V_k(H)^m \geqslant V_m(H)^k\, V(E)^{m-k}. \tag{1}$$

Здесь $1\leqslant k<m\leqslant n$.

$V_m(H)\neq 0$ тогда и только тогда, когда тело H не менее чем m-мерное. Только при этом условии неравенство (1) не тривиально. Там же, в конце § 4, было показано, что знак равенства в неравенстве (1) стоит тогда и только тогда, когда он стоит в обобщенных неравенствах Брунна

$$\sqrt[l]{V_l(H_\vartheta)}\geqslant(1-\vartheta)\sqrt[l]{V_l(H)}+\vartheta\,\sqrt[l]{V_l(E)}, \tag{2}$$

где $l\leqslant m$, $H_\vartheta=(1-\vartheta)H+\vartheta E$.

По теореме II, доказанной в § 6, знак равенства в этих обобщенных неравенствах Брунна может стоять тогда и только тогда, когда тело H гомотетично E, если только оно не менее чем m-мерное, так как l меньше или равно m.

Таким образом, знак равенства в неравенстве (1) стоит тогда и только тогда, когда тело H — шар, если только оно не менее чем m-мерное. Но в этом случае получающееся равенство сводится к: нуль равен нулю.

Отсюда получается обобщение известного свойства шара иметь при заданном объеме наименьшую поверхность.

Теорема. *Среди всех выпуклых тел с данным не равным нулю m-м интегралом кривизны наименьший интеграл кривизны любого порядка, меньшего m, имеет шар и только шар.*

Мы уже упоминали, что m-й интеграл кривизны равен, с точностью до постоянного множителя, среднему m-мерных поперечных мер того же выпуклого тела. Поэтому в доказанном экстремальном свойстве шара можно говорить о средних поперечных мерах. На основании этого замечания из доказанной теоремы очевидным образом вытекает такое следствие:

среди всех выпуклых тел с данной наименьшей m-мерной поперечной мерой наименьшую среднюю поперечную меру любого измерения, меньшего m, имеет шар и только шар.

Это следствие, как и саму теорему, можно, конечно, обратить и утверждать, что среди всех выпуклых тел с данной наибольшей m-мерной поперечной мерой наибольшую среднюю поперечную меру любого измерения, большего m, имеет шар и только шар. Например, среди всех выпуклых тел данного диаметра шар и только шар имеет наибольшую поверхность.

Во всех этих результатах под n-м интегралом кривизны, так же как под n-мерной поперечной мерой данного выпуклого тела, подразумевается его объем.

Доказанная теорема равносильна утверждению, что отношение

$$\Phi_{km}(H) = \frac{V_k(H)^m}{V_m(H)^k} \qquad (k < m) \tag{3}$$

имеет минимум, когда H — шар.

Этот результат можно уточнить, следуя методу Минковского, а именно, можно показать, что

отношение интегралов кривизны $\Phi_{km}(H)$ монотонно убывает при переходе от любого выпуклого тела H к параллельному телу $H + \lambda E$ и остается постоянным только тогда, когда H — шар.

Это достаточно доказать для отношения

$$\Phi_{m-1,m}(H) = \frac{V_{m-1}(H)^m}{V_m(H)^{m-1}}, \tag{4}$$

потому что отношение $\Phi_{km}(H)$ при любом $k < m$ получается из умножения отношений $\Phi_{l-1,l}(H)$, взятых в некоторых положительных степенях, при l, меняющемся от $k+1$ до m [20].

---

[20] Так,

$$\Phi^{l+2}_{l,l+1} \cdot \Phi^{l}_{l+1,l+2} = \Phi^{l+1}_{l,l+2}.$$

Пользуясь этим легко проверяемым соотношением, меняя l от k до $m-2$, можно убедиться в правильности сделанного утверждения. Соответствующий результат, выраженный формулой, получается слишком сложным, поэтому мы его не выписываем.

Рассмотрим семейство тел $H_\vartheta = H + \vartheta E \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$, соединяющее данное выпуклое тело с ему параллельным. Из обобщенного неравенства Брунна следует, что $\sqrt[m]{V_m(H_\vartheta)}$ является выпуклой функцией ϑ и линейной только в том случае, когда H и $H+E$ гомотетичны, т. е. тогда, когда H — шар. Поэтому производная от $\sqrt[m]{V_m(H_\vartheta)}$ будет монотонно убывающей функцией ϑ и постоянной только тогда, когда H — шар:

$$\frac{d}{d\vartheta}\sqrt[m]{V_m(H_\vartheta)} = \frac{1}{mV_m(H_\vartheta)^{1-1/m}}\frac{d}{d\vartheta}V_m(H_\vartheta). \tag{5}$$

Так как $H_\vartheta = H + \vartheta E$, то

$$V_m(H_\vartheta) = \sum_{k=0}^{m} \vartheta^k C_m^k V_{m-k}(H). \tag{6}$$

Дифференцируя по ϑ и замечая, что $kC_m^k = mC_{m-1}^{k-1}$, получим

$$\frac{d}{d\vartheta}V_m(H_\vartheta) = m\sum_{k=0}^{m-1} \vartheta^k C_{m-1}^k V_{m-k-1}(H). \tag{7}$$

Стоящая здесь сумма есть не что иное, как $V_{m-1}(H_\vartheta)$. Поэтому

$$\frac{d}{d\vartheta}\sqrt[m]{V_m(H_\vartheta)} = \frac{V_{m-1}(H_\vartheta)}{V_m(H_\vartheta)^{1-1/m}} = \sqrt[m]{\Phi_{m-1,m}(H_\vartheta)}. \tag{8}$$

Так как производная от $\sqrt[m]{V_m(H_\vartheta)}$ не возрастает, оставаясь постоянной только тогда, когда H — шар, то то же верно и для отношения $\Phi_{m-1,m}(H+\vartheta E)$.

Статья поступила в редакцию
17.IV.1937

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. I: Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 5. С. 947–972.
2. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd 57. S. 447–495.
3. *Александров А. Д.* Новые неравенства для объемов выпуклых тел // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 4. С. 155–157.
4. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)
5. *Süss W.* Zusammensetzung von Eikörpern und homothetische Eiflächen // Tôhoku Math. J. 1932. V. 35. P. 47–50.
6. *Christoffel E. B.* Über die Bestimmung einer krummen Oberfläche // Ges. Abh. Bd 1. Leipzig; Berlin: Teubner, 1910.
7. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
8. *Hurwitz A.* Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier // Ann. de l'École Normale. 1902. T. 19. P. 357–408.
9. *Blaschke W.* Kreis und Kugel. Leipzig: Veit, 1916. (Русский перевод: *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.)

К теории смешанных объемов выпуклых тел. III: Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела [1)]

Математический сборник. 1938. Т. 3, № 1. С. 27–44

В этой статье мы дадим обобщение двух результатов, полученных Г. Минковским в его работе «Общие теоремы о выпуклых многогранниках» [3], а именно, теоремы о минимальном свойстве многогранников, описанных около шара, и теоремы о существовании и единственности выпуклого многогранника с заданными направлениями и площадями граней. При этом в доказательствах мы будем в точности следовать методу Минковского, что, надеемся, подчеркнет его изящество и силу.

§ 1. *О выпуклых телах с данной областью задания опорной функции*

Так же, как и в предыдущих частях работы, мы будем рассматривать выпуклые тела в n-мерном пространстве, n всегда будет обозначать число измерений пространства. В пространстве мы раз и навсегда выберем начало и будем как точки, так и векторы, проведенные в них из начала, обозначать одним символом $\overline{x}$. В пространстве у нас будет задан единичный шар E. Каждому единичному вектору $\overline{n}$ будет соответствовать на E точка $\overline{n}$ — конец вектора, равного $\overline{n}$ и отложенного из центра E. Опорной функцией $H(\overline{n})$ выпуклого тела H будем называть функцию единичных векторов $\overline{n}$, дающую расстояние от начала до опорной плоскости к H с внешней нормалью $\overline{n}$. (Расстояние это считается положительным в направлении $\overline{n}$ и отрицательным в обратном направлении.) Мы будем говорить, что в точке $\overline{x}$ на теле H есть нормаль $\overline{n}$ к телу H, если через $\overline{x}$ проходит плоскость, опорная к H с внешней нормалью $\overline{n}$.

Возьмем на единичной сфере замкнутое множество Ω', не лежащее в одной полусфере. (К полусфере относится и ее граница.) Зададим на множестве Ω' непрерывную положительную функцию $H^*(\overline{n})$. Выбрав начало

---

1) Первые две части этой работы см. в [1, 2].

координат, построим семейство плоскостей такое, что $H^*(\overline{n})$ представляет собой расстояние от начала до плоскости с нормалью $\overline{n}$, направленной от начала. В множестве Ω' можно выбрать $(n+1)$ точек $\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_{n+1}$ так, чтобы векторы $\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_{n+1}$ не были направлены в одно полупространство. Плоскости нашего семейства с такими нормалями ограничат некоторый симплекс. Поэтому все полупространства, определяемые неравенствами

$$\overline{n}\,\overline{x} \leqslant H^*(\overline{n}) \qquad (\overline{n} \in \Omega'), \tag{1}$$

дают в своем пересечении выпуклое тело H. Так как $H^*(\overline{n}) > 0$, то тело H содержит начало внутри себя. Это выпуклое тело мы назовем телом с данной областью Ω' задания опорной функции. Если Ω' состоит из конечного числа точек $\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_N$, то выпуклое тело с такой областью задания опорной функции будет многогранником с системой нормалей $\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_N$ к ограничивающим его плоскостям.

Лемма I. *Через каждую точку поверхности тела H проходит хоть одна из плоскостей*

$$\overline{n}\,\overline{x} = H^*(\overline{n}) \qquad (\overline{n} \in \Omega'). \tag{2}$$

Тело H определяется как геометрическое место тех точек $\overline{x}$, которые удовлетворяют всем неравенствам (1). Если для какой-нибудь точки $\overline{x}_0$ при всяком $\overline{n}$, принадлежащем Ω',

$$\overline{n}\,\overline{x}_0 < H^*(\overline{n}) \qquad (\overline{n} \in \Omega'),$$

то по непрерывности функции $H^*(\overline{n})$ можно указать такое $a > 0$, что $\overline{x}_0$ находится на расстоянии не меньшем a от любой из плоскостей (2). Тогда шар радиуса a с центром в $\overline{x}_0$ лежит внутри всех полупространств (1), так что точка $\overline{x}_0$ внутренняя для них, а значит, внутренняя и для тела H.

Обозначим $H(\overline{n})$ опорную функцию тела H. Так как при всяком $\overline{n}$ на поверхности H есть точки $\overline{x}$, для которых $\overline{n}\,\overline{x} = H(\overline{n})$, а вместе с тем при $\overline{n}$, принадлежащем Ω', для всех точек тела H $\quad \overline{n}\,\overline{x} \leqslant H^*(\overline{n})$, то

$$H(\overline{n}) \leqslant H^*(\overline{n}) \qquad (\overline{n} \in \Omega'). \tag{3}$$

Лемма II. *Если $\overline{n}_0$ не идет в Ω', то в точке $\overline{x}_0$ поверхности H с нормалью $\overline{n}_0$ есть и другие нормали, т. е. такая точка $\overline{x}_0$ особая* ($\overline{n}_0$ идет в Ω', значит, конец вектора $\overline{n}_0$ попадает в Ω', если его отложить из центра E).

Через точку $\overline{x}_0$ проходит опорная плоскость с нормалью $\overline{n}_0$, а по лемме I через нее же проходит одна из плоскостей (2), нормаль к которой идет в Ω' и, следовательно, отлична от $\overline{n}_0$.

Лемма III. *Если при некоторой $\overline{n}_0$, идущей в Ω', $H(\overline{n}_0) < H^*(\overline{n}_0)$, то точка $\overline{x}_0$ на поверхности H с нормалью $\overline{n}_0$ — особая.*

Через точку $\overline{x}_0$ проходит опорная плоскость с нормалью $\overline{n}_0$. По лемме I через нее же проходит одна из плоскостей (2). Нормаль к этой плоскости отлична от $\overline{n}_0$, так как $H(\overline{n}_0) < H^*(\overline{n}_0)$, а это значит, что опорная плоскость с нормалью $\overline{n}_0$ проходит ближе к началу, чем параллельная ей плоскость из семейства (2).

Множество всех особых точек поверхности выпуклого тела имеет меру нуль. Мера множества точек с нормалями, идущими в область ω на единичной сфере, есть значение поверхностной функции $F(H,\omega)$ для области ω. Поэтому из леммы II получаем, что значение поверхностной функции тела H для области, дополнительной к Ω', равно нулю [2)], т. е.

$$F(H,\Omega\setminus\Omega') = 0. \tag{4}$$

Точно так же из леммы III следует, что для области ω_0', где $H(\overline{n}) < H^*(\overline{n})$ $(\omega_0 \subset \Omega')$,

$$F(H,\omega_0) = 0. \tag{5}$$

Вместе с тем во всех других точках $\overline{n}$, принадлежащих Ω',

$$H(\overline{n}) = H^*(\overline{n}).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Omega'} H(\overline{n})\, F(H,\, d\omega) = \int\limits_{\Omega'} H^*(\overline{n})\, F(H,\, d\omega), \tag{6}$$

и так как, кроме того, $F(H,\Omega\setminus\Omega') = 0$, то

$$\int\limits_{\Omega} H(\overline{n})\, F(H,\, d\omega) = \int\limits_{\Omega'} H^*(\overline{n})\, F(H,\, d\omega). \tag{7}$$

Отсюда непосредственно следует

Лемма IV. *Объем тела H, определяемого функцией $H^*(\overline{n})$, заданной на Ω', равен*

$$V(H^*) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega'} H^*(\overline{n})\, F(H,d\omega). \tag{8}$$

Лемма V. *Если последовательность непрерывных функций $H_1^*(\overline{n})$, $H_2^*(\overline{n}), \ldots,$ заданных на Ω', равномерно сходится к положительной функции $H^*(\overline{n})$, то выпуклые тела $H_1, H_2, \ldots,$ определяемые функциями последовательности, сходятся к телу H, определяемому предельной функцией.*

[2)] И так как $F(H,\omega)$ неотрицательна, то $F(H,\omega) = 0$, если $\omega \subset \Omega\setminus\Omega'$.

Для того чтобы последовательность выпуклых тел $H_1, H_2, \ldots$ сходилась к телу H (которое имеет внутренние точки), необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, любая внутренняя точка тела H была внутренней для всех тел H_m, как только m достаточно велико; и во-вторых, любая точка, не принадлежащая H, также не принадлежала всем телам H_m с достаточно большими номерами [4, § 18].

Пусть точка $\overline{x}_0$ лежит внутри H и пусть a — минимум ее расстояний от опорных плоскостей. Тогда для всех $\overline{n}$, принадлежащих Ω',

$$\overline{n}\,\overline{x}_0 \leqslant H(\overline{n}) - a \leqslant H^*(\overline{n}) - a \qquad (\overline{n} \in \Omega'). \tag{9}$$

Пусть M столь велико, что при $m > M$

$$|H^*(\overline{n}) - H^*_m(\overline{n})| < \frac{a}{2} \qquad (\overline{n} \in \Omega'), \tag{10}$$

тогда при всяком $m > M$

$$\overline{n}\,\overline{x}_0 < H^*_m(\overline{n}) - \frac{a}{2}. \tag{11}$$

Значит, точка $\overline{x}_0$ лежит внутри тел H_m с номерами, большими M, как это видно из рассуждений, доказывающих лемму I.

Пусть точка $\overline{x}_0$ лежит вне тела H. Тогда найдется такое $\overline{n}_0$, принадлежащее Ω', что

$$\overline{n}_0\overline{x}_0 = H^*(\overline{n}_0) + a, \tag{12}$$

где $a > 0$ — расстояние от $\overline{x}_0$ до плоскости $\overline{n}_0\overline{x} = H^*(\overline{n}_0)$. При достаточно больших m

$$|H^*(\overline{n}_0) - H^*_m(\overline{n}_0)| < \frac{a}{2}, \tag{13}$$

поэтому

$$\overline{n}_0\overline{x}_0 > H^*_m(\overline{n}_0) + \frac{a}{2}. \tag{14}$$

Это значит, что точка $\overline{x}_0$ лежит вне тела H_m.

Определим, как это принято, вариацию объема тела, определяемого функцией $H^*(\overline{n})$:

$$\delta V(H^*) = \lim_{t\to 0} \frac{V(H^* + t\delta H^*) - V(H^*)}{t}. \tag{15}$$

Лемма VI. *Объем тела, определяемого непрерывной положительной функцией $H^*(\overline{n})$, заданной в области Ω', имеет первую вариацию и*

$$\delta V(H^*) = \int\limits_{\Omega'} \delta H^*(\overline{n})\, F(H, d\,\omega), \tag{16}$$

где $F(H, \omega)$ — поверхностная функция тела, определяемого функцией $H^*(\overline{n})$.

Пусть $\delta H^*(\overline{n})$ — данная непрерывная функция, заданная на Ω.

При достаточно малых t функции $H^*(\overline{n}) + t\delta H^*(\overline{n})$ будут положительными и будут поэтому определять некоторые выпуклые тела H_t. Из леммы V вытекает, что при t, стремящемся к нулю, тела H_t сходятся к телу H_0, определяемому функцией $H^*(\overline{n})$. Для определенности мы будем считать, что t стремится к нулю по положительным значениям. Если, напротив, t не принимает положительных значений, то получаемые нами далее неравенства изменятся на обратные, и окончательный результат сохранит силу. А если при t, стремящемся к нулю по положительным или только по отрицательным значениям, предел в формуле, определяющей вариацию, получается один и тот же, то он будет тот же самый при любом законе стремления t к нулю. Поэтому мы смело можем считать t положительным.

Пусть $H_t(\overline{n})$ — опорная функция тела H_t:

$$H_t(\overline{n}) \leqslant H^*(\overline{n}) + t\delta H^*(\overline{n}) \qquad (\overline{n} \in \Omega'). \tag{17}$$

Поэтому, принимая во внимание, что $F(H_0, \Omega \setminus \Omega') = 0$, получим

$$\int\limits_{\Omega'} [H^*(\overline{n}) + t\delta H^*(\overline{n})]\, F(H_0,\, d\omega) \geqslant \int\limits_{\Omega} H_t(\overline{n})\, F(H_0,\, d\omega). \tag{18}$$

По лемме IV

$$\int\limits_{\Omega'} H^*(\overline{n})\, F(H_0,\, d\omega) = \int\limits_{\Omega} H_0(\overline{n})\, F(H_0,\, d\omega). \tag{19}$$

Вычитая это равенство из неравенства (18), получим

$$t\int\limits_{\Omega'} \delta H^*(\overline{n})\, F(H_0,\, d\omega) \geqslant \int\limits_{\Omega} H_t(\overline{n})\, F(H_0,\, d\omega) - \int\limits_{\Omega} H_0(\overline{n})\, F(H_0, d\,\omega). \tag{20}$$

Стоящие справа интегралы равны умноженным на n смешанному объему $V(H_t, H_0, \ldots, H_0)$ и объему тела H_0.

Положим для краткости

$$V(\underbrace{H_t, \ldots, H_t}_{m}, H_0, \ldots, H_0) = V_m. \tag{21}$$

Деля неравенство (20) на t и переходя к пределу при $t \to 0$, получим

$$\int\limits_{\Omega'} \delta H^*(\overline{n})\, F(H_0, d\omega) \geqslant n \varlimsup_{t \to 0} \frac{V_1 - V_0}{t}. \tag{22}$$

По лемме IV

$$\int_{\Omega'} [H^*(\overline{n}) + t\delta H^*(\overline{n})]\, F(H_t, d\omega) = \int_{\Omega} H_t(\overline{n})\, F(H_t, d\omega). \tag{23}$$

Вместе с тем при $\overline{n}$, идущем в Ω', $H^*(\overline{n}) \geqslant H_0(\overline{n})$ и так как $F(H_t, \Omega \setminus \Omega') = 0$, то

$$\int_{\Omega'} H^*(\overline{n})\, F(H_t, d\omega) \geqslant \int_{\Omega} H_0(\overline{n})\, F(H_t, d\omega). \tag{24}$$

Вычитая это неравенство из равенства (23), получим

$$t \int_{\Omega'} \delta H^*(\overline{n}) F(H_t, d\omega) \leqslant \int_{\Omega} H_t(\overline{n})\, F(H_t, d\omega) - \int_{\Omega} H_0(\overline{n})\, F(H_t, d\omega). \tag{25}$$

Непрерывную функцию $\delta H^*(\overline{n})$ можно распространить на всю поверхность единичного шара [3)]. При этом интеграл от нее по $F(H_t, \omega)$ не изменится, так как $F(H_t, \Omega \setminus \Omega') = 0$. Но тогда становится ясным, что интеграл, стоящий в левой части (25), представляет собой обобщенный смешанный объем $nV(\delta H^*, H_t, \ldots, H_t)$. По лемме, доказанной в § 6 части I этой работы [1], в пределе, когда $t \to 0$, он превратится в

$$nV(\delta H^*, H_0, \ldots, H_0) = \int_{\Omega'} \delta H^*(\overline{n})\, F(H_0, d\omega). \tag{26}$$

Поэтому, если выразить стоящие в (25) справа интегралы через смешанные объемы и перейти к пределу при $t \to 0$, получится

$$\int_{\Omega'} \delta H^*(\overline{n})\, F(H_0, d\omega) \leqslant n \varliminf_{t \to 0} \frac{V_n - V_{n-1}}{t}. \tag{27}$$

Из неравенства Брунна — Минковского

$$V_1^n \geqslant V_0^{n-1} V_n \tag{28}$$

путем вычитания V_0^n получим

$$V_1^n - V_0^n \geqslant V_0^{n-1}(V_n - V_0), \tag{29}$$

3) См., напр., теорему Брауэра — Урысона [5, § 25].

а разлагая обычным образом разность n-х степеней и деля на V_0^{n-1}, —

$$(V_1 - V_0) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^k \geqslant V_n - V_0. \tag{30}$$

Так как при t, стремящемся к нулю, тела H_t сходятся к H_0, то

$$\lim_{t\to 0} V_1 = V_0.$$

Поэтому, деля неравенство (30) на t и переходя к пределу, получим

$$n \varlimsup_{t\to 0} \frac{V_1 - V_0}{t} \geqslant \varlimsup_{t\to 0} \frac{V_n - V_0}{t}. \tag{31}$$

Совершенно аналогичные рассуждения, исходя из неравенства

$$V_{n-1}^n \geqslant V_n^{n-1} V_0, \tag{32}$$

приводят к другому неравенству:

$$n \varliminf_{t\to 0} \frac{V_n - V_{n-1}}{t} \leqslant \varliminf_{t\to 0} \frac{V_n - V_0}{t}. \tag{33}$$

Это неравенство вместе с (31) дает

$$n \varlimsup_{t\to 0} \frac{V_1 - V_0}{t} \geqslant \varlimsup_{t\to 0} \frac{V_n - V_0}{t} \geqslant \varliminf_{t\to 0} \frac{V_n - V_0}{t} \geqslant n \varliminf_{t\to 0} \frac{V_n - V_{n-1}}{t}. \tag{34}$$

В то же время, сопоставляя полученные раньше неравенства (22) и (27), получим

$$n \varlimsup_{t\to 0} \frac{V_1 - V_0}{t} \leqslant \int\limits_{\Omega'} \delta H^*(\overline{n}) F(H_0, d\omega) \leqslant n \varliminf_{t\to 0} \frac{V_n - V_{n-1}}{t}. \tag{35}$$

Из сравнения этих двух рядов неравенств видно, во-первых, что существует

$$\lim_{t\to 0} \frac{V_n - V_0}{t},$$

а он равен вариации объема; во-вторых, что этот предел равен интегралу, стоящему во втором ряду неравенств. Поэтому

$$\delta V(H^*) = \int\limits_{\Omega'} \delta H^*(\overline{n})\, F(H_0, d\omega), \tag{36}$$

что и требовалось доказать.

В § 3 нам понадобятся полученные здесь общие результаты для того случая, когда множество Ω' простирается на всю поверхность единичного шара. Всякая положительная непрерывная функция на единичной сфере определяет некоторое выпуклое тело. Его объем можно назвать объемом этой функции. Мы показали, что он зависит от этой функции непрерывно и даже допускает первую вариацию.

§ 2. *Минимальное свойство тел, описанных вокруг шара*

Возьмем на единичной сфере замкнутое множество Ω', не лежащее в одной полусфере.

Лемма. *Если $H_0^*(\overline{n})$ и $H_1^*(\overline{n})$ — две положительные непрерывные функции, заданные на множестве Ω', то функции $H_\vartheta^*(\overline{n}) = (1-\vartheta)H_0^*(\overline{n}) + \vartheta H_1^*(\overline{n})$ определяют выпуклое семейство выпуклых тел H_ϑ, соединяющее тела H_0 и H_1, определяемые функциями $H_0^*(\overline{n})$ и $H_1^*(\overline{n})$* [4)].

Выпуклое тело H_ϑ определяется как пересечение полупространств

$$\overline{n}\,\overline{x} \leqslant H_\vartheta^*(\overline{n}) \qquad (\overline{n} \in \Omega'), \tag{1}$$

т. е. оно является геометрическим местом точек $\overline{x}$, удовлетворяющих всем этим неравенствам.

Возьмем два значения параметра ϑ: ϑ_1 и ϑ_2. Соединим тела H_{ϑ_1} и H_{ϑ_2} линейным семейством $(1-\vartheta')H_{\vartheta_1} + \vartheta' H_{\vartheta_2}$. Каждое тело этого семейства есть геометрическое место точек $\overline{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\overline{n}\,\overline{x} \leqslant (1-\vartheta')H_{\vartheta_1}(\overline{n}) + \vartheta' H_{\vartheta_2}(\overline{n}), \tag{2}$$

где $\overline{n}$ — любая точка на единичной сфере.

С другой стороны, тела $H_{(1-\vartheta')\vartheta_1+\vartheta'\vartheta_2}$ являются геометрическими местами точек $\overline{x}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\overline{n}\,\overline{x} \leqslant (1-\vartheta')H_{\vartheta_1}^*(\overline{n}) + \vartheta' H_{\vartheta_2}^*(\overline{n}) \qquad (\overline{n} \in \Omega'), \tag{3}$$

где $\overline{n}$ — точка множества Ω'. Кроме того, на самом множестве Ω'

$$H_{\vartheta_1}(\overline{n}) \leqslant H_{\vartheta_1}^*(\overline{n}) \quad \text{и} \quad H_{\vartheta_2}(\overline{n}) \leqslant H_{\vartheta_2}^*(\overline{n}).$$

Следовательно, каждая точка $\overline{x}$, удовлетворяющая неравенствам (2), удовлетворяет и неравенствам (3). А это значит, что тело $(1-\vartheta')H_{\vartheta_1} + \vartheta' H_{\vartheta_2}$ содержится в теле $H_{(1-\vartheta')\vartheta_1+\vartheta'\vartheta_2}$, т. е. семейство H_ϑ выпуклое.

Для всякого выпуклого семейства выполняется неравенство Брунна. Поэтому функция

$$\Phi(\vartheta) = \sqrt[n]{V(H_\vartheta)} \tag{4}$$

— выпуклая. Здесь $V(H_\vartheta)$ — объем тела H_ϑ.

[4)] Семейство тел H_ϑ называют выпуклым, если при любых ϑ_1 и ϑ_2 тело $H_{(1-\vartheta')\vartheta_1+\vartheta'\vartheta_2}$ содержит тело $(1-\vartheta')H_{\vartheta_1} + \vartheta' H_{\vartheta_2}$, где $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, $0 \leqslant \vartheta' \leqslant 1$. В лемме подразумевается, что $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$.

В § 1 было показано, что объем тела, определяемого функцией $H^*(\overline{n})$, имеет первую вариацию. Поэтому функция $\Phi(\vartheta)$ дифференцируема. Так как она выпуклая, то ее производная $\Phi'(\vartheta)$ является монотонно убывающей функцией и постоянной только тогда, когда тела H_0 и H_1 гомотетичны, так как только в этом случае в неравенстве Брунна стоит знак равенства.

Зададим на множестве Ω' положительную непрерывную функцию $H^*(\overline{n})$. Она определяет выпуклое тело H. Если $H^*(\overline{n}) = R$ — постоянная, то все опорные плоскости тела H, нормали к которым идут в Ω', будут касаться шара радиуса R. Остальные опорные плоскости этого тела будут проходить через особые точки его поверхности, как это показывает лемма III § 1. Такое тело мы назовем описанным вокруг шара.

Пусть H_0 — тело, определяемое функцией $H^*(\overline{n})$. Рассмотрим семейство тел H_ϑ, определяемых функциями $H^*(\overline{n}) + \vartheta$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$. Все тела H_ϑ имеют одну и ту же область задания опорной функции.

Производная от $\Phi(\vartheta)$ по ϑ будет равна

$$\Phi'(\vartheta) = \frac{F(H_\vartheta, \Omega')}{nV(H_\vartheta)^{1-1/n}}. \tag{5}$$

Действительно, в данном случае $\delta(H^*(\overline{n}) + \vartheta) = 1$, а потому, на основании леммы VI § 1, получим формулу (5). Так как $F(H_\vartheta, \Omega \setminus \Omega') = 0$, то $F(H_\vartheta, \Omega') = F(H_\vartheta, \Omega)$, т. е. равно площади поверхности тела H_ϑ.

Производная $\Phi'(\vartheta)$ монотонно убывает и остается постоянной только тогда, когда крайние тела семейства H_0 и H_1 гомотетичны. Поэтому отношение n-й степени поверхности тела H_ϑ к $(n-1)$-й степени его объема обладает тем же свойством. Можно от тела, определяемого функцией $H^*(\overline{n}) + 1$, перейти точно так же к телу, определяемому функцией $H^*(\overline{n}) + 2$, и т. д. Получающиеся тела можно подобно преобразовывать так, чтобы все они имели один и тот же объем. При этом отношения n-х степеней поверхностей этих тел к $(n-1)$-м степеням их объемов не изменятся. Все полученные таким образом тела будут сходиться к телу, описанному вокруг шара, а указанные отношения будут убывать и оставаться постоянными только в том случае, когда исходное тело будет им всем гомотетично, а значит, будет гомотетично предельному телу, т. е. когда исходное тело описано около шара.

Этим доказана следующая теорема.

Теорема. *Среди всех выпуклых тел с одной и той же областью задания опорной функции наименьшую поверхность при заданном объеме имеет тело, описанное вокруг шара, и только такое тело обладает этим минимальным свойством.*

Эта теорема включает теорему ЛинделЁфа о том, что среди всех многогранников с заданной системой нормалей к их граням наименьшую поверхность при заданном объеме имеет многогранник, описанный вокруг шара.

Она заключает также, например, и такой результат: среди всех прямых выпуклых цилиндров с данным объемом наименьшую поверхность имеет цилиндр, описанный вокруг шара. Можно, конечно, указать еще много частных случаев этой теоремы, имеющих простой наглядный смысл.

§ 3. Существование выпуклого тела с заданной поверхностной функцией

Еще в первой части [1] этой работы было показано, что поверхностная функция $F(H, \omega)$ выпуклого тела H, во-первых, неотрицательна, во-вторых, абсолютно аддитивна, в-третьих, удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Omega} \overline{n}\, F(H, d\omega) = 0,$$

в-четвертых, если тело H имеет внутренние точки, то при любом единичном векторе $\overline{n}_0$

$$\int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0 \overline{n}|\, F(H, d\omega) > 2a > 0,$$

где a — одна и та же постоянная для всех $\overline{n}_0$. Оказывается, что эти четыре условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функция множеств на единичной сфере была поверхностной функцией некоторого выпуклого тела с внутренними точками.

Теорема. *Пусть $F(\omega)$ — неотрицательная и абсолютно аддитивная функция множеств на единичной сфере, удовлетворяющая двум условиям:*

$$\int\limits_{\Omega} \overline{n}\, F(d\omega) = 0 \tag{1}$$

и при любом единичном векторе $\overline{n}_0$

$$\int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0 \overline{n}|\, F(d\omega) > 2a > 0, \tag{2}$$

где a — одна и та же постоянная для всех $\overline{n}_0$ [5]. Тогда существует и притом только одно (с точностью до параллельного переноса) выпуклое тело с внутренними точками, поверхностная функция которого есть данная функция $F(\omega)$.

---

[5] Так как $\int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0 \overline{n}|\, F(d\omega)$ является непрерывной функцией $\overline{n}_0$, то достаточно требовать его положительности; тогда найдется такое a, что (2) будет выполнено.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, сделаем два замечания.

Условия (1) и (2) легко интерпретируются наглядно. Представим себе, что поверхность единичного шара нагружена массами так, что $F(\omega)$ есть масса области ω. Это представление допустимо в силу неотрицательности и абсолютной аддитивности функции $F(\omega)$. Условие (1) требует, чтобы центр тяжести полученной таким образом системы масс находился в центре шара, а условие (2) — чтобы нагрузка не располагалась только по одному большому кругу или, в n-мерном случае, по одной $(n-1)$-мерной сфере, получающейся в сечении единичной сферы плоскостью, проходящей через центр. Это следует из того, что если принять $\overline{n}_0$ за полюс, то $|\overline{n}_0\overline{n}|$ равно нулю только на экваторе.

Из формулированной теоремы вытекает возможность реализовать любую неотрицательную и абсолютно аддитивную функцию множеств на единичной сфере посредством выпуклой поверхности. Для этого дополним данную такую функцию несколькими точечными нагрузками так, чтобы «дополненная» функция удовлетворяла условиям (1) и (2). Таких дополнительных точечных нагрузок можно всегда сделать не более $n+1$, взяв их, например, в вершинах правильного симплекса. Дополненная функция будет поверхностной функцией некоторого выпуклого тела. Добавленные точечные нагрузки представятся площадями некоторых плоских кусков на его поверхности. Вырезав эти куски, получим выпуклую поверхность, обладающую следующим свойством: мера множества тех ее точек, через которые проходят опорные плоскости с нормалями, идущими в множество ω на единичной сфере, равна значению данной функции множеств для множества ω.

Теперь приступим к доказательству нашей теоремы.

Заметим прежде всего, что единственность выпуклого тела с внутренними точками, имеющего данную поверхностную функцию, уже была доказана в части II этой работы [2]. Однако для данного частного случая вовсе нет надобности проходить весь длинный путь, который привел нас к доказательству общей теоремы единственности. Достаточно знать теорему Брунна и выражение смешанного объема через поверхностную функцию, найденное еще в части I [1]. Пусть выпуклые тела H_1 и H_2 имеют равные поверхностные функции: $F(H_1,\omega)=F(H_2,\omega)$. «Дифференцируя», умножая на $H_1(\overline{n})$ и интегрируя по поверхности единичного шара, получим

$$V(H_1,\dots,H_1)=V(H_1,H_2,\dots,H_2). \tag{3}$$

Из неравенства Брунна — Минковского

$$V(H_1,H_2,\dots,H_2)^n \geqslant V(H_1,\dots,H_1)V(H_2,\dots,H_2)^{n-1} \tag{4}$$

получаем

$$V(H_1, \ldots, H_1) \geqslant V(H_2, \ldots, H_2). \tag{5}$$

Так как одно из тел H_1 и H_2 ничем не хуже другого, то здесь должен стоять знак равенства, т. е. должно быть равенство в неравенстве (4). Если тела H_1 и H_2 имеют внутренние точки, то это возможно только тогда, когда они гомотетичны. А так как их объемы равны, то они равны и параллельно расположены.

Для того чтобы доказать существование выпуклого тела с заданной поверхностной функцией $F(\omega)$, будем искать среди всех положительных непрерывных функций $H^*(\overline{n})$ с «объемом», равным единице [6],

$$V(H^*) = 1, \tag{6}$$

такую, которая дает минимум интеграла

$$\int\limits_{\Omega} H^*(\overline{n})\, F(d\omega). \tag{7}$$

Заметим, во-первых, что этот минимум достаточно искать только для опорных функций выпуклых тел. Действительно, если $H(\overline{n})$ — опорная функция тела H, определяемого функцией $H^*(\overline{n})$, то по самому определению «объема» $H^*(\overline{n})$ $V(H^*) = V(H)$, а кроме того, $H(\overline{n}) \leqslant H^*(\overline{n})$, и потому минимум интеграла (7), достигнутый в области опорных функций, будет также минимумом для всей области положительных непрерывных функций. Во-вторых, мы можем ограничиться рассмотрением выпуклых тел, центры тяжести которых находятся в начале. Действительно, при параллельном переносе тела объем его не изменяется, а опорная функция приобретает слагаемое $\overline{a}\,\overline{n}$, где $\overline{a}$ — вектор переноса. Интеграл (7) для опорной функции перенесенного тела таков:

$$\int\limits_{\Omega} (H(\overline{n}) + \overline{a}\,\overline{n})\, F(d\omega), \tag{8}$$

т. е. равен тому же интегралу для неперенесенного тела, так как по условию (1)

$$\int\limits_{\Omega} \overline{a}\,\overline{n}\, F(d\omega) = 0. \tag{9}$$

[6] Согласно определению § 1 «объем» $H^*(\overline{n})$ есть объем определяемого ею выпуклого тела (см. заключительное замечание в § 1).

Докажем теперь, что искомый минимум существует. Возьмем для этого какое-нибудь выпуклое тело с объемом единица, и пусть для него интеграл (7) равен M. Естественно, можно ограничиться рассмотрением тех выпуклых тел, для которых

$$\int_\Omega H(\overline{n})\,F(d\omega) \leqslant M. \tag{10}$$

Покажем, что все такие тела (с объемом единица и с центром тяжести в начале) ограничены в своей совокупности. Пусть r — длина отрезка, исходящего из начала в направлении $\overline{n}_0$ и лежащего целиком в одном из тел H, принадлежащем нашей совокупности. Опорная функция такого отрезка, как это известно и легко видеть непосредственно, будет равна

$$\frac{r}{2}|\overline{n}_0\overline{n}| + \frac{r}{2}\overline{n}_0\overline{n},$$

и так как отрезок лежит в теле H, то

$$\frac{r}{2}|\overline{n}_0\overline{n}| + \frac{r}{2}\overline{n}_0\overline{n} \leqslant H(\overline{n}). \tag{11}$$

По предположению функция $F(\omega)$ неотрицательна, поэтому, воспользовавшись еще условием (1) (см. формулу (9)), получим

$$\frac{r}{2}\int_\Omega |\overline{n}_0\overline{n}|\,F(d\omega) \leqslant \int_\Omega H(\overline{n})\,F(d\omega) \leqslant M. \tag{12}$$

По условию, наложенному на $F(\omega)$,

$$\int_\Omega |\overline{n}_0\overline{n}|\,F(d\omega) > 2a > 0, \tag{13}$$

а потому

$$r < \frac{M}{a}. \tag{14}$$

Это значит, что длины отрезков, лежащих в рассматриваемых выпуклых телах, ограничены, а значит, и сами тела ограничены в своей совокупности.

Из теоремы выбора Бляшке следует существование минимума любого непрерывного функционала в ограниченной совокупности выпуклых тел[7)].

[7)] На языке функционального анализа теорема выбора Бляшке (Auswahlsatz) гласит: *Ограниченная совокупность выпуклых тел компактна.* А на всяком компактном множестве непрерывный функционал достигает минимума [4, § 18].

Следовательно, интеграл (7) действительно достигнет своего минимума для некоторого тела H_0 с объемом единица.

Мы пришли, таким образом, к следующему результату:

$$\int\limits_{\Omega} H^*(\overline{n})\, F(d\omega)$$

при дополнительном условии $V(H^*) = 1$ достигает минимума для $H^*(\overline{n}) = H_0(\overline{n})$, где $H_0(\overline{n})$ — опорная функция выпуклого тела единичного объема с центром тяжести в начале. Раз $H_0(\overline{n}) > 0$, то, как показывает лемма V § 1, при $H^*(\overline{n}) = H_0(\overline{n})$ «объем $H^*(\overline{n})$» допускает первую вариацию и

$$\delta V(H^*) = \int\limits_{\Omega} \delta H^*(\overline{n})\, F(H_0, d\omega). \tag{15}$$

Поэтому мы можем применить метод вариационного исчисления и, следуя правилу множителей Лагранжа, получим

$$\int\limits_{\Omega} \delta H^*(\overline{n})\, F(d\omega) = \lambda \int\limits_{\Omega} \delta H^*(\overline{n})\, F(H_0, d\omega). \tag{16}$$

В силу произвольности непрерывной функции $\delta H^*(\overline{n})$ отсюда следует, что

$$F(\omega) = \lambda F(H_0, \omega).$$

Если мы увеличим тело H_0 подобно в $\sqrt[n-1]{\lambda}$ раз, то его поверхностная функция увеличится в λ раз и станет равной $F(\omega)$. Следовательно, тело $\sqrt[n-1]{\lambda} H_0$ и есть искомое.

§ 4. *К вопросу о существовании выпуклого тела с данной функцией кривизны*

Возникает естественный вопрос: нельзя ли обобщить теорему существования выпуклого тела с заданной поверхностной функцией на функции кривизны любого порядка. Если этого нельзя сделать, рассматривая функции кривизны общей природы, то может быть можно доказать, что если аналитическая положительная функция $f(\overline{n})$ на единичной сфере удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Omega} \overline{n} f(\overline{n})\, d\omega = 0,$$

то существует выпуклое тело, для которого $f(\overline{n})$ есть его m-я функция кривизны $(m < n-1)$. Оказывается, что данный вопрос имеет отрицательный ответ. Именно мы докажем такую теорему.

Теорема. *Существует бесконечно много аналитических положительных функций $f(\overline{n})$ на единичной сфере, удовлетворяющих условию*

$$\int\limits_{\Omega} \overline{n} f(\overline{n})\, d\omega = 0, \tag{1}$$

которые не являются m-ми функциями кривизны каких бы то ни было выпуклых тел, если $m < n-1$ (где n, как всегда, — число измерений пространства).

Эта теорема сама по себе, пожалуй, не очень интересна. Любопытно, однако, то, что некоторые авторы настолько верили в правильность обратного, что даже утверждали в частных случаях соответствующую неверную теорему как доказанную или пытались доказать ее [6–8]. Так, утверждалось, что если положительная функция $f(\overline{n})$ удовлетворяет условию (1), то существует выпуклое тело, для которого она является суммой главных радиусов кривизны. В том, что эта теорема неверна, можно убедиться на следующем простом примере поверхности вращения в трехмерном пространстве. Пусть расстояние от начала до касательной плоскости к этой поверхности с нормалью $\overline{n}$ будет

$$H(\overline{n}) = \frac{3}{2} - \cos^2\theta, \tag{2}$$

где θ — полярное расстояние нормали $\overline{n}$ от оси поверхности. Сумма главных радиусов кривизны выражается, как известно, следующим образом:

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial H}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 H}{\partial\varphi^2} + 2H, \tag{3}$$

где φ — долгота. Подставляя сюда $H = 3/2 - \cos^2\theta$, получим

$$R_1 + R_2 = 4\cos^2\theta + 1 > 0. \tag{4}$$

Между тем рассматриваемая поверхность невыпуклая. Радиус кривизны ее меридиана может быть найден из известного соотношения

$$R = H + \frac{d^2 H}{d\theta^2}, \tag{5}$$

так как H зависит только от θ. Вычисляя, получим

$$R = 3\cos^2\theta - \frac{1}{2}, \tag{6}$$

т. е. $R = -1/2$ при $\theta = \pi/2$ и $R = 5/2$ при $\theta = 0$. А поскольку радиус кривизны меридиана меняет знак, то поверхность невыпуклая и имеет ребра возврата, когда $R = 3\cos^2\theta - 1/2 = 0$. Тот факт, что никакая другая поверхность не имеет той же суммы главных радиусов кривизны, следует из единственности решения дифференциального уравнения (3) при заданной сумме $R_1 + R_2$ (единственности с точностью до слагаемого $\overline{a}\,\overline{n}$, представляющего параллельный перенос).

Теперь дадим доказательство формулированной выше общей теоремы. Это позволит несколько глубже заглянуть в природу того обстоятельства, что теорема существования выпуклого тела с заданной любой функцией кривизны оказывается неверной.

Будем говорить, что функция множеств $F(\omega)$ имеет точечную нагрузку в точке $\overline{n}$, если, приняв за область ω одну эту точку, мы получим $F(\omega) \neq 0$.

Лемма I. *Функции кривизны порядка меньшего $n-1$ не имеют точечных нагрузок.*

Допустим противное, и пусть $F_m(H, \omega)$ будет функция кривизны выпуклого тела H, имеющая точечную нагрузку в точке $\overline{n}_0$. Примем за область ω_0 одну эту точку. Значение поверхностной функции тела $H + \lambda E$, параллельного H, для этой области будет [8]:

$$F_{n-1}(H + \lambda E, \omega_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} C_{n-1}^k F_k(H, \omega_0) > 0, \tag{7}$$

так как по предположению $F_m(H, \omega_0) > 0$. Это значит, что на теле $H + \lambda E$ есть целая грань с нормалью $\overline{n}_0$ и с площадью $F_{n-1}(H + \lambda E, \omega_0)$. Возвращаясь от тела $H + \lambda E$ к телу H, мы откладываем по нормалям к нему внутрь отрезки длиной λ. Все такие отрезки, начинающиеся на рассматриваемой грани, будут параллельны друг другу, и их концы дадут поэтому на поверхности H точно такую же грань. Следовательно,

$$F_{n-1}(H + \lambda E, \omega_0) = F_{n-1}(H, \omega_0),$$

а значит,

$$F_m(H, \omega_0) = 0 \quad \text{при } m < n-1.$$

Будем говорить, что последовательность функций точки $f_1(\overline{n}), f_2(\overline{n}), \ldots$ слабо сходится к функции множеств $F(\omega)$, если при любой непрерывной $Z(\overline{n})$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} Z(\overline{n})\, f_k(\overline{n})\, d\omega = \int_{\Omega} Z(\overline{n})\, F(d\omega). \tag{8}$$

[8] Здесь и всюду далее E — единичный шар.

Лемма II. *Для всякой неотрицательной и абсолютно аддитивной функции множеств на единичной сфере $F(\omega)$, удовлетворяющей условиям*

$$\int\limits_{\Omega} \overline{n}\, F(d\omega) = 0, \quad \int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0\overline{n}|\, F(d\omega) > 2a > 0, \tag{9}$$

можно построить слабо сходящуюся к ней последовательность положительных аналитических функций $f_k(\overline{n})$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\Omega} \overline{n} f_k(\overline{n})\, d\omega = 0. \tag{10}$$

Если функция $F(\omega)$ удовлетворяет поставленным условиям, то, как было показано, существует выпуклое тело H, для которого $F(\omega)$ является поверхностной функцией. Г. Минковский доказал, что всякое выпуклое тело можно аппроксимировать с любой степенью точности регулярным выпуклым телом с аналитической опорной функцией. Построим последовательность таких тел $H_1, H_2, \ldots$, сходящихся к H. Обратные гауссовы кривизны тел H_k дадут последовательность функций $f_k(\overline{n})$, удовлетворяющих поставленным условиям. Эти функции слабо сходятся к $F(\omega)$, так как

$$\frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n}) f_k(\overline{n})\, d\omega = V(Z, H_k, \ldots, H_k), \tag{11}$$

а по лемме § 6 части I [1] этой работы

$$\lim_{k\to\infty} V(Z, H_k, \ldots, H_k) = V(Z, H, \ldots, H) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n})\, F(d\omega). \tag{12}$$

Допустим теперь, вопреки теореме, которую мы хотим доказать, что для всякой положительной аналитической и удовлетворяющей условию (1) функции $f(\overline{n})$ на единичной сфере существует выпуклое тело, для которого $f(\overline{n})$ есть его m-я функция кривизны в обычном смысле. Пусть $F(\omega)$ — функция множеств с точечными нагрузками, удовлетворяющая условиям (9). Построим последовательность функций $f_k(\overline{n})$, слабо сходящихся к $F(\omega)$. Пусть H_k — выпуклое тело с m-й функцией кривизны $f_k(\overline{n})$.

Докажем, что все тела H_k ограничены в совокупности. Можно, конечно, предполагать, что центры тяжести их всех лежат в начале. Интегралы $\int\limits_{\Omega} f_k(\overline{n})\, d\omega$ ограничены в совокупности, так как в силу слабой сходимости $f_k(\overline{n})$ к $F(\omega)$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_k(\overline{n})\, d\omega = F(\Omega). \tag{13}$$

Вместе с тем

$$\frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} f_k(\overline{n})\,d\omega = V_m(H_k) = V(\underbrace{H_k,\ldots,H_k}_{m},E,\ldots,E), \tag{14}$$

так как $f_k(\overline{n})$ — m-я функция кривизны тела H_k. Неравенство между интегралами кривизны, доказанное в § 4 части II этой работы [2], дает

$$V_m(H_k)^{m+1} \geqslant V_{m+1}(H_k)^m V(E), \tag{15}$$

где $V(E)$ — объем единичного шара. Поэтому из ограниченности всех $V_m(H_k)$ следует

$$V_{m+1}(H_k) < M. \tag{16}$$

Пусть r — длина отрезка, идущего из начала в направлении $\overline{n}_0$ и целиком лежащего в теле H_k. Опорная функция этого отрезка будет

$$\frac{r}{2}|\overline{n}_0\overline{n}| + \frac{r}{2}\overline{n}_0\overline{n} \leqslant H_k(\overline{n}). \tag{17}$$

Благодаря неравенству (17), воспользовавшись условием (10), получим

$$\frac{r}{2}\int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0\overline{n}| f_k(\overline{n})\,d\omega \leqslant \int\limits_{\Omega} H_k(\overline{n}) f_k(\overline{n})\,d\omega. \tag{18}$$

Стоящий здесь справа интеграл равен $nV_{m+1}(H_k)$, а потому на основании неравенства (10)

$$\frac{r}{2}\int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0\overline{n}| f_k(\overline{n})\,d\omega < nM. \tag{19}$$

Так как функции $f_k(\overline{n})$ положительны и слабо сходятся к функции $F(\omega)$, удовлетворяющей условиям (9), то стоящий здесь слева интеграл ограничен снизу некоторым постоянным для всех $\overline{n}_0$ и k числом $2b$ [9]. Поэтому из неравенства (19) следует, что

$$r < \frac{nM}{b}. \tag{20}$$

[9] Это утверждение основано на лемме: *Если $F_k(\omega)$ абсолютно аддитивны и слабо сходятся к $F_0(\omega)$ и $K(\overline{n}_0,\overline{n})$ равностепенно непрерывна по $\overline{n}_0$ для всех $\overline{n}$, то, положив $\int K(\overline{n}_0,\overline{n})\,F_k(d\omega) = \varphi_k(\overline{n}_0)$, имеем, что $\varphi_k(\overline{n}_0)$ сходятся к $\varphi_0(\overline{n}_0)$ равномерно по $\overline{n}_0$.*

Пусть $\operatorname{Var} F_k(\omega) < M$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется δ такое, что при $|\overline{n}_0' - \overline{n}_0''| < \delta$ будет

$$|\varphi_k(\overline{n}_0') - \varphi_k(\overline{n}_0'')| \leqslant \int |K(\overline{n}_0',\overline{n}) - K(\overline{n}_0'',\overline{n})| \operatorname{Var} F_k(d\omega) < \varepsilon M.$$

Следовательно, $\varphi_k(\overline{n}_0)$ равностепенно непрерывны, а так как они сходятся к $\varphi_0(\overline{n}_0)$, то сходимость эта равномерная.

Это значит, что длины всех отрезков, помещающихся во всех телах H_k, равномерно ограничены, а следовательно, и сами тела H_k ограничены в совокупности.

Теперь на основании теоремы выбора Бляшке мы можем выбрать из всей совокупности тел H_k сходящуюся последовательность. Тела этой последовательности также обозначим H_k.

Пусть H — предельное тело этой последовательности и $F_m(H, \omega)$ — его m-я функция кривизны. Так как функции $f_k(\overline{n})$ суть m-е функции кривизны в обычном смысле тел H_k, то по лемме § 6 части I [1] при любой непрерывной $Z(\overline{n})$

$$\int\limits_{\Omega} Z(\overline{n})\, F_m(H, d\omega) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n}) f_k(\overline{n})\, d\omega. \tag{21}$$

Вместе с тем по условию слабой сходимости $f_k(\overline{n})$ к $F(\omega)$

$$\int\limits_{\Omega} Z(\overline{n})\, F(d\omega) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n}) f_k(\overline{n})\, d\omega. \tag{22}$$

Сопоставляя равенства (21) и (22) и замечая, что $Z(\overline{n})$ — произвольная непрерывная функция, получим

$$F_m(H, \omega) = F(\omega). \tag{23}$$

Однако, если функция $F(\omega)$ имеет точечные нагрузки, то при $m < n - 1$ это равенство невозможно, как показывает лемма I.

Получается противоречие, и следовательно, наша теорема доказана. Мы видим, что положительные функции $f(\overline{n})$, так сказать, слишком близкие к функциям множеств $F(\omega)$ с точечными нагрузками, не могут быть функциями кривизны порядка, меньшего $n - 1$, ни для какого выпуклого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. I: Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 5. С. 947–970.
2. *Александров А. Д.* То же. II: Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 6. С. 1205–1235.
3. *Минковский Г.* Общие теоремы о выпуклых многогранниках // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 37–46.
4. *Blaschke W.* Kreis und Kugel. Leipzig: Veit, 1916. (Русский перевод: *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.)
5. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937.
6. *Favard J.* Sur la détermination des surfaces convexes // Bul. Acad. Bruxelles. 1933. Ser. 5. T. 19. P. 65–75.
7. *Süss W.* Bestimmung einer geschlossen kovexen Fläche durch die Summe ihrer Hauptkrümmungsradien // Math. Ann. 1933. Bd 108. S. 143–148.
8. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)

К теории смешанных объемов выпуклых тел. IV: Смешанные дискриминанты и смешанные объемы [1)]

Математический сборник. 1938. Т. 3, № 2. С. 227–249

Эта статья посвящена прежде всего изучению инвариантов системы квадратичных форм с n переменными, так называемых смешанных дискриминантов этих форм, связь которых с вопросами теории выпуклых тел установлена уже работами Г. Минковского [4, 5] и Г. Вейля [6]. Алгебраическая часть работы (§ 1–3) излагается вне связи с выпуклыми телами, так как она может представлять самостоятельный интерес. Далее показывается каким образом, опираясь на полученные алгебраические результаты, можно получить основные теоремы теории смешанных объемов выпуклых тел, правда, ограничиваясь телами с дважды дифференцируемыми опорными функциями. В § 4 само понятие о смешанном объеме и его свойства получаются на основе применения смешанных дискриминантов. В § 5 доказывается единственность выпуклого тела с заданной функцией кривизны, вовсе не используя неравенств между смешанными объемами. В § 6 выводится основное неравенство между смешанными объемами, по методу Д. Гильберта [7, гл. 19]. Наконец, в § 7 дается обобщение двух теорем, доказанных во второй части [2] этой работы, о единственности выпуклого тела с заданной функцией кривизны и о знаке равенства в обобщенном неравенстве Брунна. Этот последний параграф стоит несколько особняком и, скорее, примыкает ко второй части работы.

§ 1. *Основные свойства смешанных дискриминантов*

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — квадратичные формы n переменных:

$$f_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} x_i x_j. \tag{1}$$

[1)]Предыдущие части этой работы см. в [1–3].

Линейная комбинация их

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m \tag{2}$$

также будет квадратичной формой тех же n переменных, с коэффициентами

$$a_{ij} = \lambda_1 a_{ij}^{(1)} + \lambda_2 a_{ij}^{(2)} + \ldots + \lambda_m a_{ij}^{(m)}. \tag{3}$$

Дискриминант $D(\underbrace{f, \ldots, f}_{n})$ формы f является однородным многочленом степени n относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$D(f, \ldots, f) = \sum_{k_1, \ldots, k_n} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \ldots \lambda_{k_n} D(f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_n}). \tag{4}$$

Здесь суммирование производится по всем индексам $k_1, \ldots, k_n$, которые независимо друг от друга пробегают все значения от 1 до m. То, что коэффициент при произведении $\lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \ldots \lambda_{k_n}$ зависит только от форм f_{k_1}, $f_{k_2}, \ldots, f_{k_n}$, доказывается, если положить все остальные λ равными нулю. Коэффициенты $D(f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_n})$ выбираются так, чтобы они не зависели от порядка форм $f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_n}$. Эти коэффициенты назовем смешанными дискриминантами форм $f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots, f_{k_n}$.

Из разложения определителя

$$D(f, \ldots, f) = |\lambda_1 a_{ij}^{(1)} + \ldots + \lambda_m a_{ij}^{(m)}| \tag{5}$$

непосредственно получается, что

$$D(\underbrace{f_1, \ldots, f_1}_{p_1}, \underbrace{f_2, \ldots, f_2}_{p_2}, \ldots, \underbrace{f_m, \ldots, f_m}_{p_m}) =$$

$$= \frac{p_1!\, p_2! \ldots p_m!}{n!} \sum \begin{vmatrix} a_{11}^{(k_1)} a_{12}^{(k_1)} \ldots a_{1n}^{(k_1)} \\ a_{21}^{(k_2)} a_{22}^{(k_2)} \ldots a_{2n}^{(k_2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^{(k_n)} a_{n2}^{(k_n)} \ldots a_{nn}^{(k_n)} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где суммирование производится по всем размещениям индексов k_i, которые p_1 раз принимают значение 1, p_2 раз — значение 2 и т. д.

Заметим, что введенное определение и все свойства смешанных дискриминантов, приведенные в этой работе, вместе с их доказательствами, без всяких изменений могут быть перенесены на тот случай, когда рассматриваемые формы эрмитовы.

Смешанные дискриминанты обладают следующими свойствами:

1. Если все формы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ равны одной и той же форме f, то $D(f_1, f_2, \ldots, f_n) = D(f, \ldots, f)$ есть дискриминант формы f.

2. Пусть

$$f = \lambda_1 f^{(1)} + \lambda_2 f^{(2)} + \ldots + \lambda_p f^{(p)}.$$

Тогда $D(\underbrace{f, \ldots, f}_{m}, f_1, \ldots, f_{n-m})$, где $f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}$, $f_1, \ldots, f_{n-m}$ — любые квадратичные формы, будет однородным многочленом m-й степени относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, а именно

$$D(f, \ldots, f, f_1, \ldots, f_{n-m}) = \\ = \sum_{k_1, \ldots, k_m} \lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_m} D(f^{(k_1)}, \ldots, f^{(k_m)}, f_1, \ldots, f_{n-m}), \quad (7)$$

где суммирование производится по всем $k_1, \ldots, k_m$ от 1 до p. Это свойство получается из формулы (4) путем сравнения коэффициентов.

3. Если все формы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ подвергаются одному и тому же линейному преобразованию с определителем D, то $D(f_1, \ldots, f_n)$ получает множитель D^2. (Здесь, как и всюду далее, формы $f_1, \ldots, f_n$ необязательно различные; n всегда будет обозначать число переменных.)

Если все формы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ подвергаются одному и тому же преобразованию, то, независимо от значений коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, форма $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n$ претерпевает то же преобразование. Поэтому ее дискриминант получает множитель D^2, а значит, тот же множитель получают все коэффициенты многочлена (4).

Отсюда, в частности, следует, что одновременное унимодулярное преобразование форм $f_1, \ldots, f_n$ не изменяет их смешанного дискриминанта $D(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Этим обстоятельством мы будем часто пользоваться.

4. $D(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ есть линейная форма коэффициентов каждой из форм $f_1, \ldots, f_n$:

$$D(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{i,j=1}^{n} D(f_1, \ldots, f_{n-1})_{ij}\, a_{ij}^{(n)}. \quad (8)$$

Здесь $D(f_1, \ldots, f_{n-1})_{ij}$ с точностью до несущественного множителя n равно смешанному дискриминанту форм, получающихся из $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ путем вычеркивания всех коэффициентов с индексом i.

Полагая в формуле (6) все формы формально различными и разлагая все стоящие там определители по элементам $a_{ij}^{(n)}$, убедимся в правильности нашего утверждения.

5. Если все формы $f_1, \ldots, f_n$ положительно-определенные, то $D(f_1, \ldots, f_n) > 0$.

Для форм с одной переменной это утверждение тривиально. Предположим, что оно верно для форм с $(n-1)$ переменными и докажем его для форм с n переменными.

Преобразуем все формы $f_1, \ldots, f_n$ так, чтобы f_n превратилась в сумму квадратов. Новые формы отметим чертой сверху. Если преобразование ортогонально, то из свойств 3 и 4 получаем

$$D(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{i=1}^{n} D(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_{n-1})_{ii}\, \overline{a}_{ii}^{(n)}, \tag{9}$$

где по предположению $D(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_{n-1}) > 0$, так как при вычеркивании всех коэффициентов с индексом i из положительно определенных форм получаются положительно определенные. Кроме того, из положительной определенности формы f_n следует, что все $\overline{a}_{ii}^{(n)} > 0$. Отсюда $D(f_1, \ldots, f_n) > 0$.

Хорошо известный пример смешанных дискриминантов представляют коэффициенты характеристического уравнения какой-нибудь квадратичной формы f. Если $e = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, то характеристическое уравнение формы f можно написать в виде

$$D(f - \lambda e, \ldots, f - \lambda e) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \lambda^m C_n^m\, D(\underbrace{f, \ldots, f}_{n-m}, \underbrace{e, \ldots, e}_{m}) = 0.$$

§ 2. *Об одной форме, связанной с $n-1$ формами*

Пусть $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n$; F — матрица формы f. Определители матриц обозначим символом матрицы, поставленным между парой вертикальных черточек. Элементы матриц обозначим символом матрицы в скобках с индексами, указывающими на место элемента в матрице.

Матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы F, будет

$$\|D(\underbrace{f, \ldots, f}_{n-1})_{ik}\| = |F|\, F^{-1}. \tag{1}$$

Если форма f при преобразовании с матрицей T переходит в форму f' с матрицей F', то

$$F' = \widetilde{T} F T, \tag{2}$$

где тильда указывает на транспонированную матрицу,

$$F'^{-1} = T^{-1} F^{-1} \widetilde{T}^{-1}. \tag{3}$$

Поэтому

$$\|D(f',\ldots,f')_{ik}\| = |F'|\,{F'}^{-1} = |T|^2\,T^{-1}\,|F|\,F^{-1}\,\widetilde{T}^{-1}. \tag{4}$$

Если $|T|=1$, то

$$\|D(f',\ldots,f')_{ik}\| = T^{-1}\,\|D(f,\ldots,f)_{ik}\|\,\widetilde{T}^{-1} \tag{5}$$

и

$$D(f',\ldots,f')_{ik} = \sum_{j,i=1}^{n}(T^{-1})(T^{-1}_{ij})_{ki}\,D(f,\ldots,f)_{ji}. \tag{6}$$

Эту формулу мы распространим на «смешанные миноры» $D(f_1,\ldots,f_{n-1})_{ik}$,

$$f = \sum_{q=1}^{m}\lambda_q f_q \tag{7}$$

и

$$D(f,\ldots,f) \;= \sum_{q_1,\ldots,q_n}\lambda_{q_1}\ldots\lambda_{q_n}D(f_{q_1},\ldots,f_{q_n}). \tag{8}$$

Из разложения $D(f,\ldots,f)$ по минорам получим

$$D(f,\ldots,f)_{ik} \;= \sum_{q_i,\ldots,q_{n-1}}\lambda_{q_1}\ldots\lambda_{q_{n-1}}\,D(f_{q_1},\ldots,f_{q_{n-1}})_{ik}. \tag{9}$$

Так как при одновременном преобразовании форм f_q форма f испытывает то же преобразование, независимо от значений λ_q, то, преобразуя все f_q унимодулярным преобразованием с матрицей T, получим, благодаря (6) и (9),

$$D(f'_1,\ldots,f'_{n-1})_{ik} = \sum_{l,j}^{n}(T^{-1})_{ij}\,(T^{-1})_{kl}\,D(f_1,\ldots,f_{n-1})_{jl}. \tag{10}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{i,k=1}^{n}D(f_1,\ldots,f_{n-1})_{ik}\,x_ix_k. \tag{11}$$

Подвергнем ее унимодулярному преобразованию с матрицей S. Тогда коэффициенты преобразованной формы будут

$$D'(f_1,\ldots,f_{n-1})_{ik} = \sum_{j,l=1}^{n}(S)_{ji}\,(S)_{lk}\,D(f_1,\ldots,f_{n-1})_{jl}. \tag{12}$$

Поэтому, если $S=\widetilde{T}^{-1}$, то

$$D(f'_1,\ldots,f'_{n-1})_{ik}=D'(f_1,\ldots,f_{n-1})_{ik}. \tag{13}$$

Этим доказана

Лемма I. *Унимодулярное преобразование с матрицей S, производимое над формой*

$$\sum_{i,k=1}^{n} D(f_1,\ldots,f_{n-1})_{ik}\,x_ix_k,$$

приводит к тому же результату, что и преобразование с матрицей $\widetilde{S}^{-1}$, производимое над формами $f_1,\ldots,f_{n-1}$.

Поэтому всегда можно преобразовать формы $f_1,\ldots,f_{n-1}$ так, чтобы форма

$$\sum_{i,k=1}^{n} D(f_1,\ldots,f_{n-1})_{ik}\,x_ix_k$$

превратилась в сумму квадратов, т. е. так, что $D(f'_1,\ldots,f'_{n-1})_{ik}=0$ при $i\neq k$.

Если формы $f_1,\ldots,f_{n-1}$ положительно определены и мы преобразуем их так, чтобы $D(f'_1,\ldots,f_{n-1})_{ik}=0$ при $i\neq k$, то видно, что форма

$$\sum_{i=1}^{n} D(f'_1,\ldots,f'_{n-1})_{ii}\,x_i^2$$

положительно определена, так как $D(f'_1,\ldots,f'_{n-1})_{ii}>0$ по доказанному в § 1. Но тот же результат получается при соответствующем преобразовании самой формы

$$\sum_{i,k=1}^{n} D(f_1,\ldots,f_{n-1})_{ik}\,x_ix_k.$$

Этим доказана

Лемма II. *Если формы $f_1,\ldots,f_{n-1}$ положительно определенные, то и форма*

$$\sum_{i,k=1}^{n} D(f_1,\ldots,f_{n-1})_{ik}\,x_ix_k$$

положительно определенная.

§ 3. Неравенства между смешанными дискриминантами

Теорема. *Пусть формы* $f_1, \ldots, f_{n-1}$,

$$f_m = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^{(m)}\, x_i x_k \qquad (m = 1, \ldots, n-1)$$

— положительно определенные и

$$g = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\, x_i x_k$$

— произвольная форма. Тогда

$$D(f_1, \ldots, f_{n-1}, g)^2 \geqslant D(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_{n-1})\, D(f_1, \ldots, f_{n-2}, g, g),$$

причем знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда $g = \lambda f_{n-1}$, *где* λ *— постоянная.*

Так как $D(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_{n-1}) > 0$, то из этой теоремы следует, что *если* g *удовлетворяет условию*

$$D(f_1, \ldots, f_{n-1}, g) = 0, \tag{1}$$

то

$$D(f_1, \ldots, f_{n-2}, g, g) \leqslant 0, \tag{2}$$

причем знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда форма g *тождественно равна нулю.*

Покажем, что, обратно, из указанного следствия вытекает и сама теорема. Пусть форма g — произвольная и λ выбрано так, что

$$D(f_1, \ldots, f_{n-1}, g) = \lambda D(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_{n-1}). \tag{3}$$

Тогда, полагая $g - \lambda f_{n-1} = g'$, получим

$$D(f_1, \ldots, f_{n-1}, g') = 0 \tag{4}$$

и

$$D(f_1, \ldots, f_{n-2}, g', g') \leqslant 0. \tag{5}$$

Подставляя сюда $g' = g - \lambda f_{n-1}$, развертывая и беря значение λ из (3), получим

$$D(f_1, \ldots, f_{n-2}, g, g) - \frac{D(f_1, \ldots, f_{n-1}, g)^2}{D(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_{n-1})} \leqslant 0. \tag{6}$$

Так как $D(f_1, \dots, f_{n-1}, f_{n-1}) > 0$, то отсюда и следует неравенство, указанное в теореме.

Знак равенства в (6) может стоять только в том случае, когда он стоит в (5), т. е. когда, согласно предположению, $g' = g - \lambda f_{n-1} = 0$, т. е. $g = \lambda f_{n-1}$.

Основываясь на этом замечании, будем доказывать не самую теорему, а указанное ее следствие. Рассмотрим сначала случай бинарных форм f и g. Форма f положительно определенная, поэтому обе формы f и g можно одновременно преобразовать в сумму квадратов, причем величины $D(f, g)$ и $D(g, g)$ не изменятся. Тогда условие (1) напишется в форме

$$2D(f, g) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} = 0,$$

и так как $a_{11}, a_{22} > 0$, то

$$D(g, g) = b_{11}b_{22} \leqslant 0$$

и равно нулю тогда и только тогда, когда $b_{11} = b_{22} = 0$.

Теперь перейдем к случаю форм с n переменными и предположим, что теорема верна для форм с $(n-1)$ переменными.

Из свойства 4 § 1 смешанных дискриминантов можно заключить, что $D(f_1, \dots, f_{n-2}, g, g)$ является квадратичной формой коэффициентов b_{ik} формы g. Эту квадратичную форму мы обозначим G:

$$G = \sum_{i,k=1}^{n} D(f_1, \dots, f_{n-2}, g)_{ik}\, b_{ik} = \sum_{i,k,j,l=1}^{n} D(f_1, \dots, f_{n-2})_{ik,jl}\, b_{ik}b_{jl}. \tag{7}$$

Смысл коэффициентов $D(f_1, \dots, f_{n-2})_{ik,jl}$ можно усмотреть из п. 4 § 1. $D(f_1, \dots, f_{n-2}, g)_{ii}$ есть смешанный дискриминант форм $f_1^{(i)}, \dots, f_{n-2}^{(i)}, g^{(i)}$, получающихся из $f_1, \dots, f_{n-2}, g$ вычеркиванием коэффициентов с индексом i; $D(f_1, \dots, f_{n-2})_{ii,jj}$ $(i \neq j)$ есть смешанный дискриминант форм, получающихся из $f_1^{(i)}, \dots, f_{n-2}^{(i)}$ вычеркиванием коэффициентов с индексом j. Поэтому

$$D(f_1, \dots, f_{n-2})_{ii,jj} \begin{cases} > 0 & \text{при } i \neq j, \\ = 0 & \text{при } i = j. \end{cases} \tag{8}$$

Будем рассматривать $b_{ik} = b_{ki}$ как переменные и построим доказательство теоремы на изучении собственных значений формы G.

Для того чтобы форма G имела нулевые собственные значения, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$D(f_1, \dots, f_{n-2}, g)_{ik} = 0 \tag{9}$$

относительно неизвестных b_{ik} допускала нетривиальное решение. Форму g_0 с коэффициентами b_{ik}, являющимися решениями этой системы, будем называть собственной формой, относящейся к нулевому собственному значению формы G.

Подвергнем формы $f_1, \ldots, f_{n-2}, g_0$ одному и тому же унимодулярному преобразованию. Тогда для преобразованных форм $f'_1, \ldots, f'_{n-2}, g'_0$ будет выполняться также система условий

$$D(f'_1, \ldots, f'_{n-2}, g'_0)_{ik} = 0, \tag{10}$$

где индексы относятся уже к новым переменным x. Это непосредственно следует из формулы (10) § 2. Поэтому, если форма $G = D(f_1, \ldots, f_{n-2}, g, g)$ имеет нулевое собственное значение, то его имеет и форма $G' = D(f'_1, \ldots, f'_{n-2}, g', g')$, получающаяся из G при одновременном линейном преобразовании форм $f_1, \ldots, f_{n-2}$, и соответствующие собственные формы g'_0 будут преобразованными собственными формами g_0 формы G.

Лемма I. *Форма $G = D(f_1, \ldots, f_{n-2}, g, g)$ не имеет нулевых собственных значений.*

Пусть g_0 будет собственная форма, относящаяся к нулевому собственному значению формы G. Преобразуем одновременно все формы $f_1, \ldots, f_{n-2}$, g_0 так, чтобы f_{n-2} и g_0 превратились в суммы квадратов. Благодаря положительной определенности формы f_{n-2} это, как известно, возможно. Для преобразованных форм получим уравнения

$$D(f'_1, \ldots, f'_{n-2}, g'_0)_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Замечая, что $D(f'_1, \ldots, f'_{n-2}, g'_0)_{ii}$ есть смешанный дискриминант форм с $n-1$ переменными, и предполагая доказываемую нами теорему верной для таких форм, получим

$$D(f'_1, \ldots, f'_{n-3}, g'_0, g'_0)_{ii} \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

и тогда и только тогда равно нулю для всех i, когда форма g'_0 тождественно исчезает.

Умножая (12) на ${a'}_{ii}^{(n-2)}$ и суммируя по всем i, получим

$$\sum_{i=1}^{n} D(f'_1, \ldots, f'_{n-3}, g'_0, g'_0)_{ii}\, {a'}_{ii}^{(n-2)} = D(f'_1, \ldots, f'_{n-2}, g'_0, g'_0) \leqslant 0, \tag{13}$$

так как ${a'}_{ii}^{(n-2)} > 0$ и ${a'}_{ik}^{(n-2)} = 0$ при $i \neq k$.

Но так как g_0' — собственная форма, относящаяся к собственному значению нуль, то

$$D(f_1', \dots, f_{n-2}', g_0', g_0') = 0. \tag{14}$$

Следовательно, во всех неравенствах (12) стоит знак равенства и форма g_0' тождественно равна нулю.

Лемма II. *Форма $G = D(f_1, \dots, f_{n-2}, g, g)$ имеет только одно положительное собственное значение*[2].

Пусть $e = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ и

$$nD(e, \dots, e, g) = b_{11} + \dots + b_{nn} = 0. \tag{15}$$

Так как

$$2\sum_{i<k=1}^{n} b_{ii}b_{kk} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2, \tag{16}$$

то

$$\frac{n(n-1)}{2} D(e, \dots, e, g, g) = \sum_{i<k=1}^{n} (b_{ii}b_{kk} - b_{ik}^2) \leqslant 0 \tag{17}$$

и равно нулю тогда и только тогда, когда все b_{ik} — нули. При дополнительном условии $\sum b_{ik}^2 = 1$ форма (17) достигает максимума при $b_{ik} = 0$ для $i \neq k$ и $b_{11} = \dots = b_{nn} = 1/\sqrt{n}$. Следовательно, максимальное собственное значение формы $2^{-1}n(n-1)D(e, \dots, e, g, g)$ равно $1/n$. Условие (15) означает, таким образом, не что иное, как ортогональность допустимых систем значений b_{ik} к «собственному вектору», относящемуся к собственному значению $1/n$ (т. е. к системе чисел $b_{ii} = 1/\sqrt{n}$ и $b_{ik} = 0$ при $i \neq k$). А так как при этом условии форма $2^{-1}n(n-1)D(e, \dots, e, g, g)$ не положительна, то $1/n$ есть ее единственное положительное собственное значение.

Пусть формы $f_1, \dots, f_{n-2}$, как и раньше, положительно определенные. Построим семейство форм $(1-\vartheta)e + \vartheta f_1, \dots, (1-\vartheta)e + \vartheta f_{n-2}$. Когда параметр ϑ непрерывно растет от 0 до 1, то формы семейства остаются положительно определенными и непрерывно изменяются, переходя от e к $f_1, \dots, f_{n-2}$. При этом форма $G_\vartheta = D((1-\vartheta)e + \vartheta f_1, \dots, g, g)$, а значит, и ее собственные значения также меняются непрерывно. По лемме I ни одно из них не может пройти через нуль. Поэтому число положительных собственных значений формы G_ϑ не изменяется. Так как при $\vartheta = 0$ форма $G_0 = D(e, \dots, e, g, g)$ имеет только одно такое собственное значение, то и форма $G_1 = D(f_1, \dots, f_{n-2}, g, g)$ также имеет лишь одно положительное собственное значение.

[2] Всюду, где говорится о числе собственных значений, подразумевается, что кратные собственные значения считаются столько раз, какова их кратность.

Теперь мы можем доказать теорему, сформулированную в начале этого параграфа. Предположим, что форма f_{n-2} представляет собой сумму квадратов. Форма $G = D(f_1, \dots, f_{n-2}, g, g)$ имеет только одно положительное собственное значение. Полагая при $i \neq k$ все $b_{ik} = 0$, получим из G новую квадратичную форму переменных $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$. Эту новую форму также обозначим G:

$$G = D(f_1, \dots, f_{n-2}, g, g) = \sum_{i,k=1}^{n} D(f_1, \dots, f_{n-2})_{ii,kk}\, b_{ii} b_{kk}. \tag{18}$$

Она имеет не более одного положительного собственного значения, потому что, как известно, число положительных собственных значений формы, получающейся из данной, если положить некоторые переменные равными нулю, не больше, чем у исходной формы.

Введенные ограничения сводятся к тому, что мы полагаем формы f_{n-1} и g в каноническом виде. Однако, если докажем нашу теорему при этом предположении, то она будет доказана и для общего случая, так как благодаря положительной определенности формы f_{n-1} можно подвергнуть все формы $f_1, \dots, f_{n-1}, g$ (когда g задана) такому преобразованию, которое приведет f_{n-1} и g к каноническому виду. Пусть

$$D(f_1, \dots, f_{n-1}, g) = 0. \tag{19}$$

Возьмем квадратичную форму

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{D(f_1, \dots, f_{n-1})_{ii}}{a_{ii}^{(n-1)}} b_{ii}^2. \tag{20}$$

Так как

$$D(f_1, \dots, f_{n-1})_{ii} > 0, \quad a_{ii}^{(n-1)} > 0,$$

то форма $\mathcal{E}$ положительно определенная. Поэтому можно формы $\mathcal{E}$ и G одновременно привести к каноническому виду. Это приведение сводится к решению уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} D(f_1, \dots, f_{n-2})_{ii,kk}\, b_{kk} = \lambda \frac{b_{ii}}{a_{ii}^{(n-1)}} D(f_1, \dots, f_{n-1})_{ii}. \tag{21}$$

Поскольку

$$D(f_1, \dots, f_{n-1})_{ii} = \sum_{k=1}^{n} D(f_1, \dots, f_{n-2})_{ii,kk}\, a_{kk}^{(n-1)}, \tag{22}$$

то при $\lambda = 1$ система уравнений (21) имеет решение $b_{kk} = a_{kk}^{(n-1)}$. Значит, $\lambda = 1$ и есть единственное положительное собственное значение формы G.

Условие (19), которое можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D(f_1, \ldots, f_{n-1})_{ii}}{a_{ii}^{(n-1)}} a_{ii}^{(n-1)} b_{ii} = 0, \tag{23}$$

означает «нагруженную» ортогональность допустимых систем значений b_{ii} к системе чисел $a_{ii}^{(n-1)}$, т. е. к собственному вектору формы G, относящемуся к ее единственному положительному собственному значению $\lambda = 1$. Следовательно, при условии (19) форма G не положительна, и так как она не имеет нулевых собственных значений, то она отрицательна, если только g не равна тождественно нулю.

Таким образом, наша теорема доказана. Аналогия ее с результатом, полученным во второй части [2] работы для смешанных объемов, очевидна. Здесь положительно определенные формы играют ту же роль, какую играли там аналогичные многогранники. Поэтому точно так же, как это было сделано для смешанных объемов, можно из неравенства

$$D(f_1, \ldots, f_n)^2 \geqslant D(f_1, \ldots, f_{n-1}, f_{n-1})\, D(f_1, \ldots, f_{n-2}, f_n, f_n) \tag{24}$$

между смешанными дискриминантами положительно определенных форм получить два следствия:

1. Пусть $f_1, \ldots, f_{n-m}, f^{(0)}, f^{(1)}$ — данные положительно определенные формы n переменных и $f^{(\vartheta)} = (1-\vartheta) f^{(0)} + \vartheta f^{(1)}$. Положим

$$D(\vartheta) = D(f^{(\vartheta)}, \ldots, f^{(\vartheta)}, f_1, \ldots, f_{n-m}). \tag{25}$$

Имеет место неравенство

$$\sqrt[m]{D(\vartheta)} \geqslant (1-\vartheta)\, \sqrt[m]{D(0)} + \vartheta\, \sqrt[m]{D(1)}, \tag{26}$$

где знак равенства стоит тогда и только тогда, когда формы $f^{(0)}$ и $f^{(1)}$ пропорциональны, т. е. $f^{(0)} = \lambda f^{(1)}$.

2. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — данные положительно определенные формы n переменных. Имеет место неравенство

$$D(f_1, \ldots, f_n)^m \geqslant \prod_{k=1}^{m} D(f_k, \ldots, f_k, f_{m+1}, \ldots, f_n), \tag{27}$$

где знак равенства стоит тогда и только тогда, когда все формы $f_1, \ldots, f_m$ друг другу пропорциональны.

В обоих случаях m — любое от 2 до n. В отличие от соответствующих теорем для смешанных объемов здесь указаны условия наличия равенства. Это объясняется, конечно, тем, что нам известно условие равенства в исходном неравенстве (24).

§ 4. *Связь смешанных дискриминантов со смешанными поверхностными функциями и смешанными объемами*

Пусть H — выпуклое тело в n-мерном пространстве с дважды непрерывно дифференцируемой опорной функцией $H(\overline{u})$; $\overline{x}$ — точка на поверхности H и $\overline{n}$ — нормаль в ней. Направим n-ю ось координат по $\overline{n}$, а остальные оси расположим перпендикулярно $\overline{n}$. Координаты вектора $\overline{n}$ будут

$$u_1 = \ldots = u_{n-1} = 0, \quad u_n = 1.$$

При $u_n > 0$, в силу положительной однородности опорной функции, имеем

$$\frac{\partial}{\partial u_k} H(0, \ldots, 0, u_n) = \frac{\partial}{\partial u_k} H(0, \ldots, 0, 1), \tag{1}$$

так как первые производные $H(\overline{u})$ однородные нулевой степени. Поэтому

$$\frac{\partial^2 H(0, \ldots, 1)}{\partial u_k \partial u_n} = \frac{\partial^2 H(\overline{n})}{\partial u_k \partial u_n} = 0. \tag{2}$$

Благодаря этому при нашем выборе системы координат, которую мы будем называть нормальной, второй дифференциал $H(\overline{u})$ при $\overline{u} = \overline{n}$ будет

$$d^2 H(\overline{n}) = \sum_{i,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 H(\overline{n})}{\partial u_k \partial u_i}\, du_i du_k. \tag{3}$$

Известно, что собственные значения этой квадратичной формы суть главные радиусы кривизны поверхности H в точке $\overline{x}$ и главные направления ее совпадают с главными направлениями на поверхности H в точке $\overline{x}$. Поэтому, приведя форму (3) к главным осям, будем иметь

$$d^2 H(\overline{n}) = \sum_{i=1}^{n-1} R_i\, du_i^2, \tag{4}$$

где R_i — главные радиусы кривизны. В силу выпуклости H, все они неотрицательны [6; 8, § 94].

В дальнейшем мы будем неизменно пользоваться нормальной системой координат. Так как тогда второй дифференциал опорной функции любого выпуклого тела представляется в виде (3), то тривиальное нулевое собственное значение его мы будем отбрасывать и считать $d^2 H(\overline{n})$ формой $n-1$ переменных $du_1, du_2, \ldots, du_{n-1}$.

Дискриминант $D(\underbrace{H, \ldots, H}_{n-1}; \overline{n})$ формы $d^2 H(\overline{n})$ (в нормальной системе координат) равен произведению главных радиусов кривизны, как это видно из формулы (4). Поэтому, если $d\omega$ — элемент поверхности единичной сферы, то элемент площади поверхности H

$$dS = R_1 \ldots R_{n-1}\, d\omega = D(H, \ldots, H; \overline{n})\, d\omega. \tag{5}$$

Объем тела H выражается благодаря этому известной формулой

$$V(\underbrace{H, \ldots, H}_{n}) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} H(\overline{n})\, D(H, \ldots, H; \overline{n})\, d\omega, \tag{6}$$

где Ω — полная поверхность единичного шара.

Если тело H есть результат смешения тел $H_1, H_2, \ldots, H_m$, то

$$H(\overline{n}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_i(\overline{n})$$

и

$$d^2 H(\overline{n}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, d^2\, H_i(\overline{n}).$$

В этом случае $D(H, \ldots, H; \overline{n})$ есть однородный многочлен $(n-1)$-й степени относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, а потому объем тела H есть однородный многочлен n-й степени относительно тех же $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$V(H, \ldots, H) \;= \sum_{i_1, \ldots, i_n} \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}\, V(H_{i_1}, \ldots, H_{i_n}), \tag{7}$$

где индексы $i_1, \ldots, i_n$ независимо пробегают все значения от 1 до m. Коэффициенты $V(H_{i_1}, \ldots, H_{i_n})$ определяются так, что они не зависят от порядка индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Это и есть смешанные объемы тел $H_1, \ldots, H_m$.

Пусть H и H_n — два заданных выпуклых тела. Объем тела $H + \lambda H_n$ равен

$$V(H + \lambda H_n, \ldots, H + \lambda H_n) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m\, C_n^m\, V(\underbrace{H, \ldots, H}_{n-m}, \underbrace{H_n, \ldots, H_n}_{m}). \tag{8}$$

Построение тела $H + \lambda H_n$ состоит в смещении опорных плоскостей тела H на расстояния λH_n в направлении внешней нормали. ($H_n(\overline{n})$ — расстояние от начала до опорной плоскости с внешней нормалью $\overline{n}$ к телу H_n.) Если λ

бесконечно мало, то вариация объема тела H будет при этом равна, как известно,

$$\int_{\Omega} H_n(\overline{n})\, dS = \int_{\Omega} H_n(\overline{n})\, D(H, \ldots, H; \overline{n})\, d\omega. \tag{9}$$

С другой стороны, из формулы (8) следует, что она равна $nV(H_n, H, \ldots, H)$. Поэтому

$$V(H_n, H, \ldots, H) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H_n(\overline{n})\, D(H, \ldots, H; \overline{n})\, d\omega. \tag{10}$$

Если $H = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i H_i$, то, с одной стороны [3)],

$$V(H_n, H, \ldots, H) = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_{n-1}}\, V(H_n, H_{i_1}, \ldots, H_{i_{n-1}}), \tag{11}$$

а с другой —

$$D(H, \ldots, H; \overline{n}) = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \lambda_i \ldots \lambda_{i_{n-1}}\, D(H_{i_1}, \ldots, H_{i_{n-1}}; \overline{n}), \tag{12}$$

где $D(H_{i_1}, \ldots, H_{i_{n-1}}; \overline{n})$ — смешанный дискриминант форм

$$d^2 H_{i_1}(\overline{n}), \ldots, d^2 H_{i_{n-1}}(\overline{n}).$$

Поэтому, сравнивая коэффициенты при произведении $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ в формуле (10), куда подставлены выражения (11) и (12), получим

$$V(H_n, H_1, \ldots, H_{n-1}) = \frac{1}{n} \int_{\Omega} H_n(\overline{n})\, D(H_1, \ldots, H_{n-1}; \overline{n})\, d\omega. \tag{13}$$

Однако по определению смешанного объема он не зависит от порядка входящих в него тел, так что, например,

$$V(H_1, \ldots, H_n) = V(H_n, H_1, \ldots, H_{n-1}).$$

---

3) Для получения этого разложения достаточно в (8) взять $H = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i H_i$ и, разложив $V(H + \lambda H_n, \ldots, H + \lambda H_n)$ по общей формуле (7), сравнить коэффициенты при λ.

Поэтому в нашем выводе мы могли вместо H_n взять H_1, а H положить равным $\sum\limits_{i=2}^{n} \lambda_i H_i$; тогда получилось бы

$$V(H_1, \dots, H_n) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} H_1(\overline{n})\, D(H_2, \dots, H_n; \overline{n})\, d\omega. \tag{14}$$

Из сравнения формул (13) и (14) следует, что в выражении (14) для смешанного объема тела можно произвольно переставлять.

Пусть $Z(\overline{u})$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая и положительно-однородная первой степени функция векторов $\overline{u}$. Пусть $d^2 Z(\overline{n})$ — ее второй дифференциал в нормальной системе координат, взятый для единичного вектора $\overline{n}$. Пусть $D(Z, \dots, Z; \overline{n})$ — дискриминант $d^2 Z(\overline{n})$. Определив «объем $Z(\overline{u})$» как

$$\frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n})\, D(Z, \dots, Z; \overline{n})\, d\omega$$

и рассмотрев линейные комбинации таких функций

$$\sum \lambda_i Z_i(\overline{u}),$$

можно точно так же, как для опорных функций выпуклых тел, ввести «смешанный объем» $V(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ и показать, что

$$V(Z_1, \dots, Z_n) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z_1(\overline{n}) D(Z_2, \dots, Z_n; \overline{n}) d\omega, \tag{15}$$

где $D(Z_2, \dots, Z_n; \overline{n})$ — смешанный дискриминант вторых дифференциалов

$$d^2 Z_2(\overline{n}), \dots, d^2 Z_n(\overline{n})$$

в нормальной системе координат. В формуле (15) функции

$$Z_1(\overline{n}), \dots, Z_n(\overline{n})$$

можно произвольно переставлять.

§ 5. Единственность выпуклого тела с данной функцией кривизны

Функцией кривизны (в обычном смысле) называется элементарно симметрическая функция главных радиусов кривизны. Пусть H — данное выпуклое тело с дважды дифференцируемой опорной функцией и E — единичный шар. Из формулы (4) § 4 и из определения смешанных дискриминантов непосредственно следует, что элементарно-симметрическая функция степени m главных радиусов кривизны тела H, т. е. его m-я функция кривизны, равна $C_{n-1}^{m}\, D(\underbrace{H,\ldots,H}_{m}, E,\ldots,E;\overline{n})$. Она рассматривается как функция внешней нормали $\overline{n}$ к поверхности H [6, § 8].

Теорема. *Если два выпуклых тела с дважды непрерывно дифференцируемыми опорными функциями и нигде не равными нулю главными радиусами кривизны имеют одинаковые функции кривизны данного порядка, то эти тела равны и параллельно расположены.*

Пусть H_1 и H_2 — два тела, удовлетворяющие условиям теоремы, и пусть они имеют равные функции кривизны первого порядка, так что

$$D(H_1, E,\ldots,E;\overline{n}) = D(H_2, E,\ldots,E;\overline{n}). \tag{1}$$

Положим $H_1(\overline{u}) - H_2(\overline{u}) = Z(\overline{u})$, где $H_1(\overline{u})$ и $H_2(\overline{u})$ — опорные функции тел H_1 и H_2. Тогда $d^2Z(\overline{n}) = d^2H_1(\overline{n}) - d^2H_2(\overline{n})$ и по свойству смешанных дискриминантов, указанному в § 1,

$$D(Z, E,\ldots E;\overline{n}) = 0. \tag{2}$$

В силу общего неравенства между смешанными дискриминантами отсюда следует, что

$$D(Z, Z, E,\ldots,E;\overline{n}) \leqslant 0, \tag{3}$$

и равно нулю тогда и только тогда, когда $d^2Z(\overline{n})$ тождественно исчезает.

Умножая (2) на $Z(\overline{n})$ и интегрируя по поверхности единичного шара, получим

$$\int\limits_{\Omega} E(\overline{n})\, D(Z, Z, E,\ldots,E;\overline{n})\, d\omega = 0. \tag{4}$$

Точно так же, умножая (3) на $E(\overline{n}) = 1$, т. е. на опорную функцию единичного шара, получим

$$\int\limits_{\Omega} E(\overline{n})\, D(Z, Z, E,\ldots,E;\overline{n})\, d\omega \leqslant 0 \tag{5}$$

и равно нулю тогда и только тогда, когда в (3) стоит знак равенства для всех $\overline{n}$.

Однако (см. § 4) интегралы (4) и (5) равны, поэтому в (3) стоит знак равенства и $d^2 Z(\overline{n})$ тождественно исчезает для всех $\overline{n}$. В силу положительной однородности первой степени функции $Z(\overline{n})$, отсюда следует, что она линейная, т. е.

$$Z(\overline{u}) = \overline{a}\,\overline{u}, \tag{6}$$

где $\overline{a}$ — постоянный вектор, а это и есть то слагаемое, которое приобретает опорная функция выпуклого тела при переносе его на вектор $\overline{a}$. Следовательно, тела H_1 и H_2 равны и параллельно расположены.

Пусть теперь тела H_1 и H_2 имеют равные функции кривизны порядка m, так что

$$D(\underbrace{H_1, \dots, H_1}_{m}, E, \dots, E; \overline{n}) = D(\underbrace{H_2, \dots, H_2}_{m}, E, \dots, E; \overline{n}). \tag{7}$$

Имея в виду смысл этих выражений как смешанных дискриминантов положительно определенных форм (потому что по условию главные радиусы кривизны тел H_1 и $H_2 > 0$), мы можем написать неравенство

$$D(H_1, \underbrace{H_2, \dots, H_2}_{m-1}, E, \dots, E; \overline{n})^m \geqslant$$
$$\geqslant D(\underbrace{H_1, \dots, H_1}_{m}, E, \dots, E; \overline{n}) D(\underbrace{H_2, \dots, H_2}_{m}, E, \dots, E; \overline{n})^{m-1}, \tag{8}$$

которое является частным случаем общего неравенства (27) § 3. Из неравенства (8), благодаря равенству (7), следует, что

$$D(H_1, H_2, \dots, H_2, E, \dots, E; \overline{n}) \geqslant D(H_1, \dots, H_1, E, \dots, E; \overline{n}). \tag{9}$$

Можно, конечно, считать, что начало находится внутри тела H_2, так что $H_2(\overline{n}) > 0$.

Умножая неравенство (9) на $H_2(\overline{n})$ и интегрируя по поверхности единичного шара, мы получим, в силу формулы (14) § 4,

$$V(H_1, \underbrace{H_2, \dots, H_2}_{m}) \geqslant V(H_2, H_1, \dots, H_1, E, \dots, E). \tag{10}$$

Но так как тела H_1 и H_2 играют совершенно одинаковую роль, то должно иметь место также и обратное неравенство. Следовательно, здесь стоит знак равенства. Поэтому знак равенства должен стоять в неравенстве (8) для всех $\overline{n}$. На основании замечания в конце § 3 следует, что $d^2 H_1(\overline{n})$ и

$d^2H_2(\overline{n})$ пропорциональны, а так как, кроме того, имеет место исходное равенство (7), то для всех $\overline{n}$

$$d^2H_1(\overline{n}) = d^2H_2(\overline{n}).$$

Отсюда непосредственно следует, что тела H_1 и H_2 равны и параллельно расположены.

Заметим, что доказательство теоремы Минковского о единственности выпуклого тела с данной гауссовой кривизной проводится по нашему методу особенно просто, так как необходимое в этом случае неравенство между смешанными дискриминантами легко получается непосредственно.

Действительно, пусть f и g — две положительно определенные квадратичные формы. Их можно одновременно привести к каноническому виду, так что

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, x_i^2, \qquad g = \sum_{i=1}^{n-1} b_i\, x_i^2,$$

а

$$D(\underbrace{f, \dots, f}_{n-1}) = a_1 a_2 \dots a_{n-1}, \qquad D(\underbrace{g, \dots, g}_{n-1}) = b_1 b_2 \dots b_{n-1}. \tag{11}$$

Поэтому неравенство

$$D(g, \underbrace{f, \dots, f}_{n-2})^{n-1} \geqslant D(\underbrace{f, \dots, f}_{n-1})^{n-2}\, D(\underbrace{g, \dots, g}_{n-1}) \tag{12}$$

непосредственно следует из того известного факта, что при заданном произведении $(b_1/a_1)(b_2/a_2)\dots(b_{n-1}/a_{n-1})$ сумма $\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i/a_i$ достигает минимума при равенстве всех чисел b_i/a_i.

Если у двух выпуклых тел H_1 и H_2 в точках с параллельными внешними нормалями произведения главных радиусов кривизны равны, то имеем

$$D(H_1, \dots, H_1; \overline{n}) = D(H_2, \dots, H_2; \overline{n}), \tag{13}$$

а применяя неравенство (12), получим

$$D(H_2, H_1, \dots, H_1; \overline{n}) \geqslant D(H_2, \dots, H_2; \overline{n}) \tag{14}$$

и, умножая на $H_1(\overline{n})$ и интегрируя,

$$V(H_2, H_1, \dots, H_1) \geqslant V(H_1, H_2, \dots, H_2), \tag{15}$$

после чего повторяем уже приведенное простое рассуждение.

Может быть, заслуживает внимания тот факт, что приведенное доказательство теоремы о единственности выпуклого тела с данной функцией кривизны в трехмерном случае формально совпадает с известным доказательством жесткости замкнутых выпуклых поверхностей, данным В. Бляшке. Действительно, если H — опорная функция такой поверхности, а Z — «опорная» функция соответствующей диаграммы вращений, то [4)]

$$D(H, Z; \overline{n}) = 0. \tag{16}$$

Вместе с тем, если у двух трехмерных выпуклых тел равны первые функции кривизны (суммы главных радиусов кривизны), то разность Z их опорных функций удовлетворяет уравнению

$$D(E, Z; \overline{n}) = 0, \tag{17}$$

где E — единичный шар. Поэтому теорема Кристоффеля формально совпадает с теоремой о жесткости шара.

Если же у двух трехмерных выпуклых тел H_1 и H_2 равны вторые функции кривизны (обратные гауссовы кривизны), т. е.

$$D(H_1, H_1; \overline{n}) = D(H_2, H_2; \overline{n}), \tag{18}$$

то, полагая

$$H_1(\overline{n}) + H_2(\overline{n}) = H(\overline{n}), \quad H_1(\overline{n}) - H_2(\overline{n}) = Z(\overline{n}),$$

получим

$$D(H, Z; \overline{n}) = 0, \tag{19}$$

а это и есть уравнение, которому удовлетворяет опорная функция диаграммы вращений при изгибании поверхности H.

§ 6. *Доказательство основного неравенства между смешанными объемами по методу Гильберта*

Неравенство между смешанными объемами, которое мы называем основным, имеет вид

$$V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z)^2 \geqslant V(H_1, \ldots, H_{n-1}, H_{n-1})\, V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z), \tag{1}$$

[4)] «Опорная» функция диаграммы вращений задает расстояния от начала до касательных плоскостей [5, с. 250–266; 9, с. 607–610].

где $H_1, \ldots, H_{n-1}$ — выпуклые тела в n-мерном пространстве, а Z — разность опорных функций выпуклых тел [5)].

Однако известно, что всякое выпуклое тело можно сколь угодно точно аппроксимировать выпуклым телом с аналитической опорной функцией и с нигде не равными нулю главными радиусами кривизны (такое тело мы будем называть регулярным). Поэтому основное неравенство (1) достаточно доказать для того случая, когда тела $H_1, \ldots, H_{n-1}$ регулярны, а функция Z — аналитическая.

Совершенно аналогично тому, как это было сделано при выводе неравенства между смешанными дискриминантами (или при выводе основного неравенства между смешанными объемами аналогичных многогранников во второй части этой работы), установление неравенства (1) может быть сведено к следующей теореме.

Теорема. *Пусть $H_1, \ldots, H_{n-1}$ — регулярные выпуклые тела и $Z(\overline{u})$ — дважды непрерывно дифференцируемая и положительно-однородная первой степени функция векторов $\overline{u}$, удовлетворяющая условию*

$$V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z) = 0. \tag{2}$$

Тогда

$$V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z) \leqslant 0 \tag{3}$$

и равно нулю тогда и только тогда, когда $Z(\overline{u})$ есть опорная функция точки (т. е. $Z(\overline{u}) = \overline{a}\,\overline{u}$).

Идея Д. Гильберта состоит в сведении доказательства этой теоремы к решению задачи об экстремумах функционала

$$V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Z(\overline{n})\, D(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; \overline{n})\, d\omega \tag{4}$$

при дополнительном условии

$$\frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} \frac{D(H_1, \ldots, H_{n-1}; \overline{n})}{H_{n-1}(\overline{n})}\, Z^2(\overline{n})\, d\omega = 1. \tag{5}$$

При этом без ограничения общности предполагается, что начало находится внутри тел $H_1, \ldots, H_{n-1}$, так что $H_1(\overline{n}), \ldots, H_{n-1}(\overline{n}) > 0$. Вместе с тем, благодаря положительности вторых дифференциалов

$$d^2 H_1(\overline{n}), \ldots, d^2 H_{n-1}(\overline{n}),$$

[5)]Это неравенство впервые доказано В. Фенхелем [10, с. 647] и независимо мною [11].

их смешанный дискриминант положителен, а потому

$$\frac{D(H_1, \ldots, H_{n-1}; \overline{n})}{H_{n-1}(\overline{n})} > 0. \tag{6}$$

Характер поставленной вариационной задачи выясняется из следующего предложения.

Лемма I. $D(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; \overline{n})$ *есть линейное самосопряженное дифференциальное выражение второго порядка эллиптического типа на единичной сфере от функции* $Z(\overline{n})$.

Самосопряженность указанного выражения следует из того установленного в § 4 факта, что в выражении «смешанного объема»

$$V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Y, Z) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} Y(\overline{n})\, D(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; \overline{n})\, d\omega \tag{7}$$

функции $Z(\overline{n})$ и $Y(\overline{n})$ можно менять местами. То, что рассматриваемое выражение — дифференциальное второго порядка и линейное, непосредственно следует из его определения как смешанного дискриминанта вторых дифференциалов $d^2H_1, \ldots, d^2H_{n-2}, d^2Z$. Остается доказать, что $D(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; \overline{n})$ — эллиптического типа. Для этого возьмем в произвольной точке $\overline{n}_0$ на единичной сфере нормальную систему координат. $D(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; \overline{n}_0)$ есть смешанный дискриминант форм

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 H_1(\overline{n}_0)}{\partial u_i \partial u_k}\, du_i du_k \quad, \ldots, \sum_{i,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 Z(\overline{n}_0)}{\partial u_i \partial u_k}\, du_i du_k.$$

В § 2 было показано, что можно так выбрать оси координат $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, что получится

$$D(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; \overline{n}_0) = \sum D(H_1, \ldots, H_{n-2}; \overline{n}_0)_{ii}\, \frac{\partial^2 Z(\overline{n}_0)}{\partial u_i^2}, \tag{8}$$

где выражения $D(H_1, \ldots, H_{n-2}; \overline{n}_0)_{ii}$ имеют тот же смысл, что и выражения $D(f_1, \ldots, f_{n-1})_{ii}$ в § 2. Поэтому

$$D(H_1, \ldots, H_2; \overline{n}_0)_{ii} > 0, \tag{9}$$

так как вторые дифференциалы $d^2H_1(\overline{n}_0), \ldots, d^2H_{n-2}(\overline{n})$ — положительно определенные формы.

Положим $r = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$ и примем за переменные на единичной сфере в окрестности выбранной точки $\overline{n}_0$ $\quad \xi_1 = u_1, \ldots, \xi_{n-1} = u_{n-1}$. В точке $\overline{n}_0$ $\quad r = 1$, $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = 0$. В силу однородности $Z(\overline{u})$

$$\frac{\partial Z(\overline{u})}{\partial r} = Z(\overline{n}).$$

Вместе с тем

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u_i} = 1, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial u_k} = 0 \quad (i \neq k).$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 Z(\overline{n}_0)}{\partial u_i^2} = \frac{\partial^2 Z(\overline{n}_0)}{\partial \xi_i^2} + \ldots, \tag{10}$$

где точками отмечены уже несущественные для нас члены, не содержащие вторых производных. Таким образом, благодаря положительности коэффициентов, мы убеждаемся в эллиптическом характере выражения

$$D(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; \overline{n}).$$

Теперь, когда лемма доказана, видно, что поставленная вариационная задача приводит к проблеме собственных значений и собственных функций самосопряженного линейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа:

$$D(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; \overline{n}) + \lambda \frac{D(H_1, \ldots, H_{n-1}; \overline{n})}{H_{n-1}(\overline{n})} Z(\overline{n}) = 0. \tag{11}$$

Как показывает общая теория такого рода уравнений, уравнение (11) имеет замкнутую систему собственных функций и лишь конечное число отрицательных собственных значений [6].

Лемма II. *Уравнение* (11) *имеет собственное значение* $\lambda = 0$, *которому принадлежат собственные функции* $Z(\overline{n}) = \overline{a}\,\overline{n}$, *являющиеся опорными функциями точек.*

Действительно, пусть

$$D(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z; \overline{n}) = 0, \tag{12}$$

тогда

$$D(H_1, \ldots, H_{n-3}, Z, Z; \overline{n}) \leqslant 0. \tag{13}$$

[6] Развитый в [7, гл. 18] «метод параметрисы» распространим на уравнения на n-мерной сфере.

Умножая на $H_{n-2}(\overline{n}) > 0$ (начало находится внутри тела H_{n-2}) и интегрируя по поверхности единичной сферы, получим

$$V(H_1, \ldots, H_{n-2}, Z, Z) \leqslant 0. \tag{14}$$

Вместе с тем, умножая (12) на $Z(\overline{n})$ и точно так же интегрируя, получим, что в этом неравенстве стоит знак равенства. Следовательно, знак равенства стоит и в неравенстве (13). По теореме § 3 отсюда следует, что $d^2 Z(\overline{n})$ тождественно исчезает, а потому положительно-однородная первой степени функция $Z(\overline{u})$ линейна.

Лемма III. *Уравнение* (11) *имеет единственное отрицательное собственное значение* $\lambda = -1$ *с собственной функцией* $Z(\overline{n}) = H_{n-1}(\overline{n})$.

То, что при $\lambda = -1$ $H_{n-1}(\overline{n})$ действительно удовлетворяет уравнению (11), совершенно очевидно. Нужно доказать единственность этого отрицательного собственного значения. Для этого рассмотрим уравнение

$$D(E, \ldots, E, Z; \overline{n}) + \lambda Z(\overline{n}) = 0, \tag{15}$$

которое представляет собой не что иное, как уравнение Лапласа на сфере, а потому его собственными функциями являются шаровые функции на n-мерной сфере [7]. Поэтому, как известно, уравнение (15) имеет единственное отрицательное собственное значение $\lambda = -1$ с собственной функцией $Z(\overline{n}) = 1$. Построим семейство тел $H_1^{\vartheta} = (1 - \vartheta)E + \vartheta H_1, \ldots, H_{n-1}^{\vartheta} = (1 - \vartheta)E + \vartheta H_{n-1}$. Когда ϑ растет от 0 до 1, уравнение (15) переходит в уравнение (11), проходя ряд уравнений того же типа:

$$D(H_1^{\vartheta}, \ldots, H_{n-2}^{\vartheta}, Z; \overline{n}) + \lambda \frac{D(H_1^{\vartheta}, \ldots, H_{n-1}^{\vartheta}; \overline{n})}{H_{n-1}^{\vartheta}(\overline{n})} Z(\overline{n}) = 0. \tag{16}$$

При таком переходе собственные значения меняются непрерывно, а так как по лемме II кратность собственного значения $\lambda = 0$ всегда одна и та же (равна n), то число отрицательных собственных значений и их кратность не увеличиваются. Тем самым лемма доказана.

Из лемм II и III формулированная выше теорема вытекает непосредственно. Действительно, условие

$$V(H_1, \ldots, H_{n-1}, Z) = 0,$$

---

[7] В нормальной системе координат $D(E, \ldots, E, Z; \overline{n}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 Z(\overline{n})}{\partial u_i^2}$ (см. [6, § 8] или [2, § 7]). $D(E, \ldots, E; \overline{n}) = 1$, $E(\overline{n}) = 1$.

которое можно переписать в виде

$$\frac{1}{n}\int\limits_{\Omega}\frac{D(H_1,\ldots,H_{n-1};\overline{n})}{H_{n-1}(\overline{n})}\,H_{n-1}(\overline{n})\,Z(\overline{n})\,d\omega=0, \tag{17}$$

выражает «нагруженную» ортогональность допустимых функций $Z(\overline{n})$ к собственной функции $H_{n-1}(\overline{n})$ единственного отрицательного собственного значения уравнения (11). Значит, при условии (2)

$$V(H_1,\ldots,H_{n-1},Z,Z)\leqslant 0,$$

так как собственные значения уравнения (11) суть взятые с обратным знаком экстремумы этого функционала. Знак равенства в неравенстве (3) стоит только тогда, когда $Z(\overline{n})$ — собственная функция, относящаяся к собственному значению нуль, т. е. тогда и только тогда, когда $Z(\overline{n})=\overline{a}\,\overline{u}$.

§ 7. *О знаке равенства в обобщенном неравенстве Брунна*

Настоящий параграф теснейшим образом примыкает к § 7 второй части этой работы [2]. Там были доказаны две теоремы, одна — о знаке равенства в некоторых обобщениях неравенства Брунна и другая — об однозначной определяемости выпуклого тела заданием его функции кривизны, рассматриваемой в смысле нашего общего определения как функция области на единичной сфере. В этих теоремах роль основного тела (Eichkörper) играл единичный шар. Здесь же за основные тела мы примем произвольные регулярные выпуклые тела и речь будет идти об «относительных» функциях и интегралах кривизны. Доказательство получаемого таким образом обобщения двух указанных теорем использует, по существу, те же рассуждения, а потому мы будем, там где это возможно, непосредственно ссылаться на рассуждения, приведенные в § 7 части II [2]. Все рассмотрения относятся, как всегда, к n-мерному пространству. Пусть $E_1,E_2,\ldots,E_{n-2}$ — регулярные выпуклые тела.

Теорема I. *Если для двух не менее чем m-мерных выпуклых тел H_0 и H_1 выполняется равенство*

$$F(H_0,\ldots,H_0,E_1,\ldots,E_{n-m};\omega)=F(H_1,\ldots,H_1,E_1,\ldots,E_{n-m};\omega), \tag{1}$$

то эти тела равны и параллельно расположены.

Теорема II. *В неравенстве*

$$\sqrt[m]{V(H_0,\ldots,H_0,E_1,\ldots,E_{n-m})}\geqslant(1-\vartheta)\,\sqrt[m]{V(H_0,\ldots,H_0,E_1,\ldots,E_{n-m})}+\\+\vartheta\,\sqrt[m]{V(H_1,\ldots,H_1,E_1,\ldots,E_{n-m})}, \tag{2}$$

где H_0 и H_1 — не менее чем m-мерные выпуклые тела и $H_\vartheta = (1-\vartheta)H_0 + \vartheta H_1$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$, знак равенства стоит тогда и только тогда, когда H_0 и H_1 гомотетичны.

Равносильность этих двух теорем доказывается точно так же, как равносильность двух теорем, полученных в § 7 части II [2]. Поэтому так же, как и там, имеет место

Лемма I. *Если*

$$F(H_0, \ldots, H_0, E_1, \ldots, E_{n-m}; \omega) = F(H_1, \ldots, H_1, E_1, \ldots, E_{n-m}; \omega), \tag{3}$$

то для всех тел

$$H_\vartheta = (1-\vartheta)H_0 + \vartheta H_1$$

также будет

$$F(H_\vartheta, \ldots, H_\vartheta, E_1, \ldots, E_{n-m}; \omega) = F(H_1, \ldots, H_1, E_1, \ldots, E_{n-m}; \omega). \tag{4}$$

При доказательстве леммы IV § 7 части II (верность теоремы I для первых функций кривизны) для нас было существенно, что уравнение

$$D(E, \ldots, E, Z; \overline{n}) + \lambda Z(\overline{n}) = 0 \tag{5}$$

имеет замкнутую систему собственных функций и что собственному значению нуль соответствуют собственные функции $Z(\overline{n}) = \overline{a}\,\overline{n}$, представляющие параллельный перенос.

Однако при тех условиях, которые наложены на тела $E_1, \ldots, E_{n-2}$, уравнение

$$D(E_1, \ldots, E_{n-2}, Z; \overline{n}) + \lambda\, D(E_1, \ldots, E_{n-2}, E; \overline{n})\, Z(\overline{n}) = 0 \tag{6}$$

также имеет замкнутую систему собственных функций $Z_l(\overline{n})$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$\int\limits_\Omega D(E_1, \ldots, E_{n-2}, E; \overline{n})\, Z_l(\overline{n})\, Z_k(\overline{n})\, d\omega = 0 \qquad (l \neq k). \tag{7}$$

Точно так же собственному значению $\lambda = 0$ соответствуют собственные функции $\overline{a}\,\overline{n}$, представляющие параллельный перенос (см. § 5 и 6). Поэтому рассуждения, приведшие к доказательству леммы IV § 7 части II, сохраняют силу и можно утверждать:

Лемма II. *Если*

$$F(H_0, E_1, \ldots, E_{n-2}; \omega) = F(H_1, E_1, \ldots, E_{n-2}; \omega), \tag{8}$$

то тела H_0 и H_1 равны и параллельно расположены.

Остается обобщить рассуждение по индукции, которое привело в конце § 7 части II [2] к доказательству обеих теорем.

Из леммы II § 5 части II (см. формулу (1)) вытекает, что если все тела $H_\vartheta = (1-\vartheta)H_0 + \vartheta H_1$ имеют равные m-е «относительные» функции кривизны, то m-е «относительные» интегралы кривизны их проекций в одинаковых направлениях тоже равны. Считая теорему II верной для $(n-1)$-мерного пространства, получим отсюда, что проекции тел H_0 и H_1 при одинаковых направлениях проектирования равны и параллельно расположены. Вспоминая лемму I § 5 части II, видим, что и сами тела H_0 и H_1 равны и параллельно расположены.

Можно сделать еще один шаг в направлении обобщения двух доказанных теорем в духе относительной дифференциальной геометрии Минковского. Можно вместо поверхностной функции, определенной по отношению к единичному шару, рассматривать поверхностную функцию, определенную относительно не вырождающегося выпуклого тела E_{n-1} с началом внутри. Такая относительная поверхностная функция тела H определяется из условия

$$V(Z, H, \ldots, H) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} \frac{Z(\overline{n})}{E_{n-1}(\overline{n})} F_{E_{n-1}(\overline{n})}(H, \ldots, H;\, d\omega), \tag{9}$$

т. е.

$$F_{E_{n-1}}(H, \ldots, H;\, \omega) = \int\limits_{\Omega} E_{n-1}(\overline{n})\, F(H, \ldots, H;\, d\omega). \tag{10}$$

Тогда можно будет определить относительные функции кривизны

$$F_{E_{n-1}}(H, \ldots, H,\, E_1, \ldots, E_{n-m};\, \omega)$$

и доказать, что задание какой-нибудь из них определяет выпуклое тело с точностью до параллельного переноса. Это можно получить, опираясь на уже доказанные теоремы.

Статья поступила в редакцию
8.VII.1937

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. I: Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 5. С. 947–970.
2. *Александров А. Д.* То же. II: Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 6. С. 1205–1235.
3. *Александров А. Д.* То же. III: Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 1. С. 27–44.
4. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd 57. S. 447–495.

5. *Weyl H.* Über die Starrheit der Eiflächen und konvexer Polyeder // Berl. Ber. 1917. S. 250–266.
6. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer. 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)
7. *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig: Teubner, 1924.
8. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
9. *Blaschke W.* Ein Beweis für die Unverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen // Gött. Nachr. 1912. S. 607–610.
10. *Fenchel W.* Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes // C. R. Acad. Sci., Paris. 1936. T. 203. P. 647–650.
11. *Александров А. Д.* Новые неравенства для объемов выпуклых тел // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 4. С. 155–157.

О поверхностной функции выпуклого тела: Замечание к работе «К теории смешанных объемов выпуклых тел» [1)]

Математический сборник. 1939. Т. 6, № 1. С. 167–173

В своей работе «К теории смешанных объемов выпуклых тел» [1] я ввел поверхностную функцию выпуклого тела H $F(H,\omega)$. По определению $F(H,\omega)$ есть площадь множества на поверхности H, состоящего из точек, через которые проходят опорные плоскости с внешними нормалями, идущими в множество ω на единичной сфере Ω, если их отложить из ее центра. В той же работе было доказано, что $F(H,\omega)$ есть вполне аддитивная функция множества ω. Было установлено, что смешанный объем тела H и любого выпуклого тела L представляется как интеграл Радона по всей сфере Ω:

$$V(L,\underbrace{H,\ldots,H}_{n-1}) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} L(\overline{n})F(H,d\omega). \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем n — число измерений пространства; $\overline{n}$ — единичная нормаль, или, если угодно, точка на сфере Ω; $L(\overline{n})$ — опорная функция тела L. На этом предложении основаны в большой степени понятия о смешанных поверхностных функциях и приложения этих понятий к задачам теории смешанных объемов.

Однако, как уже отмечалось в [1], указанное предложение доказано мною посредством хотя, по существу, и тривиальных, но довольно громоздких в вычислительном отношении рассуждений. Более того, в опубликованный мною вывод вкрался досадный пропуск: на с. 958 [2)] работы [1] нужна еще одна оценка. Правда, пропуск этот очевиден, и его легко восполнить. Вместе с тем вскоре после опубликования [1] появилась работа В. Фенхеля и Б. Ессена [5], приходящая, по существу, к тем же результатам, но в обратном порядке. Именно эти авторы определяют поверхностную функцию

[1)] Эта работа состоит из четырех частей, появившихся последовательно в Математическом сборнике [1–4]. Настоящая заметка теснейшим образом примыкает к [1].

[2)] С. 958 статьи [1] соответствует с. 43 настоящего издания. — *Прим. ред.*

как такую вполне аддитивную функцию множества ω, через которую смешанный объем выражается формулой (1). Уже в заключение своей работы В. Фенхель и Б. Ессен показывают, что определенная таким образом поверхностная функция дает площадь (в смысле определения Минковского) множества на теле H, имеющего сферическое изображение ω. Все перечисленные обстоятельства, как мне кажется, делают далеко не бесполезным то существенное улучшение моего пути рассуждений, которое я даю в настоящей заметке. Хотя все результаты, получаемые здесь, по существу, уже получены мною (а также В. Фенхелем и Б. Ессеном), но тем не менее путь, которым они получаются здесь, представляется мне, безусловно, более простым и изящным и ближе подходящим к существу дела.

Пусть H — выпуклое тело с внутренними точками; O — точка внутри него; $\overline{r}$ — переменный единичный вектор, исходящий из O. Расстояние от точки O до точек на поверхности Σ тела H есть функция направления $\overline{r}$, $R(\overline{r})$.

Если τ — измеримое множество векторов $\overline{r}$ (или точек на соответствующей единичной сфере T), то площадь $F(\sigma)$ соответствующего множества σ на Σ представляется обычным образом в виде [1, § 1]

$$F(\sigma) = \int\limits_{\tau} \frac{R(\overline{r})^{n-1}}{\cos\varphi(\overline{r})} F(d\tau), \tag{2}$$

где $\varphi(\overline{r})$ — угол, образуемый вектором $\overline{r}$ с нормалью $\overline{n}$ в соответствующей точке на Σ (если точка особенная, то берется нормаль к любой из опорных плоскостей, проходящих через эту точку); $F(\tau)$ — площадь множества τ. Множество тех точек на Σ, где есть более одной нормали (более одной опорной плоскости), имеет меру нуль [6]. Так как множество тех $\overline{r}$, для которых $\varphi(\overline{r})$ разрывна (или, если угодно, не однозначна), имеет меру нуль, то интеграл (2) можно трактовать как обыкновенный риманов интеграл.

Лемма I. *Пусть $f(\overline{n})$ — непрерывная функция на сфере Ω и тело H содержит точку O внутри, тогда*

$$\int\limits_{\Omega} f(\overline{n}) F(H, d\omega) = \int\limits_{\Sigma} f(\overline{n}(\overline{r}))\, F(d\sigma) = \int\limits_{T} f(\overline{n}(\overline{r}))\, \frac{R(\overline{r})^{n-1}}{\cos\varphi(\overline{r})} F(d\tau). \tag{3}$$

Здесь $f(\overline{n}(\overline{r}))$ разрывна для тех $\bar{r}$, которым соответствуют точки на Σ более чем с одной нормалью. Эти соотношения — очевидные следствия определений входящих в них интегралов.

Зададим $\varepsilon > 0$ и разобьем промежуток между $\min f(\overline{n})$ и $\max f(\overline{n})$ на промежутки $< \varepsilon/F(H,\Omega)$ ($F(H,\Omega) = F(\Sigma)$ есть площадь всей поверхности

Σ тела H). Пусть f_i — какое-нибудь число в i-м промежутке и ω_i — множество, на котором $f(\overline{n})$ принимает значения, лежащие в i-м промежутке. Тогда по определению интеграла Лебега — Радона

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(\overline{n})F(H,d\omega) - \sum f_i F(H,\omega_i)\right| < \varepsilon. \tag{4}$$

Каждому множеству ω_i соответствует множество

$$\sigma_i = \sigma(\omega_i)$$

тех точек на Σ, в которых есть нормали, идущие в ω_i. Пересечение любой пары этих множеств имеет меру нуль, так как множество всех точек на Σ, в которых есть более одной нормали, имеет меру нуль.

Поэтому по определению интеграла Лебега

$$\left|\int\limits_{\Sigma} f(\overline{n}(\overline{r}))F(d\sigma) - \sum f_i F(\sigma_i)\right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Вместе с тем по определению поверхностной функции

$$F(\sigma_i) = F(H,\omega_i). \tag{6}$$

Подставляя это в формулу (5) и сравнивая результат с (4), получим

$$\left|\int\limits_{\Omega} f(\overline{n})F(H,d\omega) - \int\limits_{\Sigma} f(\overline{n}(\overline{r}))F(d\sigma)\right| < 2\varepsilon. \tag{7}$$

Так как ε произвольно, то получаем первое из равенств (3). А воспользовавшись формулой (2), сразу получаем и второе из этих равенств.

Лемма II. *Если последовательность выпуклых тел $H_1, H_2, \ldots$ сходится к телу H, то соответствующие поверхностные функции $F(H_k,\omega)$ слабо сходятся к поверхностной функции $F(H,\omega)$, т. еіри всякой непрерывной $f(\overline{n})$*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} f(\overline{n})F(H_k,d\omega) = \int\limits_{\Omega} f(\overline{n})F(H,d\omega). \tag{8}$$

Мы будем различать два случая: 1) тело H содержит внутренние точки; 2) тело H не содержит внутренних точек.

Пусть тело H содержит внутренние точки и O — точка внутри него. Можно предположить, что O лежит также внутри тел $H_1, H_2, \dots$ (Достаточно, в случае надобности, отбросить начало последовательности, если в ней есть тела, не содержащие точки O внутри.) Тогда из (3) видим, что соотношение (8) эквивалентно следующему:

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_T f(\overline{n}_k(\bar r))\,\frac{R_k(\overline{r})^{n-1}}{\cos\varphi(\bar r)}F(d\tau)=\int\limits_T f(\overline{n}(\overline{r}))\,\frac{R(\overline{r})^{n-1}}{\cos\varphi(\overline{r})}F(d\tau). \tag{9}$$

Если тела H_k сходятся к H, то функции $R_k(\overline{r})$ сходятся к $R(\overline{r})$ для всех $\overline{r}$, а $\overline{n}_k(\overline{r})$ сходятся к $\overline{n}(\overline{r})$ почти всюду [3)]. Так как $f(\overline{n})$ непрерывна, то и $f(\overline{n}_k(\overline{r}))$ сходятся к $f(\overline{n}(\overline{r}))$ почти всюду. То же имеет место и для $\cos\varphi_k(\overline{r})$, причем $1/\cos\varphi_k(\overline{r})$ остается ограниченной. Но если подынтегральные функции ограниченно сходятся почти везде, то сходятся и интегралы. Этим формула (9) доказана.

Пусть теперь тело H не имеет внутренних точек. Если площадь его поверхности равна нулю, то предел площадей поверхностей тел H_k тоже равен нулю. Поэтому в данном случае как интеграл в правой части формулы (8), так и предел интегралов в левой ее части равен нулю.

Если же тело H представляет собой плоский кусок, то, смешивая его с отрезком l длины h, перпендикулярным к нему, получим цилиндр H^h. Смешивая тела H_k с таким же отрезком, получим тела́ H_k^h, сходящиеся к H^h. Для них формула (8) уже доказана.

К поверхности тел H_k и H при этом построении прибавляется боковая поверхность цилиндра с образующей l. При достаточно малой длине h отрезка l эта добавка будет сколь угодно малой. Поэтому при достаточно больших k и достаточно малых h будем иметь, с одной стороны,

$$\left|\int\limits_\Omega f(\overline{n})F(H_k^h,d\omega)-\int\limits_\Omega f(\overline{n})F(H^h,d\omega)\right|<\varepsilon \tag{10}$$

и, с другой —

$$\left|\int\limits_\Omega f(\overline{n})F(H_k^h,d\omega)-\int\limits_\Omega f(\overline{n})F(H_k,d\omega)\right|<\varepsilon \tag{11}$$

---

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{n}_k(\overline{r})=\overline{n}(\overline{r})$ для всех $\overline{r}$, для которых $\overline{n}(\overline{r})$ однозначна. Это есть непосредственное следствие леммы: *Если $H_k\to H$ и точки x_k на H_k сходятся к точке x на H, то всякая сходящаяся последовательность нормалей к H_k в точках x_k сходится к нормали к H в точке $\overline{x}$* [1, § 1, лемма 1].

и
$$\left|\int\limits_\Omega f(\overline{n})F(H^h,d\omega)-\int\limits_\Omega f(\overline{n})F(H,d\omega)\right|<\varepsilon. \tag{12}$$
Отсюда
$$\left|\int\limits_\Omega f(\overline{n})F(H_k,d\omega)-\int\limits_\Omega f(\overline{n})F(H,d\omega)\right|<3\varepsilon. \tag{13}$$
В силу произвольности ε, получаем формулу (8).

Теперь мы докажем формулу (1), т. е. покажем, что
$$V(L,H,\ldots,H)=\frac{1}{n}\int\limits_\Omega L(\bar{n})F(H,d\omega).$$

Действительно, если H_k — многогранники, сходящиеся к H; F_{k_i} — площади их граней с нормалями $\overline{n}_{k_i}$, то, как известно (и чрезвычайно легко показать),
$$V(L,H_k,\ldots,H_k)=\frac{1}{n}\sum_i L(\overline{n}_{k_i})F_{k_i}, \tag{14}$$
или, записывая сумму в виде интеграла Радона,
$$V(L,H_k,\ldots,H_k)=\frac{1}{n}\int\limits_\Omega L(\overline{n})F(H_k,d\omega). \tag{15}$$
Известно, что при H_k, сходящихся к H,
$$\lim_{k\to\infty}V(L,H_k,\ldots,H_k)=V(L,H,\ldots,H), \tag{16}$$
а по лемме II, интегралы в формуле (15) сходятся к интегралу в формуле (1). Тем самым формула (1) доказана.

На основании леммы II легко ввести смешанные поверхностные функции. Действительно, если $H_1,H_2,\ldots,H_{n-1}$ — многогранники, то для площадей граней многогранника
$$H=\lambda_1H_1+\lambda_2H_2+\ldots+\lambda_{n-1}H_{n-1}, \tag{17}$$
по известной теореме Минковского, имеем
$$F=\sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}}\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\ldots\lambda_{k_{n-1}}F(H_{k_1},H_{k_2},\ldots,H_{k_{n-1}}). \tag{18}$$

Переходя к написанию в функциях множества, при всякой непрерывной $f(\overline{n})$ будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} f(\overline{n})F(H, d\omega) = \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\ldots\lambda_{k_{n-1}} \int\limits_{\Omega} f(\overline{n})F(H_{k_1}, H_{k_2}, \ldots, H_{k_{n-1}}; d\omega). \quad (19)$$

Если наши многогранники сходятся к данным выпуклым телам, то на основании леммы II заключаем, что формула (19) сохранится при переходе к пределу. Поэтому, если $H_1, \ldots, H_{n-1}$ — любые выпуклые тела и $H = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_{n-1} H_{n-1}$, то

$$F(H, \omega) = \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\ldots\lambda_{k_{n-1}} F(H_{k_1}, H_{k_2}, \ldots, H_{k_{n-1}}; \omega). \quad (20)$$

Стоящие здесь справа функции множества и есть смешанные поверхностные функции взятых выпуклых тел.

Если в формуле (19) вместо $f(\overline{n})$ подставить опорную функцию $H_n(\overline{n})$ выпуклого тела H_n, то на основании формулы (1) слева в ней будет стоять n раз взятый смешанный объем $V(H_n, H, \ldots, H)$. Воспользовавшись обычным представлением его через смешанные объемы тел $H_1, \ldots, H_{n-1}, H_n$, мы получим полином от $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Сравнение коэффициентов с правой частью формулы (19) даст тогда выражение для общего смешанного объема

$$V(H_1, \ldots, H_n) = \frac{1}{n} \int\limits_{\Omega} H_n(\bar{n})F(H_1, \ldots, H_{n-1}; d\omega). \quad (21)$$

Далее уже нетрудно получить все свойства смешанных поверхностных функций [1, теорема § 5].

Если тела $H_1, \ldots, H_{n-1}$, изменяясь, сходятся соответственно к некоторым предельным телам, то при любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ поверхностная функция тела

$$H = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_{n-1} H_{n-1}$$

слабо сходится (по лемме II) к поверхностной функции соответствующего предельного тела. Отсюда заключаем, что и *смешанные поверхностные функции тел* $H_1, \ldots, H_{n-1}$ *слабо сходятся к соответствующим смешанным поверхностным функциям предельных тел.*

Отметим, наконец, что лемма II оказывается полезной при доказательстве существования выпуклого тела с заданной поверхностной функцией [3, 5].

Пусть $F(\omega)$ — данная неотрицательная вполне аддитивная функция множества такая, что

$$\int\limits_{\Omega} \overline{n} F(d\omega) = 0, \tag{22}$$

и при всяком $\overline{n}_0$

$$\int\limits_{\Omega} |\overline{n}_0 \overline{n}| F(d\omega) > \alpha > 0. \tag{23}$$

Нужно показать, что существует выпуклое тело с поверхностной функцией $F(\omega)$.

Берем, следуя методу Минковского, последовательность все более мелких разбиений Ω на множества ω_{ij}, где i — номер разбиения, а j — номер множества в данном разбиении. Пусть центр тяжести нагрузки, даваемой функцией $F(\omega)$ на множестве ω_{ij}, лежит в точке $r_{ij}\overline{n}_{ij}$. При каждом i заменяем функцию $F(\omega)$ функцией $F_i(\omega)$, имеющей в точках $\bar{n}_{ij}$ точечные нагрузки

$$F_{ij} = r_{ij} F(\omega_{ij}). \tag{24}$$

Легко видеть, что функции $F_i(\omega)$ слабо сходятся к $F(\omega)$. Известным путем можно показать, что при достаточно больших i существуют многогранники с площадями граней F_{ij} и нормалями к граням $\overline{n}_{ij}$, т. е. с поверхностными функциями $F_i(\omega)$.

Также известным путем можно показать, что все эти многогранники ограничены в совокупности [5, 7, 8]. Тогда выберем из них сходящуюся последовательность и пусть H — ее предельное тело. По лемме II поверхностные функции $F_i(\omega)$ многогранников последовательности слабо сходятся к поверхностной функции $F(H, \omega)$ этого тела. Вместе с тем они слабо сходятся к $F(\omega)$. Следовательно,

$$F(H, \omega) = F(\omega), \tag{25}$$

что и требовалось доказать.

В заключение небесполезно указать на некоторые свойства слабой сходимости неотрицательных, вполне аддитивных функций множества на сфере, вскрывающие, как нам кажется, геометрическую природу этого отвлеченного понятия.

1) Чтобы $F_i(\omega)$ слабо сходились к $F(\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого замкнутого (или открытого) ω_0, для границы которого функция $F(\omega)$ равна нулю,

$$\lim_{i\to\infty} F_i(\omega_0) = F(\omega_0). \tag{26}$$

2) Чтобы $F_i(\omega)$ слабо сходились к $F(\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого замкнутого ω существовала убывающая последовательность содержащих его и сходящихся к нему множеств ω_i (т. е. такая, что $\omega_1 \supset \omega_2 \supset \supset \omega_3 \supset \ldots, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i = \omega$), для которой

$$\lim_{i\to\infty} F_i(\omega_i) = F(\omega). \tag{27}$$

Множества ω_i, сходясь к ω, как бы загоняют в него нагрузку, которую в пределе оно будет иметь.

Это утверждение легко перефразировать для открытого ω, что делается, как обычно, переходом к дополнениям.

Доказательства указанных свойств слабой сходимости, и притом в значительно более общей форме, я предполагаю дать в специальной заметке.

Статья поступила в редакцию
20.II.1939

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. I: Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 5. С. 947–970.
2. *Александров А. Д.* То же. II: Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 6. С. 1205–1235.
3. *Александров А. Д.* То же. III: Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 1. С. 27–44.
4. *Александров А. Д.* То же. IV: Смешанные дискриминанты и смешанные объемы // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 2. С. 227–249.
5. *Fenchel W., Jessen B.* Mengenfunktionen und konvexe Körper // Danske Vid. Selsk., Math.–Fys. Medd. 1938. Bd 16, No. 3. S. 1–31.
6. *Reidemeister K.* Über die singulären Randpunkte der konvexen Körper // Math. Ann. 1921. Bd 83. S. 116–118.
7. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd 57. S. 447–495.
8. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)

Об одном классе замкнутых поверхностей

Математический сборник. 1938. Т. 4, № 1. С. 69–76

Предмет этой работы — изучение замкнутых поверхностей, имеющих области отрицательной гауссовой кривизны и области положительной кривизны такие, что полная кривизна всех областей положительной кривизны равна 4π. Примером такого рода поверхности может служить поверхность тора. В связи с этим будем называть наши поверхности поверхностями T.

Указанные поверхности обладают свойствами, аналогичными известным свойствам замкнутых поверхностей со всюду положительной гауссовой кривизной. Именно, мы покажем (при ограничительных предположениях, которые будут точно формулированы в своем месте), что

1) области положительной гауссовой кривизны каждой поверхности T образуют связную область, являющуюся частью замкнутой выпуклой поверхности; эта область отделена от областей отрицательной кривизны замкнутыми кривыми, из которых каждая лежит в одной касательной плоскости;

2) поверхности T не допускают нетривиальных изометрических отображений (т. е. две изометрические поверхности T могут быть совмещены путем движения или движения и отражения);

3) поверхности T жесткие (т. е. они не допускают бесконечно малых изгибаний, отличных от бесконечно малых движений).

§ 1. *Построение поверхностей T*

Мы будем рассматривать непрерывные замкнутые поверхности T в трехмерном евклидовом пространстве, определяемые следующими условиями:

1) T дважды непрерывно дифференцируема;

2) T разбивается на конечное число областей, в каждой из которых гауссова кривизна K не меняет знака и обращается в нуль только на границах областей [1)];

[1)]Это ограничение будет несколько ослаблено.

3) полная кривизна всех областей положительной кривизны равна 4π;

4) области, где $K > 0$, отделены от областей, где $K < 0$, кусочно-гладкими кривыми.

Легко показать, что можно построить поверхность T, гомеоморфную шару с любым числом ручек. Для построения можно исходить из гладкой выпуклой поверхности, имеющей плоскость симметрии P, причем на этой поверхности есть плоские куски, ни один из которых не имеет общих точек с P. Плоские куски будут попарно симметричны. Если все их вырезать и соединить границы образовавшихся попарно симметричных дыр вогнутыми поверхностями так, чтобы на границах дыр не получалось ребер, то получится поверхность T, гомеоморфная шару с числом ручек, равным числу пар плоских кусков на исходной выпуклой поверхности. Полная кривизна той части полученной поверхности, где гауссова кривизна положительна, равна полной кривизне исходной замкнутой поверхности, так как полная кривизна плоских кусков равна нулю. В возможности указанного соединения попарно симметричных границ дыр вогнутыми поверхностями можно убедиться следующим образом. Пусть P_1 и P_2 — плоскости двух таких симметричных границ L_1 и L_2. L_1 и L_2 — выпуклые кривые. Плоскости P_1, P_2, P пересекаются по одной прямой. Выберем эту прямую за ось x, ось y направим перпендикулярно ей в плоскости P, а ось z — перпендикулярно плоскости P. Подвергнем пространство проективному преобразованию

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = \frac{1}{y}, \quad z' = \frac{z}{y}.$$

Это преобразование сделает прямую, по которой пересекаются плоскости P_1 и P_2, бесконечно удаленной. Следовательно, сами плоскости P_1 и P_2 станут параллельными. Кривые L_1 и L_2 останутся, конечно, выпуклыми и будут лежать в своих плоскостях симметрично относительно плоскости P. (Для симметричных точек на кривых L_1 и L_2 до преобразования имеем $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = -z_2$, а потому после преобразования те же точки будут снова симметричны относительно плоскости P_1, так как для них $x'_1 = x'_2$, $y'_1 = y'_2$, $z'_1 = -z'_2$.)

Возьмем теперь прямую t, перпендикулярную плоскостям P_1 и P_2 (P_1 и P_2 теперь параллельны) и проходящую внутри кривых L_1 и L_2. Возьмем плоскость Q, проходящую через t, и в ней выпуклую дугу l, обращенную выпуклостью к t и касающуюся плоскостей P_1 и P_2 в точках, лежащих на кривых L_1 и L_2. Будем вращать плоскость Q вокруг прямой t, подвергая ее при этом такому растяжению или сжатию к прямой t, чтобы дуга l продолжала касаться плоскостей P_1 и P_2 в точках, лежащих на L_1 и L_2. При этом каждая точка на l будет описывать кривую, подобную L_1, а значит, и L_2. В результате получится поверхность, касающаяся плоскостей P_1 и P_2

по кривым L_1 и L_2. Сечения ее плоскостями, параллельными P_1 и P_2, будут выпуклыми, а сечения плоскостями Q — вогнутыми. Поэтому построенная поверхность будет иметь отрицательную кривизну всюду кроме точек на L_1 и L_2. Если теперь обратным проективным преобразованием вернуть кривые L_1 и L_2 в их первоначальное положение, то построенная поверхность перейдет в ту, которая нам нужна. Как известно, проективные преобразования поверхностей сохраняют знак гауссовой кривизны.

§ 2. *Форма поверхностей T*

Теорема. *У всякой поверхности T та ее часть, где гауссова кривизна положительна, является связным куском замкнутой выпуклой поверхности, и она отделена от частей отрицательной кривизны замкнутыми выпуклыми кривыми, лежащими каждая в одной касательной плоскости. Если дополнить часть поверхности T с положительной кривизной кусками касательных плоскостей, вырезаемыми указанными кривыми, то получится замкнутая выпуклая поверхность, внутри которой лежат части T с отрицательной кривизной.*

Для краткости обозначим гауссову кривизну через K; ту часть T, где $K \geqslant 0$, будем называть выпуклой.

1. Сферическое изображение выпуклой части T покрывает всю сферу, и притом никакая область на сфере не покрывается этим сферическим изображением более 1 раза.

К T можно провести опорную плоскость любого направления. Она может касаться T только в точках $K \geqslant 0$. Значит, сферическое изображение выпуклой части T покрывает всю сферу. Так как полная кривизна выпуклой части по условию равна 4π, то никакая область на сфере не может быть покрыта этим сферическим изображением более 1 раза.

2. Касательная плоскость в любой точке выпуклой части T — опорная к T.

Пусть в точке x на T $K > 0$ и касательная плоскость в x не является опорной к T. Тогда в некоторой окрестности $U(x)$ точки x $K > 0$ и касательные плоскости не являются опорными (так как предел опорных плоскостей есть опорная плоскость). Пусть ω — сферическое изображение $U(x)$. ω имеет внутренние точки, так как в x $K > 0$. У T есть опорные плоскости с нормалями, направленными в ω, и они касаются выпуклой части T. Поэтому область ω оказывается дважды покрытой сферическим изображением выпуклой части T, что противоречит установленному выше.

Так как предел опорных плоскостей есть опорная плоскость, то касательные плоскости в точках границы выпуклой части T — опорные.

3. Касательная плоскость P в точке x, где $K > 0$, не касается T ни в какой другой точке.

Допустим, что P касается T еще в точке x_1. В x_1 $K \geqslant 0$ так как по доказанному P — опорная. Возьмем окрестность $U(x)$ точки x, в которой $K > 0$. Пусть ее сферическое изображение есть ω. Тогда в окрестности точки x_1 найдется точка x_2, где $K > 0$, с нормалью, направленной в ω. Сферическое изображение окрестности точки x_2 будет налегать на ω, что невозможно, и тем самым наше утверждение доказано.

4. Мы хотим показать, что всякая связная компонента границы выпуклой части T лежит в одной касательной плоскости. Для этого достаточно показать, что любой ее гладкий отрезок лежит в одной касательной плоскости, так как тогда, вследствие непрерывности вращения касательных плоскостей, и вся она лежит в одной касательной плоскости.

Пусть L — гладкий отрезок границы выпуклой части T; s — длина его дуги. Если во всех точках L производная нормали n по s равна нулю, то L лежит в одной касательной плоскости. Допустим поэтому, что на L есть точка x_0, где

$$\frac{dn}{ds} \neq 0. \tag{1}$$

Касательная плоскость P_0 в точке x_0 — опорная к T. Если бы она касалась L в точках, сколь угодно близких к x_0, то неравенство (1) не имело бы места. Поэтому можно из L выделить отрезок, содержащий x_0 внутри и не содержащий других точек касания с плоскостью P_0. Этот отрезок мы и будем обозначать дальше через L.

5. Пусть n_0 — сферическое изображение точки x_0 и Λ — сферическое изображение L. В силу условия (1), Λ имеет в n_0 касательную и делит поэтому всякую достаточно малую окрестность n_0 на две «полуокрестности».

Мы выделим около x_0 малую окрестность $U(x_0)$, содержащую часть отрезка L и не содержащую никаких других частей T, где гауссова кривизна равна нулю. Тогда $U(x_0)$ не содержит кроме x_0 других точек, лежащих в плоскости P_0, так как точки, где $K > 0$, не лежат в P_0 вследствие доказанного в п. 3, а точки, где $K < 0$, вообще не могут лежать в опорной плоскости. Кривая L выделяет из $U(x_0)$ полуокрестность $U^+(x_0)$, принадлежащую выпуклой части T.

Покажем, что сферическое изображение $U^+(x_0)$ покрывает только одну полуокрестность $\omega^+(n_0)$ точки n_0.

Для доказательства возьмем на L две точки x_1 и x_2, лежащие по разные стороны от x_0, и соединим их дугой l, лежащей в $U^+(x_0)$. Сферическое изображение λ дуги l имеет с Λ только две общие точки n_1 и n_2 — сферические изображения x_1 и x_2, поскольку никакая точка, где $K > 0$, не имеет такого же сферического изображения, как любая другая точка, где $K \geqslant 0$ (как это показано в п. 3). Будем стягивать l к L. Тогда λ будет стягиваться к Λ, зачерчивая сферическое изображение части $U^+(x_0)$. Так как λ не может пересекать Λ, то при этом она зачертит только одну полуокрестность точки n_0.

6. Сферическое изображение $U(x_0)$ содержит точки, сколь угодно близкие к n_0 и не принадлежащие $\omega^+(n_0)$.

Действительно, из условия (1) вытекает, что точка x_0 не является плоской точкой округления. Поэтому во всех направлениях, исходящих из нее, кроме главного направления, соответствующего нулевой кривизне, производная нормали отлична от нуля. Следовательно, через x_0 можно провести дугу, пересекающую L так, что ее сферическое изображение пересечет Λ.

7. Теперь мы достигнем желаемого результата, приведя к противоречию вывод п. 6 с выводом п. 5.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ — последовательность точек $U(x_0)$, сходящихся к x_0 и таких, что их сферические изображения не лежат в $\omega^+(n_0)$. В этих точках гауссова кривизна $K < 0$. Поэтому касательные плоскости в них $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ пересекают $U(x_0)$. При достаточно больших m P_m не пересекают границу $U(x_0)$. Действительно, P_m сходятся к плоскости P_0, касательной в точке x_0, и если бы они при сколь угодно больших m пересекали границу $U(x_0)$, то и на P_0 были бы точки границы $U(x_0)$, чего нет в силу выбора $U(x_0)$. Но если P_m не пересекает границы $U(x_0)$, то она отрезает от $U(x_0)$ «шапочку», опирающуюся на P_m (т. е. часть $U(x_0)$, не содержащую точек границы $U(x_0)$ и лежащую по одну сторону от P_m). В точке x'_m этой «шапочки», наиболее удаленной от P_m, имеется касательная плоскость P'_m, параллельная P_m. Вместе с тем в x'_m гауссова кривизна $K \geqslant 0$, так как «шапочка» лежит по одну сторону от P_m, а это как раз противоречит выводу п. 5.

8. Итак, мы показали, что всякая связная компонента границы выпуклой части T лежит в одной касательной плоскости.

Построим выпуклую оболочку T^* поверхности T. Все опорные плоскости к T касаются T в выпуклой ее части. Поэтому выпуклая часть T целиком лежит на поверхности T^*. Плоские кривые, лежащие на поверхности T^*, необходимо выпуклые. Поэтому всякая связная компонента границы выпуклой части T есть замкнутая выпуклая кривая.

Сферическое изображение всех этих кривых состоит из отдельных изолированных точек, так что любые две точки на сфере можно соединить непрерывной дугой, не проходящей через эти точки. Такой дуге на выпуклой части T соответствует также непрерывная дуга, соединяющая любые две ее точки. (Сферическое изображение всякой поверхности положительной кривизны взаимно непрерывно.) Поэтому выпуклая часть T связна.

9. В определении поверхностей T мы требовали, чтобы гауссова кривизна обращалась в нуль только на границе выпуклой части. Это требование можно, однако, ослабить. Именно, можно предполагать, что гауссова кривизна помимо границы выпуклой части T обращается в нуль еще на любом множестве M точек на T с одним условием, чтобы на границе выпуклой части T точки сгущения множества M образовывали нигде не плотное множество M^1. И при этом более общем предположении наша теорема будет верна. Действительно, достаточно, во-первых, взять точку x_0 на L так, чтобы она не принадлежала M^1. Так как M^1 нигде не плотно на L, то такие точки образуют на нем плотное множество, а потому, если в них

$$\frac{dn}{ds} = 0,$$

то то же будет во всех точках L. Во-вторых, окрестность $U(x_0)$ следует взять такую, чтобы она не содержала точек множества M. Наконец, рассуждение п. 3 следует применить не ко всей T, а только к $U(x_0)$, что достаточно для проведения рассуждений п. 5. Если все это сделать, то доказательство нашей теоремы распространится на указанный более общий класс поверхностей T. В следующем параграфе поверхность T можно понимать в этом расширенном смысле.

§ 3. *Неизгибаемость поверхностей T*

Лемма. *Если две поверхности T изометричны, то кривые, ограничивающие их выпуклые части, соответственно конгруэнтны.*

Пусть T_1 и T_2 — изометричные поверхности T и L_1 и L_2 — пара соответственных замкнутых кривых, входящих в границы их выпуклых частей. По изометрии геодезические кривизны в соответственных точках L_1 и L_2 равны. Но L_1 и L_2 лежат каждая целиком в одной касательной плоскости. Поэтому их геодезические кривизны равны обыкновенным кривизнам. Значит, эти последние в соответственных точках L_1 и L_2 равны, а потому L_1 и L_2 конгруэнтны.

Теорема. *Две изометричные аналитические поверхности T конгруэнтны.*

1. Пусть T_1 и T_2 — две изометричные аналитические поверхности T. Возьмем на них пару соответственных дуг S_1, S_2 границ их выпуклых частей таких, чтобы кривизна их была отлична от нуля[2)]. По доказанной только что лемме эти дуги суть конгруэнтные плоские кривые. Рассмотрим на T_1 и T_2 соответственные окрестности U_1, U_2 этих дуг. Пусть E, F, G, L, M, N как всегда — коэффициенты первой и второй форм. Индексы 1 и 2 будут указывать на отношение L, M, N соответственно к T_1 и T_2. Положим

$$L = L_1 + L_2, \quad M = M_1 + M_2, \quad N = N_1 + N_2 \tag{1}$$

и

$$l = L_1 - L_2, \quad m = M_1 - M_2, \quad n = N_1 - N_2. \tag{2}$$

[2)] Такие дуги найдутся, так как они принадлежат замкнутым выпуклым кривым.

Выберем на U_1 и U_2 за параметрические линии u геодезические ортогональные к S_1 и S_2 и за линии v их ортогональные траектории. Тогда

$$F = 0, \quad E = 1.$$

Отвлекаясь в дальнейшем от окрестностей U_1 и U_2, мы будем рассматривать соответствующую область D параметров u, v с заданными на ней E, F, G, L, M, N, l, m, n. Из равенства гауссовых кривизн на U_1 и U_2 (т. е. из $L_1N_1 - M_1^2 = L_2N_2 - M_2^2$), в силу формул (1), получаем

$$Ln - 2Mm + Nl = 0,$$

а из формул Кодацци (вследствие их линейности относительно коэффициентов второй формы и условия (3)) —

$$l_v - m_u = \frac{G_u}{2G}m, \tag{5}$$

$$m_v - n_u = \frac{G_v}{2G}m - \frac{G_u}{2G}(n + Gl), \tag{6}$$

$$L_v - M_u = \frac{G_u}{2G}M, \tag{7}$$

$$M_v - N_u = \frac{G_v}{2G}M - \frac{G_u}{2G}(N + GL). \tag{8}$$

2. При $u = 0$, т. е. на линиях S_1 и S_2, в силу того, что они плоские, имеем

$$M = N = m = n = 0. \tag{9}$$

При $u = 0$ все производные от L по u не могут исчезать, так как в области, соответствующей выпуклым частям T_1 и T_2, $L > 0$. Пусть [3)]

$$L_{u^k} \neq 0 \qquad (k \geqslant 0) \tag{10}$$

есть первая не равная нулю производная при $u = 0$. Покажем, что в таком случае при $u = 0$

$$M_{u^h} = N_{u^h} = 0 \qquad (h \leqslant k). \tag{11}$$

Для $h = 0$ это верно в силу равенства (9). Покажем, что если это верно при $h < k$, то это верно и при $h + 1$. Продифференцируем формулу (7) h раз. Тогда, так как $L_{vu^h} = 0$, $M_{u^i} = N_{u^i} = 0$ при $i \leqslant h$, получим

$$M_{u^{h+1}} = 0$$

[3)] Индекс u^k указывает k-ю производную, а при $k = 0$ — саму функцию.

и точно так же, дифференцируя формулу (8) h раз, найдем

$$N_{u^{h+1}} = 0.$$

3. Доказательство теоремы мы получим, показав, что l, m, n и все их производные по u, v исчезают при $u = 0$. Тогда по аналитичности T_1 и T_2 и из определения l, m, n видим, что не только первые, но и вторые формы поверхностей T_1 и T_2 совпадают. Следовательно, они конгруэнтны.

Равенства (9) показывают, что при $u = 0$ m и n, а следовательно, и все их производные по v, исчезают. Покажем прежде всего, что при $u = 0$ $l = n_u = 0$. Для этого продифференцируем формулу (4) $k + 1$ раз. Тогда вследствие того, что при $u = 0$

$$m = n = 0, \qquad L_{u^h} = 0 \quad (h < k), \qquad M_{u^h} = N_{u^h} = 0 \quad (h \leqslant k) \tag{11a}$$

и

$$L_{u^k} \neq 0,$$

получим

$$L_{u^k} n_u + N_{u^{k+1}} l = 0. \tag{12}$$

Вместе с тем при $u = 0$ формула (6) дает

$$n_u = \frac{1}{2} G_u l. \tag{13}$$

Дифференцируя k раз по u формулу (8), получим при $u = 0$

$$N_{u^{k+1}} = \frac{1}{2} G_u L_{u^k}. \tag{14}$$

Это равенство вместе с (12) даст

$$n_u = -\frac{1}{2} G_u l. \tag{15}$$

Покажем, что при $u = 0$

$$G_u \neq 0. \tag{16}$$

Тем самым из равенств (13) и (15) получим

$$l = n_u = 0. \tag{17}$$

По условию криви́зны дуг S_1 и S_2 отличны от нуля. Вместе с тем они равны между собой и равны их геодезическим кривизнам, так как S_1 и S_2 лежат в касательных плоскостях. Поэтому из известной формулы для геодезической кривизны линии $u = 0$ (при $E = 1$)

$$\frac{1}{\rho_g} = -\frac{G_u}{2G} \tag{18}$$

получаем (16), так что (17) доказано. Поскольку при $u = 0 \quad l = 0$, то все производные l по v при $u = 0$ исчезают. Поэтому из формулы (5) получаем

$$m_u = 0 \qquad (u = 0).$$

4. Повторяя проведенное рассуждение, покажем, что при $u = 0$ все производные от l, m, n исчезают. Пусть

$$l_{u^i} = 0 \quad (i < h), \qquad m_{u^i} = n_{u^i} = 0 \quad (i \leqslant h), \tag{19}$$

покажем, что тогда

$$l_{u^h} = m_{u^{h+1}} = n_{u^{h+1}} = 0. \tag{20}$$

Дифференцируя (4) $k + h + 1$ раз, получим, благодаря (19) и (11),

$$L_{u^k} n_{u^{h+1}} + N_{u^{k+1}} l_{u^h} = 0. \tag{21}$$

Отсюда по формуле (14) имеем

$$n_{u^{h+1}} = -\frac{1}{2} G_u l_{u^h}. \tag{22}$$

Вместе с тем, дифференцируя (6) по $u \quad h$ раз, получаем

$$n_{u^{h+1}} = \frac{1}{2} G_u l_{u^h} \tag{23}$$

и, следовательно, благодаря тому, что $G_u \neq 0$,

$$l_{u^h} = n_{u^{h+1}} = 0. \tag{24}$$

Наконец, дифференцируя (5) h раз по u, получим, вследствие (19) и (24),

$$m_{u^{h+1}} = 0. \tag{25}$$

Таким образом, наша теорема доказана.

Теорема. *Аналитическая поверхность T жесткая.*

Э. Рембс [1] доказал жесткость выпуклых поверхностей, ограниченных кривыми, лежащими каждая в одной касательной плоскости. Поэтому выпуклая часть всякой поверхности T уже сама по себе является жесткой. Остается эту жесткость распространить за пределы выпуклой части, что сразу получается, если иметь в виду аналитичность T. Поэтому не только T, но и всякий ее кусок, содержащий выпуклую часть T, жесткий.

Заметим, что если T — кусочно-аналитическая и ее аналитические куски не разделяются только асимптотическими линиями одного семейства, то невозможность ее нетривиальных изометрических отображений и ее жесткость доказываются точно так же. При этом при доказательстве жесткости следует иметь в виду, что производные l, m, n от коэффициентов второй формы по параметру t, от которого зависит бесконечно малое изгибание, удовлетворяют продифференцированным по t уравнениям Гаусса — Кодацци, т. е. уравнениям (4)–(6).

Статья поступила в редакцию
29.I.1938

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rembs E.* Unverbiegbare offene Flächen // Sitzungsberichte Akad. Berlin. 1930. S. 123–133.

Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 5.III.1938)

Доклады Академии наук СССР. 1938. Т. 19, № 4. С. 233–236

Пусть $H(\overline{u})$ — функция векторов $\overline{u}$ во всем трехмерном пространстве, положительно однородная, первой степени; H — огибающая семейства плоскостей $\overline{u}\,\overline{x} = H(\overline{u})$. Уравнение этой поверхности в параметрическом виде будет $x_1 = \partial H/\partial u_1$, $x_2 = \partial H/\partial u_2$, $x_3 = \partial H/\partial u_3$. Собственные значения R_1, R_2 второго дифференциала $d^2H(\overline{u})$, взятые для единичных векторов $\overline{u}$, являются главными радиусами кривизны поверхности H. (R_1, R_2 могут быть нулями. Тривиальное нулевое собственное значение $d^2H(\overline{u})$ отбрасывается [1, § 8; 2, § 94, 95].)

Теорема I. *Пусть $f(R_1, R_2; \overline{n})$ — кусочно-аналитическая функция R_1, R_2 и точки $\overline{n}$ на единичной сфере, определенная в такой области D, что $R_1 \geqslant R_2$. Пусть $\partial f/\partial R_1$ и $\partial f/\partial R_2$ всюду одного знака. Если существует кусочно-аналитическая функция $H(\overline{u})$ с собственными значениями второго дифференциала R_1, R_2, принадлежащими D, такими, что*

$$f(R_1, R_2; \overline{n}) = g(\overline{n})$$

есть данная функция $\overline{n}$, то такая функция $H(\overline{u})$ единственная, с точностью до линейного слагаемого $\overline{a}\,\overline{u}$, т. е. соответствующая поверхность H единственная с точностью до параллельного переноса.

Если рассматривать выпуклые функции $H(\overline{u})$ и соответственно замкнутые выпуклые поверхности, определяя область D условиями $R_1 \geqslant R_2 > 0$, то получаем общую теорему единственности для таких поверхностей, охватывающую известные теоремы Минковского и Кристоффеля [1, § 8; 2, § 94, 95] об определяемости выпуклых поверхностей заданиями $R_1R_2 = g(\overline{n})$ и $R_1 + R_2 = g(\overline{n})$. Можно указать, например, что наша теорема включает также определяемость выпуклой поверхности средней кривизной $1/R_1 + 1/R_2 = g(\overline{n})$, факт, бывший установленным только для случая постоянной средней кривизны.

Теорема II. *Пусть $f(R_1, R_2; \overline{n})$ удовлетворяет условиям теоремы* I. *Если функция $H(\overline{u})$ варьируется так, что $\delta f(R_1, R_2; \overline{n}) = 0$, то $\delta H(\overline{u}) = \overline{a}\,\overline{u}$, т. е. при условии стационарности $f(R_1, R_2; \overline{n})$ поверхность может претерпевать только бесконечно малый перенос.*

Доказательство теоремы II аналогично даваемому далее доказательству теоремы I и даже несколько проще, поэтому мы его приводить не будем.

Доказательство теоремы I. Пусть $H'(\overline{u})$ и $H''(\overline{n})$ — две функции, для которых $f(R_1, R_2; \overline{n}) = g(\overline{n})$ одинаковы. Положим

$$H'(\overline{u}) - H''(\overline{u}) = Z(\overline{u}).$$

Покажем, что всюду $d^2 Z(\overline{u}) = 0$ и, следовательно, $Z(\overline{u}) = \overline{a}\,\overline{u}$.

Для определенности предположим, что

$$\frac{\partial f}{\partial R_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial R_2} > 0. \tag{1}$$

1. *При любом $\overline{u}$ форма $d^2 Z(\overline{u})$ или допускает значения разных знаков или тождественно исчезает.*

Из условия (1) видно, что при

$$f(R_1', R_2'; \overline{n}) = f(R_1'', R_2''; \overline{n}) \tag{2}$$

$R_1' - R_1''$ и $R_2' - R_2''$ или разных знаков или одновременно исчезают. Вместе с тем

$$d^2 Z(\overline{u}) = d^2 H'(\overline{u}) - d^2 H''(\overline{u}). \tag{3}$$

Отсюда по известному свойству квадратичных форм, имея в виду смысл R_1 и R_2, убеждаемся в правильности нашего утверждения.

2. Равенство

$$f(R_1, R_2; \overline{n}) = g(\overline{n}) \tag{4}$$

представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для функции $H(\overline{u})$ на сфере, как это ясно из смысла R_1 и R_2. *При любом выборе параметров u, v в окрестности всякой точки на сфере уравнение*

$$f(R_1, R_2; \overline{n}) = F(H_{uu}, H_{uv}, H_{vv}, H_u, H_v, H; u, v) = g(u, v) \tag{5}$$

разрешимо относительно H.

Примем за переменные $r = |\overline{u}|$ и параметры u, v так, что

$$H(\overline{u}) = rH(u, v). \tag{6}$$

Для единичных векторов $\overline{u} = \overline{n}$, $r = 1$ имеем

$$d^2H(\overline{n}) = H_{uu}\,du^2 + 2H_{uv}\,dudv + H_{vv}\,dv^2 + 2(H_u\,du + H_v\,dv)\,dr. \tag{7}$$

Если H_{uu} растет, то собственные значения этой формы не убывают и хотя бы одно из них растет. Поэтому, скажем,

$$\frac{\partial R_1}{\partial H_{uu}} > 0, \qquad \frac{\partial R_2}{\partial H_{uu}} \geqslant 0, \tag{8}$$

и, в силу (1) и (8), имеем

$$\frac{\partial F}{\partial H_{uu}} = \frac{\partial F}{\partial R_1}\frac{\partial R_1}{\partial H_{uu}} + \frac{\partial F}{\partial R_2}\frac{\partial R_2}{\partial H_{uu}} > 0. \tag{9}$$

Отсюда на основании известной теоремы о неявных функциях получаем, что если для некоторых значений H_{uu}, H_{uv}, …, H, u, v уравнение (5) удовлетворено, то в окрестности этих значений его можно писать в форме

$$H_{uu} = \Phi(H_{uv}, H_{vv}, H_u, H_v, H, u, v) \tag{10}$$

и притом единственным образом.

3. Так как по условию H' и H'' кусочно-аналитические, то Z также кусочно-аналитическая и в каждой области ее аналитичности $d^2Z = d^2H' - d^2H'' = 0$ или всюду, или на некоторых линиях, или в изолированных точках. (Это основано на известной теореме Вейерштрасса о неявных аналитических функциях.)

Если $d^2Z = 0$ на линии, то $Z(\overline{u}) = \overline{a}\,\overline{u}$.

Действительно, пусть C — такая линия. Вдоль нее $d^2H' = d^2H''$. Прибавлением к $H''(\overline{u})$ соответствующего слагаемого вида $\overline{c}\,\overline{u}$ (т. е. переносом поверхности H'') добьемся того, что на C будет $dH' = dH''$ и $H' = H''$. Тогда, на основании пункта 2, выбирая линию C за $u = \text{const}$, имеем, что $H'(u,v)$ и $H''(u,v)$ удовлетворяют вблизи ее одному и тому же уравнению (10) с одинаковыми начальными условиями на линии $u = \text{const}$. По известной теореме Коши в окрестности C

$$H'(u,v) = H''(u,v).$$

Если $d^2Z = 0$ в одной области аналитичности Z, то по доказанному это распространится через границу на соседние области.

4. Остается устранить случай, когда $d^2Z = 0$ только в изолированных точках. Для этого рассмотрим поверхность Z — огибающую семейства плоскостей $\overline{u}\,\overline{x} = Z(\overline{u})$. Эта поверхность ограничена и, следовательно, имеет опорные плоскости любого направления. В точках, где $d^2Z(\overline{u}) \neq 0$, она не может иметь опорных плоскостей, так как в этих точках ее радиусы кривизны разных знаков. Опорные плоскости к Z могут проходить только через точки, соответствующие $d^2Z = 0$. Однако мы покажем, что при условии изолированности этих точек через них может проходить не более чем по одной опорной плоскости, что противоречит наличию у Z опорных плоскостей любого направления.

5. Пусть $\overline{n}_0$ — точка на единичной сфере, где $d^2Z(\overline{n}_0) = 0$; O — точка на поверхности Z, соответствующая $\overline{n}_0$; S — кусок поверхности Z, соответствующий окрестности точки $\overline{n}_0$, не содержащей других точек, где $d^2Z(\overline{n}) = 0$. Проведем через O плоскость E_0 с нормалью $\overline{n}_0$. Возьмем прямую a, не параллельную ни одной из плоскостей со сферическими образами в $U(\bar{n}_0)$ и проходящую через любую точку на S, отличную от O. Легко видеть, что такая точка найдется.

Будем перемещать a параллельно так, чтобы точка пересечения ее с E_0 описывала окружность C вокруг O.

Прямая a может перестать пересекать S, только пройдя через границу S, так как у S нет касательных, параллельных a. Если бы это наступало при сколь угодно малой окружности C и при любой окрестности $U(\overline{n}_0)$, заключающейся в исходной, то сама точка O при всех таких $U(\overline{n}_0)$ была бы проекцией точек границы, соответствующих S на E_0 в направлении a. Тогда S содержала бы прямолинейный отрезок в направлении a, с концом в O, т. е. вопреки предположению S имела бы касательные плоскости, параллельные a. Следовательно, при достаточно малой окружности C a не перестает пересекать S. Поэтому всякая плоскость, параллельная a и проходящая через O, пересекает S. Принимая во внимание, что окрестность $U(\overline{n}_0)$ может быть сколь угодно малой, убеждаемся, что через O не может проходить опорная плоскость к S, отличная от E_0.

Можно даже показать, что вследствие отрицательности кривизны поверхности S всюду, кроме точки O, и плоскость E_0 также ее пересекает, т. е. не является опорной.

Статья поступила в редакцию

9.III.1938

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)
2. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ, 1935.

О теоремах единственности для замкнутых поверхностей

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 11.XII.1938)

Доклады Академии наук СССР. 1939. Т. 22, № 3. С. 99–102

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть функция $Z(u_1, u_2, u_3)$, определенная во всем пространстве (u_1, u_2, u_3), аналитическая и положительно однородная первой степени (т. е. $Z(ru_1, ru_2, ru_3) = rZ(u_1, u_2, u_3)$ при $r \geqslant 0$). Пусть ее второй дифференциал ни в одной точке (u_1, u_2, u_3) не имеет определенного знака (т. е. в каждой данной точке он или является знакопеременной формой от дифференциалов du_i, или тождественно исчезает). Тогда $Z(u_1, u_2, u_3)$ — линейная функция*:

$$Z(u_1, u_2, u_3) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3.$$

Для доказательства интерпретируем переменные u_1, u_2, u_3 как составляющие вектора $\overline{u}$ в прямоугольной системе координат и рассмотрим огибающую Z семейства плоскостей, задаваемых во взятой системе координат уравнениями

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = Z(u_1, u_2, u_3). \tag{1}$$

В силу положительной однородности первой степени функции $Z(u_1, u_2, u_3)$ можно ограничиться единичными векторами $\overline{u}$, т. е. считать $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ и соответственно рассматривать нашу функцию только на единичной сфере E (точки на единичной сфере E мы будем обозначать так же, как соответствующие единичные векторы). Тогда видно, что семейство (1) зависит от двух параметров и вместо (1) можно писать в векторных обозначениях

$$\overline{n}\,\overline{x} = Z(\overline{n}). \tag{2}$$

Координаты точек поверхности Z будут

$$x_i = \frac{\partial Z(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

В точках, где $d^2Z(u_1, u_2, u_3)$ не исчезает, поверхность Z имеет определенную касательную плоскость. Собственные значения d^2Z суть главные радиусы кривизны поверхности Z. Поэтому в точках, где d^2Z знакопеременная форма, поверхность Z пересекает касательную плоскость [1, § 94].

Вместе с тем поверхность Z ограничена, а потому имеет опорные плоскости любого направления. Они могут касаться Z только в тех точках, которые соответствуют тем (u_1, u_2, u_3), для которых $d^2Z(u_1, u_2, u_3)$ тождественно исчезает, т. е.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u_i \partial u_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Множество точек на единичной сфере E, где выполнены условия (4), обозначим через N. Для таких множеств имеет место

Лемма I. *Пусть N — множество точек на сфере E, где одновременно равны нулю аналитические функции $f_1(\overline{n}), \ldots, f_m(\overline{n})$. Для N могут быть только следующие возможности*: 1) *N пусто;* 2) *N простирается на всю сферу E;* 3) *N состоит из конечного числа точек;* 4) *N состоит из кривых, разбивающих поверхность на конечное число областей, внутри каждой из которых функции $f_1(\overline{n}), \ldots, f_m(\overline{n})$ обращаются одновременно в нуль самое большее в конечном числе точек.*

Эта лемма есть простое следствие известной теоремы Вейерштрасса о неявных аналитических функциях [2, гл. 17].

Прежде всего в нашем случае N не пусто, так как иначе у Z не было бы опорных плоскостей.

Если же N простирается на всю сферу E, то d^2Z исчезает всюду и, значит, функция $Z(u_1, u_2, u_3)$ — линейная.

Нам нужно устранить случаи 3 и 4, оговоренные в лемме I. Для этого нам послужит

Лемма II. *Если точка $\overline{n}_0$, где $d^2Z \equiv 0$, изолированная, то через соответствующую точку $\overline{x}_0$ на поверхности Z может проходить разве только опорная плоскость с нормалью $\overline{n}_0$* (доказательство этой леммы мы дадим ниже).

Пусть множество N состоит из конечного числа точек. Тогда, так как опорные плоскости к Z могут быть только в точках, соответствующих точкам $\overline{n}$ из множества N, то по лемме II у поверхности Z может быть только конечное число опорных плоскостей. Это противоречит ограниченности Z, и, следовательно, N не может состоять из конечного числа точек.

Остается наконец последняя, четвертая, возможность леммы I. Пусть G — область на E, ограниченная кривой L, принадлежащей множеству N, такая что в ней $d^2Z \equiv 0$ только в конечном числе точек.

Так как на L $\quad d^2Z(\overline{u}) \equiv 0$, то на L

$$x_1 = \frac{\partial Z}{\partial u_1} = a_1, \qquad x_2 = \frac{\partial Z}{\partial u_2} = a_2, \qquad x_3 = \frac{\partial Z}{\partial u_3} = a_3 \tag{5}$$

постоянны. А по однородности функции $Z(\overline{u})$

$$Z(\overline{u}) = u_1\frac{\partial Z}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial Z}{\partial u_2} + u_3\frac{\partial Z}{\partial u_3} \tag{6}$$

и, следовательно, на L

$$Z(\overline{u}) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3. \tag{7}$$

Определим функцию $Z^*(u_1, u_2, u_3)$, положительно однородную первой степени, равную $Z(u_1, u_2, u_3)$ в области G и равную $a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$ вне области G. Эта функция дважды непрерывно дифференцируема, так как на границе области G $\quad d^2Z(\overline{u}) \equiv 0$.

Построим поверхность Z^*, огибающую семейства плоскостей

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = Z^*(u_1, u_2, u_3). \tag{8}$$

Поверхность Z^* имеет опорные плоскости всех направлений. Вместе с тем в точках $\overline{x}$ на ней, соответствующих точкам $\overline{n}$ из области G, может быть только конечное число опорных плоскостей, как это следует из леммы II.

Поэтому все опорные плоскости к Z^* проходят через единственную точку (a_1, a_2, a_3), соответствующую тем u_1, u_2, u_3, для которых

$$Z^*(u_1, u_2, u_3) = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3. \tag{9}$$

(По формуле (3) или (5) a_1, a_2, a_3 как раз и являются координатами той точки на поверхности Z^*, которая соответствует тем u_1, u_2, u_3, для которых выполнено (9).)

Но в таком случае Z^* сводится к точке (a_1, a_2, a_3) и область G исчезает, так как всем ее точкам $\overline{n}$, где $d^2Z^* \not\equiv 0$, должны соответствовать на Z точки, в которых есть касательные плоскости.

Этим самым наша теорема доказана.

Докажем лемму II. Пусть $\overline{n}_0$ — изолированная точка, в которой $d^2Z(\overline{n}_0) \equiv$ $\equiv 0$; $\overline{x}_0$ — соответствующая точка на поверхности Z. Допустим вопреки утверждению леммы, что в точке $\overline{x}_0$ есть опорная плоскость P_1 с нормалью $\overline{n}_1 \neq \overline{n}_0$. Пусть U — окрестность $\overline{n}_0$, не содержащая ни внутри, ни на границе других точек, где $d^2Z(\overline{n}) \equiv 0$, и столь малая, что она пересекает не все большие круги, проходящие через $\overline{n}_1$. Пусть V — соответствующая окрестность точки $\overline{x}_0$ на Z. Во всех точках V, кроме разве $\overline{x}_0$, есть касательная плоскость. На плоскости P_1 V имеет единственную точку $\overline{x}_0$, так как иначе P_1 не была бы опорной к V. Поэтому есть плоскости P, параллельные P_1 и пересекающие Z по замкнутым кривым L. Все кривые L гладкие и имеют опорные прямые любого направления, т. е. нормали любого направления. Нормаль к L есть проекция на плоскость P нормали к Z в той же точке. Поэтому наличие у L нормалей всех направлений означает, что на Z есть точки со сферическим изображением на любом большом круге, проходящем через $\overline{n}_1$. Однако сферическое изображение V есть выбранная нами окрестность U точки $\overline{n}_0$. Мы пришли к противоречию с условием выбора U, и лемма доказана.

Теорема, доказанная нами, может быть формулирована еще так:

Пусть H_1, H_2 — выпуклые тела с аналитическими опорными функциями. Если индикатрисы Дюпена на H_1 и H_2 в точках с параллельными нормалями не могут быть помещены одна внутри другой при совмещении этих точек параллельным переносом, то тела H_1 и H_2 равны и параллельно расположены.

Здесь становится ясным, что доказанная в этой заметке теорема является аналогом следующей теоремы о многогранниках, доказательство которой было дано мною раньше [3]:

Если у двух выпуклых многогранников грани с параллельными внешними нормалями не могут быть помещены одна внутри другой параллельным переносом, то многогранники равны и параллельно расположены (грани на одном многограннике всегда соответствует грань на другом с той же внешней нормалью; только эта грань может вырождаться в ребро или вершину).

На основании доказанной теоремы легко получается общая теорема единственности для замкнутых поверхностей, недавно доказанная мною [4]. (Строго говоря, следующая ниже теорема не вполне совпадает с доказанной в [4]: здесь мы требуем аналитичность опорной функции, тогда как там была достаточна кусочная аналитичность, зато здесь функция $f(R_1, R_2; n)$ может быть какая угодно.)

Теорема. *Пусть $f(R_1, R_2; \overline{n})$ — функция точки $\overline{n}$ на единичной сфере и переменных R_1, R_2, изменяющихся в области $R_1 \geqslant R_2$. Пусть при каждом данном $\overline{n}$ эта функция от R_1, R_2 монотонная* (непостоянная). *Поверхность H, сферическое изображение которой однозначно покрывает всю сферу, с аналитической опорной функцией, однозначно, с точностью до переноса, определяется заданием значений функции $f(R_1, R_2; \overline{n})$ для всех нормалей $\overline{n}$, если под R_1, R_2 понимать главные радиусы кривизны поверхности H в точке с нормалью $\overline{n}$.*

Пусть $H'(\overline{u})$, $H''(\overline{u})$ — опорные функции двух поверхностей, для которых

$$f(R'_1, R'_2; \overline{n}) = f(R''_1, R''_2; \overline{n}). \tag{10}$$

Тогда из условия монотонности функции $f(R_1, R_2; \overline{n})$ следует, что $R'_1 - R''_1$ и $R'_2 - R''_2$ или разных знаков, или одновременно исчезают. Поэтому $d^2[H'(\overline{u}) - H''(\overline{u})]$ или знакопеременная форма, или тождественно равен нулю. Следовательно, по доказанной нами теореме $H'(\overline{u}) - H''(\overline{u})$ — линейная функция, т. е. поверхности H' и H'' равны и параллельны.

Статья поступила в редакцию
13.XII.1938

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
2. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 2, ч. 2. М.; Л.: ОНТИ, 1933.
3. *Александров А. Д.* Элементарное доказательство теоремы Минковского и некоторых других теорем о выпуклых многогранниках // Изв. АН СССР. 1937. Т. 1, № 4. С. 597–606.
4. *Александров А. Д.* Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей // Докл. АН СССР. 1938. Т. 19, № 4. С. 233–236.

Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей

Ученые записки ЛГУ. Сер. мат. наук. 1939. № 37, вып. 6. С. 3–35

Функция

$$z = z(x_1, \dots, x_n) \equiv z(\overline{x}),$$

определенная в открытой области G, называется выпуклой, если для каждой пары точек $\overline{x}$ и $\overline{y}$, принадлежащих G, и для $0 \le \vartheta \le 1$

$$(1 - \vartheta) z(\overline{x}) + \vartheta z(\overline{y}) \ge z((1 - \vartheta)\overline{x} + \vartheta \overline{y}),$$

если только точка $(1 - \vartheta)\overline{x} + \vartheta\overline{y}$ принадлежит G. Однако всякая выпуклая функция может быть распространена с сохранением выпуклости на выпуклую оболочку G.

Если закрепить все x_i, кроме x_m, то получим выпуклую функцию одной переменной x_m. Она имеет всюду правые и левые производные, причем правая производная не меньше левой. Это суть частные производные z по x_m.

Определим обобщенные частные производные $z_1(\overline{x}), \dots, z_n(\overline{x})$ как любые функции, удовлетворяющие неравенствам

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_m}\right)_{\text{пр}} \ge z_m(\overline{x}) \ge \left(\frac{\partial z}{\partial x_m}\right)_{\text{лев}}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Геометрически это эквивалентно тому, что в каждой точке поверхности, изображающей функцию $z(\overline{x})$ в прямоугольных координатах $x_1, \dots, x_n, z$, мы берем произвольную опорную плоскость, которая заменяет касательную в тех точках, где ее нет, и совпадает с касательной, где она есть.

Теорема. *Почти везде в G функции $z_m(\overline{x})$ дифференцируемы и для любой данной точки, где это имеет место,*

$$\left|\frac{\Delta z_m}{\Delta s} - \frac{dz_m}{ds}\right| < \varepsilon(\Delta s).$$

Здесь Δz_m — приращение функции z_m при смещении из данной точки на отрезок Δs в направлении дифференцирования, а $\varepsilon(\Delta s)$ — бесконечно малая, зависящая только от Δs, но не зависящая от направления дифференцирования и выбора функций $z_m(\overline{x})$.

Доказательство этой теоремы есть первая задача данной работы (§ 1–4). Оно основано прежде всего на результате Г. Буземана и В. Феллера для выпуклых поверхностей в трехмерном пространстве [1]: *на выпуклой поверхности почти везде есть индикатриса Дюпена обычной формы* (т. е. эллипс, или пара параллельных прямых, или лежащая в бесконечности).

Наша теорема обеспечивает наличие у выпуклой поверхности почти везде всех тех ее свойств, в которых играет роль только ее двукратная дифференцируемость.

В § 5, 6 исследуются общие свойства сферического изображения произвольной выпуклой поверхности (определяемого нормалями к опорным плоскостям), в § 7 — сферическое изображение окрестности точки двукратной дифференцируемости. Это изображение аффинно для бесконечно малой окрестности (в силу формулированной выше теоремы), и предел отношения площади сферического изображения к площади бесконечно малой окрестности равен произведению главных кривизн, однако только в том случае, если окрестности подчиняются некоторому условию. Если рассматривать производную от площади сферического изображения в широком смысле (так, как это определяется для функций множества [2, гл. 3, § 4]), то она может и не существовать в точках двукратной дифференцируемости.

В § 8 аналогичные рассмотрения проводятся для отображения, обратного сферическому, и для смешанных поверхностных функций, введенных мною в работе «К теории смешанных объемов выпуклых тел» [3–6]. В § 9 результат § 8 прилагается к некоторым вопросам теории смешанных объемов.

Наконец, в § 10 дается обобщение результатов § 3, 4 на случай, когда в данной точке выпуклая поверхность имеет произвольную индикатрису Дюпена.

§ 1. *Индикатриса Дюпена и обобщенный второй дифференциал*

Пусть в $(n+1)$-мерном пространстве задана прямоугольная система координат x_1, $x_2, \ldots, x_n, z$. Мы будем рассматривать выпуклую поверхность Φ, задаваемую в этой системе координат уравнением

$$z = z(x_1, \ldots, x_n) \equiv z(\overline{x}). \tag{1}$$

Здесь $z(\overline{x})$ — произвольная выпуклая функция, определенная в некоторой открытой области G изменения переменных $x_1, \ldots, x_n$. Так как любую выпуклую поверхность можно перекрыть конечным числом такого рода поверхностей, то наши выводы будут распространяться на всякие выпуклые поверхности.

Возьмем на Φ точку A и в ней опорную плоскость P. Пересечем Φ плоскостью P_h, параллельной и проходящей от нее на расстоянии h [1]. Пусть D'_h — проекция на P той части Φ, которая лежит в слое, ограниченном P и P_k (плоскости P и P_k присоединяются к слою). Увеличив фигуру D'_h в $1/\sqrt{2h}$ раз, оставляя точку A неподвижной, получим на P фигуру D_h. Если существует топологический предел D фигур D_h при $h \to 0$, то он называется индикатрисой D (Дюпена). Индикатриса D относится к точке A и опорной плоскости P.

Вообще при рассмотрении выпуклых поверхностей полезно пользоваться двумя взаимно дополнительными заданиями поверхности: с одной стороны, ее точками и с другой — опорными плоскостями. Бывает полезно рассматривать оба представления вместе, рассматривая «элементы» поверхности (A, P): точки A с проходящими через них опорными плоскостями P. Так индикатриса D относится к элементу (A, P). Отмеченная двойственность будет использована нами на протяжении всей работы.

Из выпуклости поверхности Φ непосредственно следует, что индикатриса D, если она существует, представляет собой выпуклую фигуру. Г. Буземан и В. Феллер в цитированной выше работе [1] указали на то, что она может быть любой выпуклой фигурой, в которой точка A может занимать любое положение [2]. Однако нас будут занимать такие случаи (которые только и возможны для регулярной поверхности): индикатриса D — эллипсоид или цилиндр (может быть слой между парой параллельных плоскостей), или простирается на всю опорную плоскость; при этом во всех случаях точка A — центр индикатрисы D. Если в точке A индикатриса D одного из указанных типов, то точку A будем называть нормальной. Очевидно, что в нормальной точке имеется касательная плоскость.

Пусть A — нормальная точка и P — касательная плоскость к Φ в этой точке; пусть t — прямая, проходящая через A в плоскости P, а s — длина отрезка на t от A до пересечения t с границей фигуры D'_h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{2h}{s^2} = \frac{1}{R_t} \tag{2}$$

есть кривизна нормального сечения поверхности Φ, касающегося прямой t.

Пусть в точке A

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = z_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

[1] P_h при сколь угодно малых h не будет пересекать Φ тогда и только тогда, когда Φ целиком лежит в P. Этот случай мы исключаем из рассмотрения как неинтересный.

[2] Об индикатрисе см. [1, § 3]. По обычному определению индикатриса Дюпена — кривая. Однако мне показалось удобнее определить ее как всю фигуру, охватываемую этой кривой, для того чтобы избежать выражения «индикатриса D лежит в бесконечности».

Рассмотрим поверхность Φ^*, задаваемую функцией

$$z = z^*(\overline{x}) = z(\overline{x}) - z(\overline{x}_0) - \sum_{i=1}^{n} z_i(x_i - x_i^0), \tag{4}$$

где x_i^0 — координаты A и $\overline{x}_0$ — совокупность $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Легко убедиться, что если θ — угол между плоскостью P и координатной плоскостью $(x_1, \ldots, x_n)$, то в точке A^* на Φ^*, соответствующей точке A на Φ, также есть индикатриса D^*, являющаяся уменьшенной в $\sqrt{\cos\theta}$ раз проекцией индикатрисы D точки A на плоскость $x_1, \ldots, x_n$. (Поверхность Φ^* касается в точке A^* плоскости $x_1, \ldots, x_n$.)

При построении этой индикатрисы D^* расстояние секущей плоскости от точки A равно приращению z^* Δz^*. Поэтому мы имеем

$$z_{tt} = \lim_{\Delta z^* \to 0} \frac{2\Delta z^*}{\Delta s^2} = \frac{1}{R_t^*}. \tag{5}$$

В силу определения функции z^* (формула (4)), z_{tt} — вторая обобщенная производная от $z(\overline{x})$ по s в направлении t, которая, как известно, для выпуклых функций совпадает с обычной второй производной [7][3)]. $\sqrt{R_t^*}$ равен радиусу индикатрисы D^* из точки A^* в направлении t.

Если точка A нормальная, то и точка A^* на Φ^* нормальная, и тогда, как обычно, имеем

$$z_{tt} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k, \tag{6}$$

где a_{ik} — постоянные для точки A числа, а

$$\xi_i = \frac{dx_i}{ds}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

— направляющие косинусы направления t.

В соответствии с формулой (6) мы говорим, что в точке $\overline{x}_0$ функция $z(x_1, \ldots, x_n)$ имеет обобщенный второй дифференциал.

[3)] Здесь

$$z_{tt}(\overline{x}_0) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2}{\Delta s}\left\{\frac{z(\overline{x}) - z(\overline{x}_0)}{\Delta s} - z_t(x_0)\right\}, \tag{$*$}$$

$$\Delta s = |\overline{x} - \overline{x}_0|, \qquad z_t = \sum z_i \frac{x_i - x_i^0}{\Delta s} \text{ — производная в направлении } t.$$

Здесь и далее термин «обобщенная вторая производная» употребляется не в обычном смысле, а именно в смысле формулы $(*)$, т. е. как коэффициент в формуле Тейлора.

Из приведенного построения видно, что если в точке $\overline{x}_0$ функция $z(\overline{x})$ имеет обобщенный второй дифференциал, то соответствующая точка на поверхности Ф нормальная и обратно. (Этот результат со всеми рассуждениями, приводящими к нему, легко перенести также на невыпуклые поверхности.)

Индикатриса D^* получается как предел фигур индикатрисы D_z^*, определяемых аналогично фигурам D_h. В формуле (5) $s^2/(2\Delta z^*)$ есть не что иное, как квадрат расстояния точки A до точки пересечения луча t с границей D_z^*. А так как фигуры D_z^* выпуклые, то переход к пределу в формуле (5) равномерный для всех t. Отсюда на основании определения функции $z^*(\overline{x})$ получаем

$$z(\overline{x}) = z(\overline{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} z_i(\overline{x}_0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_i - x_i^0)(x_k - x_k^o) + \varepsilon s^2,$$

где ε стремится к нулю вместе с s равномерно для всех направлений:

$$s = \sqrt{\sum (x_i - x_i^0)^2}.$$

Лемма I. *Пусть в точке $\overline{x}_0$ для всюду плотного множества проходящих через нее прямых (в плоскости $x_1, \ldots, x_n$) существуют производные $z_{tt}(\overline{x}_0)$, тогда эти производные существуют для всех прямых t, проходящих через $\overline{x}_0$, и если $t_1, t_2, \ldots$ сходятся к t, то*

$$z_{tt} = \lim_{k\to\infty} z_{t_k t_k}(\overline{x}_0). \tag{8}$$

Эта лемма есть непосредственное следствие леммы, доказанной Г. Буземаном и В. Феллером (их рассуждения дословно переносятся на n-мерный случай).

Если в точке A выпуклой поверхности для повсюду плотного множества проходящих через нее в касательной плоскости прямых существуют кривизны нормальных сечений (касающихся этих прямых), то в точке A есть индикатриса D, содержащая A внутри.

Если эту лемму применить к определенной выше индикатрисе D, то получим нашу лемму. Равенство (8) обеспечивается выпуклостью D.

Лемма II. *Будем проводить через точку $\overline{x}_0$ в плоскости $x_1, \ldots, x_n$ $(n-1)$-мерные плоскости Q. В каждой из них функция $z(\overline{x})$ будет давать некоторую выпуклую функцию. Если для всюду плотного множества плоскостей Q эти функции имеют в точке $\overline{x}_0$ обобщенные вторые дифференциалы, то и самая функция $z(\overline{x})$ имеет в точке $\overline{x}_0$ обобщенный второй дифференциал.* (Множество плоскостей всюду плотно в том смысле, что всякая плоскость, проходящая через $\overline{x}_0$, есть предел плоскостей из множества.)

Легко видеть, что эта лемма, благодаря лемме I, непосредственно приводится к следующему утверждению: пусть в пространстве $x_1, \ldots, x_n$ имеется непрерывная функция, которая в плоскостях некоторого всюду плотного множества плоскостей, проходящих через начало, представляет собой квадратичную форму, тогда эта функция сама является квадратичной формой. Это утверждение почти тривиально, а потому мы не доказываем его.

§ 2. *Существование почти везде обобщенного второго дифференциала выпуклой функции*

Лемма. *Множество тех точек, где выпуклая функция имеет обобщенный второй дифференциал, измеримо B* [4]*.*

Пусть имеется выпуклая функция $z(\overline{x})$, заданная в открытой области G. Пусть t — прямые данного направления, пересекающие G. (Все рассуждения проводятся в пространстве переменных $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, от которых зависит $z(\overline{x})$.) Очевидно, множество точек, где существует $z_{tt}(\overline{x})$, измеримо B. Возьмем $n(n+1)/2$ направлений прямых t_{ik}.

Пусть s_{ik} — длины отрезков на прямых t_{ik}. Определим в каждой точке, где существуют $z_{t_{ik}t_{ik}}(\overline{x})$, коэффициенты $a_{lm}(\overline{x})$, из уравнений

$$z_{t_{ik}t_{ik}}(\overline{x}) = \sum_{l,m=1}^{n} a_{lm}(\overline{x}) \frac{dx_l}{ds_{ik}} \frac{dx_m}{ds_{ik}}. \tag{1}$$

(Легко выбрать направления t_{ik} так, чтобы эта система имела единственное решение.)

Множество точек, где эти коэффициенты определены, будет измеримо B, так как таково множество, где существуют $z_{t_{ik}t_{ik}}(\overline{x})$.

Возьмем всюду плотное множество направлений прямых t^h (всякая прямая есть предел последовательности этих прямых). Для того чтобы в точке $\overline{x}$ функция $z(\overline{x})$ имела обобщенный второй дифференциал, необходимо, а по лемме I § 1 и достаточно, чтобы в точке $\overline{x}$ одновременно с уравнениями (1) выполнялись уравнения

$$z_{t^h t^h}(\overline{x}) = \sum_{l,m=1}^{n} a_{lm}(\overline{x}) \frac{dx_l}{ds^h} \frac{dx_m}{ds^h}. \tag{2}$$

Пусть M^h — множество тех точек, где одновременно с уравнениями (1) выполнено уравнение (2) для данного h. Это множество измеримо B, так как $z_{t^h t^h}(\overline{x})$ и $a_{lm}(\overline{x})$ суть B-функции.

---

[4] Т. е. измеримо по Борелю. — *Прим. ред.*

Возьмем теперь

$$M = \bigcap_{h=1}^{\infty} M^h.$$

Это множество измеримо B, так как каждое M^h измеримо B. В каждой точке множества M для всех прямых t^h выполняются равенства (2). Следовательно, по лемме I § 1 эти равенства выполняются для всех прямых. Это значит, что в каждой точке множества M функция $z(\overline{x})$ имеет обобщенный второй дифференциал. Вместе с тем, если точка не принадлежит множеству M, т. е. не принадлежит какому-нибудь M^h, то в ней $z(\overline{x})$ не имеет обобщенного второго дифференциала.

Теорема. *Всякая выпуклая функция имеет обобщенный второй дифференциал почти везде в области ее определения.*

Эта теорема доказана Г. Буземаном и В. Феллером для функций двух переменных. Мы докажем ее для функций n переменных, предполагая, что она верна для функций $(n-1)$-переменной.

Пусть G — n-мерная область задания функции $z(\overline{x})$. Рассмотрим сечения области G параллельными $(n-1)$-мерными плоскостями и функции, определяемые на этих сечениях функцией $z(\overline{x})$.

Пусть M_1 — множество точек, в которых эти функции не имеют обобщенных вторых дифференциалов. В каждом сечении, по предположению индукции, оно дает множество меры нуль. Вместе с тем оно измеримо B. (Это доказывается так же, как предшествующая лемма I. Нужно только прямые t брать в плоскостях сечений.) Поэтому оно меры нуль.

Возьмем всюду плотное счетное множество направлений и семейства параллельных плоскостей, перпендикулярных этим направлениям и пересекающих G. Этим семействам сечений соответствуют множества $M_1, M_2, \ldots$ меры нуль, на которых функции, определенные на этих сечениях функцией $z(\overline{x})$, не имеют обобщенных вторых дифференциалов.

Напротив, на дополнениях $G \setminus M_i$ этих множеств указанные функции имеют обобщенные вторые дифференциалы. Поэтому на пересечении этих дополнений $M = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (G - M_i)$ все указанные функции одновременно будут иметь обобщенные вторые дифференциалы. А по лемме II § 1 заключаем, что и сама функция $z(\overline{x})$ будет иметь на M обобщенный второй дифференциал.

Вместе с тем мера каждого $G \setminus M_i$ равна мере G (так как M_i — меры нуль), а поэтому мера их пересечения тоже равна мере G. Этим теорема доказана.

§ 3. *Для выпуклой функции обобщенный второй дифференциал совпадает с обычным*

Теорема. *Если выпуклая функция имеет в данной точке обобщенный второй дифференциал, то в этой точке ее первые частные производные дифференцируемы, причем вторые смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.*

Собственно говоря, первые частные производные выпуклой функции существуют не везде, а потому и дифференцирование их по любому направлению может не иметь смысла. Но у выпуклой функции в каждой точке существуют односторонние производные. Поэтому в тех точках, где частных производных нет, мы берем вместо них любое значение между правой и левой производной (допуская и эти крайние значения). Геометрически это означает, что в тех точках, где поверхность, изображающая выпуклую функцию, не имеет касательной, мы берем вместо нее любую из опорных плоскостей.

Пусть
$$z = z(x_1, \ldots, x_n) \equiv z(\overline{x}) \tag{1}$$
— выпуклая функция, имеющая второй обобщенный дифференциал в точке $\overline{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, и пусть $z_i(\overline{x}_0)$ — значения частных производных в этой точке.

Вместо функции $z(\overline{x})$ мы можем рассматривать функцию
$$z(\overline{x}) - z(\overline{x}_0) - \sum_{i=1}^{n} z_i(\overline{x}_0)(x_i - x_i^0). \tag{2}$$

В точке $\overline{x}_0$ эта функция и ее первые производные исчезают. Кроме того, если обобщенный второй дифференциал функции $z(\overline{x})$ в точке $\overline{x}_0$ — вырождающаяся форма, то, прибавляя к $z(\overline{x})$ функцию
$$z = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0), \tag{3}$$
мы избавимся от этого. Если наша теорема будет доказана для функции, исправленной посредством такой добавки, то она будет доказана и для исходной функции, так как добавка (3) аналитическая.

Наконец, можно принять рассматриваемую точку за начало координат, т. е. считать
$$x_i^0 = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Итак, мы будем рассматривать выпуклую функцию
$$z = z(\overline{x}) \equiv z(x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

исчезающую вместе со своими первыми производными в точке $(0, \ldots, 0)$ и имеющую в этой точке обобщенный второй дифференциал

$$z_{tt}(\overline{x}_0) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k, \tag{6}$$

являющийся определенной положительной формой.

Построим поверхность Φ, представляемую в прямоугольных координатах уравнением (5). Пересекая ее плоскостью P_z, параллельной плоскости $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и проходящей от нее на расстоянии z, получим фигуру D'_z.

Уравнение опорной плоскости к Φ в точке $x_1, \ldots, x_n, z$ будет

$$\sum_{i=1}^{n} z_i(X_i - x_i) = Z - z. \tag{7}$$

Здесь z_i — частные производные $z(\overline{x})$ по x_i или числа, заменяющие их согласно указанному выше условию.

Пересечение этой плоскости с плоскостью P_z даст опорную плоскость к фигуре D'_z. Так как на P_z $Z = z$, то для пересечения получаем

$$\sum_{i=1}^{n} z_i(X_i - x_i) = 0. \tag{8}$$

Деля на $s = \sqrt{\sum x_i^2}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{s} X_i = \sum_{i=1}^{n} z_i\xi_i. \tag{9}$$

Направляющие косинусы нормали к этой плоскости будут

$$\eta'_i = \frac{z_i/s}{\sqrt{\sum\limits_k (z_k/s)^2}}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Если фигуру D'_z увеличить в $1/\sqrt{2z}$ раз и устремить z к нулю, то в пределе получим индикатрису D в точке $(0, \ldots, 0)$, т. е. эллипсоид с уравнением

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k = 1. \tag{11}$$

При подобном увеличении фигуры D_z' направления ее опорных плоскостей не изменяются, а при $s \to 0$ они стремятся к опорным плоскостям к эллипсоиду (11). Поэтому при $s \to 0$ η_i' стремятся к направляющим косинусам нормали к эллипсоиду

$$\eta_i = \frac{\sum\limits_k a_{ik}\xi_k}{\sqrt{\sum\limits_i \left(\sum\limits_k a_{ik}\xi_k\right)^2}}. \tag{12}$$

Здесь $\xi_i = x_i/s$ — направляющие косинусы радиуса, на конце которого берется нормаль, т. е. те же, что и в уравнении (9).

Покажем теперь, что знаменатель в выражениях (10) имеет пределом знаменатель в формуле (12).

Пусть z_t — обобщенная [5] производная от $z(\overline{x})$ по s в направлении $t(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в точке на луче t, выбранная так, что

$$\frac{z_t}{s} = \sum_i \frac{z_t}{s}\xi_i. \tag{13}$$

Это возможно, так как касательные плоскости, где их нет, у нас заменяют опорные плоскости, и для них z_i имеют тот же смысл, что и для касательных плоскостей.

Вместе с тем по (10)

$$\frac{z_i}{s} = \eta_i'\sqrt{\sum_k \left(\frac{z_k}{s}\right)^2}. \tag{14}$$

Подставляя в (13), получим

$$\sqrt{\sum_k \left(\frac{z_k}{s}\right)^2} = \frac{z_t/s}{\sum\limits_i \xi_i\eta_i'}. \tag{15}$$

При $s \to 0$ имеем

$$\lim_{s\to 0}\frac{z_t}{s} = z_{tt}, \tag{16}$$

так как для выпуклой функции из существования обобщенной второй производной следует существование равной ей обычной второй производной. Кроме того, как показано,

$$\lim_{s\to 0}\eta_i' = \eta_i. \tag{17}$$

[5] В том же смысле, что и частные производные z_i.

Поэтому

$$\lim_{s\to 0}\sqrt{\sum_k \left(\frac{z_k}{s}\right)^2} = \frac{z_{tt}}{\sum\limits_i \xi_i\eta_i}. \tag{18}$$

Подставляя сюда выражение z_{tt} из формулы (6) и выражение η_i из формулы (12), получаем

$$\lim_{s\to 0}\sqrt{\sum_k \left(\frac{z_k}{s}\right)^2} = \sqrt{\sum_k \left(\sum_i a_{ik}\xi_k\right)^2}. \tag{19}$$

Наконец, так как η_i' стремится к η_i, то из формул (10) и (12) имеем

$$\lim_{s\to 0}\frac{z_i}{s} = \sum_k a_{ik}\xi_k. \tag{20}$$

Но предел, стоящий здесь, есть не что иное, как производная от z_i по длине отрезка s в направлении t. Поэтому окончательно

$$\frac{dz_i}{ds} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{dx_k}{ds}. \tag{21}$$

(Очевидно, $\xi_k = dx_k/ds$.)

Это и есть результат, к которому мы стремились. В частности, при дифференцировании вдоль оси x_j получаем

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}$$

и так как $a_{ij} = a_{ji}$, то смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования.

Следует, однако, заметить, что этот последний результат вытекает из дифференцируемости частных производных z_i. То, что они, в случае их несуществования, заменяются некоторыми средними между правыми и левыми производными, не играет роли, как это легко усмотреть, если несколько обобщить известные рассуждения, доказывающие относящуюся к перестановке дифференцирований теорему Юнга.

§ 4. *Доказательство равномерности*

Теорема. *Пусть в точке $\overline{x}_0$ выпуклая функция $z(\overline{x})$ дважды дифференцируема; s — длины отрезков во всевозможных направлениях, исходящих из $\overline{x}_0$; $z_i = \partial z/\partial x_i$ или в точках несуществования $\partial z/\partial x_i$ представляют любые значения между левой и правой производными.*

В точке $\overline{x}_0$

$$\left|\frac{\Delta z_i}{\Delta s} - \frac{dz_i}{ds}\right| < \varepsilon(\Delta s),$$

где $\varepsilon(\Delta s)$ — бесконечно малое, вместе с Δs одинаковое для всех направлений и для всех возможных определений z_i (Δz_i — как всегда — приращение z_i при смещении из точки $\overline{x}_0$ на Δs).

Относительно функции $z(\overline{x})$ мы сохраняем все условия, введенные в предыдущем параграфе. Обозначения будут иметь тот же смысл.

Доказательство теоремы распадается на две части, согласно двум предельным переходам, рассмотренным в предыдущем параграфе.

1. Докажем, что $\eta_i' \to \eta_i$ равномерно для всех направлений.
2. Докажем, что

$$\sum_i \left(\frac{z_i}{s}\right)^2 \to \sum_i \biggl(\sum_k a_{ik}\xi_k\biggr)^2$$

также равномерно. Так как $z_i/s = \sqrt{\sum (z_k/s)^2} \cdot \eta_i$, то тем самым будет доказана наша теорема.

1. Первое есть непосредственное следствие такой леммы.

Лемма. *Пусть последовательность выпуклых тел $H_1, H_2, \ldots$ сходится к выпуклому телу H, содержащему внутри точку O и имеющему в каждой точке поверхности единственную опорную плоскость. Тогда нормали к опорным плоскостям $H_1, H_2, \ldots$ в точках, лежащих на одном луче, исходящем из O, сходятся к нормали к опорной плоскости тела H в точке, лежащей на том же луче, и при том равномерно для всех лучей.*

Допустим, вопреки теореме, что существует последовательность нормалей $\overline{n}_{\nu_1}$, $\overline{n}_{\nu_2}, \ldots$ к опорным плоскостям тел $H_{\nu_1}, H_{\nu_2}, \ldots$ такая, что хотя $\nu_i \to \infty$, тем не менее для нормалей $\overline{n}^0_{\nu_1}$, $\overline{n}^0_{\nu_2}, \ldots$ к опорным плоскостям тела H в точках, лежащих на соответственных лучах $L_{\nu_1}, L_{\nu_2} \ldots$, имеют место неравенства

$$\left|\overline{n}_{\nu_i} - \overline{n}^0_{\nu_i}\right| > \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Можно, конечно, считать, что лучи L_{ν_i} сходятся к некоторому лучу L. Пусть $\overline{n}^0$ — нормаль к опорной плоскости тела H в точке на луче L. Тогда $\overline{n}^0_{\nu_i}$ и $\overline{n}_{\nu_i}$ сходятся к $\overline{n}^0$ [6]. Это, однако, противоречит неравенствам (1). Тем самым лемма доказана.

2. Теперь докажем равномерность второго предельного перехода.

Пусть $H(\overline{u}) \equiv H(u_1, \ldots, u_{n+1})$ — опорная функция поверхности $z = z(\overline{x})$. Здесь $\overline{u}$ — вектор внешней нормали к опорной плоскости, а $u_1, \ldots, u_{n+1}$ — его составляющие. Как известно, опорная функция выпукла и положитель-

[6] См., напр., [3, § 1, лемма I и § 2, лемма I].

но однородна первой степени. Поэтому в пространстве $u_1, \ldots, u_{n+1}, H$ она изображается выпуклым конусом («H-конусом»)

$$H = H(u_1, \ldots, u_{n+1})$$

с вершиной в начале (т. е. $H(0, \ldots, 0) = 0$).

Начало координат в нашем исходном пространстве, в котором лежит поверхность $z = z(\overline{x})$, находится в исследуемой точке, и поверхность касается в этой точке плоскости $z = 0$. Поэтому у нормального вектора $\overline{u}_0$ в данной точке $u_1 = \ldots = u_n = 0$; поверхность обращена выпуклостью в сторону $z < 0$, а поэтому $u_{n+1} < 0$. Кроме того,

$$H(\overline{u}_0) = H(0, \ldots, 0, u_{n+1}) = 0.$$

Следовательно, H-конус касается плоскости $H = 0$ по отрицательной полуоси u_{n+1}.

Пересекая H-конус плоскостью $u_{n+1} = -1$, получим в сечении выпуклую поверхность

$$H = H(u_1, \ldots, u_n, -1).$$

Это «H-поверхность» в $(n+1)$-мерном пространстве $u_1, \ldots, u_n, H$. Она касается плоскости $u_1, \ldots, u_n$ в начале (т. е. в точке $u_1 = \ldots = u_n = H = 0$).

Расстояние от начала $(u_1 = \ldots = u_n = H = 0, u_{n+1} = -1)$ до точки в этой плоскости равно

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} = \operatorname{tg} \theta, \tag{1a}$$

где θ — угол между векторами $\overline{u}_0(0, \ldots, 0, -1)$ и $\overline{u}(u_1, \ldots, u_n, -1)$.

Рассмотрим построение индикатрисы D «H-поверхности» в точке $u_1 = \ldots = u_n = H = 0$.

Для радиуса r_l индикатрисы имеем

$$r_l = \lim_{H \to 0} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{2H}} = \frac{1}{\sqrt{R_l}}. \tag{2}$$

Индикатриса D здесь существует и R_l в данной формуле есть радиус кривизны цилиндра, описанного около исходной поверхности. (Направляющая этого цилиндра имеет в исследуемой точке направление l.)

Действительно, в исследуемой точке на исходной поверхности существует эллиптическая индикатриса D. Возьмем направление l и построим опорные плоскости к сечениям D'_z данной поверхности, перпендикулярные l. (D'_z — сечение поверхности плоскостью P_z, параллельной плоскости $Z = 0$.) Эти $(n-1)$-мерные плоскости огибают цилиндр, описанный около поверхности.

Если h_l — расстояние от начала до опорной плоскости к D'_z (расстояние в плоскости P_z), то радиус кривизны построенного цилиндра

$$R_l = \lim_{z\to 0} \frac{h_l^2}{2z}. \tag{3}$$

Предел этот существует и равен квадрату расстояния от начала до соответствующей опорной плоскости к индикатрисе D. (Это следует из того, что $h_l/\sqrt{2z}$ есть не что иное, как расстояние до опорной плоскости к фигуре $D_z = (1/\sqrt{2z})D'_z$ и $D_z \to D$ при $z \to 0$, а потому сходятся и эти расстояния.)

С другой стороны, радиус описанного цилиндра можно, как известно, получить иначе. Именно [7)]

$$R_l = \lim_{\theta\to 0} \frac{2H}{\operatorname{tg}^2\theta}. \tag{4}$$

Этим показано, что предел в формуле (2) действительно существует. Так как предельный переход в (2) дает построение индикатрисы «H-поверхности», то, в силу выпуклости этой поверхности, этот предельный переход происходит равномерно для всех направлений. Поэтому в формуле (4) предельный переход также равномерен для всех l.

Вычислим теперь H. Это есть значение опорной функции $H = H(u_1, u_2, \ldots, u_n, -1)$. Уравнение опорной плоскости имеет вид

$$\sum_{i=1}^n z_i X_i - Z = \sum_{i=1}^n z_i x_i - z. \tag{5}$$

Здесь составляющие нормального вектора суть $z_1, \ldots, z_n, -1$. Это и есть $u_1, \ldots, u_n, -1$. Поэтому соответствующее значение опорной функции дается правой частью уравнения (5):

$$H = \sum_i z_i x_i - z. \tag{6}$$

Вместе с тем из формулы (1а) и из того, что $u_i = z_i$, имеем

$$\operatorname{tg}^2\theta = \sum_{i=1}^n z_i^2. \tag{7}$$

[7)] Рассмотрим направляющую описанного цилиндра, и пусть $H(u, v)$ — ее опорная функция. Она совпадает с опорной функцией к поверхности для тех нормалей $\overline{u}$, которые общие у поверхности и у цилиндра. Радиус кривизны кривой с опорной функцией $H(u, v)$ в точке с нормалью $u = 0$, $v = 1$ равен, как известно, $\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2}(0, 1)$ (см., напр., [8, § 94]). Имея в виду, что $u = \operatorname{tg}\theta$, получаем нашу формулу.

Наконец,

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{x_i}{s} = \sum_{i=1}^{n} z_i \xi_i = z_t \tag{8}$$

есть производная от $z(\overline{x})$ в направлении t. Направление t идет в ту точку на индикатрисе D, где нормаль к ней имеет направление l.

Поэтому имеем

$$\frac{2H}{\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2z_t/s - 2z/s^2}{\sum (z_i/s)} \to R_l \tag{9}$$

равномерно по l (или по t) при $H \to 0$.

Если $H \to 0$, то $s \to 0$ равномерно для всех направлений t. Иначе при сколь угодно малых H, а следовательно, и при $H = 0$, имелись бы точки, удаленные от исследуемой на конечное расстояние s. Однако $H = 0$ только в исследуемой точке.

Поэтому можно в (9) взять $s \to 0$, и предельный переход будет равномерен по t.

Из формулы (8), вводя фигурировавшие выше величины, получаем (см. (15) § 3)

$$\frac{z_t}{s} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{z_i}{s}\right)^2} \cdot \sum_i \xi_i \eta_i' \to z_{tt}. \tag{10}$$

Как уже доказано, $\eta_i' \to \eta_i$ равномерно.

$$\frac{2z}{s^2} \to z_{tt} \tag{11}$$

также равномерно, потому что $s/\sqrt{2z}$ есть радиус выпуклой фигуры D_z, которая при $z \to 0$ стремится к индикатрисе D. (При $z \to 0$ $\quad s \to 0$ равномерно, так как иначе при $z = 0$ имелись бы точки, отличные от рассматриваемой.)

Теперь уже простое вычисление приведет нас к желаемому результату.

Предельный переход в формуле (9), если принять во внимание (10) и (11), дает

$$\lim_{s\to 0} \sum_i \left(\frac{z_i}{s}\right)^2 = \frac{z_{tt}}{R_l} \tag{12}$$

или

$$\sqrt{\sum_i \left(\frac{z_i}{s}\right)^2} = \sqrt{\frac{z_{tt}}{R_l}} + \varepsilon. \tag{12a}$$

Нам нужно показать, что $\varepsilon \to 0$ равномерно по t. Предельный переход в формуле (10) дает в связи с (12)

$$\lim \sum_i \xi_i \eta_i' = \sum_i \xi_i \eta_i = \sqrt{z_{tt} R_l} \tag{13}$$

или

$$\sum_i \xi_i \eta_i' = \sqrt{z_{tt} R_l} + \alpha, \tag{13a}$$

где $\alpha \to 0$ равномерно по t, так как $\eta_i' \to \eta_i$ равномерно. Формулы (12a) и (13a) при подстановке в (10) дают

$$\frac{z_t}{s} = \left(\sqrt{\frac{z_{tt}}{R_l}} + \varepsilon\right)\left(\sqrt{z_{tt} R_l} + \alpha\right). \tag{14}$$

По формуле (11)

$$\frac{2z}{s^2} = z_{tt} + \beta, \tag{15}$$

где $\beta \to 0$ равномерно по t.

Наконец, формула (9), если в нее подставить (12a), (14) и (15), дает

$$(R_l + \gamma)\left(\sqrt{\frac{z_{tt}}{R_l}} + \varepsilon\right)^2 = 2\left(\sqrt{\frac{z_{tt}}{R_l}} + \varepsilon\right)\left(\sqrt{z_{tt} R_l} + \alpha\right) - (z_{tt} + \beta), \tag{16}$$

где $\gamma \to 0$ равномерно по t.

Это квадратное уравнение относительно ε дает для него выражение, стремящееся к нулю вместе с α, β, γ, и так как последние стремятся к нулю равномерно, то же получаем для ε.

Заметим, что теоремы, доказанные нами в предыдущем и в этом параграфах, существенно предполагают выпуклость функции $z(\overline{x})$. Если отказаться от этого требования, то можно построить примеры функций, представляющих одну из следующих особенностей:

1. В точке $\overline{x}_0$ функция $z(\overline{x}_0)$ имеет второй обобщенный дифференциал, но нигде в окрестности этой точки не имеет первых производных.

2. В точке $\overline{x}_0$ функция $z(\overline{x}_0)$ имеет обобщенный второй дифференциал и в точках окрестности $\overline{x}_0$ дважды дифференцируема, но не имеет обычных вторых производных в точке $\overline{x}_0$.

3. В точке $\overline{x}_0$ и в ее окрестности функция $z(\overline{x}_0)$ дважды дифференцируема, но предельный переход при вычислении производных от первых производных в точке $\overline{x}_0$ не равномерен по всем направлениям.

Принцип построения подобных примеров прост.

Пусть $r^2 = f_z(\varphi)$ — кривые в полярных координатах r, φ, меняющиеся вместе с z.

Построим поверхность, представляемую в цилиндрических координатах уравнением

$$r^2 = 2zf_z(\varphi).$$

Если $f_z(\varphi) \to 1$ при $z \to 0$, то в точке 0 индикатрисой поверхности является круг и функция $z(r, \varphi)$ здесь имеет обобщенный второй дифференциал. Однако и при этом условии легко придать функциям $f_z(\varphi)$ такие свойства, чтобы получить любую из указанных особенностей 1–3.

§ 5. *Сферическое изображение выпуклой поверхности*

Так как всякая выпуклая поверхность по определению есть кусок границы выпуклого тела, то, не ограничивая общности, мы будем рассматривать полную поверхность выпуклого тела H (в n-мерном пространстве).

Если через точку A на H проходит опорная плоскость с нормалью $\overline{n}$, то будем говорить, что в точке A есть нормаль $\overline{n}$.

Раз навсегда возьмем единичный шар E, на котором будем рассматривать сферическое изображение.

Сферическим изображением точки A на H назовем множество концов нормалей в точке A, отложенных из центра E (из выпуклости H следует, что сферическое изображение точки выпукло). Сферическим изображением $\omega(\sigma)$ множества σ на поверхности H назовем сумму сферических изображений его точек. Из этого определения ясно, что

$$\omega(\sigma_1 \cup \sigma_2) = \omega(\sigma_1) \cup \omega(\sigma_2). \tag{1}$$

Аналогично можно определить «обратное сферическое отображение» [3, § 1, 2]. Пусть на единичном шаре E задано множество ω. Обозначим $\sigma(\omega)$ множество всех тех точек на H, в которых есть нормали, идущие в ω, если их отложить из центра E. Свойства обратного сферического отображения ω на $\sigma(\omega)$ рассмотрены в [3]. Полученные там результаты легко могут быть перенесены на прямое сферическое отображение σ на $\omega(\sigma)$. Обратно, все новые факты относительно прямого сферического отображения, которые мы здесь получим, дословно вместе с их доказательствами, переносятся на обратное сферическое изображение. Нужно только менять местами точку и нормаль в ней (соответственно нормаль и точка с такой нормалью) σ и ω, $\omega(\sigma)$, $\sigma(\omega)$. Поэтому всякий раз, когда мы формулируем теорему об отображении σ на $\omega(\sigma)$, то подразумеваем, что имеет место такая же теорема для отображения ω на $\sigma(\omega)$.

Заметим прежде всего, что оба отображения не являются обратными друг для друга в обычном смысле, а именно, вообще говоря,

$$\omega \neq \omega(\sigma(\omega)), \quad \sigma \neq \sigma(\omega(\sigma)).$$

Например, возьмем за σ вершину многогранника, тогда $\sigma(\omega(\sigma))$ есть сумма граней, сходящихся в этой вершине.

Вместе с тем $\sigma \subset \sigma(\omega(\sigma))$ и $\omega \subset \omega(\sigma(\omega))$, так как если точка A принадлежит σ, то нормаль в ней принадлежит $\omega(\sigma)$, и тогда по определению $\sigma(\omega(\sigma))$ содержит точку A.

Лемма I. *Если нормали $\overline{n}_1, \overline{n}_2, \ldots$ в точках $A_1, A_2, \ldots$ сходятся к нормали $\overline{n}$, то во всякой точке сгущения A точек $A_1, A_2, \ldots$ есть нормаль $\overline{n}$.*

Пусть $A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots$ сходятся к точке A. Нормали $\overline{n}_{k_1}, \overline{n}_{k_2}, \ldots$ сходятся к $\overline{n}$. Поэтому опорные плоскости в точках A_{k_i} с нормалями n_{k_i} сходятся к опорной плоскости в точке A с нормалью $\overline{n}$. (Предел опорных плоскостей есть опорная плоскость.)

Лемма II. *Замыкание сферического изображения содержится в сферическом изображении замыкания.*

Будем обозначать замыкание чертой наверху.

Пусть $\overline{n} \in \overline{\omega(\sigma)}$. Тогда существует последовательность $\overline{n}_i \to \overline{n}$ и $\overline{n}_i \in \omega(\sigma)$ [8]. По определению $\omega(\sigma)$ в множестве σ есть точки A_i с нормалями $\overline{n}_i$. Каждая точка A_i, предельная для последовательности из точек A_i, принадлежит $\overline{\sigma}$. Поэтому каждая нормаль в ней принадлежит $\omega(\overline{\sigma})$. Вместе с тем по лемме I $\overline{n}$ — нормаль в точке A, а поэтому $\overline{n} \in \omega(\overline{\sigma})$. Следовательно, $\overline{\omega(\sigma)}$ содержится в $\omega(\overline{\sigma})$.

Следствие. *Если σ замкнуто, то и $\omega(\sigma)$ замкнуто.*

Имеем $\sigma = \overline{\sigma}$, а по доказанному $\overline{\omega}(\sigma) \subset \omega(\overline{\sigma})$, и так как $\omega(\sigma) \subset \overline{\omega(\sigma)}$, то $\omega(\sigma) = \overline{\omega(\sigma)}$.

Лемма III. *Если σ связно, то и $\omega(\sigma)$ связно.*

Пусть σ связно и $\omega(\sigma) = \omega_1 \cup \omega_2$, где ω_1, ω_2 замкнуты относительно $\omega(\sigma)$. Нужно показать, что пересечение $\omega_1 \cap \omega_2$ не пусто.

Так как

$$\sigma \subset \sigma(\omega(\sigma)) = \sigma(\omega_1 \cup \omega_2) = \sigma(\omega_1) \cup \sigma(\omega_2),$$

то

$$\sigma = \sigma(\omega_1) \cup \sigma(\omega_2).$$

Покажем, что $\sigma(\omega_1)$ и $\sigma(\omega_2)$ замкнуты относительно σ.

Пусть $A_i \to A$, $A_i \in \sigma(\omega_1)$ и $A \in \sigma$; $\overline{n}_i$ — нормали в точках A_i, принадлежащие ω_1 (по определению $\sigma(\omega_1)$, таковые существуют). Пусть $\overline{n}_{i_k} \to \overline{n}$.

[8] Для краткости точки на границе шара E мы обозначаем символом соответствующей нормали. Стрелка означает сходимость.

По лемме I (двойственной) $\overline{n}$ — нормаль в точке A, а потому принадлежит $\omega(\sigma)$.

Вместе с тем она принадлежит замыканию ω_1, а следовательно, — ω_1 (так как ω_1 замкнуто относительно $\omega(\sigma)$). Поскольку $\overline{n} \in \omega_1$, то $A \in \sigma(\omega_1)$. Этим доказано, что $\sigma(\omega_1)$ замкнуто относительно σ. Так же докажем это свойство для $\sigma(\omega_2)$.

Так как σ связно, то пересечение $\sigma(\omega_1)$ и $\sigma(\omega_2)$ не пусто. Пусть точка C принадлежит этому пересечению и $A_i \to C$, $A_i \in \sigma(\omega_1)$ и $B_i \to C$, $B_i \in \sigma(\omega_2)$. Пусть $\overline{n}_{i_k}$ и $\overline{m}_{i_k}$ — нормали в точках A_{i_k} и B_{i_k}, сходящиеся к нормалям $\overline{n}$, $\overline{m}$ в точке C, и $\overline{n}_{i_k} \in \omega_1$, $\overline{m}_{i_k} \in \omega_2$. (Во всякой точке $\sigma(\omega_1)$ есть нормаль, принадлежащая ω_1 и аналогично для $\sigma(\omega_2)$.)

Так как ω_1, ω_2 замкнуты относительно $\omega(\sigma)$, а $\overline{n}$ и $\overline{m}$ принадлежат $\omega(\sigma)$, то они принадлежат соответственно ω_1, ω_2. Но сферическое изображение точки C, которому принадлежат $\overline{n}$ и $\overline{m}$, выпукло, а потому связно. Следовательно, его нельзя разложить на два непересекающихся относительно замкнутых множества, входящих в ω_1 и ω_2. Поэтому пересечение $\omega_1 \cap \omega_2$ не пусто.

Лемма IV. *Граница сферического изображения содержится в сферическом изображении границы.*

Пусть Ω — полная поверхность единичного шара E, а Σ — полная поверхность H. Очевидно, имеем

$$\Omega = \omega(\Sigma) = \omega(\Sigma \setminus \sigma) \cup \omega(\sigma).$$

Следовательно,

$$\Omega \setminus \omega(\sigma) \subset \omega(\Sigma \setminus \sigma),$$

т. е. дополнение сферического изображения σ содержится в сферическом изображении дополнения σ.

Граница $\omega(\sigma)$ есть пересечение $\overline{\omega(\sigma)} \cap \overline{(\Omega \setminus \omega(\sigma))}$. По доказанному

$$\overline{\Omega \setminus \omega(\sigma)} \subset \overline{\omega(\Sigma \setminus \sigma)},$$

а по лемме II

$$\overline{\omega(\sigma)} \subset \omega(\overline{\sigma}), \quad \overline{\omega(\Sigma \setminus \sigma)} \subset \omega(\overline{\Sigma \setminus \sigma}).$$

Беря пересечения левых и правых частей этих включений, имеем

$$\text{граница } \omega(\sigma) \subset \omega(\overline{\sigma}) \cap \omega(\overline{\Sigma \setminus \sigma}).$$

Вместе с тем покажем, что

$$\omega(\overline{\sigma}) \cap \omega(\overline{\Sigma \setminus \sigma}) \subset \omega(\overline{\sigma} \cap \overline{\Sigma \setminus \sigma}),$$

т. е. содержится в сферическом изображении границы σ. Тем самым докажем, что граница $\omega(\sigma)$ содержится в сферическом изображении границы σ.

Пусть $\overline{n} \in \omega(\overline{\sigma}) \cap \omega(\overline{\Sigma \setminus \sigma})$, $A \in \overline{\sigma}$ и $B \in \overline{\Sigma \setminus \sigma}$ — точки с нормалью $\overline{n}$. Если точки A и B совпадают, то они принадлежат $\overline{\sigma} \cap \overline{\Sigma \setminus \sigma}$ и $\overline{n} \in \omega(\overline{\sigma} \cap \overline{\Sigma \setminus \sigma})$. Если же A и B не совпадают, то на H весь отрезок AB лежит в опорной плоскости с нормалью $\overline{n}$. На этом отрезке имеется хотя бы одна точка C, принадлежащая границе σ. В C есть нормаль $\overline{n}$, а потому $\overline{n} \in \omega(\overline{\sigma} \cap \overline{\Sigma \setminus \sigma})$. Тем самым наше утверждение доказано.

Приведенные леммы раскрывают до некоторой степени общий характер сферического изображения выпуклой поверхности.

Отложив дальнейшие общие исследования до следующих параграфов, рассмотрим сферическое изображение специального типа множеств, которые, в согласии с распространенной терминологией, назовем «шапочками». Шапочкой называется выпуклая поверхность, отрезаемая от замкнутой выпуклой поверхности плоскостью.

Лемма V. *Сферическое изображение шапочки звездно выпукло.*

Это означает следующее. Пусть P — плоскость, отрезающая данную шапочку σ; $\overline{n}$ — нормаль к P, направленная в сторону σ; нормали $\overline{n}$ соответствует на шаре E точка $\overline{n}$. Всякий большой круг, проходящий через $\overline{n}$, пересекает сферическое изображение шапочки σ, по связной дуге, содержащей $\overline{n}$. (Это и есть свойство звездной выпуклости.)

Возьмем большой круг ω_1, проходящий через точку $\overline{n}$. Множество $\sigma(\omega_1)$ будет множеством точек касания всей поверхности с описанным около нее цилиндром, сферическое изображение которого есть ω_1. Этот цилиндр выпуклый, и плоскость P отрезает от него часть, касающуюся шапочки. Сферическое изображение ω_2 этой части цилиндра совпадает с той частью ω_1, которая покрыта сферическим изображением шапочки. Но ω_2 есть связная дуга, в чем легко убедиться, заметив, что сферическое изображение цилиндра сводится к отображению его направляющей, получаемой в сечении, перпендикулярном образующим, на круг ω_1 посредством нормалей (т. е. сферическому отображению в 2-мерном пространстве).

Заметим, что сферическое изображение всякой шапочки данной поверхности выпукло только в том случае, если эта поверхность второго порядка (исключая тривиальные случаи конусов и цилиндров).

§ 6. *Полная кривизна*

Полной кривизной $K(\sigma)$ множества σ на выпуклой поверхности называется площадь его сферического изображения $\omega(\sigma)$. Для установления основных свойств полной кривизны нам понадобятся две леммы.

Лемма I. *Сферическое изображение множества точек, принадлежащих опорным плоскостям, содержащим каждая более одной точки поверхности, имеет меру нуль.*

Пусть $H(\overline{u})$ — опорная функция поверхности H. Рассмотрим «H-конус», уже фигурировавший в § 4. На нем опорным плоскостям, содержащим более одной точки поверхности H, соответствуют точки, через которые проходит более одной опорной плоскости [9)]. Поэтому наша лемма сводится к известной лемме о том, что множество точек на выпуклой поверхности, где есть более одной опорной плоскости, имеет меру нуль [9].

Лемма II. *Если пересечение $\sigma_1 \cap \sigma_2$ пусто, то пересечение $\omega(\sigma_1) \cap \omega(\sigma_2)$ имеет меру нуль.*

Если $\omega(\sigma_1) \cap \omega(\sigma_2)$ пусто, то доказывать нечего. Допустим, что есть точка $\overline{n}$, принадлежащая как $\omega(\sigma_1)$, так и $\omega(\sigma_2)$. Тогда как в σ_1, так и в σ_2 есть точки A_1 и A_2 с нормалью $\overline{n}$. Поскольку σ_1 и σ_2 не имеют общих точек, то точки A_1 и A_2 различны. По лемме I сферическое изображение множества всех таких точек $\overline{n}$ имеет меру нуль, а потому $\omega(\sigma_1) \cap \omega(\sigma_2)$ также имеет меру нуль.

Теорема. *Полная кривизна $K(\sigma)$ есть неотрицательная и вполне аддитивная функция множества σ на выпуклой поверхности, определенная для объединений замкнутых и открытых множеств.*

Неотрицательность $K(\sigma)$ явствует из определения.

Докажем, что $K(\sigma)$ аддитивна. Пусть σ_1 и σ_2 не имеют общих точек. $K(\sigma_1 \cup \sigma_2)$ есть площадь $\omega(\sigma_1 \cup \sigma_2)$.

По формуле (1) § 5 $\omega(\sigma_1 \cup \sigma_2) = \omega(\sigma_1) \cup \omega(\sigma_2)$. По лемме II пересечение $\omega(\sigma_1) \cap \omega(\sigma_2)$ имеет меру нуль. Поэтому площадь $\omega(\sigma_1 \cup \sigma_2)$ равна сумме площадей $\omega(\sigma_1)$ и $\omega(\sigma_2)$, т. е. $K(\sigma_1 \cup \sigma_2) = K(\sigma_1) + K(\sigma_2)$. (Здесь из существования $K(\sigma_1)$ и $K(\sigma_2)$ следует существование $K(\sigma_1 \cup \sigma_2)$.)

Покажем, что $K(\sigma)$ вполне аддитивна. Пусть σ_k — множества без общих точек, для которых определена $K(\sigma_k)$, и

$$\sigma_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k. \tag{1}$$

Положим

$$\sigma_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \sigma_k = \sigma^m, \tag{2}$$

[9)] Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — составляющие $\overline{u}$. Как известно, $\partial H/\partial u_i = x_i$ суть координаты точки с нормалью $\overline{u}$. Если нормаль $\overline{u}$ имеет не одна точка, то $\partial H/\partial u_i$ не существует.

тогда по аддитивности $K(\sigma)$

$$K(\sigma^m) = K(\sigma_0) \setminus \sum_{k=1}^{m} K(\sigma_k). \tag{3}$$

Нужно показать, что

$$K(\sigma_0) = \sum_{k=1}^{\infty} K(\sigma_k), \tag{4}$$

а для этого необходимо, чтобы

$$\lim_{m\to\infty} K(\sigma^m) = 0. \tag{5}$$

Множества σ^m образуют исчезающую последовательность, т. е. $\sigma^m \supset \sigma^{m+1}$ и $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \sigma^m$ пусто. Из того, что $\sigma^m \supset \sigma^{m+1}$, следует

$$\omega(\sigma^m) \supset \omega(\sigma^{m+1}).$$

Если пересечение всех $\omega(\sigma^m)$ пусто, то предел их мер равен нулю, т. е. имеет место (5). Пусть $\omega = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \omega(\sigma^m)$ не пусто и пусть точка $\overline{n} \in \omega$. В опорной плоскости с нормалью $\overline{n}$ лежат точки $A_1, A_2, \ldots$, принадлежащие соответственно множествам $\sigma^1, \sigma^2, \ldots$. Все эти точки не могут совпадать, так как пересечение всех σ^m пусто. Значит в опорной плоскости с нормалью $\overline{n}$ лежат разные точки. По лемме II множество всех таких нормалей имеет меру нуль. Следовательно, мера ω равна нулю. Но если $\omega(\sigma^m) \supset \omega(\sigma^{m+1})$, то мера их пересечения равна пределу их мер. Отсюда следует (5), а затем и (4).

Если σ замкнуто, то и $\omega(\sigma)$ замкнуто. Поэтому $K(\sigma)$ определена для замкнутых σ. Если σ открыто, то его дополнение $\Sigma\setminus\sigma$ замкнуто. (Здесь Σ — полная поверхность H.) σ и $\Sigma\setminus\sigma$ не имеют общих точек, так что пересечение $\omega(\sigma) \cap \omega(\Sigma \setminus \sigma)$ имеет меру нуль. Кроме того, $\omega(\sigma) \cup \omega(\Sigma \setminus \sigma) = \omega(\Sigma)$. Множества $\omega(\Sigma)$ и $\omega(\Sigma \setminus \sigma)$ измеримы как замкнутые ($\omega(\Sigma)$ есть полная поверхность шара E). Поэтому $\omega(\sigma)$ также измеримо, и

$$K(\sigma) = K(\Sigma) - K(\Sigma \setminus \sigma).$$

Этим самым $K(\sigma)$ определяется для открытых σ; наконец, по аддитивности она оказывается определенной и для сумм замкнутых и открытых множеств.

§ 7. *Сферическое изображение окрестности нормальной точки*

Пусть A — нормальная точка на поверхности H и P — касательная плоскость к ней. Примем A за начало координат, оси $x_1, \ldots, x_n$ расположим в плоскости P, а ось z направим по внутренней нормали. Окрестность точки A на поверхности H изобразится в этой системе координат уравнением

$$z = z(x_1, \ldots, x_n) \equiv z(\overline{x}), \tag{1}$$

где $z(\overline{x})$ — выпуклая функция.

Как раньше, $z_1(\overline{x}), \ldots, z_n(\overline{x})$ — обобщенные частные производные функции $z(\overline{x})$. Направляющие косинусы внешних нормалей к опорным плоскостям в точке $(x_1, \ldots, x_n, z)$ будут

$$\frac{z_i(\overline{x})}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} z_i(\overline{x})^2}} \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad \frac{-1}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} z_i(\overline{x})^2}}. \tag{2}$$

Причем в угловых точках $z_i(\overline{x})$ принимают все допустимые для них значения.

Вместо множеств σ в окрестности точки A мы будем рассматривать их проекции σ' на плоскость P. Каждому σ' в окрестности A обратно отвечает σ. Когда σ стягиваются в точку A, то относительное отклонение σ и σ' стремится к нулю.

Если F означает площадь множества, то

$$\lim_{\sigma \to A} \frac{F(\sigma')}{F(\sigma)} = 1. \tag{3}$$

Возьмем на единичном шаре сферическое изображение точки A — в точку A' и в ней касательную к E плоскость P'. Если перенести начало в точку A', то (2) дают координаты сферического изображения точки окрестности A. Однако вместо сферического изображения мы будем рассматривать проекцию его из центра шара на плоскость P'.

Тогда множеству σ' в окрестности A на плоскости P будет соответствовать множество $\omega'(\sigma')$ на плоскости P', являющееся проекцией $\omega(\sigma)$.

Очевидно, что если σ стягивается в точку A, то и $\omega(\sigma)$ стягивается в точку A, и [10)]

$$\lim_{\sigma \to A} \frac{F(\omega'(\sigma'))}{F(\omega(\sigma))} = 1. \tag{4}$$

[10)] Пусть $\sigma_k \supset \sigma_{k+1}$ и $\sigma_k \to A$. Тогда $\omega(\sigma_k) \supset \omega(\sigma_{k+1})$, и если бы пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \omega(\sigma_k)$ содержало более одной точки, то в A было бы более одной нормали.

Итак, вместо сферического отображения множеств σ на $\omega(\sigma)$ мы рассматриваем отображение множеств σ' на плоскости P на множества $\omega'(\sigma')$ на плоскости P'.

Точкам $(x_1, \ldots, x_n)$ на плоскости P будут тогда вследствие (2) отвечать на плоскости P' точки с координатами

$$z_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, z_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{5}$$

Согласно результату § 4

$$|z_i(\overline{x}) - \sum_{k=1}^{n} z_{ik}(0)x_k| < \varepsilon \cdot s \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

где $s = \sqrt{\sum x_k^2}$, а ε — бесконечно малое, вместе с s одинаковое для всех направлений $(x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$.

Расположив оси $x_1, \ldots, x_n$ по главным осям второго дифференциала в точке A, получим вместо (6)

$$|z_i(\overline{x}) - k_i x_i| < \varepsilon \cdot s \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

где k_i — главные кривизны в точке A.

Формула (7) означает, что отображение σ' на $\omega'(\sigma')$ так сказать «приближенно аффинное». (Может быть вырождающееся, если хоть одна из кривизн $k_i = 0$.)

Образы множеств σ', определяемые преобразованием

$$z_i = k_i x_i, \tag{8}$$

будем обозначать $\omega^0(\sigma')$.

Из формулы (7) следует, что отклонение $\omega'(\sigma')$ и $\omega^0(\sigma')$ бесконечно мало́ по отношению к отклонению σ' от точки A [11].

Характер приближения $\omega'(\sigma')$ и $\omega^0(\sigma')$ характеризует следующая лемма.

Лемма. *Пусть s таково, что отклонение $\omega'(\sigma')$ и $\omega^0(\sigma')$ меньше ε, как только отклонение σ' от A меньше s. Тогда, если отклонение σ' от A меньше s, область, получающаяся из $\omega^0(\sigma')$ выбрасыванием 2ε-окрестности ее границы, содержится в $\omega'(\sigma')$.*

В § 5 было доказано, что граница сферического изображения содержится в сферическом изображении границы. Поэтому граница $\omega'(\sigma')$ принадлежит ω' от границы σ'. Вместе с тем граница σ' переходит при отображении (8) в границу $\omega^0(\sigma')$. Отклонение границы σ' от A меньше s, а потому

[11] Отклонение двух множеств M_1 и M_2 есть наибольшая из точных верхних границ расстояний точек одного множества до другого.

сферическое изображение границы σ' содержится в ε-окрестности границы $\omega^0(\sigma')$. Следовательно, граница $\omega'(\sigma')$ содержится в ε-окрестности границы $\omega^0(\sigma')$. Вместе с тем $\omega^0(\sigma')$ содержится в ε-окрестности $\omega'(\sigma')$, а потому если из $\omega^0(\sigma')$ выбросить часть, принадлежащую ε-окрестности границы $\omega'(\sigma')$, то остаток будет содержаться в $\omega'(\sigma')$. Но граница $\omega'(\sigma')$ содержится в ε-окрестности границы $\omega^0(\sigma')$, а потому ε-окрестность ее содержится в 2ε-окрестности границы $\omega^0(\sigma')$. Потому тем более, если выбросим из $\omega^0(\sigma')$ 2ε-окрестность границы $\omega^0(\sigma')$, то остаток будет заключаться в $\omega'(\sigma')$.

Тем самым лемма доказана.

Пусть имеется последовательность множеств σ'_m, сходящихся к точке A. Пусть ε_m — произвольная последовательность положительных чисел, бесконечно малых по отношению к отклонению σ'_m от A. Назовем ε_m-остатком множества σ'_m ту его часть, которая получается выбрасыванием из σ'_m точек ε-окрестности его границы. Последовательность σ'_m назовем нормальной, если предел отношения площади ε-окрестности границы σ'_m к площади σ'_m равен нулю. Например, если σ'_m выпуклы и отношение диаметров объемлющего σ'_m и содержащегося в σ'_m шаров ограничено, то условие нормальности выполнено. Нормальной последовательности σ'_m соответствует нормальная последовательность σ_m.

Теорема. *Во всякой нормальной точке A существует производная от $K(\sigma)$ по любой нормальной последовательности σ_m, и она равна произведению главных кривизн в точке A, т. е.*

$$\lim_{\sigma_m \to A} \frac{K(\sigma_m)}{F(\sigma_m)} = k_1 k_2 \ldots k_n.$$

В силу преобразования (8) для площадей σ'_m и $\omega^0(\sigma'_m)$ имеем

$$\frac{F(\omega^0(\sigma'_m))}{F(\sigma'_m)} = k_1 k_2 \ldots k_n. \tag{9}$$

Пусть ни одна из кривизн $k_i \neq 0$. Тогда преобразование (8) не вырождающееся, и если σ'_m образуют нормальную последовательность, то и их аффинные образы $\omega^0(\sigma'_m)$ ее образуют. Пусть ε_m таковы, что отклонение $\omega^0(\sigma'_m)$ и $\omega'(\sigma'_m)$ меньше ε_m. ε_m — бесконечно малые по отношению к отклонению $\omega^0(\sigma'_m)$ от точки A'.

По выбору ε_m $\omega'(\sigma'_m)$ содержится в ε_m-окрестности $\omega^0(\sigma'_m)$, а так как предел отношения площади ε_m-окрестности границы $\omega^0(\sigma'_m)$ к площади самого $\omega^0(\sigma'_m)$ равен единице, то

$$\varlimsup_{m \to \infty} \frac{F(\omega'(\sigma'_m))}{F(\omega^0(\sigma'_m))} \leq 1. \tag{10}$$

Вместе с тем по доказанной лемме $\omega'(\sigma'_m)$ содержит $2\varepsilon_m$-остаток $\omega^0(\sigma'_m)$, а потому, принимая во внимание условие нормальности,

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{F(\omega'(\sigma'_m))}{F(\omega^0(\sigma'_m))} \geq 1. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F(\omega'(\sigma'_m))}{F(\omega^0(\sigma'_m))} = 1. \tag{12}$$

Сравнивая это с (9), получим

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F(\omega'(\sigma'_m))}{F(\sigma'_m)} = k_1 k_2 \ldots k_n. \tag{13}$$

Наконец, заменяя σ'_m на σ_m и $\omega'(\sigma'_m)$ на $\omega(\sigma_m)$ и имея в виду равенства (3) и (4), получим окончательно

$$\lim_{m\to\infty} \frac{K(\sigma_m)}{F(\sigma_m)} = k_1 k_2 \ldots k_n. \tag{14}$$

Пусть теперь, например, $k_1 = 0$. Пусть σ'_m — шары в плоскости P с центрами в A; d_m — радиус m-го шара, $d_m \to 0$.

$$F(\sigma'_m) = \varkappa_n d_m^n \tag{15}$$

($\varkappa_n$ — объем n-мерного единичного шара).

Множества $\omega^0(\sigma'_m)$ лежат в $(n-1)$-мерной плоскости, перпендикулярной главному направлению, соответствующему $k_1 = 0$. Если $k = \max k_i$, то площадь ε_m-окрестности $\omega^0(\sigma'_m)$ будет $\leq 2\varkappa_{n-1}\varepsilon_m(kd_m + \varepsilon_m)^{n-1}$. А так как $\omega'(\sigma'_m)$ содержится в этой ε_m-окрестности, то

$$F(\omega'(\sigma'_m)) \leq \varkappa_{n-1} 2\varepsilon_m (kd_m + \varepsilon_m)^{n-1}. \tag{16}$$

Деля (16) на (15) и имея в виду, что $\varepsilon_m/d_m \to 0$, получим

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F(\omega'(\sigma'_m))}{F(\sigma'_m)} = 0, \tag{17}$$

а следовательно (по формулам (3) и (4)),

$$\lim_{m\to\infty} \frac{K(\sigma_m)}{F(\sigma_m)} = 0. \tag{18}$$

По известной теореме об аддитивных функциях множеств отсюда следует, что производная от $K(\sigma)$ по любой нормальной последовательности множеств σ, сходящихся к A, равна нулю. Таким образом, наша теорема полностью доказана.

Особенно простую и наглядную форму полученные результаты приобретают, если за множества σ_m принимать шапочки, отрезаемые от поверхности плоскостями, параллельными касательной P в точке A. В этом случае σ_m — выпуклые тела в плоскости P; увеличенные в $1/\sqrt{2h_m}$ раз они сходятся к индикатрисе D (h_m — расстояние секущей плоскости от A). Множества $\omega'(\sigma'_m)$ звездно выпуклы (по лемме V § 5), и уклонение их от $\omega^0(\sigma'_m)$ относительно мало. Если индикатриса D — эллипсоид, то $\frac{1}{\sqrt{2h_m}}\sigma'_m$ сходятся к эллипсоидам, а $\frac{1}{\sqrt{2h_m}}\omega^0(\sigma'_m)$ и $\frac{1}{\sqrt{2h_m}}\omega'(\sigma'_m)$ также сходятся к эллипсоидам, получающимся из индикатрисы D преобразованием (8).

Следует отметить, что условие нормальности, налагаемое на последовательность σ_m, не является излишним. В нормальной точке A производная от $K(\sigma)$ в широком смысле может не существовать. (Напомним, что производной в широком смысле называется предел отношения $K(\sigma)$ к $F(\sigma)$ по любой регулярной последовательности σ, т. е. такой, что отношение площади σ к площади наименьшего объемлющего σ круга $(n-1)$-мерного шара с центром в A не стремится к нулю, когда σ стремится к точке A [2, гл. 3, § 4].)

Наметим пример указанного обстоятельства.

Возьмем единичный шар E. Начиная с плоскости большого круга, пересечем шар последовательностью параллельных плоскостей P_m так, чтобы площадь следующего сечения была в 2 раза меньше площади предыдущего. Пусть A — точка на E, к которой приближаются плоскости P_m.

Если в последовательные сечения вписывать правильные многоугольники V_m с ограниченно растущими числами сторон, то можно добиться того, что все они будут лежать на поверхности их выпуклой оболочки. (Достаточно, чтобы m-й многоугольник лежал вне усеченного конуса с $(m-1)$-м и $(m+1)$-м сечениями в основаниях.) Граница этой выпуклой оболочки будет бесконечногранной поверхностью S. На ней в точке A индикатриса D — единичный круг. Поэтому производная от $K(\sigma)$ по последовательности шапочек равна единице.

Примем за множество σ_m шапочку σ^0_m, отрезаемую от S плоскостью P_m, плюс все ребра, исходящие из вершин многоугольника V_m, тогда $F(\sigma_m) = F(\sigma^0_m)$. Сферическое изображение σ_m будет совпадать со сферическим изображением шапочки σ^0_{m-1}, отрезаемой плоскостью P_{m-1}, $\omega(\sigma_m) = \omega(\sigma^0_{m-1})$. По выбору плоскостей P_{m-1} и из того, что $F(\sigma_m) = F(\sigma^0_m)$, имеем

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F(\sigma^0_{m-1})}{F(\sigma_m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{F(\sigma^0_{m-1})}{F(\sigma^0_m)} = 2. \tag{19}$$

Вместе с тем

$$\lim_{m\to\infty}\frac{K(\sigma_{m-1}^0)}{F(\sigma_{m-1}^0)}=1, \tag{20}$$

а так как $\omega(\sigma_m)=\omega(\sigma_{m-1}^0)$, то

$$K(\sigma_m)=K(\sigma_{m-1}^0). \tag{21}$$

Сопоставляя эти формулы, получаем

$$\lim_{m\to\infty}\frac{K(\sigma_m)}{F(\sigma_m)}=2. \tag{22}$$

Из формулы (19) видно, что последовательность σ_m регулярная, так как круг, объемлющий σ_m, есть σ_{m-1}^0. Но эта последовательность ненормальная, потому что стороны многоугольников V_{n-1} убывают быстрее их диаметров и, следовательно, можно принять их длины за ε_m. Но ε_m-окрестность границы σ_m содержит разность $\sigma_{m-1}^0\setminus\sigma_m^0$, а ее площадь равна в пределе площади σ_m.

Из доказанной теоремы легко получается другая.

Теорема. *Если $K(\sigma)$ абсолютно непрерывна, то она равна интегралу от произведения главных кривизн по площади*

$$K(\sigma)=\int\limits_\sigma k_1k_2\dots k_n dF(\sigma).$$

Почти все точки на выпуклой поверхности нормальные. Поэтому $K(\sigma)$ имеет почти везде производную, равную произведению главных кривизн. А если вполне аддитивная функция абсолютно непрерывна, то она является интегралом своей производной.

§ 8. *Точки двукратной дифференцируемости опорной функции*

Пусть $H(\overline{u})=H(u_1,\dots,u_n)$ — опорная функция выпуклой поверхности H. Она — выпуклая и положительно однородная первой степени. Ее обобщенные частные производные $H_k(\overline{u})$ суть не что иное, как координаты x_k точек поверхности H, лежащие в опорной плоскости с внешней нормалью $\overline{u}$. $H(\overline{u})$ почти везде дважды дифференцируема, а так как она положительно однородна первой степени, то она дважды дифференцируема почти везде на единичном шаре $E\quad |\overline{u}|=1$.

Пусть в точке $\overline{n}_0$ на $E\quad H(\overline{u})$ дважды дифференцируема (здесь и далее $\overline{n}$ означает точку на E или соответствующую единичную нормаль). Центр E является началом, ось x_n направим в $\overline{u}_0$, тогда оси $x_1,\dots,x_{n-1}$ будут лежать в плоскости, параллельной касательной P к E в точке $\overline{n}_0$.

Из того что $H(\overline{u})$ — однородная первой степени, следует, что $H_k(\overline{u})$ — однородные нулевой степени. Поэтому в точке, координаты которой $(0,\ldots,0,1)$, $H(0,\ldots,0,1) = H(0,\ldots,0,u_n)$ и, следовательно,

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_n} = H_{kn}(\overline{n}_0) = 0. \tag{1}$$

В точке A на поверхности H с нормалью $\overline{n}_0$ возьмем начало системы координат $x_1,\ldots,x_n$, параллельной уже выбранной системе. Тогда на основании § 4 и того, что $H_k(\overline{n}) = x_k(\overline{n})$ — координаты точек на H с нормалями $\overline{n}$, имеем

$$\left| x_i(\overline{n}) - \sum_{k=1}^{n-1} H_{ik}(\overline{n}_0)u_k \right| < \varepsilon|\overline{n} - \overline{n}_0|. \tag{2}$$

Если оси $u_1,\ldots,u_{n-1}$ направить параллельно главным осям второго дифференциала $H(\overline{u})$, то (2) примет вид

$$|x_i(\overline{n}) - R_i(\overline{n}_0)u_i| < \varepsilon|\overline{n} - \overline{n}_0|. \tag{3}$$

Здесь $R_i(\overline{n}_0)$ — главные радиусы кривизны в точке A, а u_i — координаты нормального вектора $\overline{n}$.

В точке A описанные цилиндры имеют радиусы кривизны, которые связаны с главными радиусами кривизны известным соотношением

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i \cos^2 \varphi_i, \tag{4}$$

где φ_i — углы, образуемые направляющей с главными направлениями. Эта известная формула получается из того, что вторая производная от $H(\overline{u})$ в данном направлении и есть радиус кривизны. Поэтому для наличия у $H(\overline{u})$ второго дифференциала необходимо и достаточно, чтобы радиусы кривизны описанных цилиндров существовали и удовлетворяли соотношению (4).

Если h — опорная функция сечения поверхности H плоскостью, перпендикулярной $\overline{n}_0$, на расстоянии x_n от точки A, то

$$\lim_{x_n \to 0} \frac{h^2}{2x_n} \tag{5}$$

равен, с одной стороны, радиусу кривизны описанного цилиндра, а с другой — квадрату опорной функции индикатрисы D.

Если сравнить квадрат опорной функции индикатрисы D с формулой (4), то из этих замечаний легко получается следующая простая характеризация точек дифференцируемости опорной функции.

Для того чтобы опорная функция $H(\overline{u})$ была дважды дифференцируема в точке $\overline{n}_0$, необходимо и достаточно, чтобы в точке A с нормалью $\overline{n}_0$ существовала индикатриса D, являющаяся эллипсоидом (может быть вырождающимся в эллипсоид меньшего числа измерений или даже в точку). (Здесь важно иметь в виду, что индикатриса D относится к элементу: точка A и опорная плоскость в A с нормалью $\overline{n}_0$.) Формула (3) устанавливает приближенно аффинное (может быть вырождающееся, если есть $R_i = 0$) отображение окрестности точки $\overline{n}_0$ на E на окрестность точки A на H. Это есть обратное сферическое отображение ω на $\sigma(\omega)$. Для него верны все результаты предыдущего параграфа вместе с их доказательствами, полученные для прямого сферического отображения окрестности нормальной точки, нужно только поменять ролями единичный шар и поверхность H.

Если площадь множества $\sigma(\omega)$ обозначить $F(H,\omega)$, то определенная таким образом функция множества ω будет дифференцируема в точке $\overline{n}_0$ по любой нормальной последовательности множеств ω_m, и

$$\lim_{\omega_m \to \overline{n}_0} \frac{F(H,\omega_m)}{F(\omega_m)} = R_1 R_2 \ldots R_{n-1}. \tag{6}$$

Поверхностная функция $F(H,\omega)$ поверхности H введена мною в [3, § 2, 4], где введены также смешанные поверхностные функции. Определение их следующее. Пусть $H = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_m H_m$ — линейная комбинация выпуклых тел с положительными коэффициентами. Поверхностная функция $F(H,\omega)$ есть однородный многочлен $(n-1)$-й степени относительно λ_k:

$$F(H,\omega) = \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \lambda_{k_1} \ldots \lambda_{k_{n-1}} F(H_{k_1},\ldots,H_{k_{n-1}};\omega). \tag{7}$$

Здесь $k_1,\ldots,k_{n-1}$ принимают независимо все значения от 1 до m и коэффициенты $F(H_{k_1},\ldots,H_{k_{n-1}};\omega)$ определены так, что они не зависят от перестановки индексов.

Эти-то коэффициенты и названы смешанными поверхностными функциями. В n-мерном пространстве общая смешанная поверхностная функция зависит от $n-1$ тел, среди которых могут быть одинаковые. (Если все они равны и параллельны одному телу, то смешанная поверхностная функция есть поверхностная функция этого тела.)

Смешанная поверхностная функция $F(H_1,\ldots,H_{n-1};\omega)$ неотрицательна, вполне аддитивна и определена для объединений замкнутых и открытых множеств ω.

Пусть $H = \lambda_1 H_1 + \ldots + \lambda_m H_m$, тогда опорная функция тела H есть такая же линейная комбинация опорных функций тел

$$H(\overline{u}) = \lambda_1 H_1(\overline{u}) + \ldots + \lambda_m H_m(\overline{u}). \tag{8}$$

Каждая из функций $H_k(\overline{u})$ почти везде дважды дифференцируема. Во всякой точке $\overline{n}_0$, где это имеет место для всех $H_k(\overline{u})$ одновременно, функция $H(\overline{u})$ будет также дважды дифференцируемой и ее второй дифференциал

$$d^2H(\overline{u}) = \lambda_1 d^2H_1(\overline{u}) + \ldots + \lambda_m d^2H_m(\overline{u}). \tag{9}$$

Направив ось u_k по $\overline{n}_0$, мы можем исключить в точке $\overline{n}_0$ тривиальные нулевые собственные значения вторых дифференциалов (имеющиеся в силу формулы (1)) и считать, что

$$d^2H_k(\overline{n}_0) = \sum_{i,j=1}^{n-1} H_{k,ij}(\overline{n}_0)du_i du_j \tag{10}$$

и то же для $d^2H(\overline{n}_0)$.

Произведение главных радиусов кривизны в точке с нормалью $\overline{n}_0$ будет тогда ни чем иным, как дискриминантом формы $d^2H(\overline{n}_0)$, что мы запишем так:

$$R_1R_2\ldots R_n = D(H;\overline{n}_0). \tag{11}$$

В силу (9) квадратичная форма $d^2H(\overline{n}_0)$ есть линейная комбинация форм $d^2H_k(\overline{n}_0)$, а поэтому ее дискриминант выражается формулой

$$D(H;\overline{n}_0) = \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \lambda_{k_1}\ldots\lambda_{k_{n-1}} D(H_{k_1},\ldots,H_{k_{n-1}};\overline{n}_0), \tag{12}$$

где $k_1,\ldots,k_{n-1}$ принимают независимо все значения от 1 до m. $D(H_1,\ldots,H_{k_{n-1}};\overline{n}_0)$ называются смешанными дискриминантами.

Из формулы (6) для производной от $F(H,\omega)$ и равенства (11) имеем

$$\lim_{\omega\to\overline{n}_0} \frac{F(H,\omega)}{F(\omega)} = D(H;\overline{n}_0). \tag{13}$$

Вместе с тем для $F(H,\omega)$ и $D(H;\overline{n}_0)$ справедливы формулы (7) и (12). А так как равенство (13) выполняется при любых λ_k, то многочлены от λ_k, стоящие в (13) под знаком предела, сходятся к многочлену, стоящему в (13) справа. Поэтому имеется сходимость по коэффициентам и мы получаем

$$\lim_{\omega\to\overline{n}_0} \frac{F(H_{k_1},\ldots,H_{k_{n-1}};\omega)}{F(\omega)} = D(H_{k_1},\ldots,H_{k_{n-1}};\overline{n}_0). \tag{14}$$

Полученный результат можно формулировать следующим образом.

Теорема. *Пусть $H_1,\ldots,H_{n-1}$ — выпуклые тела в n-мерном пространстве. Почти везде на единичном шаре их опорные функции одновременно дважды дифференцируемы. Во всякой точке $\overline{n}_0$, где это имеет место, существует производная от $F(H_1,\ldots,H_{n-1};\omega)$ по любой нормальной последовательности множеств ω, равная*

$$\lim_{\omega\to\overline{n}_0} \frac{F(H_1,\ldots,H_{n-1};\omega)}{F(\omega)} = D(H_1,\ldots,H_{n-1};\overline{n}_0).$$

§ 9. *Приложения к теории смешанных объемов*

Пусть $H_1, \dots, H_n$ — выпуклые тела в n-мерном пространстве такие, что их смешанные поверхности функции абсолютно непрерывны. (Это будет иметь место в том случае, если поверхностная функция тела $\lambda_1 H_1 + \dots + \lambda_n H_n$ абсолютно непрерывна, где λ_k — какие-нибудь положительные постоянные.) В силу того, что абсолютно непрерывная функция является интегралом своей производной, мы имеем в это случае

$$F(H_1, \dots, H_{n-1}; \omega) = \int\limits_{\omega} D(H_1, \dots, H_{n-1}; \overline{n}_0) d\omega. \tag{1}$$

(Здесь для краткости $d\omega$ означает элемент площади на сфере.) Смешанный объем выражается формулой [3, § 3]

$$V(H_1, \dots, H_n) = \int\limits_{\Omega} H_n(\overline{n}) F(H_1, \dots, H_{n-1}; d\omega). \tag{2}$$

Здесь интеграл распространяется на всю поверхность Ω единичного шара и понимается как интеграл Радона. $H_n(\overline{n})$ — опорная функция, взятая для единичных векторов $\overline{n}$.

В формуле (2) тело H_n можно поменять с любым из тел $H_1, \dots, H_{n-1}$ («самосопряженность» смешанных поверхностных функций).

На основании (1) получим

$$V(H_1, \dots, H_n) = \int\limits_{\Omega} H_n(\overline{n}) D(H_1, \dots, H_{n-1}; \overline{n}) d\omega, \tag{3}$$

где H_n можно поменять с любым из тел $H_1, \dots, H_{n-1}$.

Этот результат получен нами при самом общем предположении, при каком он может иметь место (при более узких предположениях получен еще Г. Минковским [10]). Он позволяет распространить на тела с абсолютно непрерывными смешанными поверхностными функциями применение смешанных дискриминантов, данное мною в [6]. Например, можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть выпуклые тела $H_1, \dots, H_n$ таковы, что:* 1) *при $\lambda_k > 0$ поверхностная функция тела $\lambda_1 H_1 + \dots + \lambda_n H_n$ абсолютно непрерывна (т. е. все смешанные поверхностные функции тел $H_1, \dots, H_n$ абсолютно непрерывны) и* 2) *почти везде на единичном шаре вторые дифференциалы опорных функций тел $H_1, \dots, H_n$ не имеют нулевых собственных значений, кроме тривиальных (т. е. главные радиусы кривизны поверхностей $H_1, \dots, H_n$ не равны нулю), тогда в неравенстве [4, § 3]*

$$V(H_1, \dots, H_n)^2 \geq V(H_1, \dots, H_{n-1}, H_{n-1}) V(H_1, \dots, H_{n-2}, H_n, H_n) \tag{4}$$

знак равенства стоит только в том случае, если тела H_{n-1}, H_n гомотетичны.

Из 2-го условия теоремы легко заключить, что тела $H_1, \dots, H_n$ имеют внутренние точки и потому $V(H_1, \dots, H_n) > 0$.

Знак равенства в (4) стоит только в том случае, когда выполняется равенство [4, § 4]

$$\lambda F(H_1, \dots, H_{n-1}; \omega) = \mu F(H_1, \dots, H_{n-2}, H_n; \omega), \tag{5}$$

где

$$\lambda = V(H_1, \dots, H_n) \neq 0, \quad \mu = V(H_1, \dots, H_{n-1}, H_{n-1}),$$

или в силу теоремы предыдущего параграфа почти везде

$$\lambda D(H_1, \dots, H_{n-1}; \overline{n}) = \mu D(H_1, \dots, H_{n-2}, H_n; \overline{n}). \tag{6}$$

Деля на λ и полагая

$$Z = H_{n-1} - \frac{\mu}{\lambda} H_n, \tag{7}$$

получим

$$D(H_1, \dots, H_{n-2}, Z; \overline{n}) = 0. \tag{8}$$

К этому уравнению в силу условий теоремы можно применить тот же метод, что и в случае регулярных $H_1, \dots, H_n$ [6, § 5] с той лишь разницей, что равенства для смешанных дискриминантов выполняются теперь почти везде. Тогда получим, что почти везде

$$d^2 Z(\overline{u}) = 0, \tag{9}$$

или, полагая $\frac{\mu}{\lambda} H_n = H'_n$,

$$d^2 H'_n(\overline{u}) = d^2 H_{n-1}(\overline{u}). \tag{10}$$

Из этого равенства следует, что почти везде

$$D(H'_n, \dots, H'_n; \overline{n}) = D(H_{n-1}, \dots, H_{n-1}; \overline{n}), \tag{11}$$

а так как по условию поверхностные функции тел H_n и H_{n-1} абсолютно непрерывны, то это равносильно равенству поверхностных функций, так что тела H_n и H_{n-1} равны и параллельно расположены [5, § 3]. Следовательно, H_{n-1} и H_n гомотетичны.

Аналогично можно метод доказательства единственности тела с данной функцией кривизны, основанный на неравенстве для смешанных дискриминантов [6, § 4], применить к телам с абсолютно непрерывными функциями кривизны.

Заметим, что для абсолютной непрерывности поверхностной функции выпуклого тела достаточна ограниченность его верхних радиусов кривизны (т. е. наибольших пределов, получаемых при определении радиусов кривизны описанных цилиндров; в ряде точек радиусы кривизны могут не существовать, но верхний радиус кривизны, подобно верхней производной, существует всегда). Действительно, если верхние радиусы кривизны меньше R, то при достаточно малом r кружку ω на единичном шаре радиуса r с центром $\overline{n}$ будет отвечать $\sigma(\omega)$, заключающееся в кружке радиуса Rr, с центром в точке, соответствующей $\overline{n}$. Поэтому

$$F(H,\omega) \leq RF(\omega).$$

При смешении тел их верхние радиусы кривизны складываются в точках с одинаковыми нормалями. Отсюда видно, что для применимости наших результатов достаточна ограниченность верхних радиусов кривизны рассматриваемых тел.

В заключение стоит, может быть, отметить, что наши результаты дают отчасти ответ на следующий вопрос. Г. Минковский доказал, что для всякой неотрицательной функции $f(\overline{n})$, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{\Omega} f(\overline{n})\overline{n}\, d\omega = 0, \tag{12}$$

существует выпуклое тело H, для которого $f(\overline{n})$ есть обратная гауссова кривизна. Обратная гауссова кривизна для дважды дифференцируемой поверхности H равна $D(H,\overline{n})$. Однако поверхность H может не быть дважды дифференцируемой, так что теорема Минковского еще ничего не говорит о разрешимости уравнения

$$D(H,\overline{n}) = f(\overline{n}). \tag{13}$$

Но мы показали, что для всякого тела почти для всех точек обратная гауссова кривизна (т. е. производная от смешанной поверхностной функции) равна $D(H,\overline{n})$. Поэтому ответ на вопрос об уравнении (13), который мы можем дать, состоит в следующем. Уравнение (13) на единичном шаре разрешимо для всякой неотрицательной измеримой функции $f(\overline{n})$, удовлетворяющей условию (12), в том смысле, что при подстановке решения в уравнение последнее удовлетворится почти везде.

§ 10. *Точки с произвольной гладкой индикатрисой*

Пусть в точке A с нормалью $\overline{n}_0$ на выпуклой поверхности H есть индикатриса D, заключающая A внутри и имеющая в каждой точке своей границы касательную. Пусть $\overline{t}$ — единичные векторы, касательные к H в точке A. Уравнение индикатрисы D в полярных координатах с центром A имеет вид

$$r^2 = R(\overline{t}), \tag{1}$$

где $R(\overline{t})$ — радиус кривизны нормального сечения (двумерной) полуплоскостью, проходящей через A вдоль $\overline{t}$. Это прямо следует из определения индикатрисы D.

Если направить ось z по нормали $\overline{n}_0$, то в окрестности A поверхность представляется обычным уравнением

$$z = z(x_1, \ldots, x_n); \tag{2}$$

если к $z(x_1, \ldots, x_n)$ прибавить $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, то получим выпуклую поверхность с конечной индикатрисой D, содержащей A внутри, и также гладкой, если первоначальная индикатриса была гладкой. (Это явствует из того, что при сложении функций вторые производные их в одинаковых направлениях складываются, т. е. складываются кривизны нормальных сечений соответствующих поверхностей.)

Не трудно убедиться в том, что рассуждения § 3 и 4 основаны на общих леммах о выпуклых телах и не требуют того, чтобы индикатриса D была обязательно эллипсоидом. Достаточно того, чтобы индикатриса D была конечной, содержала A внутри себя и была гладкой. Мы не станем повторять рассуждения § 3 и 4, применяя их к этому общему случаю, так как это свелось бы в конечном счете к тривиальным изменениям в них, а сформулируем сразу результат, который таким образом может быть получен. Заметим, что, так же как и там, проведя рассуждения для конечной индикатрисы, мы можем вернуться к первоначальной поверхности.

Теорема. *Пусть в точке A на выпуклой поверхности с нормалью $\overline{n}$ есть индикатриса D, содержащая A внутри, гладкая и представляемая уравнением (1). Пусть $\overline{m}$ — нормаль к D в точке на луче, идущем вдоль единичного вектора $\overline{t}$. Пусть, наконец, $\overline{n}$ — нормаль в точке на поверхности, проекция которой на касательную в точке A лежит на луче вдоль $\overline{t}$ на расстоянии s от A. Тогда*

$$\overline{n} - \overline{n}_0 = \frac{\overline{m}}{(\overline{m}\overline{t})} \frac{s}{R(\overline{t})} + \overline{\varepsilon} \cdot s, \tag{3}$$

где $\overline{\varepsilon}$ — вектор бесконечно малый вместе с s равномерно для всех направлений $\overline{t}$.

Формула (3) верна также для лучей, не пересекающих границы индикатрисы D, так как для них $1/R(\bar{t}) = O$ и, следовательно, направление $\overline{m}$ не играет роли [12)].

$(\overline{m}\bar{t}) = \cos\theta$ есть косинус угла между $\overline{m}$ и $\bar{t}$. Радиус $\overline{R}'(\bar{t})$ описанного цилиндра, касающегося поверхности в точке A по кривой с касательной $\bar{t}$, равен

$$R'(\bar{t}) = R(\bar{t})(\overline{m}\bar{t})^2. \tag{4}$$

Если вместо s ввести смещение h в направлении $\overline{m}$, равное

$$h = s \cdot (\overline{m}\bar{t}), \tag{5}$$

то формулу (3) можно переписать в виде

$$\overline{n} - \overline{n}_0 = \overline{m}\frac{h}{R'(\bar{t})} + \bar{\varepsilon} \cdot s. \tag{6}$$

Эта формула становится понятной, если принять во внимание, что $\overline{n} - \overline{n}_0$ есть изменение нормали к описанному цилиндру при смещении на вектор $\overline{m}h$, который идет по касательной к нормальному сечению цилиндра.

Наконец, если z_i, как всегда, обобщенные частные производные, а ξ_i и η_i — составляющие $\bar{t}$ и $\overline{m}$, то вместо (3) можно писать

$$z_i = \frac{\eta_i}{\sum\limits_j \xi_j \eta_j} \cdot \frac{s}{R(\xi_1, \ldots, \xi_n)} + \bar{\varepsilon} \cdot s. \tag{7}$$

Из сформулированной теоремы можно получить сведения о сферическом изображении окрестности точки A, аналогичные полученным в § 7 в той части, где они основаны на общих леммах о сферическом изображении. Действительно, пусть в точке A выполнены условия сформулированной только что теоремы. Следуя § 7, будем рассматривать множества σ' на плоскости P, касательной в точке A, и множества $\omega'(\sigma')$ на плоскости P', касательной к единичной сфере в точке $\overline{n}_0$, являющейся сферическим изображением A (здесь $\omega'(\sigma')$ есть проекция из центра сферы на P' множества $\omega(\sigma)$ — сферических изображений множества σ на поверхности, проекция которого на P есть σ).

[12)] Если определить функцию $R(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ так, чтобы она была однородной нулевой степени, то ξ_i можно считать независимыми переменными, тогда легко подсчитать, что

$$\frac{\eta_i}{R\sum\limits_j \xi_j \eta_j} = \frac{\xi_i}{R} + \frac{1}{2}\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial \xi_i},$$

а так как при сложении функций $z(x_1, \ldots, x_n)$ кривизны складываются, то операция перехода от исправленных поверхностей к исходным законна (ср. § 3).

Формула (3) определяет характер отображения σ на $\omega'(\sigma')$. Именно это отображение равномерно аппроксимируется отображением, даваемым первым слагаемым в правой части (3). Это отображение определяется так. Пусть $\bar{t}$ — единичный вектор в плоскости P и $\bar{t}s$ — вектор, идущий из A в точку B на P. Пусть $\overline{m}$ и $R(t)$ имеют то же значение, что и в (3).

Тогда вектор, идущий из образа точки A в образ точки B, равен

$$\overline{m}\frac{s}{R(\bar{t})}.$$

Это отображение заменяет нам аффинное отображение, фигурировавшее в § 7. Образ множества σ' при этом отображении можно также обозначить $\omega^0(\sigma')$.

Тогда лемма, доказанная в § 7 и являющаяся основанием для теоремы § 7, дословно вместе с ее доказательством повторяется для нашего общего случая. Однако отсюда еще не следует существование производной от гауссовой кривизны по нормальным последовательностям множеств. Дело в том, что при нашем общем отображении σ' на $\omega^0(\sigma')$ отношение площадей σ' и $\omega^0(\sigma')$ зависит от формы σ'. (Если, например, индикатриса D имеет плоскую грань, то на этой грани $\overline{m}$ не меняется, так что всякое σ', содержащееся в конусе, проектирующем эту грань из точки A, отображается в отрезок.) Для случая поверхности в трехмерном пространстве можно без труда доказать, что отношение площадей σ' и $\omega^0(\sigma')$ не будет зависеть от формы σ' только в случае эллиптической индикатрисы и, конечно, в тривиальных случаях бесконечной индикатрисы, когда кривизна равна нулю. Имеет ли место аналогичный результат и в n-мерном пространстве, мне неизвестно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Busemann H., Feller W.* Krümmungseigenschaften konvexer Flächen // Acta Math., Uppsala. 1936. V. 66. P. 1–47.
2. *Валле-Пуссен Ш. Ж.* Курс анализа бесконечно малых. Т. 2. М.; Л.: ГТТИ, 1933.
3. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. I: Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 5. С. 947–970.
4. *Александров А. Д.* То же. II: Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 6. С. 1205–1235.
5. *Александров А. Д.* То же. III: Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 1. С. 27–44.
6. *Александров А. Д.* То же. IV: Смешанные дискриминанты и смешанные объемы // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 2. С. 227–249.
7. *Jessen B.* Om konvekse Kurvers Krumning (Danish) // Mat. Tidsskr. 1929. P. 50–62.
8. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
9. *Reidemeister K.* Über die singulären Randpunkte eines konvexen Körpers // Math. Ann. 1921. Bd 83. S. 116–118.
10. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd 57. S. 447–495.

Внутренняя геометрия произвольной выпуклой поверхности

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 20.VI.1941)

Доклады Академии наук СССР. 1941. Т. 32, № 7. С. 467–470

1. Выпуклой поверхностью называется область на границе ограниченного или неограниченного выпуклого тела, т. е. замкнутого выпуклого множества, содержащего внутренние точки. Для любых двух точек x, y на выпуклой поверхности F существует точная нижняя граница длин кривых, лежащих на F и соединяющих x и y. Эту точную нижнюю границу естественно принять за расстояние $\rho_F(x, y)$ точек x, y на поверхности F. Тогда F превращается в метрическое пространство. Задача внутренней геометрии поверхности состоит в изучении этого метрического пространства как такового, т. е. без учета того факта, что оно как-то погружено в трехмерное евклидово пространство.

Если поверхность F имеет границу, то расстояния на ней зависят от этой границы и если вырезать из F некоторую ее часть F_1, то для каждой пары точек x, y, принадлежащих F_1, вообще говоря, $\rho_{F_1}(x, y)$ не будет равно $\rho_F(x, y)$. Так как вырезать часть поверхности можно весьма произвольным образом, то возникает едва ли обозримое количество внутренних метрик. Вместе с тем, если точки x, y достаточно близки друг к другу, то $\rho_{F_1}(x, y) = \rho_F(x, y)$. Поэтому локальные свойства метрики на выпуклой поверхности не зависят от ее границы и если интересоваться только этими локальными свойствами, то мы можем рассматривать поверхности без границы, т. е. полные поверхности выпуклых тел. Рассматривая только поверхности без границы, мы сможем дать полную характеризацию их внутренней метрики и тем самым полную характеризацию локальных свойств внутренней метрики любой выпуклой поверхности.

2. Выпуклые поверхности, представляющие полные границы выпуклых тел, могут быть трех топологических типов: 1) гомеоморфные сфере; 2) гомеоморфные плоскости; 3) гомеоморфные бесконечному круговому цилиндру. Поверхности последнего типа сами являются цилиндрами и каждую из них можно изогнуть без изменения внутренней метрики в круговой цилиндр. Этим самым вопрос об их внутренней метрике оказывается решенным полностью и их можно исключить из рассмотрения.

К поверхностям двух первых типов мы присоединим плоские выпуклые замкнутые области, к первому типу — конечные, а ко второму — бесконечные, исключая самую плоскость и полосы между парами параллельных прямых. На каждой такой области будем различать две стороны. Расстояние между точками, лежащими с разных сторон области, будем считать по кривым, переходящим через границу области с одной ее стороны на другую. Точки, фактически совпадающие, но лежащие на разных сторонах области, мы считаем различными. Это наглядное различение сторон плоской области можно, конечно, выразить точно.

Пусть F — конечная область и S — сфера, разделенная на две полусферы; в полусферы мы включаем их границу. Каждую из полусфер отобразим топологически на F и при том так, что отображения их общего экватора на границу F совпадут. Аналогично можно плоскость отобразить на бесконечную выпуклую область. Опираясь на это построение, ограниченные области будем считать гомеоморфными сфере, а неограниченные — гомеоморфными плоскости. Указанное двулистное отображение будем называть гомеоморфизмом.

3. Основной вопрос, который мы решаем, состоит в том, каковы необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять метрика $\rho(x,y)$, заданная на сфере или на плоскости, для того чтобы существовала полная выпуклая поверхность, реализующая эту метрику. Мы говорим, что метрика $\rho(x,y)$ задана на многообразии R, если она определяет на нем его собственную топологию. Мы говорим, что поверхность F реализует метрику $\rho(x,y)$, заданную на R, если существует такой гомеоморфизм h, отображающий R на F, что для каждой пары точек $x, y \in R \quad \rho(x,y) = \rho_F(x,y)$, где ρ_F — расстояние на F в определенном выше смысле.

Этот вопрос был решен нами раньше для выпуклых многогранников и выпуклых поверхностей, метрика которых задается посредством квадратичной формы ds^2, как это принято в дифференциальной геометрии [1]. Здесь мы укажем полное решение поставленного вопроса, а также решения других вопросов, естественно возникающих в связи с ним. Доказательства мы не приводим; полное изложение будет дано в другом месте.

4. Дадим еще некоторые определения. Длиной кривой $x(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$ в метризованном многообразии R мы называем точную верхнюю границу сумм расстояний между точками $x(t_i), x(t_{i+1})$, когда $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$. Кривую $x(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$ мы называем геодезической, если для всякого t существует такая его связная окрестность на отрезке $[0,1]$, что соответствующая часть кривой $x(t)$ является кратчайшей между ее концами. Геодезическим треугольником называем замкнутую область, гомеоморфную кругу и ограниченную тремя геодезическими. Треугольник называем нормальным, если каждая его сторона — кратчайшая в нем, т. е. в нем не существует никакой кривой, соединяющей любые две вершины, более короткой, чем соответствующая сторона. Средней линией треугольника, соответствующей какой-либо его стороне, мы называем кратчайшую в нем линию, соединяющую середины двух других сторон.

5. Пусть на двумерном многообразии R задана метрика $\rho(x, y)$, удовлетворяющая кроме обычных трех условий также следующим условиям:

1) Для каждой точки $x \in R$ при всяком $\varepsilon > 0$ существует ее окрестность $U(x, r)$ радиуса r, обладающая следующим свойством. Существует такой гомеоморфизм h окрестности $U(x, r)$ в плоскость или выпуклый конус[1)], что для каждой пары точек $y, z \in U(x, r)$

$$|\rho(y, z) - \rho_0(h(y), h(z))| < \varepsilon r,$$

где ρ_0 — расстояние соответственно на плоскости или на конусе.

2) Для каждой пары точек $x, y \in R$ существует такая точка z, что $\rho(x, z) = \rho(z, y) = \rho(x, y)/2$. Если $y_1 \neq y_2$ и z_1, z_2 таковы, что $\rho(x, z_i) = \rho(z_i, y_i) = \rho(x, y_i)/2 \quad (i = 1, 2)$, то $z_1 \neq z_2$.

3) Для каждой точки $x \in R$ существует такая ее окрестность $U(x)$, что для всякого нормального геодезического треугольника, содержащегося в $U(x)$, длина каждой его средней линии не меньше половины длины соответствующей стороны.

4) В силу метрики $\rho(x, y)$ R оказывается полным метрическим пространством.

Если выполнены первые три условия, то мы говорим, что данная метрика выпуклая. Если же выполнено также условие 4, то мы называем ее полной. Метрику мы называем собственно выпуклой, если хотя бы у одного треугольника из фигурирующих в условии 3, хотя бы одна средняя линия больше половины соответствующей стороны. Если же этого нет ни для одного из этих треугольников, то мы назовем метрику не собственно выпуклой. Легко видеть, что условие 2 при соблюдении условия полноты эквивалентно существованию кратчайшей кривой между любыми двумя точками x, y с длиной, равной их расстоянию друг от друга.

6. Теперь сформулируем наши основные результаты.

Теорема 1. *Всякая полная выпуклая поверхность имеет полную выпуклую метрику.*

[1)] Точка x отображается в вершину конуса.

Здесь сама поверхность F рассматривается как многообразие, на котором задана ее метрика ρ_F.

Теорема 2. *Для всякой выпуклой метрики, заданной на сфере*[2]*, существует реализующая ее выпуклая поверхность.*

Теорема 3. *Для всякой полной выпуклой метрики, заданной на плоскости, существует реализующая ее выпуклая поверхность.*

В этих теоремах поверхности необходимо оказываются гомеоморфными сфере и плоскости, причем дважды покрытые плоские области здесь допускаются.

Теорема 4. *Всякая не собственно выпуклая метрика — евклидова во всякой достаточно малой области.*

Теорема 5. *Собственно выпуклая полная метрика может быть задана только на следующих двумерных многообразиях конечной связности: на сфере, плоскости и проективной плоскости.*

Теорема 6. *Для того чтобы метрика, заданная посредством квадратичной формы ds^2 с дважды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы гауссова кривизна, определяемая формой ds^2, была всюду неотрицательной.*

Теорема 7. *Если в каком-либо многообразии R задана выпуклая метрика, то для каждой точки x найдется такая ее окрестность $U(x)$, что метрика в $U(x)$ реализуема посредством некоторой выпуклой поверхности.*

Главным методом доказательств является, с одной стороны, приближение к выпуклым поверхностям выпуклыми многогранниками и, с другой — приближение к выпуклым метрикам многогранными выпуклыми метриками, реализуемость которых уже была нами доказана [1].

7. Приведем теперь некоторые результаты, получающиеся попутно с доказательством только что сформулированных теорем.

Пусть в R задана выпуклая метрика. Пусть из точки $x \in R$ исходят две геодезические. Мы можем построить сколь угодно малый нормальный геодезический треугольник с вершиной x и со сторонами на данных геодезических. Пусть a — сторона, противолежащая x, а b и c — стороны, сходящиеся в x. Проводя среднюю линию a_1 между серединами сторон b и c, будем иметь в силу третьего условия, определяющего выпуклую метрику,

$$\frac{a}{2} \leqslant a_1 \leqslant \frac{b+c}{2}.$$

Повторяя это построение n раз, будем иметь

$$\frac{a_{n-1}}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{b+c}{2^n}.$$

[2] Вследствие компактности сферы условие полноты выполняется тривиальным образом.

Поэтому отношения $2^n a_n/b$, $2^n a_n/c$ ограничены и изменяются монотонно. Значит, существует их предел. Это позволяет естественным образом определить угол φ между геодезическими

$$\cos\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2 + c^2 - (2^n a_n)^2}{2bc}.$$

Используя условие 1 определения выпуклой метрики, легко показать, что этот угол не будет зависеть от выбора первоначальных длин b и c, как только они были взяты достаточно малыми. Мы получаем теорему

Теорема 8. *В выпуклой метрике между двумя геодезическими, исходящими из одной точки, существует определенный угол. Он всегда не равен нулю.*

И. М. Либерман недавно доказал, что геодезическая на выпуклой поверхности имеет в своей начальной точке полукасательную. Угол между полукасательными к геодезическим, исходящим из одной точки, измеренный на касательном конусе в этой точке, и будет углом между геодезическими в смысле намеченного нами здесь внутреннего определения.

Теорема 9. *Сумма углов геодезического n-угольника (гомеоморфного кругу) в многообразии с выпуклой метрикой больше или равна $(n-2)\pi$. Сумма углов геодезического n-угольника на выпуклой поверхности превосходит $(n-2)\pi$ на величину площади сферического изображения его внутренней области.*

Первая часть теоремы позволяет определить в многообразии с выпуклой метрикой внутреннюю интегральную кривизну как функцию области. Вторая часть показывает, что эта внутренняя интегральная кривизна для области на выпуклой поверхности равна площади ее сферического изображения. Сферическое изображение определяется нормалями к опорным плоскостям.

Теорема 10. *Углы треугольника на плоскости, имеющего такие же длины сторон, как нормальный геодезический треугольник на выпуклой поверхности, не больше соответствующих углов последнего.*

Далее, используя условия, характеризующие выпуклую метрику, мы можем доказать еще целый ряд теорем о геодезических линиях, геодезических треугольниках и геодезических окружностях, так что возникает довольно полное представление о внутренней геометрии произвольной выпуклой поверхности.

Статья поступила в редакцию
21.VI.1941

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30, № 2. С. 103–106.

Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой

Математический сборник. 1942. Т. 11, № 1–2. С. 15–61

I. Результаты и метод доказательства

1. Начнем с совершенно элементарного вопроса: каковы необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять развертка многогранника на плоскости, чтобы из нее можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник?

Развертка есть не что иное, как совокупность конечного числа многоугольников, для которых указано, как следует склеивать их друг с другом по сторонам и вершинам [1)]. Хорошо известно, что куб можно склеить из одного крестообразного многоугольника. Поэтому мы вовсе не предполагаем, что склеиваемые стороны и вершины должны принадлежать разным многоугольникам. Мы будем, вместе с тем, предполагать, что склеивание многоугольников происходит по целым сторонам. Это не является ограничением, потому что при необходимости можно любые точки внутри стороны считать вершинами. Далее, мы считаем, что каждый из многоугольников развертки ограничен одной замкнутой ломаной без кратных точек. Этого всегда можно достигнуть, если подходящим образом разрезать многоугольники, ограниченные несколькими ломаными или ломаной с кратными точками. Для того чтобы из данной развертки можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник, необходимы следующие очевидные условия.

1) Склеивание производится только по сторонам, совпадение же вершин получается вследствие склеивания сторон. Это означает, что если два многоугольника M и N склеены друг с другом в вершине A, то или они склеены

[1)] Даже исключив склеивания вершин, не вызванные склеиванием сторон, нельзя обойтись без ссылки на склеивание вершин, потому что для двух сторон всегда есть две возможности склеивания в одном или в другом направлении. Эти возможности различаются указанием соответствия между концами сторон, т. е. указанием склеивания вершин.

по стороне, подходящей к этой вершине, или существует начинающаяся с M и кончающаяся N последовательность многоугольников, подклеенных друг к другу по сторонам, подходящим к вершине A. Не исключено, что M совпадает с N (две вершины одного многоугольника склеиваются друг с другом) и что в связывающей их цепи многоугольников одни и те же многоугольники повторяются несколько раз, только каждый раз они подходят в вершине A другими углами.

В силу этого условия исключено такое склеивание в вершинах, какое имеется, например, в многограннике, составленном из двух тетраэдров, приложенных друг к другу в вершине. Это условие необходимо, так как иначе не каждая вершина многогранника имела бы на нем окрестность, гомеоморфную кругу.

2) Каждая сторона склеивается с одной и только одной стороной.

Если бы какая-нибудь сторона не склеивалась ни с какой другой, то получающийся многогранник не был бы замкнутым. Если бы стороны склеивались больше чем по две, то многогранник получался бы ветвящийся.

3) От каждого многоугольника можно перейти к другому, идя по многоугольникам, склеенным по сторонам. Иначе мы не получали бы вовсе один связный многогранник.

4) Пусть f — число многоугольников развертки, k — число сторон, считая склеиваемые за одну, e — число вершин, считая склеиваемые за одну; тогда $f - k + e = 2$.

Действительно, если многогранник уже склеен, то стороны многоугольников развертки образуют на нем связную сеть из k отрезков с e вершинами, разбивающую многогранник на f областей. Поэтому, на основании известной теоремы Эйлера, должно быть $f - k + e = 2$.

5) Склеиваемые стороны имеют равные длины.

6) Сумма всех углов, сходящихся при склеивании в одной вершине, должна быть $\leq 2\pi$ для каждой вершины.

Действительно, сумма углов, сходящихся в вершине выпуклого многогранника, всегда $< 2\pi$, а равенство означает только, что вершина развертки при склеивании может дать не вершину многогранника, а точку на грани или на ребре.

Если считать за выпуклый многогранник дважды покрытый выпуклый многоугольник, т. е. склеенный из двух наложенных друг на друга равных многоугольников, то мы можем утверждать следующее:

Сформулированные условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы из данной развертки можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник. При этом таких многогранников может быть только два: один является зеркальным отражением другого или, что то же самое, один получается из другого выворачиванием на левую сторону. (Если многогранник имеет плоскость симметрии, то при отражении получается тот же самый многогранник. Многогранники, различающиеся только положением в пространстве, мы, конечно, не считаем различными.)

Доказательство этого утверждения составляет основную цель настоящей работы. Для каждой данной развертки указанные условия проверяются без труда, поэтому мы имеем возможность решить вопрос, можно из нее склеить замкнутый выпуклый многогранник или нет. При этом вовсе не предполагается, что из данной развертки вообще можно склеить какой бы то ни было многогранник; такая возможность доказывается, если выполнены указанные условия. Случай дважды покрытого выпуклого многоугольника мы неизбежно должны принять во внимание, потому что развертка может, например, состоять из двух квадратов, которые согласно заданию нужно склеивать друг с другом по сторонам. Очевидно, что здесь все поставленные условия будут выполнены. Указанный случай представляет вырождение, но тем не менее мы не будем его исключать, потому что это лишило бы простоты формулировку нашего результата. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, под многогранником (опуская для краткости прилагательные «замкнутый» и «выпуклый») мы всегда будем понимать или замкнутый выпуклый многогранник, или выпуклый многоугольник. То, что последний считается дважды покрытым, имеет совершенно точный смысл, который будет далее определен.

2. Для того чтобы доказать указанный выше результат, нам придется покинуть почву совершенно наглядной и почти детской постановки вопроса, которая была только что дана. Так как каждый многоугольник можно разбить на треугольники, то не будет ограничением, если мы будем рассматривать развертки, составленные из одних треугольников. Далее, само понятие развертки нам удобнее определить в абстрактной форме. Сначала отбросим два последних условия, сформулированных в п. 1, и рассмотрим развертку чисто комбинаторно, т. е. учитывая только данные в ней условия инциденций, или, как мы все-таки будем дальше говорить, «склеиваний». При этом развертка превращается в то, что коротко назовем комплексом. Следовательно, в дальнейшем слово «комплекс» означает совокупность абстрактных треугольников, их сторон (или, как мы будем говорить, ребер) и вершин, в которой установлены отношения инциденций, удовлетворяющие условиям, поставленным в п. 1.

Это есть не что иное, как некоторое обобщение понятия комплекса, принятого в комбинаторной топологии. Мы не исключаем ни склеиваний вершин или сторон одного треугольника друг с другом, ни склеиваний двух треугольников более чем по одной только стороне или вершине, ни склеиваний двух и трех вершин у двух треугольников без того, чтобы склеивались их стороны [2]. Если у одного треугольника стороны или вершины склеиваются друг с другом, то мы будем говорить, что треугольник имеет «самосклеивание».

При поставленных условиях, если треугольники мыслить как топологические образы обычных треугольников, рассматриваемые комплексы гомеоморфны сфере. Коротко можно сказать, что комплексом мы называем совокупность топологических треугольников, в которой установлены такие инциденции сторон и вершин, в силу которых эта совокупность оказывается гомеоморфной сфере.

Если треугольники комплекса K заданы как обычные евклидовы треугольники, причем склеиваемые стороны имеют равные длины, то мы и получаем развертку. Мы говорим в этом случае, что на комплексе K задана метрика. Такую метрику называем выпуклой, если для каждой вершины сумма сходящихся в ней углов $\leq 2\pi$.

Теперь сформулируем утверждение, высказанное в п. 1, в том виде, в каком оно будет доказано.

Теорема 1. *Для всякой выпуклой метрики существует и притом единственный (с точностью до движения или движения и отражения) реализующий ее выпуклый многогранник.*

Подробнее: пусть K — комплекс треугольников, гомеоморфный сфере, и m — его выпуклая метризация. Существует выпуклый многогранник p, допускающий триангуляцию T, представляющую комплекс K и изометричную m, т. е. такую, что 1) комплекс треугольников, образуемый этой триангуляцией, изоморфен комплексу K, так что K можно отобразить на T с сохранением инциденций, 2) каждый треугольник из T можно развернуть на плоскость[3], и тогда он оказывается равным соответствующему треугольнику метризованного комплекса K. (Соответствие треугольников, ребер и вершин в K и T установлено отображением K на T.)

Может случиться, что многогранник p вырождается в многоугольник. Тогда триангуляция T покрывает его дважды и при отображении K на T все точки p оказываются дважды покрытыми, кроме точек, лежащих на крае p. Для наглядности удобно считать триангуляцию T нарисованной на многоугольнике p: одна ее часть с одной стороны, другая — с другой.

---

[2] Можно, конечно, всякую развертку подразделить так, чтобы исключить все эти особенности. Тогда мы получили бы комплекс в обычном смысле. Однако при доказательстве нам будет необходимо исключить одну или несколько вершин путем перетриангуляции комплекса. Мы не можем гарантировать, что особенности не возникнут в результате такой операции, поэтому рассматривать их приходится, и мы решили включить их в рассмотрение с самого начала.

[3] Далее, говоря о какой бы то ни было триангуляции многогранника, мы считаем это условие выполненным.

Доказательство теоремы 1 полностью излагается в разд. II. Здесь мы только дадим некоторые разъяснения по поводу содержания теоремы и в общих чертах укажем путь ее доказательства.

3. Когда на комплексе K задана метрика в том смысле, который был выше определен, мы можем рассматривать ломаные, т. е. цепи прямолинейных отрезков с последовательно совпадающими концами, соединяющие пары точек в метризованном комплексе K. Звенья такой ломаной лежат в треугольниках комплекса и соединяются друг с другом на склеенных сторонах треугольников. Нижняя граница длин таких ломаных, соединяющих две данные точки, может быть принята за расстояние между ними. Этим самым на K определяется метрика в том смысле, в каком этот термин обычно понимают. Если метризованный комплекс K реализуется многогранником p, то эта метрика на K совпадает с метрикой на p.

Одна и та же метрика может быть получена при разных метризациях одного и того же комплекса, а также на разных комплексах. Значит, один и тот же многогранник может быть задан весьма различными развертками, в зависимости от того, как мы будем резать его на треугольники, которые можно развернуть на плоскость. Здесь также видно, что ребра и грани комплекса могут не соответствовать ребрам и граням многогранника, реализующего какую-то метрику на данном комплексе. Однако вершины многогранника соответствуют вершинам комплекса, потому что сумма углов, сходящихся в них, меньше 2π, а это возможно лишь в вершинах комплекса. Наша теорема, следовательно, не решает вопроса о том, по каким именно линиям будут перегибаться треугольники развертки, когда мы склеим из нее выпуклый многогранник. Однако эти линии вполне определенные, потому что, как утверждает теорема, выпуклый многогранник с данной разверткой может быть только один. Можно заметить лишь то очевидное обстоятельство, что реальные ребра многогранника соответствуют кратчайшим линиям, соединяющим вершины комплекса, в то время как ребра комплекса могут вовсе не быть кратчайшими.

Все сказанное мы проиллюстрируем несколькими простыми примерами.

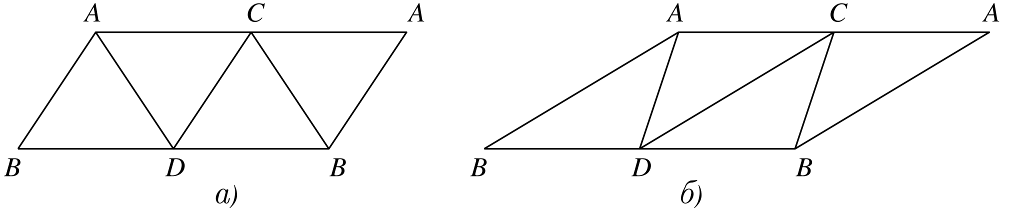
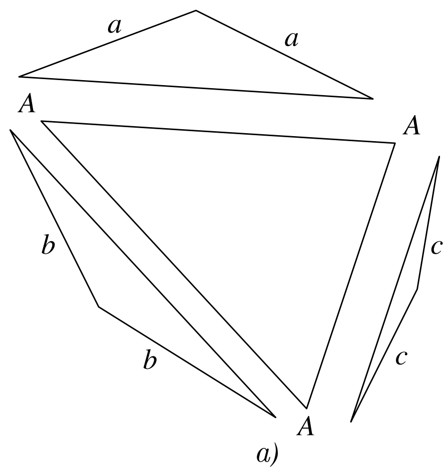


Рис. 1

На рис. 1 изображены две развертки правильного тетраэдра в виде параллелограммов, разбитых на треугольники. Склеиваемые вершины обозначены одинаковыми буквами. В первом случае (рис. 1, *а*) треугольники соответствуют граням тетраэдра, а во втором — уже нет. Обе развертки представляют, очевидно, две разные метризации одного и того же комплекса. Вторая развертка получается из первой разрезанием по линиям BC и DA. Применяя подобную операцию ко второй развертке и т. д., мы получим бесконечное число разверток правильного тетраэдра, представляющих разные метризации одного и того же комплекса.



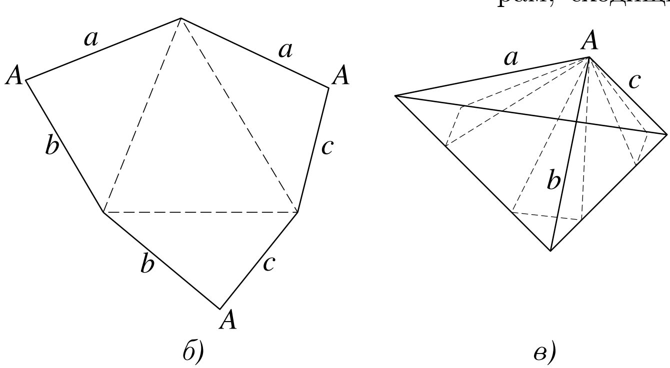


Рис. 2

На рис. 2, *а* дана развертка тетраэдра; на рис. 2, *б* показано, по каким линиям пойдут ребра тетраэдра в склеенной развертке; на рис. 2, *в* изображен уже склеенный тетраэдр с указанием линий, по которым его нужно резать, чтобы обратно получить развертку рис. 2, *а*; кроме как по пунктирным линиям его нужно разрезать по ребрам, сходящимся в вершине A. Данная развертка любопытна в том отношении, что она демонстрирует довольно сложные возможные самосклеивания, т. е. склеивания сторон и вершин одного треугольника развертки друг с другом.

Из развертки всякого выпуклого многогранника можно, конечно, склеить сколько угодно невыпуклых. Стоит лишь, например, продавить многогранник в окрестности какой-либо из вершин. На рис. 3 указаны два многогранника с одинаковой разверткой, которые получаются друг из друга иным образом. Первый из них выпуклый, второй — нет. Соответственные вершины их обозначены одними и теми же буквами.

4. Если два многогранника имеют одну и ту же развертку, то, сопоставляя друг другу те их точки, которые соответствуют одним и тем же точкам развертки, мы получим, очевидно, изометрическое отображение одного многогранника на другой. Поэтому утверждение единственности, содержащееся в теореме 1, может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 1′. *Два изометричных замкнутых выпуклых многогранника равны.* Или в несколько более сильной формулировке: *если имеется изометрическое отображение одного замкнутого выпуклого многогранника на другой, то это отображение можно осуществить движением или движением и отражением.* (В частности, речь может идти об изометрическом отображении многогранника на себя.)

Эта теорема была доказана О. Коши в предположении, что многогранники имеют одинаковое строение, так что при изометрическом отображении граням одного соответствуют грани другого [4]. В нашей же теореме это предположение отсутствует. Однако мы покажем, что метод Коши может быть применен и в этом более общем случае, чем дадим доказательство нашей теоремы.

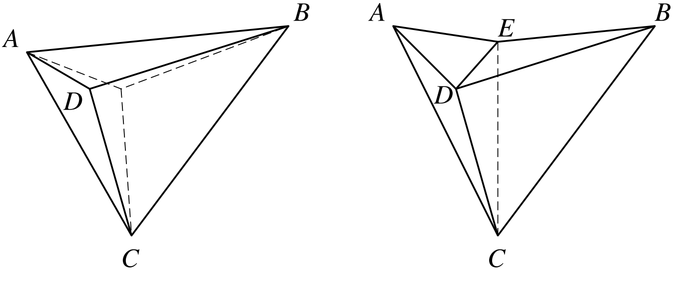


Рис. 3

Пусть p_1 и p_2 — изометричные многогранники; φ — изометрическое отображение p_1 на p_2; φ^{-1} — обратное изометрическое отображение p_2 на p_1. Отображение φ сопоставляет вершинам многогранника p_1 вершины многогранника p_2, так как вершина характеризуется тем, что сумма сходящихся в ней углов $< 2\pi$, а это свойство сохраняется при изометрическом отображении. Но некоторым ребрам многогранника p_1 отображение φ может сопоставлять не ребра многогранника p_2, а некоторые кратчайшие ломаные, соединяющие вершины p_2. Такие образы ребер многогранника p_1 на p_2 мы назовем псевдоребрами, а точки пересечения псевдоребер с ребрами p_2 — псевдовершинами. Так как псевдоребра суть образы ребер многогранника p_1, то они встречаются друг с другом только в вершинах p_2.

Совершенно аналогично, пользуясь отображением φ^{-1}, отобразим ребра многогранника p_2 на p_1.

В результате обоих отображений многогранники p_1 и p_2 окажутся подразделенными (псевдоребра разобьют грани, псевдовершины разобьют ребра) так, что полученные комплексы p_1' и p_2' будут иметь одинаковое строение.

[4] Замечательное по идее доказательство О. Коши содержало, однако, пробелы, восполненные впоследствии другими геометрами. Исчерпывающее изложение доказательства можно найти в [1].

Изометрическое отображение φ будет переводить грани и ребра комплекса p_1' в целые грани и ребра комплекса p_2'. Поэтому мы получим, по существу, те условия, при которых наша теорема была доказана О. Коши. Наличие псевдоребер и псевдовершин ничего не изменит в рассуждениях О. Коши.

Действительно, если псевдовершина A_1 на p_1 получается в пересечении ребра a_1 с псевдоребром b_1, то соответственная псевдовершина A_2 на p_2 получается в пересечении псевдоребра $a_2 = \varphi(a_1)$ с ребром $b_2 = \varphi(b_1)$. Двугранный угол при a_1 меньше π, а при b_1 равен π; соответственно двугранный угол при a_2 равен π, а при b_2 меньше π. Поэтому при обходе вокруг псевдовершины мы будем иметь ровно четыре перемены знака разностей соответственных двугранных углов.

Появление псевдоребер, подходящих к вершинам, сводится к тому, что некоторые двугранные углы оказываются равными π. Для такого предельного случая выпуклых многогранных углов с равными плоскими углами лемма Коши о четырех переменах знаков разностей соответственных двугранных углов доказывается точно так же, как в обычном случае, когда все двугранные углы меньше π.

Следует иметь в виду, что мы допускаем в качестве многогранников также дважды покрытые выпуклые многоугольники и тем самым допускаем двугранные углы, равные нулю. Это также не меняет дела, и правильность леммы Коши о четырех переменах знака устанавливается в этом случае даже гораздо проще, чем в общем случае [5)].

Таким образом, мы действительно убеждаемся в том, что метод Коши применим в нашем более общем случае и приводит, следовательно, к доказательству теоремы.

5. Теперь, когда утверждение единственности, содержащейся в теореме 1, доказано, нам остается доказать существование многогранника с данной разверткой. Изложим основу этого доказательства.

Мы будем называть n-мерным многообразием топологическое пространство, у каждой точки которого есть окрестность, гомеоморфная внутренности n-мерного шара [6)]. Согласно известной теореме об инвариантности области, доказанной впервые Л. Э. Я. Брауэром, если одно из двух гомеоморфных друг другу множеств n-мерного евклидова пространства откры-

---

[5)] Если один из двугранных углов равен нулю, то и какой-то другой при той же вершине также равен нулю, вследствие выпуклости. Другие же углы равны π. Если двугранным углам, равным нулю, соответствуют углы > 0, то мы как раз и получаем четыре перемены знака при обходе вокруг такой вершины, потому что углы > 0 разделены углами $< \pi$.

[6)] Обычные требования связности и разложимости на симплексы мы не предполагаем выполненными.

тое, то другое также открытое [2]. Это приводит к тому, что при гомеоморфном отображении одного многообразия P в другое многообразие M той же размерности образ P будет открытым множеством в M. (Действительно, пусть $m = \varphi(p)$ есть точка образа P и $U(m)$ ее окрестность, гомеоморфная евклидову пространству. По непрерывности отображения φ, имеется окрестность $V(p)$ прообраза m, отображающаяся в $U(m)$. Эта окрестность может быть взята гомеоморфной внутренности шара. Так как она отображается в $U(m)$ гомеоморфно и сама гомеоморфна открытому множеству евклидова пространства, то по теореме об инвариантности области образ ее будет открытым в $U(m)$, а значит, открытым в M.) Следовательно, каждая точка образа многообразия P содержится в некотором открытом множестве, принадлежащем этому образу. Поэтому образ сам оказывается открытым множеством в M, что и требовалось доказать.

Эта сформулированная в общем виде теорема об инвариантности области позволяет нам доказать следующее.

Основная лемма. *Пусть P и M — два многообразия одного и того же числа измерений. Пусть мы имеем отображение φ многообразия P в многообразие M, удовлетворяющее условиям:*

1) φ взаимно однозначно;

2) φ непрерывно;

3) если точки $m_n (n = 1, 2, \dots)$ многообразия M являются образами точек p_n многообразия P и m_n сходятся к точке m, то существует точка p в P, которая отображается в m, причем имеется подпоследовательность p_{n_i}, сходящаяся к p;

4) в каждой связной компоненте многообразия M имеются образы точек из P.

При этих условиях $\varphi(P) = M$, т. е. все точки многообразия M оказываются образами точек многообразия P.

Отображение φ в силу условия 3 взаимно непрерывно. Действительно, пусть $m_n = \varphi(p_n)$, $m = \varphi(p)$ и $m_n \to m$ $(n = 1, 2, \dots)$. Допустим, что точки p_n не сходятся к p. Тогда имеется такая окрестность точки p, что вне ее лежит бесконечно много точек p_n, пусть это будут точки $p_{n_1}, p_{n_2}, \dots$. Мы получаем

$$m_{n_i} = \varphi(p_{n_i}), \quad m_{n_i} \to m, \quad m = \varphi(p),$$

но никакая подпоследовательность точек p_{n_i} не может сходиться к p. Это противоречит условию 3, так как по взаимной однозначности отображения φ только точка p отображается в m. Следовательно, наше предположение о том, что p_n не сходятся к p, неверно, и потому, если

$$m_n = \varphi(p_n) \to m = \varphi(p),$$

то $p_n \to p$, т. е. отображение φ взаимно непрерывно.

Поскольку отображение φ взаимно однозначное и взаимно непрерывное, т. е. гомеоморфное, и многообразия P и M имеют одно и то же число измерений, то мы можем применить теорему об инвариантности области, в силу которой $\varphi(P)$ оказывается открытым в M.

Вместе с тем из условия 3 явствует, что $\varphi(P)$ замкнуто в M. Действительно, если $m_n = \varphi(p_n) \to m$, то, по условию 3, существует точка p из P, отображающаяся в m, так что m принадлежит $\varphi(P)$.

Если же $\varphi(P)$ открыто и замкнуто в M и имеет точки в каждой связной компоненте M, то оно простирается на все M [7], что и требовалось доказать.

Доказанная таким образом «основная лемма» уже была применена мною к доказательству некоторых важных теорем существования для выпуклых многогранников [3]. Она дает весьма сильный метод доказательств существования, замечательный универсальностью и единообразием его применения в теории выпуклых многогранников. Этот метод не исчерпал себя, и я надеюсь в другом месте изложить его новые применения.

6. Изложим теперь общий план доказательства теоремы 1. Сначала докажем реализуемость таких метрик, у которых сумма углов при каждой вершине $< 2\pi$. Только такие метрики мы и будем здесь называть выпуклыми. Реализуемость метрик, у которых суммы углов при вершинах могут равняться 2π, получится тогда простым переходом к пределу.

Доказательство нашей теоремы будем вести индукцией по числу вершин комплекса K. Для комплексов с тремя вершинами легко доказать, что любая их метризация реализуется дважды покрытым треугольником. Поэтому будем рассматривать комплексы более чем с тремя вершинами.

Зададим топологический комплекс треугольников K, гомеоморфный сфере, с e вершинами, и пусть M_0 — множество всех его метризаций. Метризация, очевидно, задается длинами всех ребер. Так как единственные условия, налагаемые на стороны треугольников, это «неравенства треугольника», то M_0 будет внутренностью выпуклого телесного угла в k-мерном пространстве, координаты в котором суть длины ребер комплекса K. В многообразии M_0 выпуклые метрики образуют многообразие M.

Рассмотрим теперь многообразие P выпуклых многогранников с e вершинами, допускающих триангуляцию K. Каждый многогранник из P мы мыслим снабженным такой триангуляцией и два многогранника мы считаем различными не только когда они не равны, но и тогда, когда они равны, но триангуляции K на них взяты разные. Два же многогранника мы считаем равными тогда и только тогда, когда их можно совместить движением или

[7] Напомним, что связным называется множество, которое нельзя разложить на два непустых и замкнутых относительно него подмножества. Дополнение открытого множества замкнуто и обратно. Поэтому последнее наше утверждение есть прямое следствие определения связного множества.

движением с отражением так, чтобы они совпали вместе с их триангуляциями. При этом вершины в триангуляции считаются, конечно, различными, и их перестановка недопустима.

Возьмем какие-либо три вершины комплекса K и соответствующие вершины A, B, C на многогранниках из P. Закрепим A в начале координат, B — на положительной полуоси x, C — на полуплоскости $y > 0$ плоскости $z = 0$. Возьмем какой-либо многогранник p_0 из P с заданной триангуляцией K. Смещая достаточно мало его вершины, получим снова выпуклый многогранник с вершинами и с триангуляцией K. В силу наложенных условий на координаты трех вершин мы будем иметь всего $3e - 6$ переменных координат. Разным смещениям вершин будут соответствовать разные многогранники[8]. Следовательно, множество P представляет собой $(3e - 6)$-мерное многообразие.

Из теоремы Эйлера легко вывести, что число ребер k комплекса K равно $k = 3e - 6$. Значит многообразия P и M имеют одинаковую размерность.

Так как каждый многогранник с данной на нем триангуляцией определяет некоторую метрику на комплексе K (метрику этой триангуляции), то получим некоторое отображение φ многообразия P в многообразие M. Если докажем, что это отображение удовлетворяет всем условиям основной леммы, то тем самым будет доказано, что P отображается на все M, т. е. что все выпуклые метрики, задаваемые на комплексе K, реализуемы.

1) Отображение φ взаимно однозначно, так как по теореме $1'$ данная метрика реализуется только одним многогранником.

2) Отображение φ непрерывно, так как непрерывному изменению многогранника отвечает непрерывное изменение его метрики.

3) Если реализуемые метрики m_n сходятся к выпуклой метрике m, то многогранники p_n, реализующие метрики m_n, ограничены в совокупности и из них можно выделить сходящуюся последовательность. Предельный многогранник этой последовательности будет, как мы покажем, иметь предельную метрику m. Это как раз означает, что выполнено третье условие основной леммы.

4) Наконец, четвертое условие основной леммы мы докажем, установив, что во всякой связной компоненте многообразия M есть реализуемые метрики.

Это доказательство проводится в общих чертах следующим образом.

---

[8] В силу условия, наложенного на вершины A, B, C, два соседних многогранника могут оказаться равными в том случае, если исходный многогранник целиком лежал в плоскости $z = 0$, т. е. вырождался в дважды покрытый многоугольник. В этом случае они симметричны относительно этой плоскости, но триангуляции на них различны, если условиться на одну сторону многогранника отображать одну часть комплекса K, а на другую — другую часть K.

Прежде всего, согласно предположению индукции, мы считаем, что всякая выпуклая метрика на комплексе менее чем с e вершинами реализуема. Мы рассматриваем границу многообразия M выпуклых метрик на комплексе K в многообразии всех метрик M_0. Мы легко покажем, что эта граница действительно существует (т. е. что $M \neq M_0$). Граница M в M_0 состоит из метрик, у которых во всех вершинах суммы углов $\leq 2\pi$ и хотя бы в одной $= 2\pi$. Вершины последнего типа являются, очевидно, несущественными, и мы покажем, что их можно исключить. Поэтому граница M в M_0 состоит из метрик менее чем с e вершинами. Вместе с тем эта граница представляет аналитическую гиперповерхность F и на границе каждой связной компоненты многообразия M есть обыкновенная точка поверхности F. Такая точка m_0 обладает тем свойством, что в достаточно малой ее окрестности нет точек других связных компонент поверхности F и, следовательно, нет точек других связных компонент многообразия M.

По предположению индукции, метрика m_0 реализуема посредством некоторого выпуклого многогранника p_0. Построим на этом многограннике триангуляцию, образующую комплекс K и изометричную m_0. Вершины комплекса K, где сумма углов равна 2π, представляются псевдовершинами на p_0. Достаточно малое смещение этих псевдовершин наружу дает нам выпуклый многогранник со всеми e реальными вершинами и допускающий триангуляцию K, по метрике сколь угодно близкую к m_0. Метрика этой триангуляции построенного таким образом многогранника окажется в малой окрестности метрики m_0, а потому во взятой связной компоненте многообразия M. Этим наше утверждение доказано.

Видим, что все условия основной леммы выполняются и тем самым она приводит к доказательству реализуемости выпуклой метрики.

7. Теперь обратимся к вопросу о существовании замкнутой выпуклой поверхности с заданной метрикой.

Если топологически отобразить метризованный комплекс на сферу S, то получим метрику на ней, которая будет всюду евклидовой, кроме конечного числа точек, соответствующих вершинам. Около этих точек длина окружности, вообще, $< 2\pi$. Из этого замечания видно, что выше мы имели дело, по существу, с частным случаем следующей общей проблемы.

Пусть на сфере S, которую мы мыслим как топологическую сферу, задана метрика, т. е каждой паре точек x, y сопоставлено число $\rho(x,y)$ — расстояние, удовлетворяющее обычным требованиям:

1) $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$;
3) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ [9].

[9] Из этих требований легко выводится, что при $x \neq y$ $\rho(x,y) > 0$.

Каковы необходимые и достаточные условия, при которых эта метрика может быть реализована посредством некоторой замкнутой выпуклой поверхности (т. е. границы выпуклого тела)?

Утверждение, что поверхность Φ реализует данную метрику, означает, что существует гомеоморфизм h, отображающий S на Φ так, что расстояние $\rho(x, y)$ равно расстоянию образов точек x и y на Φ, измеренному на Φ, т. е. равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих на Φ эти образы $h(x)$ и $h(y)$.

Отложим решение этой общей проблемы (результаты решения этой и примыкающих к ней проблем изложены в [4]) и займемся ее специальным случаем, относящимся к дифференциальной геометрии.

Пусть сфера S покрыта конечным числом областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, в каждой из которых определены координаты u_i, v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ взаимно однозначно и непрерывно связанные с точками этих областей, причем в общих частях областей переход от одних координат к другим осуществляется посредством трижды непрерывно дифференцируемого преобразования с якобианом, всюду отличным от нуля. Пусть в каждой области D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определены три функции $E_i(u_i, v_i)$, $F_i(u_i, v_i)$, $G_i(u_i, v_i)$, дважды непрерывно дифференцируемые, и такие, что квадратичная форма

$$ds^2 = E_i\,du_i^2 + 2\,F_i\,du_i\,dv_i + G_i\,dv_i^2$$

— определенная положительная. Пусть, кроме того, эти функции таковы, что при преобразовании от одних координат к другим в общей части областей D_i и D_k переход от $E_i(u_i, v_i), \ldots$ к $E_k(u_k, v_k), \ldots$ таков, что квадратичная форма ds^2 остается неизменной.

Кроме того, допускаются любые трижды непрерывно дифференцируемые преобразования координат, причем требуется, чтобы квадратичная форма ds^2 оставалась неизменной. Тогда коэффициенты E, F, G будут преобразовываться по известным формулам и будут оставаться дважды непрерывно дифференцируемыми [10].

Посредством квадратичной формы ds^2 каждой гладкой кривой на S $u(t)$, $v(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ можно отнести длину [11]

$$s = \int ds = \int\limits_0^1 \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,dt,$$

[10] Преобразованные коэффициенты E, F, G выражаются через прежние и первые производные старых координат по новым.

[11] Гладкая кривая — это такая, для которой существуют непрерывные $u'(t)$, $v'(t)$ и $u'^2 + v'^2 > 0$.

не зависящую, в силу инвариантности формы ds^2, от выбора координат u, v. Точная нижняя граница длин кривых, соединяющих две данные точки, называется расстоянием между ними. Легко устанавливается, что так определенное расстояние удовлетворяет всем трем аксиомам для расстояния, упомянутым выше. Таким образом, на сфере определяется дифференциально-геометрическая метрика.

По известной формуле, данной К. Ф. Гауссом, из коэффициентов E, F, G и их первых и вторых производных по u и v можно вычислить в каждой точке инвариантную величину — гауссову кривизну K [5, § 45, 71, 77]. Она оказывается непрерывной функцией точки на сфере S, так как E, F, G дважды непрерывно дифференцируемы. Если K всюду ≥ 0, то скажем, что метрика выпуклая. Условие $K \geq 0$ можно характеризовать более геометричными и эквивалентными ему, как это хорошо известно, условиями: сумма углов геодезического треугольника, т. е. треугольника, ограниченного экстремалями вариационной задачи $\delta \int ds = 0$, больше или равна π; или длина малой геодезической окружности радиуса r, т. е. геометрического места точек, удаленных от данной на расстояние r, меньше или равна $2\pi r$ [5, § 71, 77].

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для всякой выпуклой дифференциально-геометрической метрики на сфере существует реализующая ее (в указанном общем смысле) замкнутая выпуклая поверхность.*

Для случая, когда метрика аналитическая (т. е. $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ разлагаются в степенные ряды в окрестности каждой точки) и гауссова кривизна K всюду > 0, эта теорема впервые была сформулирована в 1915 г. Германом Вейлем [6]. Наметив ее доказательство, он, однако, не смог довести его до конца. Это было сделано только в 1937 г. Гансом Леви, который, используя свои общие теоремы об уравнениях Монжа — Ампера, смог заполнить важный пробел в рассуждениях Г. Вейля [7]. Г. Леви показывает также, что поверхность, реализующая аналитическую метрику, — аналитическая. Мы пока не в состоянии полностью оценить степень гладкости поверхностей, реализующих рассматриваемые нами неаналитические метрики. Зато мы не только устраняем требование аналитичности, которое не имеет прямого геометрического смысла, но также, — и это более существенно [12)], — устраняем требование, чтобы гауссова кривизна была всюду положительной: нам достаточно, чтобы было $K \geq 0$. Доказательство теоремы 2 будет проходить следующим путем. Пусть на сфере S задана выпуклая дифференциально-геометрическая метрика. Рассмотрим последо-

[12)] Если $K > 0$, то дважды непрерывно дифференцируемую метрику довольно легко аппроксимировать аналитической — также с положительной кривизной. При $K \geq 0$ это становится более затруднительным, и нам не ясно, как это можно сделать.

вательность геодезических триангуляций $T_1, T_2, \ldots$ сферы S, становящихся все более мелкими, так что длины сторон в них равномерно стремятся к нулю. (Геодезическая — такая триангуляция, в которой все стороны треугольников геодезические.) Заменим каждый треугольник в триангуляции T_n евклидовым с теми же сторонами. Тогда, если треугольники достаточно малы, углы их, как мы покажем, уменьшатся или останутся неизменными (уменьшение углов будет порядка $kF/3$, где k — среднее значение гауссовой кривизны в треугольнике, а F — его площадь) [13]. Поэтому мы получим выпуклую многогранную метрику m_n, аппроксимирующую данную метрику тем точнее, чем мельче триангуляция T_n. По теореме 1 существует выпуклый многогранник p_n, реализующий метрику m_n. Из полученной таким образом последовательности многогранников можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой замкнутой выпуклой поверхности Φ [14], метрика которой, как будет показано, есть предел метрик многогранников p_n, т. е. она как раз и будет заданной.

8. Совершенно аналогично тому, как дифференциально-геометрическая метрика задается на сфере, ее можно задать на любой поверхности R. Поверхность при этом понимается, конечно, в топологическом смысле. Метрика на R называется полной, если всякое ограниченное бесконечное множество точек на R имеет точки сгущения [15]. Метрику назовем выпуклой, если гауссова кривизна всюду ≥ 0 и хотя бы в одной точке > 0.

С. Кон-Фоссен доказал следующую важную теорему.

Дифференциально-геометрическая полная выпуклая метрика может быть задана только на поверхности, гомеоморфной или сфере, или проективной плоскости, или евклидовой плоскости [11] [16].

(Заметим, что, как ясно из определения полноты, всякая метрика на замкнутой поверхности необходимо полная.)

Теорема 2 устанавливает реализуемость указанного типа метрики, заданной на сфере. Как известно, проективная плоскость вообще не может быть погружена в евклидово трехмерное пространство без самопересечений.

[13] Этот результат принадлежит К. Ф. Гауссу. Доказательство можно найти в [8, гл. IX и IV, с. 209]. Впрочем, нам нужны точные неравенства, а не порядок величины, поэтому нужный результат мы докажем в своем месте, не ссылаясь на результат Гаусса.

[14] Возможность такого выбора следует из известной «теоремы выбора» Бляшке: из всякой ограниченной последовательности выпуклых тел можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к выпуклому телу [9].

[15] Чаще дается другое определение полноты: пространство полно, если всякая фундаментальная последовательность в нем сходится. Для поверхностей оба определения эквивалентны [10]. Всякое метрическое пространство можно, как известно, дополнить до полного. Поэтому только рассмотрение полных метрик представляет интерес.

[16] Некоторые результаты этой работы будут нами существенно использованы при доказательстве теоремы 3, сформулированной далее.

Отсюда ясно, что никакую выпуклую метрику на ней нельзя реализовать посредством выпуклой или какой бы то ни было достаточно регулярной поверхности. Остается метрика, заданная на евклидовой плоскости; о ней мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Всякая дифференциально-геометрическая полная выпуклая метрика, заданная на евклидовой плоскости, может быть реализована посредством некоторой выпуклой поверхности. Эта выпуклая поверхность необходимо оказывается бесконечной, т. е. является границей бесконечного выпуклого множества* (подобно параболоиду вращения или половине двуполого гиперболоида).

Доказательство этой теоремы, подобно доказательству теоремы 2, будет проводиться путем аппроксимации данной метрики многогранными метриками. Различие будет состоять в том, что здесь нам придется рассматривать некоторую специально выбранную последовательность ограниченных областей, исчерпывающих в конечном счете всю плоскость. Многогранную метрику, аппроксимирующую данную метрику в каждой такой области, мы будем дополнять до заданной на комплексе, гомеоморфном сфере, посредством «подклеивания» соответственно подобранного многоугольника. Сходящаяся последовательность, составленная из многогранников, реализующих так построенные метрики, даст в пределе искомую поверхность.

Заметим, что если исключить цилиндры, то все полные выпуклые поверхности в трехмерном евклидовом пространстве или замкнуты, или бесконечны и гомеоморфны плоскости. Таким образом, наши теоремы дают полную характеризацию метрик таких поверхностей, если только на них метрика может быть задана как дифференциально-геометрическая, т. е. посредством квадратичной формы ds^2.

II. Доказательство существования выпуклого многогранника с данной разверткой

1. Мы рассматриваем комплексы треугольников, гомеоморфные сфере. В комплексе вершины и стороны одного треугольника могут склеиваться друг с другом; это мы называем «самосклеиванием». Мы говорим, что на комплексе K задана метрика, если каждый его треугольник представлен обыкновенным плоским треугольником, причем склеиваемые стороны имеют, конечно, равные длины. Метрику мы будем называть выпуклой, если для каждой вершины сумма углов, сходящихся в ней, меньше 2π.

Мы говорим, что выпуклый многогранник p реализует метрику m, заданную на комплексе K, если комплекс K можно так отобразить на p, что в полученной триангуляции треугольники можно развернуть в плоские, равные тем, какие заданы в метрике m.

Теорема. *Для всякой выпуклой метрики существует реализующий ее выпуклый многогранник* [17].

2. Доказательство этой теоремы будем вести индукцией по числу вершин комплекса, на котором задается метрика.

Наименьшее число вершин, какое может иметь комплекс, равно 3. Комплекс с тремя вершинами имеет два треугольника. Действительно, по теореме Эйлера, $f - k + e = 2$, а так как у каждого треугольника три стороны и стороны склеены по две, то $3f = 2k$. Отсюда $f = 2e - 4$, так что при $e < 3$ $f \leq 0$ и, следовательно, комплексов с $e < 3$ не бывает, а при $e = 3$ число треугольников $f = 2$.

Рассмотрим комплекс с тремя вершинами. Пусть ABC — треугольник этого комплекса. Возможны два случая: или стороны этого треугольника вовсе не склеиваются друг с другом, или две из них, скажем AB и AC, склеиваются так, что вершины B и C совпадают. В первом случае второй треугольник комплекса (а мы доказали, что их может быть только два) склеивается всеми своими сторонами с треугольником ABC. Если оба треугольника заданы как евклидовы, то они равны и мы получаем дважды покрытый треугольник. Следовательно, всякая метризация такого комплекса реализуема выпуклым, правда, вырождающимся, многогранником.

Во втором случае второй треугольник комплекса подклеивается к первому по его свободному ребру BC, при этом две его стороны, оставшиеся свободными, склеиваются друг с другом. Так как у каждого треугольника по две стороны склеены друг с другом, то треугольники (если их метризовать) должны быть равнобедренными. Поэтому, соединяя противоположные (не склеенные друг с другом) вершины этих треугольников, мы разобьем комплекс на два равных треугольника, склеенных друг с другом по сторонам. Такой метризованный комплекс, как мы уже видели, реализуется дважды покрытым треугольником. Второй случай, следовательно, есть лишь перетриангуляция первого.

Таким образом, мы доказали, что *всякая метризация комплексов с тремя вершинами необходимо выпуклая и реализуется дважды покрытым треугольником.* Поэтому доказательство реализуемости любой выпуклой многогранной метрики можно вести индукцией по числу вершин комплекса, на котором задана метрика. Предположим, что всякая выпуклая метризация комплекса менее чем с e вершинами ($e > 3$) реализуема, и докажем тогда, что любая выпуклая метризация комплекса с e вершинами также реализуема.

---

[17] К выпуклым многогранникам мы присчитываем дважды покрытые многоугольники.

3. Пусть K — комплекс треугольников, гомеоморфный сфере, с k ребрами и e вершинами, причем $e > 3$, и пусть M_0 — множество всех его метризаций. Метризация определяется заданием длин всех k ребер. Единственные условия, налагаемые на них, суть «неравенства треугольника» (по числу треугольников комплекса K, три неравенства для каждого)[18]. Это — однородные линейные неравенства, и потому M_0 будет представляться как внутренность выпуклого многогранного угла[19] в k-мерном пространстве, где координатами являются длины ребер. Окрестностью метрики m мы считаем множество всех тех метрик, длины ребер которых отличаются от длин ребер метрики m менее чем на какое-либо $\varepsilon > 0$. Поэтому указанный телесный угол будет гомеоморфен многообразию M_0 всех метризаций комплекса K, и мы его просто отождествим с этим многообразием.

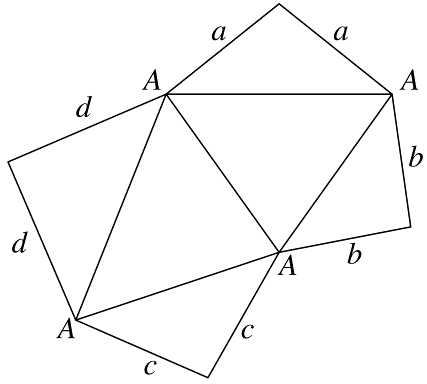


Рис. 4

Пусть теперь M — множество тех метрик из M_0, у которых суммы углов, сходящихся в каждой вершине, $< 2\pi$. Сумма углов, сходящихся в вершине, $\sum_j \varphi_{ij}$ (i — номер вершины; j — номер угла при этой вершине) есть непрерывная функции длин ребер комплекса. Множество M определяется неравенствами, $\sum_j \varphi_{ij} < 2\pi$ и, следовательно, есть k-мерное многообразие.

Может оказаться, что M пусто, но тогда нам не о чем говорить, так как мы хотим доказать, что если есть выпуклые метризации комплекса K, то они реализуемы[20]. Поэтому предположим, что M не пусто. Прежде всего мы, следуя общему плану доказательства, должны показать, что во всякой связной компоненте многообразия M есть реализуемые метрики. Для этого нам придется провести ряд вспомогательных рассуждений (п. 4–8).

---

[18] Положительность длин следует из неравенств треугольника: так, если $a+b-c > 0$, $a-b+c > 0$ то, складывая, получим $2a > 0$.

[19] Изменение длин всех ребер в одно и то же число раз сохраняет неравенства треугольника, потому область M_0 будет конусом с вершиной в начале, а так как неравенств конечное число, то M_0 — внутренность многогранного угла.

[20] Комплексы, не допускающие никаких выпуклых метризаций, действительно существуют, поскольку мы допускаем самосклеивания в вершинах. На рис. 4 изображен такой комплекс. Так как в вершине A сходятся все углы двух треугольников, то сумма углов, сходящихся в ней, всегда $> 2\pi$. На рисунке склеиваемые стороны, не приведенные на нем в совпадение, помечены одинаковыми буквами. Из данного примера легко видеть, что можно построить комплекс, в котором любое число n треугольников имеет все углы сходящимися в одной вершине, так что сумма углов, сходящихся в ней, всегда будет $> n\pi$.

4. Докажем, что *многообразие M_0 содержит метрики, не входящие в M*. Для этого покажем сначала, что в комплексе K есть вершина, в которой сходятся не менее трех треугольников. Так как, по предположению, K имеет более трех вершин, то нам достаточно показать, что если в комплексе во всякой вершине сходятся менее трех треугольников, то комплекс имеет три вершины. Возьмем какой-нибудь такой комплекс. Допустим, что у него есть вершина (для определенности — A), к которой подходит только один треугольник (для определенности — ABC). Так как к вершине A не подходит никакой другой треугольник, то ребра AB и AC склеены и вершины B и C совпадают. К вершине, которую представляют совпавшие вершины B и C, может подходить еще только один треугольник. Тем самым он склеен с треугольником ABC по стороне BC и две другие его стороны склеены друг с другом. Таким образом, мы получили комплекс с тремя вершинами.

Если в каждой вершине сходятся по два треугольника, то треугольник, подходящий к треугольнику ABC в вершине A, склеивается с этим последним по ребрам AB и AC, а затем склеивается с ним также по ребру BC (иначе в вершины B и C подходили бы другие треугольники). Мы получаем опять комплекс с тремя вершинами.

Итак, в комплексе K есть вершина A, в которой сходятся по крайней мере три треугольника. Метризуем комплекс K, приписав его ребрам одну и ту же длину. Все треугольники будут равносторонними, поэтому их можно склеивать по сторонам как угодно. Следовательно, такая метризация возможна для всякого комплекса.

Будем уменьшать в одно и то же число раз длины всех ребер, сходящихся к вершине A. Тогда никакие неравенства треугольника, имеющие место в комплексе K, не будут нарушаться, пока уменьшаемые ребра не достигнут половины первоначальной длины. Посмотрим, что будет происходить при этом с углами треугольников, подходящих к вершине A.

Если у треугольника только один угол имеет вершину A, то две стороны его, сходящиеся в A, убывают, а третья остается постоянной. Поэтому угол при вершине A будет стремиться к π и, следовательно, во всяком случае будет становиться $\geq 2\pi/3$.

Если у треугольника к вершине A подходят два (или все три) угла, то тем самым все его ребра сходятся в A. Поэтому треугольник будет только подобно уменьшаться, и углы его будут оставаться равными $\pi/3$, и, значит, сумма двух из них будет равна $2\pi/3$.

Таким образом, уменьшая ребра, сходящиеся в вершине A, можно добиться того, что сумма углов, сходящихся в A, для одного треугольника будет $\geq 2\pi/3$. Но в A сходятся не менее трех треугольников, и, следовательно, сумма углов, сходящихся в A, будет $\geq 2\pi$. Этим доказано, что комплекс K допускает метрики, не входящие в M.

5. Поскольку многообразие M занимает только часть M_0, оно имеет в M_0 границу. Докажем, что *граница M в M_0 состоит из кусков гладких поверхностей.* Граница M состоит из метрик, у которых хотя бы при одной вершине сумма углов равна 2π. Действительно, M определяется неравенствами

$$\sum_j \varphi_{ij} < 2\pi$$

($i = 1, 2, \ldots, e$; φ_{ij} — j-й угол, подходящий к i-й вершине). φ_{ij} суть непрерывные функции ребер, поэтому на границе M хотя бы одно из этих неравенств переходит в равенство. Следовательно, граница M состоит из кусков поверхностей, представляемых уравнениями

$$\sum_j \varphi_{ij} = 2\pi \quad (i = 1, 2, \ldots, e), \tag{1}$$

где φ_{ij} надо рассматривать как функции ребер.

Каждая из поверхностей, представляемых уравнением (1), гладкая. (Мы вовсе не рассматриваем той части этих поверхностей, которая лежит вне M_0.) Действительно, пусть a, b, c — стороны треугольника и φ — угол, противолежащий c, тогда

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{c}{ab\sin\varphi} > 0, \tag{2}$$

так как $a, b, c > 0$ и $\sin\varphi > 0$.

Если в вершине A_i нет самосклеиваний (т. е. у каждого треугольника, имеющего вершину A_i, только одна вершина совпадает с A_i), то у какого-либо треугольника, подходящего к A_i, есть ребро c, противолежащее вершине A_i, и если φ_{ij} — угол при вершине A_i в этом треугольнике, то, по формуле (2),

$$\frac{\partial\varphi_{ij}}{\partial c} > 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial c}\sum_j \varphi_{ij} > 0. \tag{3}$$

(Ребро c может быть противолежащим вершине A_i еще в другом треугольнике, но это только усилит неравенство (3); прилежащим же оно не может быть, так как это значило бы, что у взятого треугольника две вершины попадают в A_i.)

Если же в вершине A_i есть самосклеивания (т. е. хотя бы у одного треугольника вершина A_i встречается дважды), то существует треугольник с двумя вершинами A_i, и пусть c — ребро, соединяющее эти две совпадающие вершины (оно, следовательно, замкнуто). Пусть EBC и BCD — треугольники, сходящиеся по этому ребру; B и C совпадают с A_i, а c есть BC (рис. 5). Пусть β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ, ε — углы в этих треугольниках при вершинах B, C, D, E. Обе вершины E и D не могут совпадать с A_i, так как иначе в A_i сходились бы все углы двух треугольников (и, как легко видеть, углы еще других треугольников), так что сумма углов при вершине A никогда не могла бы быть меньше 2π, т. е. мы имели бы комплекс, вовсе не допускающий выпуклых метризаций. Пусть E не совпадает с A_i, тогда угол ε не подходит к A_i, а так как он противолежащий ребру c, то

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial c} > 0$$

и, следовательно, поскольку $\varepsilon + \gamma_1 + \beta_1 = \pi$

$$\frac{\partial(\gamma_1 + \beta_1)}{\partial c} < 0.$$

Вместе с тем точно так же

$$\frac{\partial(\gamma_2 + \beta_2 + \delta)}{\partial c} = 0, \qquad \frac{\partial(\gamma_2 + \beta_2)}{\partial c} < 0.$$

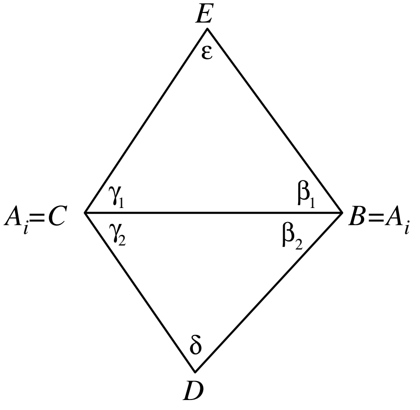


Рис. 5

Если вершина D и совпадает с A_i, то все равно производная по ребру c от суммы всех углов, сходящихся в A_i в треугольниках EBC и BCD, будет меньше нуля. Другим же треугольникам ребро c принадлежать не может, и, следовательно, производная от суммы всех углов, сходящихся в A_i, по ребру c

$$\frac{\partial}{\partial c}\sum_j \varphi_{ij} < 0. \tag{4}$$

Неравенства (3) и (4) показывают, что всегда существует ребро c такое, что для i-й вершины

$$\frac{\partial}{\partial c}\sum_j \varphi_{ij} \neq 0. \tag{5}$$

Отсюда, на основании известной теоремы о неявных функциях, следует, что уравнение $\sum\limits_j \varphi_{ij} = 2\pi$ можно разрешить относительно c и что оно представляет гладкую поверхность в окрестности каждой точки границы M в M_0.

Итак, мы доказали, что многообразие M выпуклых метризаций комплекса K более чем с тремя вершинами есть правильная часть многообразия M_0 всех его метризаций и что граница M в M_0 состоит из кусков гладких поверхностей, задаваемых уравнениями (1).

6. Докажем, что *на границе каждой связной компоненты M_1 многообразия M есть такая метрика, что в некоторой ее окрестности нет точек других связных компонент M кроме точек M_1.*

Возьмем какую-нибудь связную компоненту M_1 многообразия M. Граница ее состоит из кусков поверхностей F_i, представляемых уравнениями (1). Пусть m_0 — точка на границе M_1, принадлежащая наименьшему числу поверхностей F_i — поверхностям $F_1, F_2, \dots, F_l$. Тогда в некоторой окрестности U точки m_0 нет точек других поверхностей F_i (так как все эти поверхности — замкнутые множества) и каждая точка границы M_1, лежащая в U, принадлежит $F_1, F_2, \dots, F_l$ (вследствие минимального свойства точки m_0). В качестве окрестности U возьмем куб с основанием, параллельным касательной плоскости к поверхности F_1 в точке m_0. Мы возьмем этот куб столь малым, чтобы поверхность F_1 разбивала его на две связные части. Так как на поверхности F_1 выполняется неравенство (5) (для $i = 1$), то в одной части куба U $\sum\limits_j \varphi_{1j} < 2\pi$, а в другой — $\sum\limits_j \varphi_{1j} > 2\pi$. Общая часть M_1 и куба U лежит в его первой половине, а во второй половине куба вовсе нет точек из M. Пусть m_1 — точка, принадлежащая M и U; m_2 — точка, лежащая в другой части куба U (где $\sum\limits_j \varphi_{1j} > 2\pi$); m — произвольная точка на поверхности F_1 в кубе U. Соединим точки m_1 и m_2 кривой L, лежащей в U и пересекающей F_1 только в точке m [21]. Так как m_1 лежит в M_1, а m_2 не лежит в M, то кривая L пересекает границу M_1. Но всякая точка границы M_1 в кубе U принадлежит F_1, а так как L пересекает F_1 только в точке m, то эта точка принадлежит границе M_1. Так как, кроме того, все точки границы M_1, лежащие в кубе U, принадлежат всем поверхностям $F_1, F_2, \dots, F_l$, то точка m принадлежит им всем. Но точка m — любая точка на F_1 в кубе U. Следовательно, все точки поверхности F_1, лежащие в кубе U, принадлежат всем поверхностям $F_1, F_2, \dots, F_l$ и вместе с тем принадлежат границе M_1.

Но то же рассуждение применимо к любой из поверхностей $F_1, F_2, \dots, F_l$, и потому мы можем указать такую окрестность V точки m_0, что в ней все поверхности $F_1, F_2, \dots, F_l$ совпадают и образуют одну поверхность F, являющуюся частью границы M_1, лежащей в V. За эту окрестность можно опять взять достаточно малый куб с основанием, параллельным касатель-

[21] Построение куба U и кривой L становится особенно ясным, если заметить, что поверхность F_1 в окрестности точки m_0 можно представить уравнением $z = f(x, y, \dots)$, где ось z идет по нормали к касательной плоскости в точке m_0, а оси $x, y, \dots$ лежат в этой касательной плоскости.

ной плоскости к поверхности F в точке m_0, так что F разбивает этот куб на две части, одна из которых целиком принадлежит M_1 (никаких других кусков границы многообразия M в кубе V уже нет), а другая вовсе не содержит точек M (что опять-таки следует из неравенств (5), в силу которых с одной стороны F_1 $\sum_j \varphi_{1j} < 2\pi$, а с другой — $\sum_j \varphi_{1j} > 2\pi$).

Итак, мы доказали, что *на границе каждой связной компоненты M_1 многообразия M есть точка, в некоторой окрестности которой нет точек других связных компонент M. Кроме того, в этой окрестности все поверхности F_i, имеющие с ней общие точки, совпадают.*

7. Докажем, что *если в метрике m на комплексе K сумма углов при некоторой вершине равна 2π, то путем перетриангулирования и сколь угодно малого изменения метрики m можно исключить такую вершину.*

Пусть сумма углов при вершине A в некоторой метризации комплекса K равна 2π. Возможны два случая: 1) в A нет самосклеиваний; 2) в A есть самосклеивания.

В первом случае у каждого треугольника, подходящего к вершине A, только одна вершина совпадает с A. Вместе с тем сумма всех углов при A равна 2π. Поэтому все треугольники, подходящие к A, можно развернуть на плоскость, и они покроют некоторый многоугольник P с точкой A внутри, причем каждый треугольник будет входить в P только 1 раз. Плоский многоугольник P можно разбить на треугольники с вершинами только в вершинах P. Вершина A окажется исключенной, и, перенося перетриангулированный многоугольник P на комплекс K, мы получим перетриангуляцию комплекса K (с метрикой m), в которой вершина A уже отсутствует.

Во втором случае, когда есть треугольники, у которых две или даже три вершины совпадают с A, такое простое построение невозможно. При развертывании на плоскость некоторые треугольники появлялись бы 2 или 3 раза, и мы не могли бы производить их перетриангулирование в целом (см. рис. 6, где: *а*) дана развертка выродившегося тетраэдра с самосклеиваниями и *б*) показано схождение треугольников в вершине A при их развертывании на плоскость). Однако мы покажем, что путем перетриангулирования или малого изменения метрики и последующего перетриангулирования можно исключить самосклеивание в вершине A. Тем самым будет доказана возможность путем дальнейшего перетриангулирования вовсе исключить вершину A.

Если у некоторого треугольника две вершины совпадают с A, то по его стороне AA к нему прилегает другой треугольник (рис. 7). (Сам к себе этот треугольник не может подклеиваться по стороне AA, так как тогда окрестность вершины A не была бы гомеоморфна кругу.) Таким образом, самосклеивание вызывает наличие ребер с совпадающими концами. Каж-

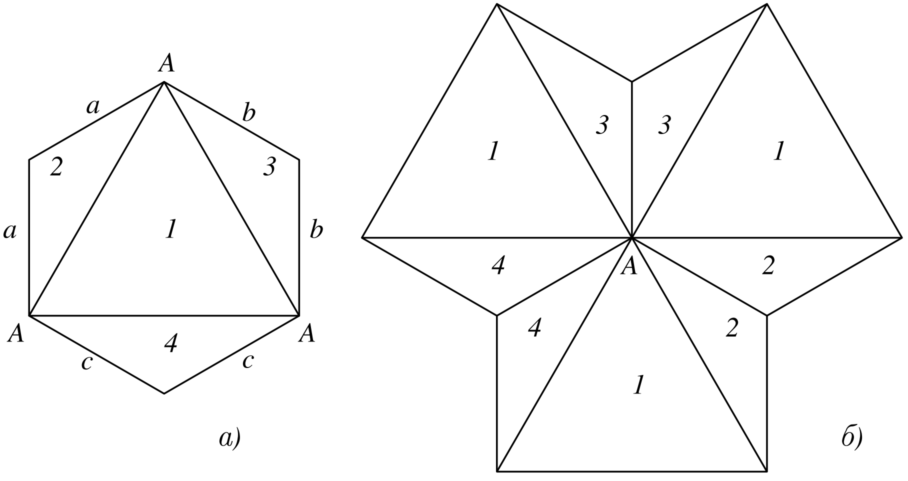


Рис. 6

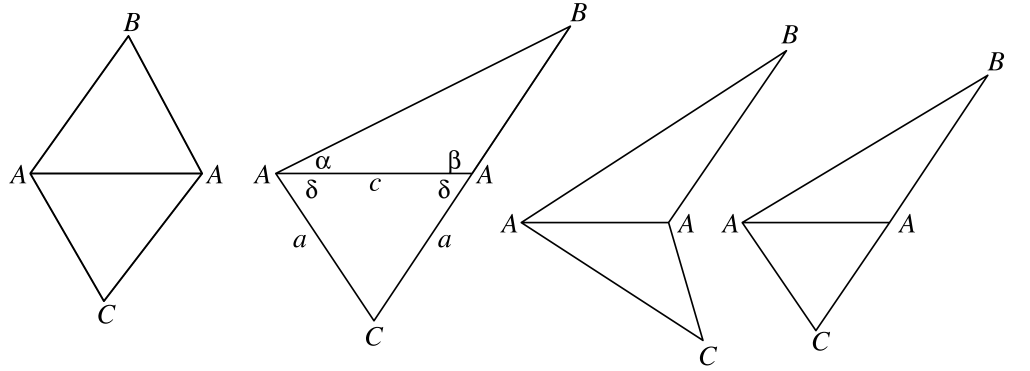
дое такое склеивание концов одного ребра в вершине A будем считать одним самосклеиванием в A. Мы будем различать самосклеивания трех типов: 1) четырехугольник $ABAC$ выпуклый (рис. 7, *а*); 2) четырехугольник $ABAC$ находится «на грани выпуклости» (т. е. один из углов A в нем равен π) и треугольник ACA имеет самосклеивание по сторонам CA (см. рис. 7, *б*); 3) четырехугольник $ABAC$ невыпуклый (или на грани выпуклости, но у треугольника ACA стороны AC не склеиваются друг с другом; см. рис. 7, *в*). В первом случае (см. рис. 7, *а*), проводя отрезок BC, мы разбиваем четырехугольник $ABAC$ на два треугольника и тем самым устраняем рассматриваемое самосклеивание. Новое самосклеивание в вершине A при этом не появляется, так как хотя бы одна из вершин B и C отлична от A. (Если бы B и C совпадали с A, то в A сходились бы все углы двух треугольников; их сумма равна 2π, а кроме того, к вершине A должны подходить другие треугольники, чтобы вокруг нее была круговая окрестность и потому сумма углов при A была бы $> 2\pi$.) Таким образом, мы можем устранить все самосклеивания первого типа.

Может случиться, что у одного из треугольников все три вершины совпадают с A (рис. 8). Покажем, что это можно устранить. Если бы все суммы углов при ребрах 1, 2, 3 (т. е., например, при ребре 1 $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1$) были $> \pi$, то общая сумма была бы

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \gamma_1) + (\alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2 + \gamma_2) + (\alpha_3 + \alpha_1 + \beta_3 + \gamma_3) > 3\pi,$$

а так как $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, то сумма углов при вершине A была бы

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 > 2\pi,$$



а) *б)* *в)*

Рис. 7

в то время как она должна равняться 2π [22]. Следовательно, хотя бы одна из сумм углов при каком-либо ребре должна быть $\leq \pi$. Если, скажем, $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\gamma_1 \leq \pi$, то четырехугольник $AABA$ выпуклый. Проводя в нем диагональ AB, мы исключим одно из самосклеиваний и получим треугольники, у каждого из которых все три вершины не совпадают с A. Итак, можно считать, что у каждого треугольника максимум две вершины совпадают с A.

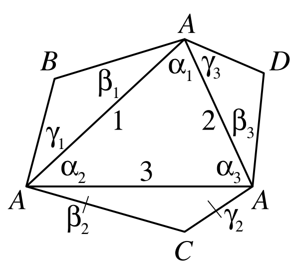


Рис. 8

Обратимся теперь к самосклеиванию второго типа (рис. 7, *б*). На основании только что установленного, мы считаем, что B отлична от A. (Для C это, конечно, и так ясно.) Удлиняя сколько угодно мало ребро c, но оставляя другие ребра неизменными, мы не изменим углов в других треугольниках комплекса, а вместо углов α, β, δ получим α_1, β_1, δ_1, причем $\alpha_1 > \alpha$, $\beta_1 < \beta$, $\delta_1 < \delta$ [23]. Если теперь удлинять ребро a, то, так как оно принадлежит только треугольнику ACA (самосклеивание по AC!), углы во всех треугольниках, кроме ACA, останутся неизменными, а угол δ будет увеличиваться. Мы можем при этом получить такой угол δ_2, что

$$\alpha_1+\beta_1+2\delta_2=\alpha+\beta+2\delta.$$

[22] Треугольники, прилегающие к треугольнику AAA, очевидно, различны.

[23] Когда c удлиняется, то противолежащий угол возрастает, а значит, сумма двух других убывает. Однако, поскольку один из этих углов тупой, при удлинении c только он убывает, в то время как другой угол возрастает.

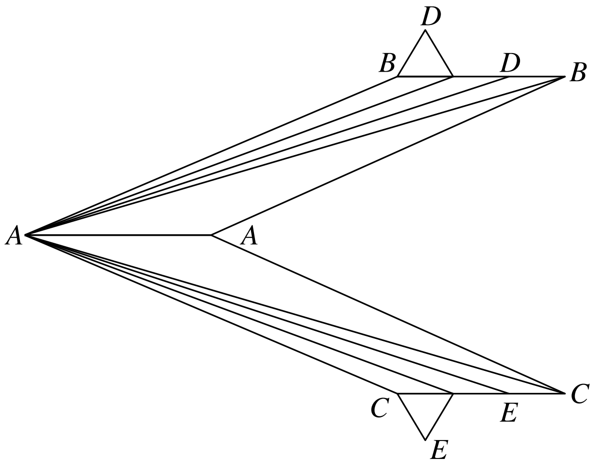


Рис. 9

Тогда сумма углов при вершине A останется неизменной и, следовательно, равной 2π. Вместе с тем поскольку $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha + \beta$, то $\delta_2 > \delta$; кроме того, $\alpha_1 > \alpha$. Следовательно, $\alpha_1 + \delta_2 > > \alpha + \delta$ и $\beta_1 + \delta_2 < \beta + \delta = \pi$. В результате наших операций четырехугольник $ABAC$ станет выпуклым и получим самосклеивание первого типа, которое можно будет устранить. Изменения ребер c и a, которые мы производили, можно сделать, конечно, сколь угодно малыми.

Теперь рассмотрим самосклеивания третьего типа (рис. 7, *в*)[24]. Мы считаем все прочие самосклеивания в вершине A устраненными. Значит, у одного треугольника максимум две вершины могут совпадать с A. При самосклеивании третьего типа сумма углов треугольников ABA и ACA при вершине A больше π, поэтому в вершине A может быть только одно такое самосклеивание; другие самосклеивания уже устранены.

Развернем треугольники, подходящие к вершине A, на плоскость (рис. 10, *а*, *б*). При этом треугольники ABA и ACA появятся в этой развертке два раза и все треугольники, подходящие к A, покроют многоугольник P с точкой A внутри, так как сумма всех углов при вершине A равна 2π. В развертке обе вершины B и B'[25] окажутся по одну сторону от прямой AC, проведенной на рис. 10, *а* штрихами. Действительно, угол $C'AB'$ или больше π, или равен π. В этом случае сторона AC' не совпадает с AC, по предположению. Следовательно, угол CAB' всегда больше π. Мы можем соединить A'' с B' отрезком, и если он идет внутри многоугольника P, то можно произвести соответствующую его перетриангуляцию (на рис. 10, *а* жирные ли-

---

[24] Комплексы с такими самосклеиваниями действительно могут давать развертку выпуклого многогранника. На рис. 9 изображена развертка правильной трехгранной призмы, где треугольники AAB и AAC имеют как раз самосклеивание рассматриваемого типа. При склеивании призмы стороны AB и AC образуют винтообразные линии на ее боковой поверхности. На этой развертке легко провести наши дальнейшие рассуждения относительно таких самосклеиваний.

[25] Для удобства отметим штрихами те же вершины комплекса, встречающиеся при развертывании в нескольких местах.

нии обозначают стороны этой перетриангуляции). Если же отрезок $A''B'$ не лежит внутри P, то мы соединим A'' с другой вершиной, ближайшей к прямой AC (вершина D на рис. 10, *б*), и опять соответственно перетриангулируем многоугольник P. В результате общий угол при A'' уменьшится, и если он станет меньше π, то четырехугольник $ABA''C$ станет выпуклым и мы получим самосклеивание первого типа. Если же он станет равным π при условии совпадения сторон AC' и AC, то мы получим самосклеивание второго типа. Если же угол при A'' останется все-таки бóльшим или равным π, при условии несовпадения сторон AC' и AC, то мы сможем повторить такое же построение, как только что указанное. Так мы будем поступать до тех пор, пока, наконец, построение станет невозможным [26]. А оно становится невозможным, если угол $C'AB'$ станет меньшим или равным π, что в случае несовпадения сторон AC и AC' будет обозначать появление самосклеивания первого типа, а в случае совпадения этих сторон и равенства $\angle C'AB' = \pi$ будет обозначать появление самосклеивания второго типа. Таким образом, устраним

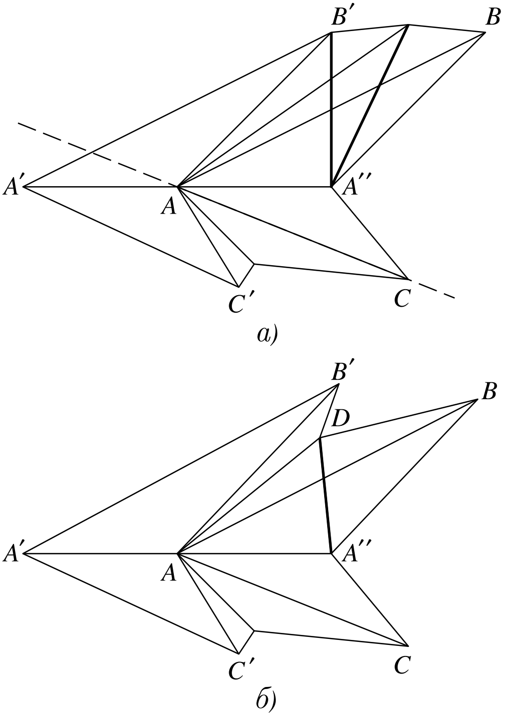


Рис. 10

---

[26] Нетрудно убедиться, что это наступит после конечного числа шагов. Действительно, производя перетриангуляцию, мы соединяем вершину A с вершиной B новой геодезической, более короткой, чем прежняя. ($A'B' > AB > B'A''$ или $A'B' > AB > A''D$, если углы при A и $A'' \geq 90°$, что можно всегда предполагать, так как если оба угла при A в треугольниках $A'AB'$ и $A'AC'$ острые, то получаем первый рассмотренный нами случай.) Две данные точки A и B можно соединить только конечным числом геодезических, длины которых не больше длины фиксированной геодезической. Иначе из них можно выделить последовательность, сходящуюся к некоторой геодезической. В сколь угодно малой окрестности этой геодезической имелись бы тогда другие геодезические, а это невозможно, в чем легко убедиться, развернув эту геодезическую вместе с пересекаемыми ею треугольниками на плоскость. Отсюда следует, что геодезических AB, более коротких, чем данная, есть только конечное число, и, значит, различных перетриангуляций, получаемых нашим построением, также имеется только конечное число. См. также п. 11, где дается элементарное доказательство конечности числа перетриангуляций.

самосклеивание третьего типа: самосклеивание первых двух типов, как мы показали, можно вообще устранить. Этим самым завершено доказательство возможности устранения всяких самосклеиваний в вершине, где сумма углов равна 2π, и, следовательно, доказано, что такую вершину можно исключить, используя перетриангулирование и сколь угодно малое изменение метрики.

8. Лемма. *Пусть на выпуклом многограннике p_0 имеется триангуляция T, каждый треугольник которой можно развернуть на плоскость. (Вершины p_0 будут обязательно вершинами триангуляции, но допускается, что в триангуляции могут быть и другие вершины.) Существует такое $\varepsilon > 0$, что как только многогранник p имеет вершины, удаленные от вершин триангуляции многогранника p_0 меньше чем на ε (причем каждой вершине T соответствует одна и только одна вершина p), так на p можно построить, и притом единственным образом, триангуляцию, близкую к T и имеющую то же строение.*

Заметим прежде всего, что можно указать такое $\varepsilon > 0$, что как только расстояния вершин многогранника p_0 от вершин T станут меньшими ε, так некомпланарным вершинам T будут соответствовать некомпланарные вершины p. Это будет означать, что грани многогранника p_0 при переходе к p могут только переламываться, давая несколько граней вместо одной, но не могут разгибаться так, что из частей разных граней получится одна грань.

Число возможных строений многогранников p конечно [27], и мы рассмотрим многогранники p какого-либо одного строения. Триангулируем одинаково все грани этих многогранников p, беря за вершины триангуляции вершины многогранников, и аналогично триангулируем p_0 (вершинами триангуляции будут здесь вершины T). В результате мы сможем считать, что многогранники p и p_0 одинаково построены из треугольных «граней», некоторые из которых могут лежать в одной плоскости. Развернем теперь какое-нибудь ребро AB триангуляции T многогранника p_0 на плоскость вместе со всеми «гранями», через которые оно проходит (рис. 11). Смещение вершин T вызывает изменение «граней», участвующих в этой развертке. Но так как это изменение непрерывно, то найдется такое $\delta > 0$, что при смещениях, меньших δ, изменение развертки будет столь ма-

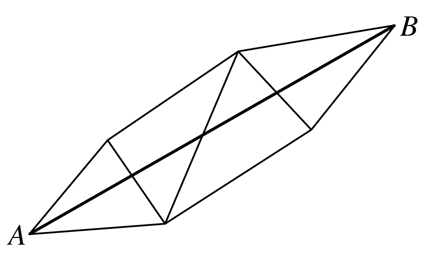


Рис. 11

[27] Речь идет о комбинаторной схеме многогранника. Число комбинаторных схем многогранников связности сферы с фиксированным числом вершин конечно.

лым, что отрезок AB останется внутри нее. Если возьмем ε меньше всех таких δ для всех ребер триангуляции T и для всех возможных строений многогранников p, то и получим искомое ε. Действительно, поскольку вершины T при смещениях, меньших ε, не пересекают ни одного из ребер K (как они не пересекают AB при смещениях $< \delta$), постольку ребра, ограничивавшие в T треугольник, будут по-прежнему его ограничивать, и, следовательно, строение триангуляции T сохранится. Кроме того, измененная триангуляция T получается только одна, потому что, скажем, в измененной развертке окрестности ребра AB есть только один отрезок, соединяющий вершины A и B. (На многограннике возможны также другие геодезические отрезки AB, но они уже не будут близки к данному, так как будут удаляться от него всегда на конечное расстояние, зависящее от «ширины» окрестности ребра AB.)

Рассмотренная в доказательстве вспомогательная триангуляция многогранников сама, очевидно, представляет метризованный комплекс. Поэтому из наших рассуждений можем извлечь и такой несколько более общий результат.

Пусть комплекс K_1 с метрикой m есть перетриангуляция комплекса K с метрикой m_0, причем каждая вершина K_1 есть вершина K (обратное может и не иметь места). Тогда при произвольной, но достаточно малой, вариации метрики m комплекса K_1 мы получаем опять перетриангуляцию комплекса K с метрикой, близкой к исходной.

Если у K есть вершины, не являющиеся вершинами K_1, то положение и в комплексе K_1 с измененной метрикой становится неопределенным. Во избежание этого, можно потребовать, чтобы при изменении метрики комплекса K_1 вершины комплекса K в нем сохраняли свои барицентрические координаты в том симплексе (вершине, ребре, треугольнике) комплекса K_1, в котором они лежали. Тогда те же соображения непрерывности приведут нас к высказанному только что утверждению.

9. Теперь мы можем доказать, что *во всякой связной компоненте многообразия M выпуклых метризаций комплекса K есть реализуемые метрики.*

Пусть M_1 — связная компонента M и m_0 — точка на ее границе, указанная в п. 6, такая, что в ее окрестности V нет точек других связных компонент M, кроме M_1.

Так как метрика m_0 лежит на границе M_1, то при некоторых ее вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_l$ сумма углов равна 2π. Согласно доказанному в п. 6, путем перетриангулирования и сколь угодно малого изменения метрики можно исключить вершину A_1. В результате получим метрику m_1, лежащую на границе M_1 в окрестности V. При изменении метрики суммы углов при других вершинах могут меняться. Но при тех вершинах, где эти суммы были меньше 2π, они останутся меньше 2π, если только изменение метрики достаточно мало. А при тех вершинах, где суммы углов были равны 2π, они останутся неизменными, потому что, сохраняя сумму углов при вершине A_1 равной 2π, мы остаемся на поверхности F_1 (фигурировавшей в рассуждениях п. 7), совпадающей в V с поверхностями $F_2, \ldots, F_l$, на которых лежат метрики с суммами углов при вершинах $A_2, \ldots, A_l$, равными 2π.

После исключения вершины A_1 можно из полученного комплекса K_1 исключить вершину A_2 тем же путем, каким из K была исключена вершина A_1. Если при этом нам придется варьировать метрику, имеющуюся на K_1, то как только эта вариация будет достаточно мала, так комплекс K_1 с новой метрикой будет опять перетриангуляцией исходного комплекса K. Это следует из замечания, сделанного в конце предыдущего пункта.

Повторяя эту операцию, мы постепенно исключим все вершины A_1, $A_2, \ldots, A_l$ и придем к комплексу K_l с $e - l$ вершинами, являющемуся перетриангуляцией комплекса K, с метрикой m', лежащей в данной окрестности V исходной метрики m_0. Эта метрика m' дает выпуклую метрику на комплексе K_l, и потому, согласно предположению индукции, она реализуется некоторым выпуклым многогранником p'.

Так как метрика на K_l есть лишь перетриангуляция метрики m', заданной на исходном комплексе K, то многогранник p' можно триангулировать таким образом, что получим комплекс K с метрикой m'. Исключенные вершины $A_1, A_2, \ldots, A_l$ будут вершинами этой K-триангуляции, но не будут вершинами p', так как суммы углов при них равны 2π. При достаточно малых смещениях их наружу из многогранника p' выпуклая оболочка вершин p' и смещенных точек $A_1, A_2, \ldots, A_l$ будет выпуклым многогранником p, вершинами которого будут все вершины p' и точки $A_1, A_2, \ldots, A_l$. Если их смещения достаточно малы, то, согласно лемме п. 7, многогранник можно триангулировать так, что триангуляция будет изоморфна комплексу K. Эта триангуляция дает выпуклую метризацию комплекса K, реализованную выпуклым многогранником p и близкую к m', следовательно, лежащую в окрестности V метрики m_0. А так как в этой окрестности всякая выпуклая метрика принадлежит данной связной компоненте M_1 многообразия M, то тем самым в M_1 есть реализуемая метрика, что и требовалось доказать.

10. Рассмотрим теперь многогранники с e вершинами, допускающие триангуляцию, представляющую комплекс K, и такую, что каждый ее треугольник можно развернуть на плоскость. С каждым многогранником мы связываем отображение комплекса K на его триангуляцию. Вершины, ребра и грани комплекса, конечно, индивидуализированы, хотя комплекс и может допускать преобразования в себя. Поэтому отображение комплекса K на триангуляцию многогранника индивидуализирует его вершины, а также ребра и треугольники триангуляции.

Многогранник вместе с отображенным на его триангуляцию комплексом K мы будем называть K-триангулированным многогранником.

Два K-триангулированных многогранника мы относим к одному классу, если существует движение или движение с отражением, приводящее к совпадению оба многогранника вместе с их триангуляциями, т. е. так, что отображения комплекса K на эти триангуляции также совпадут и тем самым совпадают индивидуализированные вершины, ребра и треугольники триангуляции.

Таким образом, все K-триангулированные многогранники распределяются по классам. Мы рассмотрим множество P всех этих классов. Возьмем какой-либо K-триангулированный многогранник p_0, и пусть A, B, C — три его вершины. Возьмем декартову систему координат x, y, z и путем движения приведем многогранник p_0 в такое положение, что вершина A окажется в начале, B — на положительной полуоси x, C — в плоскости xy на полуплоскости $y > 0$. Применяя, если нужно, отражение в плоскости $z = 0$, мы можем добиться того, что какая-либо данная вершина D многогранника p_0, не лежащая в плоскости ABC, будет лежать в полупространстве $z > 0$.

Когда расположение многогранника подчинено таким условиям, никакое его движение и отражение невозможны. Поэтому, если мы приведем в такое же расположение другой многогранник p того же класса, что и p_0, то он совпадет с p_0 вместе с триангуляцией. Иначе возможно было бы движение (или движение с отражением), приводящее p к совпадению с p_0 вместе с триангуляцией. Но это движение должно остановить вершины A, B, C на месте, так как по условию совпадения триангуляций они должны совпадать (вершины индивидуализированы!). Такое движение невозможно, а отражение также невозможно, так как, сохраняя A, B, C на месте, оно переводило бы вершину D из полупространства $z > 0$ в полупространство $z < 0$. Следовательно, если расположение многогранников подчинено поставленным условиям, то каждому классу может соответствовать только один многогранник.

Пусть многогранник p_0 не вырождается в многоугольник. Тогда при достаточно малых, но в остальном произвольных, смещениях его вершин, сохраняющих, однако, условия, наложенные на расположение вершин A, B, C, граница выпуклой оболочки смещенных вершин будет многогранником p, близким к p_0 и имеющим также e вершин. Если смещение вершин меньше половины расстояния между ними, то каждой вершине многогранника p будет соответствовать единственная ближайшая к ней вершина многогранника p_0.

Далее, если вершины многогранника p достаточно близки к вершинам многогранника p_0, то, как следует из леммы п. 8, p можно триангулировать так, что полученная триангуляция будет представлять комплекс K, так же как и на p_0; длины ребер этой триангуляции будут мало отличаться от длин ребер триангуляции многогранника p_0.

Таким образом, многогранники p, достаточно близкие к p_0, оказываются K-триангулированными. Все они будут принадлежать разным классам, так как при условии, наложенном на их расположение, каждому классу соответствует один многогранник [28]. Совокупность классов, представляемых этими многогранниками, мы будем считать окрестностью класса, представляемого многогранником p_0.

Так как у наших многогранников всего e вершин, то их расположение определяется $3e$ координатами. Однако у вершин A, B, C соответственно остаются неизменными по 3, 2, 1 координате. Следовательно, мы имеем всего $3e-6$ переменных координат, причем в достаточно малых пределах их изменения произвольны. Это означает, что у класса p_0 имеется окрестность, гомеоморфная (3e − 6)-мерному шару.

Пусть теперь многогранник p_0 вырождается в дважды покрытый многоугольник. Он лежит в плоскости $z = 0$. Мы будем различать на нем две стороны: одну обращенную в сторону $z > 0$, другую — в сторону $z < 0$. На одну сторону отображена одна часть комплекса K, на другую — другая. Этим самым стороны вырожденного K-триангулированного многоугольника различаются соответствующими им частями комплекса K.

При достаточно малых смещениях вершин, сохраняющих условия, наложенные на расположение A, B, C, но в остальном произвольных, многогранник p_0 будет переходить в близкие к нему многогранники p, имеющие также e вершин. Если смещения вершин достаточно малы, то грани поворачиваются мало, и ни одна из них не станет перпендикулярной плоскости $z = 0$. Поэтому на многогранниках p мы можем различать две части, одну, обращенную в сторону $z > 0$, другую — в сторону $z < 0$. На каждой из них мы будем строить триангуляцию, соответствующую триангуляции обращенной туда же стороны многогранника p_0. Этим самым на указанные части многогранника p будут отображаться соответственные части комплекса K. То, что при достаточно малых смещениях вершин перенос триангуляции с исходного многогранника на измененный возможен, следует из леммы п. 8.

Получаемые таким путем K-триангулированные многогранники будут принадлежать разным классам. Действительно, в силу условия, наложенного на расположение вершин A, B, C, два многогранника одного класса могли бы не совпадать только в том случае, когда один был бы симметричен другому относительно плоскости $z = 0$. Однако при отражении в этой плоскости стороны многогранников, обращенные к $z > 0$ и к $z < 0$, меняются местами, а им (этим сторонам) по условию соответствуют разные части

[28] При малых смещениях вершин D остается в полупространстве $z > 0$.

комплекса K. Следовательно, хотя симметричные многогранники равны, но отображения комплекса K на них разные, и тем самым эти многогранники принадлежат разным классам.

Таким образом, при разных смещениях вершин мы получаем многогранники разных классов. Совокупность всех этих классов будем считать окрестностью класса многогранника p_0. Так как мы имеем всего $3e-6$ переменных координат вершин, то окрестность класса p_0 будет гомеоморфна $(3e-6)$-мерному шару.

Наше построение окрестностей классов превратило, как мы видим, множество всех классов p в $(3e-6)$-мерное многообразие P. Если f — число треугольников, а k — число ребер в комплексе K, то $3f = 2k$, так как у каждого треугольника по три стороны, но стороны треугольников в комплексе склеиваются по две. По теореме Эйлера $f - k + e = 2$, или $3f - 3k + 3e = 6$, а так как $3f = 2k$, то

$$3e - 6 = k.$$

Следовательно, число измерений многообразия P классов K-триангулируемых многогранников равно числу ребер комплекса K, т. е. равно числу измерений многообразия M выпуклых метризаций комплекса K.

11. Лемма. *Пусть последовательность K-триангулированных многогранников $p_1, p_2, \ldots$ такова, что метрики их K-триангуляций $m_1, m_2, \ldots$ сходятся к некоторой метрике m*[29]*. Тогда из этой последовательности можно выделить такую подпоследовательность $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots$, что многогранники ее сходятся к некоторому многограннику p вместе со своими K-триангуляциями, т. е. предельный многогранник оказывается K-триангулированным и его K-триангуляция есть предел K-триангуляций многогранников p_{n_i}, и тем самим она имеет предельную метрику m.*

В лемме мы, конечно, рассматриваем многогранники с точностью до движения, потому что иначе она не верна: мы могли бы взять многогранники p_n удаляющимися в бесконечность. В связи с этим мы можем предположить, что все многогранники p_n содержат начало координат. Так как метрики их сходятся, то расстояния между их вершинами ограничены и потому сами многогранники ограничены в совокупности.

Перенумеруем вершины комплекса K: тогда, так как этот комплекс отображен на многогранники p_n, их вершины тоже окажутся соответственно нумерованными. Многогранники p_n ограничены в совокупности, поэтому мы можем выбрать из них такую последовательность $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots$, в которой соответственно сходятся вершины всех номеров. Выпуклая оболочка пределов вершин дает нам некоторый выпуклый многогранник p — предел

[29] Каждая K-триангуляция многогранника имеет метрику, определяемую длинами ее ребер. В данной лемме вовсе не предполагается выпуклость предельной метрики m.

многогранников p_{n_i}. Он не может выродиться в точку или в отрезок, потому что метрики многогранников p_{n_i} стремятся к метрике m и, следовательно, их площади не могут стремиться к нулю.

Многогранники p_{n_i} имеют по e вершин каждый. Как известно, число возможных строений многогранников с данным числом вершин конечно. Поэтому мы можем из последовательности p_{n_i} выделить последовательность многогранников p^j, имеющих одинаковое строение, и притом так, что соответственные их вершины (т. е. вершины, соответствующие данным вершинам комплекса K) будут одинаково расположены в комплексе граней, которым является каждый многогранник p^j. Если на многогранниках p^j есть нетреугольные грани, то мы их можем триангулировать посредством проведения диагоналей и притом одинаково на всех многогранниках p^j. В результате все многогранники p^j окажутся разными реализациями одного комплекса треугольников T. Так как они, кроме того, K-триангулированы, то мы имеем на каждом из них две триангуляции: K и T, которые тем самым являются перетриангуляциями одна другой. Триангуляции K имеют метрики m^j, сходящиеся к m. Триангуляции K осуществляются ребрами и диагоналями граней многогранников p^j, сходящихся к p; поэтому они сходятся к некоторой триангуляции многогранника p. Однако эта предельная триангуляция может вырождаться: некоторые треугольники могут вырождиться в отрезки. Для нас это несущественно; важно лишь то, что все элементы T-триангуляций многогранников p^j имеют определенные пределы на многограннике p.

Триангуляции K и T на разных многогранниках p^j могут иметь разное взаимное расположение в топологическом смысле, т. е. в отношении того, какие ребра одной из них и в каком порядке пересекаются ребрами другой. Однако мы покажем, что таких возможностей лишь конечное число. Для этого достаточно показать, что каждое ребро T-триангуляции не может иметь сколь угодно много точек пересечения с ребрами K-триангуляции (исключая, конечно, тот случай, когда два ребра обеих триангуляций просто совпадают). Действительно, в таком случае мы получаем конечное число возможных положений для каждого ребра, а следовательно, конечное число положений для них всех. Очевидно также, что если известны точки пересечения ребер обеих триангуляций и их порядок на каждом ребре, то тем самым известно взаимное расположение триангуляций, потому что в каждом треугольнике одной из них ребро другой идет по прямолинейному отрезку от одной точки пересечения с его сторонами к другой.

Пусть L — точная верхняя граница длин ребер T-триангуляций многогранников p^j; h — точная нижняя граница высот треугольников их K-триангуляций ($h > 0$, так как метрики m^j сходятся к метрике m и потому ни один треугольник K-триангуляции не может в пределе вырождаться по самому определению метрики на комплексе K). Пусть, наконец, n — наибольшее число углов, сходящихся в одной вершине K-триангуляции. Мы покажем, что число ребер K-триангуляции, которые могут пересекать одно ребро T-триангуляции (считая повторные пересечения за различные), удовлетворяет неравенству

$$N < \frac{2Ln}{h} + n. \tag{6}$$

Допустим противное, и пусть ребро a T-триангуляции одного из многогранников p^j имеет N точек пересечения с ребрами K-триангуляции, причем

$$N \geq \frac{2Ln}{h} + n. \tag{7}$$

Тогда на ребре a n раз подряд встречаются отрезки между точками пересечения длины $<h/2$. Иначе на каждые n таких отрезков приходился хотя бы один отрезок длины $\geq h/2$ и мы получали бы в сумме длину $[N/n]h/2$ [30], которая, вследствие (7), была бы больше L, вопреки тому, что длина ребра a не больше L.

Пусть первый из n идущих подряд отрезков длины $< h/2$ лежит в треугольнике ABC K-триангуляции (рис. 12). Концы его удалены от вершины A меньше, чем на половины сторон AB и BC и тем самым лежат к вершине A ближе, чем к вершинам B и C [31]. Иначе этот отрезок EF не был бы меньше половины наименьшей высоты треугольника ABC. (Для того чтобы убедиться в этом, мы провели из точки F перпендикуляр FH к стороне AB; так как $FH \leq EF$, то EF только тогда меньше половины высоты, опущенной из вершины C, когда $FA < AC$, аналогичное соображение верно для точки E.)

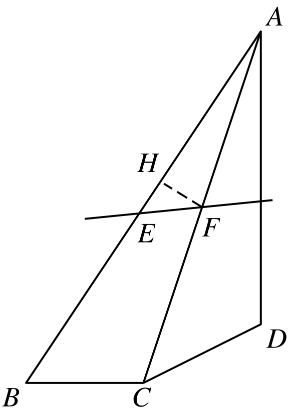


Рис. 12

Выйдя из треугольника ABC, ребро a попадает в соседний треугольник ACD, где оно опять имеет отрезок, меньший $h/2$. Поэтому оно и в этом треугольнике проходит ближе к вершине A, чем к другим. Так как мы имеем n таких отрезков кряду, а в вершине A сходятся не более n треугольников [32], то ребро a,

[30] $[N/n]$ — целая часть N/n.

[31] Вершина A это та вершина, где сходятся стороны треугольника ABC, на которых лежат концы рассматриваемого отрезка ребра a.

[32] Если есть самосклеивания в A, то один треугольник подходит к A более одного раза. В таком случае он считается столько раз, сколько углов он имеет при вершине A.

обойдя вокруг вершины A, возвращается к стороне AB и снова ее пересекает. Это, однако, невозможно. Действительно, вершина A есть вершина K-триангуляции, а значит, также вершина T-триангуляции. Поэтому из нее должно исходить какое-то ребро b T-триангуляции. Это ребро должно будет пересечь a, а этого не может быть, так как ребра пересекаются только в вершинах. Этим неравенство (6) доказано.

Итак, для взаимных расположений K- и T-триангуляций на многогранниках p^j есть лишь конечное число возможностей. Поэтому мы можем выбрать подпоследовательность p^{j_s} так, что на ее многогранниках взаимное топологическое расположение K- и T-триангуляций будет одно и то же. Далее, метрическое взаимное расположение K- и T-триангуляций определяется отношениями, в которых делят ребра этих триангуляций их точки пересечений. Если ребра совпадают, то тем самым их взаимное метрическое расположение также определено. Поэтому мы можем окончательно выбрать подпоследовательность p^{j_s} так, что на многогранниках p^{j_s} K-триангуляции сходятся. Тогда в пределе они дадут K-триангуляцию предельного многогранника p, и так как метрики (т. е. попросту длины ребер) K-триангуляций многогранников p^{j_s} по условию сходятся к метрике m, то предельная K-триангуляция многогранника p как раз и будет иметь метрику m. Следовательно, наша лемма доказана.

12. Теперь уже есть все необходимое для того, чтобы быстро завершить доказательство существования многогранника, реализующего данную выпуклую метрику на комплексе K.

Мы имеем, с одной стороны, многообразие M всех выпуклых метризаций комплекса K и, с другой — многообразие P всех классов эквивалентных друг другу выпуклых K-триангулированных многогранников. Оба многообразия, как показано в конце п. 10, имеют одинаковую размерность. Каждый K-триангулированный многогранник определяет на комплексе K некоторую метрику — метрику своей K-триангуляции. Как видно из определения классов K-триангулированных многогранников, многогранники одного класса дают на их K-триангуляциях одну и ту же метрику. Этим самым устанавливается однозначное отображение φ многообразия P в многообразие M. Существование многогранника с любой метрикой из M равносильно тому, что φ есть отображение многообразия P на все многообразие M. Для доказательства этого мы имеем основную лемму. Напомним ее содержание.

Пусть P и M — многообразия одного и того же числа измерений и φ — однозначное отображение P в M, обладающее следующими свойствами:

1) во всякой связной компоненте многообразия M есть образы точек из P;

2) если точки $m_n \in M$ суть образы точек p_n многообразия P и точки m_n сходятся к точке m многообразия M, то из точек p_n можно выбрать последовательность p_{n_i}, сходящуюся к точке p, которая отображается в точку m;

3) отображение φ непрерывно;

4) отображение φ взаимно однозначно.

При этих условиях φ отображает P на всё M.

Первое свойство отображения φ мы доказали в п. 9, так как там было доказано, что во всякой связной компоненте многообразия M есть реализуемые метрики, т. е. образы точек из P.

Второе свойство отображения φ мы доказали в п. 11. Для того чтобы в этом убедиться, нужно только в лемме п. 11 вместо многогранников говорить об их классах, что, конечно, не меняет дела.

Непрерывность отображения φ непосредственно следует из данного нами в п. 10 определения окрестностей в многообразии P. Действительно, согласно этому определению в окрестности класса p_0 лежат классы p, многогранники которых имеют K-триангуляции, близкие к K-триангуляции многогранника, представляющего класс p_0. А это как раз и значит, что соответствие между классами K-триангулированных многогранников и метриками их K-триангуляций непрерывное.

Взаимная однозначность отображения φ следует из обобщенной теоремы Коши, доказанной в п. 4 части I. Действительно, пусть два K-триангулированных многогранника p_1 и p_2 определяют на K одну и ту же метрику. Тогда существует изометрическое отображение p_1 на p_2, приводящее к совпадению соответственные элементы их K-триангуляции. Но по обобщенной теореме Коши это отображение можно осуществить движением или движением и отражением. А это значит, что многогранники p_1 и p_2 принадлежат одному классу.

Итак, все требования основной леммы выполнены, и, применяя ее, мы получаем, что P отображается на M, т. е. что все выпуклые метрики реализуемы.

13. Во введении мы формулировали теорему несколько более общую, чем доказанная нами. Там мы говорили о развертках, у которых сумма углов при каждой вершине $\leq 2\pi$, в то время как мы доказали реализуемость метрик с суммой углов при каждой вершине $< 2\pi$. Всякую развертку можно триангулировать, поэтому речь идет о доказательстве такой теоремы.

Теорема. *Если на комплексе треугольников, гомеоморфном сфере, задана метрика, в которой сумма углов при каждой вершине $\leq 2\pi$, то существует выпуклый многогранник, реализующий эту метрику.*

Так как реализуемость метрик с суммами углов $< 2\pi$ уже доказана, то нам достаточно доказать два утверждения:

1) *всякую метрику, в которой сумма углов при вершинах $\leq 2\pi$, можно путем перетриангулирования превратить в метрику, в которой сумма углов при каждой вершине $< 2\pi$, или, по крайней мере, в такую метрику, которая есть предел метрик с суммами углов $< 2\pi$;*

2) *если многогранники p_n реализуют метрики m_n с суммами углов $< 2\pi$, сходящиеся к метрике m, то существует подпоследовательность многогранников p_{n_i}, сходящаяся к многограннику, реализующему предельную метрику m.*

Доказательство первого утверждения легко можно извлечь из рассмотрений перетриангуляций, проведенных в п. 7. Действительно, если в вершине A комплекса K сумма углов равна 2π и в A нет самосклеиваний, то вершину A можно исключить путем перетриангулирования. Если же в A есть самосклеивание, то мы также могли бы ее исключить путем перетриангулирований, за исключением того случая, когда один из треугольников, у которого есть две вершины A, имеет самосклеивание по двум сторонам. Но в данном случае, уменьшая боковые стороны этого треугольника, по которым он склеивается сам с собою, мы уменьшим его углы при вершине A, и, следовательно, сумма всех углов при A станет $< 2\pi$. Так как изменяемые стороны не принадлежат никаким другим треугольникам, то суммы углов при вершинах других треугольников останутся неизменными.

Применяя последовательно операции перетриангулирования или указанного малого изменения длин сторон по отношению ко всем вершинам, где сумма углов равна 2π, мы и придем к результату, заключающемуся в первом из наших утверждений.

Второе утверждение доказано в п. 11. Действительно, лемма п. 11 как раз и состоит в этом утверждении, потому что в ней вовсе не предполагается, что предельная метрика m также выпуклая, т. е. что в ней при каждой вершине сумма углов $< 2\pi$.

Таким образом, наша теорема о существовании выпуклого многогранника с данной разверткой доказана в полном ее объеме.

III. Доказательство существования выпуклой поверхности с заданной метрикой

1. В этом разделе мы докажем теоремы 2 и 3 о существовании выпуклой поверхности с заданной метрикой, сформулированные в п. 7, 8 разд. I. Согласно намеченному там плану доказательство будет основано на приближении к данной дифференциально-геометрической метрике выпуклой многогранной метрикой. Поэтому мы и начнем с такого приближения.

Все наши рассуждения будут относиться к дифференциально-геометрической метрике с неотрицательной гауссовой кривизной. Поэтому, неизменно подразумевая это обстоятельство, мы не будем каждый раз его оговаривать.

Пусть в некоторой области D задана дифференциально-геометрическая метрика элементом длины ds. Гауссова кривизна ее K непрерывна и ограничена. Тогда, как известно, существует такая длина l, что всякий отрезок геодезической линии длины, меньшей l, является единственной кратчайшей линией между его концами [33], и во всяком геодезическом круге радиуса $< l$ можно ввести полярные геодезические координаты r, φ, в которых линейный элемент выражается, как известно, следующим образом:

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi) d\varphi^2. \tag{1}$$

Выражение гауссовой кривизны через коэффициенты линейного элемента дает в этом случае уравнение

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} + K\sqrt{G} = 0. \tag{2}$$

При этом

$$\sqrt{G(0, \varphi)} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{G(0, \varphi)}}{\partial r} = 1, \tag{3}$$

так как с точностью до второго порядка метрика ds евклидова.

Так как $K \geq 0$, то уравнение (2) дает

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} \geq 0.$$

Следовательно, при постоянном φ $\sqrt{G(r, \varphi)}$ есть выпуклая функция r, а так как она к тому же удовлетворяет условиям (3), то, очевидно,

$$\sqrt{G(r, \varphi)} \leq r. \tag{4}$$

Если мы отобразим рассматриваемый геодезический круг на плоскость так, что радиусы его перейдут в радиусы плоского круга той же длины, а углы между ними сохранятся, то мы получим полярные координаты r, φ на плоскости, и в них ее линейный элемент будет

$$ds_0^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Сравнивая это выражение с (1), на основании неравенства (4) получим

$$ds \leq ds_0. \tag{5}$$

[33] Это l есть расстояние между сопряженными точками геодезической. По поводу используемых нами фактов из внутренней дифференциальной геометрии см. [5, § 99].

Это простое замечание позволит доказать нужные предложения о малых геодезических треугольниках. Здесь и всюду дальше под малым геодезическим треугольником мы понимаем треугольник с геодезическими сторонами, помещающийся внутри геодезического круга радиуса $< l$ с центром в любой из вершин треугольника.

Лемма 1. *Пусть ABC — малый геодезический треугольник, а $A_0B_0C_0$ — евклидов треугольник со сторонами той же длины, что и ABC. Пусть α, β, γ — углы треугольника ABC, а α_0, β_0, γ_0 — соответствующие углы треугольника $A_0B_0C_0$. Пусть, наконец, ω — интегральная кривизна треугольника ABC (т. е. интеграл от гауссовой кривизны по его площади). Тогда*

$$\alpha - \omega \leq \alpha_0 \leq \alpha$$

и аналогично для β, β_0 и γ, γ_0.

Возьмем систему геодезических полярных координат с центром в вершине A. Отобразим ее на плоскость, как уже было указано. Точки A, B, C перейдут на плоскости в точки A_1, B_1, C_1. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$. Так как стороны AB, AC идут по радиусам наших полярных координат, а отображение по условию не меняет длин радиусов, то

$$AB = A_1B_1, \quad AC = A_1C_1. \tag{6}$$

Так как отображение также не меняет углов между радиусами, то

$$\angle A = \angle A_1 = \alpha. \tag{7}$$

Стороне B_1C_1 будет в силу отображения соответствовать какая-то линия L, соединяющая точки B и C. Вследствие неравенства (5) длина в плоскости не меньше длины соответствующей линии в нашей области D. Значит, линия L не короче B_1C_1. Но L, в свою очередь, не короче геодезической BC. Поэтому

$$BC \leq B_1C_1. \tag{8}$$

В плоском треугольнике $A_0B_0C_0$ по условию

$$A_0B_0 = AB, \quad A_0C_0 = AC, \quad B_0C_0 = BC. \tag{9}$$

Сравнивая (6), (8), (9), мы видим, что в треугольниках $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ две стороны равны. Тогда против большей стороны лежит больший угол, т. е. $\angle A_1 \geq \angle A_0$, или, на основании (7), $\alpha \geq \alpha_0$. Так как те же рассуждения приложимы к любому из углов данного треугольника, то

$$\alpha \geq \alpha_0, \quad \beta \geq \beta_0, \quad \gamma \geq \gamma_0. \tag{10}$$

Вместе с тем известные выражения для суммы углов треугольника дают

$$\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = \pi, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi + \omega.$$

Поэтому

$$(\alpha - \alpha_0) + (\beta - \beta_0) + (\gamma - \gamma_0) = \omega,$$

а так как на основании (10) эти разности одного знака, то все они $\leq \omega$. Следовательно, $\alpha - \omega \leq \alpha_0 \leq \alpha$.

2. Лемма 2. *Пусть ABC — малый геодезический треугольник и $A_0B_0C_0$ — плоский треугольник со сторонами той же длины (рис. 13). Пусть геодезическая DE соединяет точки D и E на сторонах CA и CB, причем длины геодезических CD, CE, DE суть соответственно a, b, c. Проведем в треугольнике $A_0B_0C_0$ отрезок, отсекающий на сторонах C_0A_0, C_0B_0 отрезки C_0D_0, C_0E_0 той же длины, что и CD, CE. Пусть длина D_0C_0 равна c_0.*

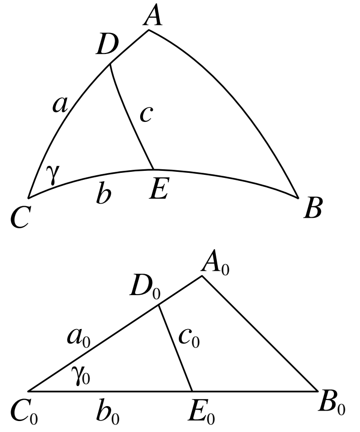


Рис. 13

Пусть K — среднее значение гауссовой кривизны в треугольнике ABC, т. е. $K = \omega/F$, где ω — интегральная кривизна треугольника ABC, а F — его площадь. Пусть d — диаметр треугольника ABC. Пусть, наконец, треугольник ABC настолько мал, что $Kd^2 < 1$.

Тогда

$$\frac{|c - c_0|}{c_0} \leq Kd^2, \quad \frac{|c - c_0|}{c} \leq Kd^2.$$

Геодезический треугольник CDE заменим плоским треугольником $C_1D_1E_1$ со сторонами той же длины. Этот треугольник будет, вообще говоря, отличен от треугольника $C_0D_0E_0$. Пусть γ_1 — угол при его вершине C_1, тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma_1 = (a - b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma_1}{2}. \tag{11}$$

Пусть γ_0 — угол при вершине C_0 в треугольнике $A_0B_0C_0$ и тем самым также в треугольнике $C_0E_0D_0$, тогда

$$c_0^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma_0 = (a - b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma_0}{2}. \tag{12}$$

Предположим, что $c \geq c_0$ и, следовательно, $\gamma_1 \geq \gamma_0$. (Предположение $c \leq c_0$ приводит к тем же рассуждениям, стоит лишь переставить c и c_0, γ_1 и γ_0.) Тогда из (11) и (12) ясно, что

$$\frac{c^2}{c_0^2} \leq \frac{\sin^2(\gamma_1/2)}{\sin^2(\gamma_0/2)}, \qquad \text{т. е.} \quad \frac{c}{c_0} \leq \frac{\sin(\gamma_1/2)}{\sin(\gamma_0/2)}, \tag{13}$$

а так как $(\sin x)/x$ убывает с ростом x и, кроме того, $\gamma_1 \geq \gamma_0$, то из (13) следует, что $c/c_0 \leq \gamma_1/\gamma_0$, т. е.

$$\frac{c - c_0}{c_0} \leq \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_0}. \qquad (14)^{34)}$$

Применим теперь лемму 1 к треугольникам $A_0B_0C_0$ и $C_0D_0E_0$. Именно, если γ — угол при вершине C в треугольнике ABC, а ω и ω_1 — интегральные кривизны треугольников ABC и CDE, то по лемме 1

$$\gamma - \omega \leq \gamma_0 \leq \gamma, \quad \gamma - \omega_1 \leq \gamma_1 \leq \gamma,$$

и так как $\omega_1 \leq \omega$, то

$$\gamma_1 - \gamma_0 \leq \omega. \tag{15}$$

Далее, если K — среднее значение кривизны в треугольнике ABC, то

$$\omega = KF. \tag{16}$$

Треугольник ABC, очевидно, содержится в секторе геодезического круга радиуса d, с центром в C и с углом раствора γ (d — диаметр ABC). Поэтому для его площади F мы имеем в геодезических полярных координатах оценку

$$F < \int_0^d \int_0^\gamma \sqrt{g}\, dr d\varphi \leq \int_0^d \int_0^\gamma r\, dr d\varphi = \frac{\gamma d^2}{2},$$

так как по формуле (4) $\sqrt{g} \leq r$. Следовательно,

$$F < \frac{\gamma d^2}{2}. \tag{17}$$

[34] Это есть любопытное усиление теоремы о том, что в двух треугольниках, у которых две стороны одного равны двум сторонам другого, против большей стороны лежит бóльший угол.

Сравнивая теперь формулы (16) и (17), получаем

$$\omega \leq \frac{\gamma}{2} K d^2. \tag{18}$$

А так как $\gamma_1 - \gamma_0 \leq \omega$ и $\gamma - \gamma_0 \leq \omega$, то

$$\gamma_1 - \gamma_0 \leq \frac{\gamma}{2} K d^2, \tag{19}$$

$$\gamma - \gamma_0 \leq \frac{\gamma}{2} K d^2. \tag{20}$$

Из последнего неравенства очевидно, что

$$\gamma_0 \geq \gamma \left(1 - \frac{K d^2}{2}\right) > \frac{\gamma}{2}, \tag{21}$$

так как по условию $K d^2 < 1$.

Деля (19) на (21), получим

$$\frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma_0} \leq K d^2. \tag{22}$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (14), приходим к искомой оценке

$$\frac{c - c_0}{c_0} \leq K d^2.$$

Так как по предположению $c \geq c_0$, то тем более

$$\frac{c - c_0}{c} \leq K d^2.$$

Лемма доказана.

3. Лемма 3. *Пусть область D, в которой задана дифференциально-геометрическая метрика m с неотрицательной кривизной, допускает конечную геодезическую триангуляцию*[35]*. Тогда в этой области можно построить последовательность выпуклых многогранных метрик m_n, сходящуюся к m.*

Утверждение, что метрики m_n сходятся к m, означает, что для любой пары точек x, y области D предел расстояний $p_n(x, y)$ между ними в метриках m_n равен расстоянию $p(x, y)$ в метрике m.

[35] То есть триангуляцию из конечного числа треугольников. D может быть замкнутой поверхностью или областью, ограниченной геодезическим многоугольником.

Под выпуклой многогранной метрикой здесь, как и раньше, понимается метрика, определяемая некоторым комплексом евклидовых треугольников, причем этот комплекс гомеоморфно отображен на область D, а сумма углов, сходящихся в каждой внутренней вершине, меньше или равна 2π.

Для доказательства леммы возьмем исходную геодезическую триангуляцию T_0 области D и посредством последовательных ее подразделений построим последовательность геодезических триангуляций T_n, в которых наибольшие диаметры треугольников d_n стремятся к нулю [36)]. Отобразив каждый из треугольников триангуляции T_n на плоский с теми же длинами сторон, получим комплекс плоских треугольников, гомеоморфный D. Поэтому мы можем считать этот комплекс гомеоморфно отображенным на D так, что вершины его переходят в соответствующие вершины триангуляции T_n, а ребра изометрично отображаются на соответствующие ребра. В результате этого отображения в области D будет определена многогранная метрика m_n.

Сумма углов геодезических треугольников, сходящихся в каждой вершине, равна 2π, если вершина лежит внутри области D. По лемме 1 углы плоских треугольников, соответствующих геодезическим треугольникам, не больше углов этих последних. Поэтому сумма углов плоских треугольников, сходящихся в одной вершине, будет $\leq 2\pi$. Это значит, что все метрики m_n выпуклые.

Пусть K_0 — максимум гауссовой кривизны метрики m в области D и d_n — наибольший из диаметров треугольников триангуляции T_n. Положим

$$d_n^2 K_0 = \varepsilon \qquad (0 \leq \varepsilon < 1). \tag{23}$$

Докажем, что

$$|\rho(x,y) - \rho_n(x,y)| < \varepsilon\rho(x,y) + 2d_n.$$

Этим мы не только докажем нашу лемму, но и установим, что сходимость метрик m_n к метрике m равномерная.

Возьмем две точки x, y в области D и соединим их кривой L, составленной из конечного числа геодезических отрезков. При этом кривую L выберем так, чтобы ее длина мало отличалась от расстояния между x и y:

$$s(L) - \rho(x,y) < \delta, \tag{24}$$

где $\delta > 0$ произвольно. Можно, очевидно, предположить, что изломы кривой L лежат на сторонах треугольников триангуляции T_n, потому что внутри каждого треугольника линию L можно заменить кратчайшим геодезическим отрезком.

[36)] Треугольники в T_n можно считать малыми в смысле п. 1.

Точки пересечений L со сторонами триангуляции T_n можно также соединять внутри каждого треугольника кривой, являющейся в многогранной метрике m_n прямолинейным отрезком. Тогда, вследствие леммы 2 и формулы (23), разность длин этого прямолинейного отрезка $\Delta L'$ и соответствующего отрезка ΔL кривой L будет

$$|s(\Delta L) - s_n(\Delta L')| < \varepsilon s(\Delta L). \qquad (25)^{37)}$$

Отрезки $\Delta L'$ образуют в целом некоторую кривую, концы которой можно внутри треугольников, содержащих точки x и y, соединить с этими точками. Тогда мы получим кривую L', отличающуюся по длине от суммы всех отрезков $\Delta L'$ не более чем на $2d_n$. Точно так же конец отрезка $\Delta L'$, подходящего к треугольнику, содержащему точку x, соединяется с точкой x отрезком кривой L, меньшим d_n. Аналогичное верно для точки y. Поэтому кривая L отличается по длине от суммы всех отрезков ΔL также не более чем на $2d_n$. На основании этих замечаний и неравенств (25), которые следует просуммировать по всем отрезкам, имеем

$$|s(L) - s_n(L')| < \varepsilon s(L) + 2d_n.$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (24), получим

$$s_n(L') < \rho(x, y) + \delta + (\varepsilon s(L) + 2d_n). \qquad (26)$$

Так как длина кривой L' не меньше расстояния между точками x, y в той же метрике m_n, а δ произвольно и не зависит от ε, то из (26) следует, что

$$\rho_n(x, y) \leq \rho(x, y) + (\varepsilon\rho(x, y) + 2d_n). \qquad (27)$$

Но меняя ролями метрики m и m_n, точно так же можно получить неравенство

$$\rho(x, y) \leq \rho_n(x, y) + (\varepsilon\rho_n(x, y) + 2d_n). \qquad (28)$$

Неравенства (27) и (28) дают

$$|\rho(x, y) - \rho_n(x, y)| \leq \varepsilon\rho(x, y) + 2d_n,$$

что и требовалось доказать.

4. Теперь мы докажем, что если последовательность выпуклых поверхностей сходится, то их метрики сходятся к метрике предельной поверхности.

[37)] Длины $s_n(\Delta L')$ определяются в метрике m_n.

Под выпуклой поверхностью мы будем понимать здесь или замкнутую выпуклую поверхность, или дважды покрытую выпуклую область на плоскости. Расстояние точек на поверхности определяется как точная нижняя граница длин кривых, соединяющих их на поверхности. Если точки на дважды покрытой выпуклой области лежат на разных ее сторонах или, если угодно, на разных покрывающих ее листах, то кратчайшая линия между ними состоит из двух прямолинейных отрезков, исходящих из этих точек и встречающихся на границе области.

Пусть последовательность выпуклых поверхностей Φ_n сходится к дважды покрытой выпуклой области Φ. Выберем произвольно положительное направление нормали к плоскости P, в которой лежит Φ. Пересекая Φ_n прямой l, перпендикулярной P и ориентированной согласно принятому условию, мы можем различать на Φ_n «верхние» и «нижние» точки: верхние — это те, из которых выходит прямая l, а нижние — те, в которых она входит. Крайние точки, где l будет скользить по Φ_n, можно по произволу относить к тому или иному классу. Этим будет установлено соответствие «верха» и «низа» поверхностей Φ_n «верху» и «низу» области Φ.

Всякая сходящаяся последовательность точек x_n на поверхностях Φ_n имеет предельную точку x на Φ. Точки x_n разделяются на верхние и нижние. Если в последовательности x_n, начиная с некоторого места, имеются только верхние (нижние) точки, то предельную точку x мы также считаем верхней (нижней) на Φ. Если же этого нет, то последовательность x_n мы считаем сходящейся в том и только в том случае, если точка x лежит на краю Φ.

Приняв все указанные условия, сформулируем результат, который хотим получить.

Лемма 4. *Если последовательность выпуклых поверхностей Φ_n сходится к выпуклой поверхности Φ и последовательности точек x_n и y_n на Φ_n сходятся к точкам x и y на Φ, то расстояния между точками x_n, y_n на поверхностях Φ_n сходятся к расстоянию между точками x, y на поверхности Φ:*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\Phi_n}(x,y) = \rho_{\Phi}(x,y).$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда поверхность не вырождается в плоскую область. Для доказательства леммы в этом предположении нам понадобятся следующие замечания.

1) *Если имеется ограниченная последовательность кривых L_n, длины которых ограничены в совокупности, то из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к спрямляемой кривой L, длина которой не больше нижнего предела длин кривых L_n:*

$$s(L) \leq \varliminf_{n\to\infty} s(L_n).$$

Это легко доказываемое утверждение можно считать хорошо известным.

2) *Пусть* Φ — *выпуклая поверхность и* L — *спрямляемая кривая, расположенная вне* Φ. *Назовем проекцией* L' *кривой* L *на поверхность* Φ *геометрическое место точек, ближайших на* Φ *к точкам* L. *(Для каждой точки вне* Φ *существует, вследствие выпуклости* Φ, *одна определенная ближайшая к ней точка на* Φ.) *Утверждается, что длина проекции кривой не больше длины самой кривой:*

$$s(L') \leq s(L).$$

Это обстоятельство было впервые доказано Г. Буземаном и В. Феллером [12]. Основано оно на том элементарно доказываемом факте, что если точки x, y лежат вне Φ, а точки x', y' — ближайшие к ним на Φ, то отрезок $\overline{xy}$ не больше отрезка $\overline{x'y'}$. Используя этот факт и аппроксимируя кривую L' ломаной, сразу получаем $s(L') \leq s(L)$.

3) *Если выпуклые поверхности* Φ_n *сходятся к* Φ *и точки* x_n, y_n *сходятся к одной точке* x *на* Φ, *то расстояния между* x_n *и* y_n *на* Φ *стремятся к нулю:*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\Phi_n}(x_n, y_n) = 0.$$

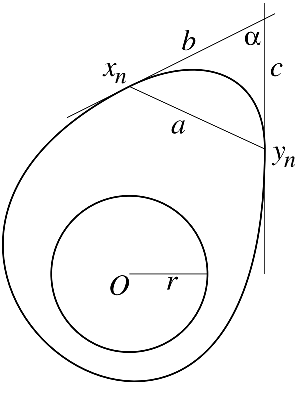


Рис. 14

Поверхность Φ мы считаем не вырождающейся. Поэтому можно взять точку O внутри нее. Тогда, так как Φ_n сходятся к Φ, эта точка окажется внутри всех поверхностей Φ_n, начиная с некоторого номера, и притом во всех таких Φ_n будет заключаться шар с центром в O некоторого радиуса $r > 0$.

Проведем через точки O, x_n, y_n плоскость. Эта плоскость пересечет Φ_n по выпуклой замкнутой кривой. Проведем опорные прямые к этой кривой в точках x_n, y_n и соединим точки x_n, y_n отрезком a (рис. 14). Если D — диаметр Φ_n, то, как легко видеть [38)],

$$\sin\frac{\alpha}{2} \geq \frac{r}{D+b+c}, \tag{29}$$

[38)] Нужно из точки A, где пересекаются наши опорные прямые, провести касательные к кругу радиуса r, содержащемуся в области, ограниченной нашей кривой. Полученный угол таков, что

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{r}{OA} \geq \frac{r}{D+b+c}$$

и, очевидно, $\alpha \geq \beta$.

а по теореме синусов
$$b + c < \frac{2a}{\sin\alpha}. \tag{30}$$
Вместе с тем отрезки b и c лежат вне или на Φ_n, а поэтому, в силу второго замечания,
$$\rho_{\Phi_n}(x_n, y_n) \leq b + c. \tag{31}$$
Так как диаметры всех Φ_n равномерно ограничены и $a \to 0$ (поскольку x_n, $y_n \to x$), то из неравенств (29)–(31) следует, что $\rho_{\Phi_n}(x_n, y_n) \to 0$.

Пусть теперь выпуклые поверхности Φ_n сходятся к невырождающейся поверхности Φ и точки x_n, y_n на Φ_n сходятся к точкам x, y на Φ. Пусть L_n — кратчайшие кривые на поверхностях Φ_n, соединяющие точки x_n, y_n. (Такие, как известно, существуют. Это сразу следует из первого замечания.) Из них мы можем выбрать сходящуюся подпоследовательность[39)], предельная кривая которой L соединит точки x и y на Φ. В силу первого замечания,
$$s(L) \leq \varliminf_{n\to\infty} s(L_n).$$
Но по определению расстояний на поверхности и вследствие выбора кривых L_n,
$$\rho_\Phi(x, y) \leq s(L), \quad \rho_{\Phi_n}(x_n, y_n) = s(L_n),$$
а потому
$$\rho_\Phi(x, y) \leq \varliminf_{n\to\infty} \rho_{\Phi_n}(x_n, y_n). \tag{32}$$

Преобразуем теперь каждую поверхность Φ_n подобно так, чтобы она вошла внутрь поверхности Φ. Очевидно, что чем больше номер, тем ближе к единице можно брать коэффициент подобия λ_n и при $n \to \infty$, $\lambda_n \to 1$. Поэтому поверхности $\lambda_n\Phi_n$ будут сходиться к Φ и точки $\lambda_n x_n$, $\lambda_n y_n$, в которые переходят точки x_n, y_n, будут по-прежнему сходиться к точкам x, y.

Соединив точки x, y кратчайшей кривой L на Φ и спроектировав эту кривую на поверхности Φ_n, получим кривые L_n, для которых, в силу второго замечания, будем иметь
$$s(L_n) \leq s(L),$$
или, вследствие выбора кривой L,
$$s(L_n) \leq \rho_\Phi(x, y). \tag{33}$$

[39)] Длины кривых L_n ограничены в совокупности. Все они не больше длины большого круга шара, содержащего все Φ_n, как это сразу следует из замечания 2).

Пусть проекции точек x, y на Φ_n суть x'_n, y'_n. Тогда, во-первых,

$$\rho_{\lambda_n \Phi_n}(x'_n, y'_n) \leq s(L_n), \tag{34}$$

а во-вторых, так как $\lambda_n x_n \to x$, $\lambda_n y_n \to y$ и, очевидно, $x'_n \to x$, $y'_n \to y$, то, в силу третьего замечания,

$$\rho_{\lambda_n \Phi_n}(\lambda_n x_n, x'_n) \to 0, \quad \rho_{\lambda_n \Phi_n}(\lambda_n y_n, y'_n) \to 0.$$

А так как

$$\rho_{\lambda_n \Phi_n}(\lambda_n x_n, \lambda_n y_n) \leq \rho_{\lambda_n \Phi_n}(x'_n, y'_n) + \rho_{\lambda_n \Phi_n}(\lambda_n x_n, x'_n) + \rho_{\lambda_n \Phi_n}(\lambda_n y_n, y'_n),$$

то из неравенств (33) и (34) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho_{\lambda_n \Phi_n}(\lambda_n x_n, \lambda_n y_n) \leq \rho_\Phi(x, y). \tag{35}$$

Но, как очевидно,

$$\rho_{\lambda_n \Phi_n}(\lambda_n x_n, \lambda_n y_n) = \lambda_n \rho_{\Phi_n}(x_n, y_n),$$

и так как $\lambda_n \to 1$, то вместо (35) получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho_{\Phi_n}(x_n, y_n) \leq \rho_\Phi(x, y).$$

Это неравенство вместе с неравенством (32) дает

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{\Phi_n}(x_n, y_n) = \rho_\Phi(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь поверхности Φ_n сходятся к поверхности Φ, вырождающейся в дважды покрытую плоскую область, и точки x_n, y_n на Φ_n сходятся к точкам x, y на Φ. На основании первого замечания, точно так же, как в случае невырождения поверхности Φ, мы получаем

$$\rho_\Phi(x, y) \leq \varliminf_{n\to\infty} \rho_{\Phi_n}(x_n, y_n). \tag{36}$$

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим два случая.

1) Точки x, y лежат на одной стороне Φ (они могут также лежать на краю). Проведем через точки x_n, y_n плоскость P_n, перпендикулярную плоскости, в которой лежит Φ. Плоскость P_n пересекает Φ_n по замкнутой выпуклой кривой [40]. На этих кривых мы возьмем те их отрезки L_n между

[40] Эта кривая может также вырождаться в дважды покрытый прямолинейный отрезок.

точками x_n, y_n, которые сходятся к отрезку $\overline{xy}$. Это всегда можно сделать, поскольку Φ_n сходятся к Φ и x_n, y_n — к x, y. Кривые L_n суть плоские выпуклые кривые, сходящиеся к отрезку $\overline{xy}$, поэтому длины их сходятся к длине этого отрезка. Но длины их не меньше расстояний между точками x и y на Φ_n, а длина отрезка $\overline{xy}$ есть расстояние между точками x и y на Φ. Поэтому

$$\rho_\Phi(x,y) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_{\Phi_n}(x_n,y_n). \tag{37}$$

2) Точки x, y лежат на разных сторонах Φ. Тогда соединяющая их кратчайшая линия на Φ состоит из двух прямолинейных отрезков, встречающихся в некоторой точке z на краю Φ.

Возьмем на поверхностях Φ_n последовательность точек z_n, сходящихся к z. Тогда, так как x и z, а также y и z лежат уже с одной стороны, то

$$\rho_\Phi(x,z) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_{\Phi_n}(x_n,z_n), \quad \rho_\Phi(y,z) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_{\Phi_n}(y_n,z_n).$$

Складывая эти неравенства и замечая, что

$$\rho_\Phi(x,z) + \rho_\Phi(y,z) = \rho_\Phi(x,y),$$

а

$$\rho_{\Phi_n}(x_n,z_n) + \rho_{\Phi_n}(y_n,z_n) \geq \rho_{\Phi_n}(x_n,y_n),$$

получим

$$\rho_\Phi(x,y) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_{\Phi_n}(x_n,y_n).$$

Следовательно, неравенство (37) установлено в обоих возможных случаях, и, соединяя его с (36), получим

$$\rho_\Phi(x,y) = \lim_{n\to\infty} \rho_{\Phi_n}(x,y).$$

5. Теперь мы имеем все необходимое для доказательства теоремы 2.

Всякая дифференциально-геометрическая метрика m с неотрицательной гауссовой кривизной, заданная на сфере S, реализуется некоторой замкнутой выпуклой поверхностью.

Возьмем какую-либо геодезическую триангуляцию T сферы S и путем ее подразделения построим последовательность триангуляций T_n, у которых длина наибольшей стороны стремится к нулю [41]. Сопоставляя каждому треугольнику из T_n плоский треугольник с теми же длинами сторон, мы

[41] Возможность геодезически триангулировать сферу с дифференциально-геометрической метрикой доказать нетрудно (см., напр., [11]).

получим, согласно лемме 3, последовательность выпуклых многогранных метрик m_n, заданных на комплексах T_n, гомеоморфных сфере. На основании теоремы 1 будут существовать выпуклые многогранники p_n, реализующие эти метрики.

Все многогранники p_n будут равномерно ограничены, так как их метрики сходятся к метрике m. Поэтому из них можно образовать последовательность, сходящуюся к некоторой замкнутой выпуклой поверхности Φ [42]. Докажем, что эта поверхность будет иметь данную метрику m. Для этого исключим из рассмотрения многогранники, не входящие в последовательность, сходящуюся к Φ, и вместе с ними исключим соответствующие триангуляции. Оставшиеся многогранники мы также обозначим p_n.

Все вершины триангуляций T_n образуют счетную совокупность, причем так как триангуляция T_{n+1} есть подразделение T_n, то вершины T_n являются вместе с тем также вершинами T_{n+1}. Перенумеруем все вершины триангуляций T_n и соответствующие точки на многогранниках p_n.

Образуем последовательность многогранников p_{n_i}, у которых сходятся точки с номером 1. (Если Φ вырождается в плоскую область, то сходимость здесь нужно понимать в смысле, определенном в п. 4.) Из этой последовательности выбираем последовательность, в которой сходятся точки с номером 2, и т. д. Затем образуем диагональную последовательность, многогранники которой мы также обозначим, для простоты, p_n.

Пусть x_n^i — вершина триангуляции многогранника p_n с номером i, а ξ^i — соответствующая точка на сфере S. Так как метрики m_n многогранников p_n, в силу леммы 3, сходятся к данной метрике m, то

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n(x_n^i, x_n^j) = \rho(\xi^i, \xi^j) \tag{38}$$

(ρ_n — расстояние на p_n; ρ — расстояние в метрике m). С другой стороны, по построению последовательности многогранников P_n, точки x_n^i с одинаковыми номерами i сходятся к точке x^i на Φ. Поэтому на основании леммы 4

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n(x_n^i, x_n^j) = \rho_\Phi(x^i, x^j), \tag{39}$$

где ρ_Φ — расстояние на поверхности Φ. Сравнивая равенства (38) и (39), видим, что при любых i, j

$$\rho(\xi^i, \xi^j) = \rho_\Phi(x^i, x^j). \tag{40}$$

[42] A priori поверхность Φ могла бы вырождаться в отрезок или даже точку. Это, однако, невозможно, так как метрики m_n сходятся к m и, следовательно, площади многогранников p_n остаются бо́льшими некоторого положительного числа. Легко также обойтись и без этой ссылки на площади, если только обобщить лемму 4 на случай вырождения поверхности Φ в точку или отрезок. Такое обобщение получается без всякого труда.

Точки ξ^i образуют на S всюду плотное множество, так как они являются вершинами беспредельно измельчающихся триангуляций. Аналогично точки x_i образуют всюду плотное множество на Φ [43]. Поэтому, если мы отобразим точки ξ^i в точки x^i, то получим отображение φ всюду плотного множества на S на всюду плотное множество на Φ. Это отображение, в силу равенства (40), сохраняет расстояния, поэтому его можно распространить на всю сферу S так, что получится изометрическое отображение всей сферы S, с ее метрикой m, на поверхность Φ. Действительно, если $\xi^i \to \xi$, то $\rho(\xi^i, \xi^k) \to 0$ с возрастанием i, k. В силу равенства (40), тогда точно так же $\rho_\Phi(x^i, x^k) \to 0$, и потому последовательность x^i сходится к некоторой точке x. Мы положим $x = \varphi(\xi)$. Меняя в этом рассуждении ролями точки ξ и x, убедимся, что каждая точка x оказывается образом некоторой точки ξ, и, следовательно, мы получаем отображение φ S на Φ. Если теперь $\xi^i \to \xi$, $\eta^i \to \eta$ (η^i — также вершины триангуляций), то $x^i \to x$, $y^i \to y$ и, с одной стороны, $\rho(\xi^i, \eta^i) \to \rho(\xi, \eta)$, а с другой — $\rho_\Phi(x^i, y^i) \to \rho_\Phi(x, y)$. Но так как $\rho_\Phi(x^i, y^i) = \rho(\xi^i, \eta^i)$, то

$$\rho_\Phi(x, y) = \rho(\xi, \eta).$$

Следовательно, мы получаем изометрическое отображение сферы S, с ее метрикой m, на поверхность Φ. Значит, поверхность Φ реализует метрику m и теорема доказана.

6. Для того чтобы доказать еще теорему 3, сформулированную в разд. I, нам понадобятся две дополнительные леммы.

Лемма 5. *Пусть на плоскости E задана полная дифференциально-геометрическая метрика с неотрицательной кривизной. Для всякой ограниченной области M на E существует содержащая ее область D, ограниченная замкнутым геодезическим многоугольником, углы которого, измеренные в D, $\leq \pi$.* (Возможно, что этот многоугольник представляет собой замкнутую геодезическую, и тогда на нем, собственно говоря, нет углов, они равны π.)

Эта лемма, по существу, была доказана С. Кон-Фоссеном; вернее, она является прямым следствием его общих теорем [11, теоремы 1 и 6].

1) *Если на плоскости E задана полная дифференциально-геометрическая метрика не отрицательной кривизны, то полная кривизна E в этой метрике $\leq 2\pi$.*

2) *Если на плоскости E задана полная дифференциально-геометрическая метрика, то для всякой ограниченной области M на E существует содержащая ее область D, ограниченная или геодезическим многоугольником*

[43] Если диаметры треугольников триангуляции $T_n < \varepsilon$, то пределы точек, соответствующих на p_k ($k \to \infty$) вершинам T_n, образуют на Φ ε-сеть. Следовательно, множество всех точек x^i всюду плотно на Φ.

с угла-
ми, измеренными в D, $< \pi$, или замкнутой геодезической, или геодезическим одноугольником с углом, измеренным в D, $> \pi$.

В последнем случае из теоремы Гаусса — Бонне о полной кривизне следует, что полная кривизна области $D > 2\pi$, что, в силу первой теоремы, невозможно, если данная на E метрика выпуклая. Этим наша лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть замкнутые выпуклые поверхности $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ проходят через данную точку. Тогда из них можно выбрать последовательность, сходящуюся к некоторой выпуклой поверхности, которая может быть и неограниченной.*

Рассматривая вместо поверхностей ограничиваемые ими выпуклые тела, мы можем эту лемму сформулировать следующим образом: из совокупности бесконечного числа выпуклых тел (которые могут быть даже бесконечными), имеющих точки в данной ограниченной области, можно выбрать последовательность, сходящуюся, может быть, к бесконечному, выпуклому телу. Отличие этой леммы от известной «теоремы выбора» Бляшке состоит в том, что вовсе не предполагается ограниченность рассматриваемых тел не только в совокупности, но и каждого в отдельности.

Для доказательства леммы в ее последней формулировке возьмем последовательность беспредельно возрастающих концентрических шаров S_1, $S_2, \ldots$. Шар S_1 мы можем заранее взять настолько большим, что все выпуклые тела данной совокупности имеют с ним общие точки. Пересечения этих тел с шаром S_1 представляют выпуклые тела, уже ограниченные в совокупности. Поэтому на основании теоремы выбора Бляшке из них можно выбрать сходящуюся последовательность $H_1^1 \cap S_1, H_2^1 \cap S_1, \ldots$ (обычное обозначение пересечений множеств H_i^1 и S_1)

$$H_i^1 \cap S_1 \to H^1.$$

Далее, из последовательности $H_1^1, H_2^1, \ldots$ можно выбрать подпоследовательность $H_1^2, H_2^2, \ldots$ так, что

$$H_i^2 \cap S_2 \to H^2.$$

Вообще мы будем иметь

$$H_i^j \cap S_j \to H^j.$$

Образуем диагональную последовательность H_i^i и покажем, что она сходится к

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H^i \tag{41}$$

и что тело H — выпуклое. Для этого заметим, что при $i \le j$

$$H^i = H^j \cap S_i, \tag{42}$$

потому что при расширении шара S_i до S_j мы включаем в рассмотрение только точки тел H^i_k ($k = 1, 2, \dots$), лежащие вне S_i. От этого в шаре S_i могли бы прибавиться предельные точки только на его поверхности. Однако и это невозможно. Действительно, отрезок, соединяющий такую точку с ближайшей точкой на H^i, лежащей внутри шара S_i, лежал бы вне H^i, но по выпуклости H^j должен был бы лежать в H^j. Следовательно, получалось бы, что точки, лежащие вне шара S_i, дают предельные точки внутри него.

Из (41) и (42) видно, что при всяком n

$$H \cap S_n = H^n. \tag{43}$$

Поэтому тело H выпуклое: любые две его точки лежат в каком-то шаре S_n, а $HS_n = H^n$ — выпуклое тело; значит, эти точки можно соединить отрезком, лежащим в H^n и тем самым в H.

Во всяком шаре S_n последовательность тел $H^i_i \cap S_n$ сходится к H^n, т. е., в силу равенства (43), к $H \cap S_n$. А так как шары S_n исчерпывают все пространство, то это и значит, что H^i_i сходятся к H.

7. Теперь докажем теорему 3.

Если на плоскости E задана полная дифференциально-геометрическая метрика m с неотрицательной гауссовой кривизной, то существует выпуклая поверхность Φ, реализующая эту метрику.

Для доказательства возьмем последовательность возрастающих ограниченных областей $M_1, M_2, \dots$, последовательно содержащихся одна в другой и покрывающих, в конечном счете, всю плоскость E. По лемме 5 существует последовательность областей $D_1, D_2, \dots$, содержащих соответственно $M_1, M_2, \dots$ и ограниченных замкнутыми геодезическими многоугольниками с углами $\le \pi$. Можно считать, что области $D_1, D_2, \dots$ последовательно содержатся одна в другой (достаточно в случае надобности выбросить некоторые из них). Они также покрывают всю плоскость E. Границы областей D_n будут беспредельно удаляться от любой заданной точки на E. Действительно, в противном случае мы могли бы выбрать на их границах ограниченную последовательность точек, по одной с каждой границы. Эта последовательность не имела бы точки сгущения, потому что области D_n, расширяясь, покрывают всю плоскость E. Но в таком случае мы имели бы противоречие с условием полноты данной метрики, так как оно говорит, что на E не может быть ограниченной последовательности точек без точки сгущения.

Произведем геодезические триангуляции $T_1, T_2, \ldots$ областей $D_1, D_2, \ldots$ и притом так, чтобы в каждой области D_n триангуляция T_{n+1} оказывалась подразделением T_n и чтобы длина наибольшей стороны триангуляции T_n стремилась к нулю с возрастанием n. Заменим треугольники в триангуляции T_n евклидовыми треугольниками с теми же длинами сторон. По лемме 1 углы при этом не увеличатся и сумма углов, сходящихся в вершине, лежащей внутри области D_n, будет $\leq 2\pi$, а сумма углов, сходящихся в вершине на границе области D_n, будет $\leq \pi$, потому что углы геодезического многоугольника, ограничивающего D_n, меньше или равны π.

Мы получаем выпуклую многогранную метрику m в области D_n. Граница области D_n представляет в этой метрике ломаную с углами $\leq \pi$. Взяв плоский выпуклый многоугольник с теми же длинами сторон, мы можем «подклеить» его к области D_n, причем сумма углов в вершинах получится, очевидно, $\leq 2\pi$.

В результате получаем выпуклую многогранную метрику на комплексе, гомеоморфном сфере. По теореме 1 существует выпуклый многогранник p_n, реализующий эту метрику; на нем есть область D'_n, соответствующая D_n и реализующая метрику m_n. На всех многогранниках p_n будут точки, соответствующие одной и той же вершине триангуляции T_1 (потому что T_n есть подразделение T_{n-1} в области $D_{n-1} \subset D_n$). Перенесем все p_n так, что эти их точки попадут в начало координат, и тогда по лемме 6 из p_n можно будет выбрать последовательность, сходящуюся к некоторой выпуклой поверхности Φ. Эту последовательность, как при доказательстве теоремы 2, следует выбрать так, чтобы в ней сходились все точки, соответствующие одним и тем же вершинам триангуляции T_n.

Так как области D_n, расширяясь, покрывают всю плоскость E, то соответствующие области D'_n на многогранниках p_n расширяются, и их граница беспредельно удаляется от начала координат (в смысле расстояний в областях D'_n)[44]. Из леммы 4 следует, что всякая точка поверхности Φ будет пределом точек многогранников p_n, лежащих на конечном расстоянии (в смысле метрики на p_n) от начала, которое, очевидно, также лежит на Φ. Но такие точки на многогранниках p_n в конце концов оказываются лежащими в областях D'_n. Следовательно, поверхность Φ оказывается пределом одних этих областей. Поэтому, для того чтобы доказать, что она реализует данную метрику m, достаточно повторить рассуждения, которые привели нас к доказательству аналогичного утверждения в п. 5, где была доказана теорема 2. Поскольку мы рассматриваем каждый раз ограниченные области D_n, то для того, чтобы исключить влияние границы, нужно,

[44] Это следует из того, что границы областей D_n, как было доказано, удаляются в бесконечность, а метрики в областях D'_n на p_n приближаются к данной метрике.

выбрав какую-либо область D, взять D_n так, чтобы $D_n \supset D$ и расстояние ее границы от D было больше диаметра D. Тогда расстояния между точками области D, измеренные в D_n, будут совпадать с расстояниями их, измеренными во всей плоскости E. Доказав, что метрика в D реализуется соответствующей областью поверхности Φ, мы, в силу произвольности выбора области D, докажем тем самым, что Φ реализует всю метрику на E.

Статья поступила в редакцию
25.IV.1941

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. II. Стереометрия. М.: Учпедгиз, 1938.
2. *Alexandroff P., Hopf H.* Topologie. Bd I. Berlin: Springer, 1935.
3. *Александров А. Д.* Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 243–255.
4. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия произвольной выпуклой поверхности // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 7. С. 467–470.
5. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
6. *Weyl H.* Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linielement // Zurich Natur. Ges. 1916. Bd 61. S. 40–72.
7. *Lewy H.* On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1938. V. 24. P. 104–106.
8. *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
9. *Blaschke W.* Kreis und Kugel. Leipzig: Veit, 1916. (Русский перевод: *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.)
10. *Кон-Фоссен С. Э.* О существовании кратчайших путей // Докл. АН СССР. 1935. Т. 3, № 8. С. 339–342.
11. *Cohn-Vossen St.* Kurzeste Wege und Totalkrummung auf Flächen // Compositio math. 1935. Bd 69. S. 69–133.
12. *Busemann H., Feller W.* Krümmungseigenschaften konvexer Flächen // Acta Math. 1935. Bd 66. S. 1–47.

Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения

Труды математического института им. В. А. Стеклова. 1951. Т. 38. С. 5–23

§ 1. Введение

1. Основой понятия о кривизне пространств служит в конечном счете понятие об избытке треугольника, т. е. об избытке суммы углов треугольника в сравнении с π. Кривизна, а стало быть, и избытки треугольника играют роль меры отличия геометрии данного пространства от геометрии Евклида. Известно, в частности, что отличие каждого из углов данного геодезического треугольника на поверхности от углов плоского треугольника со сторонами той же длины оценивается через кривизну, а тем самым через избытки треугольников. Так, углы α, β, γ треугольника на плоскости Лобачевского меньше соответствующих углов α_0, β_0, γ_0 треугольника на плоскости Евклида, имеющего такие же стороны, так что если $\nu = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ есть избыток (в данном случае $\nu < 0$), то имеют место неравенства вида

$$\nu < \alpha - \alpha_0 < 0.$$

Аналогично, на поверхности положительной кривизны $\nu > 0$ и соответственно

$$0 < \alpha - \alpha_0 < \nu. \tag{1}$$

В настоящей работе мы изложим прежде всего общую теорему об углах треугольника в метрических пространствах, устанавливающую в самых общих предположениях оценку вида (1). В качестве приложения этой общей теоремы мы изложим начала теории пространств, о которых можно сказать, что их кривизна не превосходит какого-либо данного числа. Та же теорема служит исходным пунктом построения внутренней геометрии общих поверхностей (или, что то же, теории «многообразий ограниченной кривизны»), начала которой изложены в [1]. Аналогичные соотношения играют, конечно, существенную роль специально во внутренней геометрии выпуклых поверхностей [2].

Для того чтобы точно сформулировать наши результаты, нужно прежде всего определить класс рассматриваемых пространств, а также понятия об угле и об ограниченности кривизны пространства в том общем смысле, в каком мы ими пользуемся.

2. Наши рассуждения будут относиться к метрическим пространствам, где каждая точка имеет окрестность, любые две точки которой можно соединить геодезической линией, или, как мы предпочитаем говорить, кратчайшей. Под кратчайшей понимается непрерывный образ отрезка $[0,1]$, обладающий следующим свойством. Если X_t есть точка кратчайшей ($t \in [0,1]$), то при всяких $t_1 < t_2 < t_3$ ($t_i \in [0,1]$)

$$\rho(X_{t_1}, X_{t_2}) + \rho(X_{t_2}, X_{t_3}) = \rho(X_{t_1}, X_{t_3}), \tag{2}$$

где ρ — расстояние в данном пространстве. Кратчайшую, соединяющую точки A, B (т. е. такую, что $X_0 = A$, $X_1 = B$), обозначим AB. Из определения ясно, что всякий отрезок кратчайшей также есть кратчайшая. Геодезической же назовем кривую, являющуюся кратчайшей на достаточно малых отрезках.

Как известно, в метрическом пространстве можно определить длину кривой совершенно аналогично обычному определению длины. Именно, если Y_t ($t \in [0,1]$) есть точка кривой L, то длина

$$L = \sup \sum \rho(Y_{t_k}, Y_{t_{k+1}}),$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$. Из этого определения длины и определения кратчайшей (2) видно, что кратчайшую можно определить так же, как кривую, длина которой равна расстоянию между ее концами. Так как длина всякой кривой, соединяющей точки A, B, не меньше расстояния $\rho(A,B)$, то кратчайшая AB есть действительно кратчайшая из линий, соединяющих те же точки A и B [1)].

Все дальнейшие рассуждения без особых оговорок относятся к такой области пространства, где любые две точки можно соединить кратчайшей.

[1)] В [1, 2] и других работах исходным служит понятие пространства с внутренней метрикой, т. е. такого пространства, где расстояние $\rho(X,Y)$ равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих точки X, Y. Стало быть, рассматриваемые в настоящей работе пространства суть пространства с внутренней метрикой. Однако существование кратчайшей в малых областях пространства с внутренней метрикой обеспечивается лишь дополнительными условиями, например локальной компактностью, предполагать которую в настоящей работе нет надобности.

Знак ρ будет всегда обозначать расстояние в данном пространстве; впрочем, расстояние от A до B часто будем обозначать просто AB, т. е. так же, как кратчайшую.

Треугольником называется, естественно, фигура (множество точек), образованная тремя кратчайшими, соединяющими попарно три точки — вершины треугольника. Не исключается, что все три точки лежат на одной кратчайшей, так что треугольник вырождается.

3. Пусть L, M — две кратчайшие в рассматриваемом пространстве, исходящие из одной точки O. С ними мы связываем следующее простое построение, играющее в дальнейшем основную роль (рис. 1).

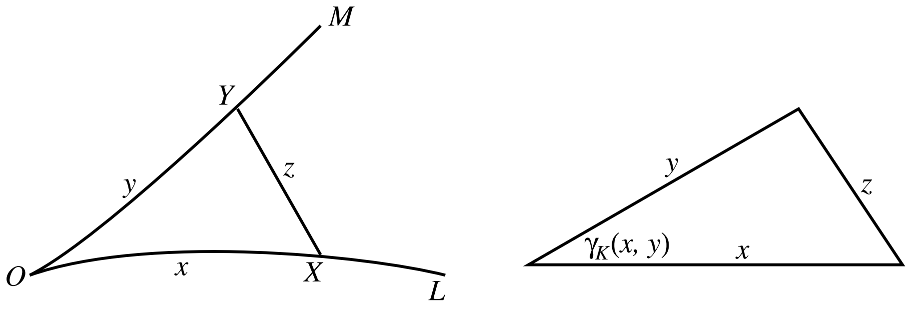


Рис. 1

Это построение мы уже использовали во внутренней геометрии выпуклых поверхностей [2].

Пусть X, Y — две точки на L и M, отличные от O; положим $OX = x$, $OY = y$, $XY = z$. Построим на поверхности S_K постоянной кривизны K треугольник T_K со сторонами, равными x, y, z. Если $K \leq 0$, то такой треугольник заведомо существует (мы условились допускать также треугольники, вырождающиеся в отрезки, как это будет, если, например, $x + y = z$). Если же $K > 0$, то для существования определенного треугольника T_K со сторонами x, y, z (помимо «неравенства треугольника», которое здесь выполнено) необходимо и достаточно, чтобы было $x + y + z < 2\pi/\sqrt{K}$. Будем предполагать это условие выполненным всюду, где речь будет идти о построении треугольника с данными сторонами на поверхности S_K с $K > 0$.

Итак, строим на поверхности S_K треугольник T_K. Угол этого треугольника, лежащий против стороны z, обозначаем $\gamma_K(x, y)$. Всюду дальше $\gamma_K(x, y)$ (или $\gamma(x, y)$) означает именно так определенный угол.

Назовем *верхним углом* между кратчайшими L, M верхний предел угла $\gamma_K(x, y)$ при $x, y \to 0$:

$$\varlimsup_{x,y\to 0} \gamma_K(x, y).$$

Очевидно, что этот предел вовсе не зависит от K и потому относится к самим кратчайшим L, M.

Из данного определения ясно, что верхний угол всегда существует. (Заметим, что совершенно аналогично можно определить верхний угол между любыми двумя кривыми. Он существует между любыми двумя исходящими из одной точки кривыми в любом метрическом пространстве.)

Если же существует предел

$$\alpha = \lim_{x,y\to 0} \gamma_K(x,y),$$

то мы говорим, что между кратчайшими L, M угол существует и равен α.

Далее, введем понятие *относительного избытка треугольника* по отношению к кривизне K. Под этим будем понимать разность суммы верхних углов данного треугольника и суммы углов треугольника со сторонами той же длины на поверхности S_K постоянной кривизны K.

Если в данном пространстве каждая точка имеет окрестность, где избыток каждого треугольника относительно K не положителен, то естественно сказать, что это есть пространство кривизны, не большей K.

4. Теперь сформулируем основные результаты.

Теорема об углах треугольника. *Пусть ABC — треугольник в метрическом пространстве рассматриваемого типа; α — его верхний угол при вершине A (т. е. верхний угол между сторонами AB, AC); α_K — соответствующий угол в треугольнике со сторонами той же длины на поверхности S_K постоянной кривизны K; ν — точная верхняя граница относительных избытков треугольников AXY, стороны AX, AY которых являются отрезками сторон AB, AC.*

Утверждается, что имеет место неравенство $\alpha - \alpha_K \leq \nu$.

Замечание 1. Согласно принятому условию предполагается, что треугольник ABC лежит в области метрического пространства, где любые две точки соединимы кратчайшей. Впрочем, это предположение можно заменить более общим, какое вводил С. Кон-Фоссен [3]: для любых двух точек P, Q найдется точка R такая, что $\rho(PR) + \rho(RQ) = \rho(PQ)$ и существует кратчайшая PR. Все наши выводы вместе с доказательствами оказываются верными и в том случае.

Замечание 2. Если подходящим образом определить нижний угол, то можно получить теорему, вполне аналогичную сформулированной (с заменой верхней границы избытков на нижнюю и изменением знака неравенства). Однако нижний угол определяется при этом не просто как нижний предел угла $\gamma(x,y)$ при $x, y \to 0$, а более сложно [2]. Соответствующее опре-

[2] Вопрос о возможности исходить из указанного простого определения нижнего угла остается открытым.

деление введено и использовано в [2], где в § 2 гл. VII доказана по существу и соответствующая теорема об углах треугольника.

5. О пространствах с кривизной, не превосходящей K. Из теоремы об углах треугольника легко выводятся следующие результаты, относящиеся к такой области, где избыток каждого треугольника относительно K не положителен (в «целом» эти результаты могут быть неверными):

1) между любыми двумя кратчайшими с общей начальной точкой существует угол и даже «угол в сильном смысле», т. е. предел угла $\gamma(x, y)$ при условии, что не обязательно оба расстояния x, y, но хотя бы одно из них стремится к нулю (это обстоятельство является очевидным в евклидовом пространстве, и смысл его в общих пространствах тот же самый);

2) углы всякого треугольника не больше соответствующих углов треугольника со сторонами той же длины на S_K;

3) для любой пары кратчайших угол $\gamma_K(x, y)$ есть неубывающая функция x и y (это свойство в [2] названо «K-вогнутостью»). В частности,

$$\gamma_K\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \leq \gamma_K(x, y).$$

Легко заметить, что это равносильно следующему. Средняя линия треугольника в нашем пространстве не больше средней линии треугольника T_K со сторонами той же длины на S_K. В частности, при $K = 0$ получаем: в пространстве неположительной кривизны средняя линия треугольника не больше половины соответствующей стороны.

6. Г. Буземан [4] показал, что из одного этого условия о средней линии (в предположении компактности ограниченных множеств) вытекают многочисленные следствия, повторяющие многие результаты, установленные ранее для римановых пространств отрицательной кривизны. (Еще раньше я в первых сообщениях о внутренней геометрии выпуклых поверхностей ввел как характерное свойство метрики неотрицательной кривизны обратное неравенство для средней линии: средняя линия не меньше половины соответствующей стороны.)

Условие о средней линии, однако, оказывается слабее, чем наше условие неположительности избытков. Действительно, на плоскости с метрикой Минковского, в которой за круг принята какая-либо центрально симметричная выпуклая область, средняя линия всегда равна половине стороны, но сумма верхних углов, как правило, больше π.

Таким образом, мы получаем два условия, выполнение которых в окрестности каждой точки позволяет определить пространства, аналогичные пространствам неположительной кривизны, или вообще с кривизной $\leq K$:

1) средняя линия всякого треугольника не больше, чем средняя линия треугольника со сторонами той же длины на поверхности S_K;

2) избыток всякого треугольника относительно K неотрицателен.

Как уже сказано, мы доказываем, что из 2) следует 1), но обратное не имеет место. При $K \leq 0$ пространство с условием 1) будет неположительной кривизны в смысле Г. Буземана. Вообще же при условии 1) или 2) при данном K пространство будет в известной мере обладать такими же свойствами в сравнении с римановым пространством постоянной кривизны K, какими обладают пространства неположительной кривизны в сравнении с евклидовым пространством. Такого рода теоремы можно найти в [2, гл. XI, § 2]. Там речь идет о выпуклых поверхностях, но это не имеет существенного значения, и формулируемые там результаты могут быть обобщены.

Отметим еще такую теорему: *В двумерном многообразии с условием 2) площадь области, ограниченной кривой длины l, всегда меньше площади круга с окружностью l на поверхности S_K, кроме того случая, когда область изометрична такому кругу* (при $K > 0$ нужно требовать $l \leq 2\pi/\sqrt{K}$, что подразумевается здесь и в следующей теореме).

Более того, *в любом пространстве с условием 2) на замкнутую кривую длины l можно натянуть поверхность не большей площади, чем круг с окружностью l на поверхности S_K* [3]. При этом, так же как в предыдущей теореме, площадь можно определить как «нижнюю грань площадей вписанных многогранников»; т. е. строим треугольники с вершинами в точках поверхности совершенно так же, как это делается, когда в евклидовом пространстве вписывают в поверхность многогранник; далее, сопоставляем каждому треугольнику плоский треугольник со сторонами той же длины и берем сумму площадей этих треугольников; нижний предел таких сумм при безграничном сгущении вершин треугольников на поверхности и принимается за площадь этой последней.

Эти последние теоремы мы оставим, однако, в настоящей работе без доказательства. (Их доказательство, по существу, повторяет доказательство, данное в [5] для теоремы, соответствующей первой из них в случае достаточно регулярных поверхностей.)

§ 2. *О верхнем угле*

1. Как уже было сказано, все наши рассуждения будут относиться к такой области метрического пространства, каждые две точки которой соединимы кратчайшей (но для настоящего параграфа это не существенно).

Здесь мы установим некоторые общие предложения о верхнем угле, как он определен в § 1.

Теорема 1. *Если α_{12}, α_{13}, α_{23} верхние углы между кривыми L_1, L_2, L_3, исходящими из одной точки, то $\alpha_{12} + \alpha_{23} \geq \alpha_{13}$.*

---

[3] Предполагается, согласно оговоренному условию, что кривая лежит в области, любые две точки которой соединимы кратчайшей.

Эта общая теорема доказана в [2].

Если L_1 и L_2 суть ветви одной кратчайшей, то, очевидно, $\alpha_{13} = \pi$. Поэтому из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Сумма верхних смежных углов не меньше* π.

2. Теорема 3. *Каковы бы ни были кратчайшие L, M, исходящие из одной точки O, если α — наибольший угол между ними, то*

$$\alpha = \varlimsup_{x\to 0} \gamma_K(x, y), \tag{1}$$

где $\gamma_K(x, y)$ — угол, определенный в § 1 (см. рис. 1). Такое же равенство верно и при $y \to 0$. По определению $\alpha = \lim\limits_{x,y\to 0} \gamma_K(x, y)$, а в равенстве (1) верхний предел берется лишь при условии $x \to 0$, в то время как y может быть произвольным, т. е. точка X на L стремится к O, а Y на M меняется произвольно. Таким образом, здесь как бы получается обобщение определения верхнего угла.

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. *При всяком K*

$$\cos\gamma_K = \frac{y - z}{x} + \varepsilon, \tag{2}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $x/y \to 0$, а x, y, z, γ_K имеют тот же смысл, что в теореме: $OX = x$, OY=y, $XY = z$, где X, Y лежат на L, M.

Пусть, например, $K < 0$; положим $K = -k^2$. Тогда, по известной формуле геометрии Лобачевского, для треугольника T_K со сторонами x, y, z

$$\operatorname{ch} kz = \operatorname{ch} kx \operatorname{ch} ky - \operatorname{sh} kx \operatorname{sh} ky \cos\gamma_K,$$

где ch, sh — гиперболические косинус и синус.

Отсюда, обозначая для краткости kx, ky, kz через x, y, z, получаем

$$\cos\gamma_K = \frac{\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y} + \frac{\operatorname{ch} y\,(\operatorname{ch} x - 1)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}. \tag{3}$$

Так как

$$\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} z = 2\operatorname{sh}\frac{y - z}{2}\operatorname{sh}\frac{y + z}{2},$$
$$\operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}, \quad \operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2},$$

то, вместо (3), имеем

$$\cos\gamma_K = \frac{2\operatorname{sh}\frac{y-z}{2}}{\operatorname{sh} x}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{y+z}{2}}{\operatorname{sh} y} + \frac{\operatorname{ch} y \operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{sh} y \operatorname{ch}\frac{x}{2}}. \tag{4}$$

При $x/y \to 0$ второе слагаемое в правой части стремится к нулю. Кроме того, по неравенству треугольника $|y-z| \le x$, а поэтому $\operatorname{sh}(y/2+z/2)/\operatorname{sh} y \to \to 0$ при $x/y \to 0$, а $2\operatorname{sh}(y/2 - z/2)$ и $\operatorname{sh} x$ эквивалентны $y - z$ и x. Стало

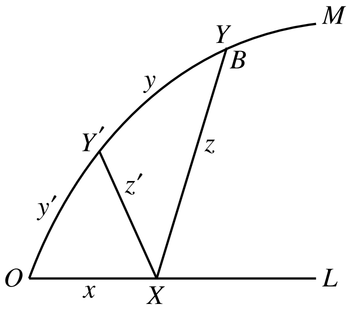


Рис. 2

быть, из (4) следует

$$\cos\gamma_K = \frac{y-z}{x} + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \to 0$ при $x/y \to 0$.

Теперь докажем теорему 3, т. е. что верхний угол $\alpha = \varlimsup\limits_{x\to 0} \gamma_K(x,y)$. Так как по определению $\alpha = \varlimsup\limits_{x,\, y\to 0} \gamma_K(x,y)$, то достаточно доказать, что

$$\alpha \geq \varlimsup_{\substack{x\to 0 \\ y>a>0}} \gamma_K(x,y), \tag{5}$$

где предел берется при условии, что $x\to 0$, а y остается больше какого-либо положительного числа.

Итак, пусть точка X на кратчайшей L стремится к O, а точка Y на кратчайшей M остается от O на конечном расстоянии. Возьмем на M переменную точку Y', стремящуюся к O, но так, что

$$\frac{x}{y'} \to 0,$$

где $y' = OY'$. Пусть $XY' = z$. Тогда, в силу неравенства треугольника (рис. 2), $YY' \geq XY - XY'$, т. е. $y - y' \geq z - z'$ или $y - z \geq y' - z'$. Отсюда, вследствие доказанной леммы (формула (2)),

$$\cos\gamma_K(x,y) + \varepsilon \geq \cos\gamma_K(x,y') + \varepsilon'$$

или

$$\gamma_K(x,y) \leq \gamma_K(x,y') + \varepsilon'', \tag{6}$$

а так как x, $y' \to 0$, то по определению верхнего угла $\alpha \geq \gamma_K(x,y') - \varepsilon'''$.

Поэтому из (6) следует $\alpha \geq \varlimsup \gamma_K(x,y)$, что и требовалось доказать.

3. Теорема 4. *В условиях и обозначениях теоремы 3 имеет место неравенство*

$$\cos\alpha \leq \lim_{x/y\to 0} \frac{y-z}{x}. \tag{7}$$

Доказательство. По теореме 3, $\alpha \geq \varlimsup\limits_{x/y\to 0} \gamma_K(x,y)$ и, следовательно,

$$\cos\alpha \leq \lim_{x/y\to 0} \cos\gamma_K(x,y),$$

а по формуле (2)

$$\cos \gamma_K(x, y) = \frac{y - z}{x} + \varepsilon,$$

откуда и следует (7).

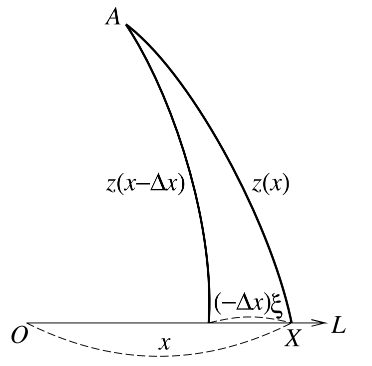


Рис. 3

Следствие. *Пусть L — данная кратчайшая; X — переменная ее точка; x — длина отрезка кратчайшей от начала O до точки X (рис. 3); $z(x)$ — длина кратчайшей, проведенной из фиксированной точки A в точку X; ξ — верхний угол между отрезком OX кратчайшей L и кратчайшей AX (любой из этих кратчайших, если их несколько). Тогда для нижней левой производной от $z(x)$ по x имеет место неравенство*

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\text{н.лев}} \geq \cos \xi. \tag{8}$$

Для доказательства достаточно в неравенство (7) подставить ξ на место α, $z(x)$ и $z(x - \triangle x)$ на место y и на z, $-\triangle x$ на место x.

Замечание. Функция $z(x)$ удовлетворяет условию $|z(x + \triangle x) - z(x)| \leq$ $\leq |\triangle x|$, которое очевидным образом следует из неравенства треугольника. Поэтому, в силу известной теоремы, эта функция почти везде имеет производную.

§ 3. Теорема об углах треугольника

1. Рассмотрим треугольник ABC в данном пространстве. Пусть α — верхний угол между его сторонами AB, AC. Задача состоит в том, чтобы оценить отличие этого угла от соответствующего угла α_K в треугольнике $A_1B_1C_1$ со сторонами той же длины на поверхности S_K постоянной кривизны K. Для определенности предположим, что $K < 0$ [4]).

Возьмем на сторонах AB, AC треугольника ABC точки X, Y и рассмотрим треугольник AXY, стороны AX и AY которого являются отрезками сторон AB, AC (рис. 4). Положим $AX = x$, $AY = y$, $XY = z$ и пусть ξ и η — верхние углы между AX, XY и AY, XY. Построим на поверхности S_K треугольник $A_1X_1Y_1$ со сторонами, равными x, y, z, и пусть γ_K, ξ_K, η_K — его углы, соответствующие α, ξ, η. Угол γ_K есть функция $x = AX$ и $y = AY$.

[4])Если $K \geq 0$, вывод будет тот же. Только при $K > 0$ нужно предполагать, что периметр треугольника ABC меньше $2\pi/\sqrt{K}$, так как иначе треугольник $A_1B_1C_1$ не будет существовать. Если же это ограничение периметра выполнено, то треугольник $A_1B_1C_1$ и все рассматриваемые в дальнейшем треугольники $A_1X_1Y_1$ существуют.

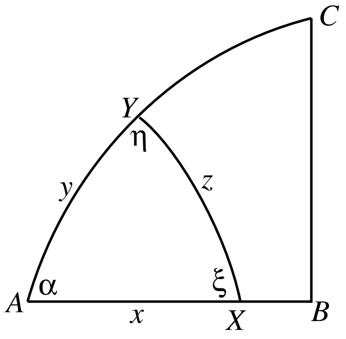


Рис. 4

2. Нашей ближайшей задачей будет дать следующую оценку для левых нижних производных $\partial\gamma_K/\partial x$, $\partial\gamma_K/\partial y$.

Лемма 1. *Если в треугольнике OXY ни одна сторона не равна сумме двух других, так что ξ_K, η_K не равны ни нулю, ни π, то*

$$\frac{\partial\gamma_K}{\partial x} \geq \frac{\cos\xi - \cos\xi_K}{\sin\xi_K}\cdot\frac{k}{\operatorname{sh} kx}, \tag{1}$$

где $\partial\gamma_K/\partial x$ означает (как и дальше) левую нижнюю производную, а $k^2 = -K$. Аналогичное неравенство верно, конечно, для $\partial\gamma_K/\partial y$. Если $K = 0$, то $k/\operatorname{sh} kx$ заменяется на $1/x$, а если $K > 0$, то — на $k/\sin kx$, где $k = \sqrt{K}$. Соответствующий вывод получается буквально так же, как следующий далее вывод формулы (1).

По известной формуле геометрии Лобачевского

$$\operatorname{ch} kz = \operatorname{ch} kx\ \operatorname{ch} ky - \operatorname{sh} kx\ \operatorname{sh} ky \cos\gamma_K$$

или, заменяя пока kx, ky, kz, γ_K на x, y, z, γ,

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x\ \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x\ \operatorname{sh} y \cos\gamma. \tag{2}$$

Для левых нижних производных получаем, как для обычных,

$$\operatorname{sh} x\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sh} x\ \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x\ \operatorname{sh} y\cos\gamma + \operatorname{sh} x\ \operatorname{sh} y\sin\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x} \tag{3}$$

(поскольку $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{sh} x\ \operatorname{sh} y \sin\gamma$ — неотрицательные и непрерывные функции x).

Выражая $\cos\gamma$ из формулы (2), путем элементарных выкладок получим

$$\operatorname{sh} x\ \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x\ \operatorname{sh} y\cos\gamma = \frac{\operatorname{ch} x\ \operatorname{ch} z - \operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} x}. \tag{а}$$

По формуле, аналогичной (2), —

$$\frac{\operatorname{ch} x\ \operatorname{ch} z - \operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{sh} z\cos\xi_K. \tag{б}$$

Наконец, по теореме синусов —

$$\operatorname{sh} y\sin\gamma = \operatorname{sh} z\sin\xi_K. \tag{в}$$

Воспользовавшись (а)–(в), получим из (3)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\xi_K + \operatorname{sh} x \sin\xi_K \frac{\partial\gamma}{\partial x}$$

или, возвращаясь от x и z к kx, kz, —

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\xi_K + \frac{\operatorname{sh} kx}{k} \sin\xi_K \frac{\partial\gamma}{\partial x}. \tag{4}$$

По следствию теоремы 4 § 2 (формула (8))

$$\frac{\partial z}{\partial x} \geq \cos\xi.$$

Поэтому из (4) следует

$$\frac{\partial\gamma_K}{\partial x} \geq \frac{\cos\xi - \cos\xi_K}{\sin\xi_K} \cdot \frac{k}{\operatorname{sh} kx},$$

что и требовалось доказать.

3. Теперь докажем лемму, которая позволит легко доказать теорему об углах треугольника.

Лемма 2. *Если в треугольнике AXY никакая сторона не равна сумме двух других и $\xi_K - \xi \geq \varepsilon > 0$, то существует такое $x' < x$, что*

$$\gamma(x, y) - \gamma(x', y) > a \,\ln\frac{x}{x'}, \tag{5}$$

где $a > 0$ зависит только от ε, K и диаметра треугольника ABC.

Для доказательства преобразуем сначала полученную оценку (1) для $\partial\gamma/\partial x$. Именно при условии $\xi_K - \xi \geq \varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{\cos\xi - \cos\xi_K}{\sin\xi_K} \geq \frac{\cos(\xi_K - \varepsilon) - \cos\xi_K}{\sin\xi_K} = \sin\varepsilon - (1 - \cos\varepsilon)\operatorname{ctg}\xi_K.$$

Так как $\xi_K \geq \varepsilon$, то $-\operatorname{ctg}\xi_K \geq -\operatorname{ctg}\varepsilon$ и

$$\frac{\cos\xi - \cos\xi_K}{\sin\xi_K} \geq \sin\varepsilon - (1 - \cos\varepsilon)\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{1 - \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, из (1) получим

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} \geq \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{k}{\operatorname{sh} kx}. \tag{6}$$

Поскольку функция $kx/\operatorname{sh} kx$ непрерывна и положительна на замкнутом промежутке $[0, d]$, где d — диаметр треугольника ABC, то она ограничена снизу положительным числом, так что

$$\frac{kx}{\operatorname{sh} kx} \geq b > 0 \quad \text{или} \quad \frac{k}{\operatorname{sh} kx} \geq \frac{b}{x}.$$

(Впрочем, поскольку $kx/\operatorname{sh} kx$ убывает с ростом x, то $kx/\operatorname{sh} kx \geq kd/\operatorname{sh} kd$.)

Таким образом, вместо (6), можно написать [5)]

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} \geq 2a\frac{1}{x} = 2a\frac{d \ln x}{dx},$$

где

$$2a = b \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как здесь $\partial\gamma/\partial x$ — левая нижняя производная, то, очевидно, найдется такое $x' < x$, что

$$\gamma(x, y) - \gamma(x', y) < a(\ln x - \ln x') = a \ln \frac{x}{x'},$$

что и требовалось доказать.

4. Докажем теперь саму основную оценку для угла треугольника ABC. Именно, *если α — верхний угол между сторонами AB, AC, а α_K — соответствующий угол в треугольнике с такими же сторонами на поверхности S_K, то*

$$\alpha - \alpha_K \leq \nu, \tag{7}$$

где ν — верхняя грань относительных избытков треугольников AXY, т. е. величин

$$(\alpha + \xi + \eta) - (\gamma + \xi_K + \eta_K),$$

где ξ, η, γ, ξ_K, η_K имеют тот же смысл, что и выше.

По определению величины ν

$$(\alpha - \gamma) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \leq \nu. \tag{8}$$

Сам треугольник ABC есть треугольник AXY, когда X, Y совпадают с B, C. В этом случае $\gamma = \alpha_K$, поэтому

$$(\alpha - \alpha_K) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \leq \nu. \tag{8a}$$

Кроме того, мы можем положить $AB = x_0$, $AC = y_0$.

[5)] В случае $K > 0$ имеем $\partial\gamma/\partial x \geq (\operatorname{tg} \varepsilon/2) \cdot (k/\operatorname{sh} kx) \geq (\operatorname{tg} \varepsilon/2)/x$.

Для треугольника ABC имеются две возможности: 1) сумма каких-либо двух его сторон равна третьей, 2) это не так.

Покажем, что в первом случае оценка (7) заведомо имеет место. Пусть, например, $x_0 + y_0 = z_0$, т. е. $AB + AC = BC$, так что AB и AC образуют одну кратчайшую. В таком случае $\alpha = \pi$, а соответствующий треугольник на поверхности S_K вырождается в отрезок, так что $\alpha_K = \pi$, $\xi_K = \eta_K = 0$. А так как $\xi, \eta \geq 0$, то по неравенству (8а)

$$\nu \geq (\alpha - \alpha_K) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \geq 0 = \alpha - \alpha_K.$$

Совершенно аналогичный вывод будет, когда $x_0 + z_0 = y_0$, т. е. $AB + BC = {=}AC$ (или $y_0 + z_0 = x_0$). В этом случае $\xi = \xi_K = \pi$, $\eta_K = 0$, а $\eta \geq 0$, так что

$$\nu \geq (\alpha - \alpha_K) + (\xi - \xi_K) + (\eta - \eta_K) \geq \alpha - \alpha_K.$$

5. Таким образом, остается рассмотреть тот более общий случай, когда в треугольнике ABC сумма никаких двух сторон не равна третьей. Допустим, что тогда требуемая оценка не имеет места, так что $\alpha - \alpha_K > \nu$, или, что равносильно этому,

$$\alpha - \alpha_K \geq \nu + 2\varepsilon, \tag{9}$$

где ε, например, равно $(\alpha - \alpha_K - \nu)/2$. Тогда из неравенства (8а) получим

$$(\xi_K - \xi) + (\eta_K - \eta) \geq (\alpha - \alpha_K) - \nu \geq 2\varepsilon$$

и, следовательно, хотя бы одна из разностей $\xi_K - \xi$, $\eta_K - \eta$ не меньше ε. Пусть именно

$$\xi_K - \xi \geq \varepsilon. \tag{10}$$

Тогда, согласно доказанной лемме, на стороне AB найдется такая точка X' ($AX' = x' < x_0$), что

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x', y_0) > a \ln \frac{x_0}{x'}. \tag{11}$$

Если же $\eta_K - \eta \geq \varepsilon$, то

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x_0, y') > a \ln \frac{y_0}{y'}.$$

Объединяя оба случая, можно сказать, что существуют $x' \leq x_0$, $y' \leq y_0$ такие, что

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x', y') > a \ln \frac{x_0 y_0}{x' y'}. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим треугольник $AX'C$ либо ABY', а вообще — $AX'Y'$, для которого роль угла $\alpha_K = \gamma(x_0, y_0)$ играет угол $\gamma(x', y')$.

Согласно (12), $\gamma(x', y') < \gamma(x_0, y_0)$. Вследствие (9),

$$\alpha - \gamma(x', y') \geq \alpha - \alpha_K \geq \nu + 2\varepsilon. \tag{13}$$

Это неравенство играет для треугольника $AX'Y'$ ту же роль, что неравенство (9) для треугольника ABC, и, следовательно, для треугольника $AX'Y'$ повторяется та же ситуация, что и для треугольника ABC. Действительно, величина ν для «меньшего» треугольника $AX'Y'$ может быть только больше, чем для «большего» ABC, а потому в неравенстве (13) можно ν относить к треугольнику $AX'Y'$. Тогда неравенство (12) означает, что для треугольника $AX'Y'$ требуемая оценка для угла α не имеет места. Поэтому в данном треугольнике сумма двух сторон не может равняться третьей, так как для этого случая оценка заведомо имеет место. Наконец, неравенство (13) имеет для треугольника $AX'Y'$ буквально тот же смысл, что и неравенство (9) для треугольника ABC.

В результате мы можем повторить наш вывод и тогда найдем такие $x'' \leq x'$, $y'' \leq y'$, что

$$\gamma(x', y') - \gamma(x'', y'') > a \ln \frac{x'y'}{x''y''}.$$

Соединяя это с неравенством (12), получим

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x'', y'') > a \ln \frac{x_0 y_0}{x''y''}.$$

Теперь очевидно, что то же рассуждение повторится для треугольника $AX''Y''$ и т. д.

Рассмотрим все такие x, y, для которых

$$\gamma(x_0, y_0) - \gamma(x, y) > a \ln \frac{x_0 y_0}{xy}. \tag{14}$$

Так как тут тем более $\alpha_K = \gamma(x_0, y_0) \geq a \ln(x_0 y_0 x^{-1} y^{-1})$, то произведение таких x, y, для которых верно (14), ограничено снизу положительным числом: $xy > c > 0$, где $c = x_0 y_0 e^{-\alpha_K/\alpha}$.

Пусть p — точная нижняя граница произведений тех x, y, для которых верно (14), так что $p \geq c > 0$. Тогда существуют такие x_k, y_k $(k = 1, 2, \ldots)$, что: 1) для них верно (14), 2) $x_k y_k \to p$, 3) x_k и y_k сходятся к некоторым пределам $\overline{x}$, $\overline{y}$. В таком случае по непрерывности логарифма и угла γ, как функции x, y, неравенство (14) будет верно также для $\overline{x}$, $\overline{y}$. Это означает, что для соответствующего треугольника $A\overline{X}\,\overline{Y}$ повторяется та же ситуация, что и для треугольника ABC. Поэтому найдутся такие $x' \leq \overline{x}$, $y' \leq \overline{y}$, и одно из них меньшее, что для них верно (14). Вместе с тем будет $x'y' < \overline{x}\,\overline{y} = p$, т. е. p, вопреки определению, не будет нижней границей тех xy, для которых верно (14).

Полученное противоречие показывает невозможность нашего исходного предположения о том, что требуемая оценка для разности $\alpha - \alpha_K$ не имеет места. Она, стало быть, выполняется, что и требовалось доказать.

§ 4. *Пространство отрицательной кривизны, не большей K*

1. В этом параграфе мы рассматриваем пространство кривизны, не большей K, т. е. согласно данному выше определению такое, в котором каждая точка имеет окрестность, где у каждого треугольника избыток относительно K неположителен, т. е. $(\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha_K + \beta_K + \gamma_K) \le 0$; здесь α, β, γ — верхние углы между сторонами данного треугольника, а α_K, β_K, γ_K — углы треугольника со сторонами той же длины на поверхности S_K постоянной кривизны K.

Все наши рассмотрения будут относиться к такой области G пространства, малость которой обеспечивает нужные нам свойства: 1) существование кратчайших; 2) неположительность избытка относительно K каждого треугольника; 3) если $K > 0$, то существование для каждого треугольника определенного треугольника на S_K с такими же сторонами.

Прежде всего из основной теоремы об углах треугольника вытекает

Теорема 1. *В области G пространства кривизны $\le K$ верхние углы α, β, γ любого треугольника ABC не больше соответственных углов α_K, β_K, γ_K в треугольнике со сторонами той же длины на поверхности S_K.*

Действительно, согласно основной теореме об углах треугольника, $\alpha - \alpha_K \le \nu$, а так как относительные избытки неположительны, то $\nu \le 0$ и потому $\alpha \le \alpha_K$.

2. Докажем теперь теорему, которая сразу приведет к значительному прояснению свойств пространств неположительной кривизны.

Теорема 2. *В области G пространства кривизны $\le K$ для любых двух исходящих из общей точки кратчайших угол $\gamma_K(x, y)$ есть неубывающая функция x и y.* Угол $\gamma_K(x, y)$ понимается, как и выше, согласно определению, данному в § 1.

Лемма. *Если невыпуклый четырехугольник на поверхности S_K деформировать в треугольник разгибанием его входящего угла, сохраняя длины сторон, то выпуклые его углы увеличатся (рис. 5).*

Для угла B, лежащего против входящего угла, это очевидно из того, что $AC < A_1C_1$.

Если треугольник ADC отразить в прямой AC, то получим выпуклый четырехугольник Q с углом A бо́льшим, чем угол A исходного четырехугольника Q (рис. 6). Будем деформировать четырехугольник Q, увеличи-

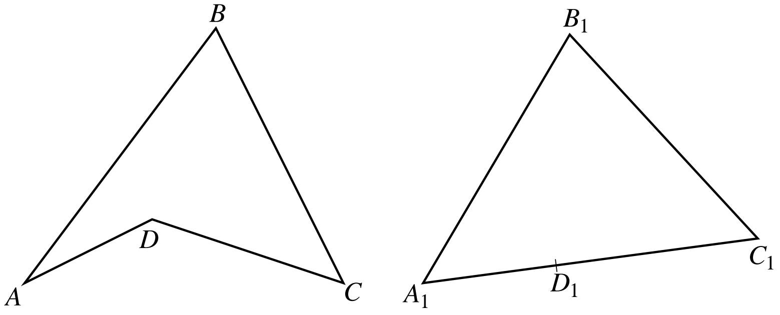


Рис. 5

вая его угол A и сохраняя длины сторон. Углом A при данных сторонах четырехугольник определится однозначно, так что деформация будет идти однозначно и превратит рано или поздно Q в Q'. Но раз невыпуклый четырехугольник Q превратился в выпуклый четырехугольник Q', то в некоторый момент его угол D распрямился и Q превратился в треугольник. Это произошло при увеличении угла A, что и требовалось доказать.

Докажем теперь саму теорему 2 (рис. 7).

Пусть кратчайшие L, M исходят из O; возьмем на M точку Y и на L точки X, X' так, что $OX < OX'$. Обозначим $OY = y$, $OX = x$, $OX' = x'$. Проводя кратчайшие XY, $X'Y$, получим треугольники $T = OXY$ и $T' = XX'Y$. Построим на поверхности S_K треугольники $T_K = O_K X_K Y_K$ и $T'_K = X_K X'_K Y_K$ со сторонами тех же длин, причем приложим их друг к другу сторонами $X_K Y_K$ так, что они образуют четырехугольник $Q_K = O_K X_K X'_K Y_K$.

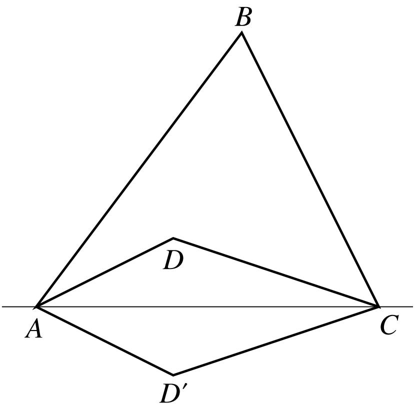


Рис. 6

По теореме 1 углы в треугольниках T_K, T'_K не меньше, чем в T и T'. Вместе с тем, согласно теореме 2 § 1, сумма верхних углов при точке X в треугольниках T, T' не меньше π, так как эти углы смежные. Тем более сумма соответствующих углов в треугольниках T_K, T'_K не меньше π. Но эти углы образуют угол при X_K в четырехугольнике Q_K. Следовательно, четырехугольник Q_K либо не выпуклый, либо, если угол при X_K равен π, представляет собой треугольник. Однако этот случай возможен лишь тогда, когда у обоих треугольников T, T' относительные избытки равны нулю.

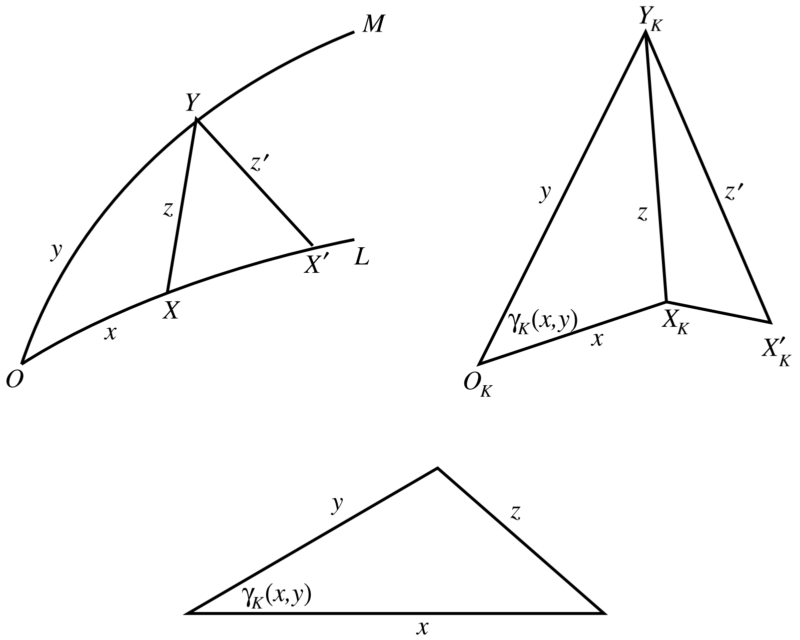


Рис. 7

Если мы превратим четырехугольник Q_K в треугольник T''_K, разогнув угол при X_K, то, согласно доказанной лемме, угол при вершине Q_K увеличится или останется неизменным, если Q_K уже вырождался в треугольник.

В четырехугольнике Q_K угол при O_K был углом в треугольнике T_K, т. е. это был угол $\gamma_K(x,y)$. В треугольнике T''_K угол при O_K будет, очевидно, углом $\gamma_K(x',y)$.

Таким образом,

$$\gamma_K(x,y) \le \gamma_K(x',y),$$

причем $\gamma_K(x,y) = \gamma_K(x',y)$ тогда и только тогда, когда избытки треугольников T, T' равны нулю. Этим теорема доказана.

3. Теорема 3. *В области G каждые две точки соединимы единственной кратчайшей.*

Это, очевидно, следует из теоремы 2, так как если кратчайшие L, M, идущие из точки O, имеют общий конец A, то, полагая $OA = a$, будем иметь $\gamma_K(a,a) = 0$, а следовательно, и для всех $x < a$ будет $\gamma_K(x,x) = 0$. Это означает, что соответствующие точки на L и M совпадают.

Однако теорема 3, как и теоремы 1 и 2, имеет место лишь в области G, где относительный избыток каждого треугольника неположителен. Например, на цилиндре диаметрально противоположные точки соединимы двумя кратчайшими; вместе с тем они же образуют треугольник (например, со сторонами в одну треть окружности), все углы которого равны π, и, стало быть, его избыток вообще наибольший возможный.

4. Теорема 4. *В пространстве, где кривизна не больше какого-либо K, между любыми двумя исходящими из одной точки кратчайшими существует угол и в области G, даже угол в сильном смысле, т. е. существует*

$$\alpha = \lim_{x\to 0}\gamma(x,y) = \lim_{y\to 0}\gamma(x,y). \tag{1}$$

Доказательство. Существование угла, т. е. $\lim\limits_{x,y\to 0}\gamma_K(x,y)$, очевидно из теоремы 2, так как $\gamma_K(x,y)$ — неубывающая функция и, следовательно, имеет предел при $x,y\to 0$.

Для доказательства существования $\lim\limits_{x\to 0}\gamma_K(x,y)$ воспользуемся теоремой 3 (§ 2). Согласно этой теореме, для верхнего угла α имеет место равенство

$$\alpha = \overline{\lim_{x\to 0}}\,\gamma_K(x,y). \tag{2}$$

В данном случае, как уже доказано, существует угол в обычном смысле, и, следовательно, здесь под α можно понимать этот угол $\alpha = \lim\limits_{x,y\to 0}\gamma_K(x,y)$.

С другой стороны, рассмотрим любой треугольник OXY, где O — общее начало данных кратчайших, а X, Y — какие-либо точки на них. Применяя к такому треугольнику теорему 1, получаем

$$\alpha \le \gamma_K(x,y).$$

Отсюда вместе с (2) следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\gamma_K(x,y)$ существует и равен α.

Замечание. Равенство (1) существенно ограничивается областью G, где избытки треугольников неположительны и где каждые две точки соединимы единственной кратчайшей (теорема 3). Пусть L, M — кратчайшие, исходящие из точки O, и конец B кратчайшей M соединяется с O еще другой кратчайшей N. Тогда, если $OB=b$, то $\lim\limits_{x\to 0}\gamma_K(x,b)$, даже если он и существует, не может равняться обоим углам между L и M, L и N, если эти углы не равны. Этот предел, как оказывается, равен углу, который образует с L предел кратчайших BX, получающийся, когда точка X стремится к O по кратчайшей L. Поэтому в [2] угол в сильном смысле был определен как $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\,\gamma(x,y)$ при условии, что кратчайшие XY сходятся к M (в частности, к точке O).

5. Пользуясь существованием угла в сильном смысле, можно доказать теорему, вполне аналогичную доказанной выше об углах треугольника.

Теорема 5. *Пусть ABC — треугольник в области G пространства с кривизной $\leq K$; ν — нижняя грань относительных избытков треугольников AXY с вершинами X, Y на сторонах AB, AC треугольника ABC; α — угол этого треугольника при вершине A, а α_K — угол, соответствующий углу треугольника с такими же сторонами на поверхности S_K.*

Имеет место неравенство $\alpha - \alpha_K \geq \nu^-$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству общей теоремы § 3. Оно проведено в [2, гл. VII] для случая $\nu^- = 0$ и $K = 0$ в двумерном пространстве. Однако, опираясь на теоремы 3, 4, то же самое доказательство можно буквально применить для области G любого пространства кривизны $\leq K$. При этом величина ν^- может определяться не для избытков относительно данного K, а относительно любого K', и тогда будет $\alpha - \alpha_{K'} \geq \nu^-_{K'}$.

Из пространств с кривизной $\leq K$ можно выделить пространства, у которых кривизна $\geq K'$ ($K' \leq K$), как такие пространства, где в окрестности каждой точки избытки треугольников относительно K' неотрицательны. Тогда для них, подобно теоремам 1, 2, имеет место

Теорема 6. *В пространстве с кривизной $\leq K$ и $\geq K'$ в малой области:*

1) углы треугольника удовлетворяют неравенствам $\alpha_{K'} \leq \alpha \leq \alpha_K$, где α_K, $\alpha_{K'}$ — углы треугольников со сторонами той же длины на поверхностях S_K, $S_{K'}$;

2) угол $\gamma_{K'}(x, y)$ есть невозрастающая функция x, y.

Доказательство первой части очевидно из теоремы 5, а доказательство второй аналогично доказательству теоремы 2; оно фактически дано в [2, гл. XI]. Там же можно найти другие теоремы, которые показывают, что свойства пространства с кривизной $\geq K'$ и $\leq K$ представляют, так сказать, нечто промежуточное между свойствами пространств постоянных кривизн K' и K. В [2, гл. XI] эти теоремы доказаны для выпуклых поверхностей, но они могут быть обобщены.

К такого рода результатам, так же как к упомянутым в § 1, мы вернемся когда-нибудь в другом месте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Основы внутренней геометрии поверхностей // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1483–1486.
2. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
3. *Кон-Фоссен С. Э.* О существовании кратчайших путей // Докл. АН СССР. 1935. Т. 3, № 8. С. 339–342.
4. *Busemann H.* Spaces with non-positive curvature // Acta Math. 1948. V. 80. P. 259–311.
5. *Александров А. Д.* Изопериметрические неравенства на кривых поверхностях // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47, № 4. С. 239–242.

Замечания к основам теории относительности [1)]

Вестн. ЛГУ. 1953. № 11. Сер. математики, физики и химии. Вып. 4. С. 95–110.

Совместно с В. В. Овчинниковой

§ 1. *Формулировка и обсуждение результата*

1. В настоящей работе доказывается, что для вывода преобразований Лоренца достаточно закона постоянства скорости света, тогда как принцип относительности, требования линейности и даже непрерывности преобразований оказываются лишними. Возможность обойтись без требования линейности была установлена Г. Вейлем и даже еще Ж. Лиувиллем [1, с. 63]. Но наш метод совершенно отличен от метода Г. Вейля, к тому же мы обходимся даже без требования непрерывности.

Закон распространения света от точечного источника выражается формулой

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=c(t-t_0), \tag{1}$$

где x_0, y_0, z_0 — пространственные координаты источника, а t_0 — время испускания света.

Вопрос касается таких преобразований пространственно-временны́х координат x, y, z, t, при которых не изменяются ни вид формулы (1), ни величина c. Само собой разумеется, что при преобразовании переменных x, y, z, t величины x_0, y_0, z_0, t_0 подвергаются в формуле (1) такому же преобразованию. Предполагается, что переменные x, y, z, t принимают все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$ и величины x_0, y_0, z_0, t_0 могут также иметь любые значения.

При этих условиях дело сводится к доказательству следующей математической теоремы: *любое взаимно однозначное преобразование, сохраняющее формулу (1), есть «общее преобразование Лоренца».*

[1)] Математическая часть статьи была в основном выполнена мною с В. В. Овчинниковой в 1951 г. При подготовке работы к печати я сделал некоторые изменения и добавил § 1. — *А. Д. Александров.*

При этом под общим преобразованием Лоренца понимается преобразование, являющееся комбинацией следующих преобразований:

1) преобразования Лоренца частного вида

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \tag{2}$$

2) ортогональных преобразований переменных x, y, z (включая перенос начала и перемену знака);

3) переноса начала отсчета t (т. е. преобразования $t' = t + a$);

4) умножения всех переменных x, y, z, t на одно и то же число.

Не исключается, конечно, что некоторые из этих преобразований могут отсутствовать, или, иными словами, сводиться к тождественному преобразованию. «Общность» этих требований в сравнении с обычными преобразованиями Лоренца состоит не в присоединении переносов начала и ортогональных преобразований, а в допущении умножения x, y, z, t на одно и то же число, т. е. в допущении пропорционального изменения масштабов пространственных и временнóй координат. То, что при умножении всех координат $x, \ldots, x_0, \ldots, t_0$ на одно и то же число формула (1) сохраняется, очевидно. Однако такое преобразование всегда исключают; этот пункт мы еще обсудим.

Данное определение общих преобразований Лоренца чисто алгебраическое в соответствии с математической постановкой самого вопроса, когда x, y, z, t рассматриваются просто как переменные в формуле (1). Соответственно и величина v в формулах (2) появляется просто как параметр, от которого зависит преобразование. Но можно, как известно, представить любое общее преобразование Лоренца более наглядно, учитывая, что x, y, z имеют смысл прямоугольных координат. Общее преобразование Лоренца от переменных x, y, z, t к x', y', z', t' представляется как последовательность следующих преобразований [2]: 1) перенос начала отсчета t; 2) перенос на-

---

[2] Общее преобразование Лоренца можно также записать следующим образом. Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки (x, y, z) и $\mathbf{v}$ — вектор скорости, то

$$\mathbf{r}' = \lambda \left[\mathbf{r} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{(\mathbf{rv})\mathbf{v}}{v^2} - \frac{\mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \mathbf{a} \right], \qquad t' = \lambda \left[\frac{t - \frac{(\mathbf{rv})}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + b \right].$$

Эти формулы можно найти, например, у В. Паули [2] с той разницей, что там исключены умножение на общий множитель λ и перенос начала координат на вектор $\mathbf{a}$, так же как перенос отсчета времени на b.

чала осей x, y, z; 3) вращение осей x, y, z (чтобы ось x стала параллельной скорости одной системы относительно другой); 4) преобразование Лоренца вида (2); 5) вращение и если нужно перемена направления осей x, y, z (чтобы они совпали с осями x', y', z'); 6) пропорциональное изменение масштабов, равносильное умножению x, y, z, t на одно и то же число.

В сформулированной выше теореме заранее не предполагается не только линейность, но даже и непрерывность преобразования. Соответственно решающим оказывается именно доказательство линейности преобразования, сохраняющего формулу (1). Это доказательство проводится дальше в § 2 посредством достаточно простых соображений, принадлежащих по существу элементарной геометрии. Мы исходим при этом из следующей геометрической интерпретации стоящей задачи.

Представим себе четырехмерное евклидово пространство, в котором задана система прямоугольных координат x, y, z, t. Тогда уравнение (1) определяет в этом пространстве конус с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0, t_0) и с осью, параллельной оси t. Вершина конуса может быть любой, но направление осей рассматриваемых конусов и их растворы одинаковы.

Преобразование от x, y, z, t к x', y', z', t', естественно, интерпретируется как взаимно однозначное преобразование четырехмерного пространства, сопоставляющее каждой точке с координатами x, y, z, t точку с координатами x', y', z', t'.

Теорема утверждает, что *если такое преобразование переводит каждый из указанных конусов в такой же конус, то оно есть общее преобразование Лоренца.* Дело сводится к доказательству того, что такое преобразование линейно, после чего дальнейшее не представляет ничего нового. Так как вывод преобразований Лоренца в предположении линейности известен и ряд его вариантов можно найти в учебниках, мы этого вывода воспроизводить не будем, см., например, [3, с. 259, 262].

2. Рассмотрим физическую сторону сформулированного результата. Не вдаваясь в анализ понятий системы отсчета и пространственно-временны́х координат, мы принимаем, что в многообразии событий определяются пространственные и временны́е координаты x, y, z, t. Термин «координаты» будет пониматься в смысле пространственных и временны́х координат.

Введем следующее определение. *Лоренцевой мы называем такую систему координат, в которой закон распространения света от точечного источника выражается формулой (1).*

Ясно, что речь идет об инерциальных системах; но в данной формулировке мы отвлекаемся от этого и в определение вводим только закон распространения света в форме (1). Поэтому, чтобы заранее не навязывать представлений, связанных с термином «инерциальная система», мы предпочитаем ввести новый термин — «лоренцева система координат».

Сформулированная в п. 1 теорема сводится, очевидно, к следующему.

Преобразование от одной лоренцевой системы к другой (при условии, что скорость света c остается неизменной) есть общее преобразование Лоренца.

В этом не содержится еще, однако, никаких *физических* утверждений, так как мы только ввели определение и формулируем касающуюся его *математическую* теорему. Определение имеет физический смысл лишь тогда, когда определяемое понятие отражает некоторое физическое содержание. Иными словами, лоренцевы системы еще должны реально существовать, т. е. быть связанными с физическими процессами. Соответственно мы имеем в виду следующее основное положение:

(A) *Существуют лоренцевы системы координат, т. е. системы, в которых закон распространения света от точечного источника выражается формулой (1).*

Это утверждение констатирует уже некоторое реальное обстоятельство и является физическим законом.

В этой связи полезно заметить, что иногда в вопросе об определении и законе допускается путаница. Она проистекает, в частности, от недостаточного понимания того, что определение имеет физический смысл только при том условии, если оно отражает нечто объективное. Иными словами, определение само по себе остается пустым, если оно не дополнено утверждением о реальном существовании определяемого объекта; а такое утверждение представляет уже не определение, а закон или констатацию факта. Короче, как формулировки законов бессмысленны без определений, так и определения бессодержательны без законов. Отделить одно от другого можно только условно в абстрактной схеме теории [3)].

Сформулированное положение (A) о существовании лоренцевых систем еще недостаточно. Ведь и по теории неподвижного эфира такая система существует — это система, связанная с эфиром, но тут она одна. Поэтому положение (A) должно быть дополнено. Соответственно можно сформулировать следующий закон.

(B) *Всякое общее преобразование Лоренца возможно,* так что вместе с одной лоренцевой системой существуют и любые другие.

[3)] Например, утверждают, будто понятие одновременности пространственно разделенных событий есть вопрос простого условия (см., напр., [4, с. 539]). Это глубочайшее заблуждение происходит в результате отрыва определения от закона. В частности, когда А. Эйнштейн в своей классической работе [5] ввел определение одновременности, он явно указал, что предполагает возможность провести его без противоречий, и уже здесь заключалось не определение, а гипотеза; без ее оправдания определение было бы бессмысленным. Мы уже не говорим о том, что эйнштейновское определение одновременности основано на законе постоянства скорости света.

(Здесь имеется в виду физическая возможность и существование лоренцевых систем понимается, конечно, не в том смысле, что они все должны быть в данный момент в наличности. Но мы не будем глубоко вдаваться в анализ встающего здесь вопроса о соотношении реальной возможности и действительности.)

Для завершения формулировки основ теории относительности остается добавить принцип относительности.

(C) *Все лоренцевы системы равноправны; или выражения физических законов инвариантны относительно общих преобразований Лоренца* [4].

Однако принцип относительности не нужен для вывода преобразований Лоренца и соответственно их непосредственных следствий.

Заметим еще, что сформулированные положения о лоренцевых системах включают фактически утверждение о евклидовости пространства.

Закон постоянства скорости света без всяких предположений о характере метрики пространства можно формулировать следующим образом.

В некоторых («лоренцевых» или инерциальных) системах отсчета свет распространяется во все стороны с одинаковой скоростью, так что если r означает расстояние от источника, то

$$r = c(t - t_0). \tag{3}$$

Евклидовость пространства равносильна существованию такой системы координат, в которой расстояние выражается известной формулой

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \tag{4}$$

Если такая система координат может быть введена в системе отсчета, где имеет место закон (3), то соединение (3) и (4) дает формулу (1).

Таким образом, наш вывод преобразований Лоренца может считаться основанным или на законе постоянства скорости света в виде формулы (1), или на этом же законе в форме (3) и на предположении о евклидовости пространства, выраженном формулой (4).

3. В преобразовании от одной лоренцевой системы к другой сам собой появляется параметр v, и хотя в определении лоренцевых систем нет речи об их взаимном движении, оказывается, что v представляет собой величину скорости движения одной системы относительно другой, так как при постоянном x из формул (2) следует

$$\Delta x' = -\frac{v\Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \tag{5}$$

[4] По поводу понятия «равноправности» систем, так же как о принципе относительности вообще см., в частности, [6].

так что

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = -v, \tag{6}$$

и точно так же при постоянном x'

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v. \tag{7}$$

Остальные преобразования, входящие в общее преобразование Лоренца, ничего здесь не меняют, кроме того, что движение происходит, вообще говоря, в любом направлении, а не только вдоль оси x. В частности, умножение координат на общий множитель не изменяет отношения $\Delta x/\Delta t$ [5]).

Следовательно, *лоренцевы системы движутся относительно друг друга прямолинейно и равномерно.*

Далее, хотя бы в силу линейности общего преобразования Лоренца, оказывается, что тело, движущееся в отношении одной лоренцевой системы равномерно и прямолинейно, будет двигаться так же относительно любой другой. Поэтому, если в одной системе верен закон инерции, то он верен и в любой другой, или, *иными словами, тот факт, что лоренцевы системы — инерциальные, следует из инерциальности одной из них.*

Вопрос можно поставить и иначе. Можно сформулировать закон о том, что *с любым телом отсчета, движущимся по инерции, связывается лоренцева система координат.* Но так как тело отсчета в связанной с ним системе неподвижно, то в любой другой лоренцевой системе оно движется прямолинейно и равномерно. Это значит, что всякое тело, «предоставленное самому себе», движется в лоренцевой системе прямолинейно и равномерно, т. е. имеет место закон инерции.

Таким образом, *закон инерции уже заключается в утверждении, что с любым телом, «движущимся по инерции», связывается лоренцева система координат.*

Однако при абстрактном изложении теории нет необходимости класть в основу закон инерции; он должен, скорее, рассматриваться как первый закон динамики. Соответственно нет нужды класть в основу и понятие

---

[5]) Из формул, данных в подстрочном примечании [2]), следует, что при постоянном $\mathbf{r}$

$$\Delta\mathbf{r}' = -\lambda\frac{\mathbf{v}\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad \Delta t' = \frac{\lambda\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

так что

$$\frac{\Delta\mathbf{r}'}{\Delta t'} = -\mathbf{v}.$$

Аналогично при постоянном $\mathbf{r}'$ получим $\Delta\mathbf{r}/\Delta t = \mathbf{v}$.

инерциальной системы. Частная теория относительности исторически основывается прежде всего на электродинамике, поэтому естественно принять за основу при ее построении понятие лоренцевой системы, опирающееся на закон распространения света. Это дает самый короткий путь к собственному ядру теории — преобразованиям Лоренца. Конечно, возможны и существуют другие системы логического построения теории, отправляющиеся от других предпосылок. В частности, все равно имеет место закон, что всякая лоренцева система есть вместе с тем инерциальная. Это и есть собственно закон постоянства скорости света в той его форме, что в отношении всякой инерциальной системы свет распространяется с одинаковой скоростью. Но мы как бы переворачиваем формулировку этого закона, когда берем за исходное понятие лоренцевой системы и утверждаем, что во всякой лоренцевой системе тело, «предоставленное само себе», движется прямолинейно и равномерно. Как только что было показано, закон инерции в этой форме вытекает из его справедливости для одной лоренцевой системы или из того, что с телом, «предоставленным самому себе», связывается лоренцева система.

4. Как уже было замечено, пропорциональное изменение масштабов пространственных и временны́х координат, очевидно, не нарушает формулы (1) закона распространения света. Поэтому, естественно, мы должны были включить в общее преобразование Лоренца умножение всех координат на любой общий множитель. Однако изменение масштабов всегда исключают из преобразований Лоренца. Это не кажется нам вполне правильным, так как не только формула (1) не меняется при общем изменении масштабов, но и вообще выражения физических законов инвариантны относительно пропорциональных изменений масштабов, поскольку никаких преимущественных масштабов не существует. Соответственно принцип относительности, строго говоря, утверждает инвариантность выражений физических законов относительно общих преобразований Лоренца.

Совершенно аналогично формулы евклидовой геометрии инвариантны относительно пропорционального изменения масштабов прямоугольных координат. Но, например, в геометрии Лобачевского это не так, поскольку там нет подобия фигур и существуют отрезки, выделенные по своим геометрическим свойствам (например, сторона правильного треугольника с суммой углов, равной 90°), подобно тому, как прямой угол или радиан выделены по своим геометрическим свойствам.

В теории относительности нет преимущественных, выделенных в силу общих законов, единиц длины и времени, но в отличие от классической теории в ней есть преимущественная, выделенная в силу общих законов, скорость — скорость света c. Поэтому здесь допустимы только пропорциональные изменения масштабов для пространственных и временны́х координат совместно, тогда как в классической теории единицы пространства и времени можно менять независимо. Это, кстати, отражает в самой простой форме взаимосвязь пространства и времени, установление которой составляет главную особенность теории относительности. Неодинаковое изменение масштабов длин и времени ведет к изменению фундаментальной постоянной c. Самое правильное, с абстрактной точки зрения, выбрать единицы так, чтобы $c = 1$, и тогда эта постоянная просто исчезнет из выражений законов физики. Такие масштабы будут объективно преимущественными в соответствии с особой ролью скорости света. Между прочим, в астрономии расстояния давно измеряют световыми годами.

Обычно изменение масштабов исключают посредством специального рассуждения, как это сделано, например, в упоминавшейся классической работе Эйнштейна. Но в этом нет никакой надобности. Дело обстоит гораздо проще. Подобно тому как исключение изменения масштабов в геометрии осуществляется простой фиксацией отрезка, играющего роль единицы длины, так и здесь достаточно фиксировать два события — две точки многообразия пространства–времени и принять интервал между ними за единицу.

Интервал между событиями — точками (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) есть по определению величина

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2. \tag{8}$$

Он, как известно, инвариантен относительно преобразований Лоренца при неизменных масштабах; умножение же всех координат на одно число λ приводит к умножению интервала на λ^2. Поэтому, фиксируя значение интервала для двух точек, мы исключаем изменение масштабов при переходе от одной лоренцевой системы к другой [6)].

Таким образом, хотя пропорциональные изменения масштабов и входят в общие преобразования Лоренца и должны учитываться в принципе относительности, они несущественны и легко исключаются простой фиксацией единичного интервала.

Исключение изменения масштабов путем фиксации единичного интервала приводит к известным выводам о лоренцевом сокращении и об изменении промежутков времени. Если единичный интервал фиксирован, так что изменение масштабов исключено, и системы K и K' движутся относительно друг друга вдоль оси x, то координаты в них связаны частным преобразованием Лоренца. Поэтому вывод лоренцева сокращения и изменения

[6)] При неизменном интервале должно быть $\lambda^2 = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$. Но умножение времени t на -1, т. е. перемена знака t, исключено, так как в формуле закона распространения света $r = c(t - t_0)$ слева стоит расстояние $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + \ldots}$, которое положительно.

промежутков времени получается здесь обычным путем. Никакие дополнительные соображения и принцип относительности здесь совершенно не нужны [7)].

5. К сказанному можно еще добавить, что из общих преобразований Лоренца следует известным путем релятивистский закон сложения скоростей. Пропорциональные изменения масштабов здесь вообще не играют роли, так как скорость определяется отношением $\Delta x/\Delta t$ [8)].

Таким образом, мы убеждаемся, что *как преобразования Лоренца, так и вся релятивистская кинематика (лоренцево сокращение, закон сложения скоростей и др.) могут быть выведены из инвариантности закона постоянства скорости света в форме (1) или из инвариантности того же закона в форме (3): $r = c(t - t_0)$ и евклидовости пространства без привлечения принципа относительности и каких бы то ни было дополнительных соображений.*

Постоянство скорости света выражает в наиболее простой форме ту взаимную связь пространства и времени, раскрытие которой составляет ядро теории относительности [9)].

[7)] Известный вывод преобразований Лоренца, данный в [2, с. 23; 5], содержит фактически дополнительное предположение. Эйнштейн получает формулы преобразования

$$x' = -\varphi(v)\frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad y' = \varphi(v)y, \qquad z' = \varphi(v)z, \qquad t' = \varphi(v)\frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

и доказывает посредством «соображений симметрии», что $\varphi(v) = 1$. Но здесь используются не только «соображения симметрии». В действительности, предполагается, что множитель φ зависит только от скорости. А между тем и в неподвижных относительно друг друга системах можно выбирать разные единицы, так что будет $\varphi \neq 1$. Таким образом, уже здесь делается предположение о том, что в системах K и K' фиксированы физически одинаковые единицы. В нашем же выводе все лишние соображения устраняются, а не сформулированное явно и точно предположение о выборе физически одинаковых единиц заменяется точным указанием на фиксацию единичного интервала.

[8)] Обратимся к формулам, данным в подстрочном примечании [2)]. Пусть точка M в системе K движется со скоростью $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{u}$. Дифференцируя $\mathbf{r}'$ по t', подставляя $d\mathbf{r} = \mathbf{u}dt$ и деля $d\mathbf{r}'$ на dt' (так что множитель λ сократится), получим релятивистский закон сложения скоростей в общем виде:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} + \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\right)\dfrac{(\mathbf{uv})\mathbf{v}}{v^2} - \mathbf{v}}{1 - \dfrac{(\mathbf{uv})}{c^2}},$$

а если $\mathbf{u}$ параллельно $\mathbf{v}$, так что $(\mathbf{uv})\mathbf{v}/v^2 = \mathbf{u}$, то $u' = (u - v)/(1 - uv/c^2)$.

[9)] Это замечание развито в общей форме в статье А. Д. Александрова [6]. Высказанные там общие соображения по поводу структуры теории относительности получают здесь, как нам кажется, достаточно точное обоснование.

6. Мы исходили (см. формулу (1)) из требования неизменности формулы закона распространения света в виде

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=c(t-t_0).$$

Так как слева здесь стоит расстояние, которое всегда ≥ 0, то изменение знака времени невозможно. Иными словами, общие преобразования Лоренца, сохраняющие формулу (1), не допускают перестановки прошедшего и будущего. Физически это можно понять, если вспомнить, что свет распространяется от источника, обратный же процесс схождения шаровой волны из бесконечности в природе не встречается.

Однако вместо формулы (1) всегда пишут

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2(t-t_0)^2=0. \tag{9}$$

Само собой ясно, что произведенное здесь возведение в квадрат влечет возможность изменения знака времени. То же получается при выводе преобразований Лоренца из требования неизменности закона распространения света в его дифференциальной форме, например из требования неизменности волнового уравнения, как это было сделано Н. А. Умовым [7]. Это физически понятно, потому что, так сказать, дифференциальные электромагнитные процессы протекают в обе стороны.

В дополнение к нашему выводу общих преобразований Лоренца из требования неизменности формулы (1) мы докажем попутно, что они выводятся также и из требования неизменности формулы (9), причем, конечно, появляется еще возможность изменения знака времени.

В четырехмерной геометрической интерпретации, о которой говорилось в п. 1, уравнения (1) определяют не полные конусы, а только их половины, обращенные отверстием в сторону положительных значений координаты t. Уравнения же (9) определяют полные конусы. Соответственно речь идет о следующей геометрической теореме.

Взаимно однозначное преобразование, переводящее каждый полный конус (9) в такой же конус, есть общее преобразование Лоренца с возможным добавлением изменения знака координаты t.

Наконец, вместо закона постоянства скорости света можно принять за основу закон ограниченности скоростей: *всякое воздействие распространяется не быстрее света, т. е. не быстрее, чем с некоторой скоростью c.* Этот закон можно выразить в соответствующих координатах неравенством

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\leq c(t-t_0). \tag{10}$$

Мы докажем теорему, что *преобразование, не нарушающее этого неравенства, есть также общее преобразование Лоренца.*

Геометрически неравенство (10) определяет в четырехмерном пространстве телесный конус. Соответственно теорема утверждает, что *взаимно однозначное преобразование, переводящее каждый телесный конус (10) в такой же конус, есть общее преобразование Лоренца.*

Таким образом, закон ограниченности скоростей вполне может быть положен в основу теории относительности вместо закона постоянства скорости света [8]. Тогда неизменность предельной скорости c получится как следствие, потому что формула (1) инвариантна относительно общих преобразований Лоренца. То, что c есть скорость света, отсюда, конечно, не следует, но это касается уже не кинематики теории относительности, а электродинамики.

§ 2. *Доказательство линейности преобразований, сохраняющих формулу закона распространения света*

1. Мы докажем здесь, что преобразования координат, сохраняющие формулу закона распространения света или закона ограниченности скоростей, линейны. Согласно указанной в § 1 геометрической интерпретации, мы рассматриваем четырехмерное евклидово пространство, где введены прямоугольные координаты x, y, z, t. Преобразование от x, y, z, t к x', y', z', t' понимается как преобразование пространства, сопоставляющее каждой точке (x, y, z, t) точку (x', y', z', t').

Вопрос приводится к доказательству трех теорем, в формулировках которых предполагается, что речь идет о взаимно однозначных преобразованиях четырехмерного пространства.

Теорема 1. *Преобразование, переводящее каждый конус*

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=c(t-t_0) \tag{1}$$

в такой же конус, линейно[10]*.*

Теорема 2. *Преобразование, переводящее каждый полный конус*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=c^2(t-t_0)^2 \tag{2}$$

в такой же конус, линейно.

Теорема 3. *Преобразование, переводящее телесные конусы*

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\le c(t-t_0) \tag{3}$$

в такие же конусы, линейно.

---

[10] Когда мы говорим, что преобразование переводит конус K в конус K', подразумевается, что конус K переходит в целый конус K', а не в его часть, т. е. не только каждой точке конуса K сопоставляется точка конуса K', но и обратно, каждая точка конуса K' сопоставлена какой-либо точке конуса K.

Аналитическое представление рассматриваемых конусов и преобразований не будет, однако, играть в наших выводах никакой роли. Существенно только то, что речь идет о конусах одинакового раствора и с одинаково направленными осями.

Известно, что всякое взаимно однозначное преобразование, переводящее прямые в прямые, линейно [9, гл. II, § 27, 33]. Поэтому достаточно доказать чисто геометрическое утверждение, что каждое из рассматриваемых преобразований переводит прямые в прямые. Доказательство этого и составляет содержание данного параграфа.

Наши рассуждения будут иметь чисто геометрический характер. Хотя они относятся к четырехмерному пространству, для наглядности можно представлять себе трехмерное пространство, так как существенные моменты в доказательстве оказываются совершенно такими же, если рассматривать обычные конусы в трехмерном пространстве. Вообще теоремы 1–3 и их доказательства дословно переносятся на случай любого числа измерений $n > 2$ [11)].

Мы обратимся прежде всего к доказательству теоремы 1; потом будет показано, что доказательство теорем 2 и 3 может быть сведено к повторению рассуждений, доказывающих теорему 1.

2. В пунктах 2–4, говоря о конусах, мы всегда подразумеваем конусы (1).

Лемма 1. *Никакие три конуса K_1, K_2, K_3 не могут пересекаться так, чтобы K_1 и K_2 имели ту же общую часть, что K_1 и K_3.* (Имеется в виду, что конусы действительно пересекаются, а не касаются вдоль образующих.)

Доказательство. Пусть конусы K_1 и K_2 пересекаются. Проведем трехмерную плоскость P через вершину одного из них перпендикулярно его оси и будем двигать ее параллельно в направлении оси. Когда плоскость пересечет оба конуса K_1 и K_2, она будет пересекать их по двум сферам S_1 и S_2, которые лежат вне друг друга, так как иначе один конус лежал бы в другом и конусы не пересекались бы. (Это следует из того, что конусы имеют одинаковый раствор и параллельные оси.)

При движении плоскости эти сферы расширяются и в определенный момент коснутся друг друга в некоторой точке A. На рис. 1 дана соответствующая картина для трехмерного случая, когда сферы S_1 и S_2 заменяются окружностями. Очевидно, что из всех точек пересечения конусов K_1 и K_2 точка A является самой «нижней» (если оси конусов считать направленными вверх).

[11)] В двумерном случае теоремы, аналогичные теоремам 1–3, не имеют места. Например, в теореме 1 в этом случае речь шла бы о преобразованиях, переводящих друг в друга пары полупрямых $|x - x_0| = c(t - t_0)$. Такое преобразование вовсе не обязано быть линейным, так как, очевидно, может включать любые неравномерные растяжения и сжатия, сохраняющие направления этих полупрямых.

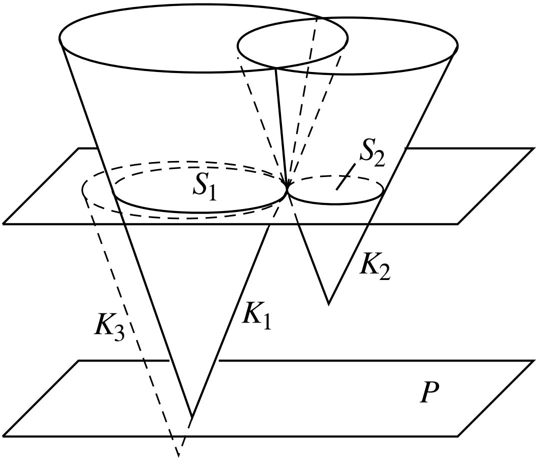


Рис. 1

Рассмотрим теперь другой конус K_3. Если он пересекает конус K_1 так же, как конус K_2, то точка A должна быть самой нижней точкой пересечения конусов K_1 и K_3. Поэтому сфера S_3, по которой плоскость P пересекает конус K_3, также касается сферы S_1 в точке A.

Если, в частности, сферы S_1 и S_2 лежат по одну сторону от касательной плоскости в точке A, то конусы K_1 и K_3 касаются вдоль образующей, идущей через точку A. Если же сферы S_1 и S_2 лежат по разные стороны, то касаются друг друга конусы K_1 и K_2. Так или иначе конус K_3 касается одного из конусов K_1 или K_2, т. е. не пересекает его. Стало быть, никакой конус K_3 не может пересекать конус K_1 так же, как конус K_2, и лемма доказана.

Лемма 2. *Преобразование, переводящее конусы (1) в такие же конусы, переводит их образующие в образующие, а вершины в вершины.*

Доказательство. Возьмем какой-либо из рассматриваемых конусов K и его образующую L. Продолжим эту образующую за вершину конуса и возьмем на ее продолжении две точки A_1, A_2 так, что A_2 лежит дальше от вершины конуса K. Возьмем конусы K_1, K_2 с вершинами в точках A_1, A_2 (рис. 2). Так как конусы K, K_1, K_2 имеют одинаковые растворы и направления осей, то они касаются друг друга, и общей частью как конусов K, K_1, так и конусов K, K_2 будет как раз образующая L.

После преобразования конусы перейдут в такие же конусы K', K_1', K_2', и вследствие взаимной однозначности преобразования общая часть как конусов K, K_1, так и конусов K, K_2, т. е. образующая L, переходит в общую часть L'. Следовательно, общая часть конусов K', K_1' совпадает с общей частью K', K_2'.

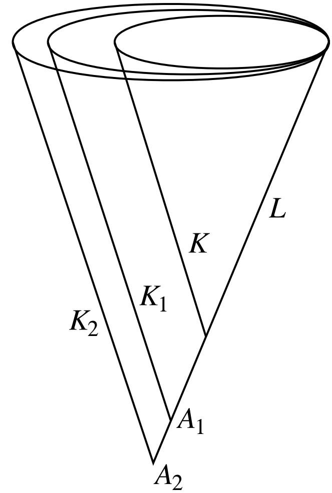


Рис. 2

Для конусов K', K_1' есть три априорные возможности расположения: 1) вершина одного лежит на другом, и тогда их общая часть есть образующая одного из них; 2) вершина одного лежит внутри другого, и тогда конусы не имеют общих точек; 3) вершина каждого из конусов лежит вне другого, и тогда конусы пересекаются.

Для конусов K', K_1' вторая возможность исключена, так как они имеют общую часть L'.

Третья возможность также исключается, так как по лемме 1 никакие три конуса K', K_1', K_2' не могут пересекаться так, чтобы K' и K_1' имели ту же общую часть, что K' и K_2'.

Таким образом, остается только первая возможность, и тогда общая часть L' конусов K', K_2' есть образующая одного из них и соответственно бесконечная часть образующей другого. Следовательно, L' является если не целой образующей конуса K', то, по крайней мере, полупрямой, составляющей часть образующей конуса K'. Этим доказано, что любая образующая L конуса K переходит либо в целую образующую, либо в полупрямую, составляющую часть образующей конуса K'.

Однако любые две образующие L и M конуса K имеют общую точку — вершину конуса. Поэтому после преобразования они переходят в полупрямые L' и M', которые также должны иметь общую точку. Это возможно только в том случае, если обе линии L' и M' являются целыми образующими конуса K', а не их частями.

Итак, образующая переходит в целую образующую; вершина, как единственная общая точка образующих, переходит в вершину. Лемма доказана.

Лемма 3. *Любая прямая, имеющая направление какой-нибудь образующей рассматриваемых конусов, переходит при рассматриваемом преобразовании в такого же рода прямую.*

Доказательство. Если прямая M имеет направление образующей, то любая ее полупрямая L, идущая в ту же сторону, как и образующая, является сама образующей одного из конусов. Поэтому, как следует из леммы 2, при преобразовании она переходит в одну из образующих L'.

Проведем прямую M' вдоль L'. Так как полупрямую L можно провести из любой точки прямой M, то ясно, что после преобразования все точки прямой M попадают на прямую M'. Иными словами, вся прямая M переходит в прямую M', имеющую направление образующей, или в часть прямой M'.

Остается доказать, что прямая M переходит именно в целую прямую M'.

Для доказательства возьмем на прямой M' любую точку A', и пусть A — та точка, которая переходит при данном преобразовании в точку A'. Возьмем конус K с вершиной в точке A; при преобразовании он перейдет в конус K' с вершиной в точке A' (так как по лемме 2 вершина переходит в вершину).

Так как вершина конуса K' лежит на прямой M', то он имеет образующую N', идущую вдоль M'. Пусть N — образующая конуса K, переходящая в указанную образующую N'. (Такая образующая существует, потому что по условию конус K переходит в целый конус K' и по лемме 2 образующие переходят в образующие.)

Образующая N', несомненно, содержит хотя бы часть полупрямой L', вдоль которой проведена прямая M'. Но L' соответствует образующей L, лежащей на прямой M, и потому вследствие взаимной однозначности преобразования образующая N должна содержать соответствующую часть L. Это значит, что образующая N, а вместе с ней и точка A, лежит на прямой M. Этим доказано, что любая точка A' прямой M' отвечает некоторой точке A прямой M.

Таким образом, прямая M переходит в целую прямую M', что и требовалось доказать.

3. Все двумерные плоскости по отношению к конусам разбиваются на три класса. Пусть P — произвольная плоскость пространства и K — какой-либо конус с вершиной на плоскости P. Будем называть P плоскостью первого рода, если она пересекает конус K по двум образующим, второго рода, если не пересекает конус K, и третьего рода, если соприкасается с конусом K. Очевидно, что это деление не зависит от выбора конуса K с вершиной в плоскости P.

Лемма 4. *Двумерные плоскости первого рода при преобразовании переходят снова в двумерные плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве произвольную двумерную плоскость P первого рода и конусы, вершины которых лежат на ней. Эта плоскость пересечет все конусы по пересекающимся образующим. Вся плоскость будет покрыта сетью прямых, имеющих направление образующих, причем все они разбиваются на два семейства. Все прямые одного семейства параллельны, а через каждую точку плоскости проходят две прямые из разных семейств. Эти прямые, имеющие направление образующих наших конусов, мы назовем просто прямыми, так как о других прямых у нас не будет речи.

В результате преобразования конусы перейдут в конусы, указанные прямые перейдут, согласно лемме 3, в такие же прямые, так что плоскость P перейдет в какое-то множество, покрытое двумя семействами прямолинейных образующих.

Рассмотрим две произвольные прямые на плоскости P из одного семейства. При преобразовании возможны только два случая: либо прямые остались параллельными, и тогда плоскость, очевидно, перешла в целую плоскость, как того требует лемма, либо они перешли в пару скрещивающихся прямых.

Пусть две прямые из одного семейства перешли в пару скрещивающихся прямых. Последние определяются четырьмя точками. Но четыре точки, не лежащие в одной двумерной плоскости, определяют в четырехмерном пространстве некоторую трехмерную плоскость, которая есть не что иное, как обычное трехмерное евклидово пространство. А так как любая прямая другого семейства должна пересекать обе эти прямые, то она также лежит в этом трехмерном пространстве, и образ P можно рассматривать в простом трехмерном пространстве.

Возьмем три прямые L_1, L_2, L_3 одного семейства. Если хотя бы две из них перешли в параллельные прямые, то лемма справедлива. Покажем, что перейти в попарно скрещивающиеся прямые они не могли. Пусть образы L'_1, L'_2, L'_3 этих прямых попарно скрещиваются. Тогда возможны два случая: прямые L'_1, L'_2, L'_3 либо лежат в параллельных плоскостях, либо не лежат.

Первый случай невозможен по следующим соображениям. Прямые L'_1, L'_2, L'_3, согласно лемме 3, идут вдоль образующих конусов. Параллельные друг другу плоскости Q_1, Q_2, Q_3, в которых лежат эти прямые, проходя через вершины параллельных конусов равного раствора, пересекают эти конусы по двум семействам прямых, так что прямые каждого семейства параллельны друг другу. Поэтому хотя бы две из прямых L'_1, L'_2, L'_3 должны быть в этом случае параллельны, что противоречит их скрещиванию.

В невозможности второго случая можно убедиться следующим образом. Проведем через L'_1 и L'_2 параллельные друг другу плоскости Q_1 и Q_2. Прямая L'_3, не будучи параллельна этим плоскостям, пересечет Q_1 в некоторой точке A'. Пусть A — перешедшая в A' точка плоскости P. Через точку A в плоскости P проходит прямая M второго семейства, пересекающая все прямые L_1, L_2, L_3. Образ M' прямой M является прямой, проходящей через A' и некоторую точку прямой L'_1. Поэтому M' целиком лежит в Q_1, но тогда M' не может пересечь прямую L'_2, которая лежит в Q_2. Это противоречит наличию пересечения M с L_2.

Лемма 4 доказана.

4. Лемма 5. *Любая прямая преобразуется в прямую.*

Доказательство. Возьмем произвольную прямую L и на ней точку. Пусть эта точка будет вершиной конуса K. Проведем через прямую L две плоскости так, чтобы каждая из них пересекала конус K по двум образующим. (Достаточно провести одну плоскость через прямую L и ось конуса K, а другую — через прямую L под малым углом к оси конуса K.)

В результате преобразования построенные плоскости перейдут в плоскости, так как это плоскости первого рода, а прямая L — в прямую как их пересечение.

Следовательно, преобразование, переводящее наши конусы в такие же конусы, переводит любую прямую в прямую.

Как уже было сказано, взаимно однозначные преобразования, переводящие прямые в прямые, являются линейными. Следовательно, преобразование, которое мы рассматриваем, линейно и теорема 1 доказана.

5. Теорема 2 доказывается совершенно так же. Разница состоит в том, что неполные конусы (1) заменяются полными конусами (2) и образующие их являются уже целыми прямыми, а не полупрямыми. Леммы 1 и 2 для этого случая формулируются дословно так же. Однако в их доказательствах появляются некоторые изменения.

Два полных конуса (2) всегда пересекаются, если только они не касаются по образующей. Для их пересечения возможны два случая: первый, когда вершина каждого из двух конусов лежит вне другого (этот случай соответствует тому, когда пересекаются неполные конусы), и второй, когда вершина одного конуса лежит внутри другого (этот случай соответствует тому, когда неполные конусы не пересекаются). Оба эти случая должны быть учтены в лемме 1. Воспроизводить доказательство леммы 1 для полных конусов мы не считаем нужным; оно может быть проведено аналогично доказательству для случая неполных конусов.

Доказательство леммы 2 теперь крайне просто. Мы берем три конуса, касающихся вдоль образующей. Теперь, когда речь идет о полных конусах, эта образующая есть общая часть любых двух из них. После преобразования это свойство должно сохраниться, а по лемме 1 это невозможно, если конусы стали пересекаться. Следовательно, они остались касающимися, так что их общая образующая перешла в образующую.

Этим доказано, что образующие переходят в образующие, и так как теперь образующая — это целая прямая, то лемма 3 оказывается лишней: она заключается в лемме 2. После этого остается дословно повторить выводы п. 3 и 4 (леммы 4 и 5), и теорема 2 доказана.

6. Теорема 3 может быть сведена к теореме 1 благодаря следующей лемме.

Лемма 6. *Преобразование, переводящее телесные конусы (3) в такие же конусы, переводит их поверхности в поверхности.*

Поверхность телесного конуса (3) есть не что иное, как конус (1), так что преобразование, переводящее телесные конусы (3) в такие же конусы, переводит конусы (1) в такие же конусы.

Таким образом, задача сводится к доказательству леммы 6.

Докажем сначала, что *при преобразовании, переводящем телесные конусы (3) в такие же конусы, вершина конуса переходит в вершину.*

Пусть K_0 — телесный конус (3) и A — его точка, отличная от вершины.

Телесный конус K_1 с вершиной A содержится в K_0. После преобразования конусы K_0 и K_1 перейдут в конусы K_0' и K_1', причем K_1' будет содержаться в K_0'. Поэтому никакая точка конуса K_1' и, в частности, точка A', получающаяся из точки A, не может быть вершиной конуса K_0'. Этим доказано, что любая точка A конуса, не являющаяся его вершиной, не переходит при преобразовании в вершину. Но в таком случае в вершину конуса K_0' может перейти только вершина конуса K_0. А так как конус K_0 переходит в целый конус K_0', то тем самым его вершина неизбежно переходит в вершину конуса K_0'.

Докажем теперь, что любая точка, лежащая на поверхности конуса K_0 и отличная от вершины, переходит в точку на поверхности конуса K_0'.

Пусть точка A лежит на поверхности конуса K_0 и отлична от его вершины. Рассмотрим все конусы (3), содержащие точку A и содержащиеся в K_0, и назовем их конусами K. Очевидно, они все касаются поверхности конуса K_0 вдоль образующей, идущей через точку A, и последовательно вложены один в другой; т. е. если K_1 и K_2 — любые два из этих конусов, то либо K_1 содержится в K_2, либо K_2 содержится в K_1. После преобразования это свойство сохраняется, так что конусы K переходят в конусы K', так же последовательно вложенные друг в друга.

Допустим, что после преобразования точка A перешла во внутреннюю точку A' конуса K_0'. Тогда, как очевидно, существуют конусы, содержащиеся в K_0', содержащие точку A', но не содержащиеся один в другом. Поэтому по крайней мере один из них не будет конусом K'. Иными словами, если точка A' лежит внутри конуса K_0', то существует содержащий ее конус Q', содержащийся в K_0' и не являющийся конусом K'.

Пусть B' — вершина конуса Q' и B — точка, переходящая в B' при данном преобразовании. Если Q — конус с вершиной B, то он как раз переходит в конус Q', поскольку вершина переходит в вершину.

Вместе с тем, так как конус Q' содержит точку A', то конус Q содержит точку A, т. е. является одним из конусов K. А тогда конус Q' есть один из конусов K', что противоречит, однако, его выбору.

Полученное противоречие показывает, что точка A не может переходить во внутреннюю точку конуса K_0', т. е. каждая точка поверхности конуса K_0 остается при преобразовании на поверхности.

Остается теперь доказать, что поверхность конуса K_0 переходит во всю поверхность конуса K_0'. Так как конус K_0 переходит в целый конус K_0', то это равносильно тому, что никакая точка изнутри конуса K_0 не может перейти на поверхность.

Но если точка A лежит внутри конуса K_0, то можно указать содержащие ее конусы Q_1 и Q_2, содержащиеся в K_0, но не содержащиеся один в другом. После преобразования эти конусы перейдут в конусы Q_1' и Q_2' с тем же свойством. Если бы точка A попала после преобразования на границу конуса K'_0, то из любых двух содержащих ее конусов, лежащих в K'_0, один содержался бы в другом. Стало быть, точка A не может попасть на поверхность конуса K'_0.

Таким образом, доказано, что точки поверхности конуса K_0 (и только они) переходят в точки поверхности конуса K'_0, т. е. вся поверхность конуса K_0 переходит во всю поверхность конуса K'_0. Лемма 6 доказана, и вместе с этим теорема 3 сведена́ к теореме 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weyl H.* Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin: Springer, 1923.
2. *Паули В.* Теория относительности. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
3. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: ГИТТЛ, 1953.
4. Курс физики / Под ред. Н. Д. Папалекси. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. Т. 2: Электричество. Оптика. Физика атомного ядра.
5. *Эйнштейн А.* О специальной и общей теории относительности / Пер. 5-го нем. изд. С. И. Вавилова. Петроград: Научное книгоиздательство, 1923. (Обл. загл.: Эйнштейн А. Принцип относительности.)
6. *Александров А. Д.* О сущности теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1953. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 103–128.
7. *Умов Н. А.* Условия инвариантности волнового уравнения // Журн. Русского физ.-хим. о-ва, часть физ. 1912. Т. 44, № 6. С. 349–354.
8. *Фок В. А.* Против идеализма и путаницы в понимании квантовой механики // Вестн. ЛГУ. 1949. № 4. С. 48–68.
9. *Делоне Б. Н., Райков Д. А.* Аналитическая геометрия. М.: Гостехиздат, 1949. Т. 1.

О заполнении пространства многогранниками

Вестн. ЛГУ. 1954. № 2. Сер. математики, физики и химии. Вып. 1. С. 33–43

В работе «Об одном классе евклидовых многогранников» [1] Б. А. Венков [1)] исследовал заполнение n-мерного евклидова пространства равными и параллельно расположенными выпуклыми многогранниками, прикладываемыми друг к другу по целым граням, и нашел необходимые и достаточные условия того, чтобы такое заполнение было возможно без взаимных налеганий многогранников, т. е. чтобы многогранники были параллелоэдрами. В настоящей статье мы обобщаем результат Б. А. Венкова и даем более простой его вывод: он оказывается следствием той известной теоремы топологии, что односвязное пространство (или полиэдр) не имеет накрывающего, кроме самого себя [2]. В своем изложении мы даем необходимые определения, так что для понимания дальнейшего ссылки на работу Б. А. Венкова не будут нужны.

§ 1. *Постановка вопроса*

Мы будем рассматривать заполнение многогранниками n-мерного, односвязного, полного пространства R^n постоянной кривизны, т. е. либо евклидова пространства, либо пространства Лобачевского.

Говоря наглядно, речь идет о следующем построении. Пусть дано конечное число n-мерных многогранников P_i. Берем в R^n многогранник, равный одному из P_i, к нему по всем его целым $(n-1)$-мерным граням прикладываем многогранники, равные каким-то из многогранников P_i, и т. д. На каждом шаге можно некоторые из $(n-1)$-мерных граней просто отождествлять друг с другом, вместо того чтобы прикладывать к ним новые многогранники, если только эти грани целиком налегали друг на друга и принадлежали многогранникам, лежавшим вблизи этих граней по разные стороны от их плоскости.

[1)] С работой Б. А. Венкова я имел возможность ознакомиться в рукописи.

Не исключается, что многогранники при таком построении пересекаются[2)]. Дадим следующее строгое определение.

Пусть дан комплекс K^n, образованный n-мерными многогранниками. Предполагается, что каждому многограннику принадлежат все его грани. Комплекс рассматривается абстрактно, т. е. хотя каждый его многогранник есть многогранник из данного пространства R^n (евклидова, сферического или пространства Лобачевского), тем не менее комплекс K^n не считается погруженным в R^n, а образует сам по себе соответствующий полиэдр $\widetilde{K}^n$.

Предполагается, что комплекс K^n обладает следующими свойствами.

1) Среди многогранников комплекса K^n есть только конечное число существенно различных, т. е. геометрически не равных друг другу.

2) Каждая $(n-1)$-мерная грань любого многогранника $P \in K^n$ является вместе с тем гранью одного и только одного другого многогранника $P' \in K^n$.

3) (Условие «сильной связности»). Если P и P' — любые два многогранника из K^n, то существует соединяющая их цепь. Здесь мы называем *цепью* конечную последовательность многогранников, в которой каждые два соседних смежны по $(n-1)$-мерной грани и говорим, что цепь соединяет многогранники P, P', если они суть ее первый и последний многогранники.

4) Если Q^k есть k-мерная $(0 \leq k \leq n-2)$ грань многогранника P из R^n, то она считается принадлежащей вместе с тем многограннику P' тогда и только тогда, когда существует соединяющая P и P' цепь, в которой каждые два соседних многогранника смежны по $(n-1)$-мерной грани, содержащей Q^k.

Заметим, что комплекс может быть бесконечным и даже локально бесконечным, т. е. отдельные его грани Q^k $(0 \leq k \leq n-2)$ могут принадлежать бесконечному числу многогранников комплекса.

Кроме комплекса K^n, предполагаем заданным непрерывное отображение соответствующего полиэдра $\widetilde{K}^n$ в данное R^n, удовлетворяющее условиям:

1) для каждого многогранника это отображение является конгруэнтным (изометричным);

2) если многогранники P и P' смежны по грани Q^{n-1}, то их образы $\overline{P}$, $\overline{P}'$ лежат в окрестности образа $\overline{Q}^{n-1}$ грани Q^{n-1} по разные стороны от него. (Если многогранники выпуклы, то они вообще лежат по разные стороны от плоскости грани $\overline{Q}^{n-1}$, но если они не выпуклы, то это требуется лишь в окрестности $\overline{Q}^{n-1}$.) Таким образом, многогранники погружаются в R^n.

[2)] Обобщение в сравнении с постановкой вопроса Б. А. Венковым состоит в том, что мы не ограничиваемся только равными и параллельно располагаемыми выпуклыми многогранниками в евклидовом пространстве. Наше построение можно осуществить, исходя, например, из любого многогранника P следующим образом: помещаем в R^n многогранник P_0, равный P; отражая его в плоскости какой-нибудь грани, получим многогранник P_1 и т. д. В результате получаем совокупность равных многогранников, смежных по целым $(n-1)$-мерным граням, но допускающих, может быть, пересечения.

Мы докажем две основные теоремы.

Теорема 1. *Образ полиэдра $\widetilde{K}^n$ в R^n есть все R^n, или, иными словами, описанный выше процесс прикладывания многогранников по целым граням приводит к заполнению всего пространства, причем для любой ограниченной части пространства найдется конечное число многогранников комплекса K^n, образы которых уже покрывают эту часть пространства.*

Более глубокий вопрос состоит в отыскании условий, при которых это заполнение будет осуществляться без взаимных пересечений многогранников, т. е. отображение полиэдра $\widetilde{K}^n$ в R^n будет взаимно однозначным. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы указанное отображение полиэдра $\widetilde{K}^n$ в R^n было взаимно однозначным, необходимо и достаточно, чтобы оно было взаимно однозначным вокруг каждой $(n-2)$-мерной грани комплекса K^n, т. е. чтобы сходящиеся в такой грани многогранники при отображении не перекрывались в сколь угодно малой ее окрестности. Иными словами, для того чтобы заполнение пространства многогранниками осуществлялось в целом без перекрытий, достаточно чтобы оно осуществлялось без перекрытий «локально» вокруг каждой $(n-2)$-мерной грани.* Необходимость условия тривиальна, и речь должна идти о доказательстве его достаточности.

Значение этой теоремы состоит в том, что она сводит вопрос о возможности однозначного заполнения всего пространства в целом к вопросу о возможности его локального однозначного заполнения вокруг $(n-2)$-мерных граней. В частности, она легко приводит к простой геометрической характеристике параллелоэдров, установленной Б. А. Венковым [3)].

[3)] Известно, что каждый n-мерный параллелоэдр (как нормальный, так и ненормальный) обладает следующими свойствами: 1) он имеет центр симметрии; 2) каждая его $(n-1)$-мерная грань имеет центр симметрии; 3) для каждой $(n-2)$-мерной грани параллельные ей $(n-1)$-мерные грани образуют замкнутую шести- или четырехгранную зону. Теорема Б. А. Венкова утверждает, что эти условия также достаточны для того, чтобы выпуклый многогранник был нормальным параллелоэдром, т. е. допускал однозначное заполнение пространства путем параллельного прикладывания по целым граням. (Ненормальным параллелоэдром называется выпуклый многогранник, допускающий аналогичное заполнение пространства без соблюдения условия прилегания по целым граням.) Доказательство очевидно из теоремы 2. В самом деле, из условий 1–3 ясно, что $(n-1)$-мерные грани зоны, отвечающей какой-либо $(n-2)$-мерной грани Q^{n-2}, ограничивают при бесконечном продолжении вдоль Q^{n-2} либо шести-, либо четырехгранную призму с центром симметрии. Эти призмы при параллельном прикладывании, очевидно, однозначно заполняют окрестность грани Q^{n-2}. Таким образом, условие теоремы 2 выполнено, и многогранник со свойствами 1–3 однозначно заполняет пространство при параллельном прикладывании по целым граням, т. е. является нормальным параллелоэдром. Вместе с тем (так как условиям 1–3 удовлетворяют и ненормальные параллелоэдры) из доказанного следует другая теорема Б. А. Венкова: *Каждый ненормальный параллелоэдр является также нормальным.*

Из этой теоремы вытекает, например, что для того чтобы правильным многогранником можно было однозначно заполнить пространство R^n, прикладывая его по целым граням, необходимо и достаточно, чтобы его двугранные углы, т. е. углы между $(n-1)$-мерными гранями, смежными по $(n-2)$-мерным граням, составляли целую часть 2π. Это, в частности, приложимо к правильному делению n-мерной сферы. Точно так же, очевидно, получается условие однозначного заполнения пространства многогранниками, получаемыми из данного многогранника P последовательными отражениями в $(n-1)$-мерных гранях. Это условие состоит в том, что каждый двугранный угол многогранника P должен составлять целую часть 2π, и если такой угол при грани Q^{n-2} есть нечетная часть 2π, то P должен иметь плоскость симметрии, проходящую через грань Q^{n-2}.

Заметим еще, что, как можно видеть из последующего изложения, условия прилегания многогранников по целым граням и наличия только конечного числа неравных среди них не являются совершенно необходимыми и могут быть ослаблены. Можно, во-первых, сами куски граней, по которым смежны многогранники, считать гранями, а, во-вторых, вместо условия конечности числа неравных многогранников достаточно требовать, чтобы существовало такое число $a > 0$, что у каждого многогранника каждые две несмежные грани любых измерений удалены не менее чем на a. Мы, однако, не будем вдаваться в обоснование возможности подобных обобщений — она представляется достаточно очевидной.

§ 2. *Построение специальных окрестностей в полиэдре* $\widetilde{K}^n$

Доказательство теорем 1 и 2 будем вести индукцией по числу измерений пространства. Индукция осуществляется на основе следующего замечания.

Возьмем на какой-либо грани Q^k $(k \neq 0)$ комплекса K^n внутреннюю по отношению к ней точку A. Если многогранник $P \in K^n$ содержит точку A, то строим в нем шаровой сектор V с центром в A, не пересекающий никаких граней кроме самой Q^k и тех граней размерности, бóльшей k, которые прилегают ко всей грани Q^k. Так как среди многогранников P только конечное число неравных, то можно указать такое $r > 0$, что в каждом многограннике P, содержащем точку A, содержится такого рода сектор V радиуса r. Все эти секторы образуют в сумме окрестность точки A, которую назовем шаровой окрестностью $Ш(A, r)$ точки A в полиэдре $\widetilde{K}^n$. (В дальнейшем термин шаровая окрестность употребляется только в смысле этого определения.)

Поверхность шаровой окрестности $Ш(A, r)$ состоит из $(n-1)$-мерных сферических многогранников, вырезаемых на сфере секторами V. Эти многогранники образуют некоторый комплекс K^{n-1}. Из условий 1–4, которые были наложены на комплекс K^n в § 1, непосредственно следует, что комплекс K^{n-1} удовлетворяет тем же условиям (конечно, с заменой n на $n-1$). В частности, условие 3 сильной связности комплекса вытекает из того, что по условию 4 грань Q^k, а стало быть и точка A, является общей для многогранников P и P' тогда и только тогда, когда существует цепь, соединяющая P и P', в которой каждые два соседних многогранника смежны по $(n-1)$-мерной грани, содержащей грань Q^k.

Полиэдр $\widetilde{K}^{n-1}$, образуемый многогранниками комплекса K^{n-1}, есть не что иное, как поверхность окрестности $Ш(A, r)$.

Далее, непрерывное отображение полиэдра $\widetilde{K}^n$ в R^n, естественно, определяет непрерывное отображение полиэдра $\widetilde{K}^{n-1}$, и так как отображение полиэдра $\widetilde{K}^n$ конгруэнтно на каждом многограннике, то полиэдр $\widetilde{K}^{n-1}$ отображается в $(n-1)$-мерную сферу радиуса r вокруг точки $\overline{A}$, являющейся образом точки A; это отображение, очевидно, удовлетворяет тем двум условиям, которые сформулированы в § 1.

Таким образом, для комплекса K^{n-1} выполнены все условия, поставленные в § 1 для комплекса K^n. А так как число измерений комплекса K^{n-1} есть $n-1$, то это дает основание для проведения индукции.

Заметим еще, что если точка A лежит внутри какого-либо многогранника P комплекса K^n, то она тем самым имеет шаровую окрестность, лежащую в P. Если же точка A лежит на $(n-1)$-мерной грани, по которой смежны многогранники P и P', то она имеет шаровую окрестность, состоящую из двух полушарий, так что в этом случае комплекс K^{n-1} состоит просто из двух полусфер. Полученный результат можно коротко выразить в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Каждая точка A полиэдра $\widetilde{K}^n$ имеет в нем шаровую окрестность $Ш(A, r)$. Если точка A лежит на грани, то поверхность $\widetilde{K}^{n-1}$ окрестности $Ш(A, r)$ состоит из $(n-1)$-мерных сферических многогранников, образующих комплекс K^{n-1}, для которого выполнены условия, вполне аналогичные условиям для данного комплекса K^n.*

Докажем еще одну лемму.

Лемма 2. *Для каждого комплекса K^n существует число $a > 0$ со следующим свойством. У любой точки A из $\widetilde{K}^n$ есть a-окрестность (т. е. окрестность радиуса a), содержащаяся в некоторой шаровой окрестности с центром, вообще говоря, в некоторой другой точке B.*

Доказательство. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_m$ — такие многогранники, что каждый многогранник из K^n равен одному из них. В силу конгруэнтных отображений многогранников $P_1, \ldots, P_m$ на многогранники комплекса K^n, каждая точка полиэдра $\widetilde{K}^n$ служит образом одной (или многих) точек многогранников $P_1, \ldots, P_m$; и обратно, каждая из точек многогранников $P_1, \ldots, P_m$ имеет образы в $\widetilde{K}^n$.

Возьмем в одном из многогранников P_i (внутри или на границе) какую-либо точку A и рассмотрим все соответствующие ей точки A' полиэдра $\widetilde{K}^n$. По лемме 1 вокруг каждой точки A' есть шаровая окрестность $Ш(A', r_{A'})$. Мы утверждаем, что существует такое $r_A > 0$, что вокруг всех точек A' есть шаровые окрестности $Ш(A', r_A)$ одного и того же радиуса r_A.

Если точка A лежит внутри многогранника P_i, то утверждение очевидно; за r_A можно взять радиус окрестности точки A в самом многограннике P_i.

Пусть точка A лежит на границе многогранника P_i внутри какой-то его грани Q^k $(0 \leq k \leq n-1)$. Шаровая окрестность любой соответствующей точки A' в полиэдре $\widetilde{K}^n$ состоит из шаровых секторов V, лежащих каждый в одном многограннике комплекса K^n. Но все многогранники комплекса $\widetilde{K}^n$ равны многогранникам $P_1, \ldots, P_m$, а в каждом из многогранников $P_1, \ldots, P_m$ имеется конечное число точек, отвечающих точке A[4)], и для каждой из них есть свой радиус шарового сектора, умещающегося в соответствующем многограннике. Достаточно выбрать из всех этих радиусов наименьший и получится как раз такое r_A, что вокруг каждой точки $A' \in \widetilde{K}^n$, отвечающей точке A, есть шаровая окрестность радиуса r_A.

Опишем теперь вокруг каждой точки A из многогранников $P_1, \ldots, P_m$ окрестность радиуса $r_A/2$. Для внутренней точки это будет шар, для граничной — шаровой сектор. По известной лемме Бореля многогранники покрываются конечным числом таких окрестностей с центрами в каких-то точках $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Пусть a есть наименьший радиус таких окрестностей.

В силу конгруэнтного отображения многогранников $P_1, \ldots, P_m$ на многогранники комплекса K^n, весь полиэдр $\widetilde{K}^n$ будет покрыт образами этих окрестностей.

Если точка A лежит на границе многогранника P_i, то ее окрестность в P_i представляет собой только сектор V радиуса $r_A/2$. Но если A' — соответствующая точка в полиэдре $\widetilde{K}^n$, то прилегающий к ней сектор V' можно дополнить до целой шаровой окрестности, так как вокруг A' есть целая шаровая окрестность радиуса r_A (и тем более радиуса $r_A/2$).

Таким образом, весь полиэдр $\widetilde{K}^n$ покрывается шаровыми окрестностями $Ш(A'_i, r_A/2)$ радиусов $r_A/2$.

Пусть теперь M — любая точка полиэдра $\widetilde{K}^n$ и $Ш(A'_i, r_A/2)$ — содержащая ее шаровая окрестность с центром в какой-то точке A'.

По определению числа r_A вокруг точки A' есть шаровая окрестность

[4)]Точка A лежит внутри грани Q^k. Равные Q^k грани у многогранников $P_1, \ldots, P_m$ имеются лишь в конечном числе, и для каждой из них есть лишь конечное число возможных конгруэнтных отображений на грань Q^k. Точек, соответствующих A при таких отображениях, имеется, стало быть, лишь конечное число.

$Ш(A'_i, r_A)$ радиуса r_A. По определению числа a оно не больше $r_A/2$, так что $r_A \geq 2a$. И так как точка $M \in Ш(A'_i, r_A/2)$, то a-окрестность точки M полностью содержится в шаровой окрестности $Ш(A'_i, r_A)$.

Таким образом, указанное число a обладает требуемым свойством: каждая точка $M \in \widetilde{K}^n$ имеет a-окрестность, содержащуюся в некоторой шаровой окрестности. Лемма доказана.

§ 3. *Доказательство теоремы 1*

Обратимся непосредственно к доказательству теоремы 1 о том, что образ полиэдра $\widetilde{K}^n$ покрывает все пространство R^n и что всякая конечная часть R^n уже покрывается образами конечного числа многогранников из K^n. Доказательство будем вести индукцией по числу измерений n. Начать можно с $n = 1$. В этом случае речь идет попросту о покрытии окружности или прямой прикладываемыми друг к другу отрезками. Очевидно, что здесь теорема верна. (Правда, в случае $n = 1$ теорема, строго говоря, отлична от сформулированной в § 1 теоремы 1, хотя бы потому, что окружность не односвязна. Но это, как легко видеть, не играет в данном случае роли.)

Итак, мы будем предполагать, что теорема верна для $(n-1)$-мерных пространств. На этом основании мы докажем следующее.

Если точка $A \in R^n$ покрыта образом полиэдра $\widetilde{K}^n$, то целый шар радиуса a вокруг нее уже покрывается конечным числом образов некоторых многогранников комплекса K^n, причем a не зависит от точки A и является тем числом a, которое определено в лемме 2.

В самом деле, пусть $A \in \widetilde{K}^n$ — прообраз точки $\overline{A}$ (любой из ее прообразов, если их несколько). По лемме 2 точка A имеет окрестность данного радиуса a, заключенную в шаровой окрестности $Ш(C, r)$ некоторой точки C. Поверхность окрестности $Ш$ состоит из $(n-1)$-мерных сферических многогранников, образующих комплекс K^{n-1}, для которого, как утверждает лемма 1, выполнены такие же условия, как для комплекса K^n. Полиэдр $\widetilde{K}^{n-1}$ (поверхность окрестности $Ш$) отображается в поверхность $\overline{S}^{n-1}$ шара $\overline{Ш}$ вокруг той точки $\overline{C} \in R^n$, которая служит образом точки C.

Так как по предположению теорема 1 верна для $(n-1)$-мерного случая, то образ $\widetilde{K}^{n-1}$ покрывает всю сферу $\overline{S}^{n-1}$ и даже некоторое конечное число многогранников из K^{n-1} уже ее покрывает.

Но отображение полиэдра $\widetilde{K}^n$ в R^n конгруэнтно на каждом многограннике. Поэтому и шар $\overline{Ш}$ покрывается конечным числом образов тех шаровых секторов, которые образуют окрестность $Ш(C, r)$. Короче, шар $\overline{Ш}$ уже покрывается конечным числом многогранников из K^n, что и требовалось доказать.

Докажем теперь первое утверждение теоремы 1, а именно, что *образ полиэдра $\widetilde{K}^n$ покрывает все пространство R^n.*

Пусть $\overline{A}$ — любая точка из R^n. Возьмем какую-либо точку $\overline{B} \in R^n$, покрытую образом полиэдра $\widetilde{K}^n$, и проведем отрезок $\overline{A}\,\overline{B}$. Отрезок $\overline{A}\,\overline{B}$ покроем конечным числом отрезков длины $\leq a$: $\overline{A}\,\overline{A}_1, \overline{A}_1\overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_p\overline{B}$.

Так как точка $\overline{A}$ покрыта образом $\widetilde{K}^n$, то по доказанному шар радиуса a вокруг нее тоже покрыт образом $\widetilde{K}^n$. Следовательно, точка $\overline{A}_1$ покрыта образом $\widetilde{K}^n$. Теперь точно так же убеждаемся, что точка $\overline{A}_2$ тоже покрыта образом $\widetilde{K}^n$, и т. д. Дойдя до точки $\overline{B}$, убеждаемся, что она покрыта образом $\widetilde{K}^n$, а так как она любая, то тем самым доказано, что все пространство R^n покрыто образом $\widetilde{K}^n$.

Докажем теперь второе утверждение теоремы 1, а именно, что *любая ограниченная часть пространства уже покрывается образами некоторого конечного числа многогранников из комплекса K^n.*

В самом деле, ограниченная часть пространства покрывается конечным числом шаров радиуса a, а по доказанному каждый такой шар покрывается образами конечного числа многогранников из K^n. Отсюда и следует доказываемое утверждение. Теорема 1 доказана полностью.

В дополнение можно доказать, что *любой отрезок в R^n заведомо покрывается конечной «цепью» многогранников из K^n, т. е. последовательностью многогранников, в которой каждые два соседних смежны по $(n-1)$-мерной грани.*

Пусть $\overline{A}\,\overline{B}$ — отрезок в R^n. Будем двигаться от конца $\overline{A}$ подобно тому, как это делалось при доказательстве первой части теоремы 1. Пусть мы дошли до точки $\overline{C}$ отрезка $\overline{A}\,\overline{B}$. Если она лежит внутри некоторого многогранника, то двигаемся дальше до его границы. Если точка $\overline{C}$ лежит на грани $\overline{Q}^k$ многогранника $\overline{P}$ и отрезок $\overline{A}\,\overline{B}$ идет вдоль этой грани, то двигаемся до того места, где отрезок $\overline{A}\,\overline{B}$ выходит из многогранника $\overline{P}$. Остается последний случай, когда отрезок $\overline{A}\,\overline{B}$ за точкой $\overline{C}$ выходит из многогранника $\overline{P}$. Пусть P — прообраз многогранника $\overline{P}$, т. е. многогранник из K^n, и C — прообраз точки $\overline{C}$ в многограннике P. Точка C имеет a-окрестность, лежащую в шаровой окрестности $Ш(D, r_D)$ некоторой точки D. Все многогранники, пересекаемые окрестностью $Ш$, сходятся в некоторой грани Q^k, которой принадлежит точка D. Образ окрестности $Ш$ покрывает окрестность точки $\overline{C}$, и, следовательно, среди указанных многогранников есть многогранник P', в образ $\overline{P}'$ которого входит точка отрезка $\overline{A}\,\overline{B}$ при движении от $\overline{A}$ к $\overline{B}$ за точку $\overline{C}$. По условию 4, наложенному на комплекс K^n, многогранники P и P' соединяются цепью многогранников, содержащих грань Q^k. Эту цепь мы присоединяем к уже пройденной до точки $\overline{C}$ цепи многогранников.

Наше построение дает, таким образом, цепь многогранников, все многогранники которой имеют общие точки с отрезком $\overline{A}\,\overline{B}$ и постепенно его покрывают. То, что это построение доводит нас до точки $\overline{B}$, явствует из существования длины a, на которую мы всегда можем продвинуться за любую точку $\overline{C}$. Таким образом, отрезок $\overline{A}\,\overline{B}$ действительно покрывается конечной цепью многогранников, каждый из которых имеет с отрезком $\overline{A}\,\overline{B}$ хотя бы одну общую точку.

§ 4. *Доказательство теоремы 2*

Докажем теперь следующее утверждение.

Лемма 3. *Если при отображении полиэдра $\widetilde{K}^n$ на пространство R^n каждая шаровая окрестность отображается взаимно однозначно, то и весь полиэдр $\widetilde{K}^n$ отображается на R^n взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть A — любая точка полиэдра $\widetilde{K}^n$ и $\overline{A}$ — ее образ в R^n. По лемме 2 вокруг точки A есть окрестность $U(A, a)$ радиуса a, заключенная в шаровой окрестности $Ш(B, r)$ некоторой точки B.

Согласно лемме 1, поверхность $\widetilde{K}^{n-1}$ окрестности $Ш$ состоит из $(n-1)$-мерных сферических многогранников, образующих комплекс K^{n-1}, удовлетворяющий тем же условиям, что комплекс K^n. Полиэдр (поверхность) $\widetilde{K}^{n-1}$ отображается в поверхность шара $\overline{Ш}$ вокруг точки $\overline{B}$ (образа точки B) и по теореме 1 полностью ее покрывает. А так как окрестность $Ш$ состоит из соответствующих шаровых секторов, которые отображаются в R^n конгруэнтно, то и образ $Ш$ полностью покрывает шар $\overline{Ш}$.

Так как по условию отображение шаровой окрестности взаимно однозначно, то отображение $Ш$ на $\overline{Ш}$ конгруэнтно в целом. Но окрестность $U(A, a)$ точки A содержится в $Ш$ и, стало быть, отображается конгруэнтно на шар радиуса a вокруг точки $\overline{A}$.

Таким образом, каждая окрестность $U(A, a)$ вокруг любой точки A отображается конгруэнтно на шар $\overline{U}$ в R^n [5].

Отсюда ясно, что отображение полиэдра $\widetilde{K}^n$ на пространство R^n есть так называемое отображение накрытия: полиэдр $\widetilde{K}^n$ накрывает R^n.

В самом деле, отображение накрытия определяется, как известно, тремя требованиями:

1. В каждую точку $\overline{M} \in R^n$ отображается хотя бы одна точка полиэдра $\widetilde{K}^n$.

Это условие выполнено, так как по теореме 1 образом $\widetilde{K}^n$ является всЁ R^n.

2. Пусть точки $M_1, M_2, \ldots$ отображаются в точку $\overline{M}$. Тогда существуют некоторые «отмеченные» окрестности $\overline{U}(\overline{M})$ и $U(M_1), U(M_2), \ldots$ такие,

---

[5] Из этого следует, что исходный комплекс K^n был локально конечным, т. е. каждая его точка принадлежала конечному числу многогранников комплекса.

что $U(M_1), U(M_2), \ldots$ отображаются на $\overline{U}(\overline{M})$ топологически, т. е. взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Это условие выполнено, так как за «отмеченные» окрестности можно взять окрестности радиуса a, которые, как доказано, отображаются в R^n конгруэнтно.

3. Всякая точка N полиэдра $\widetilde{K}^n$, отображающаяся в какую-то точку $\overline{N}$ из «отмеченной» окрестности $\overline{U}(\overline{M})$, принадлежит хотя бы одной из «отмеченных» окрестностей $U(M_1), U(M_2), \ldots$.

Это условие также выполнено. В самом деле, вокруг точки N есть окрестность $U(N,a)$, отображающаяся в R^n конгруэнтно. Если образ $\overline{N}$ точки N лежит в отмеченной окрестности $\overline{U}(\overline{M},a)$, то тем самым $\overline{M}$ лежит в образе окрестности $U(N,a)$. Но отображение этой окрестности в R^n конгруэнтно и, стало быть, $U(N,a)$ содержит один из прообразов M_i точки $\overline{M}$, а окрестность $U(M_i,a)$ содержит точку N. А это и значит, что точка N принадлежит отмеченной окрестности $U(M_i,a)$, т. е. условие 3 выполнено.

Итак, полиэдр $\widetilde{K}^n$ накрывает пространство R^n. Но пространство R^n по условию односвязно, а потому, в силу известной теоремы, отображение $\widetilde{K}^n$ на R^n является топологическим, что и требовалось доказать. Более того, в наших условиях отображение комплекса $\widetilde{K}^n$ на R^n оказывается, очевидно, конгруэнтным.

Обратимся теперь к самой теореме 2. *Для того чтобы отображение полиэдра $\widetilde{K}^n$ в R^n было взаимно однозначным, достаточно, чтобы оно было взаимно однозначным вокруг каждой $(n-2)$-мерной грани.*

Доказательство. Теорема верна для $n=2$. В самом деле, в этом случае условие теоремы означает, что отображение полиэдра $\widetilde{K}^2$ в R^2 взаимно однозначно вокруг каждой вершины. Кроме того, вокруг каждой внутренней точки многогранника (в данном случае многоугольника комплекса K^2) или вокруг каждой внутренней точки стороны оно взаимно однозначно по самим условиям, наложенным на это отображение.

Таким образом, шаровая (в данном случае круговая) окрестность каждой точки из K^2 отображается в R^2 взаимно однозначно. По лемме 3 отсюда следует, что отображение $\widetilde{K}^2$ на R^2 взаимно однозначно в целом.

Допустим теперь, что теорема верна для $(n-1)$-мерного случая, и докажем ее для n-мерного комплекса K^n.

Пусть A — точка полиэдра $\widetilde{K}^n$; $Ш$ — ее шаровая окрестность, а K^{n-1} — соответствующий комплекс $(n-1)$-мерных многогранников, образующих поверхность $\widetilde{K}^{n-1}$ окрестности $Ш$. Полиэдр $\widetilde{K}^{n-1}$ отображается на поверхность S^{n-1} шара $\overline{Ш}$ вокруг точки $\overline{A} \in R^n$.

Каждая $((n-1)-2)$-мерная грань комплекса K^{n-1} есть не что иное, как пересечение некоторой $(n-2)$-мерной грани комплекса, подходящей к точке A, со сферой с центром в точке A. По условию теоремы отображение полиэдра $\widetilde{K}^n$ на R^n взаимно однозначно вокруг каждой $(n-2)$-мерной грани. Поэтому отображение полиэдра K^{n-1} на S^{n-1} взаимно однозначно вокруг каждой $((n-1)-2)$-мерной грани. Это значит, что для комплекса K^{n-1} выполнено условие теоремы; и так как мы считаем ее для $(n-1)$-мерных комплексов верной, то отображение полиэдра $\widetilde{K}^{n-1}$ на сферу S^{n-1} взаимно однозначно. Вместе с этим очевидным образом оказывается взаимно однозначным и отображение шаровой окрестности $Ш$ на шар $\overline{Ш}$. Значит, отображение всякой шаровой окрестности взаимно однозначно, а тогда, в силу леммы 3, оказывается взаимно однозначным отображение всего полиэдра $\widetilde{K}^n$ на пространство R^n. Теорема доказана.

Статья поступила в редакцию
10.XI.1953

ЛИТЕРАТУРА

1. *Венков Б. А.* Об одном классе евклидовых многогранников // Вестн. ЛГУ. 1954. № 2. Сер. математики, физики и химии. Вып. 1. С. 11–31.
2. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. М.; Л.: ОНТИ, 1938.

Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка

Вестник ЛГУ. 1954. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 3–17

§ 1. Введение

Мы будем рассматривать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка общего вида

$$F(x_1, \ldots, x_n;\ z, z_1, \ldots, z_n,\ z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nn}) = 0, \tag{1}$$

где x_i — независимые переменные; z — неизвестная функция; $z_i = \partial z/\partial x_i$, $z_{ik} = \partial^2 z/\partial x_i \partial x_k$. Достаточно предполагать, что функция F непрерывна по всей совокупности аргументов и непрерывно дифференцируема по аргументам $z, z_1, \ldots, z_{nn}$, а допустимые функции $z(x_1, \ldots, x_n)$, в частности решения уравнения (1), определены в некоторой области G изменения переменных x_i и дважды непрерывно дифференцируемы в этой области. Ради краткости совокупность значений x_i, отвечающих какой-либо точке области G, мы обозначаем просто X, а левую часть уравнения — $F(X; z)$ или просто F.

Говорим, что выражение F эллиптично для данной функции $z = u(X)$, если при подстановке в частные производные $F_{ik} = \partial F/\partial z_{ik}$ этой функции и ее производных оказывается, что для всех $X \in G$ квадратичная форма

$$F_{11}\xi_1^2 + F_{12}\xi_1\xi_2 + \ldots + F_{nn}\xi_n^2 \tag{2}$$

положительно определенная. (Это определение несколько отлично от обычного. Оно фиксирует знак квадратичной формы, тогда как обычно эллиптичность определяют условием, что форма (2) знакоопределенная, положительная или отрицательная — безразлично.)

Мы докажем следующую «основную теорему».

Теорема A. *Уравнение* (1) *не может иметь двух различных решений* $u(X)$, $v(X)$, *удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *если в некоторой точке* $u = v$, $u_i = v_i$, *то в этой точке выражение* F *эллиптично для функции* $z = (1-t)u + tv$ *при всех* $0 \le t \le 1$, *так что, в частности, оно эллиптично для* $z = u(X)$ *и* $z = v(X)$;

2) *разность $u - v$ имеет где-нибудь внутри области G минимум* (*максимум*), *равный нулю.* Под минимумом (максимумом) здесь и в дальнейшем подразумевается наименьшее (наибольшее) значение функции в области ее определения.

Эта теорема приложима прежде всего к уравнениям, для которых стоящее в левой части выражение естественно назвать «абсолютно эллиптичным», подразумевая под этим, что F эллиптично для любой функции $z = u(X)$. В этом случае условие 1) сформулированной теоремы выполняется автоматически.

Можно еще ввести понятие об «эллиптически выпуклых» уравнениях (1), подразумевая такие, для которых выполнено следующее условие.

Если для двух решений u, v уравнения $F = 0$ выражение F эллиптично, то во всех точках, где $u = v$, $u_i = v_i$, это выражение эллиптично также для всякой функции $z = (1-t)u + tv$ при $0 < t < 1$.

В этом случае наша теорема сводится к следующей.

Теорема Б. *Эллиптично выпуклое уравнение* (1) *не может иметь двух различных решений, для которых выражение F эллиптично и разность которых имела бы в области G минимум* (*максимум*), *равный нулю.*

Примером эллиптично выпуклого уравнения может служить любое уравнение, квадратичное относительно вторых производных. В этом случае производные F_{ik} линейны относительно вторых производных, поэтому, если квадратичная форма (2) положительно определенная для $z = u(X)$ и $z = v(X)$, она будет положительно определенной и для $w = (1-t)u + tv$ всюду, где $u = v$, $u_i = v_i$.

Теорему A мы докажем сначала для линейных уравнений. В данном случае производные F_{ik} вовсе не зависят от функции $z = u(X)$, поэтому здесь речь может идти только об абсолютной эллиптичности. Кроме того, разность решений линейного уравнения есть решение соответствующего однородного уравнения. Поэтому дело сводится к следующей теореме:

Теорема В. *Линейное однородное уравнение эллиптического типа не допускает отличного от нуля решения, имеющего равный нулю минимум* (*максимум*).

Эта теорема была установлена Е. Хопфом [1] [1)], однако наше доказательство, которое дается в § 2, основано на совсем других соображениях.

В § 3 мы докажем общую теорему A, сведя ее посредством известного приема к теореме о линейных уравнениях, а в § 4 рассмотрим, как из теоремы A можно получить теоремы единственности для решения краевой задачи. Указанный в § 4 прием для установления единственности решения за-

[1)] В этой работе содержится также часть полученных нами результатов для нелинейных уравнений.

дачи Дирихле допускает ряд приложений к задачам теории поверхностей. Особое внимание стоит обратить на следующее обстоятельство.

Как известно, уже давно Г. Дарбу свел задачу изгибания поверхности к исследованию уравнения типа Монжа — Ампера — «уравнения Дарбу», которое для поверхностей положительной кривизны принадлежит эллиптическому типу. Вопрос об однозначной определенности поверхности, т. е. о единственности (с точностью до положения в пространстве) поверхности с данным линейным элементом при тех или иных условиях сводится к вопросу о единственности решения уравнения Дарбу.

Между тем в классической проблеме однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей, которой долго занимались многие геометры, это естественное соображение не нашло применения. Это можно объяснить тем, что известные теоремы единственности для дифференциальных уравнений оказывались здесь неприменимыми.

Теперь наша теорема А восполняет этот пробел. Посредством одного простого геометрического приема, разработанного Е. П. Сенькиным и мною, удается свести однозначную определенность замкнутых выпуклых поверхностей к теореме А. Этот прием применим также в ряде других задач теории поверхностей. Будучи выражен в общей аналитической форме, он и дает тот метод установления единственности решения задачи Дирихле, который мы рассмотрим в § 4.

Что касается геометрических приложений, то о них мы будем говорить только в общей форме. Их изложение будет дано в последующих публикациях Е. П. Сенькина и моих.

Я хотел бы поблагодарить В. А. Залгаллера, указавшего мне на существенную неточность, содержавшуюся в первоначальном варианте выводов § 2.

§ 2. *Теорема о линейных уравнениях*

1. Сформулированная в § 1 теорема о линейных уравнениях оказывается следствием следующего предложения.

Лемма 1. *Пусть $u(X) \equiv u(x_1, \ldots, x_n)$ — дважды дифференцируемая функция, определенная в некоторой области и в сферической окрестности U некоторой точки Q, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *во всех точках $X \in U \quad u(X) \geq 0$, тогда как $u(Q) = 0$, так что $u(X)$ имеет в точке Q минимум, равный нулю;*

2) *через точку Q проходит такая плоскость P, что в одной из ограниченных ею половин U_1 окрестности $U \quad u(X) > 0$, а на самой плоскости P точка Q — единственная, где $u(X) = 0$.*

Утверждается, что при этих условиях в U_1 сколь угодно близко к точке Q существуют точки X^0 со следующими свойствами:

1) *второй дифференциал d^2u в точке X^0 есть неотрицательная форма;*

2) *сумма вторых производных* $\sum u_{ii}(X^0)$ *или, что вследствие неотрицательности* d^2u *равносильно, хотя бы одна из вторых производных в точке* X^0 *в любое заранее указанное число раз превосходит модуль любой из первых производных* $u_k(X^0)$, *а также функцию* $u(X^0)$.

Прежде чем дать доказательство этой леммы, покажем, как из нее следует теорема о линейных дифференциальных уравнениях.

Теорема 1. *Пусть имеется дифференциальное уравнение*

$$L(z) \equiv \sum a_{ik} z_{ik} + \sum b_i z_i + cz = 0, \tag{1}$$

где a_{ik}, b_i, c — *функции* $x_1, \ldots, x_n$, *определенные и ограниченные в некоторой области* G, *а* $z, z_1, \ldots, z_{nn}$ — *неизвестная функция и ее первые и вторые производные.*

Пусть в каждой точке области G *квадратичная форма*

$$\Phi = \sum a_{ik} \xi_i \xi_k \tag{2}$$

положительно определенная и пусть, кроме того, в окрестности каждой точки собственные значения $\widetilde{a}_{ii}$ *формы* Φ *ограничены снизу положительным числом.* (Если a_{ik} непрерывны, то это дополнительное условие, конечно, выполнено. Но непрерывность a_{ik}, b_i, c не обязательна.)

Утверждение теоремы состоит в том, что при этих условиях никакое отличное от тождественного нуля дважды дифференцируемое решение уравнения (1) *не может иметь минимума* (*максимума*), *равного нулю.*

Доказательство. Допустим вопреки доказываемому, что уравнение (1) допускает отличное от тождественного нуля решение $u(X)$, имеющее в некоторой точке минимум, равный нулю. Тогда имеется точка X^1, где $u(X^1) = 0$, и вокруг точки X^1 такой n-мерный шар K_1, что в этом шаре $u(X) \geq 0$ и в какой-то точке $u(X^2) > 0$.

В таком случае можно построить шар K_2, заключенный в K_1 и такой, что в нем всюду $u(X) > 0$, кроме одной какой-то точки Q на его границе, где $u(Q) = 0$. (Такой шар можно построить, например, следующим образом. Берем точку X^2, где $u(X^2) > 0$, и пусть Q — ближайшая к ней точка множества, где $u(X) = 0$. Если теперь внутри отрезка X^2Q взять точку X^3, достаточно близкую к Q, то шар с центром в X^3, проходящий через точку Q, будет обладать требуемыми свойствами.)

Произведем теперь преобразование обратных радиусов, которое оставит точку Q на месте, а поверхность шара K_2 переведет в некоторую плоскость P.

Так как такое преобразование обратных радиусов регулярно в окрестности точки Q, то условия, наложенные на уравнение (1), не нарушатся. Для преобразованного уравнения мы оставим те же обозначения (1).

В результате приходим к следующему положению.

Имеется уравнение эллиптического типа вида (1) и некоторое его дважды дифференцируемое решение $u(X)$ со следующими свойствами:

1) в точке Q функция $u(Q) = 0$, а в некотором шаре K с центром Q везде $u(X) \geq 0$;

2) через точку Q проходит такая плоскость P, что по крайней мере в одной из ограничиваемых ею половин этого шара $u(X) > 0$, а на самой плоскости P (в пределах шара K) точка Q — единственная, в которой $u(X)$ обращается в нуль.

Таким образом, решение $u(X)$ удовлетворяет в окрестности точки Q условиям леммы 1.

Кроме того, вследствие условий, наложенных на коэффициенты уравнения, мы можем считать, что в шаре K выполнены неравенства

$$|b_i|,\ |c| < B < +\infty \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

и

$$\widetilde{a}_{ii} > A > 0, \tag{4}$$

где $\widetilde{a}_{ii}$ — собственные значения формы Φ.

Согласно лемме 1, в шаре K найдется такая точка, что в ней второй дифференциал d^2u неотрицателен и сумма вторых производных u_{ii} во сколько угодно раз больше производных u_i и самой функции u. Поэтому, очевидно, найдется такая точка X^0, в которой будет выполнено неравенство

$$A \sum u_{ii} > B \left(\sum |u_i| + |u| \right). \tag{5}$$

Так как формы с коэффициентами $a_{ik}(X^0)$ и $u_{ik}(X^0)$ неотрицательны и собственные значения первой из них больше A, то в точке X^0

$$\sum a_{ik} u_{ik} > A \sum u_{ii}. \tag{6}$$

В самом деле, путем поворота осей, т. е. ортогонального преобразования переменных x_i, можно добиться того, что в преобразованном уравнении коэффициенты a_{ik} при $i \neq k$ в точке X^0 исчезнут, т. е. форма Φ приведется в точке X^0 к каноническому виду. Тогда в точке X^0 будем иметь

$$\sum a_{ik} u_{ik} = \sum \widetilde{a}_{ii} \widetilde{u}_{ii}. \tag{7}$$

Но так как все $\widetilde{a}_{ii} > A$ и по неотрицательности d^2u все $\widetilde{u}_{ii} \geq 0$, то

$$\sum a_{ik} u_{ik} > A \sum \widetilde{u}_{ii}. \tag{8}$$

При ортогональном преобразовании переменных второй дифференциал преобразуется как квадратичная форма, поэтому сумма диагональных членов его матрицы не изменяется, так что

$$\sum \widetilde{u}_{ii} = \sum u_{ii}. \tag{9}$$

Используя это равенство, убеждаемся, что неравенство (8) равносильно неравенству (6), которое, таким образом, доказано.

Теперь оценим левую часть уравнения (1) в точке X^0:

$$L(u) \equiv \sum a_{ik}u_{ik} + \sum b_i u_i + cu \geq \sum a_{ik}u_{ik} - \left|\sum b_i u_i + cu\right| \tag{10}$$

или, вследствие неравенств (6) и (3),

$$L(u) > A\sum u_{ii} - B\left(\sum |u_i| + |u|\right). \tag{11}$$

Но, согласно неравенству (5), правая часть здесь положительна, так что

$$L(u) > 0. \tag{12}$$

Тем самым в точке X^0 уравнение не выполняется. Стало быть, оно не может иметь решения $u(X)$ с предположенными свойствами. Теорема доказана.

Совершенно так же можно доказать следующую известную теорему.

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 *и при дополнительном условии, что* $c \leq 0$, *никакое отличное от постоянной, дважды дифференцируемое решение уравнения* (1) *не может иметь ни положительного максимума, ни отрицательного минимума.*

В самом деле, пусть, например, $v(X)$ — решение уравнения (1), имеющее в точке X^1 отрицательный минимум, равный m. Тогда функция

$$u(X) = v(X) - m$$

имеет в точке X^1 минимум, равный нулю, и удовлетворяет уравнению

$$L(u) = L(v) - L(m) = -cm.$$

Так как $c \leq 0$, $m < 0$, то $L(u) \leq 0$. Но по неравенству (12), вывод которого дословно применим к функции $u(X)$, найдется точка X^0, где $L(u) > 0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Переменой знака получаем, что при $c \geq 0$ решение не может иметь отрицательных максимумов и положительных минимумов.

В случае, когда c меняет знак, также можно прийти к некоторым выводам. Так, можно доказать следующее.

Теорема 3. *Если в условиях теоремы* 1 c *меняет знак, причем уравнение* $c = 0$ *определяет непрерывно изогнутую поверхность* C, *то ни в какой точке* X^1 *этой поверхности* C *никакое дважды дифференцируемое решение уравнения* (1) *не может иметь ни максимума, ни минимума, если этот максимум или минимум не достигается также в сколь угодно близких к* X^1 *точках, не лежащих на* C.

Если, например, решение $v(X)$ имеет в точке X^1 минимум, равный m, то $u(X) = v(X) - m$ имеет в X^1 минимум, равный нулю, и удовлетворяет уравнению

$$L(u) = -cm.$$

Тогда, применяя рассуждения доказательства теоремы 1, найдем с той стороны от поверхности C, где $cm \geq 0$ и, стало быть, $L(u) \leq 0$, такую точку, где $L(u) > 0$. Полученное противоречие доказывает высказанную теорему.

2. Теперь докажем лемму 1. При этом сформулируем ее утверждение несколько более точно [2)].

Лемма 1а. *Пусть дважды дифференцируемая функция* $u(X)$ *в сферической окрестности* U *некоторой точки* Q *удовлетворяет двум условиям:*

1) *во всех точках* $X \in U \quad u(X) \geq 0$, *тогда как* $u(Q) = 0$;

2) *через точку* Q *проходит такая плоскость* P, *что в одной из ограниченных ею половин* U_1 *окрестности* $U \quad u(X) > 0$, *а на самой плоскости* P *точка* Q — *единственная, где* $u(X) = 0$.

Утверждается, что при этих условиях в U_1 *сколь угодно близко от* Q *существуют точки* X^0, *где*

1) d^2u *неотрицателен;*

2) *если* $u_{11}(X^0)$ — *вторая производная в направлении, перпендикулярном плоскости* P (*ось* x_1 *мы считаем перпендикулярной* P), *а* x_1 — *соответствующая координата точки* X^0, *то*

$$u_{11}(X^0) \geq \frac{1}{x_1} u_1(X^0) \quad \text{и} \quad u_{11}(X^0) \geq \frac{2}{x_1^2} u(X^0); \tag{13}$$

3) $u_2(X^0) = \ldots = u_n(X^0) = 0$.

Легко видеть, что эти утверждения включают утверждения леммы 1. В самом деле, так как в точке X^0 второй дифференциал неотрицателен, то все $u_{ii}(X^0) \geq 0$, поэтому неравенства (13) тем более должны иметь место для

[2)] Лемма 1а в таком виде не верна, как это отмечено А. Д. Александровым в примеч. [1)] к статье «Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I». См. с. 336 настоящего издания, где указаны также корректная формулировка и необходимые изменения в доказательстве. — *Прим. ред.*

суммы производных $u_{ii}(X^0)$. Вместе с тем при ортогональном преобразовании переменных эта сумма (как сумма диагональных членов матрицы $\|u_{ik}\|$) остается неизменной. Поэтому аналогичные неравенства должны иметь место при любых направлениях осей $x_1, \ldots, x_n$. А это значит, что утверждение леммы 1 верно.

Итак, докажем лемму 1а. Для этого рассмотрим в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве поверхность S, определяемую в прямоугольных координатах $x_1, \ldots, x_n$, z уравнением:

$$z = u(X) \equiv u(x_1, \ldots, x_n).$$

При этом мы ограничиваемся только пределами указанной в лемме сферической окрестности U точки Q, так что поверхность S расположена целиком над этой окрестностью. Мы считаем, что окрестность U замкнутая. Поверхность S имеет границу, проектирующуюся в границу окрестности U. Точку Q без ограничения общности можно считать началом $(0, 0, \ldots, 0)$.

Условия, наложенные на функцию $u(X)$, означают, что:

1) поверхность S лежит в полупространстве $z \geq 0$, касаясь плоскости $z = 0$ в начале координат Q;

2) через ось z проходит такая n-мерная плоскость T, что в одном из ограниченных ею замкнутых полупространств R_1 поверхность S имеет с плоскостью $z = 0$ единственную общую точку Q. Эта плоскость T пересекает плоскость $z = 0$ по той $(n-1)$-мерной плоскости P, которая фигурирует в условии леммы 1а.

Мы будем считать, что ось x_1 направлена перпендикулярно плоскости T, тогда плоскость T есть плоскость $x_1 = 0$.

Ограничимся рассмотрением только той части S_1 поверхности S, которая лежит в полупространстве R_1. Спроектируем поверхность S_1 на двумерную плоскость $x_1 z$. В проекции получим некоторую фигуру, ограниченную со стороны оси x_1 кривой L, касающейся оси x_1 в единственной точке Q, а в остальном расположенной в полуплоскости $z > 0$.

Поверхность S_1 имеет с плоскостью $z = 0$ только одну общую точку Q и, стало быть, на границе удалена от плоскости $z = 0$ на положительное расстояние. Поэтому проекции граничных точек поверхности S_1 удалены от оси x_1 также на положительное расстояние и вблизи точки Q, где проекция поверхности S_1 касается оси x_1, нет проекций граничных точек. Это означает, что достаточно близко к точке Q никакая точка кривой L не является проекцией граничной точки поверхности S_1.

Ограничимся рассмотрением только такого отрезка кривой L вблизи точки Q, где нет проекций граничных точек поверхности S_1. Соответственно ограничимся частью поверхности S, достаточно близкой к плоскости T. Эти части кривой L и поверхности S мы будем обозначать также L и S_1, что не поведет к недоразумениям.

Натянем теперь на L выпуклую кривую $\overline{L}$. Это осуществляется, например, так. Строим выпуклую оболочку кривой L, тогда часть границы полученной таким образом выпуклой области, обращенная к оси x_1, и будет выпуклой кривой $\overline{L}$, натянутой на L. Как известно и очевидно само по себе, кривая $\overline{L}$ слагается из замкнутого множества точек, где она касается кривой L, и открытых отрезков, имеющих концы в точках касания $\overline{L}$ и L.

Если $z = f(x_1)$ есть уравнение кривой $\overline{L}$, то (верхняя) вторая производная $\overline{f}''(x_1)$ может быть положительной только в точках, где $\overline{L}$ касается L. Исходя из того, что поверхность S дважды дифференцируема, можно было бы заключить, что кривая $\overline{L}$ гладкая и что хотя вторая производная $f''(x_1)$ может и не существовать в некоторых точках, тем не менее верхняя вторая производная всюду ограничена. В этом, однако, нет надобности, так как для $\overline{f}''(x_1)$ можно допустить бесконечные значения.

Пусть M — конечная или бесконечная точная верхняя граница (верхней) второй производной $\overline{f}''(x_1)$. Тогда, как очевидно, при всяком x_1

$$|f'(x_1)| \leq Mx_1, \quad |f(x_1)| \leq \frac{1}{2}Mx_1^2. \tag{14}$$

Вместе с тем найдется такое значение x_1, для которого $\overline{f}''(x_1)$ сколь угодно близка к верхней границе M (сколь угодно велика или бесконечна, если $M = \infty$). Отсюда и из неравенств (14) легко заключить, что существует такое значение $x_1 = x_1^1$, что

$$|f'(x_1^1)| \leq \overline{f}''(x_1^1)x_1^1, \quad |f(x_1^1)| \leq \frac{1}{2}\overline{f}''(x_1^1)(x_1^1)^2. \qquad (15)^{3)}$$

Соответствующую точку кривой L обозначим A^1. Так как здесь $\overline{f}''(x_1^1) > 0$, то в точке A^1 кривая $\overline{L}$ касается кривой L.

Построим теперь выпуклый цилиндр C с $(n-1)$-мерными образующими, перпендикулярными плоскости x_1z и с кривой $\overline{L}$ в качестве направляющей. Проекция этого цилиндра на плоскость x_1z и есть кривая $\overline{L}$. Точки, где $\overline{L}$ касается кривой L, будут, очевидно, проекциями тех точек, где цилиндр C касается поверхности S_1. Поэтому, в частности, точка A^1 (где верны неравенства (15)) есть проекция некоторой точки A, в которой касаются цилиндр C и поверхность S_1. Пусть X^1 — соответствующая точка в плоскости $z = 0$.

---

[3] Если $\overline{f}''(x_1)$ не постоянна, то в (14) имеет место строгое неравенство и тогда, беря x_1^1 так, что $\overline{f}''(x_1^1)$ достаточно близка к M, получим (15). Если же $\overline{f}''(x_1)$ постоянна, то (15) превращаются в равенства, верные для всех x_1.

Очевидно, ее первая координата x_1^1 есть как раз то x_1^1, которое фигурирует в неравенствах (15).

Убедимся теперь, что точка X^1 обладает требуемыми свойствами, т. е. в ней d^2u — неотрицательная форма, и для второй производной в направлении оси x_1, т. е. для u_{11}, выполняются неравенства (13).

Поверхность S_1 лежит над цилиндром C, а цилиндр C — выпуклый; поэтому во всех точках, где S_1 касается C, второй дифференциал d^2u неотрицателен. Стало быть, он неотрицателен, в частности в точке X^1.

Если через точку A провести двумерную плоскость, параллельную плоскости x_1z, то она пересечет цилиндр C по такой же кривой $\overline{M}$, как $\overline{L}$. Та же плоскость пересечет поверхность S_1 по некоторой кривой M', расположенной над кривой M и касающейся $\overline{L}$ в точке A. Поэтому в точке A или, вернее, в точке X^1 вторая производная функции $u(X)$ в направлении этого сечения, т. е. в направлении x_1, будет не меньше второй производной функции $f(x_1)$, задающей кривую $\overline{L}$, т. е.

$$u_{11}(X^1) \geq \overline{f}''(x_1^1). \tag{16}$$

Наконец, так как в точке A цилиндр C и поверхность S_1 касаются друг друга и образующие цилиндра C перпендикулярны плоскости x_1z, то

$$u(X^1) = f(x_1^1), \quad u_1(X^1) = f'(x_1^1), \tag{17}$$

$$u_2(X^1) = \ldots = u_n(X^1) = 0. \tag{18}$$

Используя теперь в неравенствах (15) соотношения (16), (17), получаем

$$u_{11}(X^1) \geq \frac{1}{x_1^1} u_1(X^1), \quad u_{11}(X^1) \geq \frac{2}{(x_1^1)^2} u(X^1), \tag{19}$$

что вместе с (18) и дает нам утверждение леммы.

3. В доказательствах леммы 1 и теорем 1, 2 непрерывность производных u_{ik} не играла роли, важно было лишь существование второго дифференциала. Легко заметить, что все те же рассуждения можно провести, если иметь в виду обобщенный второй дифференциал и соответственно обобщенные вторые производные, понимая их как коэффициенты в тейлоровском разложении функции u:

$$u(X) = u(X^0) + \sum u_i(X^0)\Delta x_i + \frac{1}{2} \sum u_{ik}(X^0)\Delta x_i \Delta x_k + \varepsilon,$$

где ε — выше второго порядка.

Оценки (13) леммы 1а показывают, что требования (3), (4) ограниченности коэффициентов b_i, c и ограниченности снизу положительным числом собственных значений a_{ii} формы Φ можно заменить более слабыми [4)]. Если r — расстояние от данной точки X^0 до X, то достаточно требовать, чтобы $rb_i(X)$, $r^2c(X)$ стремились к нулю при $X \to X_0$. Аналогично можно требовать, чтобы собственные значения a_{ii} не обращались в нуль «слишком быстро».

Далее можно перейти к бо́льшим обобщениям и ограничиваться требованием, чтобы уравнение и все условия, налагаемые на функции a_{ik}, b_i, c, u, имели место с точностью до множества меры нуль, так что можно понимать уравнение в обобщенном смысле. Это, однако, требует некоторых дополнений в доказательствах, на чем мы не будем останавливаться.

§ 3. *Теорема об уравнениях общего вида и некоторые ее частные случаи*

1. Теорема 1. *Пусть дано уравнение*

$$F(X; z) \equiv F(x_1, \ldots, x_n;\ z;\ z_1, \ldots, z_n;\ z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nn}) = 0, \tag{1}$$

где функция F непрерывна по всем аргументам и непрерывно дифференцируема по $z, z_1, \ldots, z_{nn}$ [5)].

Уравнение (1) *не может иметь двух, определенных в одной области G, различных решений $u(X)$, $v(X)$, для которых выполнялись бы два условия:*

а) *разность $v - u$ имеет внутри G минимум (максимум), равный нулю;*

б) *во всякой точке, где $u = v$, $u_i = v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, выражение F эллиптично для $z = (1 - t)u + tv$ при всяком $t \in [0,\, 1]$.*

Доказательство. Допустим, что u, v — два решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям а), б). Положим

$$w = v - u. \tag{2}$$

Из уравнения (1) известным приемом можно получить линейное уравнение для w. Это осуществляется следующим образом.

Подставляя $z = u + tw$ в $F(X; z)$, превратим F в функцию t: $f(t) = F(X; u + tw)$. Эта функция дифференцируема, так как по условию F дифференцируема по переменным z, z_i, z_{ik}. По теореме Лагранжа $f(1) - f(0) = f'(\theta)$, т. е.

$$F(X; u + w) - F(X; u) = F'_t(X; u + \theta w), \tag{3}$$

где $0 \le \theta \le 1$.

4) См. примеч. 3) на с. 460 настоящего издания, относящееся к статье *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157. — *Прим. ред.*

5) Следуя формулировке теоремы 1 § 2 и замечаниям п. 3 § 2, легко заменить эти требования непрерывности более слабыми.

Но так как $u + w = v$, а v и u суть решения уравнения $F = 0$, то это равенство сводится к

$$F'_t(X; u + \theta w) = 0. \tag{4}$$

Вычисляя стоящую здесь производную, получаем

$$F'_t = \frac{\partial F}{\partial z} w + \sum \frac{\partial F}{\partial z_i} w_i + \sum \frac{\partial F}{\partial z_{ik}} w_{ik},$$

где в производных $\partial F/\partial z$, $\partial F/\partial z_i$, $\partial F/\partial z_{ik}$ нужно подставлять $z{=}u + \theta w$. Они оказываются поэтому определенными непрерывными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$. В результате равенство (4) дает для w уравнение

$$\sum \frac{\partial F}{\partial z_{ik}} w_{ik} + \sum \frac{\partial F}{\partial z_i} w_i + \frac{\partial F}{\partial z} w = 0. \tag{5}$$

Воспользуемся теперь условиями а), б) теоремы.

По условию а) $w = v - u$ имеет минимум, равный нулю. Пусть он достигается в точке X_0.

Тогда

$$u(X_0) = v(X_0), \quad u_i(X_0) = v_i(X_0) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Поэтому применимо условие б), т. е. выражение F эллиптично в точке X_0 для $z = (1 - t)u + tv = u + tw$, при всяком $t \in [0, 1]$. Но это значит, что квадратичная форма

$$\sum \frac{\partial F}{\partial z_{ik}} \xi_i \xi_k, \tag{7}$$

положительно определенная в точке X_0, а тогда, по непрерывности производных $\partial F/\partial z_{ik}$, она положительно определенная и в окрестности точки X_0. Это значит, в свою очередь, что уравнение (5) эллиптично в окрестности точки X_0.

В результате оказывается, что функция w в окрестности точки X_0 удовлетворяет уравнению эллиптического типа (5) и имеет в этой точке минимум, равный нулю. По теореме 1 § 2 это возможно лишь тогда, когда $w \equiv 0$ в окрестности X_0. Это, как очевидно, и доказывает нашу теорему[6)].

[6)] В самом деле, если $w = u - v$ не обращается в нуль тождественно во всей области G, то множество E, где $w = 0$, имеет в G границу и оно замкнуто, так как w непрерывна. Приняв за точку X_0 любую точку на границе E, убедимся, повторяя только что проведенное рассуждение, что и в окрестности X_0 $w = 0$, т. е. что точка X_0 лежит внутри E. Противоречие показывает, что $E = G$, т. е. $w = 0$ в G.

2. Как уже было отмечено в § 1, в доказанной теореме содержится следующая теорема.

Теорема 2. *Если выражение $F(X;z)$ эллиптично выпукло (т. е. если из его эллиптичности для $z=u$ и $z=v$ следует, что оно эллиптично для $z=(1-t)u+tv$, $0\le t\le 1$, во всех точках X, где $u=v$, $u_i=v_i$), то уравнение $F=0$ не допускает двух различных решений, для которых выражение F эллиптично и разность которых имела бы минимум (максимум), равный нулю.*

В качестве примера можно отметить следующий содержащийся здесь результат.

Теорема 3. *Пусть выражение $F(X;z)$ эллиптично выпукло, уравнение $F=0$ допускает в качестве решения любую постоянную и при $z=\mathrm{const}$ выражение F эллиптично. Тогда всякое отличное от постоянной решение, для которого F эллиптично, не имеет внутри области своего существования ни максимума, ни минимума.*

В самом деле, если u — решение уравнения $F=0$ и c есть максимум u, то разность $c-u$ имеет в точке максимума функции u минимум, равный нулю. Но так как $v\equiv c$ есть по условию решение уравнения, то по теореме 2 это невозможно, что и доказывает теорему 3.

Примером уравнения, удовлетворяющего условиям теоремы 3, может служить уравнение вида

$$\sum a_{ik}z_{ii}z_{kk}+\sum b_{ik}z_{ik}+c=0,$$

где a_{ik}, b_{ik}, c не содержат вторых производных z_{ik} и при всех $z_i=0$ квадратичная форма $\sum b_{ik}\xi_i\xi_k$ положительно определенная, а $c=0$.

Если $F_z\le 0$, то линейное уравнение (5) для разности w решений уравнения $F=0$ имеет неположительный коэффициент при w. Его решение тогда, как известно, не допускает положительных максимумов и отрицательных минимумов. Отсюда, подобно теоремам 1–3, вытекает

Теорема 4. *Если F эллиптично выпукло и $F_z\le 0$, то разность двух решений уравнения $F=0$, для которых F эллиптично, не может иметь положительных максимумов и отрицательных минимумов.*

3. Теорема 2 связана с одной, высказанной С. Кон-Фоссеном [2], гипотезой относительно выпуклых поверхностей. Именно С. Кон-Фоссен высказал предположение, что две изометричные выпуклые поверхности не могут касаться, не пересекая друг друга.

Известно, что $r(u,v)$ — расстояние точки поверхности от начала как функция гауссовых координат на поверхности — удовлетворяет уравнению Дарбу, определяемому только линейным элементом поверхности. Для поверхности положительной кривизны уравнение Дарбу эллиптично. Поэтому из теоремы 2 следует, что для двух изометричных поверхностей положительной кривизны разность расстояний $r_1(u,v) - r_2(u,v)$ для соответствующих по изометрии точек не может иметь равного нулю минимума (максимума). А это значит, что две такие неравные поверхности не могут касаться так, чтобы в окрестности точки касания $r_1 - r_2$ не меняло своего знака. Аналогичное имеет место и для расстояний от какой-либо фиксированной плоскости. Связь этого результата с утверждением Кон-Фоссена очевидна, хотя мы и не можем доказать тем не менее, что из него следует невозможность касания поверхностей без пересечения.

Вместе с тем уравнения эллиптического типа для тех или иных функций, связанных с выпуклой поверхностью, например для координат точки поверхности, получаются также при различных условиях, налагаемых на кривизну. В этом случае мы получаем аналогичные результаты и можно было бы привести целый ряд примеров.

§ 4. *Теоремы единственности*

1. Теоремы единственности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения $F = 0$ получаются обычно в предположении, что $F_z \le 0$. Установленные в § 2, 3 результаты позволяют получать некоторые теоремы единственности и без этого предположения. Для выяснения применяемых соображений обратимся, однако, к тому частному случаю, когда $F_z = 0$, т. е. когда F не содержит z. Тогда имеет место

Теорема 1. *Если F эллиптично выпукло и $F_z = 0$, то уравнение $F = 0$ не допускает более одного решения задачи Дирихле, для которого F эллиптично.*

Доказательство. Так как $F_z = 0$, то уравнение $F = 0$ допускает вместе с решением u также решение $u + c$, где c — любая постоянная; причем если F эллиптично для $z = u$, то оно эллиптично и для $z = u + c$.

Допустим теперь, что u, v — два различных решения, для которых F эллиптично и которые принимают одинаковые значения на границе некоторой конечной области G. Тогда разность $u - v$ имеет внутри G по крайней мере один максимум или минимум. Пусть, например, $u - v$ имеет во внутренней точке X_0 максимум $\max(u - v) = c$. Тогда всюду в G $\quad u - (v + c) \le 0$ и в точке X_0 $\quad u - (v + c) = 0$. Но так как $v + c$ есть также решение уравнения $F = 0$, то оказывается, что разность двух решений u, $v + c$, для которых F эллиптично, имеет внутри области G максимум, равный нулю. По теореме 2 § 3 это возможно лишь тогда, когда эти решения совпадают, т. е. когда $u = v + c$. Но так как u и v принимают на границе одинаковые значения, то, следовательно, $c = 0$ и тем самым $u = v$. Случай, когда разность $u - v$ имеет внутри G минимум, рассматривается аналогично.

В доказанной теореме содержится, например, теорема Реллиха [3], где речь идет об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа, не содержащих саму функцию z; при данных условиях, утверждает теорема, задача Дирихле не может иметь более двух решений, но эти решения, если их два, различаются тем, что для одного квадратичная форма $\Phi = \sum F_{z_{ik}}\xi_i\xi_k$ положительна, для другого — отрицательна. Так как мы в наших формулировках имеем в виду только случай положительности формы Φ, а случай ее отрицательности вполне ему эквивалентен (достаточно изменить знак F), то и наша теорема 1 может быть высказана в той же форме, что и теорема Реллиха. Тогда тем более очевидно, что эта последняя есть частный случай теоремы 1.

В доказательстве теоремы 1, кроме, конечно, ссылки на теорему 2 § 3, решающую роль играет переход от решения v к бо́льшему решению $v+c$. В таком переходе от данного решения ко всюду бо́льшему (меньшему) и состоит суть предлагаемого приема для доказательства единственности решения краевой задачи. Так, например, мы получаем для линейных уравнений следующую теорему.

Теорема 2. *Если однородное линейное уравнение эллиптического типа $L(u)=0$ допускает в области G неотрицательное решение, не обращающееся в нуль на границе G, то задача Дирихле для уравнения $L(u)=0$, а также, конечно, и для $L(u)=f(X)$, имеет для области G не более одного решения.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что так как по теореме 1 § 2 отличное от нуля решение уравнения $L(u)=0$ не может иметь внутри G равного нулю минимума, то неотрицательное его решение, не равное тождественно нулю, необходимо положительно внутри G. Таким образом, мы можем считать, что наше уравнение имеет решение u_0, которое положительно всюду в замкнутой области $\overline{G}$.

Достаточно доказать, что единственное решение уравнения $L(u)=0$, обращающееся в нуль на границе, есть тождественный нуль. Допустим, однако, что имеется другое такое решение u: не ограничивая общности, можно, конечно, считать, что оно имеет внутри G положительный максимум.

Так как в $\overline{G}$ везде $u_0>0$, то при достаточно больших λ $\lambda u_0-u\geq 0$ в G. Пусть теперь λ_0 есть точная нижняя граница таких λ. Тогда $\lambda_0u_0-u\geq 0$ в $\overline{G}$, причем, в силу линейности уравнения, λ_0u_0-u также является его решением. Оно не обращается в нуль на границе G, так как там $u\leq 0$, а $u_0>0$. Вместе с тем из определения λ_0 ясно, что оно должно обращаться в нуль где-то внутри G.

Таким образом, мы получаем решение λ_0u_0-u, имеющее внутри G минимум, равный нулю. По теореме 1 § 2 это невозможно; следовательно, невозможно, чтобы наше уравнение имело отличное от нуля решение u с нулевыми значениями на границе. Теорема доказана.

Эту теорему можно дополнить утверждением, которое показывает, что условие о существовании положительного решения является также необходимым для единственности решения задачи Дирихле.

Теорема 3. *Если задача Дирихле для уравнения $L(u) = 0$ допускает не более одного решения для всякой области, заключающейся в G, считая и саму G, и к тому же разрешима при каких-то положительных значениях на границе G, то уравнение $L(u) = 0$ имеет решение, всюду положительное в замкнутой области $\overline{G}$.*

В самом деле, пусть u есть решение, принимающее положительное значение на границе G. Если бы оно принимало в G отрицательные значения, то в некоторой частичной области G_1 оно давало бы отличное от нуля решение, обращающееся в нуль на ее границе. В таком случае задача Дирихле для G_1 не имела бы единственного решения, вопреки условию. Следовательно, решение u должно быть всюду неотрицательным. Но и в нуль оно не может обращаться, так как тогда, вопреки теореме 1 § 2, оно имело бы внутри G равный нулю минимум. Следовательно, оно всюду положительно, что и требовалось доказать.

2. Теперь мы формулируем общий метод установления единственности решения краевой задачи, вытекающий из теоремы 2 § 3 и включающий как частные случаи выводы теорем 1, 2.

Теорема 4. *Пусть выражение $F(X; z)$ эллиптично выпукло; уравнение $F = 0$ имеет в области G решение $u(X)$, а вместе с ним также монотонную совокупность решений $u(X; \lambda)$, для которых F эллиптично, причем $u(X; 0) = u(X)$, а при $\lambda \to \pm\infty \quad u(X; \lambda) \to \pm\infty$ для всех X.*

Тогда уравнение $F = 0$ не допускает помимо $u(X)$ никакого другого решения, для которого F эллиптично и которое принимает те же значения на границе G.

Доказательство. Допустим, вопреки доказываемому, что уравнение $F = 0$ имеет отличное от $u(X)$ решение $v(X)$, принимающее те же значения на границе G. Пусть в области $G_1 \subset G \quad v(X) \geq u(X)$, а на границе G_1 $v(X) = u(X)$.

Пусть λ_0 — точная нижняя граница таких λ, для которых $u(X; \lambda) \geq v(X)$ в области G_1. То же λ_0 можно определить как точную верхнюю границу тех λ, для которых хоть где-нибудь в области $G_1 \quad v(X) \geq u(X; \lambda)$. Очевидно, что $\lambda_0 \geq 0$ и в $G_1 \quad u(X; \lambda_0) \geq v(X)$, тогда как, хотя бы в одной точке X_0, $u(X_0; \lambda_0) = v(X_0)$.

Вместе с тем если $\lambda_0 \neq 0$, то $u(X; \lambda_0) > v(X)$ на границе G_1. Поэтому разность решений $u(X; \lambda_0) - v(X)$ имеет в G_1 равный нулю минимум. Это по теореме 2 § 3 невозможно. Следовательно, $\lambda_0 = 0$, а тогда $u(X; \lambda_0) = u(X)$ и, стало быть, в $G_1 \quad u(X) \geq v(X)$. Но так как по выбору области G_1 в ней $u(X) \leq v(X)$, то $u(X) = v(X)$.

Случай области G_2, где $v(X) \leq u(X)$, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теоремы 1, 2 представляют собой частные случаи теоремы 4. В теореме 1 решению $u(X)$ отвечает монотонная последовательность решений $u(X;\lambda) = u(X) + \lambda$, а в теореме 2 — последовательность решений $u(X;\lambda) = \lambda u(X)$.

Метод, содержащийся в теореме 4, можно применять к уравнениям, заданным на замкнутом многообразии. Укажем в качестве примера следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть уравнение $F(X;z) = 0$ задано на замкнутом многообразии, причем F эллиптично выпукло и однородно с положительным показателем однородности. Такое уравнение допускает не более одного с точностью до произвольного положительного множителя положительного решения, для которого F эллиптично.*

Доказательство. Если $u(X)$, $v(X)$ — два положительных решения, для которых F эллиптично, то в силу однородности $\lambda u(X)$ также будет решением, для которого F эллиптично. Определяя λ_0 как точную нижнюю границу тех λ, для которых $\lambda u(X) \geq v(X)$, получим, что разность $\lambda_0 u(X) - v(X)$ имеет равный нулю минимум, что возможно лишь тогда, когда $\lambda_0 u(X) = v(X)$. Теорема доказана.

В некоторых приложениях метод, содержащийся в теореме 4, требует некоторых изменений, делающих его, так сказать, более тонким, когда от данного решения $u(X)$ к бóльшим приходится переходить постепенно в части области G.

3. Указанный метод в его простом, или уточненном, виде для областей с границей, или для замкнутых многообразий, допускает некоторые геометрические приложения. В общих чертах эти приложения основаны на следующих обстоятельствах.

Во-первых, как уже было упомянуто в § 3, в теории поверхностей мы постоянно встречаемся с тем, что когда поверхность подчиняется тому или иному условию (заданы ее линейный элемент, кривизна и т. п.), то те или иные функции, определяющие поверхность (координаты, опорная функция и т. п.), удовлетворяют соответствующему уравнению второго порядка, подобно уравнению Дарбу, или уравнению, дающему выражение гауссовой кривизны через ту или иную координату, и т. п. Эти уравнения для поверхностей положительной кривизны оказываются, как правило, эллиптично выпуклыми. Таким образом, поверхность может определяться решением такого уравнения.

Во-вторых, поверхность, подчиненная тому или иному геометрическому условию, как правило, допускает некоторые тривиальные преобразования, переводящие ее в поверхность с тем же условием; это преобразование может быть переносом, подобием и др. Такое преобразование означает вместе с тем переход от данного решения уравнения, выражающего наложенное на поверхность условие, к другому. Это и открывает путь к применению указанного выше метода.

Приведем только один простой пример.

Рассмотрим выпуклые поверхности, содержащие внутри себя начало координат. Поверхность определяется тогда расстоянием $r(X)$ ее точки от начала, как функцией направленного к этой точке (из начала) единичного вектора X или, что равносильно, функцией точки на единичной сфере E с центром в начале. В силу проектирования поверхности на сферу E площадь сферического изображения области на поверхности представляется как функция соответствующего множества M на единичной сфере E.

Пусть условие, налагаемое на поверхность, состоит в том, что эта функция $\omega(M)$ фиксирована. Выражая его аналитически для дважды дифференцируемых поверхностей, получим заданное на сфере E уравнение эллиптического типа для функций $r(X)$.

При подобном преобразовании поверхности с центром подобия в начале функция $\omega(M)$ остается, очевидно, неизменной. Это значит, что указанное уравнение вместе с решением $r(X)$ допускает и решение $\lambda r(X)$ с любым $\lambda > 0$. Поэтому, применяя теорему 5, мы приходим сразу к следующему результату:

Выпуклая поверхность определяется функцией $\omega(M)$ однозначно с точностью до подобия с центром в начале.

Эта теорема не нова; она была доказана мною для общих, а не только дважды дифференцируемых поверхностей [4, гл. IX, § 1]. Здесь она приведена лишь в качестве примера, поясняющего высказанные выше общие соображения. Как уже было сказано в § 1, развернутое изложение геометрических приложений будет дано в последующих публикациях.

Статья поступила в редакцию
24.VI.1954

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // Sitzungsberichte Akad. Berlin. 1927. S. 147–152.
2. *Кон-Фоссен С. Э.* Изгибание поверхностей в целом (im grossen) // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 1. С. 33–76.
3. *Rellich F.* Vereinfachung im Beweis eines Hilfssatzes aus meiner Arbeit: “Zur ersten Rnadwertaufgabe bei Monge–Ampéreschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus” // Math. Ann. 1933. Bd 107. S. 804.
4. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I

Вестн. ЛГУ. 1956. № 19. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 4. С. 5–17

В этой статье мы имеем в виду сообщить те теоремы единственности для замкнутых поверхностей, а также поверхностей с краем, которые получаются посредством метода, указанного в общих чертах в моей работе [1] и примененного в [2] к доказательству теоремы единственности замкнутой выпуклой поверхности с данной метрикой, а также выпуклой поверхности с краем, при соответствующих условиях на краю. Мы ограничиваемся лишь общим описанием метода, формулировками результатов, сопоставлением их с ранее известными и некоторыми указаниями на ход доказательств. Полные доказательства мы рассчитываем изложить в последующих статьях.

§ 1. *Метод*

1. Основу применяемого метода составляет теорема о дифференциальных уравнениях, которая представляет, хотя и небольшое, но существенное обобщение теоремы, доказанной в [1] [1)].

Мы рассматриваем дифференциальное уравнение

$$F(z;x) \equiv F(z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{nn}, z_1, \ldots, z_n, z; x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

где z, z_i, z_{ik} — неизвестная функция и ее первые и вторые производные по независимым переменным x_i. Функция F предполагается непрерывной и, кроме того, дифференцируемой по аргументам z_{ik}, z_i, z.

[1)] Пользуюсь случаем отметить, что в работе [1] мною допущена ошибка: лемма 1а этой работы неверна. Однако лемма 1, непосредственно применяемая в [1], верна. Вместо леммы 1а нужно использовать несколько более слабое утверждение: *в условиях* (*и обозначениях*) *леммы 1а для каждого $r > 0$ существует точка X^0, удаленная от точки Q на расстояние, не большее r, и такая, что в ней:* 1) *d^2u неотрицателен*; 2) $u_{11}(X^0) \geq u_1(X^0)/r$, $u_{11}(X^0) \geq 2u(X^0)/r^2$; 3) $u_2(X^0) = \ldots = u_n(X^0) = 0$. Ошибка в доказательстве на с. 10 работы [1] (см. с. 326–327 настоящего издания. — *Прим. ред.*) легко может быть устранена.

Выражение $F(z;x)$ называется эллиптичным для функции $z = u(x) = u(x_1,\ldots,x_n)$, если при подстановке $z = u(x)$ в производные $\partial F/\partial z_{ik}$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{i\le k}\frac{\partial F}{\partial z_{ik}}\xi_i\xi_k\right| > a\sum\xi_i^2 \tag{2}$$

с какой-либо постоянной $a > 0$.

Теорема A. *Пусть в замкнутой области G дифференциальное уравнение (1) имеет решения $u(x)$, $v(x)$, непрерывные вместе со своими производными. Пусть при этом выполнены условия:*

1) всюду в G $\quad u(x) \ge v(x)$;

2) в некоторой точке $x_0 \in G$ такой, что существует замкнутый шар $S \subset G$, содержащий точку x_0 внутри, или на границе, решения $u(x)$, $v(x)$ и их первые производные равны, т. е. $u(x_0) = v(x_0)$, $u_i(x_0) = v_i(x_0)$ $(i = 1,\ldots,n)$;

3) во всякой точке $x \in G$, где $u = v$, $u_i = v_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ выражение $F(z;x)$ эллиптично для каждой функции $z_t = (1-t)u + tv$, $0 \le t \le 1$ (в случае линейного эллиптического уравнения это условие 3) выполняется само собой).

В таком случае решения u, v совпадают, т. е. $u(x) = v(x)$ всюду в G.

Эта теорема отличается от теоремы A работы [1] тем, что здесь точка x_0, фигурирующая в условии 2), может лежать не только внутри, но и на границе области (с условием, что ее можно коснуться изнутри G некоторым шаром). Если точка x_0 лежит внутри G, то из того, что $u(x)-v(x) \ge 0$ в G, а $u(x_0)-v(x_0) = 0$, само собой следует, что $u_i(x_0)-v_i(x_0) = 0$ $(i = 1,\ldots,n)$. Если же точка x_0 лежит на границе, то требование $u_i(x_0) = v_i(x_0)$ оказывается не лишним. Несмотря на это обобщение, доказательство теоремы A ничем не отличается от доказательства теоремы A работы [1].

2. В дальнейшем, если явно не оговорено противное, S означает некоторую n-мерную дважды непрерывно дифференцируемую поверхность в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве; говоря, что поверхность выпуклая, будем подразумевать, что она имеет всюду положительную кривизну.

Пусть O — начало координат и X — точка на S. Вводим следующие обозначения для величин, относящихся к точке X:

а) $k_1,\ldots,k_n$ — главные кривизны поверхности S;

б) $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к S;

в) $\mathbf{x} = r\mathbf{e}$ — вектор OX; $\mathbf{e}$ — единичный вектор из O в X; r — расстояние OX;

г) $p = \mathbf{nx}$ — расстояние (с соответствующим) знаком от O до касательной плоскости в точке X; $p(\mathbf{n})$ есть опорная функция поверхности, взятая для единичных векторов.

Далее, $\Phi(k_1, \ldots, k_n; \mathbf{n}, \mathbf{x})$ будет обозначать непрерывно дифференцируемую функцию указанных аргументов; причем для определенности кривизны k_i предполагаются расположенными в порядке величины $k_1 \geq k_2 \geq \geq \cdots \geq k_n$. Кроме того, предполагается, что все производные $\partial\Phi/\partial k_i$ всюду одного знака, т. е.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial k_i}\frac{\partial\Phi}{\partial k_j} \geq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Если же речь идет о выпуклых поверхностях, то функцию Φ достаточно считать определенной для $k_i > 0$ и соответственно выполнение условия (3) требуется лишь при $k_i > 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Например, для выпуклых поверхностей допустимо $\Phi = k_1 k_2 \ldots k_n$. *В дальнейшем, если нет особых оговорок, неизменно подразумевается, что рассматриваемые функции* Φ *удовлетворяют указанным условиям.*

3. Теоремы единственности, которые мы устанавливаем, имеют один и тот же характер: они утверждают единственность поверхности с той или иной данной функцией Φ при соответствующих дополнительных условиях, касающихся поверхности; единственность при этом понимается с точностью до переноса, подобия или иного тривиального преобразования. Первые теоремы такого рода были установлены Э. Б. Кристоффелем в 1865 г. [3] и Г. Минковским в 1900 г. [4]; они утверждают, что замкнутая выпуклая поверхность определяется однозначно, с точностью до параллельного переноса, заданием суммы $R_1 + R_2 = 1/k_1 + 1/k_2$ (Э. Б. Кристоффель) или произведения $R_1 R_2 = 1/(k_1 k_2)$ (Г. Минковский) главных радиусов кривизны как функции нормали.

Доказательство таких теорем приводится к теореме А благодаря следующим утверждениям.

Теорема $\mathbf{B_0}$. *Пусть функция* $\Phi(k_1, \ldots, k_n; \mathbf{n}, \mathbf{x})$ *симметрична по* $k_1, \ldots, k_n$. *Тогда, если выразить в ней все* k_i *через производные функции* z, *задающей поверхность, то вследствие условия (3)* Φ *оказывается эллиптичным выражением.*

В качестве функции z, задающей поверхность, может служить $r(\mathbf{e})$, опорная функции $p(\mathbf{n})$, одна из декартовых координат как функция других и пр.

Если Φ не симметрична по k_i, то данное утверждение также верно, когда все k_i различны. Там же, где некоторые k_i совпадают, это может оказаться неверным (так как там Φ может быть недифференцируемой по вторым производным z_{ik} функции z, задающей поверхность). Тем не менее и в общем случае несимметричной функции Φ теорема B_0 сохраняется в несколько видоизмененном виде.

Отказ от симметричности функции Φ является существенным обобщением, так как почти все известные до сих пор теоремы единственности поверхностей с данной функцией Φ доказывались в предположении, что Φ симметрична.

Будем говорить, что некоторое семейство поверхностей $\{S\}$ выпукло относительно функции z, если вместе с поверхностями S_0 и S_1, заданными функциями z_0 и z_1, ему принадлежат также поверхности S_t, задаваемые функциями $z_t = (1-t)z_0 + tz_1 \quad (0 \leq t \leq 1)$. Например, замкнутые выпуклые поверхности с началом O внутри образуют выпуклое семейство относительно функции $z = 1/r(\mathbf{e})$, а любые замкнутые выпуклые поверхности относительно опорной функции $z = p(\mathbf{n})$. Между поверхностями семейства устанавливается точечное соответствие: соответственными считаются точки, отвечающие одинаковым значениям аргументов функции z. Например, для выпуклых поверхностей, задаваемых функцией $r(\mathbf{e})$, соответственными считаются точки, лежащие на одном и том же луче $\mathbf{e}$.

Теорема B. *Пусть на поверхностях некоторого семейства $\{S\}$, выпуклого относительно функции z, определена функция $\Phi(k_1, \ldots, k_n; \mathbf{n}, \mathbf{x})$, удовлетворяющая на них всех условию (3). Тогда для любых двух поверхностей S^0, $S^1 \in \{S\}$, представленных функциями z^0, z^1, разность $\Delta\Phi = \Phi(k_1^0, \ldots, \mathbf{x}^0) - \Phi(k_1^1, \ldots, \mathbf{x}^1)$ представима как линейное эллиптическое выражение относительно $\Delta z = z^1 - z^0$, т. е.*

$$\Delta\Phi = \sum a_{ik}\Delta z_{ik} + \sum b_i \Delta z_i + c\Delta z$$

и форма $\sum a_{ik}\xi_i\xi_k$ определенная.

4. Будем говорить, что в точке X поверхность S^0 касается поверхности S^1 извне по отношению функции z, если точка X на S^0 соответствует той же точке на S^1, поверхности касаются в точке X, так что в X функции z^0, z^1 равны вместе с их первыми производными и вместе с тем всюду $z^0 \geq z^1$. Например, если выпуклая поверхность S^0 касается S^1 извне в наглядном смысле, то $p^0(\mathbf{n}) \geq p^1(\mathbf{n})$, а в точке касания p^0 и p^1 равны вместе с первыми производными.

Теорема C. *Если в условиях теоремы B в соответственных точках двух поверхностей S^0 и S^1 семейства $\{S\}$*

$$\Phi(k_1^0, \ldots, k_n^0; \mathbf{n}^0, \mathbf{x}^0) = \Phi(k_1^1, \ldots, k_n^1; \mathbf{n}^1, \mathbf{x}^1) \tag{4}$$

и поверхность S^0 где-нибудь касается S^1 извне, то поверхности S^0 и S^1 совпадают. При этом предполагается, что если точка касания лежит на краю поверхностей, то в области G аргументов функции z имеется шар, касающийся соответствующей точки границы области G.

Согласно теореме B, из равенства (4) следует, что разность функций z^0 и z^1, задающих поверхности S^0 и S^1, удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению. Поэтому при внешнем касании поверхностей S^0 и S^1

выполнены все условия теоремы А, так что согласно этой теореме $z^0 = z^1$ и поверхности S^0 и S^1 совпадают.

Из сказанного выясняется метод доказательства теорем единственности поверхности с данной функцией Φ. Пусть S и S' две поверхности, для которых $\Phi = \Phi'$ и Φ удовлетворяет условиям (3). Задаем поверхности подходящими для данной задачи функциями z, так чтобы поверхности S и S' входили в выпуклое относительно z семейство, а Φ удовлетворяло условиям (3) на всех поверхностях семейства. Если тривиальным для данной задачи преобразованием (переносом, подобием и пр.), не меняющим Φ, удастся привести поверхности S, S' в положение, когда одна из них касается другой извне, то из теоремы C получим, что они совпадают. Этим единственность поверхности с данной Φ — единственность с точностью до тривиального преобразования — будет доказана. В некоторых случаях этот метод несколько видоизменяется, но принцип остается тот же.

§ 2. *Поверхности относительно данного начала*

1. В теоремах 1–3 этого параграфа речь идет о поверхностях S, рассматриваемых при данном начале O, со следующими условиями: 1) никакая S не проходит через O; 2) любой луч $\mathbf{e}$, идущий из O, пересекает каждую поверхность S не более чем в одной точке; 3) никакая S не имеет касательных плоскостей, проходящих через O.

Соответственными точками двух поверхностей будем считать либо точки, лежащие на одних и тех же лучах $\mathbf{e}$, либо точки с параллельными внешними нормалями $\mathbf{n}$, предполагая поверхности выпуклыми. В теоремах 1–3 речь идет о поверхностях, у которых в соответственных точках некоторая функция $\Phi(k_1, \ldots, k_n; \mathbf{n}, \mathbf{x})$ имеет равные значения. Так как соответствие точек может пониматься в двух смыслах, то каждая теорема означает две теоремы. Замечания к доказательствам будем делать для того случая, когда соответственными считаются точки, лежащие на одном луче $\mathbf{e}$; в этом случае поверхности считаются заданными функцией $r(\mathbf{e})$.

Теорема 1. *Пусть для некоторой замкнутой поверхности S_0 некоторая функция $\Phi(k_1, \ldots, k_n; \mathbf{n}, \mathbf{x})$ не меняется при подобном преобразовании поверхности из центра O. Тогда, если на замкнутой поверхности S Φ имеет те же значения, что на S_0 (в соответственных точках), то S подобна S_0 относительно центра O.* (Согласно сказанному в § 1 Φ удовлетворяет поставленным там условиям. Если же поверхность S_0 выпукла, то достаточно требовать, чтобы $\partial\Phi/\partial k_i$ были одного знака при всех $k_i > 0$.) В частности, если функция Φ не меняется при подобном преобразовании *любой* поверхности S, то каждые две замкнутые поверхности S, на которых Φ имеет в соответственных точках одни и те же значения, оказываются подобными друг другу, т. е. S задается функцией Φ однозначно с точностью до подобия с центром O. Примерами таких функций Φ могут служить $(k_1 + \ldots + k_n)r$, $(k_1 + \ldots + k_n)p$ и др.

Для доказательства теоремы 1 достаточно подвергнуть поверхность S_0 такому подобному преобразованию из центра O, чтобы она коснулась S извне. Тогда согласно теореме C S_0 должна совпасть с S и теорема 1 доказана.

Если на S_0 все $k_i > 0$, то в той точке, где S_0 касается S извне, это тем более верно на поверхности S и вообще на всех промежуточных поверхностях $(1-t)r_0 + tr$. Следовательно, в этом случае достаточно предполагать лишь, что все $\partial\Phi/\partial k_i$ одного знака при всех $k_i > 0$.

Частный случай теоремы 1 представляет следующая теорема: *замкнутая выпуклая поверхность с началом O внутри определяется однозначно с точностью до подобия с центром O заданием площади сферического изображения ее областей G как функции конуса направлений* **e**, *идущих из O в точки G.* Это соответствует

$$\Phi = k_1 \ldots k_n \frac{r^n}{(\mathbf{ne})}.$$

Указанная теорема была доказана мною в [5], однако без каких-либо предположений о регулярности поверхности.

2. Если для данной поверхности S_0 $\Phi = f(\mathbf{n}, \mathbf{x})$, то, введя новую функцию $\Phi^* = e^{\Phi - f}$, получим, что $\partial\Phi^*/\partial k_i$ имеют тот же знак, что и $\partial\Phi/\partial k_i$, а на S_0 $\Phi^* = 1$. Это значит, что без ограничения общности можно всегда считать для данной поверхности $\Phi = 1$.

На сфере с центром O $k_i = 1/r = 1/p$. Поэтому при любой функции Φ для сферы с центром O выполнено равенство

$$\Phi(k_1, \ldots, k_n; \mathbf{n}, \mathbf{x}) = \Phi\left(\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}; \mathbf{n}, \mathbf{x}\right) \tag{5}$$

и аналогичное — с заменой r на p.

Пользуясь сделанным только что замечанием, т. е. заменяя в теореме 1 Φ функцией $\Phi^* = \exp\big[\Phi(k_1, \ldots) - \Phi(1/r, \ldots)\big]$ и принимая за поверхность S_0 сферу с центром O, приходим к следующей характеристике сферы.

Если на замкнутой поверхности S выполнено равенство (5) или аналогичное — с заменой r на p, то поверхность S есть сфера с центром O [2)].

[2)] Эта теорема дает пример применения теоремы 1 в ее общей форме, когда о функции Φ известно, что она не меняется при подобном преобразовании только данной поверхности S_0. В данном случае эта S_0 есть сфера.

Точно так же, так как на сфере с центром O $\Phi(rk_1, \ldots, rk_n) = c$ и $\Phi(pk_1, \ldots, pk_n) = c$ $(c = \text{const})$, то замкнутая поверхность S, на которой $\Phi = c$, необходимо оказывается сферой с центром O.

Частные случаи таких характеристик сферы среди выпуклых поверхностей были установлены В. Бляшке [6] для $\Phi = p^2 k_1 k_2$ и К. П. Гротемейером [7, 8] для $\Phi = p(k_1 + k_2)$ и $\Phi = r(k_1 + k_2)$ [3)]. В. Зюсс [9] получил также подобную характеристику n-мерной сферы при $\Phi = p^m S_m(k_1, \ldots, k_2)$, где S_m — элементарная симметрическая функция m-й степени.

3. В. Бляшке доказал и несколько больше, а именно: *если на замкнутой выпуклой поверхности S $k_1 k_2 p^2 = c$, то S есть сфера с центром O, так что необходимо $c = 1$.* Эта теорема легко обобщается следующим образом.

Теорема 2. *Пусть на некоторой замкнутой выпуклой поверхности S $\Phi(k_1, \ldots, k_n; \mathbf{n}, \mathbf{x}) = 1$; S_1 — такая замкнутая выпуклая поверхность, что на ней и всех ей подобных поверхностях S_λ $\Phi = c(\lambda)$, где $c(\lambda)$ — постоянна на каждой поверхности S_λ и является неубывающей функцией коэффициента подобия λ. Тогда S_1 подобна S и необходимо оказывается $c = 1$.* (Требование выпуклости можно снять, но тогда нужно предполагать, что $\partial\Phi/\partial k_i > 0$ при любых k_i.)

Доказательство отличается от доказательства теоремы 1 тем, что сначала устанавливается равенство $c = 1$. Для этого рассматриваются поверхности $S_{\lambda'}$, $S_{\lambda''}$ $(\lambda' > \lambda'')$, касающиеся S соответственно извне и изнутри. Тогда из монотонности Φ как функции k_i легко устанавливается, что $c(\lambda)' \le 1$ и $c(\lambda'') \ge 1$, а тогда из монотонности $c(\lambda)$ следует $c = 1$. После этого остается применить теорему 1.

Кстати, из сделанного выше замечания следует, что предположение $\Phi = 1$ для данной S всегда можно считать выполненным.

Теорема Бляшке следует из теоремы 2 для случая $\Phi = k_1 k_2 p^2 = k_1 k_2 (\mathbf{nx})^2$ и $c(\lambda) = \text{const}$.

Заметим еще, что из теоремы 2 следует и такой, например, результат: *если на замкнутой выпуклой поверхности S $k_1 k_2 = p^{-2} + a(p)$, где $a(p)$ — невозрастающая функция (в частности, постоянная), то S есть сфера и $a(p) = 0$.* Действительно, положим $\Phi = \exp(k_1 k_2 - p^{-2} - a(p))$. Тогда на S $\Phi = 1$, а на сфере S_λ радиуса λ $\Phi = e^{-a(\lambda)} = c(\lambda)$, где $c(\lambda)$ — неубывающая функция λ. Поэтому из теоремы 2 следует, что S есть сфера.

4. Совершенно аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 3. *Если для двух поверхностей S с общим краем, имеющих общий проектирующий конус из начала O, в соответственных точках некоторая функция Φ, не меняющаяся при подобном преобразовании, имеет одинаковые значения, то такие поверхности совпадают.* (При этом если

[3)] В [8] содержится и более сильный результат, не охватываемый нашими теоремами.

поверхности выпуклы и обе обращены выпуклостью от O, или обе — к O, то достаточно требовать, что все $\partial\Phi/\partial k_i$ одного знака при всех $k_i > 0$ или всех $k_i < 0$.)

Теорема 3, собственно говоря, включает теорему 1, когда общий край поверхностей сводится к одной общей точке.

При удалении начала в бесконечность теореме 3 соответствует

Теорема 4. *Пусть две поверхности S', S'' однозначно проектируются в одну и ту же замкнутую область G плоскости P и не имеют касательных плоскостей, перпендикулярных P. Будем считать соответственными те их точки, которые либо имеют общую проекцию x на плоскость P, либо — параллельные нормали, считая тогда поверхности выпуклыми. Тогда, если края поверхностей совпадают и всюду на них в соответственных точках выполнено равенство*

$$\Phi(k'_1, \dots, k'_n; \mathbf{n}', \mathbf{x}') = \Phi(k''_1, \dots, k''_n; \mathbf{n}'', \mathbf{x}''),$$

где $\mathbf{x}$ — точка области G, то поверхности S' и S'' совпадают. (Если S' и S'' выпуклы и обращены выпуклостью в одну сторону, то опять достаточно требовать, что $\partial\Phi/\partial k_i$ одного знака при всех $k_i > 0$ или при всех $k_i < 0$.)

Доказательство получается путем такого перемещения одной из поверхностей в направлении, перпендикулярном плоскости P, в результате которого эта поверхность окажется касающейся другой извне.

Пример представляет теорема Реллиха [10], которая получается, если рассматривать выпуклые поверхности в трехмерном пространстве, а за Φ принять гауссову кривизну $k_1 k_2$.

§ 3. *Поверхности безотносительно выбора начала*

1. Теорема 5. *Если на поверхности S, служащей границей какого-либо тела (т. е. конечной области), $\Phi(k_1, \dots, k_n) = \mathrm{const}$, то S есть сфера.* (При этом, в согласии с условием § 1, предполагается, что все $\partial\Phi/\partial k_i$ одного знака при любых k_i; если же предполагать, что S выпукла, то это достаточно требовать лишь при всех $k_i > 0$.)

Полагая, в частности, $\Phi = k_1 + k_2$ приходим к следующей теореме:

Замкнутая поверхность постоянной средней кривизны в трехмерном пространстве, не имеющая самопересечений и, следовательно, ограничивающая тело, есть сфера. На языке физики это значит, что не существует мыльного пузыря, отличного от шара.

В предположении выпуклости поверхности этот результат был получен еще Г. Либманом [11], а при более широком предположении [4)] — Х. Хопфом

[4)] Это предположение: существует хотя бы сколь угодно узкий конус таких направлений, что каждая прямая этого направления пересекает поверхность не более чем в двух точках.

и К. Фоссом [12]. Еще раньше Х. Хопф [13] доказал, что односвязная замкнутая поверхность, на которой $\Phi(k_1, k_2) = \text{const}$ будет сферой при очень общих предположениях о функции Φ, включающих, однако, ее симметричность. Этот результат Х. Хопфа ни в коей мере не покрывается теоремой 5, но он охватывается формулируемой дальше теоремой 8.

Для выпуклой поверхности в трехмерном пространстве теорема 5 содержится в общей теореме, которая в предположении аналитичности поверхности была доказана мною еще в 1938 г. [14–16]. В предположении симметричности функции $\Phi(k_1, k_2)$ теорема 5 для выпуклых поверхностей была доказана позже С. С. Черном [17].

Для n-мерных поверхностей ранее известные частные случаи теоремы 5 исчерпываются теоремой В. Зюсса [18], в которой поверхность предполагается выпуклой, а Φ есть какая-либо элементарная симметрическая функция от k_i или от $R_i = 1/k_i$. Некоторое ослабление условия выпуклости в этой теореме Зюсса было дано Сюнь Чжуань-Цзи [19]. Недавно К. Фосс [20] доказал теорему 5 для n-мерных аналитических выпуклых поверхностей при любой симметричной функции Φ. (В работах [12, 20] содержится также результат, не охватываемый нашими теоремами. См. особенно [20, § 5].)

2. В предположении, что поверхность S выпуклая, теорема 5 вытекает из следующей теоремы относительно поверхностей с краем.

Теорема 6. *Пусть две выпуклые поверхности S', S'' имеют сферическим изображением одну и ту же замкнутую полусферу G. Пусть в точках края их опорные функции равны: $p'(\mathbf{n}) = p''(\mathbf{n})$ и всюду в точках с одинаковыми нормалями $\mathbf{n}$*

$$\Phi(k'_1, \ldots, k'_n; \mathbf{n}) = \Phi(k''_1, \ldots, k''_n; \mathbf{n}).$$

Тогда поверхности равны; они совмещаются переносом в направлении, перпендикулярном краю полусферы G.

Равенство опорных функций на краю означает, что цилиндры, описанные по краю поверхностей, совпадают. Считая направление к полюсу полусферы G направлением вверх, можно сказать, что идущие вниз части этих цилиндров C', C'' ограничивают вместе с поверхностями S', S'', как «шапками», два бесконечных выпуклых тела Q' и Q''. Бесконечные их части совпадают.

Поэтому, сдвигая Q'' вниз, можно поместить его целиком в Q'. После этого, сдвигая Q'' вверх, достигнем такого положения, когда «шапка» S'' коснется S' изнутри, так сказать, в момент выхода наружу из тела Q'. В этот момент S' касается S'' извне «по отношению к опорной функции $p(\mathbf{n})$» в смысле определения, данного в § 1. Поэтому, применяя теорему C, убеждаемся, что поверхности S' и S'' совпадают.

Из теоремы 6 следует

Теорема 6а. *Пусть на замкнутой выпуклой поверхности S в точках с нормалями, симметричными относительно некоторой плоскости P, некоторая функция $\Phi(k_1, \dots, k_n; \mathbf{n})$ имеет равные значения. Тогда S имеет плоскость симметрии, параллельную P.*

Достаточно поверхность S разделить на части S', S'', имеющие сферическими изображениями две дополнительные полусферы, разделенные плоскостью P. Тогда, отражая S'' в плоскости P, получим две поверхности, удовлетворяющие условиям теоремы 6; они, следовательно, равны, т. е. исходная поверхность S симметрична. Если теперь на некоторой замкнутой выпуклой поверхности $\Phi = \text{const}$, то согласно теореме 6а такая поверхность имеет плоскость симметрии любого направления и тем самым оказывается сферой. Так получаем теорему 5 для замкнутой выпуклой поверхности. В общем случае теорема 5 получается аналогичным путем. Рассматриваем две части S', S'' данной поверхности S, имеющие сферическими изображениями две дополнительные полусферы, разделенные некоторой плоскостью P. Отражаем S'' в плоскости P и передвигаем ее так, чтобы она коснулась S' изнутри. В условиях теоремы это оказывается возможным по крайней мере при почти всех направлениях плоскости P. При касании изнутри S' и S'' должны совпадать. Значит, поверхность S имеет плоскости симметрии почти всех направлений и, следовательно, оказывается сферой.

3. Теорема 6 является, так сказать, крайним случаем следующей теоремы о выпуклых поверхностях с краем.

Теорема 7. *Пусть S', S'' — две выпуклые поверхности, имеющие сферическим изображением одну и ту же замкнутую область G, содержащуюся в полусфере. Пусть на этих поверхностях в точках с параллельными нормалями $\Phi(k'_1, \dots, k'_n; p', \mathbf{n}) = \Phi(k''_1, \dots, k''_n; p'', \mathbf{n})$. Если, кроме того, всюду на краю $p'(\mathbf{n}) = p''(\mathbf{n})$, то поверхности S' и S'' совпадают, кроме единственного случая, когда G есть целая полусфера: в этом случае поверхности могут не совпадать, но они совмещаются движением в направлении, перпендикулярном границе полусферы.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6. Для случая области G, содержащейся внутри полусферы, подобная теорема сформулирована в моей книге [21, гл. VI, § 6, п. 2]; намеченная там идея доказательства исходит от А. В. Погорелова. С другой стороны, аналогичная теорема для случая, когда область G не помещается в полусфере, едва ли верна без существенных ограничений на функцию Φ.

Остается нерешенной проблема: можно ли в теореме 5 снять требование, что поверхность ограничивает тело? В трехмерном пространстве это можно сделать в предположении, что поверхность односвязна.

4. Для поверхностей в трехмерном пространстве имеет место следующая общая теорема единственности.

Теорема 8. *Пусть даны — замкнутая выпуклая поверхность S^0 и такая функция $\Phi(k_1, k_2; \mathbf{n})$, что при каждом данном $\mathbf{n}$ $\frac{\partial \Phi}{\partial k_1}\frac{\partial \Phi}{\partial k_2} > 0$, если $k_1 = \lambda k_1^0$, $k_2 = \lambda k_2^0$, где k_1^0, k_2^0 — главные кривизны поверхности S в точке с нормалью $\mathbf{n}$, а λ — любое число. Тогда если на односвязной замкнутой поверхности S' $\Phi(k_1', k_2'; \mathbf{n}) = \Phi(k_1^0, k_2^0; \mathbf{n})$ (равенство в точках поверхностей S^0, S' с параллельными нормалями), то S' равна S^0. Предполагается, что поверхности S^0 и S' кусочно аналитические.* (Можно придать этой теореме более общую форму, сняв требование выпуклости поверхности S_0.)

Если S^0 — сфера и Φ не зависит от $\mathbf{n}$, то теорема 8 сводится к следующему: если функция $\Phi(k_1, k_2)$ такова, что $\frac{\partial \Phi}{\partial k_1}\frac{\partial \Phi}{\partial k_2} > 0$ при $k_1 = k_2$, то односвязная замкнутая поверхность, на которой $\Phi = \mathrm{const}$, есть сфера. В предположении симметричности функции Φ этот результат был получен Х. Хопфом [13].

Требование кусочной аналитичности поверхностей в теореме 8, наверное, лишнее, но без него мы не имеем ее исчерпывающего доказательства. В предположении только двукратной непрерывной дифференцируемости поверхностей можно доказать следующую, несколько менее общую теорему.

Теорема 9. *Пусть S и S' — две замкнутые поверхности, из которых S выпуклая, а S' либо тоже выпуклая, либо по крайней мере такая, что сферическое изображение ее областей неположительной кривизны не покрывает сферы. Тогда, если при некоторой функции Φ в точках поверхностей S и S' с параллельными нормалями $\Phi(k_1, k_2; \mathbf{n}) = \Phi(k_1', k_2'; \mathbf{n})$, то поверхность S равна S'. (Здесь на Φ налагается принятое в § 1 условие $\frac{\partial \Phi}{\partial k_1}\frac{\partial \Phi}{\partial k_2} > 0$, и если S' выпукла, то этого достаточно требовать при $k_1 k_2 > 0$.)*

Здесь заключены цитированные в § 1 теоремы Кристоффеля и Минковского, а также теоремы 5 и 6а для случая выпуклых поверхностей в трехмерном пространстве [5)]. Отметим еще такой частный случай, указанный в [14]: *если у двух замкнутых выпуклых поверхностей средние кривизны в точках с параллельными нормалями равны, то поверхности равны.*

Теорема 9 была доказана мною [14–16] для аналитических выпуклых поверхностей [6)]; а позже А. В. Погорелов [22] снизил требования регулярности до четырехкратной, а П. Хартман и А. Винтнер [23] — до трехкратной дифференцируемости, ограничиваясь, однако, случаем функции Φ, симметричной и дважды дифференцируемой по k_1, k_2. Теперь требование регулярности снижено до естественного предела: двукратной дифференцируемости

[5)] Для того чтобы получить теорему 5, достаточно принять одну из поверхностей за сферу. Для получения теоремы 6а достаточно вместе с поверхностью S рассматривать ей симметричную относительно плоскости P.

[6)] Выводы моих работ [14, 16] не вполне точны, они проходят лишь в предположении симметричности и регулярности функции Φ. В [15] это не нужно.

поверхности и притом без предположения о дополнительной дифференцируемости и симметричности Φ, а условие выпуклости поверхности S' ослаблено. Не представляется невероятным, что теорема верна без всяких дополнительных предположений о поверхности S', кроме, конечно, замкнутости, но доказательство такой общей теоремы — вопрос открытый.

Доказательство теоремы 9 основано опять же на теоремах A, B, но применение общего метода здесь более сложно, чем в предыдущих случаях. В доказательстве теоремы 8 использование теорем A и B сочетается с методом индексов, впервые примененным С. Э. Кон-Фоссеном [16].

5. Для замкнутых выпуклых поверхностей в пространствах высшего числа измерений подобная общая теорема, по-видимому, не имеет места (в отличие от теоремы 7, касающейся поверхностей с краем). Однако известны ее частные случаи для функций Φ специального вида. Именно Φ может быть любой элементарной симметрической функцией от главных радиусов кривизны $R_i = 1/k_i$. Для $\Phi = R_1 R_2 \ldots R_n$ теорема была установлена Г. Минковским [4], а для $R_1 + \ldots + R_n$ она доказывается простым перенесением на n-мерный случай того метода, каким она была доказана для $n = 2$ А. Гурвицем [24]. Для любой же элементарной симметрической функции Φ от R_i она была доказана мной [25] и притом даже в самом общем виде, не требующем никаких условий регулярности, когда функция Φ заменяется соответствующей функцией множества на сфере. Некоторое обобщение было получено мной в [24]. Эти теоремы мы, однако, не умеем доказать излагаемым здесь методом и вообще никакие иные их доказательства, кроме данных в [25, 26], нам неизвестны. Точно так же нам неизвестны никакие другие подобные результаты для n-мерных поверхностей при $n > 2$, кроме заключенных в теореме 6 и в [19].

В этой связи уместно поставить хотя бы такой вопрос: будут ли две n-мерные замкнутые выпуклые поверхности равны и параллельно расположены, если у них в точках с параллельными нормалями равны средние кривизны $(k_1 + \ldots + k_n)$ или вообще m-е средние кривизны, т. е. элементарные симметрические функции m-й степени от кривизн k_i?

6. Наконец, еще один вопрос. В [15] я доказал следующую теорему.

Пусть S и S' — две аналитические замкнутые выпуклые поверхности. Пусть в их точках с параллельными нормалями индикатрисы Дюпена не могут быть помещены одна в другую параллельным переносом, не считая случая, когда они совмещаются. Тогда поверхности S и S' равны и параллельно расположены.

Отсюда теорема 9 для выпуклых поверхностей вытекает немедленно. В самом деле, если $\Phi(k_1, k_2; \mathbf{n})$ есть монотонная функция от k_1, k_2, то из $\Phi(k_1, k_2; \mathbf{n}) = \Phi(k'_1, k'_2; \mathbf{n})$ следует, что разности $k_1 - k'_1$, $k_2 - k'_2$ либо разных знаков, либо обе равны нулю. А отсюда следует, что индикатрисы Дюпена либо обязательно выступают одна из другой, либо совмещаются. Поэтому из приведенной теоремы следует, что аналитические поверхности, на которых $\Phi = \Phi'$, равны и параллельно расположены.

Если здесь требуется аналитичность поверхностей, то от функции Φ не требуется ничего, кроме (строгой) монотонности по k_1, k_2, так что она может быть, скажем, разрывной, и как функция $\mathbf{n}$ вообще совершенно произвольной. Само собой разумеется, что подобный результат никак не следует из теоремы 8.

В связи с этим остается открытым вопрос: можно ли и в указанной теореме с индикатрисами Дюпена освободиться от требования аналитичности и спуститься до трех- или двукратной дифференцируемости?

§ 4. *Другие результаты и обобщения*

1. К приведенным выше результатам можно присоединить еще теорему о равенстве изометричных замкнутых выпуклых поверхностей, доказанную тем же методом в [2] вместе с некоторыми теоремами о равенстве изометричных выпуклых поверхностей с краем при соответствующих дополнительных условиях. Тот же метод применим к доказательству установленной мной теоремы о равенстве изометричных поверхностей «типа тора» [27] и притом с существенным ослаблением наложенных в [27] условий регулярности.

Далее, во всех формулированных выше теоремах, кроме 5 и 6а, вместо обычных главных кривизн можно иметь в виду главные кривизны в смысле «относительной дифференциальной геометрии», т. е. главные кривизны по отношению к некоторой фиксированной замкнутой выпуклой поверхности S_0, как бы играющей роль сферы (см., например, [28, § 8]). Именно произвольная поверхность S отображается на S_0 так, что в соответственных точках нормали параллельны. Главные кривизны поверхности S по отношению S_0 суть не что иное, как экстремумы отношения вторых форм поверхностей S, S_0 в соответственных точках. Они являются совокупными аффинными инвариантами поверхностей S, S_0.

Теоремы 5 и 6а занимают особое положение, так как в них играют роль отражения, по отношению к которым поверхность S_0, играющая роль сферы, может не быть инвариантной. Там же, где фигурируют лишь переносы и подобия, несимметричность поверхности S_0 не имеет никакого значения: формулировки теорем и их доказательства остаются буквально теми же. Некоторые простейшие частные случаи так обобщенных теорем 1, 2, 8 можно найти в [6, 7, 9]. Стоит еще отметить, что во всех наших теоремах нет надобности предполагать функцию Φ непрерывной по аргументам функции z, задающей поверхность. Например, в теореме 9 функцию $\Phi(k_1, k_2; \mathbf{n})$ можно принимать равной $k_1 k_2$ для одних нормалей $\mathbf{n}$ и равной $k_1 + k_2$ — для других нормалей.

Наконец, аналогично можно доказывать соответствующие теоремы о жесткости, которые приводятся к линейным дифференциальным уравнениям. Такова, например, теорема, соответствующая теореме 9: если при бесконечно малой деформации замкнутой выпуклой поверхности некоторая функция $\Phi(k_1, k_2; \mathbf{n})$ стационарна, то деформация сводится к бесконечно малому переносу.

Таким образом, оказывается, что теорема А позволяет охватить и дополнить новыми общими результатами значительное большинство известных теорем единственности для конечных поверхностей в целом.

2. Мы ограничивались, однако, дважды непрерывно дифференцируемыми поверхностями, в то время как ряд теорем единственности установлен, например, для любых замкнутых выпуклых поверхностей без всяких предположений дифференцируемости, см. [5, 25]. При такой общности, конечно, теряется самый аппарат дифференциальных уравнений. Однако и с сохранением его требование двукратной дифференцируемости может быть ослаблено и заменено во многих случаях требованием гладкости и существования обобщенных вторых производных, суммируемых с n-й степенью, где n — число измерений поверхности, так что в трехмерном пространстве речь идет о поверхностях, имеющих обобщенные вторые производные, суммируемые с квадратом. Во всех предыдущих теоремах 1–7 по крайней мере, поскольку речь идет о выпуклых поверхностях, можно ограничиваться этим требованием, присоединяя также условие, что для рассматриваемых функций Φ все их производные $\partial\Phi/\partial k_i$ почти везде больше какой-либо положительной постоянной.

Такое ослабление условий регулярности возможно благодаря соответствующему обобщению теоремы А. Именно в ней можно говорить об обобщенных решениях дифференцированного уравнения (1). Т. е. требуется, чтобы решения были непрерывны вместе со своими первыми производными, имели обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью, и соответственно удовлетворяли уравнению почти везде.

3. Наконец, наш метод может быть применен к доказательству теорем единственности для поверхностей в пространствах постоянной кривизны: в пространстве Лобачевского и в сферическом пространстве, т. е. на $(n+1)$-мерной сфере для поверхностей, лежащих в одной полусфере. Прямое обобщение допускают теоремы, в которых не фигурирует понятие параллельности.

Особенно просто обобщаются теоремы 1–3. Если воспользоваться моделью Кэли — Клейна и принять начало O, фигурирующее в этих теоремах, за центр шара, где реализуется геометрия Лобачевского, то теоремы 1–3 для поверхностей в пространстве Лобачевского превращаются в соответствующие теоремы евклидовой геометрии с соответствующей заменой величин k_i, r. Например, формулировки и доказательства характеристик сферы в пространстве Лобачевского, аналогичных тем, которые приведены в § 2, не составляют никакого труда.

Теорема 5 переносится в пространства постоянной кривизны дословно, причем можно дать такое ее доказательство, которое совершенно одинаково проходит как в евклидовом, так и в любом пространстве постоянной кривизны.

Статья поступила в редакцию
21.VII.1956

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка // Вестн. ЛГУ. 1954. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 3–17.
2. *Александров А. Д., Сенькин Е. П.* О неизгибаемости выпуклых поверхностей // Там же. 1955. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 3–13.
3. *Christoffel E. B.* Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche... // J. Reine Angew. Math. 1865. Bd 64. S. 193–209.
4. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd 57. S. 447–495.
5. *Александров А. Д.* Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 243–255.
6. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
7. *Grotemeyer K. P.* Eine kennzeichnende Eigenschaft der Affinsphären // Arch. Math. 1952. Bd 3. S. 307–310.
8. *Grotemeyer K. P.* Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel // Arch. Math. 1953. Bd 4. S. 230–233.
9. *Süss W.* Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären durch Herrn K.-P. Grotemeyer // Arch. Math. 1952. Bd 3. S. 311–313.
10. *Rellich F.* Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge — Amperschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus // Math. Ann. 1933. Bd 107. S. 804.
11. *Liebmann H.* Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung // Math. Ann. 1900. Bd 53. S. 81–112.
12. *Hopf H., Voss K.* Ein Satz aus der Flächentheorie im Groıen // Arch. Math. 1943. Bd 3. S. 187–192.
13. *Hopf H.* Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen // Math. Nachr. 1951. Bd 4. S. 232–249.
14. *Александров А. Д.* Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей // Докл. АН СССР. 1938. Т. 19, № 4. С. 233–236.
15. *Александров А. Д.* О теоремах единственности для замкнутых поверхностей // Там же. 1939. Т. 22, № 3. С. 99–102.
16. *Александров А. Д.* О работах С. Э. Кон-Фоссена // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, вып. 3. С. 107–141.
17. *Chern S. S.* Some new characterizations of the Euclidean sphere // Duke Math. J. 1945. V. 12. P. 279–290.
18. *Süss W.* Zur relativen Differentialgeometrie V: Über Eihyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ // Tohoku Math. J. 1929. V. 31. P. 202–209.

19. *Hsiung Chuan-Chih.* Some integral formulas for closed hyper-surfaces // Math. Scand. 1954. V. 2. P. 286–294.
20. *Voss K.* Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze fur geschlossene Flächen und Hyperflächen // Math. Ann. 1956. Bd 131. S. 180–218.
21. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
22. *Погорелов А. В.* Распространение общей теоремы единственности А. Д. Александрова на случай неаналитических поверхностей // Докл. АН СССР. 1948. Т. 62, № 3. С. 297–299.
23. *Hartman P., Wintner A.* On the third fundamental form of a surface // Amer. J. Math. 1953. V. 75. P. 298–334.
24. *Hurwitz A.* Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier // Ann. Ecole Norm. (3). 1902. T. 19. P. 357–408.
25. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. II // Мат. сб. 1937. Т. 2, вып. 6. С. 1205–1235.
26. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. IV // Там же. 1938. Т. 3, вып. 2. С. 227–249.
27. *Александров А. Д.* Об одном классе замкнутых поверхностей // Мат. сб. 1938. Т. 4, вып. 1. С. 69–76.
28. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». II

Вестн. ЛГУ. 1957. № 7. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 2. С. 15–44

В нашей работе [1] [1)] был дан обзор теорем единственности для поверхностей в целом, получаемых изложенным там же в общих чертах методом, основанным на сведéнии этих теорем к дифференциальным уравнениям. В настоящей работе мы даем вывод соответствующих дифференциальных уравнений. Именно мы даем здесь доказательство теорем В, В_0 работы [1] и притом в существенно обобщенном и уточненном виде. Однако никакие ссылки на [1] нам не будут нужны.

§ 1. Результаты

1. Пусть R — $(n+1)$-мерное риманово пространство, в котором введены координаты $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$. Мы рассматриваем поверхности S в R, задаваемые уравнениями вида

$$x^{n+1} = z(x^1, x^2, \ldots, x^n) \equiv z(x),$$

где x означает совокупность значений координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Мы принимаем обычные обозначения $z_i = \partial z/\partial x^i$, $z_{ij} = \partial^2 z/\partial x^i\,\partial x^j$.

Под k_i будем понимать главные кривизны поверхности S, причем неизменно подразумевается, что они расположены по величине, т. е. $k_1 \geq k_2 \geq \geq \cdots \geq k_n$.

Будем предполагать, что нормаль к поверхности S образует с $(n+1)$-м координатным вектором угол $\leq \pi/2$, чем определяются знаки всех k_i.

Мы вовсе не предполагаем, что поверхности S всюду дважды дифференцируемы, так что k_i могут быть определены не везде, но наши выводы относятся к тем точкам, где поверхности дважды дифференцируемы.

[1)] См. с. 336–351 настоящего издания. — *Прим. ред.*

Будем говорить, что семейство $\{S\}$ поверхностей S выпукло, если функции $z(x)$ определены в одной и той же области и семейство вместе с любыми двумя своими поверхностями S^0, S^1, заданными функциями z^0, z^1, содержит все поверхности S^t, задаваемые функциями

$$z^t = (1-t)z^0 + tz^1 \qquad (0 \le t \le 1).$$

Первый основной результат настоящей работы представляет следующая

Теорема 1. *Пусть для поверхностей S некоторого выпуклого семейства $\{S\}$ в R определена функция*

$$\Phi(k_1, \dots, k_n; z_1, \dots, z_n, z; x^1, x^2, \dots, x^n) = \Phi(k_i; z_i, z; x),$$

где k_i — главные кривизны поверхности в точке (x, z) [2]*. Пусть функция Φ такова, что при каждом фиксированном x, при котором она определена, т. е. там, где поверхность S дважды дифференцируема, Φ непрерывно дифференцируема по k_i, z_i, z. (О характере ее зависимости от x абсолютно ничего не предполагается.)*

Тогда, если для двух поверхностей $S^0, S^1 \in \{S\}$

$$\Phi(k_i^0; z_i^0, z^0; x) = \Phi(k_i^1; z_i^1, z^1; x)$$

во всех точках, где обе части последнего равенства определены, то разность

$$\Delta z = z^1 - z^0$$

удовлетворяет (в этих точках) определенным образом строящемуся дифференциальному уравнению

$$A^{jk}\Delta z_{jk} + B^r \Delta z_r + C\Delta z = 0, \tag{1.1}$$

где A^{jk}, B^r, C — некоторые функции x, определенные функцией Φ и поверхностями S^0, S^1 (мы применяем обычную тензорную запись, опуская знак

---

[2] В [1] мы вводили функцию $\Phi(k_i; \mathbf{n}, \mathbf{x})$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, а $\mathbf{x}$ — ее точка. Но вектор $\mathbf{n}$, очевидно, определяется производными z_i, а точка $\mathbf{x}$ — координатами $x^1, \dots, x^{n+1}$ или (x, z), так что оба определения функции Φ равносильны. Строго говоря, Φ предполагается определенной при каждом указанном x в некоторой области изменения переменных k_i, z_i, z, включающей значения соответствующих величин в точках поверхностей S, отвечающих этому $\mathbf{x}$. Непрерывность производных от Φ по k_i, z_i, z при данном $\mathbf{x}$ можно не предполагать, достаточно их ограниченности или даже менее того, но в последнем случае нам пришлось бы в § 3 пользоваться аппаратом интеграла Перрона, а не Лебега.

суммы). *Если к тому же все производные* $\partial\Phi/\partial k_i$ *одного знака, то уравнение (1)*[3] *оказывается эллиптического типа, т. е. форма* $A^{jk}\xi_j\xi_k$ *определенная.* Не ограничивая общности, можно предполагать $\partial\Phi/\partial k_i > 0$, и тогда форма $A^{jk}\xi_j\xi_k$ положительна.

2. Свойства коэффициентов A^{jk}, B^r, C выясняются из следующих дополнений к теореме 1.

Дополнение 1. На множестве, где все производные z_i^0, z_i^1 ограничены и $\partial\Phi/\partial k^i$ удовлетворяют неравенствам

$$H > \frac{\partial\Phi}{\partial k_i} > h > 0 \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{1.2}$$

с некоторыми константами H, h, уравнение (1) строго эллиптично, т. е. форма A^{jk} не только положительна, но существуют такие постоянные A, $a > 0$, что

$$A\sum\xi_i^2 > A^{jk}\xi_j\xi_k > a\sum\xi_i^2. \tag{1.3}$$

Заметим, что если форма A^{jk} положительна, то умножением левой части уравнения (1) на подходящую функцию от x всегда можно добиться, чтобы было $A^{jk}\xi_j\xi_k > a\sum\xi_i^2$, или, наоборот, $A\sum\xi_i^2 > A^{jk}\xi_j\xi_k$. Поэтому только оба неравенства (3) вместе имеют смысл.

Дополнение 2. На множестве, где все производные z_i^0, z_i^1, z_{jk}^0, z_{jk}^1 ограничены и ограничены также производные $\partial\Phi/\partial k_i$, $\partial\Phi/\partial z_i$, $\partial\Phi/\partial z$, коэффициенты уравнения (1) ограничены. (Для коэффициентов A^{jk} утверждение, как легко видеть, уже содержится в дополнении 1.)

Вместе с тем коэффициенты уравнения (1) могут не быть непрерывными даже если поверхности S^0, S^1 и функция Φ аналитические. Это обстоятельство стоит особо подчеркнуть, так как оно показывает, что в наших выводах мы неизбежно сталкиваемся с дифференциальными уравнениями достаточно общего типа, к которым классические теоремы могут быть неприменимы.

Тем не менее следующее дополнение к теореме 1 дает простое условие непрерывности коэффициентов уравнения (1).

Дополнение 3. Если поверхности S^0, S^1 дважды непрерывно дифференцируемы и функция Φ непрерывна по всем своим аргументам вместе с производными $\partial\Phi/\partial k_i$, $\partial\Phi/\partial z_i$, $\partial\Phi/\partial z$ и если, кроме того, она удовлетворяет тому условию, что при любых i, j

$$\frac{\partial\Phi}{\partial k_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial k_j} \quad \text{как только}\, k_i = k_j, \tag{1.4}$$

[3] Мы пользуемся обозначением формул вида (1.1), (2.3) и т. п., где первое число означает номер параграфа, а второе — номер формулы в данном параграфе. При ссылке на формулы внутри параграфа указываем только второе число.

то коэффициенты уравнения (1) оказываются непрерывными функциями x. (Условие (4) заведомо выполнено, если функция симметрична по всем k_i и непрерывно дифференцируема.)

Оказывается, что условия дополнения 3 не только достаточны, но в известном смысле и необходимы для непрерывности коэффициентов уравнения (1).

3. Дополнение 3, как будет доказано, является следствием следующей теоремы.

Теорема 1а. *Если в функции Φ выразить главные кривизны поверхности $x^{n+1} = z(x^1, \ldots, x^n)$ через z_{jk}, z_i, z, x, то окажется, что*[4)]

$$\Phi(k_i; z_i, z; x) = F(z_{jk}; z_i, z; x).$$

Тогда при условиях дополнения 3 для каждой дважды непрерывно дифференцируемой поверхности S функция F оказывается непрерывной по всем аргументам вместе со своими производными по z_{jk}, z_i, z.

Если, кроме того, все $\partial\Phi/\partial k_i > 0$, то форма

$$\frac{\partial F}{\partial z_{11}} \xi_1^2 + \frac{\partial F}{\partial z_{12}} \xi_1 \xi_2 + \ldots$$

положительна.

Доказательство этой теоремы много проще доказательства теоремы 1. Вместе с тем из нее легко вытекает, ссылкой на так называемую лемму Адамара, что если при условиях дополнения 3 для двух поверхностей S^0, S^1

$$\Phi(k_i^0; z_i^0, z^0; x) = \Phi(k_i^1; z_i^1, z^1; x),$$

то разность $\Delta z = z^1 - z^2$ удовлетворяет уравнению вида (1) с непрерывными коэффициентами.

Заметим, что в случае, когда Φ симметрична и аналитична по k_i, первое утверждение теоремы 1а оказывается почти очевидным. В самом деле главные кривизны суть корни известного уравнения, содержащего коэффициенты b_{jk}, g_{jk} второй и первой форм поверхности. Симметричная же и аналитическая функция корней алгебраического уравнения оказывается, как известно, также аналитической функцией его коэффициентов. Стало быть, в данном случае Φ приводится к аналитической функции от b_{jk}, g_{jk}:

$$\Phi(k_i; z_i, z; x) = \Psi(b_{jk}, g_{jk}; z_i, z; x). \tag{1.5}$$

[4)] Главные кривизны суть экстремумы отношения второй формы поверхности к первой. Поэтому они являются функциями коэффициентов данных форм. Эти же коэффициенты, в свою очередь, выражаются через производные z_{jk}, z_i, а также величины, характеризующие метрику пространства в данной точке (в данных координатах x^i). Через эти величины k_i оказываются зависящими еще от x и z.

В свою очередь, b_{jk}, g_{jk} известным образом выражаются через производные z_{jk}, z_i, а также некоторые величины, зависящие от линейного элемента пространства в данных координатах x^i. Так как эти выражения регулярны, то оказывается

$$\Phi(k_i; z_i, z; x) = F(z_{ij}; z_i, z; x),$$

где F регулярная функция своих аргументов.

Если же не требовать аналитичности Φ, а только ее непрерывной дифференцируемости, то такое простое заключение невозможно, потому что симметричная дифференцируемая функция корней алгебраического уравнения может не быть дифференцируемой функцией его коэффициентов. Дифференцируемость может нарушаться там, где появляются кратные корни [5)].

Это замечание указывает в известной степени на те трудности, которые лежат в доказательстве теоремы 1а и тем более теоремы 1, так как в ней не предполагается и симметричность функции Φ.

4. В евклидовом пространстве во многих задачах соответствие между двумя поверхностями устанавливается по параллельности нормалей. Так будет в теоремах, утверждающих равенство поверхностей, у которых некоторые функции кривизны равны в точках с параллельными нормалями. В таком случае задание поверхностей координатами их точек не отвечает существу вопроса и поверхность лучше задавать как огибающую семейства плоскостей.

Пусть в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве поверхность S определена как огибающая семейства плоскостей с нормальными уравнениями

$$\mathbf{n}\mathbf{x} = p(\mathbf{n}),$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали; $\mathbf{x}$ — текущий вектор. Функцию $p(\mathbf{n})$ мы называем опорной функцией поверхности S, несколько отклоняясь в этом от обычного смысла данного термина. Функция $p(\mathbf{n})$ определяет поверхность; мы предполагаем ее заданной в некоторой области изменения вектора $\mathbf{n}$, или, что равносильно, в области на единичной сфере. Каждому $\mathbf{n}$ отвечает точка поверхности, координатный вектор которой обозначаем $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{n})$. Это точка поверхности, лежащая на плоскости семейства с нормалью $\mathbf{n}$. Предполагается, что такая точка для каждого $\mathbf{n}$ единственная.

В качестве численных независимых переменных в функциях $p(\mathbf{n})$, $\mathbf{x}(\mathbf{n})$ можно ввести любые координаты на единичной сфере, поскольку $\mathbf{n}$ зачеркивает область на такой сфере. Например, можно взять подходящие n

---

[5)] Примером может служить функция $\Phi = |k_1/2 - k_2/2|^{3/2} + |k_1/2 + k_2/2|^{3/2}$ корней квадратного уравнения $k^2 + 2bk + c = 0$, которая непрерывно дифференцируема в области $k_1, k_2 > 0$. Однако $\Phi = |b^2 - c|^{3/2} + |b|^{3/2}$ и при $b^2 = c$ производная $\partial\Phi/\partial c$ обращается в бесконечность. Вместе с тем $\partial\Phi/\partial k_1$, $\partial\Phi/\partial k_2 > 0$, как это мы требуем от рассматриваемых функций Φ.

составляющих вектора $\mathbf{n}$. Производные от p по этим координатам будем обозначать p_i, p_{jk}.

Пусть E — регулярная, ориентированная, замкнутая выпуклая поверхность со всюду положительной кривизной и $\mathbf{y}$ — зачерчивающий ее вектор как функция нормали. Эта поверхность будет играть роль как бы гауссовой сферы, как это делается в «относительной дифференциальной геометрии» [6]. Именно каждой точке X поверхности S сопоставляется та точка Y на E, где нормаль параллельна нормали поверхности S в точке X. Поверхность E можно назвать «условной сферой», а указанное отображение — «условным сферическим отображением». При этом отображении в каждой паре соответственных точек X, Y поверхностей S, E устанавливается также соответствие направлений: соответствующими будут те дифференциалы $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$, которые отвечают одинаковым дифференциалам нормалей $d\mathbf{n}$.

Определим главные радиусы кривизны R_i, поверхности S относительно поверхности E как экстремумы отношения второй формы поверхности S ко второй форме поверхности E:

$$\frac{d\mathbf{n}\,d\mathbf{x}}{d\mathbf{n}\,d\mathbf{y}},$$

причем формы берутся здесь, конечно, для $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$, отвечающих одинаковым $d\mathbf{n}$. Согласно введенной терминологии, можно сказать, что R_i суть собственные значения формы $d\mathbf{n}\,d\mathbf{x}$ по отношению формы $d\mathbf{n}\,d\mathbf{y}$.

Геометрический смысл отношения вторых форм состоит в том, что оно есть не что иное, как отношение радиусов кривизны цилиндров, описанных вокруг S и E, с образующими перпендикулярными $d\mathbf{n}$ [7].

5. Будем говорить, что семейство $\{S\}$ поверхностей S выпукло (относительно опорных функций), если все его поверхности имеют одно и то же сферическое изображение и вместе с любыми двумя поверхностями S^0, S^1, заданными опорными функциями p^0, p^1, оно содержит все поверхности S^t с опорными функциями $p^t = (1-t)p^0 + tp^1 \quad (0 \le t \le 1)$.

---

[6] Даваемые далее определения из относительной дифференциальной геометрии исходят в основном от В. Зюсса, см., напр., [2, § 38].

[7] Речь идет о цилиндрах с $(n-2)$-мерными образующими и, стало быть, с единственной не равной нулю главной кривизной. Очевидно, при бесконечно малом смещении из данной точки $|d\mathbf{n}|$ есть угол поворота нормали к цилиндру, а $d\mathbf{n}\,d\mathbf{x}/|d\mathbf{n}|$ — составляющая смещения в направлении, перпендикулярном образующей. Поэтому радиус кривизны цилиндра есть $d\mathbf{n}\,d\mathbf{x}/d\mathbf{n}^2$. Направления, отвечающие экстремумам отношения $d\mathbf{n}\,d\mathbf{x} : d\mathbf{n}\,d\mathbf{y}$ суть главные направления на S по отношению поверхности E. Как известно и легко убедиться, для них имеет место обобщенная теорема Родрига: они характеризуются тем, что в них $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{y}$ пропорциональны; для i-го главного направления $d\mathbf{x} - R_i d\mathbf{y} = 0$. Эти факты, однако, мы не будем использовать.

Теорема 2. *Пусть фиксирована некоторая «условная сфера» E и пусть для поверхностей S некоторого выпуклого семейства $\{S\}$ определена функция*

$$\Phi(R_1, \dots, R_n; x_1, \dots, x_{n+1}, p; \mathbf{n}) = \Phi(R_i; x_i, p; \mathbf{n}),$$

где $R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_n$ — главные радиусы кривизны поверхности S по отношению поверхности E в точке с координатами $x_1, \dots, x_{n+1}$, а p — значение опорной функции для единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ в той же точке. Пусть функция Φ такова, что всюду, где она определена (это точки, где $p(\mathbf{n})$ дважды дифференцируема), Φ дифференцируема по R_i, x_i, p. Тогда, если для двух поверхностей $S^0, S^1 \in \{S\}$

$$\Phi(R_i^0; x_i^0, p^0; \mathbf{n}) = \Phi(R_i^1; x_i^1, p^1; \mathbf{n})$$

во всех точках с одинаковыми нормалями, где обе части последнего равенства определены, то разность $\Delta p = p^1 - p^0$ опорных функций поверхностей S^0, S^1 удовлетворяет (в этих точках) определенным образом строящемуся дифференциальному уравнению

$$A^{jk} \Delta p_{jk} + B^i \Delta p_i + C \Delta p = 0, \tag{1.6}$$

где A^{jk}, B^i, C — некоторые функции $\mathbf{n}$, определенные функциями Φ, p^0, p^1. Если к тому же все производные $\partial\Phi/\partial R_i$ одного знака, то уравнение (6) эллиптического типа.

Вместо функции p можно воспользоваться другой функцией. Пусть $\mathbf{e}$ — данный единичный вектор. Положим

$$r = \frac{p(\mathbf{n})}{\mathbf{en}}.$$

Если выбрать прямоугольные координаты $x_1, \dots, x_{n+1}$ так, что ось x_{n+1} направлена по вектору $\mathbf{e}$, то $\mathbf{en}$ будет составляющей n_{n+1} вектора $\mathbf{n}$. Величина r определена и непрерывна в области $n_{n+1} > 0$. Положим

$$v_i = \frac{n_i}{n_{n+1}} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Тогда r можно, очевидно, представить как функцию v_i, т. е. $r = r(v_1, \dots, v_n)$. Эта функция, конечно, определяет $p(\mathbf{n})$ и, кстати, $p^t = (1-t)p^0 + tp^1$ равносильно $r^t = (1-t)r^0 + tr^1$.

Для функции $r = r(v_1, \dots, v_n)$ также верны утверждения теоремы 2. Удобство ее состоит в том, что в случае, когда Φ не содержит x и p, уравнение для $\Delta r = r^1 - r^0$ не содержит ни первых производных Δr_i, ни самой Δr, т. е. имеет вид $a^{jk} \Delta r_{jk} = 0$.

Теорема 2 вполне аналогична теореме 1. К ней могут быть также сформулированы дополнения, вполне аналогичные дополнениям 1–3 теоремы 1. Кроме того, имеет место теорема 2а, аналогичная теореме 1а. Формулировки этих дополнений к теореме 2 настолько, очевидно, сходны с формулировками дополнений к теореме 1, что нет надобности их здесь воспроизводить.

6. Поверхность, заданная как огибающая семейства плоскостей, может иметь особенности: ребра возврата, конические точки и т. п., даже если опорная функция $p(\mathbf{n})$ регулярна. Такие особые точки это те, где хотя бы один из главных радиусов кривизны обращается в нуль. Мы можем не исключать в теореме 2 таких случаев и не считать эти точки особыми.

С другой стороны, точки нулевой кривизны должны считаться особыми, так как в них хотя бы один из главных радиусов кривизны обращается в бесконечность.

Поверхность, регулярная в обоих смыслах (в координатном задании и в задании опорной функцией), характеризуется, следовательно, тем, что она не только регулярна в обычном смысле, но и не имеет точек нулевой кривизны. Простейший случай такой поверхности — выпуклая поверхность со всюду положительной кривизной.

Для таких поверхностей можно вместо R_i ввести относительные главные кривизны $k_i = 1/R_i$, так что речь может идти о функции $\Phi(k_i; x_i, p; \mathbf{n})$. Если к тому же E — обыкновенная сфера, то k_i — главные кривизны в обычном смысле. Так как $p = \mathbf{nx}$, то в таком случае Φ оказывается, по существу, того же типа, что в теореме 1. Некоторую разницу составляют лишь требования дифференцируемости: в случае теоремы 2 дифференцируемость Φ по составляющим нормали необязательна, а в случае теоремы 1 необязательна дифференцируемость по $x^1, \ldots, x^n$.

7. В теореме 1 главные кривизны выступают как собственные значения второй формы поверхности по отношению к ее первой форме, т. е. как экстремумы отношения этих форм. В теореме 2 фигурируют относительные главные радиусы кривизны, которые определены как собственные значения второй формы поверхности S по отношению ко второй форме поверхности E. В соответствии с этим первой задачей для подготовки доказательств наших теорем будет исследовать некоторые свойства собственных значений одной формы по отношению к другой. Эти собственные значения суть функции коэффициентов этих форм, и мы получим некоторые результаты, касающиеся производных этих функций. Этому посвящен следующий параграф.

Далее, в § 3 мы докажем теорему 1, в § 4 — дополнения к ней, включая теорему 1а, и, наконец, в § 5 — теорему 2 вместе с ее дополнениями, причем здесь дело сведется в основном к указанию, что эти доказательства вполне аналогичны выводам § 3, 4.

§ 2. О ПРОИЗВОДНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ПО ЕЕ КОЭФФИЦИЕНТАМ

1. Мы будем рассматривать две квадратичные формы g и b от n переменных, применяя обычную тензорную запись,

$$g = g_{jk}\xi^j\xi^k, \qquad b = b_{jk}\xi^j\xi^k.$$

Форма g предполагается положительно определенной. Под собственными значениями k_i, формы b по отношению к форме g понимаются экстремумы отношения b/g. Если, в частности, $g = \sum\left(\xi^j\right)^2$, то речь идет о собственных значениях формы b в обычном смысле.

Собственные значения k_i, мы неизменно предполагаем расположенными по величине: $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$. При таком условии каждое собственное значение k_i оказывается определенной функцией коэффициентов b_{jk}, g_{jk} и притом, как известно, непрерывной.

Более того, так как k_i суть корни известного алгебраического уравнения, то там, где нет кратных корней, они являются дифференцируемыми и даже аналитическими функциями коэффициентов. Когда же появляются кратные собственные значения, т. е. на соответствующих алгебраических многообразиях в пространстве коэффициентов b_{jk}, g_{jk}, дифференцируемость нарушается, как легко убедиться на простейшем примере собственных значений формы с двумя переменными.

2. Тем не менее имеет место

Лемма 1. *Производные собственных значений k_i формы b по отношению к форме g по коэффициентам b_{jk}, g_{jk} ограничены только в зависимости от нижней границы γ собственных значений формы g и верхней границы K модулей самих величин k_i* [8].

Именно имеют место неравенства

$$0 \leq \frac{\partial k_i}{\partial b_{jj}} \leq \frac{1}{\gamma}, \qquad \left|\frac{\partial k_i}{\partial b_{jk}}\right| \leq \frac{1}{\gamma} \qquad (j \neq k) \tag{2.1}$$

и, кроме того, всегда при любых i, j, k

$$\frac{\partial k_i}{\partial g_{jk}} = -k_i\frac{\partial k_i}{\partial b_{jk}}, \tag{2.2}$$

так что вследствие (1)

$$\left|\frac{\partial k_i}{\partial g_{jk}}\right| \leq \frac{K}{\gamma}. \tag{2.3}$$

[8] Уже на примере квадратного уравнения видно, что производные корней алгебраического уравнения по его коэффициентам не ограничены и обращаются в бесконечность при появлении кратных корней. Поэтому лемма 1 не тривиальна.

Всюду же, включая и те точки пространства коэффициентов b_{jk}, g_{jk}, где k_i не дифференцируемы, они удовлетворяют как функции от b_{jk}, g_{jk} условию Липшица, с постоянной Липшица, зависящей только от тех же величин K, γ. Это последнее утверждение непосредственно вытекает из ограниченности производных, потому что k_i непрерывны, а дифференцируемость их нарушается лишь на некоторых алгебраических многообразиях.

Таким образом, дело сводится к доказательству соотношений (1), (2).

Равенство (2) следует из того, что k_i удовлетворяет известному уравнению

$$F \equiv \begin{vmatrix} b_{11} - k_i g_{11} & b_{12} - k_i g_{12} & \dots \\ b_{21} - k_i g_{21} & b_{22} - k_i g_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Левая часть F этого уравнения может рассматриваться как функция от величин $b_{jk} - k_i g_{jk}$. Поэтому

$$\frac{\partial F}{\partial b_{jk}} = \frac{\partial F}{\partial (b_{jk} - k_i g_{jk})}, \qquad \frac{\partial F}{\partial g_{jk}} = -k_i \frac{\partial F}{\partial (b_{jk} - k_i g_{jk})} = -k_i \frac{\partial F}{\partial b_{jk}}. \tag{2.4}$$

По известному же свойству неявных функций

$$\frac{\partial F}{\partial b_{jk}} + \frac{\partial F}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial b_{jk}} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial g_{jk}} + \frac{\partial F}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial g_{jk}} = 0.$$

Эти равенства вместе с (4) дают (2).

3. Докажем теперь первые из неравенств (1). Дадим, например, коэффициенту b_{11} приращение Δb_{11}. Из экстремального свойства собственных значений k_i следует, как известно, что при $\Delta b_{11} > 0$ $\Delta k_i \geq 0$, а при $\Delta b_{11} < 0$ $\Delta k_i \leq 0$. Поэтому

$$\frac{\partial k_i}{\partial b_{11}} \geq 0 \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{2.5}$$

С другой стороны, легко подсчитать сумму этих производных. В самом деле вследствие инвариантности k_i по отношению совместных линейных преобразований форм b и g мы можем привести форму g ортогональным преобразованием к каноническому виду. Тогда для совместно преобразованных форм ($b \to \overline{b}$, $g \to \overline{g}$)

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{b}_{jj}}{\overline{g}_{jj}}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial k_i}{\partial b_{11}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\overline{g}_{jj}}\ \frac{\partial \overline{b}_{jj}}{\partial b_{11}}. \tag{2.6}$$

Если a^p_q — коэффициенты примененного ортогонального преобразования, то

$$\overline{b}_{jj} = a^r_j a^s_j b_{rs}$$

и, стало быть,

$$\frac{\partial \overline{b}_{jj}}{\partial b_{11}} = (a^1_j)^2.$$

Поэтому из (6) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial k_i}{\partial b_{11}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(a^1_j)^2}{\overline{g}_{jj}}. \tag{2.7}$$

А так как по известному свойству ортогонального преобразования

$$\sum_{j=1}^{n} (a^1_j)^2 = 1,$$

то, полагая $\min \overline{g}_{jj} = \gamma$, получим из (7)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial k_i}{\partial b_{11}} \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Поэтому, в силу (5), $\partial k_i / \partial b_{11} \leq 1/\gamma$, что и требовалось доказать.

4. Теперь докажем вторые неравенства (1). Дадим, например, коэффициенту b_{12} приращение Δb_{12}, так что вместо исходной формы b получим

$$b' = b + 2\Delta b_{12} \xi^1 \xi^2.$$

Подвергнем переменные в формах b, b', g ортогональной подстановке

$$\xi^1 = \frac{\overline{\xi}^1 + \overline{\xi}^2}{\sqrt{2}}, \quad \xi^2 = \frac{\overline{\xi}^1 - \overline{\xi}^2}{\sqrt{2}}, \quad \xi^3 = \overline{\xi}^3, \dots .$$

При этом собственные значения b и b' по отношению g не изменятся. Но форма b' примет вид

$$b' = \overline{b} + \Delta b_{12} (\overline{\xi}^1)^2 - \Delta b_{12} (\overline{\xi}^2)^2 = \overline{b} + \Delta \overline{b}_{11} (\overline{\xi}^1)^2 + \Delta \overline{b}_{22} (\overline{\xi}^2)^2,$$

где $\overline{b}$ — форма, полученная из b при указанной подстановке.

Таким образом, новая форма $\overline{b}'$ получается из $\overline{b}$ одновременным приращением коэффициентов $\overline{b}_{11}$, $\overline{b}_{22}$ на

$$\Delta\overline{b}_{11} = -\Delta\overline{b}_{22} = \Delta b_{12}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial k_i}{\partial b_{12}} = \frac{\partial k_i}{\partial \overline{b}_{11}}\frac{\partial \overline{b}_{11}}{\partial b_{12}} + \frac{\partial k_i}{\partial \overline{b}_{22}}\frac{\partial \overline{b}_{22}}{\partial b_{12}} = \frac{\partial k_i}{\partial \overline{b}_{11}} + \frac{\partial k_i}{\partial \overline{b}_{22}},$$

а применяя к стоящим в правой части производным уже доказанные неравенства (1), получим

$$-\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\partial k_i}{\partial b_{12}} \leq \frac{1}{\gamma}.$$

Лемма доказана.

5. Лемма 2. *Пусть у формы b по отношению к g при $b = b^0$, $g = g^0$ появляется m-кратное собственное значение, например $k_1^0 = \ldots = k_m^0$. Тогда сумма $k_1 + \ldots + k_m$ есть непрерывно дифференцируемая функция коэффициентов форм b, g также при $b = b^0$, $g = g^0$.*

Пусть, кроме того, $g^0 = \sum (\xi^i)^2$, а b^0 имеет канонический вид, т. е. при $j \neq k$ $\quad b_{jk}^0 = 0$ и к тому же коэффициенты b_{ii}^0 расположены по величине: $b_{11}^0 \geq b_{22}^0 \geq \ldots \geq b_{nn}^0$, так что $k_i^0 = b_{ii}^0$.

Тогда при $b = b^0$, $g = g^0$ будет

$$\frac{\partial(k_1 + \ldots + k_m)}{\partial b_{jj}} = \begin{cases} 1 & \text{при } j \leq m, \\ 0 & \text{при } j > m, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial(k_1 + \ldots + k_m)}{\partial b_{jk}} = 0 \quad \text{при } j \neq k. \tag{2.9}$$

(Мы говорим в лемме о первых m собственных значениях лишь для простоты обозначений; то же верно для любой группы сливающихся собственных значений. Само собой разумеется, что в частном случае, когда $m = 1$, получаем результат для производных некратного собственного значения.)

Доказательство. Из теории алгебраических функций известно, что если в некоторой точке пространства коэффициентов некоторые корни $k_1, \ldots, k_m$ алгебраического уравнения сливаются, так что получаем m-кратный корень, то сумма их будет и в этой точке аналитической функцией коэффициентов. Поэтому в нашем случае все производные $\partial(k_1 + \ldots + k_m)/\partial b_{jj}$, $\partial(k_1 + \ldots + k_m)/\partial g_{jk}$ существуют и непрерывны также при $b = b^0$, $g = g^0$.

Пусть теперь $g^0 = \sum (\xi^i)^2$ и форма b^0 имеет канонический вид. По условию $k_i^0 = b_{ii}^0$ и $k_1^0 = \ldots = k_m^0$, но $k_m^0 \neq k_i^0$ при $i > m$.

Форму b^0 можно написать в виде

$$b^0 = c^0 + d^0,$$

где c^0 содержит первые m переменных ξ^i, а d^0 — остальные.

Если мы даем приращение коэффициенту b_{jk} с $j, k > m$, не исключая $j = k$, то изменяется только форма d^0. Так как ее собственные значения k_i^0 отличны от $k_1^0, \ldots, k_m^0$, то при малых изменениях формы d^0 они с ними и не сливаются. Отсюда ясно, что $k_1, \ldots, k_m$ остаются независимыми от b_{jk} и

$$\frac{\partial k_i}{\partial b_{jk}} = 0 \qquad (i \leq m,\ j, k > m). \tag{2.10}$$

Если мы даем приращение коэффициенту b_{jk} с $j, k \leq m$, то изменяется только форма c^0. При малых ее изменениях ее собственные значения не смешиваются с собственными значениями формы d^0. Так что $k_1, \ldots, k_m$ остаются собственными значениями именно формы c^0. Но для нее всегда

$$k_1 + \ldots + k_m = b_{11} + \ldots + b_{mm},$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial(k_1 + \ldots + k_m)}{\partial b_{jk}} = 0 \quad (j \neq k) \\ &\frac{\partial(k_1 + \ldots + k_m)}{\partial b_{jj}} = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (j, k \leq m). \tag{2.11}$$

Придадим приращение Δb_{jk} коэффициенту b_{jk} с $j \leq m$, $k > m$, так что форма b^0 превратится в форму $b = b^0 + 2\Delta b_{jk}\xi^j\xi^k$. Выделяя переменные ξ^j, ξ^k, получим

$$b = f + h = f + b_{jj}^0 (\xi^j)^2 + 2\Delta b_{jk}\xi^j\xi^k + b_{kk}^0 (\xi^k)^2.$$

Здесь форма f не содержит ξ^j, ξ^k и, стало быть, остается в исходном каноническом виде. Поэтому для вычисления измененных собственных значений надо лишь привести к каноническому виду форму h. Но так как $j \leq m$, $k > m$, то $b_{jj}^0 \neq b_{kk}^0$ и потому, как показывает прямой подсчет, собственные значения формы h отличаются от b_{jj}^0, b_{kk}^0 на величину второго порядка относительно Δb_{jk} [9]. Поэтому

$$\frac{\partial k_i}{\partial b_{jk}} = 0 \qquad (j \leq m,\ k > m). \tag{2.12}$$

Формулы (10)–(12) содержат (8), (9), так что лемма доказана.

[9] Эти собственные значения суть $\left[b_{jj}^0 + b_{kk}^0 \pm \sqrt{(b_{jj}^0 - b_{kk}^0)^2 + 4\Delta b_{jk}^2}\ \right]/2$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

1. Пусть в $(n+1)$-мерном римановом пространстве R введены координаты $x^1, \dots, x^n, x^{n+1}$. Мы будем рассматривать n-мерные поверхности S в R, представимые уравнениями вида

$$x^{n+1} = z(x^1, \dots, x^n) \equiv z(x).$$

В связи с этим в дальнейшем x^i будет обозначать координаты $x^1, \dots, x^n$, тогда как координата x^{n+1} будет обозначаться z; совокупность x^i обозначаем x.

Согласно основной теореме римановой геометрии риманово пространство в окрестности каждой точки совпадает с соприкасающимся евклидовым пространством с точностью до величин второго порядка включительно. Поэтому величины первого и второго порядков, относящиеся к точке поверхности S, такие как нормальный вектор и главные кривизны, определяются для поверхности S в R так же, как для поверхности в евклидовом пространстве.

В частности, единичный вектор нормали n поверхности S определяется производными $z_i = \partial z / \partial x^i$; его ковариантные составляющие пропорциональны $-z_1, \dots, -z_n, 1$.

Если обозначить координатные векторы через $\mathbf{e}_i$, то

$$d\mathbf{x} = \sum \mathbf{e}_i \, dx^i + \mathbf{e}_{n+1} \, dz = \sum (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{n+1} z_i) \, dx^i,$$

и так как $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = G_{ij}$ суть коэффициенты метрической формы пространства, то для коэффициентов первой формы поверхности имеем известные выражения

$$g_{jk} = G_{n+1,n+1} z_j z_k + G_{k,n+1} z_j + G_{j,n+1} z_k + G_{jk}. \tag{3.1}$$

Для нас существенно только то, что g_{jk} непрерывно дифференцируемы по z_i, z.

Далее, поскольку x^i суть независимые переменные,

$$d^2\mathbf{x} = \mathbf{e}_{n+1} \, d^2 z + d\mathbf{e}_{n+1} \, dz + \sum d\mathbf{e}_i \, dx^i,$$

поэтому вторая форма будет

$$\mathbf{n} \, d^2\mathbf{x} = (\mathbf{n} \, \mathbf{e}_{n+1}) \, d^2 z + (\mathbf{n} \, d\mathbf{e}_{n+1}) \, dz + \sum (\mathbf{n} \, d\mathbf{e}_j) \, dx^j.$$

Выражая дифференциалы d^2z, dz, $d\mathbf{e}_i$ через dx^i, получим выражения для коэффициентов второй формы в виде

$$b_{jk} = (\mathbf{n}\mathbf{e}_{n+1})z_{jk} + \left(\mathbf{n}\frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}}{\partial x^j}\right)z_k + \left(\mathbf{n}\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}\right);$$

так как $\mathbf{n}$ определяется первыми производными z_i, а векторы $\mathbf{e}_i$ и их производные — координатами $x^1, \ldots, x^n, z$, то мы можем написать

$$b_{jk} = a(z_i, z; x)z_{jk} + c_{jk}(z_i, z; x). \tag{3.2}$$

В этом выражении для нас существенно пока лишь то, что b_{jk} выражается через z_{jk} линейно с коэффициентом a, не зависящим от j, k, и что b_{jk} непрерывно дифференцируемы по z_i, z.

Главные кривизны $k_1, \ldots, k_n$ поверхности S суть собственные значения второй ее формы по отношению к первой, т. е. экстремумы отношения

$$\frac{b_{jk}\, dx^j\, dx^k}{g_{jk}\, dx^j\, dx^k}.$$

Здесь, как принято, мы опускаем знаки суммы. Этим мы будем пользоваться и в дальнейшем.

2. Обратимся теперь непосредственно к теореме 1.

Рассмотрим в римановом пространстве R выпуклое семейство $\{S\}$ поверхностей S, задаваемых уравнениями

$$x^{n+1} = z(x^1, \ldots, x^n) \equiv z(x).$$

Согласно принятому в § 1 определению это значит, что все функции $z(x)$ определены в одной и той же области изменения переменных x^i и что вместе с любыми двумя поверхностями S^0, S^1, заданными функциями $z^0(x)$, $z^1(x)$, семейство содержит все поверхности S^t, $0 \le t \le 1$, задаваемые функциями $z^t(x) = (1-t)z^0(x) + tz^1(x)$. Между поверхностями семейства установлено точечное соответствие: соответственными считаются точки, отвечающие одинаковым $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Кроме того, предполагается, что вектор нормали $\mathbf{n}$ нигде не перпендикулярен координатному вектору $\mathbf{e}_{n+1}$, так что можно считать

$$a = (\mathbf{n}\mathbf{e}_{n+1}) > 0. \tag{3.3}$$

Пусть для поверхностей семейства $\{S\}$ определена функция

$$\Phi(k_1, \ldots, k_n; z_1, \ldots, z_n, z; x^1, \ldots, x^n) \equiv \Phi(k_i; z_i, z; x),$$

причем k_i расположены по величине: $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$.

Предполагается, что функция Φ дифференцируема по k_i, z_i, z и при каждом данном x ее производные по k_i, z_i, z ограничены.

Теорема 1 утверждает, что *если для двух поверхностей $S^0, S^1 \in \{S\}$ всюду в соответственных точках, где поверхности S^0, S^1 дважды дифференцируемы,*

$$\Phi(k_i^0; z_i^0, z^0; x) = \Phi(k_i^1; z_i^1, z^1; x), \tag{3.4}$$

то разность $\Delta z = z^1 - z^0$ удовлетворяет в этих точках некоторому однородному линейному дифференциальному уравнению, и если все $\partial\Phi/\partial k_i$ одного знака, то это уравнение эллиптического типа.

Итак, пусть для двух данных поверхностей S^0, S^1, заданных функциями z^0, z^1, выполнено равенство (4). Построим семейство поверхностей S^t, заданных функциями

$$z^t(x) = (1-t)z^0(x) + tz^1(x) = z^0 + t\Delta z \qquad (0 \leq t \leq 1). \tag{3.5}$$

Эти поверхности будут дважды дифференцируемыми при всех тех x, при которых поверхности S^0, S^1 дважды дифференцируемы. Мы ограничиваемся рассмотрением только таких $\mathbf{x}$, где это имеет место. При каждом таком x главные кривизны k_i^t поверхностей S^t определены и являются функциями t. Покажем, что как функции t они удовлетворяют условию Липшица.

Пусть b_{jk}^t, g_{jk}^t — коэффициенты второй и первой форм поверхности S^t при данном x. Как указано в п. 1, они являются непрерывно дифференцируемыми функциями z_{jk}^t, z_i^t, z^t. Эти же последние, в силу (5), зависят от t линейно, так что b_{jk}^t, g_{jk}^t оказываются непрерывно дифференцируемыми функциями t.

Вместе с тем k_i^t суть собственные значения второй формы поверхности S^t относительно первой ее формы. Поэтому, согласно лемме 1 § 2, они как функции коэффициентов b_{jk}^t, g_{jk}^t этих форм удовлетворяют условию Липшица. При этом постоянную Липшица можно взять одну и ту же для всех t, так как она зависит только от нижней границы собственных значений первой формы и верхней границы модулей кривизн k_i^t. А так как b_{jk}^t, g_{jk}^t непрерывно дифференцируемы по t, то k_i^t удовлетворяют условию Липшица так же, как функции t.

Отсюда, согласно известной теореме, следует, что при каждом данном x все k_i^t дифференцируемы по t почти везде в промежутке [0,1].

3. Определим для поверхностей S^t функцию

$$\Phi^t = \Phi(k_i^t; z_i^t, z^t; x).$$

При каждом данном x это есть функция t. По условию Φ дифференцируема по k_i, z_i, z и ее производные при данном x ограничены. А как доказано, k_i^t удовлетворяют как функции t условию Липшица; для величин же z_i^t, z^t это очевидно. Отсюда подобно предыдущему заключаем, что при данном $\mathbf{x}$ Φ^t так же удовлетворяет, как функция t, условию Липшица. Поэтому почти везде в промежутке $0 \leq t \leq 1$ она имеет производную и приращение ее равно интегралу от производной.

Но вследствие равенства (4) $\Phi^1 - \Phi^0 = 0$; значит мы можем написать

$$\int\limits_0^1 \frac{d\Phi^t}{dt}\,dt = \Phi^1 - \Phi^0 = 0. \tag{3.6}$$

Далее, поскольку Φ^t дифференцируема по k_i^t, z_i^t, z^t, а сами k_i^t, z_i^t, z^t одновременно дифференцируемы по t при почти всех t, то при таких t

$$\frac{d\Phi^t}{dt} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial k_i}\,\frac{dk_i}{dt} + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\,\frac{dz_i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\frac{dz}{dt}. \tag{3.7}$$

(Здесь и дальше мы для простоты обозначений опускаем указатель t и пишем k_i вместо k_i^t и т. п.)

Так как $z^t = z^0 + t\Delta z$, то $dz_i/dt = \Delta z_i$, $dz/dt = \Delta z$, поэтому, подставляя выражение (7) для $d\Phi^t/dt$ в равенство (6), получим

$$\int\limits_0^1 \sum \frac{\partial \Phi}{\partial k_i}\,\frac{dk_i}{dt}\,dt + \sum \int\limits_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\,dt \cdot \Delta z_i + \int\limits_0^1 \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dt \cdot \Delta z = 0. \tag{3.8}$$

Отсюда ясно, что нам остается только преобразовать первый интеграл к выражению, линейному относительно Δz_{jk}, Δz_i, Δz, и убедиться в его эллиптичности. При отсутствии кратных кривизн это несложно, но в общем случае преобразование этого интеграла требует дополнительных соображений.

4. Фиксируем некоторое данное x. При этом x главные кривизны k_i поверхностей S^t являются непрерывными функциями t в промежутке [0,1]. Число возможных комбинаций равных кривизн k_i конечно, и соответственно этому промежуток [0,1] разбивается на конечное число множеств T_q, в каждом из которых имеется свой набор групп равных друг другу кривизн; например, $k_1 = k_2 = \ldots = k_{l_1}$, $k_{l_1+1} = \ldots = k_{l_1+l_2}$ и т. д., но $k_{l_1} > k_{l_1+1}$, $k_{l_1+l_2} > k_{l_1+l_2+1}$ и т. д.

При этом мы включаем в каждое T_q только те значения t, при которых существуют производные dk_i/dt и, следовательно, выполняется равенство (7). Так как множество остальных значений t имеет меру нуль, то их исключение не повлияет на вычисление интересующего нас интеграла.

Интеграл от 0 до 1 можно представить как сумму интегралов по множествам T_q. (Структура этих множеств, как легко видеть, достаточно проста, и такое представление интеграла возможно.)

Рассмотрим какое-либо множество T_q при данном фиксированном x.

Группы индексов i, отвечающих равным кривизнам, обозначим $L_1, L_2, \ldots, L_m$, так что, например, $L_1 = \{1, 2, \ldots, l_1\}$. Кроме того, обозначим значения кривизн в каждой группе через $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \ldots, \overline{k}_m$, так что

$$\overline{k}_s = k_i \quad (i \in L_s), \qquad \overline{k}_s = \frac{1}{l_s} \sum_{i \in L_s} k_i. \tag{3.9}$$

Согласно принятому определению множества T_q в каждой его точке существуют производные dk_i/dt. Отсюда ясно, что в каждой точке множества T_q, являющейся его точкой сгущения, равны не только кривизны каждой группы k_i $(i \in L_s)$, но и их производные. Поэтому в этих точках

$$\frac{dk_i}{dt} = \frac{d\overline{k}_s}{dt} \quad (i \in L_s), \qquad \frac{d\overline{k}_s}{dt} = \frac{1}{l_s} \frac{d}{dt} \sum_{i \in L_s} k_i. \tag{3.10}$$

Так как совокупность изолированных точек множества T_q не более чем счетна, мы можем пренебречь ею при вычислении интеграла по множеству T_q. Поэтому дальше мы ограничиваемся лишь теми значениями $t \in T_q$, при которых верно не только (7) и (9), но и (10).

5. Вследствие того, что в каждой s-й группе кривизны k_i равны $\overline{k}_s$, мы можем представить функцию Φ как функцию от этих $\overline{k}_s$, т. е.

$$\Phi(k_1, \ldots, k_n; \ldots) = \overline{\Phi}(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_m; \ldots),$$

причем

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k}_s} = \sum_{i \in L_s} \frac{\partial \Phi}{\partial k_i} \qquad (s = 1, \ldots, m). \tag{3.11}$$

Отсюда в соединении с (10) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial k_i} \frac{dk_i}{dt} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k}_s} \frac{d\overline{k}_s}{dt}. \tag{3.12}$$

По лемме 2 § 2, если, например, кривизны $k_1, \ldots, k_{l_1}$ равны между собой, но отличны от остальных, то их сумма является дифференцируемой функцией коэффициентов b_{jk}, g_{jk} второй и первой форм. Но в силу (9), $\overline{k}_s$ как раз и представляют собой суммы таких равных кривизн, деленные на l_s. Следовательно, в нашем случае все $\overline{k}_s$ дифференцируемы по b_{jk}, g_{jk}. В свою очередь, b_{jk}, g_{jk} являются дифференцируемыми функциями z_{pq}, z_r, z. Поэтому мы можем вместо (12) написать (опуская знаки суммы)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k_i}\,\frac{dk_i}{dt}=\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k}_s}\,\frac{d\overline{k}_s}{dt}=\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k}_s}\,\frac{\partial \overline{k}_s}{\partial b_{jk}}\,\frac{\partial b_{jk}}{\partial z_{pq}}\,\frac{dz_{pq}}{dt}+\ldots, \tag{3.13}$$

где отмеченные точками члены содержат только производные по z_r и z, поскольку g_{jk} не зависит от z_{pq}.

Из выражения (2) для b_{jk} следует, что

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial z_{pq}}=0$$

во всех случаях, кроме $j=p$, $k=q$, когда

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial z_{jk}}=a.$$

Далее, из $z^t=z^0+t\Delta z$ следует, что

$$\frac{dz_{jk}}{dt}=\Delta z_{jk},\quad \frac{dz_j}{dt}=\Delta z_j,\quad \frac{dz}{dt}=\Delta z.$$

Ввиду всех этих соотношений, выражение (13) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial k_i}\,\frac{dk_i}{dt}&=a\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k}_s}\,\frac{\partial \overline{k}_s}{\partial b_{jk}}\Delta z_{jk}+\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k}_s}\biggl(\frac{\partial \overline{k}_s}{\partial b_{jk}}\,\frac{\partial b_{jk}}{\partial z_r}+\\&+\frac{\partial \overline{k}_s}{\partial g_{jk}}\,\frac{\partial g_{jk}}{\partial z_r}\biggr)\Delta z_r+\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k}_s}\biggl(\frac{\partial \overline{k}_s}{\partial b_{jk}}\,\frac{\partial b_{jk}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{k}_s}{\partial g_{jk}}\,\frac{\partial g_{jk}}{\partial z}\biggr)\Delta z.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Это выражение имеет место всюду на множестве T_q, исключая его изолированные точки. Кроме того, согласно лемме 1 § 2 производные $\partial k_j/\partial b_{jk}$, $\partial k_j/\partial g_{jk}$, а, стало быть, также $\partial \overline{k}_s/\partial b_{jk}$, $\partial \overline{k}_s/\partial g_{jk}$ всюду ограничены. Поэтому в интеграле по множеству T_q можно заменить функцию

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial t}$$

на полученное выражение (14).

Применяя те же рассуждения к каждому из множеств T_q и складывая полученные интегралы по всем T_q, получим нужное нам выражение для первого интеграла в равенстве (8). Подставляя это выражение в равенство (8), мы сможем преобразовать его к виду

$$A^{jk}\Delta z_{jk} + B^r \Delta z_r + C\Delta z = 0, \tag{3.15}$$

где вследствие (8) и (14)

$$A^{jk} = \sum_q \int\limits_{T_q} A_q^{jk}(t)\,dt, \quad A_q^{jk}(t) = a\sum_s \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{k}_s}\,\frac{\partial\overline{k}_s}{\partial b_{jk}}, \tag{3.16а}$$

$$B^r = \sum_q \int\limits_{T_q} B_q^r(t)\,dt, \tag{3.16б}$$

$$B_q^r(t) = \sum_{s,j,k} \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{k}_s}\left(\frac{\partial\overline{k}_s}{\partial b_{jk}}\,\frac{\partial b_{jk}}{\partial z_r} + \frac{\partial\overline{k}_s}{\partial g_{jk}}\,\frac{\partial g_{jk}}{\partial z_r}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial z_r}$$

и C выражается так же, как B^r с заменой производных по z_r на производные по z.

Наш вывод верен при любом фиксированном x, при котором функции z^0, z^1 дважды дифференцируемы, поэтому A^{jk}, B^r, C суть некоторые функции x, определенные для всех таких x.

6. Покажем теперь, что если все $\partial\Phi/\partial k_i > 0$, то уравнение (15) эллиптического типа, т. е. что квадратичная форма $A^{jk}\xi_j\xi_k$ положительно определенная.

В силу (16а) эта форма является суммой интегралов от форм

$$A_q^{jk}(t)\xi_j\xi_k = a\left(\sum_s \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{k}_s}\,\frac{\partial\overline{k}_s}{\partial b_{jk}}\right)\xi_j\xi_k. \tag{3.17}$$

В теории дифференциальных уравнений хорошо известно, что характер выражения $A_q^{jk}(t)\Delta z_{jk}$ в смысле его эллиптичности не меняется при преобразовании переменных. Иными словами, характер формы (17) не изменяется при преобразованиях переменных x^i, так что для его выяснения можно выбирать переменные подходящим образом. Это, впрочем, явствует из выражений для коэффициентов этой формы: они образуют контравариантный симметричный тензор второго ранга и речь идет о характере этого тензора, который, конечно, инвариантен [10)].

[10)] Коэффициенты формы (17) суть, с точностью до множителя a, не что иное, как $\partial\overline{\Phi}/\partial b_{jk}$, а так как b_{jk} образуют ковариантный тензор, то $\partial\overline{\Phi}/\partial b_{jk}$, точнее $\partial\overline{\Phi}/\partial b_{ii}$ и $2^{-1}\partial\overline{\Phi}/\partial b_{jk}$ $(j \neq k)$, образуют контравариантный тензор.

В частности, при данном $t \in T_q$ мы можем привести первую и вторую формы поверхности S^t (в точке, отвечающей данному x) к такому виду, когда $g_{jk} = \delta_{jk}$ и $b_{jk} = k_j \delta_{jk}$. Но в таком случае согласно равенствам (9) и лемме 2 § 2 оказывается

$$\frac{\partial \overline{k}_s}{\partial b_{jk}} = \frac{1}{l_s} \frac{\partial}{\partial b_{jk}} \sum_{i \in L_s} k_i = \begin{cases} 1/l_s & \text{при } j = k \in L_s, \\ 0 & \text{при всех остальных } j, k. \end{cases}$$

Поэтому форма (17) примет вид

$$a \sum_s \frac{1}{l_s} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k}_s} \sum_{j \in L_s} \xi_j^2 = a \sum_s \left(\frac{1}{l_s} \sum_{i \in L_s} \frac{\partial \Phi}{\partial k_i} \right) \left(\sum_{i \in L_s} \xi_j^2 \right). \tag{3.18}$$

Здесь $\partial \overline{\Phi} / \partial \overline{k}_s$ выражены через $\partial \Phi / \partial k_i$ согласно (11). А так как все $\partial \Phi / \partial k_i > 0$ и по условию (3) $a > 0$, то форма (17) положительна. Вместе с этим положителен и ее интеграл, а так как это верно для всех множеств T_q, то форма $A^{jk} \xi_j \xi_k$ также положительна. А это и значит, что уравнение (15) эллиптического типа.

§ 4. *Дополнения к теореме 1*

1. Докажем первое дополнение к теореме 1: *Если производные z_r^0, z_r^1 ограничены и*

$$H > \frac{\partial \Phi}{\partial k_i} > h > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{4.1}$$

где H и h постоянные, то уравнение (3.15) для Δz строго эллиптично, т. е. существуют такие постоянные $C, c > 0$, что при всех x

$$C \sum \xi_i^2 > A^{jk} \xi_j \xi_k > c \sum \xi_i^2. \tag{4.2}$$

Так как в силу (3.16а) коэффициенты A^{jk} являются суммами интегралов от $A_q^{jk}(t)$, то для неравенства (2) достаточно, чтобы при каждом x и t, при котором $A_q^{jk}(t)$ определено, было

$$C \sum \xi_i^2 > A_q^{jk}(t) \xi_j \xi_k > c \sum \xi_i^2, \tag{4.3}$$

причем постоянные C, c одни и те же для всех x и всех соответствующих этому x множеств T_q.

Для доказательства заметим прежде всего, что из ограниченности производных z_r^0, z_r^1 вытекает равномерная ограниченность производных $z_r^t = (1-t) z_r^0 + t z_r^1 \quad (0 \le t \le 1)$.

Отсюда следует, что первые формы поверхностей S^t удовлетворяют неравенствам

$$G\sum\left(dx^i\right)^2 > g_{jk}dx^j\,dx^k > g\sum\left(dx^i\right)^2, \tag{4.4}$$

где G и g — положительные постоянные. (Постоянные G, g зависят, конечно, не только от границы производных z_r^0, z_r^1, но и от линейного элемента пространства.)

Вследствие же леммы 1 § 2

$$\left|\frac{\partial k_i}{\partial b_{jk}}\right| < \frac{1}{g}.$$

Поэтому, если к тому же $\partial\Phi/\partial k_i$ ограничены, то ограничены и коэффициенты $A_q^{jk}(t)$, как это видно из их выражений (3.16a).

Из ограниченности коэффициентов $A_q^{jk}(t)$ непосредственно следует левое из неравенств (3).

Докажем правое неравенство (3).

Выберем какую-либо точку X на одной из поверхностей S^t, т. е. фиксируем x и t. Рассмотрим линейное преобразование T переменных $x^i\to\overline{x}^i$, приводящее первую форму в точке X к виду $\sum\left(d\overline{x}^i\right)^2$, а вторую форму — к виду $\sum\overline{b}_{ii}(d\overline{x}^i)^2$. Как было показано в § 3, в результате такого преобразования форма $A_q^{jk}(t)\xi_j\xi_k$ также приведется к каноническому виду (3.18):

$$a\sum_s\frac{1}{l_s}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{k}_s}\sum_{i\in L_s}\xi_i^2,\qquad \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{k}_s}=\sum_{i\in L_s}\frac{\partial\Phi}{\partial k_i}.$$

Здесь по условию (1) $\partial\Phi/\partial k_i > h$, так что $l_s^{-1}\partial\overline{\Phi}/\partial\overline{k}_i > h$.

Кроме того, из ограниченности производных z_r^t следует, что скалярное произведение единичного нормального вектора $\mathbf{n}$ поверхности S^t на координатный вектор $\mathbf{e}_{i+1}$ ограничено снизу положительным числом [11]), т. е.

$$a=(\mathbf{n}\mathbf{e}_{n+1}) > a_0 > 0.$$

Поэтому имеем при всех x и t

$$a\sum_s\frac{1}{l_s}\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{k}_s}\sum_{i\in L_s}\xi_i^2 > a_0h\sum_{i=1}^n\xi_i^2. \tag{4.5}$$

---

[11]) Вектор с ковариантными составляющими $-z_1,\dots,-z_n,1$ — нормальный. Его длина l ограничена вместе с производными z_r. Вместе с тем, так как его $(n+1)$-я составляющая равна 1, то $(n+1)$-я ковариантная составляющая единичного вектора $\mathbf{n}$ равна $1/l$, а она и есть не что иное, как $(\mathbf{n}\mathbf{e}_{n+1})=a$.

Вместе с тем из неравенств (4) очевидно, что рассматриваемое преобразование T связано с ограниченными растяжениями. Поэтому и для самой формы $A_q^{jk}(t)\xi_j\xi_k$ имеет место неравенство, аналогичное (5), т. е. правое неравенство (3).

2. Подробно это заключение можно изложить следующим образом.

Примем для краткости векторную запись, так что $\sum \xi_i^2 = \xi^2$, а $A_q^{jk}(t)\xi_j\xi_k = \xi A\xi$, где A соответствующая матрица. Обозначим канонический вид этой матрицы через B. Тогда неравенство (5) можно записать в виде

$$\xi B\xi > a_0 h\xi^2. \tag{4.6}$$

Так как $A_q^{jk}(t)$ образуют контравариантный тензор, то матрица преобразования, приводящего форму $\xi A\xi$ к каноническому виду, есть обратная транспонированная матрица того преобразования T, которому подвергаются первая и вторая формы поверхности. Стало быть, переход от исходной формы $\eta A\eta$ к канонической $\xi B\xi$ состоит в преобразовании

$$\xi = \widetilde{T}^{-1}\eta.$$

При этом

$$B = T^{-1}A\widetilde{T}^{-1}$$

и неравенство (6) можно переписать в виде

$$\eta A\eta > a_0 h\bigl(\widetilde{T}^{-1}\eta\bigr)^2. \tag{4.7}$$

Преобразование T можно представить следующим образом. Сперва ортогональным преобразованием P приводим первую форму $g_{jk}dx^j\,dx^k$ к каноническому виду $\sum \overline{g}_{ii}(d\overline{x}^i)^2$. Далее, путем растяжений по главным осям в $\sqrt{\overline{g}_{ii}}$ раз приводим ее к виду $\sum \bigl(d\overline{\overline{x}}^i\bigr)^2$. Это преобразование обозначим Q. Наконец, ортогональным преобразованием P' приводим вторую форму $\overline{\overline{b}}_{jk}d\overline{\overline{x}}^j\,d\overline{\overline{x}}^k$ к каноническому виду.

Таким образом, $T = P'QP$ и потому

$$\widetilde{T}^{-1} = P'Q^{-1}P, \tag{4.8}$$

так как, во-первых, для ортогонального преобразования $\widetilde{P}^{-1} = P$, а, во-вторых, матрица Q диагональная, так что $\widetilde{Q} = Q$. Следовательно,

$$\bigl(\widetilde{T}^{-1}\eta\bigr)^2 = \bigl(P'Q^{-1}P\eta\bigr)^2 = \bigl(Q^{-1}P\eta\bigr)^2, \tag{4.9}$$

потому что преобразование P' ортогональное.

Далее, преобразование Q связано с растяжениями по главным осям первой формы в $\sqrt{g_{ii}}$ раз, а стало быть, Q^{-1} связано с растяжениями в $1/\sqrt{g_{ii}}$ раз. Вследствие же левого из неравенств (4)

$$\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} > \frac{1}{\sqrt{G}}.$$

Поэтому из (9) следует

$$\left(\widetilde{T}^{-1}\eta\right)^2 = \left(Q^{-1}P\eta\right)^2 > \frac{1}{G}(P\eta)^2 = \frac{1}{G}\eta^2, \tag{4.10}$$

потому что P — ортогональное преобразование.

Подставляя результат (10) в (7), получаем

$$\eta A\eta > \frac{a_0 h}{G}\eta^2,$$

а это и есть правое неравенство (3).

Вследствие замечания, сделанного вначале, отсюда следует правое неравенство (2), так что первое дополнение к теореме 1 доказано.

3. Докажем второе дополнение к теореме 1, а именно:

Если производные z_r^0, z_r^1, а также кривизны k_i^0, k_i^1 ограничены и ограничены производные $\partial\Phi/\partial k_i$, $\partial\Phi/\partial z_r$, $\partial\Phi/\partial z$, то коэффициенты уравнения (3.15) для Δz ограничены.

Для коэффициентов A^{jk} это уже доказано.

Рассмотрим, например, коэффициент B^r. Как следует из формул (3.16б), он есть сумма интегралов от выражений вида

$$B_q^r(t) = \sum \frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{k}_s}\left(\frac{\partial\overline{k}_s}{\partial b_{jk}}\,\frac{\partial b_{jk}}{\partial z_r} + \frac{\partial\overline{k}_s}{\partial g_{jk}}\,\frac{\partial g_{jk}}{\partial z_r}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial z_r},$$

причем

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\overline{k}_s} = \sum_{i\in L_s}\frac{\partial\Phi}{\partial k_i}.$$

Вследствие предполагаемой ограниченности $\partial\Phi/\partial k_i$, $\partial\Phi/\partial z_r$ достаточно доказать ограниченность выражения, стоящего здесь в скобках.

Для этого заметим прежде всего, что при ограниченности первых производных z_r ограниченность кривизн k_i, очевидно, равносильна ограниченности вторых производных. А так как $z_{pq} = (1-t)z_{pq}^0 + tz_{pq}^1$, то из ограниченности кривизн k_i^0, k_i^1 поверхностей S^0, S^1 следует ограниченность кривизн k_i и вторых производных z_{pq} для всех поверхностей S^t.

По лемме 1 § 2 производные $\partial k_i/\partial b_{jk}$, $\partial k_i/\partial g_{jk}$ ограничены только в зависимости от верхней границы кривизн и нижней границы g собственных значений формы $g_{jk}dx^j\,dx^k$. Стало быть, в наших предположениях эти производные ограничены.

Что же касается производных $\partial b_{jk}/\partial z_r$, $\partial g_{jk}/\partial z_r$, то их ограниченность легко усматривается из выражений (3.1), (3.2) для b_{jk} и g_{jk} [12)].

Таким образом, коэффициенты B^r ограничены. Ограниченность C доказывается совершенно так же.

4. Хотя, как мы только что показали, коэффициенты уравнения (3.15) ограничены при ограниченности производных функции Φ по k_i, z_r, z и ограниченности первых и вторых производных функций z^0, z^1, эти коэффициенты могут не быть непрерывными даже при аналитичности функций Φ, z^0, z^1.

Если поверхности S^0, S^1, а вместе с ними все поверхности S^t регулярны и функция Φ также регулярна, то разрывы коэффициентов уравнения (3.15), как ясно из их выражений, могут происходить лишь от разрывов производных $\partial k_i/\partial b_{jk}$, $\partial k_i/\partial g_{jk}$ (так как производные $\partial b_{jk}/\partial z_r$ и т. п. заведомо регулярны для регулярных поверхностей). Такие разрывы могут появляться там, где некоторые кривизны становятся равными. Внутри же области, где все кривизны k_i различны, указанные производные заведомо непрерывны (и вообще регулярны соответственно регулярности поверхности).

Рассмотрим тривиальный пример. Пусть S^0 — поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданная в декартовых координатах уравнением $z = z^0(x, y)$.

Построим семейство поверхностей S^t, заданных уравнениями

$$z = z^0(x, y) + t,$$

т. е. S^t получаются из S^0 переносом на t вдоль оси z. Пусть, например,

$$\Phi = 2k_1 + k_2.$$

Кривизны поверхностей S^t не зависят от t, и потому выражения (3.16а) для коэффициентов A^{jk} сводятся к подынтегральным функциям, так что

$$A^{jk} = a \sum \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k}_s} \frac{\partial \overline{k}_s}{\partial b_{jk}}.$$

[12)] Так как $b_{jk} = az_{jk} + c_{jk}$, то $\partial b_{jk}/\partial z_r = z_{jk}\partial a/\partial z_r + \partial c_{jk}/\partial z_r$. Но $a = \mathbf{n}\mathbf{e}_{n+1}$ есть $(n+1)$-я ковариантная составляющая единичного вектора $\mathbf{n}$; составляющие же его пропорциональны $-z_1, \ldots, -z_n, 1$. Отсюда легко вычисляется $\partial a/\partial z_r$. Далее, c_{jk} выражаются через производные z_r линейно с коэффициентами, зависящими лишь от линейного элемента пространства в данной точке. Поэтому $\partial c_{jk}/\partial z_r$ вообще ограничены. Что же касается $\partial g_{jk}/\partial z_r$, то из формулы (3.1) ясно, что они зависят от z_i линейно.

Там, где $k_1 = k_2$, т. е. в точках округления, имеем $k_1 = k_2 = \overline{k} = (k_1 + k_2)/2$ и $\partial\Phi/\partial\overline{k} = \partial\Phi/\partial k_1 + \partial\Phi/\partial k_2 = 3$, поэтому

$$A^{jk} = \frac{3}{2} a \frac{\partial(k_1 + k_2)}{\partial b_{jk}}.$$

Там же, где $k_1 \neq k_2$,

$$A^{jk} = a\left(\frac{\partial\Phi}{\partial k_1}\,\frac{\partial k_1}{\partial b_{jk}} + \frac{\partial\Phi}{\partial k_2}\,\frac{\partial k_2}{\partial b_{jk}}\right) = 2a\frac{\partial k_1}{\partial b_{jk}} + a\frac{\partial k_2}{\partial b_{jk}}.$$

Отсюда видно, что непрерывность всех коэффициентов A^{jk} в точках округления означала бы, что при приближении к точке округления

$$\frac{\partial(k_1 - k_2)}{\partial b_{jk}} \to 0 \qquad (j, k = 1, 2). \tag{4.11}$$

Но это, как легко видеть, вообще невозможно. Если мы выберем координаты x^1, x^2 так, чтобы первая форма имела вид

$$g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2,$$

то

$$g_{11}g_{22}(k_1 - k_2) = \sqrt{(b_{11}g_{22} - b_{22}g_{11})^2 + 4g_{11}g_{22}b_{12}^2}.$$

Тогда простой подсчет показывает, что

$$\left(\frac{\partial(k_1 - k_2)}{\partial b_{11}}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial(k_1 - k_2)}{\partial b_{12}}\right)^2 = \frac{1}{(g_{11}g_{22})^2}$$

и, стало быть, (11) невозможно.

Из характера этого примера можно заключить, что разрывы коэффициентов A^{jk} в точках округления (или в точках «частичного округления» на n-мерных поверхностях, где сливаются некоторые кривизны) являются своего рода правилом.

5. Вместе с тем имеет место третье дополнение к теореме 1.

Если поверхности S^0, S^1 дважды непрерывно дифференцируемы, функция Φ непрерывна по всем аргументам, включая x, и непрерывно дифференцируема по k_i, z_r, z и при любых i, j

$$\frac{\partial\Phi}{\partial k_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial k_j}, \quad \text{когда } k_i = k_j, \tag{4.12}$$

то коэффициенты уравнения (3.15) непрерывны.

Более того, при данных условиях даже подынтегральные функции в выражениях (3.16а), (3.16б) этих коэффициентов непрерывны по x и t.

Это можно вывести из непосредственного рассмотрения этих функций. Однако мы получим тот же результат, как следствие следующей теоремы.

Теорема 1а. *Пусть функция $\Phi(k_i; z_r, z; x)$ непрерывна по всем аргументам, непрерывно дифференцируема по k_i, z_r, z и удовлетворяет условию (12). Тогда если для любой дважды непрерывно дифференцируемой поверхности S, представленной уравнением $x^{n+1} = z(x)$, выразить k_i через z_{pq}, z_r, z, x и подставить в Φ, то получим*

$$\Phi(k_i; z_r, z; x) = F(z_{pq}, z_r, z; x),$$

причем F оказывается непрерывной и непрерывно дифференцируемой по z_{pq}, z_r, z.

Кроме того, если все $\partial\Phi/\partial k_i > 0$, то F эллиптично, т. е. квадратичная форма

$$\frac{\partial F}{\partial z_{11}}\xi_1^2 + \frac{\partial F}{\partial z_{12}}\xi_1\xi_2 + \ldots$$

положительно определенная.

Покажем прежде всего, как высказанное выше дополнение 3 к теореме 1 вытекает из теоремы 1а.

Уравнение (3.15) для Δz было получено путем вычисления интеграла от $d\Phi/dt$ для семейства поверхностей S^t $(z^t = z^0 + t\Delta z)$. Главное состояло в вычислении полной производной $d\Phi/dt$. Но если $\Phi = F$ и F дифференцируема по z_{pq}, z_r, z, то

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z_{pq}}\frac{dz_{pq}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z_r}\frac{dz_r}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

и так как $z^t = z^0 + t\Delta z$, то

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z_{pq}}\Delta z_{pq} + \frac{\partial F}{\partial z_r}\Delta z_r + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z,$$

откуда в силу непрерывности производных $\partial F/\partial z_{pq}$, $\partial F/\partial z_r$, $\partial F/\partial z$ и следует дополнение 3 к теореме 1.

6. Итак, остается доказать теорему 1а. Для этого докажем сперва следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$ — собственные значения формы $b = b_{jk}\xi^j\xi^k$ по отношению к положительно определенной форме $g = g_{jk}\xi^j\xi^k$. Тогда функция $\Phi(k_1, \ldots, k_n)$ является вместе с тем функцией от b_{jk}, g_{jk}*

$$\Phi(k_1, \ldots, k_n) = \Psi(b_{jk}, g_{jk}).$$

Утверждается, что если Φ *непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию (12), т. е.*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial k_i} = \frac{\partial\Phi}{\partial k_j} \quad \text{при } k_i = k_j,$$

то Ψ *непрерывно дифференцируема*[13].

7. Доказательство. Там, где все k_i различны, они являются непрерывно дифференцируемыми (и даже аналитическими) функциями b_{jk}, g_{jk}. Поэтому в данном случае Ψ дифференцируема и

$$\frac{\partial\Psi}{\partial b_{jk}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial k_i}\frac{\partial k_i}{\partial b_{jk}}. \tag{4.13}$$

Рассмотрим теперь такую точку (b^0, g^0) в пространстве коэффициентов b_{jk}, g_{jk}, что среди соответствующих собственных значений k_i^0 форм b^0, g^0 есть кратные. Пусть, например, $k_1^0, k_2^0, \ldots, k_l^0$ равны друг другу, но уже отличны от остальных k_i^0, среди которых также могут быть равные друг другу.

Преобразуем равенство (13) следующим образом:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial b_{jk}} = \frac{\partial\Phi}{\partial k_1}\frac{\partial(k_1 + \ldots + k_l)}{\partial b_{jk}} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial k_2} - \frac{\partial\Phi}{\partial k_1}\right)\frac{\partial k_2}{\partial b_{jk}} + \ldots\ . \tag{4.14}$$

При этом, если среди остальных k_i^0 есть равные, то аналогично преобразуем также соответствующие члены равенства (13).

Так как $\partial\Phi/\partial k_1$ непрерывна по условию, а в силу леммы 2 § 2

$$\frac{\partial(k_1 + \ldots + k_l)}{\partial b_{jk}}$$

существует и непрерывна в точке (b^0, g^0), то первое слагаемое в формуле (14) также существует и непрерывно в точке (b^0, g^0).

Так как точки в пространстве коэффициентов, отвечающие формам с кратными собственными значениями, лежат на некоторых поверхностях, то можно взять точки $(b, g) \to (b^0, g^0)$ такие, что формы b по отношению g не имеют кратных собственных значений. В таких точках (b, g) имеет место (13). Вследствие же условия (12) при $k_1 = k_2$ $\quad \partial\Phi/\partial k_2 = \partial\Phi/\partial k_1$ и

[13] Условие (12) заведомо выполнено, если Φ симметрична и дифференцируема. Но и в этом случае лемма 3 не может быть получена простой ссылкой на свойства симметричных функций корней алгебраического уравнения, как показывает пример, данный в примечании [5].

так как $\partial\Phi/\partial k_i$ непрерывны, то при $(b,g)\to(b^0,g^0)$ $\quad \partial\Phi/\partial k_2-\partial\Phi/\partial k_1\to 0$. Кроме того, согласно лемме 1 § 2 $\partial k_2/\partial b_{jk}$ ограничена. Поэтому при $(b,g)\to$ $\to(b^0,g^0)$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial k_2}-\frac{\partial\Phi}{\partial k_1}\right)\frac{\partial k_2}{\partial b_{jk}}\to 0.$$

Такие же рассуждения применимы к другим слагаемым такого рода в равенстве (14). Поэтому оказывается, что при $(b,g)\to(b^0,g^0)$ $\quad \partial\Psi/\partial b_{jk}$ стремится к определенному пределу

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial b_{jk}}\right)_0=\frac{\partial\Phi}{\partial k_1}\frac{\partial(k_1+\ldots+k_l)}{\partial b_{jk}}+\ldots, \tag{4.15}$$

где точками обозначены вполне аналогичные члены, отвечающие другим группам равных кривизн.

К точке (b^0,g^0) могут сходиться также точки (b^1,g^1), в которых формы b по отношению g имеют кратные собственные значения. Но мы можем взять точки (b,g), в которых нет кратных собственных значений, все более и более близкие к этим (b^0,g^0). Тогда из доказанного следует, что $\partial\Psi/\partial b_{jk}$ в точках (b,g) близкó к $\partial\Psi/\partial b_{jk}$ в точках (b^1,g^1), и так как по доказанному при $(b,g)\to(b^0,g^0)$ $\quad \partial\Psi/\partial b_{jk}\to\big(\partial\Psi/\partial b_{jk}\big)_0$, то точно так же при $(b,g)\to(b^1,g^1)$ $\partial\Psi/\partial b_{jk}\to\big(\partial\Psi/\partial b_{jk}\big)_0$.

Тем самым доказано, что $\partial\Psi/\partial b_{jk}$ существует всюду, непрерывна и выражается формулой (15). Т. е. если в точке (b^0,g^0) имеем группы равных кривизн $k_1=\ldots=k_{l_1}$, $k_{l_1+1}=\ldots=k_{l_1+l_2}$ и т. д., то в этой точке

$$\frac{\partial\Psi}{\partial b_{jk}}=\frac{\partial\Phi}{\partial k_1}\frac{\partial}{\partial b_{jk}}\sum_{i=1}^{l_1}k_i+\frac{\partial\Phi}{\partial k_{l_1+1}}\frac{\partial}{\partial b_{jk}}\sum_{i=l_1+1}^{l_1+l_2}k_i+\ldots \tag{4.16}$$

формула (13) есть не что иное, как частный случай (16), когда все кривизны различны.

Вывод относительно производных $\partial\Psi/\partial g_{jk}$ будет вполне аналогичным.

8. Лемма 4. *В условиях леммы 3 форма*

$$\frac{\partial\Psi}{\partial b_{11}}\xi_1^2+\frac{\partial\Psi}{\partial b_{12}}\xi_1\xi_2+\ldots \tag{4.17}$$

приводится к виду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial k_1}\xi_1^2+\frac{\partial\Phi}{\partial k_2}\xi_2^2+\ldots,$$

если формы b, g приведены к виду

$$b=\sum b_{ii}(\xi^i)^2,\quad g=\sum(\xi^i)^2,\quad \textit{где}\quad b_{11}\geq b_{22}\geq\ldots\geq b_{nn},$$

так что $b_{ii} = k_i$.

Коэффициенты формы (17) $\partial\Psi/\partial b_{11}, 2^{-1}\partial\Psi/\partial b_{12}, \ldots$ образуют контравариантный тензор, так что преобразованию форм b, g отвечает обратное транспонированное преобразование формы (17).

Воспользуемся общим выражением (16) для $\partial\Psi/\partial b_{jk}$. Согласно лемме 2 § 2, когда формы b, g имеют указанный вид,

$$\frac{\partial(k_1 + \ldots + k_{l_1})}{\partial b_{ii}} = 1 \qquad (i \leq l_1),$$

а производные от $k_1 + \ldots + k_{l_1}$ по остальным b_{jk} равны нулю. Аналогичное верно для всех групп равных собственных значений. Кроме того, по условию (12)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial k_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial k_2} = \ldots = \frac{\partial\Phi}{\partial k_{l_1}}$$

и аналогично для других групп равных кривизн. Поэтому в данном случае формула (16) дает

$$\frac{\partial\Psi}{\partial b_{11}} = \frac{\partial\Phi}{\partial k_1}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial b_{22}} = \frac{\partial\Phi}{\partial k_2}, \quad \ldots,$$

тогда как все остальные $\partial\Psi/\partial b_{jk} = 0$.

Этим лемма 4 доказана.

9. Из лемм 3 и 4 теорема 1а вытекает непосредственно. В самом деле пусть $\Phi(k_i; z_r, z; x)$ непрерывно дифференцируема по k_i, z_r, z и удовлетворяет условию (12). Тогда, выразив k_i через коэффициенты b_{jk}, g_{jk} второй и первой формы поверхности, получим

$$\Phi(k_i; z_r, z; x) = \Psi(b_{jk}, g_{jk}; z_r, z; x).$$

По лемме 3 функция Ψ непрерывно дифференцируема по b_{jk}, g_{jk}. Но b_{jk}, g_{jk} непрерывно дифференцируемы по z_{pq}, z_r, z. Поэтому, выражая в Ψ все b_{jk}, g_{jk} через z_{pq}, z_r, z, x, получим

$$\Phi(k_i; z_r, z; x) = F(z_{pq}, z_r, z; x),$$

где F непрерывно дифференцируема по z_{pq}, z_r, z.

Что касается эллиптичности выражения $F(z_{pq}, z_r, z; x)$ при условии $\partial\Phi/\partial k_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то она доказывается вполне аналогично доказательству эллиптичности уравнения (3.15).

Речь идет о форме

$$\frac{\partial F}{\partial z_{11}}\xi_1^2 + \frac{\partial F}{\partial z_{12}}\xi_1\xi_2 + \ldots\ . \tag{4.18}$$

Так как $F = \Psi(b_{jk}, g_{jk}; z_r, z; x)$ и только b_{jk} содержат вторые производные от z, причем

$$b_{jk} = az_{jk} + c_{jk},$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial z_{jk}} = a\frac{\partial \Psi}{\partial b_{jk}}.$$

Поэтому, поскольку $a > 0$, речь идет о форме

$$\frac{\partial \Psi}{\partial b_{11}}\xi_1^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial b_{12}}\xi_1\xi_2 + \dots\ . \tag{4.19}$$

Выберем координаты x^i так, что в данной точке формы $b_{jk}dx^j\,dx^k$, $g_{jk}dx^j\,dx^k$ приведутся к виду $\sum b_{ii}(dx^i)^2$, $\sum (dx^i)^2$, причем

$$b_{11} \geq b_{22} \geq \ldots \geq b_{nn},$$

так что $b_{ii} = k_i$. Тогда, согласно лемме 4, форма (19) примет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k_1}\xi_1^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial k_2}\xi_2^2 + \dots\ .$$

Так что при всех $\partial\Phi/\partial k_i > 0$ она положительна. Стало быть, при этом условии положительна форма (19), а вместе с нею и форма (18).

Теорема 1а, таким образом, доказана.

§ 5. *Доказательство теоремы 2*

1. Пусть в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве R введены прямоугольные координаты $x_1, \ldots, x_{n+1}$ и фиксирована «условная сфера» E и пусть $\mathbf{y}$ — зачерчивающий ее координатный вектор.

Рассмотрим поверхность S, определенную как огибающая семейства плоскостей

$$\mathbf{ux} = P(\mathbf{u}) \quad \text{или} \quad u^i x_i = P(u^1, \ldots, u^{n+1}),$$

где вектор $\mathbf{u}$ не обязательно единичный. $P(\mathbf{u})$ есть опорная функция поверхности S в обычном смысле. Координаты точки поверхности S выражаются известными формулами

$$x_i = P_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{5.1}$$

Сопоставляя точке X поверхности S точку Y поверхности E с той же нормалью, получаем условное сферическое отображение S на E. Как было указано в § 1, этим устанавливается также соответствие дифференциалов $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{y}$, где $\mathbf{x}$ — координатный вектор точки поверхности S.

Главные радиусы кривизны R_i поверхности S относительно E определяются как экстремумы отношения вторых форм, т. е.

$$\frac{d\mathbf{n}\,d\mathbf{x}}{d\mathbf{n}\,d\mathbf{y}}.$$

Выразим форму $d\mathbf{n}\,d\mathbf{x}$ через опорную функцию поверхности S для единичных векторов. Пусть $P(\mathbf{n})$ — опорная функция поверхностей S (для единичных векторов $\mathbf{n}$). Так как $p = \mathbf{n}\mathbf{x}$ и $\mathbf{n}\,d\mathbf{x} = 0$, то

$$d\mathbf{n}\,d\mathbf{x} = d^2 p - \mathbf{x}\,d^2\mathbf{n} = d^2 p - x_i d^2 n^i. \tag{5.2}$$

Пусть в области единичной сферы, описываемой векторами $\mathbf{n}$, введены любые регулярные координаты v^i, так что $\mathbf{n} = \mathbf{n}(v^1, \ldots, v^n)$. Тогда p будет функцией этих v^i: $p = p(v^1, \ldots, v^n)$ и, полагая $\partial p/\partial v^i = p_i$, $\partial^2 p/\partial v^j \partial v^k = p_{jk}$, $\partial^2 n^i/\partial v^j \partial v^k = n^i_{jk}$, получаем вместо (2)

$$d\mathbf{n}\,d\mathbf{x} = (p_{jk} - x_i n^i_{jk}) dv^j\,dv^k, \tag{5.3}$$

координаты x_i выражаются через первые производные p. В самом деле, так как каждому вектору $\mathbf{u}$ отвечает $\mathbf{n} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, то обратно

$$v^i = v^i(\mathbf{u}) = v^i(u^1, \ldots, u^{n+1}),$$

и так как v^i зависят только от $\mathbf{n}$, то функция $v^i(\mathbf{u})$ однородная нулевой степени.

Далее, по положительной однородности опорной функции

$$P(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|\, p\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right),$$

откуда, в силу (1), имеем

$$x_i = \frac{\partial P}{\partial u^i} = |\mathbf{u}| \frac{\partial p}{\partial v^j}\,\frac{\partial v^j}{\partial u^i} + p\frac{\partial |\mathbf{u}|}{\partial u^i}, \tag{5.4}$$

где коэффициенты при p_j и p суть некоторые функции от $v^1, \ldots, v^n$. (В частности, $\partial|\mathbf{u}|/\partial u^i = n_i$ — i-я составляющая вектора $\mathbf{n}$, а вследствие однородности функции $v^j(\mathbf{u})$, коэффициент $|\mathbf{u}|\,\partial v^j/\partial u^i$ также есть однородная функция от $\mathbf{u}$ и тем самым зависит лишь от $v^1, \ldots, v^n$.)

Подставляя результат (4) в (3), получим для второй формы поверхности выражения вида

$$d\mathbf{n}\,d\mathbf{x} = b_{jk} dv^j\,dv^k = (p_{jk} + c_{jk}) dv^j\,dv^k, \tag{5.5}$$

или

$$b_{jk} = p_{jk} + c_{jk}, \tag{5.5а}$$

где c_{jk} линейно выражаются через p и ее производные p_r с коэффициентами, зависящими лишь от $v^1, \dots, v^n$.

Выражение (5а) вполне аналогично выражению (3.2) и даже проще.

Что же касается второй формы поверхности E, то она, конечно, вовсе не зависит от p и может быть записана в виде

$$d\mathbf{n}\, d\mathbf{x} = g_{jk} dv^j dv^k, \tag{5.6}$$

где g_{jk} не зависят от p. Кроме того, вследствие положительности кривизны поверхности E эта форма положительно определенная.

Таким образом, главные радиусы кривизны R_i поверхности S относительно E оказываются экстремумами отношения форм (5), (6), т. е. собственными значениями формы (5) по отношению формы (6), в полной аналогии с выводами § 3.

В теореме 2 фигурирует функция $\Phi(R_i; x_i, p; \mathbf{n})$, а так как x_i выражаются по формулам (4) через p_r и p, то дело сводится к функции $\Phi(R_i; p_r, p; \mathbf{n})$, причем эта функция дифференцируема по R_i, p_r, p, если исходная Φ дифференцируема по R_i, x_i, p.

Следовательно, мы имеем здесь полную аналогию с теоремой 1, только в функции Φ вместо функции z появляется p, а вместо кривизн k_i — радиусы кривизны R_i. Однако они определяются вполне аналогично, как собственные значения формы (5) по отношению формы (6).

Таким образом, для доказательства теоремы 2 нам остается только повторить доказательство теоремы 1, причем получится даже некоторое упрощение, потому что в данном случае форма $g_{jk} dv^j\, dv^k$ не зависит от p и b_{jk} выражается несколько проще, чем в случае теоремы 1.

Совершенно так же, повторяя выводы § 4, мы получим дополнения к теореме 2, вполне аналогичные доказанным в § 4 дополнениям к теореме 1, включая теорему 1а.

2. В дополнение рассмотрим еще функцию r, упомянутую в § 1 при формулировке теоремы 2; она определяется как

$$r = \frac{p(\mathbf{n})}{\mathbf{en}}, \tag{5.7}$$

где $\mathbf{e}$ — какой-либо данный единичный вектор.

Будем исходить из опорной функции $P(\mathbf{u}) = P(u^1, \dots, u^{n+1})$, определенной не только для единичных векторов. Так как она положительно однородная первой степени, то вместо (7) можно написать

$$r = \frac{P(\mathbf{u})}{\mathbf{eu}}.$$

Введем прямоугольные координаты так, что $(n+1)$-я ось направлена по вектору $\mathbf{e}$; тогда $\mathbf{eu} = u^{n+1}$. Ограничиваясь областью, где $u^{n+1} > 0$, и пользуясь однородностью $P(\mathbf{u})$, получим

$$r = \frac{1}{u^{n+1}} P(u^1, \ldots, u^{n+1}) = P\left(\frac{u^1}{u^{n+1}}, \ldots, \frac{u^n}{u^{n+1}}, 1\right). \tag{5.8}$$

Положим

$$v^i = \frac{u^i}{u^{n+1}} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{5.9}$$

Тогда вместо (8) имеем

$$r = r(v^1, \ldots, v^n) = P(v^1, \ldots, v^n, 1). \tag{5.10}$$

Пользуясь соотношениями (8), (9), можно выразить производные опорной функции P_i через r и $r_i = \partial r / \partial v^i$, и так как $P_i = x_i$, то получим

$$x_i = P_i = r_i \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad x_{n+1} = P_{n+1} = r - r_q v^q \tag{5.11}$$

(опуская здесь и далее знак суммирования по q от 1 до n). Для вторых производных получаем

$$\begin{gathered} u^{n+1} P_{jk} = r_{jk} \quad (j, k = 1, \ldots, n), \qquad u^{n+1} P_{j,n+1} = -r_{q\,n+1} v^q, \\ u^{n+1} P_{n+1,n+1} = r_{qs} v^q v^s. \end{gathered} \tag{5.12}$$

Важно, что вторые производные опорной функции P выражаются только через вторые производные функции r.

После этой подготовки вычислим вторую форму поверхности.

Если $\mathbf{u}$ — вектор нормали, необязательно единичный, то $\mathbf{n} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, откуда легко вычислить

$$d\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{u} - \mathbf{n}\,(\mathbf{n}\,d\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|}.$$

А так как $\mathbf{n}\,d\mathbf{x} = 0$, то для второй формы имеем

$$d\mathbf{n}\,d\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} d\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} du^i\,dx_i.$$

Вместе с тем $x_i = P_i$, поэтому

$$d\mathbf{n}\,d\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} P_{ij} du^i\,du^j = \frac{1}{|\mathbf{u}|} d^2 P. \tag{5.13}$$

Это соотношение содержит, однако, лишние дифференциалы, так как P зависит от $n+1$ переменных, тогда как вторая форма должна содержать лишь n дифференциалов. Для исключения лишнего дифференциала введем переменные v^i, а вторые производные P_{ij} выразим по формулам (12).

Из определения (9) переменных v^i имеем $du^i = u^{n+1}dv^i + v^i du^{n+1}$ $(i = 1, \dots, n)$. Подставляя в (13) эти выражения для du^i, а также выражения (12) для P_{ii}, мы убедимся, что по приведении подобных членов дифференциал du^{n+1} исчезает и (13) сводится к простому виду

$$d\mathbf{n}\, d\mathbf{x} = \frac{u_{n+1}}{|\mathbf{u}|} r_{jk} dv^j\, dv^k = \frac{u_{n+1}}{|\mathbf{u}|} d^2 r. \tag{5.14}$$

Здесь $u^{n+1}/|\mathbf{u}|$ есть не что иное, как $(n+1)$-я составляющая единичного нормального вектора $\mathbf{n}$, т. е. $(\mathbf{en})$, и потому окончательно

$$d\mathbf{n}\, d\mathbf{x} = (\mathbf{en})\, d^2 r. \tag{5.15}$$

Эта формула показывает, что пользоваться функцией $r(v^1, \dots, v^n)$ в области, где $(\mathbf{en}) > 0$, еще проще, чем опорной функцией $p(\mathbf{n})$.

Для функции r можно воспроизвести все выводы, приводящие к теореме 2 и ее дополнениям, исходя из функции $\Phi(R_i; x_i, r; \mathbf{n})$. В частности, если функция Φ не содержит ни x_i, ни r, то, так как R_i, в силу (15), определяются только вторыми производными r_{jk}, в этом случае в уравнение для $\Delta r = r^1 - r^0$ будут входить только вторые производные Δr_{jk}.

Если, кроме того, $\Phi(R_i; \mathbf{n})$ дифференцируема по R_i и при $R_i = R_j$ $\partial\Phi/\partial R_i = \partial\Phi/\partial R_j$, то можно воспользоваться теоремой 2a, аналогичной теореме 1a. Мы рассматриваем семейство поверхностей, определенных функциями $r^t = r^0 + t\Delta r \quad (0 \le t \le 1)$. Для них имеем функции $\Phi(R_i^t; \mathbf{n})$. Но если $\Phi(R_i^0; \mathbf{n}) = \Phi(R_i^1; \mathbf{n})$, то при некотором $t = \theta \quad d\Phi/dt = 0$. Это равенство и дает уравнение для Δr. Именно благодаря (15) R_i суть функции от r_{jk}, так что оказывается

$$\Phi(R_i; \mathbf{n}) = \Psi(r_{jk}; \mathbf{n}).$$

Согласно лемме 3 § 4, если Φ дифференцируема по R_i и при $R_i = R_j$ $\partial\Phi/\partial R_i = \partial\Phi/\partial R_j$, то Ψ дифференцируема по r_{jk}. Кроме того, $dr/dt = \Delta r$. Поэтому равенство $d\Phi/dt = 0$ $(t = \theta)$ сводится к

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial r_{jk}} \frac{r_{jk}}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial r_{jk}} \Delta r_{jk} = 0 \qquad (t = \theta). \tag{5.16}$$

Если при данном $\mathbf{n}$ подвергнуть координаты $v^1, \ldots, v^n$ линейному преобразованию, приводящему d^2r к сумме квадратов, то согласно лемме 4 § 4 уравнение (16) приведется к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial R_i} \Delta r_{ii} = 0,$$

где производные $\partial\Phi/\partial R_i = \partial\Phi(R_i^t; \mathbf{n})/\partial R_i$ берутся при $t = \theta$.

Статья поступила в редакцию

19.I.1957

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I // Вестн. ЛГУ. 1956. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–17.
2. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». III

Вестн. ЛГУ. 1958. № 7. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 2. С. 14–26

§ 1. Постановка вопроса

1. Результаты данной работы состоят в доказательстве и приложениях некоторых общих теорем об n-мерных поверхностях в $(n+1)$-мерном римановом пространстве, которые могут рассматриваться как теоремы единственности. В частности, будут получены результаты, предварительное сообщение о которых было дано в [1, § 2].

2. Пусть в $(n+1)$-мерном римановом пространстве задано непрерывное семейство $\{S\}$ поверхностей S, представимых в некоторой системе координат $x^1, \dots, x^n, x^{n+1} = z$ уравнениями вида

$$z = z(x^1, \dots, x^n). \tag{1}$$

Конечно, например, для замкнутых поверхностей такое представление возможно только локально. Поэтому, строго говоря, речь идет о том, что координата z определена во всей области G, покрытой поверхностями S, а координаты $x^1, \dots, x^n$ определяются локально. Так как их можно рассматривать с точностью до регулярных преобразований, то мы будем писать уравнение поверхности S в целом в виде

$$z = z(x), \tag{2}$$

что в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ превращается в (1). Для наглядности можно иметь в виду полярные геодезические координаты, когда z — расстояние от начала O, а $x^1, \dots, x^n$ определяют направление x из O; поверхности же S суть сферы с центром O.

Предполагается, что координаты $x^1, \dots, x^n$ можно ввести так, что функция $z(x^1, \dots, x^n)$ будет дважды дифференцируемой с ограниченными вторыми производными. Разумеется, речь идет о координатах, в которых коэффициенты метрической формы пространства дважды непрерывно дифференцируемы.

Мы выбираем на поверхностях S направление нормали в сторону растущих z. Нормаль задаем единичным вектором $\mathbf{n}$ в соответствующей точке или, что равносильно, его первыми n ковариантными составляющими n_j. При фиксированном направлении нормали в каждой точке поверхности S определены, вместе с их знаком, главные кривизны k_i. Мы неизменно нумеруем их в порядке убывания: $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$.

3. Пусть задана функция

$$\Phi(k_1, \ldots, k_n; n_i, z, x) \equiv \Phi(k_1, \ldots, k_n; \mathbf{n}, \mathbf{x}),$$

где $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$ — численные переменные; $\mathbf{n}$ — единичный вектор в точке $\mathbf{x} = (x, z)$, а n_i — его первые n ковариантных составляющих. При определении значения $\Phi(\overline{S}, \mathbf{x})$ этой функции для какой-либо поверхности $\overline{S}$ в точке $\mathbf{x} = (z, x)$ под k_i подразумеваются главные кривизны в этой точке, а под $\mathbf{n}$ — нормаль. Если поверхность $\overline{S}$ представлена уравнением $z = z(x)$, то можно писать $\Phi(\overline{S}, x)$, так как z определено заданием x. Впрочем, мы будем применять такую же запись и в том случае, когда $\overline{S}$ не допускает представления уравнением $z = z(x)$ с однозначной правой частью.

Подразумевается, что функция Φ определена по крайней мере для всех значений переменных, которые они принимают на поверхностях семейства $\{S\}$ и обладает следующими свойствами:

1) при каждом данном x она непрерывно дифференцируема по всем остальным переменным;

2) производные по этим переменным ограничены не только при данном x, но в любой замкнутой ограниченной области изменения всех ее аргументов;

3) Φ всюду монотонна по k_i, т. е. $\partial\Phi/\partial k_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$;

4) для всякой точки поверхности S из семейства $\{S\}$ существует такая окрестность отвечающих этой точке значений аргументов k_i, n, z, x, что в этой окрестности $\partial\Phi/\partial k_i > \text{const} > 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Всюду дальше, как только речь идет о поверхностях S и их семействе $\{S\}$, а также о функции Φ, поставленные требования предполагаются выполненными без особых напоминаний.

То, что мы обходимся без требования непрерывности Φ по x, позволяет рассматривать функции, которые, скажем, для одних x сводятся к средней кривизне, для других — к комбинации $k_1 + 2k_2 + \ldots$ и т. п. Допущение в некоторых случаях $\partial\Phi/\partial k_i = 0$ (в отличие от того, что требовалось в [1, 2]) имеет, в частности, то значение, что позволяет рассматривать среди выпуклых поверхностей $\overline{S}$ также поверхности с параболическими точками, например тогда, когда $\Phi = k_1 \ldots k_n$. Конечно, при этом условие 4) предполагается выполненным.

4. Общая задача, которую мы рассматриваем, может быть поставлена следующим образом.

Пусть даны семейство $\{S\}$ и функция Φ, а также поверхность S, содержащаяся в области G, покрытой семейством $\{S\}$. Спрашивается, при каких условиях и при каких соотношениях между значениями $\Phi(S;x)$ и $\Phi(\overline{S};x)$ можно утверждать, что поверхность $\overline{S}$ сама принадлежит семейству $\{S\}$, или по крайней мере целиком лежит на одной из его поверхностей S?

§ 2. *Предпосылки выводов «в малом»*

1. В этом параграфе речь идет о поверхностях «в малом», представимых в подходящих координатах уравнениями вида $z = z(x^1, \dots, x^n)$, где правые части дважды дифференцируемы и имеют ограниченные вторые производные. Нормали к поверхностям направляются в сторону растущего z. Под Φ подразумевается, согласно условию, функция, описанная в п. 3 § 1.

Теорема А. *Пусть S^0, S^1 — две поверхности в римановом пространстве с уравнениями $z = z^0(x)$, $z = z^1(x)$, а S^t — поверхности с уравнениями, $z = (1-t)z^0(x) + tz^1(x)$ $(0 \le t \le 1)$. Пусть функция Φ определена для всех S^t. Тогда разность $\Delta\Phi = \Phi(S^1, x) - \Phi(S^0, x)$ представима в виде*

$$\Delta\Phi = A^{ik}\Delta z_{ik} + B^i\Delta z_i + C\Delta z, \tag{1}$$

где $\Delta z = z^1(x) - z^0(x)$, а коэффициенты $A^{ik}(x)$, $B^i(x)$, $C(x)$ ограничены и форма $\mathrm{A}^{ik}\xi_i\xi_k \ge 0$. Если же для S^0 (или S^1) выполняется наложенное на Φ условие 4), то существует такое $a > 0$, что при всех x

$$A^{ik}\xi_i\xi_k > a\sum \xi_i^2. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы фактически дано в [2], хотя она сформулирована там в более частном виде. В [2, § 3] дается вывод выражения (1) и доказывается, что $A^{ik}\xi_i\xi_k \ge 0$. Ограниченность коэффициентов доказывается в [2, § 4]. Менее очевидно, что там же заключен вывод неравенства (2) при принятых нами теперь несколько более слабых предположениях. Однако, если Φ удовлетворяет поставленному условию, то, как можно убедиться, правая оценка (4.3) работы [2] верна на некотором отрезке промежутка [0,1], откуда и следует (2).

2. Теорема В. *Пусть в области U изменения переменных $x^1, \dots, x^n$ для дважды дифференцируемой функции $u(x^1, \dots, x^n)$ определено выражение*

$$L(u) = A^{ik}u_{ik} + B^iu_i + Cu,$$

где коэффициенты ограничены и $A^{ik}\xi_i\xi_k > a\sum\xi_i^2$, $a = const > 0$. Тогда, если всюду в U $\quad L(u) \le 0$, $u \ge 0$ (или $L(u) \ge 0$, $u \le 0$) и хоть где-то в U $u = 0$, то $u \equiv 0$ в U.

Эта теорема, доказанная в [3], является некоторым усилением известной теоремы Э. Хопфа [4].

3. Из теорем А и В непосредственно следует теорема С.

Теорема С. *Пусть выполнены условия теоремы А, включая условие, обеспечивающее* $A^{ik}\xi_i\xi_k > a\sum\xi_i^2$. *Тогда, если всюду* $\Delta\Phi \le 0$, *а* $\Delta z \ge 0$ *(или* $\Delta\Phi \ge 0$, $\Delta z \le 0$*) и хоть где-нибудь* $\Delta z = 0$, *так что поверхности* S^0, S^1 *имеют, так сказать, одностороннее касание, то они совпадают, т. е.* $\Delta z \equiv 0$.

§ 3. *Общие теоремы «в целом»*

1. Пусть даны семейство $\{S\}$ поверхностей S и функция Φ со свойствами, определенными соответственно в п. 2, 3 § 1.

Пусть $\overline{S}$ — гладкая, n-мерная поверхность, содержащаяся в области G, покрытой семейством $\{S\}$. Будем говорить, что данная поверхность S с уравнением $z = z(x)$ отделяет $\overline{S}$ от больших (малых) z, если для всех точек на $\overline{S}$, отвечающих каждому данному x, $\overline{z} \le z(x)$ $(\overline{z} \ge z(x))$. Если при этом S касается $\overline{S}$, то скажем, что она касается $\overline{S}$ со стороны бóльших (меньших) z.

Мы вовсе не предполагаем, что поверхность $\overline{S}$ представима в целом уравнением $z = z(x)$; априори допускается, что она имеет самопересечения и даже, что она односторонняя. Точно так же не предполагается априори, что функция Φ определена во всех точках на поверхности $\overline{S}$. Однако мы будем требовать, чтобы в окрестности точек, где $\overline{S}$ касается некоторой из поверхностей S со стороны бóльших (меньших) z, для $\overline{S}$ были «выполнены условия теоремы А», т. е. в такой окрестности:

1) $\overline{S}$ представима в тех же координатах x^i, что и S, уравнением $z = \overline{z}(x^1, \ldots, x^n)$, где правая часть дважды дифференцируема и имеет ограниченные вторые производные;

2) нормаль к $\overline{S}$ направлена в сторону бóльших z;

3) при таком выборе нормали функция Φ определена (и имеет основные свойства, указанные в п. 3 § 1) для всех поверхностей с уравнениями $z = (1-t)\overline{z}(x) + tz(x)$, где $0 \le t \le 1$, а $z = \overline{z}(x)$ и $z = z(x)$ — уравнения поверхности $\overline{S}$ и данной S.

2. Теорема 1. *Пусть семейство* $\{S\}$, *поверхность* $\overline{S}$ *и функция* Φ *удовлетворяют принятым условиям и существует поверхность* $S' \in \{S\}$, *касающаяся* $\overline{S}$ *со стороны бóльших (меньших)* z. *Пусть существует такая связная компонента множества точек касания, что в окрестности каждой ее точки выполнены условия теоремы А и* $\Phi(\overline{S}, x) \ge \Phi(S', x)$ *(соответственно* $\Phi(\overline{S}, x) \le \Phi(S', x)$*). Тогда* $\overline{S}$ *лежит на* S'.

Доказательство. Пусть M — связная компонента множества точек касания с указанными свойствами. Если M не покрывает $\overline{S}$, то берем точку X на границе M. Очевидно, M замкнуто и потому $X \in M$. По условию в окрестности точки X $\Phi(\overline{S}, x) \geq \Phi(S', x)$, а потому, согласно теореме C, $\overline{S}$ должна здесь совпадать с S'. Это противоречит тому условию, что X лежит на границе M. Следовательно, M покрывает $\overline{S}$, т. е. $\overline{S}$ лежит на S.

Все дальнейшие выводы служат следствиями теоремы 1.

Самый простой случай представляет семейство поверхностей $z = \text{const}$. К нему можно свести всякое достаточно регулярное семейство, однозначно покрывающее область G. Тогда поверхность S', касающаяся S со стороны бо́льших (меньших) z, есть поверхность $z = \max \overline{z}$ ($z = \min \overline{z}$); точки ее касания с $\overline{S}$ суть те, где z достигает на $\overline{S}$ максимума (минимума).

3. Теорему 1 можно дополнить условиями, обеспечивающими существование поверхности S, касающейся $\overline{S}$ со стороны бо́льших (меньших) z.

Лемма. *Пусть $\overline{S}$ представляет собой множество, замкнутое относительно области G, покрытой семейством $\{S\}$, и существует поверхность S, отделяющая $\overline{S}$ от больших (малых) z. Тогда, если все поверхности S замкнуты, среди них есть поверхность, касающаяся $\overline{S}$ со стороны бо́льших (меньших) z. Если же поверхности S имеют край, ограничены и не имеют попарно общих точек (включая и точки их краев), то при тех же условиях для существования поверхности S, касающейся $\overline{S}$ со стороны бо́льших (меньших) z, достаточно, чтобы край $\overline{S}$ содержался в крае одной из поверхностей $S^0 \in \{S\}$ (в частности, край $\overline{S}$ может быть пустым, т. е. $\overline{S}$ может быть замкнутой); и на $\overline{S}$ существовали точки, где $\overline{z}(x) \geq z^0(x)$ (соответственно $\overline{z}(x) \leq z^0(x)$).*

Доказательство леммы за его очевидностью опускаем.

Имея в виду данную лемму, мы будем дальше говорить о поверхностях S, касающихся $\overline{S}$ со стороны бо́льших (меньших) z, не оговаривая условий их существования.

4. Рассмотрим специально такой случай, когда на всех поверхностях S данная функция Φ имеет одни и те же значения при каждом данном x, т. е. $\Phi(S, x) = f(x)$.

Замечание. Если семейство $\{S\}$ однозначно покрывает область G (а только этот случай и имеет, собственно, реальное значение), то при любой Φ $\Phi(S, x) = h(z, x)$, и если оно к тому же достаточно регулярно, то h непрерывно дифференцируема по z. Тогда, полагая $\Phi' = \Phi - h$, получим функцию, удовлетворяющую условиям, налагаемым на функции Φ, но такую, что на всех S $\Phi' \equiv 0$. Отсюда следует, что для достаточно регулярного семейства, однозначно покрывающего область G, можно брать весьма общие функции Φ с условием, что $\Phi(S, x) = f(x)$ или даже $\Phi(S, x) \equiv 0$ [1)].

[1)] С другой стороны, из только что отмеченной леммы легко заключить, что если все поверхности S замкнуты и $\Phi(S, x) = f(x)$, то семейство $\{S\}$ покрывает область G однозначно, по крайней мере в том смысле, что если две поверхности S имеют общие точки, то они совпадают.

Теорема 2. *Пусть $\Phi(S,x)=f(x)$ и для данной $\overline{S}$ существуют поверхности S, касающиеся ее со стороны бо́льших и меньших z, причем выполнены условия теоремы А. Тогда, если $\Phi(\overline{S},x)-f(x)$ не меняет на $\overline{S}$ знака, то $\overline{S}$ лежит на одной из поверхностей S.*

В самом деле, если $\Phi(S,x)=f(x)$ и, скажем, $\Phi(\overline{S},x)-f(x)\geq 0$, то в окрестности точек, где S' касаются $\overline{S}$ со стороны бо́льших z, будет $\Phi(\overline{S},x)\geq$ $\geq\Phi(S',x)$, а тогда по теореме 1 $\overline{S}$ лежит на S'.

Примером к теореме 2 может служить следующая теорема.

Пусть замкнутая поверхность S_1 в евклидовом пространстве однозначно проектируется из точки O и не имеет касательных плоскостей, проходящих через O. За x примем единичный вектор, или, что равносильно, луч, идущий из O, за z — расстояние от O. Пусть $\Phi(S_1,x)$ не меняется при подобном преобразовании этой поверхности из центра O, так что $\Phi(\lambda S_1,x)=\Phi(S_1,x)=f(x)$. Тогда, если на замкнутой поверхности $\overline{S}$, не проходящей через O, $\Phi(\overline{S},x)-f(x)$ не меняет знака, то $\overline{S}$ подобна S_1 относительно центра O. (Здесь, конечно, подразумевается выполнение условий теоремы А. Если $\overline{S}$ ограничивает тело, содержащее O внутри, то нормаль к $\overline{S}$ выбирается внешней — в область бо́льших z.)

Эта теорема усиливает высказанную в [1, § 2] теорему 1, так как теперь не требуется заранее, чтобы $\overline{S}$ однозначно проектировалась из O и выполнялось равенство $\Phi(\overline{S},x)=\Phi(S_1,x)$.

5. Возможны следующие случаи существования поверхностей $S',S''\in\{S\}$, касающихся $\overline{S}$ соответственно со стороны бо́льших и меньших z. Нормаль к $\overline{S}$ в окрестности точек X', X'' ее касания с S' и S'' направляем в сторону бо́льших z.

I. Обе поверхности S',S'' существуют. Здесь для направления нормалей есть две возможности: Iа — поверхность $\overline{S}$ двусторонняя и направления нормалей в точках X', X'' согласуются; Iб — это не так, т. е. $\overline{S}$ либо односторонняя, либо двусторонняя, но направления нормалей в точках X', X'' не согласуются.

II. S' существует, но S'' нет.

III. S'' существует, но S' нет.

IV. Ни S', ни S'' не существуют. Но этот случай нечего рассматривать, так как для него из теоремы 1 ничего не следует.

Пример. $\{S\}$ — семейство концентрических сфер с центром O; поверхность $\overline{S}$ ограничивает тело H. Iа — $\overline{S}$ конечна и O внутри H; Iб — $\overline{S}$ конечна, но O лежит вне H; II — $\overline{S}$ конечна и O — ее предельная точка; III — $\overline{S}$ бесконечна и O не есть ее предельная точка; IV — $\overline{S}$ бесконечна и O — ее предельная точка.

Теорема 3. *Если на всех поверхностях S данная функция Φ имеет одни и те же значения при каждом данном x, т. е. $\Phi(S,x)=f(x)$, то ни в одном* *из случаев* I–III *невозможно* $\Phi(\overline{S}, x) = f(x)$, *хотя бы только в окрестностях точек касания* $\overline{S}$ *с поверхностями* S', S'', *если только в этих окрестностях выполнены условия теоремы* A *и* $\overline{S}$ *не лежит ни на одной* S.

Это утверждение прямо следует из теоремы 1, так как согласно этой теореме, при данных условиях относительно нормалей, в случае $\Phi(\overline{S}, x) = f(x)$ следовало бы, что $\overline{S}$ лежит на одной из поверхностей S.

Примерами к теореме 3 могут служить теоремы 3, 4 в [1, § 2], если в них исключить допускающуюся там возможность сопоставления точек поверхностей по параллельности нормалей. Более того, наша теорема 1 позволяет при соответствующих дополнительных предположениях заменить условие $\Phi(\overline{S}, x) = f(x)$ одним из неравенств $\Phi(\overline{S}, x) \leq f(x)$ либо $\Phi(\overline{S}, x) \geq f(x)$. Это можно сделать, например, если в теоремах 3, 4 [1, § 2] поверхности S, а также $\overline{S}$, выпуклы и обращены выпуклостью в одну сторону.

6. В теореме 3 можно ослабить условия о нормалях, если кривизны k_i на поверхностях S всюду положительны, а функция Φ либо определена лишь для $k_i \geq 0$, либо определена для всех k_i, но симметрична относительно вектора $\mathbf{n}$, т. е. $\Phi(k_i; \mathbf{n}, \mathbf{x}) = \Phi(k_i; -\mathbf{n}, \mathbf{x})$.

В самом деле пусть поверхность S'' касается $\overline{S}$ со стороны меньших z. Нормаль к S'' направлена в сторону бо́льших z и если все $k''_i > 0$, то ее естественно считать внутренней. В этом же смысле поверхность $\overline{S}$ оказывается внутри S'', так что в точке касания при том же направлении нормали к $\overline{S}$ $\overline{k}_i > 0$, а при противоположном — $\overline{k}_i < 0$. Поэтому если Φ определена лишь для $k_i \geq 0$, то второй выбор нормали невозможен по условиям задачи.

Пусть теперь Φ определена для всех k_i, но симметрична по $\mathbf{n}$. Тогда можно считать $\mathbf{n}$ совпадающим с нормалью к S'', не меняя значения Φ. Но $k''_i > 0$, а при направлении нормали к $\overline{S}$ в противоположную сторону $\overline{k}_i < 0$. Тогда из монотонности Φ по k_i (теперь $\mathbf{n}$, $\mathbf{x}$ одни и те же!) следует, что в точке касания $\Phi(\overline{S}, x) < \Phi(S'', x)$, т. е. равенство $\Phi(\overline{S}, x) = \Phi(S'', x)$ заведомо невозможно.

Таким образом, теорему 3 можно дополнить еще следующим утверждением.

Теорема 3а. *Если кривизны* k_i *поверхностей* S *всюду положительны, а* Φ *определена либо лишь для* $k_i \geq 0$, *либо для всех* k_i, *но симметрична по* $\mathbf{n}$, *то в условиях теоремы 2 равенство* $\Phi(\overline{S}, x) = f(x)$ *невозможно (или бессмысленно) так же тогда, когда нормаль к* $\overline{S}$ *противоположна нормали к* S''.

Таким образом, остаются только две возможности, когда $\overline{S}$ не лежит ни на одной из поверхностей S, но равенство $\Phi(\overline{S}, x) = f(x)$ может быть априори выполнено: (1) существует S', но S'' нет, а нормаль к $\overline{S}$ направлена противоположно нормали к S'; (2) ни S', ни S'' не существуют.

7. Вот два примера реализации этих возможностей.

Пусть $\{S\}$ есть семейство параболоидов S с уравнениями $z = x^2 + y^2 + h$ над кругом $x^2 + y^2 < 1$. Нормали к S направлены в сторону бо́льших z. Параболоид $\overline{S}$ с уравнением $z = -x^2 - y^2$ имеет с параболоидом $z = x^2 + y^2 - 2$ общий край и для него не существует параболоида S'', касающегося его со стороны меньших z. Вместе с тем при направлении нормали к $\overline{S}$ в сторону меньших z для всякой Φ будет $\Phi(\overline{S}; x, y) = \Phi(S; x, y)$. Таким образом, здесь реализуется первая из указанных возможностей.

Пример реализации второй возможности дает прямой круговой конус. Пусть $\{S\}$ есть семейство сфер S с центром в начале O в трехмерном евклидовом пространстве; r — расстояние от O. Если положить $z = 1/r$, то нормаль в сторону бо́льших z будет внутренней и $k_i > 0$. Пусть $\Phi = r(k_1 + k_2)/2$. На сферах S $\Phi \equiv 1$. Вместе с тем на конусе $4(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, $k_1 = 2/r$, $k_2 = 0$, т. е. точно так же $\Phi \equiv 1$. Для такого конуса нет сфер с центром O, отделяющих его от малых или бо́льших z. Он реализует как раз вторую возможность.

8. Отметим еще одно весьма общее следствие теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть поверхности S представляются уравнениями $z = c$ и $\Phi(S_c, x) = h(c)$, где h — невозрастающая функция. Пусть на $\overline{S}$ z достигает абсолютных максимума и минимума: $a = \max \overline{z}$, $b = \min \overline{z}$, и в окрестностях точек, где достигаются эти значения z, для $\overline{S}$ выполнены условия теоремы А. Тогда если $\Phi(\overline{S}, x) = f(z)$, где f — неубывающая функция, то $\overline{S}$ лежит на одной из поверхностей S* [2]*. Условия можно формулировать также локально: достаточно требовать, чтобы*

$$\Phi(S_a, x) \le \Phi(S_b, x) \tag{1}$$

и в любых точках (z', x'), (z'', x'') на $\overline{S}$, достаточно близких, соответственно к точкам максимума и минимума z

$$\Phi(\overline{S}, x') \ge \Phi(\overline{S}, x''). \tag{2}$$

Тогда точно так же $\overline{S}$ лежит на одной из поверхностей S.

Доказательство. Поверхности S_a, S_b с уравнениями $z = a$, $z = b$ касаются $\overline{S}$ соответственно со стороны бо́льших и меньших z. Если $\overline{S}$ не лежит на S_a, то по теореме 1 хоть где-нибудь сколь угодно близко к точкам их касания будет $\Phi(\overline{S}, x') < \Phi(S_a, x')$. Поэтому из неравенств (1), (2) следует, что

[2] Если h непрерывно дифференцируема, то полагая $\Phi' = \Phi - h$, получим функцию, удовлетворяющую основным требованиям, налагаемым на функции Φ. Тогда условия теоремы упрощаются: на всех S будет $\Phi' \equiv 0$, а на $\overline{S}$ — $\Phi' = f - h = g(z)$, где g неубывающая.

во всякой точке, близкой к точкам минимума z, будет $\Phi(\overline{S}, x'') < \Phi(S_b, x'')$. Но тогда по теореме 1 $\overline{S}$ лежит на S_b.

В теореме 4 необязательно предполагать, что поверхности S представимы уравнениями $z = c$; достаточно, чтобы они однозначно покрывали область G. Тогда вместо $\Phi(\overline{S}, x) = f(z)$ полагаем $\Phi(\overline{S}, x) = f(c)$, т. е. $\Phi(\overline{S}, x)$ имеет одно значение $f(c)$ на каждом множестве $M_c = \overline{S} \cap S_c$, где f — неубывающая функция.

Примером к теореме 4 может служить теорема 2 в [1, § 2].

§ 4. *Характеристические свойства сферы в пространстве постоянной кривизны*

1. Пусть $\{S\}$ есть семейство сфер S с общим центром O в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве; z — расстояние от O; x — единичный вектор, или, что равносильно, луч, исходящий из O. За z удобно принять $1/r$. Тогда нормаль к S, направленная в сторону бо́льших z, будет внутренней и кривизны оказываются положительными. Точно так же на всякой выпуклой поверхности, обращенной выпуклостью от O, кривизны будут неотрицательными при направлении нормалей в сторону бо́льших z.

Кроме того, известно, что если уравнения $z = z^0(x)$, $z = z^1(x)$ представляют выпуклые поверхности с точкой O внутри, то и всякое уравнение

$$z = (1-t)z^0(x) + tz^1(x) \qquad (0 \le t \le 1) \tag{1}$$

представляет тоже выпуклую поверхность. Этот результат относится вообще к выпуклым поверхностям, обращенным выпуклостью от O, необязательно замкнутым. Благодаря этому замечанию в случае выпуклых поверхностей S^0, S^1 построение соединяющего их семейства (1), необходимого в условии теоремы A, не выводит из класса выпуклых поверхностей.

2. Рассмотрим функцию Ψ:

$$\Psi = \Psi(k_1, \ldots, k_m; \mathbf{n}, z, x),$$

где, как и прежде, $\mathbf{n}$ — единичный вектор в точке (z, x), а $k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge$ $\ge k_m$ — численные переменные в числе $m \le n$.

На функцию Ψ мы налагаем те же требования, какие наложены согласно п. 3 § 1 на функцию Φ.

Будем считать Ψ определенной либо для любых k_i, либо для $k_i \ge 0$. В последнем случае Ψ определяется для данной поверхности $\overline{S}$ лишь там, где $\overline{k}_i \ge 0$. Согласно замечанию, сделанному в п. 1, наши выводы не выходят в этом случае за пределы кусков поверхностей, где $k_i \ge 0$.

По функции Ψ для какой-либо поверхности $\overline{S}$ в данной ее точке (z, x) определяем два числа:

$$\Psi^+(\overline{S}, x) = \Psi(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_m; \mathbf{n}, z, x),$$

$$\Psi^-(\overline{S}, x) = \Psi(\overline{k}_{n-m+1}, \ldots, \overline{k}_n; \mathbf{n}, z, x),$$

где согласно принятому условию $\overline{k}_1 \geq \overline{k}_2 \geq \ldots \geq \overline{k}_n$ [3)].

Очевидно, функция Φ, зависящая от всех кривизн, есть частный случай функции Ψ при $m = n$.

Мы определяем по Ψ две функции Φ, зависящие уже от всех кривизн

$$\Phi^+ = \frac{1}{n-m+1} \sum_{i=m}^{n} \Psi(k_1, \ldots, k_{m-1}, k_i; \mathbf{n}, z, x) \tag{2}$$

и

$$\Phi^- = \frac{1}{n-m+1} \sum_{i=1}^{n-m+1} \Psi(k_i, k_{n-m+2}, \ldots, k_n; \mathbf{n}, z, x). \tag{3}$$

Поскольку на сфере S все кривизны равны, то

$$\Phi^+(S, x) = \Psi^+(S, x), \qquad \Phi^-(S, x) = \Psi^-(S, x), \tag{4}$$

поэтому можно писать просто $\Psi(S, x)$ и $\Phi(S, x)$. Вместе с тем, так как на произвольной поверхности $\overline{S}$ $\quad \overline{k}_1 \geq \overline{k}_2 \geq \ldots \geq \overline{k}_n$, то, вообще говоря,

$$\Phi^+(\overline{S}, x) \leq \Psi^+(\overline{S}, x), \qquad \Phi^-(\overline{S}, x) \geq \Psi^-(\overline{S}, x). \tag{5}$$

Кроме того, если для поверхностей S и $\overline{S}$ выполнены условия теоремы А в отношении функции Ψ, то они выполнены и по отношению к функциям Φ^+, Φ^-. Ведь на сферах S $\quad k_1 = k_2 = \ldots = k_n$ и потому, если в окрестности таких значений k_i $\quad \partial\Psi/\partial k_i > c > 0$, то точно так же $\partial\Phi/\partial k_i > c$.

В силу этих замечаний оказывается, что поскольку поверхности S являются сферами, постольку в ряде теорем предыдущего параграфа можно пользоваться функциями Ψ вместо Φ. Таким путем получаются характеристики сфер по свойствам функций Ψ.

3. Так, приложением основной теоремы 1 является следующая теорема, дающая характеристику сферы (точнее, поверхности, лежащей на сфере).

[3)] Точнее следовало бы писать $\Psi^\pm(\overline{S}, z, x)$, так как не предполагается, что $\overline{S}$ пересекается лучом x только в одной точке.

Теорема 5. *Пусть на поверхности $\overline{S}$ расстояние r от некоторой точки O достигает абсолютного минимума $r_0 > 0$ (максимума r_0). Пусть в окрестности каждой точки, где $\overline{S}$ касается сферы S радиуса r_0 с центром O, выполнены условия теоремы A и для некоторой функции Ψ*

$$\Psi^-(\overline{S}, x) \geq \Psi(S, x) \qquad (\textit{соответственно}\ \ \Psi^+(\overline{S}, x) \leq \Psi(S, x)). \tag{6}$$

Тогда $\overline{S}$ лежит на S.

Доказательство. Определяя по Ψ функцию Φ^-, мы, в силу второго из неравенств (5), второго равенства (4) и первого неравенства (6), будем иметь вблизи точек минимума r

$$\Phi^-(\overline{S}, x) \geq \Phi^-(S, x).$$

А так как минимум r есть максимум z, то теорема 5 сводится к теореме 1.

Особенно простой случай получаем, когда Ψ зависит лишь от одной из k, так что, например, $\Psi = rk$ и т. п. Тогда теорема 5, так же как следующие далее примеры и теоремы, относящиеся к функциям Ψ, дают особенно простые результаты.

На замкнутой поверхности r заведомо достигает максимума, а потому в теореме 5 содержится, например, теорема 5а.

Теорема 5а. *Если на всех сферах S $\quad \Psi \equiv 1$* [4] *и на замкнутой поверхности $\overline{S}$, может быть проходящей через точку O, $\Psi^+ \leq 1$ (хотя бы только в окрестности наиболее удаленных от O точек), то $\overline{S}$ — сфера с центром O (предполагая, конечно, что в точках, наиболее удаленных от O, выполнены условия теоремы A).*

4. Пример. Пусть $F_l(k_1, \ldots, k_m)$ — элементарная симметрическая функция степени l, нормированная так, что $F_l(1, \ldots, 1) = 1$. Положим

$$\Psi = r^l F_l(k_1, \ldots, k_m) \tag{7}$$

или

$$\Psi = p^l F_l(k_1, \ldots, k_m), \tag{8}$$

где $p = |\mathbf{nx}|$ ($\mathbf{x}$ — вектор из O в точку (z, x)) представляет для данной поверхности расстояние от начала до касательной плоскости. Если $l > 1$, то $\partial\Psi/\partial k_i > 0$, вообще говоря, лишь при положительных k_j. Поэтому в данном случае ограничимся значениями $k_i \geq 0$. Так как на всякой сфере S с центром O $\quad k_i = 1/r = 1/p$, то для обеих функций (7), (8) $\Psi(S, x) \equiv 1$.

[4] Если $\Psi(S, x) = f(x)$, то, полагая $\Psi' = \Psi - f + 1$, получим функцию с теми же основными свойствами, но такую, что $\Psi'(S, x) \equiv 1$.

Остается только повторить теоремы 5, 5а, чтобы получить характеризацию сферы по свойствам функций вида (7) или (8). Выполнение условий теоремы А в окрестности точек, максимально удаленных от O, обеспечено само собой, так как в них поверхность выпуклая, в точках же, ближайших к O, это свойство нужно требовать особо.

Локальный характер требований здесь необходим, так как функция (8) не будет дифференцируемой на всей поверхности $\overline{S}$, если где-нибудь на $\overline{S}$ $p = 0$, т. е. касательные плоскости проходят через O. В таких точках функция перестает быть дифференцируемой по n_i, z, x_i. Если же определить $p = \mathbf{nx}$, то, вообще говоря, нельзя будет обеспечить на всей $\overline{S}$ $\quad \partial\Psi/\partial k_i \geq 0$.

В приведенном примере содержится теорема В. Зюсса [5], характеризующая сферу среди всех замкнутых выпуклых поверхностей с началом внутри условием $\Psi \equiv 1$ для Ψ заданной формулой (8) при $m = n$.

Здесь содержится также теорема В. Бляшке [6], характеризующая сферу среди всех таких поверхностей в трехмерном пространстве равенством

$$p^2 k_1 k_2 = c = \text{const}. \tag{9}$$

В самом деле положим $\Psi = p^2 k_1 k_2$. Тогда $\Psi \equiv 1$ на сфере S с центром O. Если в равенстве (9) $c \leq 1$, то на поверхности $\overline{S}$, где это равенство выполнено, будет $\overline{\Psi}(S, x) \leq 1$ и, следовательно, $\overline{S}$ есть сфера. Если же $c \geq 1$, то заключение аналогично.

Здесь же заключена и теорема Гротемейера [7, 8], характеризующая сферу при аналогичных условиях равенством $r(k_1 + k_2)/2 \equiv 1$.

5. Совершенно аналогично можно сформулировать приложения теорем 2, 3, 3а. Например, из теоремы 2 следует теорема 6.

Теорема 6. *Если на сферах S $\quad \Phi(S, x) \equiv 1$*[5]*, а на замкнутой поверхности $\overline{S}$ без самопересечений и с началом внутри при направлении нормали внутрь $\Phi(\overline{S}, x) - 1$ не меняет знака (в частности, если $\Phi(\overline{S}, x) = \mathrm{const}$), то $\overline{S}$ есть сфера.*

Беря Φ вида (7) или (8), мы опять получаем обобщения теорем Зюсса, Бляшке и Гротемейера.

Из теорем 3, 3а следует теорема 7.

Рассмотрим функцию Φ, определенную (с условием $\partial\Phi/\partial k_i \geq 0$) либо только для $k_i \geq 0$, либо для всех k_i, но симметричную относительно $\mathbf{n}$. $\Phi = p^l S_l(k_1, \ldots, k_n)$ представляет как раз пример такой функции (при $l = 1$ $\partial\Phi/\partial k_i = p \geq 0$ при любых k_i).

Теорема 7. *Если для такого рода функции на всех сферах S $\Phi(S, x) \equiv 1$, то для полной поверхности $\overline{S}$ равенство $\Phi(\overline{S}, x) \equiv 1$ возможно, априори*

[5] См. примечание к теореме 5а.

лишь в трех случаях: во-первых, если $\overline{S}$ есть сфера с центром O, во-вторых, если $\overline{S}$ бесконечна и не проходит через O, а нормаль к $\overline{S}$ в точках, ближайших к O, направлена от O и, в-третьих, если $\overline{S}$ бесконечна и проходит через O.

Последняя возможность реализуется, как было показано, на примере конуса, когда $\Phi = rn^{-1}\sum k_i$. Примера реализации второй возможности мы не имеем.

6. Приложением теоремы 4 служит теорема 8.

Теорема 8. *Пусть на всех сферах S $\Phi(S, x) \equiv 1$* [6]*. Пусть на $\overline{S}$ расстояние r от O достигает абсолютных максимума и минимума > 0 и в окрестности каждой точки, где достигаются эти значения r, для $\overline{S}$ выполнены условия теоремы A. Если при этом $\Phi(\overline{S}, x)$ оказывается невозрастающей функцией r (неубывающей функцией z) или по крайней мере для любых точек (r', x'), (r'', x'') на $\overline{S}$, достаточно близких соответственно к точкам минимума и максимума r $\Phi(\overline{S}, x') > \Phi(\overline{S}, x'')$, то $\overline{S}$ лежит на одной из сфер S, так что если $\overline{S}$ замкнута, то она совпадает с одной из сфер S.*

Подобно теореме 8 имеет место теорема 9.

Теорема 9. *Если при основных условиях теоремы 8 $\Phi(\overline{S}, x)$ оказывается невозрастающей функцией расстояния p от начала до касательной плоскости, то $\overline{S}$ лежит на одной из сфер S.*

Доказательство. В точке максимума (минимума) r нормаль к $\overline{S}$ идет вдоль луча, исходящего из начала, а потому $p = r$. Поэтому если p_1, r_1 и p_2, r_2 суть значения p и r в точках минимума и максимума, то $p_1 = r_1 \leq p_2 = r_2$. Если $r_1 = r_2$, то $\overline{S}$ лежит на сфере S, если же $r_1 < r_2$, то точно так же $p_1 < p_2$.

В таком случае для точек (r', x'), (r'', x'') на $\overline{S}$, достаточно близких соответственно к точкам максимума и минимума r, оказывается $p' < p''$. Поэтому, если $\Phi(\overline{S}, x)$ есть невозрастающая функция p, то $\Phi(\overline{S}, x') \geq \Phi(\overline{S}, x'')$. Т. е. выполнено то же условие, что в теореме 8. Но тогда по этой теореме $\overline{S}$ лежит на одной из сфер S.

В теоремах 8, 9 можно вместо функции Φ ввести функцию Ψ, зависящую только от части кривизн. Так, имеет место теорема 8a.

Теорема 8a. *Пусть выполнены основные условия теоремы 8 с заменой Φ на Ψ, так что $\Psi(S, x) \equiv 1$. Если при этом для любых точек на $\overline{S}$, достаточно близких соответственно к точкам минимума и максимума r $\Psi^-(\overline{S}, x') \geq$ $\geq \Psi^+(\overline{S}, x'')$, то $\overline{S}$ лежит на одной из сфер S.*

---

[6] Если $\Phi(S, x) = h(z)$, т. е. зависит только от радиуса сферы, то вследствие свойств семейства сфер S h будет дифференцируемой. Поэтому можно, введя вместо Φ $\Phi' =$ $= \Phi - h + 1$, свести задачу к случаю $\Phi \equiv 1$.

Доказательство. Введем согласно (2), (3) функции Φ^+, Φ^-. Из равенств (4) и условия $\Psi(S,x) \equiv 1$ следует, что

$$\Phi(S,x) = \Phi^+(S,x) = \Phi^-(S,x) = 1, \tag{10}$$

а по неравенствам (5)

$$\Phi^+(\overline{S},x) \leq \Psi^+(\overline{S},x), \quad \Phi^-(\overline{S},x) \geq \Psi^-(\overline{S},x). \tag{11}$$

Если вблизи точек минимума r всюду $\Psi^-(\overline{S},x) \geq 1 = \Psi(S,x)$, то по теореме 5 $\overline{S}$ лежит на некоторой сфере S. Поэтому допустим, что хоть где-то вблизи минимума r $\Psi^-(\overline{S},x') \leq 1$. Тогда по условию теоремы в точках (r'',x'') вблизи максимума r оказывается

$$\Psi^+(\overline{S},x) \leq 1 = \Psi(S,x)$$

и по теореме 5 $\overline{S}$ должна лежать на одной из сфер S.

7. Наши выводы для сфер S были основаны прежде всего на том, что на них все кривизны равны и положительны: $k_i = z$, а нормали идут вдоль лучей x. Но теми же свойствами обладают сферы S с общим центром в пространстве Лобачевского, а также в пространстве Римана или на $(n+1)$-мерной полусфере, если их центр лежит в полюсе полусферы. (За пределами полусферы кривизны n-мерных сфер с центром в полюсе становятся отрицательными.) Разница лишь в том, что вместо $k_i = z$ будет $k_i = k(z)$, где $k(z)$ — известная монотонная функция.

Более того, пользуясь моделью Кэли — Клейна, пространство Лобачевского можно изобразить внутри $(n+1)$-мерного евклидова шара так, чтобы центру O сфер S отвечал центр шара, а $(n+1)$-мерную полусферу можно спроектировать из центра на касающееся ее в полюсе O $(n+1)$-мерное евклидово пространство. Тогда сферы S с центром O изображаются евклидовыми сферами и притом, как можно убедиться, с теми же кривизнами.

Кроме того, вследствие проективности данных моделей выпуклые поверхности изображаются выпуклыми же поверхностями и обратно. Поэтому сделанное выше замечание о том, что построение семейства (1), соединяющего выпуклые поверхности, не выводит из класса выпуклых поверхностей, сохраняет силу.

Словом, никакой разницы между евклидовыми и неевклидовыми сферами для наших выводов нет. Поэтому все наши теоремы относятся также к неевклидовым сферам, а примеры, сформулированные для евклидовых сфер, легко пересказываются для неевклидовых.

Статья поступила в редакцию
27.I.1958

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I // Вестн. ЛГУ. 1956. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–17.
2. *Александров А. Д.* То же. II // Там же. 1957. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 15–44.
3. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.
4. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleictiungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // Sitzungsberichte Akad. Berlin. 1927. S. 147–152.
5. *Süss W.* Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären durch Herrn K.-P. Grotemeyer // Arch. Math. 1952. Bd 3, No. 4. S. 311–313.
6. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
7. *Grotemeyer K.-P.* Eine kennzeichnende Eigenschaft der Affinsphären // Arch. Math. 1952. Bd 3, No. 4. S. 307–310.
8. *Grotemeyer K.-P.* Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel // Arch. Math. 1953. Bd 4, No. 3. S. 230–233.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». IV

Вестн. ЛГУ. 1958. № 13. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 3. С. 27–34.
Совместно с Ю. А. Волковым

§ 1. Относительные главные кривизны

1. В настоящей работе мы продолжим изложение результатов, частично сформулированных в обзоре [1] (§ 2 и 4). Теоремы настоящей статьи, а также и их доказательства аналогичны соответствующим теоремам и выводам работы [3]. Поэтому нет нужды проводить все рассуждения заново. Мы ограничимся тем, что сформулируем новые результаты и укажем на те изменения, которые нужно внести в выводы работ [2] и [3], чтобы эти результаты получить.

В отличие от [3] здесь рассматриваются поверхности только евклидова пространства, зато главные кривизны их понимаются в смысле относительной дифференциальной геометрии и, кроме теорем, в которых точки поверхностей сопоставляются по их координатам, приводятся результаты, относящиеся к тому случаю, когда точки поверхностей сопоставляются по параллельности нормалей.

Прежде всего мы напомним определение относительных главных кривизн и докажем лемму, позволяющую установить, что теорема A работы [3] остается верной, если в ее формулировке под главными кривизнами понимать относительные главные кривизны.

2. Пусть в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве заданы регулярная замкнутая выпуклая поверхность E со всюду положительной кривизной (условная сфера) и некоторая регулярная же поверхность S. Предположим, что обе эти поверхности ориентированы. Сопоставим каждой точке X поверхности S ту точку Y поверхности E, в которой (единичная) нормаль $\mathbf{n}$ к E совпадает с нормалью к S в точке X. Пусть радиусы-векторы этих точек будут $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Соответствие точек индуцирует соответствие направлений, причем соответствующими оказываются направления $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{y}$, отвечающие одному и тому же $d\mathbf{n}$. Главными радиусами кривизны поверхности S в точке

X по отношению к поверхности E называются экстремумы отношения вторых квадратичных форм поверхностей S и E (в соответствующих точках X и Y по соответствующим направлениям), т. е. экстремумы отношения $d\mathbf{n}\,d\mathbf{x} : d\mathbf{n}\,d\mathbf{y}$. Обратные им величины назовем главными кривизнами.

3. Теперь мы сформулируем то свойство главных кривизн, на которое только и опирается доказательство теоремы А работы [3] (см. [2, теорема 1]), и убедимся, что им обладают и относительные главные кривизны.

Лемма. *Относительные главные кривизны (поверхности S по отношению к E) совпадают с экстремумами отношения второй квадратичной формы* II *поверхности S к некоторой положительно определенной квадратичной форме* I, *коэффициенты которой (регулярно) зависят от радиуса-вектора* $\mathbf{x}$, *задающего поверхность S, и его производных (по координатам на этой поверхности) не выше первого порядка*[1)].

Доказательство. Пусть X и Y — соответствующие точки поверхностей S и E, а $\mathbf{x}(x^k)$, $\mathbf{y}(p^i)$ и $\mathbf{n}(p^i)$ $(k, i = 1, \ldots, n)$ — радиусы-векторы этих точек и нормаль как функции некоторых (регулярных) координат $\{x^k\}$ на S и $\{p^i\}$ на E.

Тогда

$$d\mathbf{n}\,d\mathbf{x} = \sum_{i,k} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial p^i}\,\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^k}\,dp^i dx^k, \quad d\mathbf{n}\,d\mathbf{y} = \sum_{i,j} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial p^i}\,\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p^j}\,dp^i dp^j, \quad dp^i = \sum_j \frac{\partial p^i}{\partial x^j}\,dx^j.$$

Переходя к матричной записи и вводя матрицы A, B и T с элементами

$$(A)_{ik} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial p^i}\,\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^k}, \qquad (B)_{ij} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial p^i}\,\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p^j} \qquad \text{и} \qquad (T)_{ij} = \frac{\partial p^i}{\partial x^j}\,dx^j$$

и векторы

$$\zeta = (dx^1, \ldots, dx^n) \quad \text{и} \quad \eta = (dp^1, \ldots, dp^n),$$

получим $\eta = T\zeta$,

$$d\mathbf{n}\,d\mathbf{x} = (A\zeta, \eta) = (A\zeta, T\zeta) = (\widetilde{T}A\zeta, \zeta),$$
$$d\mathbf{n}\,d\mathbf{y} = (B\eta, \eta) = (BT\zeta, T\zeta) = (\widetilde{T}BT\zeta, \zeta),$$

и

$$\frac{d\mathbf{n}\,d\mathbf{y}}{d\mathbf{n}\,d\mathbf{x}} = \frac{(\widetilde{T}BT\zeta, \zeta)}{(\widetilde{T}A\zeta, \zeta)}.$$

[1)] Заметим, что это представление относительных главных кривизн доопределяет их там, где исходное определение неприменимо, т. е. в параболических точках поверхности S. Можно показать, что если E — настоящая сфера, то построенная нами форма I оказывается первой квадратичной формой поверхности S.

Следовательно, искомые главные кривизны — корни уравнения

$$|\widetilde{T}BT - k\widetilde{T}A| = 0$$

или равносильного ему (при $|A|\cdot|B|\cdot|T| \neq 0$) уравнения

$$|\widetilde{A}B^{-1}\widetilde{T}^{-1}|\cdot|\widetilde{T}BT - k\widetilde{T}A| = |\widetilde{A}T - k\widetilde{A}B^{-1}A| = 0.$$

На корни последнего можно смотреть как на экстремумы отношения

$$\frac{(\widetilde{A}T\zeta,\zeta)}{(\widetilde{A}B^{-1}A\zeta,\zeta)} \qquad \text{или} \qquad \frac{(A\zeta,T\zeta)}{(B^{-1}A\zeta,A\zeta)} = \frac{d\mathbf{n}\,d\mathbf{x}}{(B^{-1}A\zeta,A\zeta)} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$

Из выражений, определяющих $(A)_{ik}$ и $(B)_{ij}$, ясно, что они не зависят от вторых (и тем более высших) производных радиуса-вектора $\mathbf{x}(x^k)$.

Докажем теперь, что форма I, равная $-(B^{-1}A\zeta,A\zeta)$, знакоопределена и притом положительна, если положительна $-d\mathbf{n}\,d\mathbf{y} = -(B\eta,\eta)$. Как видно из сравнения формы I с $-d\mathbf{n}\,d\mathbf{y}$, для доказательства достаточно установить, что из $A\zeta = 0$ следует $\zeta = 0$. Имеем

$$(A\zeta)_i = \sum_k \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial p^i}\,\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x^k}\,dx^k = \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial p^i}\,d\mathbf{x}.$$

Принимая во внимание, что как векторы $\partial\mathbf{n}/\partial p^i$ $(i = 1,\ldots,n)$, так и $\partial\mathbf{x}/\partial x^k$ $(k = 1,\ldots,n)$ линейно независимы и все лежат в одной и той же n-мерной плоскости, получим, что из $A\zeta = 0$ следует $d\mathbf{x} = 0$ и далее $\zeta = 0$.

§ 2. *Основные понятия и предположения*

1. В некоторой области G $(n+1)$-мерного евклидова пространства мы рассматриваем непрерывное семейство $\{S\}$ n-мерных поверхностей S, заполняющее G, и некоторую поверхность $\overline{S}$. Все эти поверхности предполагаются гладкими.

2. Мы говорим, что поверхность S задана явно, если она задана с помощью одной функции $f(x^1,\ldots,x^n)$, определенной в некоторой области изменения переменных $(x^1,\ldots,x^n)$. Мы будем всегда подразумевать задание только одного из следующих видов:

I. $(x^1,\ldots,x^n) = x$ — первые n координат в некоторой системе координат $(x^1,\ldots,x^n,x^{n+1})$, введенной в области G, а поверхность определена заданием $x^{n+1} = f(x^1,\ldots,x^n) = f(x)$ (подробное описание допустимых систем координат см. в [3, § 1, п. 2]); назовем это задание заданием первого вида.

II. $(x^1, \dots, x^n) = x$ — какие-либо координаты, определяющие (единичную) нормаль к поверхности, а поверхность задана опорной функцией $p = f(x^1, \dots, x^n) = f(x)$; мы называем это заданием второго вида.

3. Будем говорить, что поверхность S^1 касается поверхности S^0 в точке X со стороны бо́льших (меньших) f, если S^0 и S^1 заданы явно в окрестности этой точки с помощью функций $f_0(x)$ и $f_1(x)$ с общей областью определения аргумента x и при всех x

$$f_1(x) \geq f_0(x) \qquad (f_1(x) \leq f_0(x)).$$

4. В пространстве выбирается (и впредь фиксируется) «условная сфера» E (см. § 1, п. 2). С ее помощью в каждой точке двукратной дифференцируемости некоторой ориентированной поверхности S однозначно определяются относительные главные кривизны.

5. Пусть задана функция

$$\Phi(k_1, \dots, k_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \beta_1, \dots, \beta_{n+1}) \equiv \Phi(k_1, \dots, k_n, \mathbf{n}, \mathbf{x}).$$

Под значением функции Φ для некоторой поверхности S в данной ее точке понимается результат подстановки относительных главных кривизн, пронумерованных так, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$, на место переменных $k_1, \dots, k_n$, координат (единичной) нормали $\mathbf{n}$ на место $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ и координат радиуса-вектора $\mathbf{x}$ на место $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ (разумеется, все величины берутся для данной поверхности в рассматриваемой точке). Полученное значение будет обозначаться $\Phi(S, x)$. Напомним, что (здесь и далее) под x понимается совокупность независимых переменных $x^1, \dots, x^n$ при выбранном (в рассматриваемой задаче) способе явного задания поверхностей. При этом не предполагается, что поверхность S всюду допускает такое задание.

6. О каждой из функций Φ, рассматриваемых в дальнейшем, предполагается, что (в некоторой области B изменения переменных k, α и β):

a) при каждом данном x она непрерывно дифференцируема по всем остальным аргументам;

b) производные по этим переменным ограничены во всякой замкнутой ограниченной области, содержащейся в B;

c) Φ монотонна по k_i, т. е. $\partial\Phi/\partial k_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, n)$.

7. Пусть поверхности S^0 и S^1 касаются в точке X, ориентированы и явно заданы в некоторой окрестности U этой точки. Мы скажем, что они вместе с функцией Φ удовлетворяют в U условию A, если:

a) задающие их функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ определены в одной и той же области изменения x и имеют там ограниченные вторые производные;

b) ориентации S^0 и S^1 согласованы (нормали в точке X совпадают);

c) функция Φ задана в такой области B, что она оказывается определенной, в смысле п. 5, для всех поверхностей S^t, задаваемых функциями $f_t(x) = (1-t)f_0(x) + tf_1(x)$; $0 \le t \le 1$, и удовлетворяет в B условиям п. 6;

d) в некоторой окрестности значений аргументов функции Φ, соответствующих точкам поверхности S^0, $\partial\Phi/\partial k_i \ge \mathrm{const} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

8. При втором виде задания поверхностей (опорными функциями) параболические точки оказываются особыми, но зато допустимо обращение главных радиусов кривизны в нуль [2, с. 19–21]. Поэтому здесь удобнее пользоваться не кривизнами, а относительными главными радиусами кривизны R_i и рассматривать соответственно функции $\Phi(R_i, \mathbf{x}, \mathbf{n})$ (с теми же условиями, в частности $\partial\Phi/\partial R_i \ge 0$ или $\partial\Phi/\partial R_i \le 0$, что при $R_i \ne 0$ равносильно $\partial\Phi/\partial k_i \ge 0$). Аналогично понимается условие A, п. 7. Дальше всюду в случае задания второго вида нужно либо иметь в виду функцию $\Phi(R_i, \mathbf{x}, \mathbf{n})$, либо, имея в виду функцию $\Phi(k_i, \mathbf{x}, \mathbf{n})$, исключать поверхности с параболическими точками.

§ 3. *Основная теорема*

1. Доказательство основной теоремы 1 в [3] опирается на теоремы A, B и C той же работы. Как следует из доказанной выше леммы (п. 3 § 1), теорема A остается справедливой и при понимании главных кривизн как относительных. Она относится к первому виду явного задания поверхностей. Аналогичная теорема, относящаяся ко второму виду задания, была доказана в [2] (теорема 2). В доказательствах теорем B и C в [3], очевидно, ничего менять не нужно.

Таким образом, можно считать, что при обоих видах задания имеют место теоремы A, B и C работы [3] (в их новом понимании) для тех поверхностей S^0, S^1, функций Φ и точек X, в окрестности которых выполняются условия A (п. 7 § 2).

2. Теорема 1. *Пусть даны семейство $\{S\}$, поверхность $\overline{S}$ и функция Φ, удовлетворяющие принятым условиям (п. 1, 5, 6 § 2). Если*

a) существует поверхность $S' \in \{S\}$, касающаяся $\overline{S}$ со стороны бо́льших f (п. 3 § 2);

b) существует связная компонента множества точек касания, в некоторой окрестности которой поверхности S' и $\overline{S}$ ориентированы и вместе с Φ удовлетворяют условию A (п. 7 § 2);

c) в той же окрестности $\Phi(\overline{S}, x) \ge \Phi(S', x)$,

то $\overline{S}$ лежит на S'.

Если выполняются условия a'), b') и c'), получающиеся из a), b) и c) заменой S' поверхностью S'', касающейся $\overline{S}$ со стороны меньших f, и неравенства в c) на $\Phi(\overline{S}, x) \le \Phi(S'', x)$, то, разумеется, $\overline{S}$ лежит на S''. Доказательство ничем не отличается от доказательства теоремы 1 в [3].

В случаях, наиболее важных для приложений, существование поверхности $S \in \{S\}$, касающейся $\overline{S}$ со стороны бо́льших (меньших) f, очевидно из постановки задачи. Некоторые общие условия, обеспечивающие существование такой поверхности, даны в [3], лемма § 3, п. 3.

3. Совершенно так же, как в [3], из теоремы 1 можно извлечь ряд общих следствий, вполне аналогичных теоремам 2–4 из [3]. Мы не формулируем этих следствий, так как это свелось бы к почти дословному пересказу теорем 2–4 статьи [3] вместе с их доказательствами.

§ 4. *Некоторые приложения основной теоремы*

1. Из теоремы 1 легко вытекают сформулированные в [1, § 2] теоремы 1–4, соответственно обобщенные на случай относительных кривизн k_i (радиусов кривизны R_i). Эти теоремы можно к тому же еще несколько обобщить и дополнить другими результатами. Мы сформулируем только некоторые из них. При этом конкретизировать вид функции Φ мы не будем. Многочисленные примеры такого рода функций приведены в работах [1, 3].

2. Пусть S_1 — замкнутая выпуклая поверхность со всюду положительной кривизной и O — точка внутри нее. Рассмотрим семейство $\{S_\lambda\}$ поверхностей $S_\lambda = \lambda S_1$, получающихся из S_1 преобразованием подобия с центром O и с коэффициентом $0 < \lambda < +\infty$.

Мы будем применять следующие виды задания поверхностей S_λ и поверхности $\overline{S}$. Роль независимого переменного будет играть единичный вектор $x = (x^1, \ldots, x^n)$, причем либо это будет вектор, отложенный из начала O и определяющий тем самым исходящий из O луч, либо это будет вектор нормали к поверхности.

В качестве функции $f(x)$ может служить:

1) расстояние $\rho(x)$ от точки O до точки пересечения поверхности с лучом, соответствующим x;

2) $f(x) = 1/\rho(x)$, что иногда удобнее, так как если f_0 и f_1 задают выпуклые поверхности, то и $f_t = (1-t)f_0 + tf_1$ при всех $0 \le t \le 1$ обладает этим свойством;

3) опорная функция $q(x)$;

4) относительное расстояние $r(x) = \rho(x)/\rho_1(x)$, где $\rho_1(x)$ — расстояние до S_1 или обратная величина $f(x) = 1/r(x)$;

5) относительная опорная функция $p(x) = q(x)/q_1(x)$, где $q_1(x)$ — опорная функция поверхности S_1.

Последние два выбора удобны тем, что поверхности семейства $\{S_\lambda\}$ задаются уравнениями $r = \mathrm{const}$ или $p = \mathrm{const}$ и на каждой из них $r = p = \lambda$.

3. Предположим, что поверхность S_1 совпадает с условной сферой E, так что мы имеем дело с семейством «условных сфер» λE. Вследствие равенства всех относительных главных кривизн в любой точке каждой из поверхностей семейства $\{\lambda E\}$ можно допустить к рассмотрению функции более общего вида по сравнению с Φ (п. 5, 6 § 2), а именно: $\Psi(k_1, \dots, k_m, \mathbf{n}, \mathbf{x})$, где $m \le n$ (все остальные обозначения и условия те же, что и в п. 5, 6 § 2). Пусть $\overline{S}$ — некоторая поверхность; $\mathbf{x}$ — радиус-вектор; $\mathbf{n}$ — нормаль и $k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_n$ — относительные главные кривизны в некоторой ее точке. Полагаем

$$\Psi^+(\overline{S}, x) = \Psi(k_1, \dots, k_m, \mathbf{n}, \mathbf{x}),$$

$$\Psi^-(\overline{S}, x) = \Psi(k_{n-m+1}, \dots, k_n, \mathbf{n}, \mathbf{x}),$$

$$\Phi^+(\overline{S}, x) = \frac{1}{n-m+1} \sum_{i=m}^{n} \Psi(k_1, \dots, k_{m-1}, k_i, \mathbf{n}, \mathbf{x}),$$

$$\Phi^-(\overline{S}, x) = \frac{1}{n-m+1} \sum_{i=1}^{n-m+1} \Psi(k_i, k_{n-m+2}, \dots, k_n, \mathbf{n}, \mathbf{x}).$$

Очевидно, на поверхностях λE вследствие равенств $k_1 = k_2 = \dots = k_n$

$$\Phi^+(\lambda E, x) = \Psi^+(\lambda E, x) = \Psi^-(\lambda E, x) = \Phi^-(\lambda E, x),$$

на произвольной же поверхности $\overline{S}$ вследствие $k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_n$

$$\Phi^+(\overline{S}, x) \le \Psi^+(\overline{S}, x) \qquad \text{и} \qquad \Phi^-(\overline{S}, x) \ge \Psi^-(\overline{S}, x).$$

Кроме того, очевидно, если функция Ψ удовлетворяла условиям п. 6 и 7 § 2, то тем же свойством обладают и функции Φ^+ и Φ^-. (В случае задания поверхностей опорными функциями можно, как уже сказано, ввести в качестве аргументов вместо k_i радиусы кривизны R_i.)

4. Теорема 2. *Рассмотрим семейство $\{\lambda E\}$, поверхность $\overline{S}$ и функцию Ψ, удовлетворяющую принятым условиям. Пусть выполняются условия a) и b) (или a′) и b′)) теоремы 1 (для поверхностей $S' = \lambda' E$ или $S'' = \lambda'' E$) и*

$$\Psi^-(\overline{S}, x) \ge \Psi(\lambda' E, x) \qquad (\text{или } \Psi^+(\overline{S}, x) \le \Psi(\lambda'' E, x)),$$

тогда $\overline{S}$ лежит на $\lambda' E$ (или на $\lambda'' E$).

Эта теорема аналогична теореме 5 в [3]. Доказательство ее, как и в [3], следует из соотношений

$$\Phi^-(\overline{S}, x) \ge \Psi^-(\overline{S}, x) \ge \Psi(\lambda' E, x) = \Phi^-(\lambda' E, x)$$

и теоремы 1 (в применении к Φ^-, так как для нее оказалось выполненным условие c)). Заметим, что теорему 2 можно формулировать дословно так же, как теорему 5 работы [3], если воспользоваться понятием относительного расстояния и сферы относительного радиуса r, т. е. поверхности rE.

5. На замкнутой поверхности r заведомо достигает максимума, а потому в теореме 2 содержится, например, следующая теорема.

Теорема 3. *Если на всех условных сферах λE $\Psi(\lambda E, x) = \psi(x)$ и на замкнутой поверхности $\overline{S}$, может быть проходящей через O, $\Psi^+(\overline{S}, x) \leq \psi(x)$ (хотя бы только в окрестности точек, наиболее удаленных от O в смысле относительного расстояния r), то $\overline{S}$ есть одна из условных сфер λE (предполагая, конечно, что в точках, наиболее удаленных от O, выполнено условие А п. 7 § 2).*

Максимум r совпадает с максимумом p, поэтому теорема 3 одинаково действительна для обоих рассматриваемых нами заданий поверхности.

Так как поверхности λE выпуклы, то там, где одна из них касается $\overline{S}$ со стороны бо́льших r, $\overline{S}$ оказывается локально выпуклой; если она имеет непрерывную кривизну, то в окрестности такой точки кривизна ее оказывается положительной. Поэтому (в предположении двукратной непрерывной дифференцируемости $\overline{S}$) в теореме 3 можно иметь в виду функцию Ψ, определенную и обладающую требуемыми свойствами лишь при $k_i \geq 0$, как, например, функция $r^2 k_1 k_2$.

6. Пример. Пусть $F_l(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ — элементарная симметрическая функция степени l, нормированная так, что $F_l(1, \ldots, 1) = 1$. Положим

$$\Psi = \frac{F_{k+l}(rk_1, \ldots, rk_m)}{F_l(rk_1, \ldots, rk_m)} = r^k \frac{F_{k+l}(k_1, \ldots, k_m)}{F_l(k_1, \ldots, k_m)},$$

или аналогично с заменой r и p, и переходим от k_i к R_i.

Мы утверждаем, что *если на дважды непрерывно дифференцируемой замкнутой поверхности $\overline{S}$ (хотя бы в окрестности ее наиболее удаленных от O точек) для указанного вида функции Ψ оказывается $\Psi^+(\overline{S}, x) \leq 1$, то $\overline{S}$ есть одна из условных сфер λE.*

В самом деле условия теоремы 3 здесь выполнены. На условных сферах $rk_i = 1$, а поэтому $\Psi(\lambda E, x) = 1$. Кроме того, при всех $k_i > 0$, $\partial\Psi/\partial k_i > 0$, что легко установить, вычисляя эту производную и используя известные неравенства между симметрическими функциями (см., например, [4]). Таким образом, условия А выполнены и наше утверждение доказано.

Заметим, что оно содержит теорему В. Зюсса [5], которая утверждает, что при $p^k F_l(R_1, \ldots, R_n) = F_{k+l}(R_1, \ldots, R_n)$ поверхность есть условная сфера. В этом частном случае $m = n$ и требуется $\Psi^+(\overline{S}, x) = 1$.

7. Вернемся к общему случаю, когда поверхность S_1 не обязательно совпадает с условной сферой E. В этом случае, например, имеет место теорема, вполне аналогичная теореме 3, с заменой Ψ на Φ, зависящую от всех k_i

(или R_i). Эта теорема содержит теорему 1 из [1], обóбщенную на относительные кривизны.

Отметим еще следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть на поверхностях $S_r = rS_1$ $(r = \lambda = p)$ $\Phi(S_r, x) = h(r)$, где $h(r)$ — неубывающая функция r. Пусть на поверхности $\overline{S}$ $\Phi(\overline{S}, x)$ — невозрастающая функция r, причем на $\overline{S}$ r достигает абсолютных максимума и минимума a и b, и в окрестностях точек касания $\overline{S}$ с поверхностями S_a и S_b удовлетворяются условия A, тогда $\overline{S}$ лежит на одной из поверхностей S_r.*

Совершенно такое же утверждение имеет место с заменой r на p.

Эта теорема вполне аналогична теореме 4 в [3] (ср. также теоремы 8, 9 в [3]) и доказательство ее точно такое же. Она содержит, между прочим, теорему 2 из [1].

Статья поступила в редакцию
22.III.1958

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I // Вестн. ЛГУ. 1956. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–17.
2. *Александров А. Д.* То же. II // Там же. 1957. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 15–44.
3. *Александров А. Д.* То же. III // Там же. 1958. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 14–26.
4. *Харди Г., Литтлвуд Д., Пойа Г.* Неравенства. М.: Иностр. лит., 1948.
5. *Süss W.* Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären durch Herrn K.-P. Grotemeyer // Arch. Math. 1952. Bd 3, No. 4. S. 311–313.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». V

Вестн. ЛГУ. 1958. № 19. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 4. С. 5–8

1. Теорема. *Пусть $\Phi(k_1, \ldots, k_n)$ — непрерывно дифференцируемая функция, определенная для $k_1 \geq \ldots \geq k_n$, удовлетворяющая условиям $\partial\Phi/\partial k_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть в $(n+1)$-мерном пространстве постоянной кривизны имеется дважды дифференцируемая замкнутая поверхность S без самопересечений и с ограниченными главными кривизнами. Если на поверхности S функция Φ от ее главных кривизн $k_1 \geq \ldots \geq k_n$ имеет во всех точках одно и то же значение, то S есть сфера.*

Эта теорема была сформулирована мною в [1, § 3 и 4, п. 3]. Там же смотри ссылки на литературу по этому вопросу.

Простейший пример представляет поверхность в трехмерном евклидовом пространстве с $k_1 + k_2 = \text{const}$. В этом случае теорема утверждает, что замкнутая поверхность без самопересечений с постоянной средней кривизной есть сфера. Известно, что поверхность мыльного пузыря имеет постоянную кривизну и, конечно, не имеет самопересечений. Поэтому данный частный результат можно выразить следующим образом: единственно возможная форма мыльного пузыря — сферическая.

Говоря о пространстве постоянной кривизны, мы имеем в виду либо евклидово пространство, либо пространство Лобачевского, либо сферическое пространство. В последнем случае предполагается, что поверхность S лежит целиком в одной полусфере.

Если поверхность S предполагается выпуклой с кривизнами $k_i > k_0 = \text{const} > 0$, то функцию Φ достаточно рассматривать лишь для значений $k_i > k_0$. Например, можно взять $\Phi = k_1^2 + \ldots + k_n^2$, так что $\partial\Phi/\partial k_i > 0$ лишь для $k_i > 0$.

2. Докажем нашу теорему.

Пусть S — рассматриваемая поверхность, на которой $\Phi = \text{const}$. Так как S не имеет самопересечений, то она ограничивает некоторое тело G. (Если речь идет о сферическом пространстве, то G — та его часть, ограниченная S, которая лежит в полусфере. В доказательстве мы говорим о прямых, плоскостях и пр., что легко интерпретируется для сферического пространства.)

Проведем прямую l и плоскость P, опорную к телу G, перпендикулярную l. Будем двигать P, оставляя ее перпендикулярной l, и так, чтобы она пересекала тело G. При каждом положении плоскости P она отрезает от G некоторую «горбушку» H.

Мы строим «отраженную горбушку» $\overline{H}$, получаемую из «горбушки» H отражением в отрезающей ее плоскости P. Заранее, конечно, не исключено, что H состоит из отдельных кусков.

Во всяком случае при каждом положении плоскости P, пересекающей тело G, мы имеем некоторую, опирающуюся на P, «отраженную горбушку» $\overline{H}$. При этом при малых смещениях плоскости из ее начального положения «горбушка» $\overline{H}$, очевидно, содержится в теле G.

Вместе с тем также очевидно, что при движении плоскости P должен наступить момент, когда «отраженная горбушка» H начнет выступать из тела G. Как раз в этот момент поверхность $\overline{S}$ «горбушки» $\overline{H}$ коснется поверхности S изнутри. Пусть это произошло в некоторой точке X.

Точка X лежит либо внутри поверхности $\overline{S}$, либо на ее краю.

3. В первом случае поверхности S, $\overline{S}$ имеют одностороннее касание в точке X и при подходящем выборе координат $x^1, \dots, x^n$, $x^{n+1} = z$ они представляются в окрестности точки X уравнениями

$$z = z(x^1, \dots, x^n), \quad z = \overline{z}(x^1, \dots, x^n),$$

причем

$$\Delta z = z - \overline{z} \geq 0$$

и в точке X $\Delta z = 0$.

Так как на поверхности S $\Phi(k_1, \dots, k_n) = \text{const}$, то в точках поверхностей S, $\overline{S}$ с одинаковыми $x_1, \dots, x_n$ будет $\Phi = \overline{\Phi}$. Поэтому согласно теореме, доказанной в [2], Δz удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка, которое вследствие условий $\partial\Phi/\partial k_i > 0$ имеет эллиптический тип. (Так как $\partial\Phi/\partial k_i$ непрерывны и k_i ограничены, то $\partial\Phi/\partial k_i > \text{const} > 0$. Из вывода теоремы 1 работы [2] легко заключить, что в случае, когда на S все $k_i > k_0 = \text{const} > 0$, достаточно требовать $\partial\Phi/\partial k_i > 0$ $(i = 1, \dots n)$ для $k_i > k_0$.)

Согласно же теореме, доказанной в [3, 4], функция $\Delta z \geq 0$, удовлетворяющая эллиптическому уравнению и достигающая нуля где-нибудь внутри области, есть тождественный нуль. (Это есть не что иное, как известная теорема Э. Хопфа [5] с той лишь разницей, что не требуется непрерывности коэффициентов уравнения.)

Таким образом, $\Delta z \equiv 0$, т. е. поверхность $\overline{S}$ налегает на S в окрестности точки X.

4. Из данного рассуждения, очевидно, следует, что вся связная компонента S^* поверхности $\overline{S}$, содержащая точку X, целиком лежит на поверхности S. В самом деле, пусть E — множество общих точек поверхностей S, S^*. Оно замкнуто. Поэтому, если бы S^* не лежала целиком на S, то можно было бы взять точку Y на границе E и внутри S^*. Применяя тогда к окрестности Y те же рассуждения, что и выше, мы убедились бы, что вопреки предположению S^* налегает на S всюду в окрестности Y.

Таким образом, S^* целиком лежит на S. Но так как S^* опирается на плоскость P, то и часть поверхности S, совпадающая с S^*, опирается на ту же плоскость P. Из построения поверхности $\overline{S}$ ясно, что S^* симметрична той части S, которая лежит с другой стороны от плоскости P.

Таким образом, эта часть поверхности S вместе с S^* образует замкнутую поверхность, которая тем самым и исчерпывает поверхность S.

Кроме того, оказывается, что P есть плоскость симметрии поверхности S.

Но направление плоскости P было выбрано произвольно. В случае неевклидова пространства можно говорить о плоскости, перпендикулярной любой данной прямой. Поэтому из нашего вывода следует, что поверхность S имеет плоскость симметрии любого направления. Тем самым S есть сфера.

5. Рассмотрим теперь тот случай, когда точка X, где поверхность $\overline{S}$ коснулась поверхности S, лежит на краю $\overline{S}$.

Проведем через X касательную плоскость к S и, выбрав в ней координаты $x^1, \ldots, x^n$, примем за $x^{n+1} = z$ расстояние от этой плоскости, отсчитываемое в сторону внутренней нормали к S.

Так как $\overline{S}$ лежит в теле G, то снова будет $\Delta z = z - \overline{z} \geq 0$, а в точке X $\Delta z = 0$.

Кроме того, по построению поверхности $\overline{S}$ она симметрична той части поверхности S, которая лежит по другую сторону плоскости P. Отсюда ясно, что в точке X поверхность $\overline{S}$ касается S так, что в X не только $\Delta z = 0$, но также

$$\Delta z_i = \frac{\partial \Delta z}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

По той же причине плоскость T, касательная к S в точке X, перпендикулярна плоскости P, ограничивающей $\overline{S}$. Поэтому функция $\overline{z}(x^1, \ldots, x^n)$, задающая $\overline{S}$ в окрестности X, определена в такой области U на плоскости T, которая ограничена вблизи точки X $(n-1)$-мерной плоскостью — пересечением T с P.

Точно так же, как выше, ссылаясь на [1], мы убеждаемся, что в области U функция Δz удовлетворяет эллиптическому уравнению. Кроме того, как уже доказано, $\Delta z \geq 0$ и в точке X $\quad \Delta z = \Delta z_i = 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)$.

Отсюда согласно теореме, доказанной в [4] и цитированной в [1] как теорема A, следует, что в U $\Delta z \equiv 0$, т. е. поверхность $\overline{S}$ налегает на S всюду в некоторой окрестности точки X. А тогда повторение прежних рассуждений приводит нас к доказательству того, что S есть сфера.

Таким образом, наша теорема доказана.

6. В доказательстве было существенно, что поверхность есть граница некоторого тела. Это может иметь место и тогда, когда поверхность касается сама себя. Таким образом, можно допускать касания поверхности самой с собой. Требование отсутствия самопересечений можно еще несколько ослабить, допуская, в частности, некоторые в известном смысле небольшие самопересечения.

Кроме того, ссылаясь на более общую теорему о дифференциальных уравнениях, можно заменить требование ограниченности вторых производных условием Липшица на первые производные с одной и той же постоянной Липшица на всей поверхности.

Но мы не будем заниматься здесь этими обобщениями.

Статья поступила в редакцию
6.V.1958

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I // Вестн. ЛГУ. 1956. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–17.
2. *Александров А. Д.* То же. II // Там же. 1957. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 15–44.
3. *Александров А. Д.* Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка // Там же. 1954. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 3–17.
4. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.
5. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleictiungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // Sitzungsberichte Akad. Berlin. 1927. S. 147–152.

Теоремы единственности для поверхностей «в целом». VI

Вестн. ЛГУ. 1959. № 1. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 1. С. 5–13

В теоремах единственности, доказанных в предыдущих статьях [1–5], фигурируют функции Φ от главных кривизн и других величин, связанных с поверхностями.

В настоящей статье мы покажем, что этим теоремам, по крайней мере для некоторого вида функций Φ, наиболее важного в конкретных случаях, можно придать такие формулировки, в которых ни о каких функциях Φ не говорится, а речь идет лишь о более геометричных соотношениях между поверхностями.

§ 1. *Сведе́ние функции Φ к линейной*

1. Мы рассматриваем n-мерные поверхности в $(n+1)$-мерном евклидовом или вообще римановом пространстве.

Пусть между двумя поверхностями S^0, S^1 установлено взаимнооднозначное соответствие, так что обе они могут считаться отображенными на одно и то же параметрическое многообразие, точку которого обозначаем x. Это x может быть, например, совокупностью первых n пространственных координат $x^1, \dots, x^n$ или единичным вектором нормали, если точки поверхностей сопоставлены по параллелизму нормалей, и др.

Поверхности могут задаваться уравнениями, которые можно написать в общей форме: $z = z(x)$, где z может быть координатой x^{n+1} или опорной функцией и др. Под z_i подразумеваются производные функции $z(x)$ по параметрам, определяющим x, например $\partial z/\partial x^i$.

Под k_i^0, k_i^1 понимаются главные кривизны поверхностей S^0, S^1 в их соответственных точках, перенумерованные в порядке убывания: $k_1 \geq \ldots \geq k_n$. Предполагается, что поверхности ориентированы и что k_i всюду определены. В евклидовом пространстве под k_i можно подразумевать относительные главные кривизны по отношению к какой-либо фиксированной «условной сфере» (см. [4]). В некоторых случаях удобнее вместо главных кривизн брать главные радиусы кривизны.

Мы будем рассматривать функции $\Phi = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n; x)$ n численных переменных ξ_i и «параметрической точки» x.

Каждой точке $X(x)$ поверхности S сопоставляется значение $\Phi(S; x)$ функции Φ по правилу следующего типа. В простейшем случае берется значение Φ при $\xi_i = k_i$; вообще же

$$\xi_i = f_i(z, z_1, \ldots, z_n; x) k_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Таким образом,

$$\Phi(S; x) = \Phi(f_1 k_1, \ldots, f_n k_n; x). \tag{2}$$

2. При фиксированном x пусть ξ_i^0, ξ_i^1 обозначают значения ξ_i, соотнесенные поверхностям S^0, S^1 согласно (1). Предполагается, конечно, что при каждом данном x Φ определена для этих значений ξ_i. Кроме того, предполагается, что Φ удовлетворяет при каждом данном x следующим условиям, в которых имеются в виду лишь те ξ_i, для которых $\xi_i^0 \neq \xi_i^1$.

(A) Φ определена для всех значений ξ_i, заключенных между ξ_i^0, ξ_i^1;

(B) она непрерывно дифференцируема по всем ξ_i в определенной условием (A) замкнутой области их значений;

(C) если положить $\xi_i^t = (1 - t)\xi_i^0 + t\xi_i^1$, то

$$C > \int\limits_0^1 \frac{\partial \Phi(\xi_1^t, \ldots, \xi_n^t; x)}{\partial \xi_i^t}\, dt > c > 0, \tag{3}$$

где постоянные C, c не зависят ни от x, ни от i.

Это условие выполнено, если $C > \partial\Phi/\partial\xi_i > c > 0$, но оно может быть выполнено и при более слабых требованиях.

Сформулированные условия не отличаются существенно от тех, которые налагаются на функцию Φ в предыдущих статьях [1–5] и, поскольку мы ограничиваемся функциями вида (2), являются лишь несколько более общими.

3. Обозначим

$$\Delta\Phi = \Phi(S^1; x) - \Phi(S^0; x). \tag{4}$$

Из условий, наложенных на Φ, и из определения ξ_i^t очевидно, что

$$\Delta\Phi = \int\limits_0^1 \frac{d\Phi(\xi_1^t, \ldots, \xi_n^t; x)}{dt}\, dt = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \Delta\xi_i, \tag{5}$$

где

$$\Delta\xi_i = \xi_i^1 - \xi_i^0, \qquad a_i(x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial\Phi(\xi_1^t, \dots, \xi_n^t; x)}{\partial\xi_i^t}\, dt. \tag{6}$$

Если $\Delta\xi_i = 0$, то $a_i(x)$ не определено, но тогда, не нарушая равенства (5), будем полагать $a_i(x) = 1$.

Отсюда ясно, что имеет место следующее простое предложение.

Лемма 1. *Соотношения $\Delta\Phi = 0$, $\Delta\Phi \geq 0$, $\Delta\Phi \leq 0$ для общей функции Φ равносильны таким же соотношениям для функции, линейной относительно ξ_i, т. е.*

$$\Phi = \sum_{i=1}^n a_i(x)\xi_i. \tag{7}$$

При этом условие (3) равносильно тому, что

$$C > a_i(x) > c > 0. \tag{8}$$

При $\xi_i = f_i k_i$ речь идет о функции

$$\Phi = \sum_{i=1}^n a_i(x) f_i(z, z_1, \dots, z_n; x) k_i. \tag{9}$$

Если существуют такие постоянные M, m, что

$$M > f_i > m > 0 \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{10}$$

то при условии (8) коэффициенты при k_i в формуле (9) оказываются заключенными между некоторыми положительными постоянными H, h, т. е.

$$H > \frac{\partial\Phi}{\partial k_i} > h > 0. \tag{11}$$

Наконец, если $f_i(z, z_1, \dots, z_n; x)$ непрерывно дифференцируемы по z, $z_1, \dots, z_n$ при каждом x, то функция (9) также непрерывно дифференцируема по этим переменным.

Таким образом, мы оказываемся в условиях доказанных в [2] теорем о представлении $\Delta\Phi$ в виде эллиптического дифференциального выражения относительно $\Delta z = z^1(x) - z^0(x)$. (Случай относительных кривизн см. также в [4].) Поэтому, не повторяя деталей теорем статьи [2], мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *При функции Φ определенного выше типа и при указанных условиях на f_i $\Delta\Phi$ представляется в виде эллиптического дифференциального выражения относительно $\Delta z = z^1(x) - z^0(x)$:*

$$\Delta\Phi = A^{ik}\Delta z_{ik} + B^i\Delta z_i + C\Delta z. \tag{12}$$

§ 2. *Наглядный смысл условий на* $\Delta\Phi$

1. Введем для рассматриваемой пары поверхностей S^0, S^1 величины $\Delta^+ = \Delta^+(x)$, $\Delta^- = \Delta^-(x)$ следующим образом. При каждом данном x $\Delta^+(x)$ есть либо наибольшая из положительных разностей $\Delta\xi_i = \xi_i^1 - \xi_i^0$, либо нуль, если все $\Delta\xi_i \leq 0$. Аналогично $\Delta^-(x)$ есть либо модуль наименьшей из отрицательных разностей $\Delta\xi_i$, либо нуль, если все $\Delta\xi_i \geq 0$. В простейшем случае, когда $\xi_i = k_i$, речь идет, стало быть, о разностях главных кривизн.

Лемма 2. *То условие, что для поверхностей S^0, S^1 всюду, при некоторой функции Φ определенного в § 1 п. 2 типа, $\Delta\Phi \geq 0$, равносильно существованию такой постоянной $A > 0$, что при всех x*

$$A\Delta^+(x) \geq \Delta^-(x). \tag{1}$$

Аналогично условие $\Delta\Phi \leq 0$ равносильно

$$\Delta^+(x) \leq A\Delta^-(x), \tag{2}$$

и, следовательно, условие $\Delta\Phi = 0$ равносильно

$$A\Delta^+(x) \geq \Delta^-(x) \geq \frac{1}{A}\Delta^+(x). \tag{3}$$

Более наглядно условие (1) означает, очевидно, следующее. При каждом x либо все $\Delta\xi_i = 0$, либо есть $\Delta\xi_i > 0$, и если при переменном x $\Delta^+(x) \to 0$, то $\Delta^-(x) \to 0$ по крайней мере с той же скоростью. Аналогично условие (3) означает, что при каждом x либо все $\Delta\xi_i = 0$, либо среди них есть как положительные, так и отрицательные, и отношение крайних из них заключено в конечных пределах, так что если при переменном x $\Delta^+(x)$ или $\Delta^-(x)$ стремится к нулю, то это происходит для них одновременно и с одинаковой скоростью.

В простейшем случае, когда $\xi_i = k_i$, указанные условия приобретают особенно наглядный характер. Для выпуклых поверхностей их можно сформулировать, воспользовавшись индикатрисой Дюпена.

Тогда то условие, что при данном x все $\Delta k_i = 0$ или все $\Delta k_i \geq 0$ ($\Delta k_i = k_i^1 - k_i^0$), означает соответственно, что индикатрисы поверхностей можно совместить или что индикатриса поверхности S^1 может быть помещена в индикатрису поверхности S^0. Условие же, что среди Δk_i есть как положительные, так и отрицательные, означает, что ни одну из двух индикатрис нельзя поместить в другую: они всегда выступают одна из другой. Наконец, условия о скорости обращения в нуль величин Δ^+, Δ^- сводятся к условиям о скорости исчезновения выступов индикатрис. Так, условие (3) означает, что если при изменении x индикатрисы стремятся к слиянию, то выступы одной исчезают с такой же скоростью, как выступы другой. Условие же (1) означает, что выступы индикатрисы поверхности S^1 (из индикатрисы поверхности S^0) исчезают не медленнее, чем выступы индикатрисы поверхности S^0.

2. Доказательство леммы 2. Докажем сначала, что из условий $\Delta\Phi \geq 0$, $\Delta\Phi \leq 0$, $\Delta\Phi = 0$ следуют соответственно неравенства (1), (2), (3).

Пусть $\Delta\Phi \geq 0$. Согласно лемме 1 это соотношение равносильно следующему:

$$\sum a_i(x)\Delta\xi_i \geq 0, \tag{4}$$

где

$$C > a_i(x) > c > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Если все $\Delta\xi_i \geq 0$, то неравенство (1) выполнено тривиальным образом. Поэтому допустим, что при данном x есть $\Delta\xi_i < 0$. Тогда из (4) и (5) следует, что при данном x есть также $\Delta\xi_i > 0$.

Согласно определению величин Δ^+, Δ^- наибольшая из разностей $\Delta\xi_i$ равна $\Delta^+(x)$, а наименьшая — $-\Delta^-(x)$.

Заменим в левой части неравенства (4) все разности $\Delta\xi_i$, кроме наименьшей, на Δ^+, а коэффициенты при них — на их верхнюю границу C. При наименьшей же разности, равной $-\Delta^-$, заменим коэффициент на нижнюю границу c. В результате неравенство может только усилиться и мы получим

$$(n-1)C\Delta^+ - c\Delta^- \geq 0.$$

Это и есть неравенство (1) с постоянной $A = (n-1)C/c$.

Таким образом доказано, что из $\Delta\Phi \geq 0$ следует (1). То, что из $\Delta\Phi \leq 0$ следует (2), доказывается совершенно так же, причем значение для A получается то же самое. Отсюда оказывается также доказанным, что из $\Delta\Phi = 0$ следует (3).

3. Покажем теперь, что при выполнении (1) существует такая функция Φ с требуемыми свойствами, что $\Delta\Phi \geq 0$.

При данном x обозначим соответственно через $N^+(x)$, $N^-(x)$ суммы положительных и модулей отрицательных $\Delta\xi_i$; если же положительных или отрицательных $\Delta\xi_i$ нет, то определяем соответственно $N^+(x)=0$, $N^-(x)=0$. Сравнивая это определение с определением величин Δ^+, Δ^-, замечаем, что имеют место неравенства

$$\Delta^+ \leq N^+ \leq n\Delta^+, \qquad \Delta^- \leq N^- \leq n\Delta^-. \tag{6}$$

Предполагая теперь, что выполнено неравенство (1), определим искомую функцию Φ следующим образом:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\xi_i, \tag{7}$$

где

$$a_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{N^-(x)}{N^+(x)}, & \text{если } \Delta\xi_i > 0, \\ 1, & \text{если } \Delta\xi_i \leq 0. \end{cases} \tag{8}$$

В силу этого определения, если все $\Delta\xi_i = 0$, то все $a_i = 1$, так что $\Phi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ и $\Delta\Phi = 0$. Если же не все $\Delta\xi_i = 0$, то в силу (1) заведомо есть $\Delta\xi_i > 0$, так что $N^+(x) \neq 0$. Тогда из определения величин N^+, N^- и коэффициентов a_i непосредственно следует, что

$$\Delta\Phi = \sum a_i \Delta\xi_i = \left(1 + \frac{N^-}{N^+}\right) N^+ - N^- = N^+ > 0.$$

Таким образом, при всех $x \quad \Delta\Phi \geq 0$. Остается показать, что коэффициенты a_i удовлетворяют неравенствам (5).

Из их определения формулами (8) следует, что при $\Delta\xi_i \leq 0$, $a_i(x) = 1$ и вообще

$$a_i(x) \geq 1 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Если не все $\Delta\xi_i = 0$, то в силу (1), $\Delta^+ \neq 0$, так что (1) равносильно

$$\frac{\Delta^-}{\Delta^+} \leq A.$$

А так как, в силу неравенств (6), $N^+ \geq \Delta^+$, $N^- \leq n\Delta^-$, то

$$\frac{N^-}{N^+} \leq n\frac{\Delta^-}{\Delta^+} \leq nA.$$

Таким образом, из (8) следует, что при $\Delta\xi_i > 0$

$$a_i = 1 + \frac{N^-}{N^+} \leq 1 + nA. \tag{10}$$

Следовательно, коэффициенты a_i удовлетворяют неравенствам (5) с постоянными $c = 1$, $C = 1 + nA$; построенная функция Φ удовлетворяет всем требуемым условиям.

4. То, что при выполнении неравенства (2) существует функция Φ, для которой $\Delta\Phi \leq 0$, доказывается вполне аналогично. Мы определяем ее той же линейной формулой (7) с коэффициентами

$$a_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{N^+(x)}{N^-(x)}, & \text{если } \Delta\xi_i < 0, \\ 1, & \text{если } \Delta\xi_i \geq 0. \end{cases} \tag{11}$$

Проверка того, что она удовлетворяет требуемым условиям, осуществляется совершенно так же, как и выше.

5. Если же выполнены неравенства (3), то существует функция Φ, для которой $\Delta\Phi = 0$. Эту функцию мы определяем той же формулой (7), комбинируя определения (8), (11) коэффициентов $a_i(x)$, т. е. мы полагаем

$$a_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta\xi_i = 0, \\ 1 + \frac{N^-(x)}{N^+(x)}, & \text{если } \Delta\xi_i > 0, \\ 1 + \frac{N^+(x)}{N^-(x)}, & \text{если } \Delta\xi_i < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда из определения величин N^+, N^- непосредственно следует, что

$$\Delta\Phi = \sum a_i \Delta\xi_i = \left(1 + \frac{N^-}{N^+}\right) N^+ - \left(1 + \frac{N^+}{N^-}\right) N^- = 0.$$

Далее, из (12) очевидно, что если все $\Delta\xi_i = 0$, то все $a_i = 1$. Вообще же $a_i(x) \geq 1$. Если же не все $\Delta\xi_i = 0$, то из неравенства (3) следует, что Δ^+ и Δ^- отличны от нуля. Поэтому из неравенств (3) и (6) легко выводится, что

$$a_i \leq 1 + nA.$$

Этим лемма 2 полностью доказана.

§ 3. *Некоторые теоремы единственности*

1. Полученные выводы позволяют придать теоремам единственности статей [1–5] формулировки, обходящиеся без всяких функций Φ.

В следующих формулировках имеются в виду дважды дифференцируемые, ориентированные, n-мерные поверхности с ограниченными вторыми производными [1]. В [5] была доказана следующая теорема.

---

[1] В случае координатного задания поверхностей это означает ограниченность кривизн k_i, в случае же задания их опорной функцией — ограниченность радиусов кривизны R_i.

Если на замкнутой поверхности S без самопересечений в пространстве постоянной кривизны некоторая функция $\Phi(k_1, \ldots, k_n)$ постоянна, то S есть сфера.

Здесь под Φ можно подразумевать функцию описанного в п. 2 § 1 типа, определенную для всех значений k_i, между $\sup k_i$ и $\inf k_i$ на S. Под пространством постоянной кривизны мы разумеем либо евклидово пространство, либо пространство Лобачевского, либо $(n+1)$-мерную полусферу.

Теперь мы можем утверждать несколько иную, по крайней мере внешне, более общую и геометричную теорему.

Теорема 2. *Пусть на замкнутой поверхности S без самопересечений в пространстве постоянной кривизны выполнено следующее условие. Пусть x, $\overline{x}$ — какие-либо две точки поверхности S и k_i, $\overline{k}_i$ — главные кривизны в этих точках. Тогда либо все $\Delta k_i = \overline{k}_i - k_i = 0$, либо есть Δk_i разных знаков. Кроме того, если при переменных x, $\overline{x}$ все $\Delta k_i \to 0$, то отношение наибольшей и наименьшей разностей Δk_i остается ограниченным, т. е. для $\Delta\xi_i = \Delta k_i$ выполнено условие (3) леммы 2.*

В таком случае S есть сфера.

(Если заранее дано, что поверхность S выпуклая, то поставленное условие можно формулировать, пользуясь индикатрисами Дюпена, как указано в п. 1 § 2.)

Доказательство. Повторяя рассуждение, приведенное в [5], мы пересекаем S плоскостью P и отрезанную от S «горбушку» отражаем в этой плоскости. Мы перемещаем плоскость P внутрь S до тех пор, пока отраженная «горбушка» $\overline{S}$ не начнет выступать из тела, ограниченного поверхностью S. В этот момент она касается S изнутри.

Тогда можно ввести координаты $x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}$ так, что вблизи точки касания поверхности S и $\overline{S}$ представляются уравнениями

$$x^{n+1} = z(x), \quad x^{n+1} = \overline{z}(x) \qquad (x \equiv (x^1, \ldots, x^n))$$

и

$$\Delta z = z(x) - \overline{z}(x) \geq 0.$$

Тогда, сопоставляя здесь точки поверхностей S, $\overline{S}$ с одинаковыми x, мы, в силу условия теоремы, можем сослаться на лемму 2, т. е. можем определить такую функцию

$$\Phi = \sum a_i(x) k_i$$

с условием (5) § 2, что $\Delta\Phi = 0$. А тогда, ссылаясь на теорему 1, приведем вопрос к той же теореме о дифференциальных уравнениях, на которую мы ссылались в [5] (см. теорему 10 работы [6]).

После этого доказательство теоремы 2 завершается буквально так же, как доказательство теоремы в работе [5].

Заметим, что заранее вовсе не ясно, будет ли условие теоремы 2 равносильно $\Phi = \mathrm{const}$ для некоторой функции $\Phi(k_1, \ldots, k_n)$ также на незамкнутой поверхности. В этом смысле теорема 2 несколько сильнее теоремы работы [5].

2. Пользуясь результатами § 1, 2, можно соответственно перефразировать теоремы, доказанные в [3, 4], ограничиваясь функциями Φ вида $\Phi(f_1 k_1, \ldots, f_n k_n; x)$.

Это ограничение особенно естественно, например, тогда, когда речь идет о поверхностях в евклидовом пространстве, представимых уравнениями вида $r = r(x)$, где r — расстояние от начала O и x — единичный вектор из O. Тогда, если $f_i(r, r_1, \ldots, r_n; x)$ — однородные первой степени относительно $r, r_1, \ldots, r_n$, например $f_i = r$ или $f_i = p$, где p — расстояние от O до касательной плоскости, то $\Phi(f_1 k_1, \ldots, f_n k_n; x)$ не меняется при подобном преобразовании поверхности относительно центра O. Поэтому, например, согласно теореме 2 из работы [3], если на двух замкнутых поверхностях $\Delta\Phi$ не меняет знака, то они подобны относительно начала O [2)].

В [3] были доказаны также теоремы, дающие характеристики сферы в пространстве постоянной кривизны по свойствам функции Ψ, зависящей от меньшего, чем n, числа переменных. Соответственно мы можем рассматривать функции $\Psi(\xi_1, \ldots, \xi_m; x)$, где $m < n$, с теми же условиями (A)–(C) § 1. Эти функции также можно заменить линейными и далее получить для них результаты, аналогичные выводам § 2. Мы не будем приводить здесь соответствующих выводов. Получить их и соответственно перефразировать теоремы § 4 из работы [3] не представляет труда.

Это относится также к аналогичным теоремам работы [4], дающим условия совпадения поверхности с «условной сферой» по свойствам функции Ψ, в которой берутся уже относительные кривизны.

3. Рассмотрим только один пример, относящийся к выпуклым поверхностям в евклидовом пространстве.

Пусть S^0, S^1 — две замкнутые выпуклые поверхности, содержащие внутри начало O. Предположим, что на поверхности S^0 кривизна всюду строго положительна. Точки поверхностей сопоставляем по параллельности нормалей.

Фиксировав пару соответственных точек, мы можем, путем подобного преобразования одной из поверхностей, привести в совпадение касательные

[2)] Предполагается, что хотя бы у одной из поверхностей нет касательных, проходящих через O. Условия (A)–(C) § 1, налагаемые на Φ, несколько отличаются от условий, фигурирующих в [3, 4]. Это, однако, не существенно, так как Φ можно заменить линейной относительно $f_i k_i$.

плоскости в этих точках. После этого параллельным переносом одной из поверхностей совмещаем самые точки.

В результате точки совпадут, а индикатрисы Дюпена D^0, D^1 поверхностей S^0, S^1 как-то налягут одна на другую.

Допустим, что выполнено следующее условие.

Если существуют такие пары точек, для которых индикатриса D^1 выступает из индикатрисы D^0, то там же D^0 выступает из D^1. И если при изменении таких пар точек выступы индикатрисы D^1 исчезают, то выступы индикатрисы D^0 исчезают по крайней мере с той же скоростью.

Теорема 3. *При сформулированных условиях поверхности S^0 и S^1 подобны относительно начала O.*

Строгая формулировка условия, касающегося скорости исчезновения выступов индикатрис, получается, если ввести относительные кривизны k_i^1 поверхности S^1 по отношению к поверхности S^0, которая тем самым принимается за условную сферу. На S^0 все $k_i \equiv 1$. То, что индикатриса D^1 выступает из D^0, означает, что имеются $k_i^1 < 1$, а то, что D^0 выступает из D^1, означает, что имеются $k_i^1 > 1$.

Так как мы нумеруем кривизны в порядке убывания, то $k_1^1 - 1$ и $k_n^1 - 1$ суть соответственно наибольшая и наименьшая разности кривизн поверхностей S^1 и S^0.

Условие о выступах индикатрис сводится тогда к тому, что для каждой пары соответственных точек (после подобного преобразования, приводящего в совпадение касательные плоскости!) оказывается

$$|k_n^1 - 1| \leq A(k_1^1 - 1),$$

где постоянная A одна и та же для всех таких пар точек.

Вследствие первого утверждения леммы 2 сформулированные условия равносильны существованию такой функции Φ, что всюду $\Delta\Phi = \Phi(S^1; x) - \Phi(S^0; x) \geq 0$. Поэтому теорема 3 оказывается только иной формулировкой теоремы, доказанной в [4] (см. § 4, теорему 2). Так же можно перефразировать другие доказанные там теоремы, обходясь вовсе без функций Φ или Ψ, а говоря только о свойствах взаимного расположения индикатрис.

4. Условия, касающиеся ограничений отношения Δ^+ к Δ^-, было бы желательно ослабить или снять вовсе, что сделало бы формулировки теорем уже совершенно наглядными. Это удается сделать, однако, только в немногих случаях (см. [7–9]). Значение этого условия состоит в том, что оно обеспечивает строгую эллиптичность и ограниченность коэффициентов выражения (10) § 1 для $\Delta\Phi$ и тем самым позволяет применить соответствующие теоремы о принципе максимума для дифференциальных уравнений.

В работе [6] показано, что принцип максимума имеет место и при более слабых ограничениях. Поэтому для наших теорем единственности требование ограниченности отношения Δ^-/Δ^+ можно заменить более слабым. Достаточно, грубо говоря, чтобы оно обращалось в бесконечность (или в нуль) не слишком быстро. Точную формулировку мы не даем. Ее легко вывести из условий, налагаемых на коэффициенты уравнений в [6, § 5, п. 6]. Вместе с тем из результатов, полученных в [6], следует, что без такого рода условий принцип максимума, вообще говоря, уже не имеет места. Поэтому без всяких ограничений на отношение Δ^-/Δ^+ этим принципом нельзя воспользоваться.

Статья поступила в редакцию
31.VII.1958

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I // Вестн. ЛГУ. 1956. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–17.
2. *Александров А. Д.* То же. II // Там же. 1957. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 15–44.
3. *Александров А. Д.* То же. III // Там же. 1958. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 14–26.
4. *Александров А. Д., Волков Ю. А.* То же. IV // Там же. 1958. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 27–34.
5. *Александров А. Д.* То же. V // Там же. 1958. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–8.
6. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.
7. *Александров А. Д.* О теоремах единственности для замкнутых поверхностей // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22. № 3. С. 99–102.
8. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
9. *Погорелов А. В.* Распространение общей теоремы единственности А. Д. Александрова на случай неаналитических поверхностей // Докл. АН СССР. 1948. Т. 63. № 3. С. 297–299.

Задача Дирихле для уравнения $\mathbf{Det}\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$. I

Вестн. ЛГУ. 1958. № 1. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 1. С. 5–24

§ 1. *Постановка задачи*

1. Наша цель — рассмотреть вопрос о существовании и единственности решений уравнения, входящего в название статьи, где $\operatorname{Det}\|z_{ij}\|$ — определитель из вторых производных неизвестной функции z; $z_1, \ldots, z_n$ — ее первые производные; $x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные и функция $\varphi \geq 0$.

По причинам, которые выясняются ниже, оказывается выгодным рассматривать уравнение в несколько иной форме. Введем следующие обозначения: совокупность значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ будем обозначать x, а совокупность значений производных $z_1, \ldots, z_n$ — ζ, или, что по существу равносильно, $\zeta = \operatorname{grad} z(x)$. Применяя введенные обозначения, будем рассматривать уравнение вида

$$f(\zeta, z, x) \operatorname{Det}\|z_{ij}\| = h(x). \qquad (1.1)^{1)}$$

Здесь предполагается, что h и $f \geq 0$. Остальные налагаемые на них условия будут указаны ниже.

Фактически мы будем искать обобщенные решения этого уравнения в классе выпуклых функций, для чего само уравнение заменим уравнением в некоторых функциях множества. После мы вернемся к уравнению (1) в его исходном виде.

Заметим, что в случае двух переменных при f и $h > 0$ решение уравнения (1) заведомо представляется выпуклой поверхностью. В случае же

[1)] В обозначениях формул первое число означает номер параграфа, второе — номер формулы в нем. При ссылках на формулы внутри того же параграфа указывается только второе число.

бо́льшего числа переменных это не может быть гарантировано, так как определитель из вторых производных может быть положительным и тогда, когда его собственные значения, соответственно главные кривизны поверхности, имеют разные знаки, лишь бы отрицательные встречались попарно.

Тем не менее мы ограничиваемся только выпуклыми решениями и никаких других решений вовсе не будем рассматривать.

2. Мы будем пользоваться геометрическими методами и соответственно используем естественные геометрические представления в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве, где введены прямоугольные координаты $x_1, \dots, x_n$, $x_{n+1} = z$. Плоскость $z = 0$ обозначим X, точка этой плоскости обозначается x, так же как совокупность ее координат. Точка пространства обозначается по ее координатам (z, x). Направление оси z будем называть вертикальным и соответственно будем говорить, что точка (z_1, x) лежит ниже точки (z_2, x), если $z_1 < z_2$ и т. п.

Под областью D, если явно не оговорено противное, будет пониматься ограниченная область в плоскости X.

Под поверхностью S, если явно не оговорено противное, будет пониматься выпуклая поверхность, однозначно проектирующаяся на данную область D и обращенная выпуклостью вниз. Пользуясь геометрическим языком, мы будем говорить, скорее, не о функции $z(x)$, а о поверхности S с уравнением $z = z(x)$, удовлетворяющей уравнению (1).

Далее мы вводим вспомогательную плоскость (n-мерное пространство) Z, где введены прямоугольные координаты. Точку этой плоскости, или вектор, идущий в нее из начала, обозначаем ζ. Если задана дифференцируемая функция $z(x)$, то каждому x сопоставляется вектор $\zeta = \operatorname{grad} z(x)$.

Интеграл по множеству M на плоскости X — кратный интеграл Лебега от какой-либо функции $g(x)$, так же как интеграл по множеству N на плоскости Z от функции $g(\zeta)$, мы будем обозначать просто

$$\int\limits_M g(x)\, dX, \qquad \int\limits_N g(\zeta)\, dZ.$$

Всякая рассматриваемая функция предполагается измеримой и суммируемой на всяком ограниченном замкнутом подмножестве области ее определения.

Наконец, функцией множества будем называть неотрицательную, вполне аддитивную функцию множества, определенную для всех борелевских множеств M, содержащихся вместе со своими замыканиями в какой-либо данной области D. Подразумевается, что эта функция имеет конечное значение для таких множеств. Ее, конечно, можно распространить на все борелевские множества $M \subset D$, но для тех M, замыкания которых не заключаются в D, она может иметь бесконечные значения.

3. Во всем дальнейшем будет фигурировать функция $f(\zeta, z, x)$, связанная с какой-либо данной областью D и подчиненная следующим условиям.

I. $f(\zeta, z, x)$ определена для всех ζ и z и для всех $x \in D$; кроме того, $f \geq 0$ и для нее можно допускать также бесконечные значения.

II. Для всякой замкнутой ограниченной области R изменения переменных ζ, z, x существует суммируемая функция $f_0(\zeta)$ такая, что для всех $(\zeta, z, x) \in R$

$$f(\zeta, z, x) \leq f_0(\zeta).$$

III. Существует такое z_0 и такая функция $f_1(\zeta) \geq 0$, что

$$\int\limits_Z f_1(\zeta)\, dZ > 0$$

(не исключая, что этот интеграл имеет бесконечное значение) и при всех $x \in D$ и $z < z_0$

$$f(\zeta, z, x) \geq f_1(\zeta).$$

IV. При почти всех ζ функция $f(\zeta, z, x)$ непрерывна по z, x.

Условия II–IV заведомо выполнены, например, если $f(\zeta, z, x) \geq 0$, непрерывна и существует $f_1(\zeta) \leq f(\zeta, z, x)$ такая, что ее интеграл по Z больше 0.

4. Введем важное для дальнейшего понятие *нормального отображения* φ_S области $D \subset X$ в плоскость Z, определенного данной поверхностью S. Пусть S — поверхность, проектирующаяся на область D. Пусть z_i — коэффициенты в уравнении ее опорной плоскости в какой-либо точке, коэффициенты при «текущих координатах» x_i, если уравнение решено относительно z. Если опорная плоскость касательная, то z_i — производные z по x.

В соответствии с принятыми обозначениями мы можем сказать, что каждой опорной плоскости P поверхности S отвечает точка $\zeta = (z_1, \dots, z_n)$ в плоскости Z. Так как ζ вполне определяет направление плоскости P, то мы будем говорить, что плоскость P имеет направление ζ.

Каждому множеству $Q \subset S$ отвечает на плоскости Z множество $\varphi(Q)$, именно множество всех тех точек ζ, которые соответствуют опорным плоскостям к S, проходящим через точки множества Q. Этим определяется «нормальное» отображение поверхности S в плоскость Z, вполне аналогичное сферическому отображению. Связь обоих отображений очевидна. Достаточно провести плоскость, касающуюся гауссовой сферы в полюсе, и продолжить радиусы сферы до их пересечения с этой плоскостью, как сферическое изображение перейдет в нормальное. Ничто не мешало бы нам поэтому пользоваться сферическим изображением вместо нормального, вводя вместо ζ единичные нормали n. Однако $\zeta = (z_1, \dots, z_n)$ ближе анализу, чем нормаль, и проще связано с обычным видом дифференциальных уравнений.

Пусть теперь M — множество в области D, а Q — множество на поверхности S, имеющее M своей проекцией. Тогда нормальное отображение множества Q определяет, естественно, отображение множества M в плоскость Z. Это отображение мы обозначим φ_S и будем его называть также нормальным.

Таким образом, *данная поверхность S определяет «нормальное» отображение φ_S области D в плоскость Z.* (Это отображение, так же как ему обратное, вообще говоря, неоднозначно. Однако, как известно, нарушение однозначности может происходить лишь на множестве меры нуль.)

5. Пусть заданы область D и функция $f(\zeta, z, x)$, подчиненная условиям I–IV п. 3. Исходя из этой функции, определим для каждой поверхности S, проектирующейся в D, некоторую функцию множества $\omega_f(M; S)$. Пусть $x(\zeta)$, $z(\zeta)$ — координаты той точки поверхности S, через которую проходит опорная плоскость с направлением ζ. Кстати, отображение $\zeta \mapsto [x(\zeta),\, z(\zeta)]$ как раз и есть обратное нормальному. Функции $x(\zeta)$, $z(\zeta)$ неоднозначны для таких ζ, для которых опорная плоскость с направлением ζ касается поверхности не в одной только точке. Однако известно, что множество таких ζ имеет меру нуль.

Таким образом, при почти всех ζ оказывается однозначно определенная функция $f(\zeta, z(\zeta), x(\zeta))$.

Определяем теперь функцию $\omega_f(M; S)$, полагая для каждого данного $M \subset D$

$$\omega_f(M; S) = \int\limits_{\varphi_S(M)} f(\zeta, z(\zeta), x(\zeta))\, dZ, \tag{1.2}$$

т. е. интеграл от f по нормальному изображению $\varphi_S(M)$ множества M.

В силу условий I, II, наложенных на функцию f, функция ω_f оказывается, очевидно, неотрицательной и, кроме того, конечной для всякого замкнутого $M \subset D$. В самом деле, при всяком замкнутом $M \subset D$ в точках поверхности S, лежащих над M, нет опорных плоскостей, сколь угодно близких к вертикальным. Поэтому множество $\varphi_S(M)$ ограничено и, вследствие условия II, наложенного на функцию f, интеграл (2) имеет конечное значение.

Заметим, между прочим, что при

$$f = (1 + \zeta^2)^{-(n+1)/2}$$

$\omega_f(M; S)$ оказывается ни чем иным, как площадью сферического изображения того множества на поверхности S, которое имеет проекцией множество M. В связи с этим функцию $\omega_f(M; S)$ можно назвать условной кривизной, или отнесенной к плоскости X условной интегральной кривизной поверхности S.

6. Преобразуем теперь уравнение (1) к функциям множеств.

Пусть некоторая регулярная поверхность S, проектирующаяся на область D, удовлетворяет этому уравнению. Тогда для всякого множества $M \subset D$ мы, очевидно, имеем

$$\int_M f(\zeta, z, x)\,\mathrm{Det}\,\|z_{ij}\|\,dX = \int_M h(x)\,dX. \tag{1.3}$$

Но $\mathrm{Det}\,\|z_{ij}\|$ есть не что иное, как якобиан преобразования $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mapsto (z_1, \ldots, z_n)$, т. е. нормального отображения φ_S. Поэтому в наших обозначениях $\mathrm{Det}\,\|z_{ij}\|\,dX = dZ$ и равенство (3) оказывается равносильным следующему:

$$\int\limits_{\varphi_S(M)} f(\zeta, z(\zeta), x(\zeta))\,dZ = \int_M h(x)\,dX. \tag{1.4}$$

Принимая теперь во внимание определение (2) функции $\omega_f(M;S)$ и заменяя интеграл от h функцией множества $\nu(M)$, получаем

$$\omega_f(M;S) = \nu(M). \tag{1.5}$$

Это и есть нужное нам уравнение в функциях множества.

Так как функция ω_f определена для любой выпуклой поверхности S, то здесь нет надобности предполагать поверхность S сколько-нибудь регулярной. Точно так же под $\nu(M)$ можно понимать любую функцию множества. Поэтому задача решения уравнения (5) может быть сформулирована следующим образом.

Найти поверхность S, для которой функция $\omega_f(M;S)$ совпадает с данной функцией множества $\nu(M)$.

Если вместе с тем поверхность S, решающая эту задачу, окажется достаточно регулярной, то она даст решение уравнения (1), так как входящая в него функция h определяется функцией $\nu(M)$ как соответствующая ей «плотность» — производная по площади.

7. Как уже было отмечено, в частном случае

$$f = (1 + \zeta^2)^{-(n+1)/2} \tag{1.6}$$

$\omega_f(M;S)$ оказывается площадью сферического изображения (интегральной кривизной) того множества на поверхности S, которое имеет проекцию M.

Если же вообще f зависит только от ζ, так что $f = f(\zeta)$, то, как легко видеть, $\omega_f(M;S)$ представляет собою площадь сферического изображения с весом

$$\delta(\zeta) = f(\zeta)(1 + \zeta^2)^{-(n+1)/2}.$$

Т. е. мы можем представлять себе гауссову сферу, снабженную «плотностью» $\delta(\zeta) = \delta(n)$, где n — точка сферы, соответствующая точке ζ плоскости Z. Тогда интеграл от этой плотности по сферическому изображению множества $Q \subset S$ с проекцией M и дает значение $\omega_f(M; S)$ [2)].

Еще в моих работах [1–4] были доказаны теоремы о существовании и единственности выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной. Среди этих результатов содержались соответственно теоремы существования и единственности решения уравнения (5), а также обобщенного решения уравнения (1) для случая функции f вида (4).

И. Я. Бакельман [5] заметил, что применявшиеся там методы дословно переносятся на более общий случай $f = f(\zeta)$. Принятые в [5] предположения о том, что $f(\zeta)$ непрерывна и ограничена, совершенно не существенны, так как методы работ [1–4] с этим вовсе не связаны.

В настоящей работе мы применяем аналогичные методы к общему случаю функции $f(\zeta, z, x)$, подчиненной указанным выше условиям I–V. Кроме того, мы получим также результаты, касающиеся решения задачи Дирихле, новые и для указанных частных случаев.

8. Наш метод доказательства существования решения уравнения (5) основан на приближении поверхностей многогранниками и соответственно приближении функций множества функциями, «состоящими из конечного числа точечных нагрузок». В соответствии с этим мы доказываем прежде всего, в § 2, теоремы, обеспечивающие применимость этого метода.

Далее, в § 3, доказывается существование решения уравнения (5) при некотором общем условии, налагаемом на функцию $\nu(M)$. В отличие от метода работ [1, 2, 6] мы пользуемся при доказательстве теоремы существования для многогранников изящным приемом, введенным А. В. Погореловым [7]. Его преимущество состоит не только в бóльшей простоте, но и в том, что он не требует теорем единственности и, кроме того, по существу содержит в себе эффективный метод приближенного нахождения решения. Из теоремы существования для уравнения (5) сразу вытекает теорема существования обобщенного решения уравнения (1). О степени регулярности этого решения при достаточно регулярных функциях f и h мы ничего не можем сказать в общем случае n переменных. В случае двух переменных

[2)] Казалось бы, можно снабдить сферу или, что равносильно, плоскость Z некоторым распределением «масс», задавая на ней функцию множества $\mu(N)$, и определить для поверхности S функцию $\omega_\mu(M; S) = \mu(\varphi_S(M))$. Однако если $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, то тем не менее может быть $\varphi_S(M_1) \cap \varphi_S(M_2) \neq \varnothing$. Поэтому функция $\omega_\mu(M; S)$ может оказаться не аддитивной. Вместе с тем известно, что при $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ множество $\varphi_S(M_1) \cap \varphi_S(M_2)$ имеет меру нуль, так что аддитивность функции ω_μ будет обеспечена, если $\mu(N) = 0$ для всякого N меры нуль. При этом $\mu(N)$ оказывается неопределенным интегралом от соответствующей ей плотности. Следовательно, представимость $\mu(N)$ в виде такого интеграла необходима и достаточна для аддитивности функции ω_μ.

мы можем сослаться на работы [7–10], которые дают в этом случае важные, однако не исчерпывающие результаты.

В § 4 устанавливаются некоторые общие достаточные условия разрешимости задачи Дирихле для уравнения (5) и соответственно (1).

В § 5 при дополнительных условиях, налагаемых на функцию $f(\zeta, z, z)$, сводящихся к требованию, что она есть невозрастающая функция ζ, доказывается единственность решения задачи Дирихле.

В § 6 будут получены результаты, аналогичные результатам § 3–5, относящиеся к решению уравнений (5), (1) в бесконечных областях.

Во всех случаях выясняется до некоторой степени необходимость вводимых условий существования и единственности решения.

Настоящая статья включает только § 1–3, вторая часть работы (§ 4–6) будет опубликована в следующем номере этого журнала [3)].

§ 2. *Теоремы компактности*

1. Пусть на плоскости X фиксирована область D. Пусть также задана функция $f(\zeta, z, x)$, удовлетворяющая условиям I–IV, указанным в § 1 п. 3. Согласно условию III существуют такое z_0 и такая функция $f_1(\zeta)$, что при всех $x \in D$ и $z < z_0$

$$f(\zeta, z, x) \geq f_1(\zeta)$$

и

$$\int\limits_Z f_1(\zeta)\, dZ > 0.$$

Мы определяем величину

$$A(f) = \sup \int\limits_Z f_1(\zeta)\, dZ,$$

где супремум берется по всем возможным z_0 и функциям $f_1(\zeta)$. Не исключается, что интеграл от f_1 и, следовательно, величина $A(f)$ могут равняться бесконечности.

Величина $A(f)$ играет важную роль в условиях разрешимости нашего основного уравнения (1.5). Эта ее роль определяется следующей теоремой.

[3)] Обсуждаемая публикация не была осуществлена. Основные результаты А. Д. Александрова в этой области позже вошли в статьи «Исследования о принципе максимума. I–VI» (см. с. 451–571 настоящего издания), «О принципе максимума» (см. с. 577–596), «Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле» (см. с. 597–626) и некоторые другие. — *Прим. ред.*

Теорема 1. *Выпуклые поверхности S, проектирующиеся на область D и имеющие общий край L, ограничены в совокупности, если для них выполнено неравенство*

$$\omega_f(D;S) \le C < A(f) \qquad (C = \mathrm{const}). \tag{2.1}$$

Доказательство. Из определения величины $A(f)$ ясно, что при данном $C < A(f)$ существует такое z_0 и соответствующая функция $f_1(\zeta)$, что

$$f(\zeta, z, x) \ge f_1(\zeta) \ge 0 \qquad (z < z_0,\ x \in D) \tag{2.2}$$

и

$$\int\limits_Z f_1(\zeta)\, dZ > C. \tag{2.3}$$

Можно, конечно, считать z_0 таким, что край L рассматриваемых поверхностей S лежит над плоскостью $z = z_0$. Тогда эта плоскость отрезает от каждой достаточно «большой» поверхности «шапку» $\overline{S}$. Достаточно доказать, что эти шапки ограничены в совокупности.

Обозначая проекцию шапки $\overline{S}$ через $\overline{D}$, мы, очевидно, имеем

$$\omega_f(\overline{D};\overline{S}) \le \omega_f(D;S). \tag{2.4}$$

Вместе с тем, вследствие определения функции ω_f и неравенства (2),

$$\omega_f(\overline{D};\overline{S}) = \int\limits_{\varphi_S(\overline{D})} f(\zeta, z, x)\, dZ \ge \int\limits_{\varphi_S(\overline{D})} f_1(\zeta)\, dZ, \tag{2.5}$$

где $\varphi_S(\overline{D})$ — нормальный образ шапки S.

Так как край поверхностей S фиксирован, то по мере роста поверхности S, а вместе с нею и шапки $\overline{S}$, нормальный образ шапки увеличивается, распространяясь в пределе на всю плоскость Z. Поэтому в силу неравенства (3) для достаточно большой шапки оказывается

$$\int\limits_{\varphi_S(\overline{D})} f_1(\zeta)\, dZ > C. \tag{2.6}$$

Сопоставляя теперь неравенства (6), (5), (4), убеждаемся, что они противоречат неравенству (1). Этим доказано, что при условиях теоремы не может быть сколь угодно больших шапок $\overline{S}$, так что поверхности S ограничены в совокупности.

2. В уточнение полученного вывода легко получить явную оценку возможной высоты шапок $\overline{S}$ и тем самым высоты поверхности S.

Пусть z_0 и $f_1(\zeta)$ имеют тот же смысл. Пусть Z_ρ — шар радиуса ρ в плоскости Z с центром в точке $\zeta=0$, а

$$\sigma(\rho)=\int\limits_{Z_\rho} f_1(\zeta)\,dZ. \tag{2.7}$$

Пусть, наконец, d — диаметр области D. Тогда, если для поверхности S выполнено неравенство (1), то для высоты $\overline{p}$ шапки $\overline{S}$, отрезаемой от поверхности S плоскостью $z=z_0$, имеет место неравенство

$$\sigma\left(\frac{\overline{p}}{d}\right)\leq C. \tag{2.8}$$

Это неравенство и дает оценку для высоты шапки, а вместе с тем и высоты поверхности [4)].

Для доказательства неравенства (8) возьмем на шапке $\overline{S}$ точку A, наиболее удаленную от плоскости $z=z_0$. Проектируя из этой точки край шапки, получим конус K. Нормальное изображение конуса K, очевидно, содержится в нормальном изображении шапки $\overline{S}$, а это последнее содержится в нормальном изображении поверхности S. Таким образом,

$$\varphi(K)\subset\varphi(\overline{S})\subset\varphi_S(D). \tag{2.9}$$

Пусть $\overline{D}$ — область, вырезаемая на плоскости $z=z_0$ шапкой $\overline{S}$ и, стало быть, также конусом K. Ее диаметр, очевидно, не больше диаметра области D. Поэтому область $\overline{D}$ заведомо содержится в сфере (круге) D_0 радиуса d, описанной на плоскости $z=z_0$ вокруг точки A_1, являющейся

[4)] Так как функция $f_1(\zeta)$ неотрицательна, то функция $\sigma(\rho)$ монотонна, а потому, обозначая обратную функцию через σ^{-1}, неравенство (8) можно переписать в виде

$$\overline{p}\leq\sigma^{-1}(C)d.$$

Если теперь p_1 — наибольшее расстояние точек края поверхности S от плоскости $z=z_1$, то для высоты p самой поверхности S получаем оценку

$$p\leq\sigma^{-1}(C)d+p_1.$$

Условие, что $C<A(f)$, неявно используется здесь, так как, по определению величины $A(f)$, заведомо $\sigma(\rho)\leq A(f)$ и потому $\sigma^{-1}(C)$ определена только в том случае, когда $C\leq A(f)$.

проекцией точки A. Проектируя эту сферу D_0 из точки A, получим прямой круговой (шаровой) конус K_0. Нормальное изображение конуса K_0 содержится в нормальном изображении конуса K и представляет собой шар $Z_{\overline{p}/d}$ радиуса $\overline{p}/d$ на плоскости Z. Таким образом,

$$Z_{\overline{p}/d} = \varphi(K_0) \subset \varphi(K).$$

Вместе с (9) это дает

$$Z_{\overline{p}/d} \subset \varphi_S(D),$$

а поэтому

$$\int\limits_{Z_{\overline{p}/d}} f_1(\zeta)\,dZ \leq \int\limits_{\varphi_S(D)} f_1(\zeta)\,dZ. \tag{2.10}$$

Принимая во внимание равенство (7) и неравенство (1), получаем отсюда неравенство (8), которое, таким образом, доказано.

3. Теперь мы выясним, в каком смысле условные кривизны $\omega_f(M;S_m)$ поверхностей S_m сходятся к $\omega_f(M;S)$, когда поверхности S_m сходятся к S. При этом, говоря, что поверхности S_m, проектирующиеся на область D, сходятся к поверхности S, мы подразумеваем просто то, что функции $Z_m(x)$, задающие поверхности S_m, сходятся к функции $Z(x)$, задающей S.

Будем говорить, что функции множества $\mu_n(M)$, определенные для множеств $M \subset D$, *слабо сходятся внутри* D к функции $\mu(M)$, если для всякой непрерывной функции $g(x)$, отличной от нуля только на некотором множестве G, содержащемся в D вместе со своим замыканием $\overline{G}$,

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_D g(x)\mu_m(dM) = \int\limits_D g(x)\mu(dM). \tag{2.11}$$

Существенно, что функция μ, к которой данные функции μ_n слабо сходятся внутри D, единственна [5]).

[5]) Пусть G — открытое множество с $\overline{G} \subset D$; Γ — множество непрерывных функций $g(x)$ таких, что $0 \leq g(x) \leq 1$ и $\{x : g(x) > 0\} \subset G$. Тогда, поскольку мы ограничиваемся неотрицательными функциями множества, $\mu(G) = \sup\limits_{D\subset G} \int\limits_D g(x)\mu(dM)$, а для любого M $\mu(M) = \inf\limits_{G\subset M} \mu(G)$. Значит, функция μ однозначно определена значениями указанных интегралов. По этому поводу и по поводу слабой сходимости см. [11]. Согласно введенному там определению μ_n слабо сходятся к μ, если (11) имеет место для любых непрерывных и ограниченных $g(x)$, определенных на D. Легко видеть на примерах, что в следующей ниже теореме 2 нельзя заменить слабую сходимость внутри D просто слабой сходимостью в D. Дело в том, что при $S_m \to S$ функции $\omega_f(M;S_m)$ могут иметь «ускользающую нагрузку». Согласно [11], для слабой сходимости последовательности функций множества в D необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность слабо сходилась внутри D и не содержала ускользающей нагрузки. Заметим, что теорема 2 в случае f, зависящей только от ζ, оказывается, по существу, следствием одной общей теоремы, доказанной в [11].

Теорема 2. *Если поверхности S_m, проектирующиеся на данную область D, сходятся к поверхности S, то их условные кривизны $\omega_f(M;S_n)$ слабо сходятся внутри D к $\omega_f(M;S)$.*

Доказательство. В силу определения (11) речь идет о том, что при $S_n\to S$

$$\int\limits_D g(x)\omega_f(dM;S_n)\to\int\limits_D g(x)\omega_f(dM;S) \tag{2.12}$$

для всякой непрерывной $g(x)$, отличной от нуля только на некотором G с $\overline{G}\subset D$. Фиксируем такую функцию $g(x)$.

Покажем, что

$$\int\limits_D g(x)\omega_f(dM;S_n)=\int\limits_{\varphi_S(D)} g(x(\zeta))f(\zeta,z(\zeta),x(\zeta))\,dZ. \tag{2.13}$$

Здесь в правой части при каждом данном ζ, в согласии с определением $\omega_f(M;S)$, $x=x(\zeta)$, $z=z(\zeta)$ представляют собой координаты той точки поверхности S, через которую проходит опорная плоскость с направлением ζ.

Так как функция $g(x)$ отлична от нуля лишь на G, то левый интеграл J в формуле (13) можно вычислять только по G; и так как $g(x)$ непрерывна, то его можно определять по Риману, разбивая D на «малые» множества M. Поэтому

$$J=\int\limits_G g(x)\omega_f(dM;S)=\lim\sum_i g(x_i)\omega_f(M_i;S).$$

Далее, пользуясь определением функции $\omega_f(M;S)$, получаем

$$J=\lim\sum_i g(x_i)\int\limits_{\varphi_S(M_i)} f(\zeta,z,x)\,dZ. \tag{2.14}$$

Как отмечено в § 1 при определении функции ω_f, функции $x(\zeta)$, $z(\zeta)$ почти везде однозначны, а поэтому при определении интеграла можно пренебрегать множеством тех ζ, где однозначность их нарушается. Поэтому, в частности, можно считать, что в интегралах по $\varphi_S(M_i)$ $\quad x\in M_i$.

Далее из (14) легко получаем

$$J=\int\limits_{\varphi_S(M)} g(x)f(\zeta,z,x)\,dZ+\lim\sum_i\int\limits_{\varphi_S(M_i)}[g(x_i)-g(x)]f(\zeta,z,x)\,dZ. \tag{2.15}$$

Здесь второе слагаемое равно нулю. В самом деле, функция $g(x)$ непрерывна, а потому, при измельчении множеств M_i, разности $[g(x_i)-g(x)]$

стремятся к нулю (так как можно считать в них $x \in M_i$). Кроме того, по условию II § 1 п. 2, наложенному на функцию $f(\zeta, z, x)$, можно считать $f(\zeta, z, x) < f_0(\zeta)$, где $f_0(\zeta)$ суммируема во всякой ограниченной области. Множества же $\varphi_S(M_i)$ все содержатся в $\varphi_S(G)$. А так как $\overline{G} \subset D$, то множество $\varphi_S(G)$, очевидно, ограничено.

Из сказанного вытекает, что второе слагаемое в формуле (15) исчезает и тем самым требуемое равенство (13) доказано.

Вполне аналогичное равенство верно, конечно, и для функций $\omega_f(M; S_m)$. Таким образом, вместо (12) нам нужно доказать, что

$$\int\limits_{\varphi_{S_m}(G)} g(x_m(\zeta)) f(\zeta, z_m(\zeta), x_m(\zeta))\, dZ \to \int\limits_{\varphi_S(G)} g(x(\zeta)) f(\zeta, z(\zeta), x(\zeta))\, dZ. \quad (2.16)$$

4. Итак, докажем соотношение (16). Для этого введем функцию $\vartheta(\zeta)$, определенную для всех ζ на всей плоскости Z следующим образом:

$$\vartheta(\zeta) = \begin{cases} g(x(\zeta)) f(\zeta, z(\zeta), x(\zeta)), & \text{если } \zeta \in \varphi_S(G), \\ 0, & \text{если } \zeta \notin \varphi_S(G). \end{cases}$$

Аналогично определяем функции $\vartheta_n(\zeta)$. Тогда (16) сводится к

$$\int\limits_Z \vartheta_n(\zeta)\, dZ \to \int\limits_Z \vartheta(\zeta)\, dZ. \quad (2.17)$$

Для доказательства (17) покажем, что почти везде $\vartheta_n(\zeta) \to \vartheta(\zeta)$.

Будем различать два случая:

1) $\zeta \in \varphi_S(G)$, когда $\vartheta = gf$;

2) $\zeta \notin \varphi_S(G)$, когда $\vartheta(\zeta) = 0$.

Рассмотрим первый случай. По условию IV, наложенному на функцию $f(\zeta, z, x)$, она непрерывна по z, x при почти всех ζ. Поэтому можно рассматривать такое $\zeta_0 \in \varphi_S(G)$, что $f(\zeta_0, z, x)$ непрерывна по z, x.

Множество направлений опорных плоскостей, которые касаются данной поверхности более чем в одной точке, имеет меру нуль. Поэтому можно взять ζ_0 еще и таким, что опорная плоскость P_0 с направлением ζ_0 касается поверхности S в единственной точке A. Проекция этой точки, конечно, принадлежит G.

В таком случае плоскостью P, параллельной P_0, можно отрезать от поверхности S шапочку $\overline{S}$, которая также будет проектироваться в область G. Так как $S_m \to S$, то при достаточно больших m плоскость P отсекает от поверхностей S_m шапочки, также проектирующиеся в G. На каждой такой шапочке есть точка A_m, где проходит опорная плоскость, параллельная P.

Этим доказано, что при указанном выборе ζ_0 на поверхностях S_m достаточно большого номера есть такие точки A_m, проектирующиеся в G, через которые проходят опорные плоскости с направлением ζ_0. Тем самым при больших m определены координаты $x_m(\zeta_0)$, $z_m(\zeta_0)$, причем $x_m(\zeta_0)\in G$, так что $\zeta_0\in\varphi_{S_m}(G)$.

Мы можем ограничиться теми m, при которых это имеет место.

Как известно, когда опорная плоскость P_0 касается поверхности S в единственной точке A, то на поверхностях S_m, сходящихся к S, точки A_m, где проходят параллельные опорные плоскости, заведомо сходятся к точке A. Это значит, что при нашем выборе ζ_0

$$x_m(\zeta_0)\to x(\zeta_0),\qquad z_m(\zeta_0)\to z(\zeta_0). \tag{2.18}$$

Так как $\zeta_0\in\varphi_S(G)$ и $\in\varphi_{S_m}(G)$, то

$$\vartheta(\zeta_0)=g(x(\zeta_0))f(\zeta_0,z(\zeta_0),x(\zeta_0)),$$
$$\vartheta_m(\zeta_0)=g(x_m(\zeta_0))f(\zeta_0,z_m(\zeta_0),x_m(\zeta_0)).$$

По выбору ζ_0, $f(\zeta_0,z,x)$ непрерывна по z,x, а $g(x)$ непрерывна по условию. Поэтому из (18) следует, что $\vartheta_m(\zeta_0)\to\vartheta(\zeta_0)$.

Так как здесь $\zeta_0\in\varphi_S(G)$ любое с точностью до некоторого множества меры нуль, то тем самым доказано, что $\vartheta_m(\zeta)$ сходятся к $\vartheta(\zeta)$ почти везде на $\varphi_S(G)$.

Теперь рассмотрим тот случай, когда $\zeta\notin\varphi_S(G)$, так что $\vartheta(\zeta)=0$.

Если данное $\zeta_0\notin\varphi_S(G)$ не принадлежит также $\varphi_{S_m}(G)$, то по определению функции ϑ_m будет $\vartheta_m(\zeta_0)=0$. А если это имеет место для всех достаточно больших m, то тем самым $\vartheta_m(\zeta_0)\to\vartheta(\zeta_0)$. Поэтому остается рассмотреть такое $\zeta_0\notin\varphi_S(G)$, что $\zeta_0\in\varphi_{S_m}(G)$ для некоторых сколь угодно больших m. Можно дальше ограничиться только такими m, так что полагаем

$$\zeta_0\notin\varphi_S(G),\qquad \zeta_0\in\varphi_{S_m}(G). \tag{2.19}$$

Кроме того, поскольку нас интересует сходимость лишь почти везде, а функции $x_m(\zeta)$, $z_m(\zeta)$ почти везде однозначны, то достаточно рассматривать такое ζ_0, при котором это имеет место. В таком случае при каждом данном m точка $x_m(\zeta)$ единственна и из второго соотношения (19) следует, что $x_m(\zeta_0)\in G$.

Покажем, что множество точек $x_m(\zeta_0)$ не имеет точек сгущения в области G. Допустим противное, и пусть x_0 — такая точка сгущения, что $x_{m_i}(\zeta_0)\to x_0\in G$. На поверхностях S_{m_i} точкам $x_{m_i}(\zeta_0)$ отвечают какие-то точки A_{m_i}. Вследствие того, что $S_{m_i}\to S$, точки A_{m_i} сходятся к некоторой точке A поверхности S, причем A проектируется в $x_0\in G$.

В точках A_{m_i} проходят опорные плоскости к поверхностям S_{m_i} с направлением ζ_0. Поэтому и в предельной точке A проходит опорная плоскость поверхности S с тем же направлением ζ_0. Но так как $x_0 \in G$, то $\zeta_0 \in \varphi_S(G)$, вопреки условию (19).

Таким образом, множество точек $x_m(\zeta_0)$ не имеет точек сгущения в области G. Поэтому с ростом m они все приближаются к ее границе. Функция же $g(x)$ по условию непрерывна и исчезает на границе G. Поэтому $g(x_m(\zeta_0)) \to 0$. Так как ζ_0 любое, удовлетворяющее условиям (19), за вычетом множества меры нуль, то, стало быть, при почти всех ζ с условием (19) $g(x_m(\zeta)) \to 0$.

В силу определения функций ϑ_m отсюда очевидно, что при почти всех таких ζ точно так же $\vartheta_m(\zeta) \to 0$. А так как при рассматриваемых $\zeta \quad \vartheta(\zeta) = 0$, то $\vartheta_m(\zeta) \to \vartheta(\zeta)$.

Этим возможные случаи выбора ζ исчерпаны и, таким образом, доказано, что почти везде $\vartheta_m(\zeta) \to \vartheta(\zeta)$.

Покажем теперь, что все функции $\vartheta_m(\zeta)$ мажорируются одной и той же суммируемой функцией $\vartheta_0(\zeta)$.

Так как $\overline{G} \subset D$ и поверхности S_m сходятся, то над областью G на них заведомо нет точек, где опорные плоскости сколь угодно близки к вертикальному положению. Поэтому в плоскости Z существует такое ограниченное множество U, что при всех $m \quad \varphi_{S_m}(G) \subset U$.

В силу определения функций $\vartheta_m(\zeta)$ отсюда следует, что заведомо

$$\vartheta_m(\zeta) = 0 \quad \text{при} \quad \zeta \notin U. \tag{2.20}$$

Далее, из условия II § 1 п. 2, наложенного на функцию f, легко следует, что существует такая функция $f_0(\zeta)$, суммируемая во всякой конечной области, что при всех m

$$f(\zeta, x_m(\zeta), z_m(\zeta)) \le f_0(\zeta).$$

Поэтому в силу определения $\vartheta_m(\zeta)$ имеем

$$\vartheta_m(\zeta) \le Bf_0(\zeta), \tag{2.21}$$

где $B = \sup g(x)$.

Положим теперь

$$\vartheta_0(\zeta) = \begin{cases} Bf_0(\zeta), & \text{если } \zeta \in U, \\ 0, & \text{если } \zeta \notin U. \end{cases}$$

Эта функция суммируема на всей плоскости Z, а из (20) и (21) следует, что $\vartheta_m(\zeta) \le \vartheta_0(\zeta)$.

Итак, почти везде $\vartheta_m(\zeta) \to \vartheta(\zeta)$ и функции ϑ_m мажорируются суммируемой функцией. Отсюда, в силу известной теоремы, следует сходимость интегралов этих функций, т. е. соотношение (17).

Этим теорема 2 доказана.

§ 3. *Существование решения*

1. Пусть D — выпуклая область в плоскости X и Γ — ее граница. Не всякая замкнутая $(n-1)$-мерная поверхность, проектирующаяся на Γ, может быть краем выпуклой поверхности S, проектирующейся на D. (Край поверхности S есть не что иное, как множество не принадлежащих S ее предельных точек.) Поверхность L, могущую быть краем какой-либо поверхности S, мы назовем *допустимой* или *допустимым краем поверхности* S. Допустимость поверхности L есть, конечно, необходимое условие для разрешимости задачи Дирихле. Легко сформулировать необходимое и достаточное условие для того, чтобы поверхность L была допустимой.

Пусть C — замкнутый цилиндр с вертикальными образующими и направляющей Γ. Пусть L — замкнутая $(n-1)$-мерная поверхность, проектирующаяся на Γ и тем самым лежащая на цилиндре C. Она разбивает C на две части: «верхний цилиндр» C_1 и «нижний» — C_2. Построим выпуклую оболочку верхнего цилиндра C_1. Ее боковая поверхность может содержать некоторую часть цилиндра C, не принадлежащую C_1. В этом случае поверхность L не будет границей боковой поверхности указанной выпуклой оболочки. Тогда, как очевидно из свойств выпуклой оболочки, L вообще не может быть краем никакой поверхности S, т. е. выпуклой поверхности, проектирующейся на D и обращенной выпуклостью вниз.

С другой стороны, если боковая поверхность построенной выпуклой оболочки сводится к C_1, то L оказывается границей этой боковой поверхности. Остальная часть поверхности выпуклой оболочки представляет собой выпуклую поверхность S_L нулевой кривизны, т. е. с нулевой площадью сферического изображения, проектирующуюся на D и обращенную выпуклостью вниз. Ее край и будет L. Мы говорим, что поверхность S_L натянута на L снизу.

Итак, для того чтобы L была допустимым краем поверхностей S, необходимо и достаточно, чтобы на нее можно было натянуть снизу поверхность S_L нулевой кривизны.

Заметим, что если область D существенно выпукла, т. е. каждая ее опорная плоскость касается ее границы Γ лишь в одной точке, то всякая замкнутая $(n-1)$-мерная поверхность L, однозначно проектирующаяся на Γ, будет допустимой. Однако однозначная проектируемость на Γ не необходима: L могла бы содержать, например, вертикальные отрезки и все же быть допустимой. На языке анализа это означает, что краевые условия, представляемые поверхностью L, могут не быть непрерывными.

2. Обратимся теперь к нашему основному уравнению

$$\omega_f(M;S)=\nu(M). \tag{3.1}$$

Предполагается, что фиксирована выпуклая область D и задана функция $f(\zeta, z, x)$, удовлетворяющая условиям I–IV § 1 п. 3; $A(f)$ — величина, определенная в начале § 2.

Теорема 3. *Пусть D — многогранная выпуклая область в плоскости X и L — допустимая $(n-1)$-мерная многогранная поверхность, проектирующаяся на границу области D. Пусть $\nu(M)$ — функция множества, определенная на D и состоящая из точечных нагрузок*[6]*. Тогда, если*

$$\nu(D) < A(f), \tag{3.2}$$

то существует выпуклая многогранная поверхность S с краем L, удовлетворяющая уравнению (1) с данной правой частью $\nu(M)$.

Более наглядно эту теорему можно сформулировать следующим образом.

Пусть нагрузки функции $\nu(M)$ сосредоточены в точках $x_1, \ldots, x_m$ и равны соответственно $\nu_1, \ldots, \nu_m$. Тогда условие (2) сводится к тому, что

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i < A(f). \tag{3.3}$$

Рассмотрим многогранные поверхности S, не имеющие вершин, кроме может быть проектирующихся в точки $x_1, \ldots, x_m$. Площадь нормального изображения всякого множества, не содержащего вершин, равна нулю. Поэтому функция $\omega_f(M; S)$ также состоит только из точечных нагрузок $\omega_f(x_i; S)$. Если z_i — координата z вершины A_i, проектирующейся в x_i, то по определению (1.2) функции ω_f

$$\omega_f(x_i; S) = \int\limits_{\varphi_S(x_i)} f(\zeta, z_i, x_i)\, dZ. \tag{3.4}$$

Существенно, что в этом интеграле z_i, x_i — постоянные. Поэтому $\omega_f(x_i; S)$ есть не что иное, как «площадь» нормального изображения вершины $A_i(z_i, x_i)$ с «весом» $f(\zeta, z_i, x_i)$.

Пусть D и L имеют смысл, указанный в теореме 3. Тогда утверждение теоремы 3 можно уточнить следующим образом.

При условии (3) среди рассматриваемых многогранных поверхностей S существует такая, что для всех $i = 1, \ldots, m$

$$\omega_f(x_i; S) = \nu_i, \tag{3.5}$$

причем S проектируется на D и имеет край L.

[6] Мы говорим, что $\nu(M)$ состоит из точечных нагрузок, сосредоточенных в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$, если $\nu(M) = 0$ для всякого M, не содержащего ни одной из этих точек x_i, и вместе с тем для каждой x_i $\nu(x_i) \neq 0$.

Доказательство. Натянем на L снизу поверхность S_L. Она будет, очевидно, многогранной поверхностью с краем L и вовсе не имеющей вершин. Можно сказать поэтому, что она не имеет вершин, кроме, может быть, проектирующихся в данные точки $x_1, \ldots, x_m$, и для нее $\omega_f(x_i; S_L) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Рассмотрим теперь все многогранные поверхности S с краем L, не имеющие других вершин, кроме может быть проектирующихся в данные точки $x_1, \ldots, x_m$, и такие, что

$$\omega_f(x_i; S) \leq \nu_i \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{3.6}$$

Вследствие условия (3) из теоремы 1 § 2 вытекает, что все эти поверхности ограничены в совокупности. Поэтому среди них существует поверхность S^0, для которой $\sum z_i$, т. е. сумма координат ее вершин, имеет наименьшее значение [7]. Докажем, что S^0 и есть искомая.

Допустим, что это не так. Тогда для некоторой точки окажется

$$\omega_f(x_k; S^0) < \nu_k. \tag{3.7}$$

Пусть A_k — точка на S^0, проектирующаяся в точку x_k; априори A_k может и не быть вершиной в собственном смысле слова. Сдвинем точку A_k вниз по вертикали на малое расстояние A_kA_k'. Построим выпуклую оболочку точки A_k', вершин поверхности S^0 и краевой поверхности L. Обращенная вниз часть поверхности этой выпуклой оболочки будет выпуклой многогранной поверхностью S' с краем L и с вершинами A_i', проектирующимися в точки x_i.

Покажем, что при достаточно малом смещении A_kA_k' на S' выполнены неравенства (6), так что она оказывается одной из поверхностей рассматриваемой совокупности.

Пусть A_i' — какая-либо ее вершина, отличная от A_k'. Из построения поверхности S' видно, что A_k' является одновременно вершиной A_k поверхности S^0, а многогранный угол при ней на поверхности S' включает многогранный угол на поверхности S^0 (не исключая, что эти углы совпадают). Поэтому для их нормальных изображений имеем обратное включение, так что

$$\varphi_{S'}(x_i) \subset \varphi_S(x_i).$$

[7] Строго говоря, из ограниченности поверхностей S следует только то, что существует предельная для них поверхность S^0, на которой $\sum z_i$ достигает минимума. Очевидно, однако, что она будет многогранной поверхностью с тем же краем L и что на ней выполнены соотношения (6).

Применяя теперь формулу (4) для $\omega_f(x_i; S)$ и замечая, что координаты z_k, x_k в обоих случаях одинаковы, получаем

$$\omega_f(x_i; S') \leq \omega_f(x_i; S^0),$$

так что, в силу (6),

$$\omega_f(x_i; S') \leq \nu_i. \tag{3.8}$$

Может априори случиться, что точка A'_i на S', проектирующаяся в x_i, не является вершиной. Но тогда $\omega_f(x_i; S') = 0$ и (8) заведомо выполняется.

Рассмотрим теперь саму сдвинутую вершину A'_k. Согласно (4) ее условная кривизна есть

$$\omega_f(x_k; S') = \int\limits_{\varphi_{S'}(x_k)} f(\zeta, z'_k, x_k)\, dZ. \tag{3.9}$$

Покажем, что она изменяется непрерывно при непрерывном смещении точки A'_k из ее исходного положения A_k. Область интегрирования $\varphi_{S'}(x_k)$ есть нормальное изображение вершины A'_k, оно представляет собой выпуклый многогранник в плоскости Z и при непрерывном смещении точки A'_k изменяется непрерывно. Ее нормальное изображение представляет собой выпуклый многогранник в плоскости Z и при непрерывном ее смещении изменяется непрерывно. Далее, по условию IV, наложенному на функцию $f(\zeta, z, x)$, она непрерывна по z, x при почти всех ζ. Поэтому при непрерывном смещении точки A'_k $f(\zeta, z'_k, x_k)$ изменяется непрерывно при почти всех ζ. Наконец, по условию II, наложенному на функцию f, $f(\zeta, z'_k, x_k)$ мажорируется некоторой функцией $f_0(\zeta)$, суммируемой во всякой конечной области.

Из этих замечаний, согласно известной теореме о сходимости интегралов Лебега, следует, что интеграл (9), а стало быть, и $\omega_f(x_k; S')$ действительно зависит от положения точки A'_k непрерывно. Поэтому при достаточно малом смещении $A_k A'_k$ $\omega_f(x_k; S')$ будет достаточно мало отличаться от $\omega_f(x_k; S^0)$, а тогда в силу (7) будет также

$$\omega_f(x_k; S') < \nu_k. \tag{3.10}$$

Итак, $\omega_f(x_i; S') \leq \nu_i$ для всех x_i. Но так как A'_k лежит ниже A_k, то $\sum z'_i < \sum z^0_j$. Это противоречит определению поверхности S^0. И тем самым доказано, что она и есть искомая.

Из проведенного доказательства легко видеть, что поверхность S^0 характеризуется не только тем, что для нее $\sum z_i$ достигает минимума, но что координата z_i каждой вершины в отдельности достигает минимума.

3. Теорема 4. *Пусть D — выпуклая область на плоскости X и $f(\zeta,z,x)$, $A(f)$ имеют обычный смысл. Тогда для всякой функции множества $\nu(M)$ на D, удовлетворяющей неравенству вида* (2)

$$\nu(D) < A(f),$$

существует выпуклая поверхность S, удовлетворяющая уравнению (1).

Доказательство. Пусть D_i $(i = 1, 2, \dots)$ — многогранные выпуклые области, заключенные в D и сходящиеся к ней. Пусть L — какая-либо $(n-1)$-мерная поверхность, допустимая в качестве края поверхностей S, проектирующихся на D, а L_i — сходящиеся к ней многогранные поверхности, допустимые соответственно для областей D_i. Легко доказать, что такие L_i существуют.

Данная функция $f(\zeta,z,x)$ определена для $x \in D_i$ и с таким ограничением области определения мы обозначим ее f_i. Соответственно определим величины $A(f_i)$. Легко видеть, что

$$A(f_i) \geq A(f). \tag{3.11}$$

В самом деле, по определению

$$A(f) = \sup \int\limits_Z f_1(\zeta)\, dZ,$$

где супремум берется по всем $f_1(\zeta)$ таким, что $f(\zeta,z,x) \geq f_1(\zeta)$ при всех z, меньших какого-либо z_1, и при всех $x \in D$. Поэтому при замене области D на меньшую D эта величина может только увеличиваться.

Построим последовательность бесконечно измельчающихся разбиений R_j области D на дизъюнктные множества M_{js} и в каждом из них возьмем по точке x_{js}. Исходя из данной функции множества $\nu(M)$, определим для каждого разбиения R_j функцию множества $\overline{\nu}_j(M)$, состоящую из точечных нагрузок, равных $\nu(M_{js})$ и сосредоточенных в точках x_{js}. Очевидно, эти функции слабо сходятся к $\nu(M)$ внутри D.

Определим в каждой области D_i функцию множества $\nu_i(M)$, полагая

$$\nu_i(M) = \overline{\nu}_i(M) \text{ для } M \subset D_i.$$

Тогда во всякой области G, содержащейся в D вместе со своим замыканием $\overline{G}$, определены функции ν_i достаточно большого номера, причем функции $\overline{\nu}_i$ и ν_i слабо сходятся к ν внутри G.

Кроме того, $\nu_i(D_i) \leq \nu(D)$ и потому вследствие (2) и (11) существует такое C, что при всех i

$$\nu_i(D_i) \leq C < A(f_i). \tag{3.12}$$

Поэтому на основании теоремы 3 можно утверждать, что для каждой области D_i существует многогранная поверхность S_i с краем L_i, удовлетворяющая уравнению

$$\omega_{f_i}(M; S_i) = \nu_i(M). \tag{3.13}$$

Вследствие (12) на основании теоремы 1 § 2 можно утверждать, что все эти поверхности S_i ограничены в совокупности. Поэтому из них можно выбрать сходящуюся последовательность. Обозначим поверхности из этой последовательности также через S_i, а предельную поверхность — через S. Она будет удовлетворять уравнению (1).

В самом деле, пусть G — какая-либо область с $\overline{G} \subset D$. При достаточно больших i поверхности S_i имеют части $\overline{S_i}$, проектирующиеся на G, причем $\overline{S_i} \to \overline{S}$, где $\overline{S}$ — часть поверхности S, проектирующейся на G. Поэтому, в силу теоремы 2 § 2, функции $\omega_{f_i}(M; \overline{S_i})$ слабо сходятся внутри G к $\nu(M)$. Вместе с тем функции $\nu_i(M)$ слабо сходятся к $\nu(M)$ внутри G. А так как $\omega_f = \nu_i$, то

$$\omega_f(M; S) = \nu(M).$$

И так как область G — любая, то точно так же

$$\omega_f(M; S) = \nu(M)$$

и теорема доказана.

4. В теореме 4 не утверждалось, что полученная поверхность S будет иметь заранее данный допустимый край L. Это и нельзя гарантировать, хотя согласно проведенному доказательству, S оказывается пределом поверхностей S_i, края которых сходятся к L.

Дело в том, что поверхности S_i вблизи края могут становиться все более и более наклонными. Тогда поверхность, являющаяся их пределом в геометрическом смысле (т. е. в смысле топологического предела множеств), может иметь вертикальный пояс, так что ее часть S, проектирующаяся на область D, не будет иметь край L; ее край будет расположен ниже. Тому можно указать простые примеры, даже в простейшем случае, когда L совпадает с границей области D.

Все это значит, иными словами, что условия теоремы 4 еще не гарантируют разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1) в области D.

В § 4 мы рассмотрим это явление более обстоятельно и дадим достаточные условия для того, чтобы поверхность S заведомо имела данный допустимый край L.

5. Обратимся теперь к дифференциальному уравнению (1.1)

$$f(\zeta, z, x) \operatorname{Det} \|z_{ij}\| = h(x). \tag{3.14}$$

Всякая функция множества почти везде дифференцируема по площади, так что для любой данной $\nu(M)$ почти везде можно определить

$$h(x) = \frac{d\nu}{dX}.$$

Точно так же почти везде существует производная от $\omega_f(M;S)$. Кроме того, всякая выпуклая функция почти везде дважды дифференцируема и почти везде производная от $\omega_f(M;S)$ равна

$$\frac{d\omega_f}{dX} = f(\zeta, z, x)\,\mathrm{Det}\,\|z_{ij}\|$$

(см. [6], откуда легко получить этот результат).

Из сказанного следует, что *поверхность S, удовлетворяющая уравнению $\omega_f(M;S) = \nu(M)$, почти везде удовлетворяет дифференциальному уравнению* (14) *с правой частью $h = d\nu/dX$.* Этот результат имеет, однако, мало смысла. При присоединении к данной функции $\nu(M)$ точечных, линейных и т. п. нагрузок ее производная остается почти везде неизменной. Поэтому разные поверхности, удовлетворяющие существенно различным уравнениям в функциям множества, будут удовлетворять почти везде тому же самому дифференциальному уравнению.

Нужно требовать по крайней мере, чтобы функции множества однозначно определялись своими производными, т. е. были абсолютно непрерывными.

Из определения (1.2) функции $\omega_f(M;S)$ видно, что требование ее абсолютной непрерывности равносильно требованию абсолютной непрерывности площади нормального изображения $\varphi_S(M)$ как функции множества $M \subset D$. Это равносильно абсолютной непрерывности площади сферического изображения как функции множества на поверхности S. Площадь нормального изображения есть, конечно, не что иное, как $\omega_1(M;S)$, так как она дается интегралом (1.2) при $f = 1$.

Соответственно сказанному мы вводим следующее определение обобщенного решения дифференциального уравнения (14).

Функция $z(x)$ называется обобщенным решением уравнения (14), *если поверхность S с уравнением $z = z(x)$ выпукла и имеет абсолютно непрерывную площадь нормального изображения $\omega_1(M;S)$.*

Это определение равносильно другому, которое формулируется чисто аналитически. Возможность такой замены дается следующей леммой.

Лемма. *Пусть поверхность S задана уравнением $z = z(x)$ $(x \in D)$ и пусть $\omega_1(D;S)$ имеет конечное значение. Для того чтобы при этом условии $\omega_1(M;S)$ была абсолютно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность регулярных выпуклых функций*

$z^{(n)}(x)$, сходящихся к $z(x)$, и такая последовательность расширяющихся замкнутых областей $\overline{G}_p \subset D$, исчерпывающих D (т. е. $\cup\overline{G}_p = D$), что для каждой $\overline{G}_p$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_p} \mathrm{Det}\,\|z_{ij}^{(n)}\| dX = \int\limits_{G_p} \mathrm{Det}\,\|z_{ij}\| dX. \tag{3.15}$$

В самом деле, вообще [8)]

$$\int\limits_{M} \mathrm{Det}\,\|z_{ij}\| dX \le \omega_1(M; S),$$

а для абсолютной непрерывности $\omega_1(M; S)$ в области G необходимо и достаточно

$$\omega_1(G; S) = \int\limits_{G} \mathrm{Det}\,\|z_{ij}\| dX. \tag{3.16}$$

Так как поверхности $S^{(n)}$ регулярны, то для них выполнены равенства (16) для всех G_p. Вместе с тем из известных свойств слабой сходимости площади нормального (или сферического) изображения следует, что области G_p можно всегда выбрать так, чтобы для каждой из них было

$$\lim_{n\to\infty} \omega_1(G_p; S^{(n)}) = \omega_1(G_p; S).$$

Отсюда вместе с условием (16) абсолютной непрерывности $\omega_1(M; S)$ следует, что условие леммы действительно необходимо и достаточно для абсолютной непрерывности $\omega_1(M; S)$.

Теперь мы можем высказать теорему существования обобщенного решения дифференциального уравнения (14), непосредственно вытекающую из его определения и теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть обозначения D, $f(\zeta, z, x), A(f)$ имеют тот же смысл, что и в предыдущих теоремах. Тогда для всякой определенной на D функции $h(x)$ такой, что $h(x) \ge 0$ и*

$$\int\limits_{D} h(x)\, dX < A(f), \tag{3.17}$$

уравнение (14) имеет в D обобщенное решение.

---

8) По поводу интегрального представления площади нормального (сферического) изображения см., напр. [5], а по поводу слабой сходимости — [1, 3, 11].

Полагая
$$\nu(M) = \int\limits_M h(x)\,dX,$$
мы видим, что (17) равносильно условию $\nu(D) = A(f)$ и потому теорема 5 непосредственно следует из теоремы 4.

Вопрос о существовании и единственности решения при данных краевых условиях будет рассмотрен в следующих параграфах.

6. Если функции $f(\zeta, z, x)$ и $h(x)$ регулярны, то встает вопрос о степени регулярности решения уравнения (14). По этому поводу в случае n переменных ($n > 2$) нам ничего неизвестно. Неизвестно даже условие гладкости, т. е. однократной дифференцируемости решения.

В случае двух переменных известно, что решение будет гладким, если $h(x)$ ограничена в каждой замкнутой области $\overline{G} \subset D$. Это непосредственно вытекает из теоремы о гладкости выпуклой поверхности с ограниченной кривизной [10].

Подобный результат, при числе переменных $n > 2$, заведомо не имеет места, как можно показать на примерах.

Далее, в случае $n = 2$ результаты, касающиеся регулярности решения уравнения (14) некоторых частных видов, можно найти в [7–9, 12]. По-видимому, полученные там результаты без особого труда могут быть распространены при $n = 2$ на уравнение (14) общего вида при условии, что $f_z(\zeta, z, x) \leq 0$.

7. В теоремах 3–5 фигурирует одно и то же достаточное интегральное условие $\nu(D) < A(f)$ существования решения. В общем случае о степени его необходимости едва ли можно что-нибудь заключить. Однако при более жестких условиях, налагаемых на функцию $f(\zeta, z, x)$, в частности когда она зависит только от ζ, вопрос, в известном смысле, может быть решен.

Этот вопрос мы рассмотрим далее, в § 5 [9)].

Статья поступила в редакцию
25.VI.1957

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 243–255.
2. *Александров А. Д.* Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной // Докл. АН СССР. 1942. Т. 35, № 5. С. 143–147.
3. *Александров А. Д.* Аддитивные функции области в теории выпуклых поверхностей // Учен. зап. ЛГУ. 1948. № 96. Сер. мат. наук. Вып. 15. С. 82–100.
4. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

[9)] § 5 не был опубликован. См. подстрочное примечание [3)] на с. 433. — *Прим. ред.*

5. *Бакельман И. Я.* Обобщенные решения уравнения Монжа — Ампера // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 1143–1145.
6. *Александров А. Д.* Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей // Учен. зап. ЛГУ. 1939. № 37. Сер. мат. наук. Вып. 6. С. 3–35.
7. *Погорелов А. В.* Регулярность выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной // Мат. сб. 1952. Т. 31, вып. 1. С. 88–103.
8. *Бернштейн С. Н.* Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа // Сообщения Харьковского мат. о-ва, втор. сер. 1908–1909. Т. 11. С. 1–164.
9. *Бакельман И. Я.* Априорные оценки и регулярность обобщенных решений уравнений Монжа — Ампера // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 5. С. 719–722.
10. *Александров А. Д.* Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной // Докл. АН СССР. 1942. Т. 36, № 7. С. 211–216.
11. *Alexandroff A. D.* Additive set-functions in abstract spaces. IV // Мат. сб. 1943. Т. 13, вып. 2–3. С. 169–243.
12. *Погорелов А. В.* Изгибание выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

Исследования о принципе максимума. I

Известия высших учебных заведений. Математика. 1958. № 5. С. 126–157

Введение

1. Задачи, служащие предметом предлагаемых исследований, могут быть описаны следующим образом.

Рассмотрим в области G изменения переменных $x^1, \dots, x^n$ линейный оператор (в тензорной записи)

$$L(u) = a^{ik} u_{ik} + b^j u_j + cu. \tag{1}$$

Предполагается, что оператор нигде не гиперболичен, т. е. матрица коэффициентов $\|a^{ik}\|$ нигде не имеет отрицательных собственных значений. Это условие неизменно подразумевается во всем дальнейшем без особых напоминаний.

Спрашивается, что можно сказать, при тех или иных условиях, о множестве точек, где функция u, удовлетворяющая уравнению $L(u) = 0$ или более общему соотношению $L(u) \leq 0$ $(L(u) \geq 0)$, достигает своего абсолютного максимума или минимума; в частности, когда это множество заведомо достигает границы или вовсе не имеет точек внутри G? Ответ на этот вопрос и составляет предмет принципа максимума, который, как известно, приводит к некоторым теоремам единственности для задачи Дирихле. При этом дело сводится к множеству нулей функции u с условиями: $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$. Так, если $L(u) = 0$, $\sup u = m$, то полагая $\overline{u} = m - u$, получим $\overline{u} \geq 0$, $L(\overline{u}) = mc$ и при соответствующем неравенстве для c будет $L(u) \leq 0$. Условия $u \geq 0$, $L(u) \geq 0$, как известно, не влекут таких же общих выводов, как условия $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$. Аналогичный вопрос о множестве нулей функции u ставится также в отношении нелинейных операторов $F(u_{ik}, u_i, u; x^i)$.

Если не говорить о том, что вошло в учебники, то известные относящиеся сюда результаты содержатся прежде всего в работах [1, 2].

В [1] Э. Хопф доказал, что *если оператор L эллиптичен, $L(u)=0$ и $u\geq 0$ всюду в G и хоть где-нибудь в G $\quad u=0$, то $u\equiv 0$.*

В [2] Л. Ниренберг среди других результатов получил прежде всего следующее обобщение теоремы Хопфа. *Пусть квадратичная форма $a^{ik}\xi_i\xi_k$ допускает представление в виде суммы двух форм*

$$a^{ik}\xi_i\xi_k = \sum_{i,k=1}^{m} a^{ik}\xi_i\xi_k + \sum_{i,k=m+1}^{n} a^{ik}\xi_i\xi_k, \tag{2}$$

где первая форма всюду положительно определенная (имеется в виду, что вторая форма не имеет отрицательных собственных значений). *Обозначим через $T(x)$ содержащую точку $x\in G$ связную компоненту пересечения G с плоскостью $x^{m+1}=\mathrm{const},\ldots,x^n=\mathrm{const}$. Если при этих условиях $L(u)\leq 0$, $u\geq 0$ всюду в G и в какой-то точке x_0 $\quad u(x_0)=0$, то $u\equiv 0$ на $T(x_0)$.* Стоит положить $m=n$ как теорема Ниренберга дает теорему Хопфа. Здесь, так же как в результатах Хопфа, предполагается непрерывность коэффициентов оператора L.

Кроме того, в $[1,2]$ содержатся некоторые аналогичные результаты для нелинейных уравнений.

В [3] мною было дано другое доказательство теоремы Хопфа без непрерывности, а лишь с ограниченностью коэффициентов (при условии, что собственные значения матрицы $\|a^{ik}\|$ ограничены снизу положительным числом) и сделаны вытекающие отсюда выводы для нелинейных уравнений.

В настоящих «Исследованиях» мы получим довольно полное решение поставленного выше общего вопроса, включая существенные обобщения выводов работ [1–3]. Отсюда мы выведем также некоторые теоремы, касающиеся зависимости решения уравнений от краевых условий.

2. Чтобы характеризовать получаемые результаты, не гоняясь за общностью и детальной формулировкой условий, предположим, что коэффициенты a^{ik}, b^i, c ограничены, а допустимые функции u дважды дифференцируемы в G и непрерывны вместе с первыми производными в $\overline{G}=G\cup\Gamma$. Здесь и всюду дальше G обозначает рассматриваемую область, Γ — ее границу, x — совокупность значений переменных $x^1,\ldots,x^n$ или, что равносильно, точку $x\in\overline{G}$.

Проблема состоит прежде всего в изучении множества нулей функции u с условиями: $u\geq 0$, $L(u)\leq 0$, когда известно, что u хоть где-нибудь обращается в нуль. Иными словами, речь идет о том, на какое множество должны распространяться нули такой функции. Ответ можно характеризовать как «принцип распространения нулей».

Будем говорить, что функция u касается нуля в точке x_0, если $u(x_0)=$ $=u_i(x_0)=0$ $(i=1,\ldots,n)$. Если x_0 лежит внутри G, то равенства $u_i(x_0)=0$

следуют из $u(x_0) = 0$, в силу $u \geq 0$. Если же $x_0 \in \Gamma$, то требование $u_i(x_0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ не лишнее. Вообще можно говорить, что u касается в x_0 числа a, если $u - a$ касается в x_0 нуля.

Основной вопрос заключается в том, чтобы выяснить, при каких условиях касание функции нуля на границе распространяется внутрь области. В частности, если уже известно, что $u = 0$ на некотором множестве $E \subset G$, то, беря область $G \setminus E$, мы сводим вопрос о распространении нулей внутри области к поставленному вопросу о распространении их от границы.

В связи с этим мы говорим, что точка $x_0 \in \Gamma$ обыкновенная, по отношению оператора L, если из условий $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и касания u нуля в точке x_0 следует, что в окрестности x_0 внутри G существуют точки, где $u = 0$.

То, что не всякая точка обыкновенная, показывает пример функции $u = x^2 - y^2$, которая удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, положительна в области $x > |y|$ и касается нуля в вершине этой области: в точке $(0, 0)$.

С другой стороны, мы докажем теорему, которая в принятых предположениях регулярности сводится к следующему.

Будем говорить, что в некоторой области U оператор L не вырождается в направлении l, если после поворота осей, направляющего ось x^1 вдоль l, в U оказывается $a^{11} > \text{const} > 0$.

Назовем параболоидом поверхность, представимую в подходящих прямоугольных координатах уравнением

$$x^1 = a\Bigl[\sum_{i>1}(x^i)^2\Bigr]^{p/2} \qquad (a > 0,\ p > 1).$$

Теорема I. *Если точки $x_0 \in \Gamma$ можно коснуться изнутри G вершиной какого-нибудь параболоида и в окрестности x_0 оператор L не вырождается в направлении оси этого параболоида, то точка x_0 обыкновенная. Если же такого параболоида не существует, хотя бы граница Γ и была гладкой, то точка x_0 может не быть обыкновенной и тогда, когда оператор L строго эллиптичен в окрестности x_0* [1]. *Однако если ограничиваться функциями u, дважды дифференцируемыми также в $G \cup \Gamma$ или хотя бы имеющими первые производные с условием Гёльдера, то x_0 всегда обыкновенная как только в ней Γ имеет касательную плоскость и в ее окрестности оператор не вырождается в направлении нормали.*

В конечном счете, теорема I и представляет наш основной результат: «принцип распространения нулей». Все дальнейшее — это ее приложения.

[1] Необходимых и достаточных условий для того, чтобы точка была обыкновенной, мы не можем сформулировать. Однако мы убедимся, что достаточные условия, которые будут даны, так сказать, весьма близки́ к необходимым.

3. Применяя теорему I, легко получить прежде всего следующую теорему о распространении нулей до границы области.

Теорема II. *Пусть для оператора L, заданного в области G, существует такое направление, что у каждой точки есть окрестность, где L не вырождается в этом направлении*[2]. *Тогда, если функция u в G удовлетворяет условиям: $L(u) \leq 0$, $u \geq 0$ и хоть где-нибудь в G $u = 0$, то множество нулей функции u имеет точки сгущения на границе области.*

Из теоремы II известным путем выводится

Теорема III. *Пусть оператор L в G удовлетворяет условию теоремы* II *и существует такая функция u, что всюду в G $L(u) \leq 0$, $u > \mathrm{const} > 0$. Тогда задача Дирихле для уравнения $L(v) = f$ в области G имеет не более одного решения.*

В частности, если в операторе L коэффициент $c \leq 0$, то можно взять $u = a = \mathrm{const} > 0$, так как тогда $L(u) = ac \leq 0$.

4. Применяя теорему I (в простейшем случае квадратичного параболоида), мы получим другую, более глубокую теорему о распространении нулей. Пока мы сформулируем ее и ее следствие упрощенно, предполагая коэффициенты оператора достаточно регулярными в замкнутой области $G \cup \Gamma$. Условия регулярности мы не оговариваем; во всяком случае, аналитичности — более, чем достаточно.

Будем говорить, что кривая C есть линия эллиптичности оператора L или что L эллиптичен вдоль C, если в каждой своей точке эта кривая касается плоскости, определяемой «положительными» главными направлениями матрицы $\|a^{ik}\|$, т. е. главными направлениями, отвечающими положительным собственным значениям. (Кривая подразумевается регулярной.)

Коэффициенты a^{ik} предположены «достаточно регулярными», и если они нигде не обращаются в нуль все вместе, то, выбирая подходящее поле направлений в плоскостях положительных главных направлений и строя его интегральные кривые, получим семейство линий эллиптичности. Следовательно, при весьма широких условиях существует, так сказать, весьма много линий эллиптичности. В частности, если оператор эллиптичен, то всякая линия есть его линия эллиптичности.

Другой простейший случай получаем, когда в каждой точке есть единственное положительное собственное значение. Огибающие соответствующих главных направлений будут тогда единственными линиями эллиптичности. Вообще же поле главных направлений имеет особенности в точках, где есть кратные собственные значения, хотя и в этом случае линии эллиптичности существуют.

---

[2] При непрерывности коэффициентов дело сводится к тому, что ни в одной точке данное направление (одно и то же во всех точках!) не оказывается главным направлением матрицы $\|a^{ik}\|$, отвечающим нулевому собственному значению.

Имеет место следующая теорема о распространении нулей вдоль линий эллиптичности.

Теорема IV. *Если в области G $\quad u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и в точке $x_0 \in G$ $\quad u = 0$, то $u \equiv 0$ на всякой линии эллиптичности, проходящей через x_0.*

Если при тех же условиях: $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$, u касается нуля в обыкновенной точке $x_0 \in \Gamma$, то $u \equiv 0$ хотя бы на одной линии эллиптичности, исходящей из x_0 (если такая линия существует).

5. Из теоремы IV непосредственно вытекает ряд следствий. Так, например, имеет место следующий результат.

Если некоторая m-мерная поверхность S такова, что в каждой точке ее касательная плоскость содержится в плоскости положительных главных направлений матрицы $\|a^{ik}\|$, то всякая кривая $C \subset S$ будет линией эллиптичности. Поэтому нули функции u распространяются вдоль таких поверхностей, т. е. если всюду $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и $u(x_0) = 0$, $x_0 \in S$, то $u \equiv 0$ на S.

Отсюда, в частности, непосредственно следует упомянутая выше теорема Ниренберга. Теорема Хопфа получается при $m = n$, когда всякая линия $C \subset G$ оказывается линией эллиптичности.

Будем говорить, что множество M есть множество эллиптической связности оператора L, если любые две точки из M соединимы кривой, состоящей из дуг линий эллиптичности, и не существует никакого содержащего M множества с тем же свойством. Область G, где задан оператор L, распадается, вообще говоря, на семейство таких множеств. Если же сама область есть такое множество, то мы называем оператор L эллиптически связным. Всякий эллиптический оператор, очевидно, эллиптически связен.

Примером эллиптически связного оператора, не эллиптического ни в одной точке, может служить

$$L(u) = a^2 u_{xx} + 2ab u_{xy} + b^2 u_{yy} + u_{zz}, \tag{3}$$

где $a = \cos z$, $b = \sin z$. Из общей теоремы, которая будет сформулирована ниже, следует, что этот оператор эллиптически связен в сколь угодно малой окрестности любой точки. Только в случае двух переменных всякий оператор, эллиптически связный в односвязной области G, неизбежно оказывается хоть где-нибудь эллиптическим.

Из теоремы IV следует, очевидно,

Теорема IVa. *Если всюду в G $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и в некоторой точке $x_0 \in G$ $u(x_0) = 0$, то $u \equiv 0$ на множестве эллиптической связности, содержащем точку x_0.*

Отсюда и из определения понятия обыкновенной точки границы следует

Теорема V. *Если оператор L эллиптически связен, $L(u) \leq 0$, $u \geq 0$ и u касается нуля где-нибудь в G или в обыкновенной точке границы, то $u \equiv 0$ в G.*

Случай, когда u касается нуля на границе, непосредственно приводится к случаю, когда $u = 0$ где-нибудь в G, в силу самого определения обыкновенной точки. Стоит поэтому только соединить теорему V с теоремой I, дающей характеристики обыкновенных точек, как мы получим более конкретно формулируемые варианты теоремы V. Простейший из них представляет следующее существенное усиление теоремы Хопфа.

Теорема Va. *Пусть в G задан эллиптически связный оператор L и функция u с условиями $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$. Тогда, если u касается нуля где-нибудь внутри G или в точке границы Γ, где Γ регулярна и L не вырождается в направлении нормали, то $u \equiv 0$ в G.*

Такого рода теоремы можно назвать принципом максимума (минимума) в замкнутой области, так как здесь учитывается случай, когда u касается нуля также и на границе.

6. Теоремы IV–V, естественно, ставят вопрос о более эффективных условиях эллиптической связности оператора и вообще о нахождении множеств эллиптической связности. Вопрос этот получает следующее решение, непосредственно вытекающее из одной теоремы П. К. Рашевского [4] относительно неголономных полей m-мерных направлений (плоскостных элементов).

Пусть в области G задан оператор L. Пусть в каждой точке подобласти $U \subset G$ матрица $\|a^{ik}\|$ имеет точно m независимых положительных главных направлений. Они определяют в каждой точке $x \in U$ m-мерный элемент (плоскость), $E^m(x)$ — плоскость эллиптичности оператора L.

Будем говорить, что многообразие (поверхность) S есть интегральное многообразие поля элементов E^m, если 1) его касательная плоскость в каждой точке x содержит элемент $E^m(x)$ данного поля и 2) S есть многообразие наименьшей размерности с этим свойством.

Только в случае голономности поля E^m многообразие S будет заведомо m-мерным. Вообще же его размерность больше m. Оно может быть и n-мерным, представляя собою подобласть области G. В таком случае поле E^m называется вполне неголономным.

Из упомянутой теоремы П. К. Рашевского вытекает результат, который наглядно (хотя и не совсем точно) можно сформулировать следующим образом.

Теорема VI. *В подобласти $U \subset G$, где все плоскости эллиптичности оператора L имеют одну и ту же размерность и интегральные многообразия их поля образуют регулярное семейство, однозначно покрывающее U, каждое множество эллиптической связности есть такое интегральное многообразие. В частности, оператор будет эллиптически связным, если поле его плоскостей эллиптичности вполне неголономно.*

Отыскание интегральных многообразий приводится к интегрированию соответствующей пфаффовой системы. Поэтому теория этих систем дает хорошо известный способ нахождения множеств эллиптической связности хотя бы в малом и, в частности, способ решения вопроса о локальной эллиптической связности данного оператора.

В приведенном примере оператора (3) его плоскости эллиптичности всюду двумерны и, как легко убедиться, образуют всюду неголономное поле. Оно тем самым вполне неголономное, так как поле $(n-1)$-мерных элементов в n-мерном пространстве, вообще говоря, либо голономно, либо вполне неголономно соответственно полной интегрируемости или неинтегрируемости определяющей его пфаффовой системы (поскольку мы исключаем особые случаи существования только отдельных интегральных многообразий). Таким образом, оператор (3) локально эллиптически связен и тем же свойством обладает всякий оператор с неголономным полем $(n-1)$-мерных плоскостей эллиптичности.

7. В результате сочетания теорем I, IV, VI мы приходим к довольно полному решению вопроса о распространении нулей, по крайней мере, в малом, т. е. в некоторой малой подобласти $U \subset G$. Опуская детали, мы можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема VII. *Пусть в подобласти $U \subset G$ выполнены условия теоремы* VI, $L(u) \le 0$, $u \ge 0$ *и* $u(x_0) = 0$, $x_0 \in U$. *Тогда $u \equiv 0$ на интегральном многообразии поля плоскостей эллиптичности, содержащем точку x_0.*

С другой стороны, если $b^i \equiv c \equiv 0$, т. е. оператор L содержит только члены со вторыми производными, то для всякого интегрального многообразия S существует такое решение u уравнения $L(u) = 0$ в U, что $u \equiv 0$ на S и всюду в $U \setminus S$ $\quad u > 0$.

Теорема VII решает вопрос о локальном распространении нулей, поскольку оно определяется коэффициентами a^{ik}. Остается вопрос о роли коэффициентов b^i, c.

Пусть выполнены условия первой части теоремы VII. Путем подходящего преобразования интегральные многообразия поля плоскостей эллиптичности можно отобразить в плоскости P той же размерности, иными словами, представить их в подходящих координатах уравнениями $x^{p+1} = \text{const}, \ldots, x^n = \text{const}$. Тогда в операторе L остаются только члены со вторыми производными по $x^1, \ldots, x^p$.

Коэффициенты b^i преобразованного оператора определяют в каждой точке некоторый вектор. Мы возьмем в каждой точке его компоненту, перпендикулярную соответствующей плоскости P. Таким образом, получим поле векторов $\overline{b}$, перпендикулярных плоскостям P.

Там, где $\overline{b} \ne 0$, существуют интегральные кривые этого поля, причем они ориентированы согласно направлению векторов $\overline{b}$. Оказывается, что нули функции u распространяются вдоль этих кривых в направлении, указанном векторами $\overline{b}$, т. е. только в одну сторону. Иными словами, имеет место

Теорема VIII. *Пусть выполнены условия первой части теоремы* VII *и пусть интегральные многообразия S поля плоскостей эллиптичности оператора L представляют собой плоскости (точнее, области в p-мерных плоскостях). Тогда, если $u(x_0) = 0$, $x_0 \in U$, то $u \equiv 0$ на интегральном многообразии S_0, содержащем точку x_0, а также на всем множестве $R(S_0)$, образуемом многообразиями S, содержащими точки, достижимые из S_0 по интегральным кривым поля векторов $\overline{b}$, проходимым от S_0 в направлении, указанном векторами $\overline{b}$.*

С другой стороны, если $\overline{b} \neq 0$, но $c = 0$, т. е. оператор L не содержит самой функции, то для всякого интегрального многообразия S существует такая функция u, что всюду в U $L(u) \leq 0$ и $u \equiv 0$ на $R(S)$, но всюду в $U \setminus R(S)$ $\quad u > 0$.

Простейший частный случай получаем, когда многообразия S представляют собой $(n-1)$-мерные плоскости $x^n = \mathrm{const}$, точнее — области в таких плоскостях. Тогда оператор L представляется в следующем виде, если положить $x^n = t$, $b^n = b$ и оставить для индексов i, k лишь значения, меньшие n:

$$L(u) = a^{ik}u_{ik} + b^i u_i + bu_t + cu. \tag{4}$$

Пусть на S_0 $b \neq 0$, тогда, деля на b, можно, по крайней мере в окрестности S_0, привести к тому, что $b = 1$. При этом условии теорема VIII утверждает, что если $u(x_0) = 0$, $x_0 \in S_0$, то $u \equiv 0$ во всей области $t \geq t_0$, где t_0 — значение t на $S(x_0)$. С другой стороны, всегда можно указать такую функцию u, что будет всюду $L(u) \leq 0$, в указанной области будет $u \equiv 0$, а вне нее $u > 0$. Это последнее замечание можно, при известных общих условиях, распространить на общий случай, фигурирующий в теореме VIII, дополнив ее тем самым указанием на известную необходимость ее условий, подобно тому, как дополнена теорема VII.

Указанный частный результат включает теорему, доказанную Л. Ниренбергом [2] в предположении строгой положительности формы $a^{ik}\xi_i\xi_k$, где a^{ik} — коэффициенты оператора (4). Уравнение теплопроводности есть частный случай уравнения $L(u) = 0$ с оператором (4), и указанная теорема содержит утверждение о том, что каковы бы ни были начальные условия при $t = 0$ и условия нагревания на границе, ни при каком $t_0 > 0$ температура внутри тела не может достигнуть максимума (в сравнении со значениями для t, близких к t_0), кроме того случая, когда она имела во всем теле одно и то же значение при всех $t < t_0$.

Особый случай вопроса, решаемого теоремой VIII, представляется тогда, когда вектор $\overline{b}$ может обращаться в нуль. Тогда поле интегральных кривых может иметь особенности либо вовсе отсутствовать в областях, где $\overline{b} \equiv 0$. В такой области определяющую роль приобретает коэффициент c. А именно имеет место

Теорема IX [3]**.** *Пусть при условиях теоремы* VIII *оказывается* $\overline{b} \equiv 0$. *Пусть на многообразии* S_0 *есть точки, где* $c > 0$. *Тогда, если* $u(x_0) = 0$, $x_0 \in S_0$, *то* $u \equiv 0$ *на всех многообразиях* S, *которые содержат точки, соединимые с* S_0 *кривыми, на которых всюду* $c > 0$.

Можно еще дополнить теоремы VII–IX рассмотрением исключенных в них особых случаев, когда, например, плоскости эллиптичности имеют разные размерности или векторы $\overline{b}$ исчезают на данном многообразии S_0 и др. Но и в данном виде эти теоремы уже дают довольно полную картину распространения нулей.

8. Благодаря тому, что принцип максимума для замкнутой области учитывает случай касания нуля на границе области, он позволяет установить теорему, касающуюся более общей краевой задачи, чем задача Дирихле, и формулируемую в несколько упрощенном виде следующим образом.

Теорема X. *Пусть в области* G *задан эллиптически связный оператор* L, *причем всякая точка* $x \in \Gamma$ *обыкновенная. Пусть две, определенные в* G, *функции* u, v *удовлетворяют следующим условиям.*

I. $L(u) \leq 0 \leq L(v)$ всюду *в* G.

II. $\alpha u_\nu + \beta u \leq 0 \leq \alpha v_\nu + \beta v$ всюду на Γ, *причем здесь* u_ν, v_ν — *производные по нормали, а функции* α, β *таковы, что всюду на* Γ $\quad \alpha \geq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$.

III. *Всюду в* G $\quad u \geq 0$, $u \not\equiv 0$, *а* $v \geq 0$ *хоть где-нибудь внутри* G.

Тогда существует такое число $h \geq 0$, *что* $v \equiv hu$. *Поэтому* $L(v) = hL(u)$, $\alpha v_\nu + \beta v = h(\alpha u_\nu + \beta u)$ *и либо* $h = 0$, *т. е.* $v = 0$, *либо* $h > 0$, *но тогда соотношения* I *и* II *возможны лишь при* $L(v) = L(u) = 0$, $\alpha u_\nu + \beta u = \alpha v_\nu + \beta v = 0$.

Чтобы пояснить смысл этой теоремы, отметим некоторые ее следствия.

Теорема Xa. *Если краевая задача* $L(u) = 0$, $\alpha u_\nu + \beta u = 0$ *имеет неотрицательное решение* $u \not\equiv 0$, *то всякое иное ее решение* v *ему пропорционально.*

В самом деле, в этом случае в условиях I, II теоремы X всюду стоят знаки равенства, а потому условие $v \geq 0$ становится несущественным: ему можно удовлетворить, меняя, если нужно, знак v. Поэтому все условия теоремы X можно считать выполненными и она дает $v \equiv hu$.

Этот результат можно сопоставить с известной теоремой о единственности, с точностью до множителя, первой собственной функции.

Теорема Xб. *Если существует такая функция* $u \geq 0$, *что* $L(u) \leq 0$, $\alpha u_\nu + \beta u \leq 0$ *и хоть где-нибудь или* $L(u) < 0$, *или* $\alpha u_\nu + \beta u < 0$, *то краевая задача* $L(v) = f$, $\alpha v_\nu + \beta v = \varphi$ *не может иметь более одного решения.*

---

[3] Эта теорема не верна, как указано А. Д. Александровым во введении к статье «Исследования о принципе максимума. II». См. с. 491 настоящего издания. — *Прим. ред.*

В самом деле, если v', v'' — два ее решения и хоть где-нибудь, скажем, $v' \geq v''$, то для $v = v' - v''$ оказываются выполненными все условия теоремы X, причем $L(v) \equiv 0$, $\alpha v_\nu + \beta v \equiv 0$. Но тогда по теореме X $\quad v \equiv hu$, так что если бы было $h \neq 0$, то оказывалось бы также $L(u) \equiv 0$, $\alpha u_\nu + \beta u \equiv 0$, что противоречит условию. Следовательно, $h = 0$, т. е. $v \equiv 0$ и $v' \equiv v''$, что и требовалось доказать.

Например, если $c \leq 0$, $\beta \leq 0$ и либо $c \not\equiv 0$, либо $\beta \not\equiv 0$, то для всякой функции $u = a = \text{const} > 0$ оказывается $L(u) = ac \leq 0$, $\alpha u_\nu + \beta u = \beta a \leq 0$. Поэтому в данном случае условия теоремы Xб выполнены и потому краевая задача $L(v) = f$, $\alpha v_\nu + \beta v = \varphi$ допускает единственное решение.

Теорема Xв. *Если существует такая функция $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$, что $L(u) \leq 0$, $\alpha u_\nu + \beta u \leq 0$, то решение краевой задачи $L(v) = f$, $\alpha v_\nu + \beta v = \varphi$ зависит от функций f и φ — монотонно, т. е., если $L(v') = f'$, $\alpha v'_\nu + \beta v' = \varphi'$, $L(v'') = f''$, $\alpha v''_\nu + \beta v'' = \varphi''$ и $f' \geq f''$, $\varphi' \geq \varphi''$, то всюду в $G \quad v' < v''$ (если, конечно, по крайней мере либо $f' \not\equiv f''$, либо $\varphi' \not\equiv \varphi''$).*

В самом деле, если $f' \geq f''$, $\varphi' \geq \varphi''$ и хоть где-то $f' > f''$ или $\varphi' > \varphi''$, то, полагая $v = v' - v''$, будем иметь $L(v) \geq 0$, $\alpha v_\nu + \beta v \geq 0$ и хоть где-нибудь либо $L(v) > 0$, либо $\alpha v_\nu + \beta v > 0$. Если бы при этом хоть где-нибудь в G было $v' \geq v''$, т. е. $v \geq 0$, то по теореме X оказалось бы $v \equiv hu$, где $h > 0$. (Здесь не может быть $h = 0$, так как тогда $v \equiv 0$, т. е. $v' \equiv v''$ и стало быть $f' \equiv f''$, $\varphi' \equiv \varphi''$.) Но тогда было бы также $L(u) \geq 0$, $\alpha u_\nu + \beta u \geq 0$ и хоть где-нибудь либо $L(u) > 0$, либо $\alpha u_\nu + \beta u > 0$. А это противоречит условию. Следовательно, всюду в $G \quad v' < v''$.

9. Все перечисленные результаты посредством известных приемов переносятся с необходимыми изменениями на нелинейные операторы, удовлетворяющие соответствующим условиям.

10. Из данного обзора видно, что основным среди наших результатов является теорема I. Ее доказательство основано, в свою очередь, на одной, по существу геометрической, лемме, которая в простейшей ее форме доказывается дальше в § 1. Она, следовательно, и составляет основу всего исследования.

Та же геометрическая лемма была вполне аналогично введена и использована мною в работе [3]. Однако в этой работе была допущена ошибка: сформулированная там лемма Ia неверна[4)]. Вместе с тем выводы работы [3] основаны на сформулированной там же лемме 1, которая верна; ее доказательство легко получается, если, сохраняя общий ход доказательства леммы Ia, исправить допущенную в нем ошибку. В настоящей работе мы, собственно говоря, так и поступаем: лемма, доказанная в § 1, несколько

[4)] В связи с этим замечание в п. 3 § 2 работы [3], касающееся ослабления требования ограниченности коэффициентов b^i, c, оказывается неосновательным. Оно, однако, не имело в [3] никаких следствий.

усиливает лемму 1 работы [3] и, во всяком случае, очевидным образом ее включает; доказательство же ее следует тем же соображениям.

11. Предлагаемая статья является только первой частью наших «Исследований о принципе максимума», общий план изложения которых представляется следующим образом.

В данной статье I мы докажем теоремы II, IV–VII, рассматривая функции u, дважды дифференцируемые в G. Ни от вторых производных функций u, ни от коэффициентов оператора L ни непрерывности, ни ограниченности не требуется. При нашем методе предположение их непрерывности ничего не упростило бы.

Что же касается ограниченности, то принципиальное значение имеют ограничения роста коэффициентов оператора вблизи их особых точек. Эти ограничения и соответствующие точные определения уже упомянутых понятий невырожденности оператора, поверхности его эллиптичности, касания функции нуля и пр. будут даны при формулировках соответствующих результатов.

Стоит отметить, что, как будет показано, ограничения, налагаемые на коэффициенты оператора, оказываются существенными и даже, так сказать, почти необходимыми.

Что касается основной теоремы I, то в данной статье I мы даем доказательство только части ее утверждений (леммы 2 § 2 и 3 § 4). Полное ее доказательство, с возможно более слабыми условиями на коэффициенты оператора, будет дано в статье II. Там же будут даны некоторые применения основанного на ней «принципа распространения нулей» и доказаны теоремы VIII, IX. Наконец, все эти результаты мы перенесем, вместе с результатами статьи I, на соответствующие нелинейные операторы.

В статье III мы докажем соответственно обобщенные теоремы III, X о краевых задачах и некоторые к ним примыкающие. При этом мы позаботимся о возможно более общей постановке краевых условий типа $f(u_\nu, u) = \varphi$, не требуя даже непрерывности u на границе.

В статье IV и следующих мы будем допускать уже функции u дважды дифференцируемые лишь почти везде. Соответственно ограничения типа $L(u) \leq 0$ будут пониматься как выполненные лишь почти везде. Конечно, в связи с этим на функции u приходится налагать дополнительные условия, без которых такие обобщения наших теорем становятся невозможными. При этих условиях мы получим соответствующие обобщения наших результатов, дойдя, как нам кажется, до известного предела возможного обобщения основной теоремы I, поскольку она, вообще, формулируется для дифференциальных операторов L. При этом потребуется обобщение нашей основной геометрической леммы.

Далее, мы рассчитываем изложить некоторые теоремы, относящиеся только к случаю двух переменных, когда часть условий, налагаемых в случае $n > 2$ переменных, оказывается лишней.

Наконец, мы рассчитываем перейти от дифференциальных операторов к их обобщениям в виде функций множества или функционалов, подобно тому, как обобщением оператора Лапласа, дающего плотность заряда, оказывается оператор, определяющий по данному потенциалу заряд как функцию множества.

12. Принцип максимума оказывается чрезвычайно сильным средством доказательства теорем единственности в теории поверхностей. Уравнения второго порядка, особенно нелинейные, естественно появляются в вопросах этой теории, поскольку, например, уравнение Дарбу, определяющее изгибание поверхности, уравнение, определяющее поверхность по заданной гауссовой кривизне, как и другие оказываются уравнениями как раз такого рода. Более того, совершенно естественно поставленные задачи об определении поверхности по некоторым функциям от ее главных кривизн приводятся к уравнениям, вообще говоря, с разрывными коэффициентами даже тогда, когда речь идет об аналитических поверхностях и аналитических функциях от их кривизн. В частности, имея в виду именно соответствующие геометрические приложения, мы устраняем требования непрерывности коэффициентов.

Эти приложения разворачиваются в нашей серии работ о теоремах единственности для поверхностей «в целом», публикуемых в «Вестнике ЛГУ». При этом мы получаем значительное большинство ранее известных и много новых теорем единственности для поверхностей в целом, поскольку эти теоремы высказываются для не слишком нерегулярных поверхностей, когда дифференциальные уравнения по существу отказываются служить.

§ *1. Основная геометрическая лемма*

1. Мы будем рассматривать области G или U изменения переменных $x^1, \ldots, x^n$ и заданные в них функции $u(x) \equiv u(x^1, \ldots, x^n)$. Как обычно, переменные интерпретируются как прямоугольные координаты. На протяжении всей работы, если явно не оговорено противное, подразумевается, что рассматриваемые функции u дважды дифференцируемы внутри области их задания.

Определение 1. Пусть в открытой области G с границей Γ задана функция $u \geq 0$. Мы говорим, что u касается нуля в точке $x_0 \in G$, если $u(x_0) = u_i(x_0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Если же $x_0 \in \Gamma$, то мы говорим, что u касается нуля в точке x_0, если существует такая последовательность точек $x_k \in G$, $x_k \to x_0$, что

1) $u(x_k)/|x_k - x_0| \to 0$, где $|x_k - x_0|$ — расстояние x_k от x_0;

2) лучи x_0x_k, идущие из x_0 в точки x_k, сходятся к лучу l, не касающемуся Γ (т. е. существует конус, содержащийся в G, с вершиной x_0 и с осью l). Можно сказать, что u касается нуля вдоль луча l, идущего существенно внутрь G.

Можно также определить, что u касается в точке x_0 функции v, в частности, постоянной, если разность $u-v$ не меняет знака и касается нуля в точке x_0.

Определение 2. Мы будем говорить, что $h(y)$ есть *функция с конечным интегралом*, если она задана на некотором интервале $(0,y_0)$, положительна, непрерывна и ее интеграл от 0 до y_0 конечен; т. е. мы предполагаем, что если при $y\to 0$, $h(y)\to\infty$, то все же указанный интеграл сходится.

2. Лемма 1. *Пусть U — замкнутая область, расположенная в полупространстве $x^1\geq 0$ и имеющая на плоскости $x^1=0$ грань V, т. е. замкнутую относительно этой плоскости $(n-1)$-мерную область. Пусть W — заключенное внутри V замкнутое множество, в котором отмечена точка x_0. Ее можно принять за начало координат. Само W может сводиться к одной точке x_0.*

Пусть на U определена неотрицательная и полунепрерывная снизу функция u, положительная на $U\setminus W$ и касающаяся нуля в точке x_0.

Утверждение леммы состоит в следующем.

При данных условиях, при любой заданной функции $h(x^1)$ с конечным интегралом, внутри U сколь угодно близко к плоскости $x^1=0$ существуют такие точки x_1, в которых

I) *$d^2u\geq p(dx^1)^2$, где число p удовлетворяет неравенству $p>h(x_1)u_1(x_1)$;*

II) $u_1(x)>u(x_1)/x_1$;

III) $u_2(x_1)=\ldots=u_n(x_1)=0$.

Дальнейшее представляет доказательство этой леммы.

3. Рассмотрим в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве поверхность S, определенную в прямоугольных координатах $x^1,\ldots,x^n$, z уравнением

$$z=u(x)\equiv u(x^1,\ldots,x^n).$$

Вследствие условий, наложенных на $u(x)$, поверхность S расположена над областью U.

Чтобы не писать дальше все время один и тот же индекс, обозначим координату x^1 через y.

Спроектируем поверхность S на плоскость yz и натянем на эту проекцию S' снизу выпуклую кривую C, т. е. построим выпуклую оболочку проекции S' и возьмем ту часть ее границы, которая обращена в сторону убывающих z.

То условие, что u касается нуля в начале координат x_0 вдоль луча l, идущего внутрь U, геометрически означает, что контингенция поверхности

S в точке x_0 содержит такой луч l. Отсюда очевидно, что кривая C подходит к началу координат и касается в нем оси y.

Вместе с тем, так как в $U \setminus W \quad u > 0$ и полунепрерывна снизу, то при всяком $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что вне ε-окрестности множества W $u > \delta$. Поэтому не только проекция S' поверхности S, но и ее выпуклая оболочка, а, следовательно, и кривая C не имеет с осью y общих точек, кроме начала.

По той же причине край поверхности S, расположенный над частью границы области U, заключенной в полупространстве $x^1 > 0$, лежит на некотором положительном расстоянии над плоскостью $z = 0$. С другой стороны, кривая C подходит к началу координат. Поэтому достаточно близко к началу на кривой C не будет точек, являющихся проекциями точек края поверхности S', т. е. достаточно близко к началу, все точки, где кривая C касается проекции S', будут проекциями только внутренних точек поверхности S.

Ограничимся такой дугой кривой C вблизи начала, на которой это заведомо имеет место. Эту дугу кривой также обозначим через C (так как остальную часть кривой мы уже вовсе исключаем из рассмотрения). Кривая C (т. е. указанная дуга первоначальной кривой) как часть границы выпуклой оболочки множества S' состоит из открытых отрезков и некоторого множества точек, общих у нее с S' [5)]; ей также принадлежит начало координат.

Так как C касается оси y в начале, то из сказанного, во-первых, следует, что на C сколь угодно близко к началу есть точки, общие с S', т. е. проекции точек поверхности S; во-вторых — во всех остальных точках кривизна кривой C равна нулю, в-третьих — кривая C гладкая.

В самом деле, так как она выпукла, то нарушение гладкости возможно лишь в угловых точках. Вместе с тем такая точка должна была бы служить проекцией внутренней точки поверхности S. Но там поверхность S имеет касательную плоскость, а, следовательно, это невозможно.

4. Выяснив, таким образом, геометрические свойства кривой C, обратимся к нужным нам аналитическим их следствиям.

Пусть $z = f(y)$ есть уравнение кривой C. Функция $f(y)$ выпуклая. По гладкости кривой C, производная $f'(y)$ является непрерывной неубывающей функцией, а так как C касается оси y в начале, то $f'(0) = 0$.

Далее, функция $f(y)$ не сводится к линейной и $f(0) = 0$. Поэтому, вследствие выпуклости $f(y)$, при всяком $y > 0$

$$f'(y) > \frac{1}{y} f(y). \tag{1}$$

[5)] Это заведомо верно, если S' замкнуто. Иначе нужно говорить о таких точках на C, которые являются предельными для S'. Но в наших условиях эти точки принадлежат S', как это следует из полунепрерывности u снизу.

Что касается второй производной $f''(y)$, то нельзя гарантировать ее существования при всех y (хотя поверхность S дважды дифференцируема). Поэтому мы будем подразумевать под $f''(y)$ верхнюю производную от $f'(y)$, допуская для нее, априори, бесконечные значения. (На самом деле они исключены из-за двукратной дифференцируемости поверхности S, но это для нас неважно.)

Возьмем какое-либо y_0, которое можно выбрать сколь угодно малым.

Пусть $h(y)$ — функция, фигурирующая в условиях леммы, т. е. непрерывная и положительная при $y > 0$ и обращающаяся в бесконечность при $y = 0$, но так, что интеграл $\int\limits_0^{y_0} h(y)dy$ конечен.

Докажем, что внутри промежутка $(0, y_0)$ существует такая точка y_1, что

$$f''(y_1) > h(y_1)f'(y_1). \tag{2}$$

Допустим противное. Тогда всюду в интервале $(0, y_0)$ будет

$$f''(y) \leq h(y)f'(y), \tag{3}$$

так что $f''(y)$ ограничена во всяком промежутке (ε, y_0) (поскольку $f'(y)$ монотонна и, стало быть, $f''(y) \geq 0$). Поэтому $f'(y)$ оказывается абсолютно непрерывной и из (3) следует, что

$$\int\limits_\varepsilon^{y_0} h(y)dy \geq \int\limits_\varepsilon^{y_0} \frac{f''(y)}{f'(y)}dy = \ln\frac{f'(y_0)}{f'(\varepsilon)}. \tag{4}$$

Но при $\varepsilon \to 0$ $f'(\varepsilon) \to 0$, так что правая часть стремится к бесконечности, тогда как по условию интеграл слева ограничен. Это невозможно и, следовательно, точка y_1, где верно неравенство (2), существует.

5. Из неравенства (2), в частности, следует, что $f''(y_1) > 0$. А как было отмечено, кривизна кривой C может быть отличной от нуля лишь в тех точках, которые служат проекциями точек поверхности S. Стало быть, на S есть точка X_1, проектирующаяся в точку $(y_1, f(y_1))$ кривой C.

Пусть x_1 — совокупность значений координат $x^1 = y, x^2, \ldots, x^n$ точки X_1. Покажем, что это и будет та точка $x_1 \in U$, существование которой утверждает лемма. Она лежит внутри U, так как по выбору кривой C точка X_1 не лежит на краю поверхности S.

Для доказательства сказанного построим на кривой C, как на направляющей, цилиндр Z с $(n-1)$-мерными образующими, параллельными плоскости $y = z = 0$. Уравнение этого цилиндра будет, очевидно, следующим:

$$z = f(y) \equiv f(x^1).$$

Из построения кривой C явствует, что поверхность S лежит над цилиндром Z, т. е. при тех значениях координат, при которых определены задающие их функции u, $f(y)$:

$$u(y, x^2, \dots, x^n) \geq f(y).$$

Далее, тот факт, что точка X_1 на S проектируется в точку кривой C, равносилен тому, что в этой точке цилиндр Z касается поверхности S; цилиндр и поверхность гладкие, так что касательные плоскости их в точке X_1 совпадают.

Но, во-первых, касательные плоскости цилиндра Z параллельны плоскости $y = z = 0$. Поэтому то же верно для касательной к поверхности S в точке X_1. Это равносильно тому, что

$$u_2(x_1) = \ldots = u_n(x_1) = 0,$$

т. е. требование III нашей леммы, предъявляемое к точке x_1, выполнено.

Во-вторых, из касания поверхности S и цилиндра Z в точке X_1 следует, что

$$u(x_1) = f(y_1), \qquad u_1(x_1) = f'(y_1). \tag{5}$$

Отсюда и из неравенства (1)

$$u_1(x_1) > \frac{1}{y_1} u(x_1).$$

Так как $y_1 \equiv x_1^1$, то это неравенство как раз и есть то, которое должно выполняться по требованию II нашей леммы.

Поверхность S касается цилиндра Z в точке X_1 и расположена над ним, из чего следует, что в точке x_1

$$d^2u \geq d^2f = f''(y_1)dy^2.$$

Стоит здесь положить $f''(y_1) = p$, $y = x^1$, как получим

$$d^2u \geq p(dx^1)^2. \tag{6}$$

Одновременно неравенство (2), с учетом второго равенства (5), дает

$$p > h(x_1^1)u_1(x_1). \tag{7}$$

Совокупность неравенств (6), (7) показывает, что требование I нашей леммы также выполнено. Таким образом, лемма доказана.

§ 2. Основная лемма о распространении нуля

1. Мы будем рассматривать определенные внутри области G (или U) операторы L

$$L(u) \equiv a^{ik}u_{ik} + b^i u_i + cu,$$

неизменно подразумевая без особых оговорок, что каждый раз речь идет о нигде не гиперболичном операторе.

В дальнейшем важную роль будет играть следующее свойство оператора L.

Определение 3. Пусть на границе области U, где задан оператор L, отмечена точка x_0. Пусть l — направление, идущее из x_0 внутрь U. Говорим, что оператор L не вырождается относительно точки x_0 и направления l, если после переноса начала в точку x_0 и поворота осей, направляющего ось x^1 по l, всюду в U оказываются выполненными следующие условия:

(A) $\quad b^1(x) \geq -h(x^1)a^{11}(x);$

(B) $\quad c(x) > -\max\left[\dfrac{h(x^1)}{x^1}a^{11}(x), \dfrac{b^1(x)}{x^1}\right],$

где h — некоторая функция с конечным интегралом (определение 2, § 1).

Условие (B) подразумевает, что либо

(B_1) $\quad c > -(h/x^1)a^{11}$, когда $b^1 \leq ha^{11}$; либо

(B_2) $\quad c > -b^1/x^1$, когда $b^1 > ha^{11}$, т. е., в частности, $b^1 > 0$.

Здесь, в частности, заключается требование, что если $a^{11} = 0$, то либо $b^1 > 0$ и $c > -b^1/x^1$, либо $b^1 = 0$ и $c > 0$.

То, что в условиях (A), (B) стоит одна и та же функция h, несущественно, так как если там стояли бы разные функции h_1, h_2, то, полагая $h = h_1 + h_2$, мы получили бы функцию с конечным интегралом, для которой было бы верно (A) и (B).

2. Докажем лемму, являющуюся следствием леммы 1, § 1 и служащую непосредственной основой всех дальнейших выводов.

Лемма 2. *Пусть для замкнутой области U и функции u выполнены условия леммы 1. Пусть, кроме того, внутри U задан оператор L, не вырождающийся относительно направления оси x^1 и начала x_0, где u касается нуля. Тогда внутри U есть точки, где $L(u) > 0$.*

Согласно определению, условие, что оператор L не вырождается относительно оси x^1 и начала, означает существование такой функции h с конечным интегралом, что всюду внутри U выполнены условия (A), (B).

Введем функцию

$$\overline{h}(x^1) = 2h(x^1). \tag{1}$$

Согласно лемме 1, внутри U существует хотя бы одна такая точка x_1, где

I) $d^2u \geq p(dx^1)^2, \quad p > \overline{h}(x_1^1)u_1(x_1);$

II) $u_1(x_1) > u(x_1)/x_1^1$, так что $px_1^1 > \overline{h}(x_1^1)u(x_1);$

III) $u_2(x_1) = \ldots = u_n(x_1) = 0.$

Покажем, что как раз в такой точке $L(u) > 0$.

3. Для этого оценим сначала величину $a^{ik}u_{ik}$ в точке x_1. Покажем прежде всего, что если $d^2u \geq d^2v$, то $a^{ik}u_{ik} \geq a^{ik}v_{ik}$.

В самом деле, если поворотом осей $(x^i) \to (y^i)$ привести матрицу $\|a^{ik}\|$ к каноническому виду, то будем иметь

$$a^{ik}u_{ik} = \sum \overline{a}^{ii}u_{y^iy^i}, \qquad a^{ik}v_{ik} = \sum \overline{a}^{ii}v_{y^iy^i}.$$

Так как все $\overline{a}^{ii} \geq 0$, то при $d^2u \geq d^2v$ отсюда следует, что $a^{ik}u_{ik} \geq a^{ik}v_{ik}$.

Теперь можно заметить, что по неравенству I $\;d^2u \geq p(dx^1)^2$. Поэтому, в силу доказанного утверждения,

$$a^{ik}u_{ik} \geq a^{11}p. \tag{2}$$

Далее, так как в точке x_1 $u_2 = \ldots = u_n = 0$, то

$$b^iu_i = b^1u_1. \tag{3}$$

В результате (2) и (3) получаем, что в точке x_1

$$L(u) \geq a^{11}p + b^1u_1 + cu. \tag{4}$$

4. Допустим теперь, что из условий (B_1), (B_2) в точке x_1 выполняется именно (B_1). Тогда (A) и (B_1) вместе с (4) дают

$$L(u) > a^{11}p - ha^{11}u_1 - \frac{h}{x_1^1}a^{11}u = a^{11}\left(p - hu_1 - \frac{h}{x_1^1}u\right). \tag{5}$$

Вследствие (1) и неравенств I, II, получаем

$$p > 2hu_1, \qquad p > \frac{2h}{x_1^1}u.$$

Поэтому из (5) следует, что $L(u) > 0$.

5. Допустим теперь, что в точке x_1 выполняется условие (B_2), так что

$$c > -\frac{b^1}{x_1^1}, \qquad b^1 \geq 0.$$

В таком случае из (4) следует

$$L(u) > a^{11}p + b^1\left(u_1 - \frac{u}{x_1^1}\right).$$

А так как, в силу II, $u_1 > u/x_1^1$ и $b^1 \geq 0$, то опять оказывается, что $L(u) > 0$. Лемма доказана.

6. Лемма 2 содержит, в частности, следующее утверждение.

Пусть область U, оператор L и функция u удовлетворяют всем условиям леммы 2, кроме того условия, что u касается нуля. Тогда, если всюду в U $L(u) = 0$, то u не может касаться нуля в точке x_0.

Здесь можно убедиться, что условия, налагаемые на оператор L, существенны.

Заметим прежде всего, что при $a^{11} > 0$ играют роль только отношения других коэффициентов к a^{11}, так как можно разделить оператор на a^{11}. Поэтому, в частности, при $a^{11} > 0$ всегда можно считать $a^{11} = 1$.

Рассмотрим условие, налагаемое на b^1, предполагая, вместе с тем, $a^{11} = 1$, $c = 0$. Тогда в случае одной переменной равенство $L(u) = 0$ сводится к уравнению

$$u'' + bu' = 0.$$

Это уравнение дает

$$u'(x_1) = u'(x)e^{\int_{x_1}^{x} b\,dx}.$$

Отсюда ясно, что если только $u' \not\equiv 0$, то при $x_1 \to 0$ $u'(x_1) \to 0$ тогда и только тогда, когда при $x_1 \to 0$

$$\int_{x_1}^{x} b\,dx \to -\infty,$$

т. е. когда условие (A) для коэффициента b не выполнено.

Таким образом, это условие необходимо и достаточно для того, чтобы всякое решение уравнения $u'' + bu' = 0$, касающееся нуля в точке $x = 0$, было тождественным нулем, если касание нуля понимается в том смысле, что при $x \to 0$ $u(x) \to 0$, $u'(x) \to 0$.

При нашем более общем понимании касания нуля, условие II для b^1, так же как условие III для c, конечно, не является необходимым, но данное замечание показывает, что они, так сказать, близки к необходимым.

§ 3. *Распространение нулей до границы области*

1. Теорема 1. *Пусть в области G заданы оператор L и функция u со следующими свойствами:*

1) *каждая точка $x_0 \in G$ имеет такую полуокрестность $V^+(x_0)$ — ту часть ее окрестности, где $x^1 > x^1_0$, что в $V^+(x_0)$ оператор L не вырождается относительно направления оси x^1 и точки x_0;*

2) *всюду в G $\quad L(u) \leq 0$, $u \geq 0$ и хоть где-нибудь в G $\quad u = 0$.*

Тогда множество нулей функции u имеет точки сгущения на границе Γ области G.

Мы докажем даже несколько более сильную теорему, ослабив подразумеваемое нами условие двукратной дифференцируемости функции u.

Теорема 1а. *Пусть в области G задан оператор L с условием* 1) *теоремы* 1 *и функция u со следующими свойствами:*

(A) *в каждой точке функция u полунепрерывна снизу и имеет пару производных чисел по x^1 справа и слева: u^+_1, u^-_1, связанных неравенством $u^+_1 \leq u^-_1$*[6]*;*

(B) *функция u дважды дифференцируема в каждой полуокрестности $V^+(x_0)$;*

(C) *в каждой такой полуокрестности $L(u) \leq 0$;*

(D) *всюду в G $\quad u \geq 0$ и хоть где-нибудь $u = 0$.*

Тогда точно так же множество нулей функции u имеет точки сгущения на границе области G.

Условия (A), (B) допускают, что u может быть даже разрывной на некоторых плоскостях $x^1 = \text{const}$. (Вместо полуокрестностей $V^+(x_0)$ можно рассматривать полуокрестности $V^-(x_0)$, где $x^1 < x^1_0$. Это соответствует перемене знака x^1 и соответственно нужно изменить неравенства, определяющие невырожденность оператора.)

2. Доказательство теоремы 1а. Пусть E — множество нулей функции u; по условию оно не пусто. Допустим, что E не имеет точек сгущения на Γ. Тогда оно, очевидно, замкнуто.

Поэтому существует такая плоскость P с уравнением $x^1 = a$, что E имеет с ней хотя бы одну общую точку, но лежит целиком в полупространстве $x^1 \leq a$. Можно, не нарушая условий теоремы, перенести начало в какую-либо точку $x_0 \in E \cap P$. Тогда плоскость P будет $x^1 = 0$ и E будет лежать в полупространстве $x^1 \leq 0$.

---

[6] Т. е. существуют такие последовательности $h_i \to +0$, $k_i \to -0$, что

$$\lim \frac{u(x^1 + h_i, x^2, \dots) - u(x^1, x^2, \dots)}{h_i} \leq \lim \frac{u(x^1 + k_i, \dots) - u(x^1, \dots)}{k_i}$$

не исключая, априори, для этих пределов бесконечные значения.

Пусть W — связная компонента пересечения $E \cap P$, содержащая точку x_0. Каждой точке $x \in W$ отвечает полуокрестность $V^+(x)$, в которой выполнены условия I, (B), (C). Ссылаясь на лемму Бореля, можно выбрать конечное число полуокрестностей $V^+(x_i)$ $(x_i \in W)$ так, что их сумма образует область U, грань которой на плоскости P (т. е. $\overline{U} \cap P$) будет содержать W внутри.

В замкнутой области $\overline{U}$ для оператора L и функции u выполнены все условия леммы 2.

В самом деле, из условия 1) и построения области U очевидно, что в ней оператор L не вырождается в направлении оси x^1 относительно точки x_0.

По условиям (A), (B), (D) функция u неотрицательна и полунепрерывна снизу в $\overline{U}$ и дважды дифференцируема внутри U. Кроме того, она положительна на $U \setminus W$. Далее, так как в любой точке $x_0 \in W$ $u(x_0) = 0$, а вообще $u \geq 0$, то ее правые и левые производные числа по x^1 в точке x_0 будут соответственно неотрицательными и неположительными: $u_1^+ \geq 0$, $u_1^- \leq 0$. Но по условию среди них есть связанные неравенством $u_1^+ \leq u_1^-$. Поэтому правая нижняя производная от u по x^1 будет равна нулю в точке x_0. Это значит, что u касается в этой точке нуля в направлении оси x^1.

Таким образом, здесь выполнены все условия леммы 2, а потому, согласно этой лемме, внутри U должны существовать точки, где $L(u) > 0$. Но это противоречит тому условию, что во всех V^+ $L(u) \leq 0$. Тем самым теорема Ia доказана.

3. Если функция u имеет непрерывные первые производные, а это заведомо так, если, как предположено в теореме I, она дважды дифференцируема, то из замечания, сделанного в конце предыдущего параграфа, следует, что условия, налагаемые на оператор L, так сказать, почти необходимы для утверждений наших теорем.

§ 4. *Обыкновенная точка границы*

1. Определение 4. Пусть в области G задан оператор L. Мы говорим, что точка x_0 на границе G обыкновенная (по отношению к G и L), если для всякой функции u, подчиненной неравенствам $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и касающейся нуля в точке x_0, в окрестности этой точки в области G заведомо должны существовать точки, где $u = 0$. Иначе говоря, точка обыкновенная, если для всякой функции $u > 0$, касающейся нуля в x_0, вблизи x_0 есть точки, где $L(u) > 0$. В противном случае точка x_0 — особая. Подразумевается, что речь идет о любых функциях, дважды дифференцируемых внутри G. Но можно дополнить определение указанием иного класса допустимых функций и тогда говорить об обыкновенной точке относительно данного оператора L и класса функций u.

Как было сказано во введении, занимающий нас вопрос состоит прежде всего в разыскании условий, при которых точка на границе области будет обыкновенной.

Некоторый ответ уже заключен в лемме 2. В самом деле, пусть в области G содержится полушар U, касающийся ее границы только в точке x_0, которая оказывается при этом центром полушара U. Пусть в G задан оператор L, не вырождающийся в U относительно точки x_0 в направлении, перпендикулярном плоскости, ограничивающей U. Из леммы 2 следует, что при этих условиях точка x_0 обыкновенная.

Конечно, граничная точка, которой можно так коснуться полушаром изнутри области, представляет редкое исключение. Но лемму 2 можно дополнить простым приемом, который позволяет дать гораздо более общие условия того, чтобы точка была обыкновенной.

Именно пусть в окрестности точки x_0 путем некоторого преобразования переменных $(x^i) \to (\overline{x^i})$ можно добиться того, что граница области окажется по одну сторону от какой-либо плоскости P, проходящей через x_0, не считая самой точки x_0, остающейся на P. Если после этого функция u будет по-прежнему касаться нуля в точке x_0, а преобразованный оператор $\overline{L}$ окажется невырождающимся относительно точки x_0 в направлении, перпендикулярном P, то мы сможем сослаться на лемму 2.

2. Применение указанного приема приводит, в частности, к следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть внутри какого-либо (квадратичного) параболоида с вершиной в начале и с осью на положительной полуоси x^1 задан оператор L, коэффициенты которого подчинены следующим условиям:*

$$(A) \quad \sum_{i=2}^{n} a^{ii} \le h_1(x^1)a^{11},$$

где h_1 — такая невозрастающая функция с конечным интегралом, что при $x^1 \to 0$, $x^1 h^1(x^1) \to 0$ [7]*;*

$$(B_1) \quad b^1 > -h(x^1)a^{11}, \qquad (B_2) \quad \sqrt{\sum_{i=2}^{n} |b^i|^2} \le h(x^1)a^{11}/\sqrt{x^1},$$

где h — невозрастающая функция с конечным интегралом;

$$(C) \quad c > -h(x^1)a^{11}/x^1.$$

Тогда вершина параболоида является обыкновенной точкой относительно L.

---

[7] Это последнее условие на функцию h_1 можно заменить более слабым: достаточно, чтобы $x^1 h_1(x^1)$ было достаточно малым. Именно, если данный параболоид содержит параболоид $x^1 = a\sum_{i=2}^{n}(x^i)^2$, то достаточно: $ax^1h_1(x^1) < 1-\varepsilon$ со сколь угодно малым, данным $\varepsilon > 0$.

Замечание. Если $a^{11} > a_0 = \mathrm{const} > 0$, то условия (A)–(C) достаточно налагать в таком виде, что в правых частях множитель a^{11} отсутствует.

В самом деле, если, например, $b^1 > -h$, где h имеет конечный интеграл, то вследствие $a^{11} > a_0$ оказывается, что

$$b^1 > -\frac{h}{a_0}a_0 > -\frac{h}{a_0}a^{11},$$

т. е. имеет место условие (B_1) с функцией h/a_0, которая, очевидно, также имеет конечный интеграл.

Заметим также, что при $a^{11} > \mathrm{const} > 0$, все условия (A)–(C) заведомо выполнены, если все коэффициенты ограничены.

Точно так же, как в лемме 2, то, что в неравенствах (B_1), (B_2), (C) стоит одна и та же функция h, несущественно.

3. Доказательство леммы 3. Пусть в параболоиде $\overline{P}$ задан оператор L с данными условиями. Построим параболоид P

$$x^1 = \frac{a}{2}\sum_{i=2}^{n}(x^i)^2 \qquad (x^1 \leq \mathrm{const}), \tag{1}$$

лежащий целиком внутри $\overline{P}$, кроме начала, где он касается P.

Произведем преобразование

$$\overline{x}^1 = x^1 - \frac{a}{2}\sum_{i=2}^{n}(x^i)^2, \qquad \overline{x}^2 = x^2, \ldots, \overline{x}^n = x^n. \tag{2}$$

Тогда параболоид P отобразится в плоскость $\overline{x}^1 = 0$, а внутренность $\overline{P}$ покроет некоторую полуокрестность начала, в которой $x^1 > 0$. Оператор L перейдет при этом в $\overline{L}$ и, в силу сделанного выше замечания, достаточно показать, что $\overline{L}$ не вырождается относительно оси x^1 и начала, т. е. что он удовлетворяет требованиям (A), (B), определения 3 при соответствующем выборе входящей туда функции с конечным интегралом.

Для этого оценим коэффициенты $\overline{a}^{11}$, $\overline{b}^1$, $\overline{c} = c$ оператора $\overline{L}$.

Выберем какую-либо точку в параболоиде P. Так как условия (A)–(C) инвариантны относительно вращения осей $x^2, \ldots, x^n$, то без ограничения общности можно считать, что в выбранной точке

$$x^2 \geq 0, \qquad x^3 = \ldots = x^n = 0. \tag{3}$$

Кроме того, так как выбранная точка лежит внутри параболоида (1), то

$$x^2 < \sqrt{\frac{2x^1}{a}}. \tag{4}$$

Известные формулы преобразования коэффициентов при преобразовании переменных (2) дадут, вследствие (3), следующее выражение для $\overline{a}^{11}$:

$$\overline{a}^{11} = a^{11} - 2aa^{12}x^2 + a^2a^{22}(x^2)^2.$$

В силу неотрицательности матрицы a^{ik}, $|a^{12}| < \sqrt{a^{11}a^{22}}$ и по условию (2) $x^2 \geq 0$.

Поэтому оказывается

$$\overline{a}^{11} \geq a^{11} - 2\sqrt{a^{11}a^{22}}ax^2 + a^{22}(ax^2)^2 = (\sqrt{a^{11}} - \sqrt{a^{22}}ax^2)^2.$$

А так как, вследствие условия (A), $a^{22} \leq h_1a^{11}$ и согласно (4) $ax^2 < \sqrt{2ax^1}$, то оказывается

$$\overline{a}^{11} \geq a^{11}(1 - \sqrt{2h_1ax^1}).$$

И наконец, поскольку при $x^1 \to 0 \quad h_1x^1 \to 0$, то при достаточно малых x^1 будет

$$\overline{a}^{11} \geq (1-\varepsilon)a^{11} \qquad (0 < \varepsilon = \mathrm{const} < 1). \tag{5}$$

4. Оценим коэффициент $\overline{b}^1$. Для него формулы преобразования с учетом (3) дают

$$\overline{b}^1 = b^1 - b^2ax^2 - a\sum_{i=2}^{n} a^{ii}.$$

Поэтому из условий (A), (B), (B_2) следует, что

$$\overline{b}^1 > -ha^{11} - ha^{11}\frac{ax^2}{\sqrt{x^1}} - h_1a^{11}a.$$

А так как, вследствие (4), $ax^2 < \sqrt{2ax^1}$, то

$$\overline{b}^1 > -a^{11}[(1+\sqrt{2a})h + ah_1].$$

Отсюда, вследствие (5), получаем

$$\overline{b}^1 = -\overline{a}^{11}h_2(x^1), \tag{6}$$

где

$$h_2 = \frac{1}{1-\varepsilon}\left[\left(1+\sqrt{2a}\right)h + ah_1\right]. \tag{7}$$

Но h и h_1, а стало быть, и h_2 — невозрастающие функции, а из формул (1) очевидно, что $x^1 \geq \overline{x}^1$, так что

$$h_2(x^1) \leq h_2(\overline{x}^1).$$

Поэтому (6) дает

$$\overline{b}^1 > -\overline{a}^{11} h_2(\overline{x}^1), \tag{8}$$

т. е. условие (A) определения 3 выполнено с функцией h_2, заданной формулой (7).

5. Оценим коэффициент $\overline{c}$. Так как $\overline{c} = c$, то условие (C) дает

$$\overline{c} > -\frac{h(x^1)}{x^1} a^{11}.$$

А так как $x^1 \geq \overline{x}^1$ и h — невозрастающая функция, то $h(x^1) \leq h(\overline{x}^1)$. Поэтому, принимая во внимание (5), получаем

$$\overline{c} > -\frac{h(\overline{x}^1)}{(1-\varepsilon)\overline{x}^1} \overline{a}^{11}, \tag{9}$$

т. е. условие (B_1) определения 3 выполнено с функцией $h/(1-\varepsilon)$. Лемма доказана.

6. Стоит отметить, что в лемме 3 не требуется, чтобы $a^{11} > \mathrm{const} > 0$, так что она применима и в том, например, случае, когда $a^{11} \to 0$ при $x^1 \to 0$. Посмотрим, что дают тогда условия леммы.

Предположим для простоты, что все коэффициенты ограничены, и пусть всюду внутри данного параболоида $a^{11} > 0$, но $a^{11} \to 0$ при $x^1 \to 0$.

Тогда, если a^{11} стремится к нулю быстрее $1/h_1(x^1)$ при любой h_1 со свойствами, указанными в условии (A), то необходимо все $a^{ii} \to 0$.

Допустим, что это не так, т. е. что хотя бы в некоторых точках, сколь угодно близких к началу,

$$\sum a^{ii} > A = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда из условия (A) следует, что

$$a^{11} > \frac{A}{h_1(x^1)},$$

т. е. в этом случае a^{11} стремится к нулю не быстрее, чем обратная величина некоторой функции с конечным интегралом.

С другой стороны, при ограниченности коэффициентов имеет место обратное утверждение.

Пусть все коэффициенты ограничены и существует такая невозрастающая функция $f(x^1)$ с конечным интегралом и с условием $x^1 f(x^1) \to 0$ при $x^1 \to 0$, что $a^{11} f(x^1) > \text{const} > 0$. Тогда условия (A)–(C) леммы 3 выполнены.

В самом деле, как нетрудно убедиться, для всякой функции $f(x^1)$ с указанными свойствами найдется такая функция $h(x^1)$ с теми же свойствами, что $h(x^1)/f(x^1) \to \infty$, так что при $a^{11} f(x^1) > \text{const}$ будет $a^{11} h(x^1) \to \infty$. А тогда при ограниченности всех a^{ii}, b^i, c очевидно, что для них условия (A)–(C) будут выполнены, если в них подставить такую функцию h.

Доказанное утверждение дает условия применимости принципа максимума на границе области, когда на границе оператор оказывается параболическим, так сказать, теряя эллиптичность также в направлении нормали.

То, что эти условия существенны, показывает пример функции $u = x(x - y^2)$. Она удовлетворяет уравнению $xu_{xx} + u_{yy} = 0$, положительна в области $x > y^2$ и касается нуля в точке $(0, 0)$. Здесь коэффициент при u_{xx} стремится к нулю быстрее, чем требует наше условие.

§ 5. *Распространение нулей вдоль линий эллиптичности*

1. Определение 5. Пусть в области G задан оператор L. Мы говорим, что кривая $C_0 \subset G$ есть его линия эллиптичности или что L эллиптичен вдоль C_0, если выполнено следующее условие. В некоторой окрестности каждой своей точки кривая C_0 может быть включена в гладкое семейство гладких кривых C, однозначно покрывающих эту окрестность, и таких, что касательные к ним лежат в плоскостях, определяемых главными направлениями матрицы a^{ik}, соответствующими собственным значениям, ограниченным снизу каким-либо положительным числом. Тем самым кривая C_0 сама должна быть гладкой и в каждой точке должна касаться плоскостей главных направлений, отвечающих собственным значениям, ограниченным снизу положительным числом (в окрестности каждой точки $x \in C_0$). Кроме того, каждая кривая C из указанного выше семейства сама оказывается линией эллиптичности.

В случае когда оператор строго эллиптичен, т. е. собственные значения матрицы $\|a^{ik}\|$ ограничены снизу положительным числом, любая гладкая кривая будет линией эллиптичности.

Если коэффициенты a^{ik} или только величины, определяющие плоскости «положительных» главных направлений матрицы $\|a^{ik}\|$, достаточно регулярны (например, удовлетворяют условию Липшица), то легко построить сколько угодно линий эллиптичности.

В самом деле, пусть $E^m(x)$ — плоскость, определенная независимыми главными направлениями, отвечающими собственным значениям матрицы $\|a^{ik}(x)\|$, бóльшим некоторого $\varepsilon > 0$. Возьмем в плоскости $E^m(x_0)$ какой-либо вектор и спроектируем его на все плоскости $E^m(x)$ в окрестности x_0. Отложив все эти векторы из соответствующих точек x, получим поле направлений, интегральные кривые которого будут, очевидно, линиями эллиптичности. Можно воспользоваться и другими построениями.

Теорема 2. *Пусть в области G задан оператор L с ограниченными коэффициентами*[8)] *и функции u с условиями: $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$. Тогда, если $u(x_0) = 0$ и оператор эллиптичен вдоль некоторой линии $C(x_0)$, то $u \equiv 0$ на $C(x_0)$.*

Здесь и дальше $C(x)$ обозначает линию эллиптичности, проходящую через точку x.

2. Докажем теорему 2.

Пусть E — множество нулей функции u. Допустим вопреки доказываемому, что оно не покрывает кривой $C_0 = C(x_0)$. Тогда на C_0 есть открытая дуга, где $u > 0$, но на одном из концов которой $u = 0$. Ничто не мешает принять этот конец за данную точку x_0.

Согласно определению 5, в некоторой окрестности точки x_0 кривая C_0 включается в семейство кривых C с соответствующими свойствами. Мы ограничимся пределами этой окрестности.

Семейство $\{C\}$, в частности, гладкое, поэтому существует гладкое преобразование $(x^i) \to (\overline{x}^i)$, переводящее его в семейство параллельных отрезков $\overline{C}$. Произведя такое преобразование, будем рассматривать отрезки $\overline{C}$, $\overline{C}_0$, в которые перешли кривые C, C_0.

Возьмем на отрезке $\overline{C}_0$ точку x_1, где $u > 0$. Вокруг x_1 можно описать шар K, в котором $u > \mathrm{const} > 0$.

Растягивая этот шар аффинно в направлении прямой x_0x_1 так, чтобы точка x_1 оставалась неподвижной, будем получать эллипсоиды с центром x_1. При этом одна из вершин эллипсоида движется к точке x_0. Поэтому в некоторый момент эллипсоид коснется множества E в какой-то точке x_2. В крайнем случае это может быть сама точка x_0.

Обозначим этот эллипсоид через $\overline{Q}$; внутри него $u > 0$. Очевидно, точка x_2 не лежит на его диаметральной плоскости, перпендикулярной прямой x_0x_1. Так как все отрезки $\overline{C}$ параллельны этой прямой, то в точке x_2 проходящий через нее отрезок $\overline{C}(x_2)$ не касается эллипсоида $\overline{Q}$, но заходит внутрь его.

[8)] Требование ограниченности коэффициентов можно ослабить, как будет показано в конце этого параграфа. Во всяком случае, очевидно, что достаточно их ограниченности во всякой замкнутой области $\overline{D} \subset G$.

3. Теперь, произведя обратное преобразование, вернемся к исходным кривым C. Так как преобразование гладкое, то эллипсоид $\overline{Q}$ перейдет в некоторое тело Q с гладкой поверхностью.

По той же причине кривая $C(x_2)$ не будет касаться тела Q в точке x_2, т. е. ее касательная в точке x_2 не лежит в касательной плоскости T тела Q, в точке x_2. Поэтому, вследствие гладкости семейства $\{C\}$, существует такая окрестность V точки x_2, что в ней касательные к кривым C образуют с плоскостью T углы, бо́льшие некоторого $\varepsilon > 0$.

Построим в V шар S, касающийся плоскости T в точке x_2 и имеющий центр внутри тела Q. Так как плоскость T — касательная к Q, то шар S можно взять столь малым, что в каждой точке его поверхности, лежащей вне Q, его касательная плоскость образует с T угол $< \varepsilon/2$.

Точка x_2 принадлежит множеству E, где $u = 0$. Возможно, что внутри шара S есть точки множества E. Но они все лежат вне Q, так как в Q $u > 0$.

Если внутри шара S есть точки множества E, то сдвинем его в направлении внутренней нормали к плоскости T так, чтобы он уже только касался множества E. Та точка x_3 на сдвинутом шаре S, которой он касается E, лежала до сдвига вне Q. Поэтому в ней касательная к шару S образует с плоскостью T угол $< \varepsilon/2$. Но в той же точке (по выбору окрестности V) проходящая через нее линия $C(x_3)$ образует с плоскостью T угол $> \varepsilon$. Поэтому она образует с поверхностью шара угол $> \varepsilon/2$.

Теперь, снова ссылаясь на гладкость семейства кривых C, можно взять такую окрестность W точки x_3, что в W все касательные к кривым C образуют с касательной к шару S в точке x_3 углы $> \varepsilon/4$. Они, стало быть, образуют с радиусом шара S, идущим в точку x_3, углы $< \alpha = \pi/2 - \varepsilon/4$.

4. Точка x_3 будет обыкновенной точкой поверхности шара S относительно оператора L.

В самом деле, во-первых, точки x_3 можно коснуться изнутри шара S некоторым параболоидом P с вершиной в точке x_3. Во-вторых, направив ось x^1 по нормали в точке x_3, будем иметь $a^{11} > \text{const} > 0$. Действительно, так выбранная ось x^1 идет по радиусу шара S из точки x_3, так что кривые C образуют с ней всюду углы $< \alpha < \pi/2$. По условию кривые C всюду касаются плоскостей «положительных» главных направлений матрицы $\|a^{ik}\|$. Среди этих направлений в каждой точке есть, следовательно, по крайней мере одно, образующее с осью x^1 угол $< \beta = \text{const} < \pi/2$. (Легко, конечно, явно оценить это β через α.) По условию каждому из указанных главных направлений отвечает собственное значение $> a = \text{const} > 0$.

Вместе с тем известно, что если ось x^1 образует с главными направлениями, отвечающими собственным значениям a_i, углы φ_i, то

$$a^{11} = \sum a_i \cos^2 \varphi_i.$$

Поэтому оказывается, что $a^{11} > a\cos^2\beta > 0$. А так как коэффициенты ограничены, то, в силу леммы 3 § 4, этого достаточно, чтобы вершина x_3 параболоида P была обыкновенной точкой.

Но $x_3 \in E$, так что в точке x_3 функция u касается нуля. Кроме того, по условию теоремы $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$. Поэтому в P есть точки, где $u = 0$. Это, однако, противоречит тому, что параболоид P лежит в шаре S, который только касается множества E, так что в нем должно быть $u > 0$.

Полученное противоречие показывает, что сделанное нами в начале предположение о том, что множество E не покрывает C_0, невозможно. Таким образом, наша теорема доказана.

5. Теорему 2 можно дополнить замечанием, касающимся распространения нуля функции u от границы Γ области G.

Будем говорить, что линия эллиптичности C_0 исходит из точки $x_0 \in \Gamma$, если $x_0 \in \overline{C}_0$, т. е. x_0 есть предельная точка C_0.

Пусть точка x_0 — обыкновенная по отношению оператора L, заданного в G. Пусть $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и касается нуля в точке x_0. Тогда, по самому определению обыкновенной точки, существуют точки $x_k \in G$ такие, что $u(x_k) = 0$ и $x_k \to x_0$. В этом случае согласно теореме 2 $u \equiv 0$ на линиях $C(x_k)$. Если из линий $C(x_k)$ можно выбрать последовательность, сходящуюся к какой-либо линии эллиптичности, то эта последняя будет, очевидно, линией, исходящей из x_0, и на ней также будет $u \equiv 0$.

Таким образом, мы получаем следующее дополнение к теореме 2.

Теорема 2а. *Если некоторая окрестность обыкновенной точки $x_0 \in \Gamma$ покрыта компактным семейством линий эллиптичности, то как только функция u с условиями $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ касается в x_0 нуля, так существует исходящая из x_0 линия эллиптичности, на которой $u \equiv 0$.*

6. В теореме 2, а следовательно и 2а, условие ограниченности коэффициентов можно заменить более слабым. А именно наложим на a^{ik}, b^i, c следующие условия:

1) для каждой точки $x_0 \in G$ существуют такая окрестность $U(x_0)$ и монотонная функция h с конечным интегралом, что для всякой $x \in U(x_0)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |b^i|^2} < h(|x - x_0|), \qquad c > -\frac{h(|x - x_0|)}{|x - x_0|}; \tag{1}$$

2) за исключением, может быть, некоторого множества «существенно особых» точек, не имеющего точек сгущения внутри G, для каждой точки x_0 существуют такая окрестность $U(x_0)$ и функция h_1 того же рода с дополнительным условием $yh(y) \to 0$ при $y \to 0$, что для всякой $x \in U(x_0)$

$$\sum_{i=1}^{n} a^{ii} < h_1(|x - x_0|). \tag{2}$$

Теорема 2б. *Теорема 2 имеет место также для оператора L, удовлетворяющего указанным условиям.*

Доказательство. Согласно поставленным условиям, мы имеем три рода точек $x \in G$:

1) «нормальные» точки, в окрестностях которых коэффициенты ограничены;

2) «особые» точки x, в окрестностях $U(x)$ которых выполнены неравенства (1), (2);

3) «существенно особые» точки x, в окрестностях $U(x)$ которых выполнены только неравенства (1).

В доказательстве теоремы 2 свойства коэффициентов L играли роль только в последнем пункте 4, когда было установлено, что вершина x_3 фигурирующего там параболоида P является обыкновенной точкой. При этом мы сослались на ограниченность коэффициентов. Поэтому, если точка x_3 «нормальная», то повторяется тот же вывод.

Аналогичное заключение можно сделать и в том случае, когда точка x_3 «особая».

В самом деле условия 1), 2), наложенные на коэффициенты, очевидно, инвариантны относительно ортогональных преобразований переменных. Значение же их состоит в следующем. Если при некотором выборе осей оказывается $a^{11} > \text{const} > 0$ в окрестности $U(x)$, то для любого параболоида P с вершиной в точке x и с осью, направленной по оси x^1, будут выполнены условия леммы 3, т. е. точка x будет обыкновенной в этом параболоиде.

Применяя это замечание к точке x_3 и параболоиду P, фигурирующему в п. 4 доказательства теоремы 2, убеждаемся, что вывод этого пункта сохраняется и в том случае, когда точка x_3 — «особая».

7. Остается рассмотреть «существенно особые точки». Для этого обратимся к началу доказательства теоремы 2. Оно начинается с выбора точки x_0, лежащей на линии C_0 и служащей концом открытой дуги, где $u > 0$; в самой точке x_0 $u = 0$.

Если точка x_0 сама не является существенно особой, то, как ясно из условия (2), у нее есть окрестность, вовсе не содержащая таких точек. Поэтому стоит лишь ограничиться такой окрестностью, как можно будет сослаться на проведенный уже вывод для нормальных и особых точек.

Остается допустить, что сама точка x_0 — существенно особая. Тогда в некоторой ее окрестности нет других существенно особых точек.

Теперь различаем две возможности: либо сколь угодно близко к x_0 есть точки множества E, где $u = 0$, не лежащие на линии C, либо таких точек нет.

Предположим, что имеет место первый случай. Так как вблизи x_0 линия C_0 входит в семейство линий эллиптичности, то, как легко убедиться, сколь угодно близко к x_0 найдутся точки x_1 со свойством, аналогичным свойству x_0, т. е. $u(x_1) = 0$ и вместе с тем x_1 будет концом такой открытой дуги линии $C_1 = C(x_1)$, на которой $u > 0$. Так как такая точка уже не будет существенно особой, то к ней приложимы предыдущие выводы. Поэтому, повторяя их, мы придем к тому же противоречию, которое привело нас к доказательству теоремы 2. Таким образом, первая из указанных выше возможностей исключается.

Предположим теперь, что имеет место вторая возможность: вблизи x_0 нет точек множества E, не лежащих на C_0.

Возьмем начало в точке x_0 и направим ось x^1 по касательной к линии C_0 в точке x_0 в ту сторону, где $u > 0$. Тогда окажется, что вблизи x_0 в области $x^1 \geq 0$ всюду $u > 0$, кроме точки x_0, где u касается нуля.

Мы оказываемся, следовательно, в условиях леммы 2 § 2. Из определяющего свойства линии эллиптичности ясно, что в рассматриваемой области $a^{11} > \mathrm{const} > 0$. Кроме того, выполнено условие (1), из которого, в силу $a^{11} > \mathrm{const} > 0$, следует, что $b^1 > -h(x^1)a^{11}$, $x^1 c > -h(x^1)a^{11}$ (может быть с другой функцией h). Таким образом, все условия леммы 2 выполнены и, применяя ее, мы приходим к выводу, что в рассматриваемой области должны быть точки, где $L(u) > 0$. Это противоречит основному условию теоремы, а потому рассматриваемый случай также невозможен.

Тем самым теорема 2б полностью доказана.

§ 6. *Принцип максимума*

1. Мы рассматриваем оператор L, заданный в области G. Если в следующих далее утверждениях свойства его коэффициентов не оговариваются явно, то подразумевается, что они удовлетворяют условиям п. 6, § 5. Впрочем, можно иметь в виду более простое условие: в каждой замкнутой подобласти $\overline{D} \subset G$ коэффициенты ограничены.

Определение 6. Мы говорим, что оператор L *эллиптически связен на множестве* $M \subset G$ или что M есть *множество его эллиптической связности*, если любые две точки x', $x'' \in M$ соединимы цепочкой линий эллиптичности, содержащихся в M. Такое множество M называется максимальным, если не существует множества $M' \supset M$, отличного от M, с тем же свойством.

Из этого определения и теоремы 2б § 5 непосредственно следует

Теорема 3. *Если в G заданы оператор L и функция u с условиями: $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$, $u(x_0) = 0$, то $u \equiv 0$ на множестве эллиптической связности, содержащем x_0.*

Отсюда же и из определения обыкновенной точки границы (определение 4 § 4) непосредственно вытекает

Теорема 4. *Если оператор L эллиптически связен на G, $L(u) \leq 0$, $u \geq 0$ и $u(x)$ касается нуля где-нибудь в G или в обыкновенной точке границы, то $u \equiv 0$ в G.*

Этой теореме можно придать форму принципа максимума:

Теорема 4а. *Пусть в области G задан эллиптически связный оператор L и функция $u(x)$ с условием: $L(u) \geq 0$, причем коэффициент c и $\sup u = m$ связаны неравенством $mc \leq 0$. Тогда $u(x)$ не может касаться m ни внутри, ни в обыкновенной точке границы, кроме того случая, когда либо $u \equiv 0$, либо $u \equiv m$, $c \equiv 0$.*

В самом деле из условий теоремы следует, что $m - u \geq 0$, а $L(m-u) = mc - L(u) \leq 0$. Поэтому, если $m - u$ касается нуля внутри или в обыкновенной точке границы, то по теореме 4 $m - u \equiv 0$. Но тогда $L(m-u) = 0$, т. е. $mc = L(u) \geq 0$. А так как $mc \leq 0$, то либо $m = 0$ и тогда $u \equiv 0$, либо $c \equiv 0$.

Аналогичную форму принципа максимума можно придать теореме 3.

Если c меняет знак, то при $m \geq 0$ теорема 4а относится к той подобласти D, где $c < 0$. Из теоремы 4а следует, что если $u \neq \mathrm{const}$, то u не может достигать своей верхней границы m не только внутри подобласти D, но и в обыкновенных точках ее границы. Сюда относится и та часть границы подобласти D, которая лежит внутри G.

2. Нашей задачей является дать хотя бы и более частные, но более конкретные формы теорем 3 и 4, указав условия эллиптической связности оператора L на G или на каких-либо множествах M.

Заметим прежде всего, что обобщая понятие линии эллиптичности, можно вполне аналогично определить *m-мерную поверхность эллиптичности оператора L* как поверхность S, каждая точка которой имеет окрестность U со следующими свойствами: в пределах U поверхность S принадлежит гладкому, однозначно покрывающему U семейству гладких поверхностей, касательные плоскости которых содержатся в плоскостях, определяемых главными направлениями матрицы $\|a^{ik}\|$, отвечающими собственным значениям, бóльшим какого-либо положительного числа.

Поверхность эллиптичности оператора есть, очевидно, множество его эллиптической связности, а потому из теоремы 3 вытекает следующее обобщение теоремы 2б.

Теорема 5. *Если $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$, $u(x_0) = 0$ $(x_0 \in G)$, то $u \equiv 0$ на всякой поверхности эллиптичности оператора L, проходящей через точку x_0.*

Эта теорема, очевидно, содержит цитированную во введении теорему Ниренберга, а стало быть, и теорему Хопфа.

При этом теорему Ниренберга можно, очевидно, обобщить, не требуя распадения формы $a^{ik}\xi_i\xi_k$ на сумму двух форм. Достаточно, чтобы в каждой точке x_0 плоскость, определенная «существенно положительными» главными направлениями матрицы $\|a^{ik}\|$, содержала плоскость $x^{m+1} = x_0^{m+1}, \ldots, x^n = x_0^n$. При этом под «существенно положительными» главными направлениями понимаются те, которые отвечают собственным значениям, ограниченным снизу положительным числом в каждой замкнутой подобласти $\overline{D} \subset G$. При такой формулировке не требуется и непрерывности коэффициентов оператора.

Теорему 5 можно дополнить рассмотрением случая, когда u касается нуля в обыкновенной точке границы, подобно тому как теорема 2а дополняет теорему 2. Один частный случай такого дополнения будет указан ниже.

3. Для общего исследования множества эллиптической связности введем следующее определение.

Определение 7. Будем называть *m-направлением эллиптичности* оператора L (в точке x) m-мерное направление, заключающееся в плоскости, определяемой главными направлениями матрицы $\|a^{ik}\|$ (в точке x), соответствующими ее положительным собственным значениям. В частности, такое m-направление может совпадать с этой плоскостью.

Пусть в каждой точке $x \in G$ имеется m-направление эллиптичности $E^m(x)$ и пусть для каждой замкнутой подобласти $\overline{D} \subset G$ собственные значения матрицы $\|a^{ik}\|$, упомянутые в определении $E^m(x)$, больше некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда мы говорим, что имеется поле m-направлений (строгой) эллиптичности оператора L. Поле подразумевается достаточно гладким; степень его гладкости будет сейчас уточнена.

Кстати, интегральные поверхности такого поля (если они существуют) суть поверхности эллиптичности.

Поле m-направлений может быть задано m векторными полями $x_1, \ldots, x_m$. Каждому вектору x_i с составляющими $\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n$ сопоставим оператор

$$x_i = \xi_i^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \xi_i^n \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Траекторией оператора называется интегральная кривая соответствующего векторного поля, т. е. кривая, определяемая дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx^1}{dt} = \xi_i^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \frac{dx^n}{dt} = \xi_i^n(x^1, \ldots, x^n).$$

В случае поля m-направлений эллиптичности эти траектории суть линии эллиптичности.

П. К. Рашевский [4] доказал следующую теорему: *Если среди операторов $x_1, \ldots, x_m$ и составленных из них последовательным применением скобок Пуассона можно указать n операторов, линейно независимых в любой точке* *области G, то каждые две точки x', $x'' \in G$ соединимы цепочкой траекторий операторов $x_1, \dots, x_m$.* При этом, конечно, подразумевается, что векторные поля x_i дифференцируемы достаточное число раз. Легко видеть, что во всяком случае достаточно их $(n-m)$-кратной дифференцируемости.

Из указанной теоремы непосредственно вытекает интересующее нас условие эллиптической связности оператора L.

Теорема 6. *Пусть оператор L таков, что для него существует поле m-направлений эллиптичности, которое можно задать m достаточно гладкими векторными полями $x_1, \dots, x_m$. Если среди соответствующих операторов $x_1, \dots, x_m$ и составленных из них последовательными применениями скобок Пуассона найдется n операторов, линейно независимых в любой точке области G, то оператор эллиптически связен на G и даже на каждой подобласти $U \subset G$.*

В простейшем случае речь может пойти о поле m-направлений, определяемых всеми главными направлениями матрицы $\|a^{ik}\|$, отвечающими положительным собственным значениям. Впрочем, может случиться, что такое поле имеет особенности, тогда как можно определить другое поле m-направлений эллиптичности, допускающее применение условий теоремы.

4. Если среди операторов $x_1, \dots, x_m$ и составленных из них последовательными применениями скобок Пуассона имеется в каждой точке области $U \subset G$ только $l < n$ линейно независимых операторов $Y_1, \dots, Y_l$, то, как известно, эти последние определяют вполне интегрируемую систему. В таком случае, по крайней мере в каждой достаточно малой подобласти $V \subset U$, существует семейство l-мерных интегральных поверхностей поля $Y_1, \dots, Y_l$. Касательные плоскости этих поверхностей S содержат m-направления, определяемые векторами $x_1, \dots, x_m$, причем они являются поверхностями наименьшего числа измерений с указанным свойством.

Из этого замечания следует, в частности, что условия теоремы 6, «вообще говоря», равносильны тому, что поле m-направлений эллиптичности оператора L вполне неголономно, т. е не допускает существования поверхностей, касательные плоскости которых содержат эти m-направления. Конечно, это верно лишь постольку, поскольку мы считаем, что операторы Y_i в области U «вообще говоря» либо линейно зависимы, либо линейно независимы в каждой точке $x \in U$. Теорему 6 можно несколько обобщить, допуская линейную зависимость фигурирующих там операторов на некоторых множествах, например на таких множествах без внутренних точек, исключение которых из области G не ведет к нарушению ее связности.

С другой стороны, если мы имеем в каждой точке l независимых операторов $Y_1, \dots, Y_l$, указанных выше, то на каждой поверхности S оказываются выполненными условия теоремы Рашевского. На такой поверхности определены операторы $x_1, \dots, x_m$, причем среди них и операторов, получаемых последовательным применением скобок Пуассона, есть как раз l линейно независимых в каждой точке $x \in S$.

Таким образом, мы получаем следующее обобщение теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть для оператора L существует поле m-направлений эллиптичности, которое можно задать m достаточно гладкими векторными полями $x_1, \ldots, x_m$. Если среди соответствующих операторов $x_1, \ldots, x_m$ и составленных из них последовательными применениями скобок Пуассона найдется равно l операторов, линейно независимых в каждой точке области $U \subset G$, то соответствующие l-мерные интегральные поверхности будут множествами эллиптической связности оператора L.*

В этом случае, когда скобки Пуассона операторов $x_1, \ldots, x_m$ линейно с ними зависимы, то поле m-направлений эллиптичности голономно и его интегральные поверхности представляют тогда поверхности эллиптичности оператора L. Поэтому при соответствующих условиях регулярности теорема 5 оказывается только простейшим частным случаем теоремы 7.

5. В согласии с общепринятой терминологией, будем говорить, что поле m-направлений $E^m(x)$ расслоено семейством l-мерных поверхностей S, если это семейство однозначно покрывает рассматриваемую область и в каждой ее точке x касательная плоскость поверхности S (в этой точке) содержит m-направление $E^m(x)$. Здесь допускается, что число измерений направлений поля меняется от точки к точке.

Теорема 8. *Пусть оператор L, заданный в области G, таков, что поле m-направлений, определяемых всеми положительными главными направлениями матрицы $\|a^{ik}\|$ (т. е. теми, которые отвечают положительным собственным значениям), расслаивается гладким семейством гладких поверхностей S. Тогда всякое множество, на котором этот оператор эллиптически связен, содержится в одной из поверхностей S.*

Доказательство. При условиях теоремы, всякая линия эллиптичности в каждой своей точке касается поверхности S. Поэтому из гладкости семейства этих поверхностей, очевидно, следует, что каждая линия эллиптичности целиком лежит в какой-либо из поверхностей. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Эта теорема, очевидно, показывает, что условия теорем 6, 7, оказываются в известном смысле не только достаточными, но и необходимыми для эллиптической связности оператора на соответствующих поверхностях или в целой области.

Допустим, например, что коэффициенты оператора аналитичны. Тогда, исключая «особые» точки, образующие, может быть, некоторые поверхности, мы будем иметь в остальной части области следующую ситуацию. Число m положительных собственных значений матрицы $\|a^{ik}\|$ будет здесь всюду одно и то же и соответственно мы будем иметь поле m-направлений эллиптичности. Для этого поля всюду будут иметь место либо условия теоремы 7, либо теоремы 8. В первом случае поле расслаивается поверхностями S, на которых, в силу теоремы 7, оператор эллиптически связен, в силу же теоремы 8, всякое множество эллиптической связности будет содержаться в одной из таких поверхностей. Таким образом, эти поверхности и только они представляют собой максимальные множества эллиптической связности оператора L.

6. Согласно теореме 3, нули функции u с условиями: $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$, распространяются на множества эллиптической связности оператора L. Вместе с тем оказывается, что поскольку это зависит от коэффициентов a^{ik}, ничего большего, вообще говоря, и нельзя утверждать. Это показывает следующая

Теорема 9. *Пусть в области G задано поле матрицы (тензора) $\|a^{ik}\|$. Пусть поле m-направлений, определяемых всеми положительными главными направлениями этой матрицы, расслаивается дважды дифференцируемым семейством $\{S\}$ дважды дифференцируемых поверхностей S. Фиксируем любую поверхность $S_0 \in \{S\}$ и точку $x_0 \in S_0$. Тогда в некоторой окрестности U этой точки можно определить функцию $u(x)$, а также n функций $b^i(x)$ так, что, во-первых, всюду в U $u \geq 0$ и только на S_0 $u = 0$, а во-вторых, $a^{ik}u_{ik} + b^iu_i = 0$ в U.* (Если поверхность S есть плоскость, то можно выбрать $u(x)$ так, что она удовлетворяет просто уравнению $a^{ik}u_{ik} = 0$.)

Доказательство. Вследствие регулярности семейства поверхностей S, его можно, по крайней мере в некоторой окрестности U точки x_0, отобразить соответственно регулярным преобразованием в семейство параллельных плоскостей. Пусть новые координаты x^i выбраны так, что эти плоскости P задаются уравнениями: $x^{l+1} = \text{const}, \ldots, x^n = \text{const}$. Так как все положительные главные направления матрицы $\|a^{ik}\|$ касались поверхностей S, то после преобразования аналогичное верно в отношении плоскостей P. Поэтому, обозначая преобразованные коэффициенты также через a^{ik}, будем иметь, что как только хотя бы один из индексов i, k больше l, так $a^{ik} \equiv 0$. Пусть выбранная поверхность S_0 перешла в плоскость P_0, которую, не ограничивая общности, можно считать плоскостью $x^{l+1} = \ldots = x^n = 0$. Тогда определим функцию $u = (x^{l+1})^2 + \ldots + (x^n)^2$. Она обращается в нуль только на P_0 и в остальном положительна. Кроме того, из отмеченного свойства коэффициентов a^{ik} очевидно, что $a^{ik}u_{ik} = 0$.

Если теперь обратным преобразованием вернуться к исходным координатам и соответственно поверхностям S, то получим функцию $u \geq 0$ в U и равную нулю только на S_0. При преобразовании в уравнении $a^{ik}u_{ik} = 0$ появятся, вообще говоря, первые производные u_i и соответственно коэффициенты b^i, так что функция u в исходных координатах будет удовлетворять уравнению $a^{ik}u_{ik} + b^iu_i = 0$, что и требовалось доказать.

На этом наше исследование распространения нулей функции u с условиями $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$, поскольку оно определяется коэффициентами a^{ik} и идет из внутренней точки области, в основном заканчивается. Далее речь может идти о роли коэффициентов b^i, c или об исследовании особых случаев, включая особенности коэффициентов a^{ik}.

§ 7. *Принцип максимума в замкнутой области*

1. В этом параграфе мы приведем некоторые теоремы относительно распространения нулей от границы Γ области G.

Довольно широкие условия того, чтобы точка $x \in \Gamma$ была обыкновенной (определение 4 § 4), даются леммой 3 § 4. Соединяя эти условия с теоремой 4 § 6, можно соответственно конкретизировать эту теорему. Ограничимся, ради простоты, случаем ограниченных коэффициентов. Тогда соединение теоремы 4 с леммой 3 приводит к следующему результату.

Теорема 10. *Пусть в области G заданы оператор L с ограниченными коэффициентами, эллиптически связный в G, а также функция $u(x)$ с условиями $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$. Пусть точка $x_0 \in \Gamma$ такова, что* 1) *ее можно коснуться изнутри G каким-либо шаром K и* 2) *при направлении оси x^1 из x_0 в центр этого шара оказывается, что в K $a^{11} > \text{const} > 0$. Тогда, если в точке x_0 $u(x)$ касается нуля в направлении, идущем внутрь шара K, то $u \equiv 0$ в G.*

Отметим, между прочим, что какова бы ни была граница области, множество точек, где ее можно коснуться изнутри G каким-либо шаром, всюду плотно.

Если точки x_0 можно коснуться изнутри G некоторым шаром K, то ее можно коснуться и параболоидом, содержащимся в G. Таким образом, такая точка при указанном условии относительно коэффициента a^{11} и при условии ограниченности всех прочих коэффициентов оказывается, в силу леммы 3, обыкновенной.

Так как функция u касается нуля в направлении, идущем внутрь шара K, то тем самым внутри K, т. е. внутри G, существуют точки, где $u = 0$. Поэтому из теоремы 4 следует, что $u \equiv 0$ в G.

Если, полагая [9] $u(x_0) = 0$, мы получим, что u дифференцируема в точке x_0 (например, если u непрерывна вместе с первыми производными в точке x_0), то касание нуля сводится к условию $u_1(x_0) = \ldots = u_n(x_0) = 0$. Тогда оговорка о направлении, в котором u касается нуля, становится лишней.

Простейший и вместе с тем важный для приложений случай теоремы 10 получаем, когда оператор L не только имеет ограниченные коэффициен-

---

[9] Предполагается, что $u(x)$ определена внутри G, так что, полагая $u(x_0) = 0$, мы доопределяем ее в точке $x_0 \in \Gamma$.

ты, но и строго эллиптичен в G, т. е. когда всюду в G $\quad a^{ik}\xi_i\xi_k > a\sum\xi_i^2$, $a = \text{const} > 0$. Тогда условие эллиптической связности, так же как условие относительно коэффициента a^{11} в теореме 10, выполнено само собой. Кроме того, если в точке x_0 граница области имеет конечную кривизну, то, во-первых, такой точки можно коснуться шаром, а во-вторых, всякое направление, идущее из x_0 внутрь области, идет тогда внутрь такого шара. Поэтому в данном случае все оговорки в теореме 10 оказываются лишними.

В результате мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 10а. *Пусть в области G заданы строго эллиптический оператор L с ограниченными коэффициентами и функция $u(x)$ с условиями $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$. Тогда, если $u(x)$ касается нуля где-нибудь внутри области или в такой точке границы, где эта последняя имеет конечную кривизну, то $u \equiv 0$ в G.*

2. Рассмотрим еще встречающийся в приложениях пример оператора, эллиптического внутри G, но вырождающегося на границе. Речь идет о самосопряженном операторе вида

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(aa^{ik}\frac{\partial u}{\partial x^k}\right)$$

или о более общем операторе

$$L(u) = aa^{ik}u_{ik} + \overline{a}^{ik}a_iu_k + a(b^iu_i + cu), \tag{1}$$

где a_i — производные от a.

Допустим, что все коэффициенты a, $a^{ik}, \ldots, c$ ограничены,

$$\sum a^{ik}\xi_i\xi_k > a_0\sum\xi_i^2, \qquad a_0 = \text{const} > 0, \tag{2}$$

$$\sum \overline{a}^{ik}\xi_i\xi_k > a_0\sum\xi_i^2 \tag{2a}$$

и во всякой замкнутой подобласти $\overline{D} \subset G$ $\quad a > \text{const} > 0$.

Теорема 11. *Пусть в области G определен оператор L вида* (1) *с указанными свойствами. Пусть в окрестности точки $x_0 \in \Gamma$ граница дважды непрерывно дифференцируема, а коэффициент a непрерывно дифференцируем. Тогда, если в x_0 $a = 0$, но $\operatorname{grad} a \neq 0$ и заданная в G функция u с условиями $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ касается в x_0 нуля, то $u \equiv 0$ в G.*

(Кстати, если граница области определена условием $a = 0$ и a дважды непрерывно дифференцируем в $G \cup \Gamma$, то граница заведомо дважды дифференцируема в окрестности точки, где $\operatorname{grad} a \neq 0$.)

Доказательство. Так как вблизи точки x_0 $\quad\Gamma$ регулярна, то существует регулярное преобразование, в результате которого точка x_0 окажется началом координат, вблизи нее $\Gamma \setminus \{x_0\}$ будет лежать в полупространстве $x^1 < 0$, а в полупространстве $x^1 > 0$ будет $a > 0$. Иными словами, мы будем иметь полушар U с центром x_0, причем ось x^1 идет из x_0 в полюс полушара U, и внутри полушара определен (преобразованный) оператор L. Но вид оператора (1) инвариантен относительно преобразований координат. Поэтому в U оказывается определенным оператор того же вида (1) или, если разделить его на a, то (сохраняя для преобразованного оператора те же обозначения) получим оператор

$$L(u) = a^{ik}u_{ik} + \overline{a}^{ik}\frac{a_i}{a}u_k + b^i u_i + cu. \tag{3}$$

Так как в полушаре U $a > 0$, а в точке x_0 $a = 0$ и $\operatorname{grad} a \neq 0$, то в x_0 $\operatorname{grad} a$ направлен по радиусу, идущему в полюс полушара, т. е. по оси x^1. Поэтому вблизи x_0 оказывается $a_1 > \mathrm{const} > 0$ и вместе с тем для $i > 1$ $a_i \to 0$ при приближении к x_0. Поэтому, а также вследствие условия (2а) и ограниченности b^i, вблизи x_0 оказывается

$$\overline{b}^1 = \overline{a}^{i1}\frac{a_i}{a} + b^1 > 0. \tag{4}$$

Наконец, из условия (2) следует, что $a^{11} > \mathrm{const} > 0$.

Все сказанное означает, что в достаточно малом полушаре выполнены условия леммы 2 § 2: хотя коэффициент при u_1 в операторе (3) стремится в бесконечность при приближении к точке x_0, тем не менее он положителен [10)].

Поэтому, если бы внутри U было $u > 0$, то по лемме 2 в U существовали бы точки, где $L(u) > 0$. Но по условию $L(u) \leq 0$, а потому внутри U, т. е. внутри G, есть точки, где $u = 0$. А тогда, применяя хотя бы теорему 10а, получаем, что $u \equiv 0$ в G. Теорема доказана.

3. Рассмотрим еще пример, относящийся к оператору L со следующими свойствами.

Пусть существует семейство таких m-мерных плоскостей P $x^{m+1} = \mathrm{const}, \ldots, x^n = \mathrm{const}$, что в каждой точке $x \in G$ такая плоскость представляет собой некоторое m-направление эллиптичности оператора L (определение 7 § 6). Допустим, что таким путем определяется поле m-направлений строгой эллиптичности в $G \cup \Gamma$. Под этим подразумевается, что собственные значения, фигурирующие в определении такого поля (определение 7 § 6) ограничены снизу одним и тем же положительным числом всюду в G. В частности, это имеет место, если всюду в G форма $a^{ik}\xi_i\xi_k$ представима

[10)] По лемме 2 требуется, чтобы было $\overline{b}^1 > -ha^{11}$, где h — функция с конечным интегралом. Поэтому ограниченность коэффициентов $\overline{a}^{ik}$, b^i можно даже заменить соответствующим ограничением их роста.

в виде

$$a^{ik}\xi_i\xi_k = \sum_{i,k=1}^{m} a^{ik}\xi_i\xi_k + \sum_{i,k=m+1}^{n} a^{ik}\xi_i\xi_k, \tag{5}$$

где

$$\sum_{i,k=1}^{m} a^{ik}\xi_i\xi_k > a_0 \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2, \qquad a_0 = \text{const} > 0. \tag{5a}$$

Теорема 12. *Пусть оператор L в области G удовлетворяет указанным условиям. Пусть функция $u(x)$ с условиями $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ касается нуля в точке $x_0 \in \Gamma$, где Γ имеет конечную кривизну. Тогда, если плоскость $P(x_0)$: $x^{m+1} = x_0^{m+1}, \ldots, x^n = x_0^n$ не касается Γ в точке x_0, то $u \equiv 0$ на той связной компоненте пересечения $G \cap P(x_0)$, замыкание которой содержит x_0* [11].

Доказательство. Направим ось x^1 по внутренней нормали к Γ в точке x_0. Тогда, так как плоскость $P(x_0)$ не касается Γ и вдоль плоскостей P оператор строго эллиптичен, вблизи x_0 будет $a^{11} > \text{const} > 0$. Кроме того, по условию все коэффициенты ограничены и точки x_0 можно коснуться изнутри G вершиной параболоида. Следовательно, согласно лемме 3 § 4, точка x_0 — обыкновенная.

Поэтому вблизи нее есть точки $x_1 \in G$, где $u = 0$. По теореме 5 § 6 $u \equiv 0$ на связной компоненте пересечения $G \cap P(x_1)$, содержащей любую такую точку x_1. А так как такие точки есть сколь угодно близко к x_0, то существует последовательность плоскостей $P(x_1)$, сходящаяся к плоскости $P(x_0)$. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Можно, используя лемму 3, дать другие варианты подобных утверждений, аналогично, например, теореме 10 и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // Sitzungsberichte Akad. Berlin. 1927. S. 147–152.
2. *Nirenberg L.* A strong maximum principle for parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1953. V. 6, No. 2. P. 167–177.
3. *Александров А. Д.* Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка // Вестн. ЛГУ. 1954. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 3–17.
4. *Рашевский П. К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Московского пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-матем. 1938. Т. 2. С. 83–94.

[11] Может случиться, что вблизи точки x_0 Γ является как бы разрезом области G. Тогда к x_0 могут подходить две компоненты пересечения. (Например, G может быть кругом $x^2 + y^2 < 1$ с разрезом по радиусу $x = 0$, $y > 0$, а плоскости P могут быть прямыми, параллельными оси x.) В таком случае имеется в виду та из компонент, со стороны которой u касается нуля.

Исследования о принципе максимума. II

Известия высших учебных заведений. Математика. 1959. № 3. С. 3–12

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1][1)]. Так же как там, мы рассматриваем в области G изменения переменных $x_1, \ldots, x_n$, дважды дифференцируемые функции u и оператор

$$L(u) = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu$$

с условием, что матрица $\|a_{ik}\|$ нигде не имеет отрицательных собственных значений. Кроме того, мы предположим здесь, что все коэффициенты ограничены во всякой замкнутой области, содержащейся в G.

Пусть всюду в G $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и какой-либо точке $X_0 \in G$ $u = 0$. Задача состоит в том, чтобы выяснить на какое множество $M \subset G$ распространяются тогда нули функции u, т. е. на каком M можно гарантировать $u = 0$.

В той мере, в какой это зависит от коэффициентов a_{ik}, вопрос решен в [1]. Там же во введении были высказаны теоремы VIII, IX о роли коэффициентов b_i, c. В этих формулировках допущена ошибка: теорема IX [2)] неверна.

Здесь мы докажем первую часть теоремы VIII, формулируемую ниже как теорема 1 и показывающую роль коэффициентов b_i в распространении нулей функции u. Далее мы докажем теорему (теорема 4 § 3), показывающую, что, в известном смысле, теорема 1 дает, по крайней мере локально, окончательный результат о распространении нулей в зависимости от коэффициентов b_i, c. Этим будет доказана вторая часть теоремы VIII и одновременно опровергнута теорема IX, говорившая о влиянии на распространение нулей коэффициента c.

[1)] Во введении к [1] был дан общий план наших публикаций о принципе максимума. Часть материала, намеченного по этому плану для данной второй статьи, мы переносим в отдельную третью статью.

[2)] См. с. 459 настоящего издания. — *Прим. ред.*

Таким образом, вместе с результатами работы [1] мы получим полное представление о распространении нулей функции u с условиями: $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$, по крайней мере локально и при некоторых достаточно широких предположениях о коэффициентах оператора L.

§ 1. *Теорема 1*

1. Введем некоторые условия.

(A) Предположим, что у оператора L все коэффициенты a_{ik} хотя бы с одним индексом, большим данного $m < n$, обращаются всюду в нуль.

(B) При условии (A) обозначим $P(X)$ содержащую точку X связную компоненту пересечения плоскости $x_{m+1} = \text{const}, \ldots, x_n = \text{const}$ с областью G. Предположим, что для каждого множества P выполнены условия, обеспечивающие то, что при $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ из $u(X_0) = 0$ следует $u \equiv 0$ на $P(X_0)$. Такие условия для коэффициентов a_{ik} содержатся в теоремах 3, 6 работы [1].

(C) Коэффициенты $b_{m+1}, \ldots, b_n$ оператора L определяют в каждой точке X вектор $b(X)$, перпендикулярный $P(X)$.

Предположим, что поле векторов $b(X)$ непрерывно или, по крайней мере, поле их направлений непрерывно.

Будем называть *b-линией* интегральную кривую поля $b(X)$, если в некоторой окрестности каждой ее точки $|b(X)| > \text{const} > 0$ и она может быть включена в гладкое семейство таких же интегральных кривых, однозначно покрывающих указанную окрестность. В понятие b-линии мы включаем то, что она ориентирована согласно направлению вектора b. (Если вектор b удовлетворяет условию Липшица, то через каждую точку X, где $b(X) \neq 0$, проходит, и при том единственная, b-линия.)

Теорема 1. *Пусть для оператора L выполнены условия* (A)–(C) *и пусть всюду в G $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$. Тогда, если $u(X_0) = 0$, то $u \equiv 0$ на каждом множестве P, достижимом от $P(X_0)$ по b-линиям, исходящим из точек $X \in P(X_0)$ и проходимым в направлении их ориентации. Короче говоря, нули функции u распространяются вдоль b-линий.*

2. Доказательство основано на двух леммах.

Лемма 1. *Пусть в области U, ограниченной со стороны меньших x_n «параболоидом» Q:*

$$x_n = a \sum_{i=1}^{m} x_i^p + \overline{a} \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2 \qquad (p > 2,\ a > 0,\ \overline{a} > 0), \tag{1}$$

задан оператор L с условием (A) *и коэффициентом $b_n > \text{const} > 0$. Пусть в замкнутой области $\overline{U}$ задана такая функция u, что $u > 0$ всюду в $\overline{U}$, кроме начала, где она касается нуля (что достаточно понимать в том смысле, что $du = 0$). Тогда в U есть точки, где $L(u) > 0$.*

Доказательство. Произведем преобразование:

$$\overline{x}_n = x_n - a\sum_{i=1}^{m} x_i^p - \overline{a}\sum_{i=m+1}^{n} x_i^2 \qquad (\overline{x}_1 = x_1, \dots, \overline{x}_{n-1} = x_{n-1}). \tag{2}$$

В результате параболоид Q отобразится в плоскость $\overline{x}_n = 0$, а область $\overline{U}$ перейдет в область V, лежащую в полупространстве $\overline{x}_n > 0$ и прилегающую к плоскости $\overline{x}_n = 0$ целой гранью, содержащей внутри начало O.

Функция u перейдет в функцию $\overline{u}(\overline{x}, \dots, \overline{x}_n)$, также касающуюся нуля в O.

Оператор L перейдет в оператор $\overline{L}$. Для его коэффициента $\overline{b}_n$, в силу преобразования (2) и условия (A), будем иметь следующее выражение:

$$\overline{b}_n = b_n - pa\sum_{i=1}^{m} b_i x_i^{p-1} - 2\overline{a}\sum_{i=m+1}^{n} b_i x_i - p(p-1)a\sum_{i=1}^{m} a_{ii} x_i^{p-2}.$$

Отсюда, в силу того что в U $\quad b_n > \text{const} > 0$, следует, что достаточно близко к началу

$$\overline{b}_n > \text{const} > 0. \tag{3}$$

Кроме того, при достаточно малых x_n

$$\overline{x}_n\overline{c} + \overline{b}_n > 0 \qquad (\overline{c} = c). \tag{4}$$

Неравенства (3), (4) вместе со свойствами области V и функции $\overline{u}$ означают, что мы находимся в условиях основной леммы 2 работы [1]. Из этой леммы следует, что в V есть точки, где $\overline{L}(\overline{u}) > 0$. Им отвечают в исходной области U точки, где $L(u) > 0$, чем наша лемма доказана.

3. Лемма 2. *Пусть в области W, однозначно покрытой гладким семейством $\{C\}$ гладких ориентированных кривых C, задано замкнутое (относительно W) множество E. Пусть из некоторой точки X_0 на его границе исходит дуга C_0' кривой $C_0 \in \{C\}$, так что $C_0' \subset W \setminus E$ и точка X_0 является началом дуги C_0' в смысле данной на ней ориентации. Тогда сколь угодно близко к X_0 существует точка X_1, которой можно коснуться из $W \setminus E$ некоторым шаром S, причем кривая $C_1 \in \{C\}$, проходящая через X_1, не касается в X_1 поверхности шара и идет внутрь него (в смысле данной на ней ориентации).*

Доказательство этой леммы фактически содержится в доказательстве теоремы 2 из [1, § 5, п. 2, 3]. Там под C подразумеваются линии эллиптичности, а E означает множество нулей функции u, но это не имеет значения. Небольшие оговорки, связанные с тем, что теперь речь идет об ориентированных кривых, слишком очевидны, чтобы имело смысл повторить те же рассуждения с этими оговорками.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $u(X_0) = 0$ и C_0 есть b-линия, проходящая через точку X_0. Очевидно, достаточно доказать, что $u \equiv 0$ на ее ветви C_0', исходящей из X_0 в направлении b.

Допустим противное, так что множество M нулей функции u не покрывает C_0'. Тогда на C_0' существует дуга, содержащаяся в $G \setminus M$ и имеющая начало в какой-то точке множества M. Ничто не мешает принять эту точку за X_0.

По определению b-линий существует некоторая окрестность V точки X_0, где C_0 входит в соответствующее семейство b-линий. Ограничимся пределами этой окрестности.

Пересечем V $(n-m)$-мерной плоскостью R, проходящей через точку X_0 перпендикулярно плоскости $P(X_0)$. В сечении получим $(n-m)$-мерную область W и замкнутое множество $E = R \cap M$.

Так как векторы b перпендикулярны плоскостям P, то b-линии лежат каждая целиком в плоскостях $x_1 = \mathrm{const}, \ldots, x_m = \mathrm{const}$. Поэтому область W однозначно покрыта семейством $\{C\}$ b-линий, включающем линию C_0. Таким образом, здесь выполнены условия леммы 2.

Согласно этой лемме существует точка $X_1 \in E$, которой можно коснуться изнутри $W \setminus E$ $(n-m)$-мерным шаром S, причем b-линия C_1, проходящая через X_1, идет внутрь S, не касаясь его в точке X_1.

5. Проведя через каждую точку $X \in S$ плоскость $P(X)$, получим цилиндр Z. По условию (B), если в точке X $u = 0$, то $u \equiv 0$ на $P(X)$. Но внутри шара S $u > 0$. Поэтому точно так же $u > 0$ внутри цилиндра Z.

Примем точку X_1 за начало координат, а ось x_1 направим по внутренней нормали к цилиндру Z в этой точке. Этого можно, конечно, добиться, не меняя направлений осей $x_1, \ldots, x_m$, так что свойство (A) оператора L не нарушится.

При таком выборе осей, точки X_1 можно коснуться изнутри цилиндра Z параболоидом с уравнением (1), как в лемме 1. Этот параболоид вырежет из Z область U, в которой оператор L имеет свойство (A), а функция u всюду положительна в $\overline{U}$, не считая точки X_1 — начала, где u касается нуля, так как $X_1 \in M$. Чтобы воспользоваться леммой 1, остается показать, что в U $b_n > \mathrm{const} > 0$.

Если e — единичный вектор внутренней нормали к цилиндру Z в точке X_1, т. е. вектор по оси x_1, то

$$b_n = eb(X).$$

Так как линия C_1 не касается Z в точке X_1 и вектор $b(X_1)$ ее касается, то

$$b_n(X_1) = eb(X_1) > 0.$$

Если поле вектора $b(X)$ непрерывно, то отсюда следует, что вблизи X_1 $b_n > \mathrm{const} > 0$.

Аналогичное, очевидно, верно, если требуется только, чтобы $|b(X)| > > \mathrm{const} > 0$, а направление векторов непрерывно.

Таким образом, условие леммы 1 $b_n > \mathrm{const} > 0$ также выполнено.

Применяя эту лемму, получаем, что в области U есть точки, где $L(u) > 0$. Но это противоречит условию теоремы. Поэтому наше предположение о том, что множество нулей функции u не покрывает дугу C_0', невозможно, и теорема доказана.

§ 2. *Примеры и дополнения к теореме 1*

1. Комбинируя нашу теорему о распространении нулей вдоль b-линий с теоремами 3, 7, 8 из [1], получим критерии, определяющие множество M, на котором можно гарантировать $u \equiv 0$, если всюду в G $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и в какой-то точке $u = 0$. Для этого в случае теоремы 7 из [1] достаточно преобразовать интегральные поверхности плоскостей эллиптичности [3)] оператора L в плоскости, что допустимо (по крайней мере, локально), если эти поверхности и их семейство достаточно регулярны.

Специальный интерес представляет случай, когда независимо от точки X_0, где $u = 0$, неизбежно будет $u \equiv 0$ всюду в G, т. е. когда L, в смысле принципа максимума, ведет себя как эллиптический оператор. Таким путем получаем, например, следующий результат.

Теорема 2. *Пусть интегральные поверхности плоскостей эллиптичности преобразованы в плоскости P, причем в каждой из них семейство плоскостей эллиптичности вполне неголономно, и пусть для каждой пары P', P'' плоскостей P можно указать последовательность таких же плоскостей P_i, начинающуюся с P' и кончающуюся P'' так, что от P_i к P_{i+1} можно перейти по какой-либо b-линии (в направлении ее ориентации). Тогда, если $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ всюду в G и хоть где-нибудь $u = 0$, то $u \equiv 0$ в G.*

Если, кроме того, с $\equiv 0$, то для таких операторов имеет место такой же принцип максимума, как для оператора Лапласа.

Простейший пример представляет оператор $L(u) = u_{xx} + xu_y$ в квадрате $|x| < a$, $|y| < a$ и вообще оператор

$$L(u) = u_{xx} + f(x,y)u_x + g(x)u_y,$$

[3)] Здесь под плоскостью эллиптичности понимается плоскость, определенная главными направлениями матрицы $\|a_{ik}\|$, отвечающими положительным собственным значениям. Предполагается, что эти собственные значения $> \mathrm{const} > 0$, так что все такие плоскости имеют одну и ту же размерность. Интегральной их поверхностью называется поверхность, касательные плоскости которой (в каждой точке) содержат соответствующую плоскость эллиптичности.

если $g(x)$ меняет знак. При $g(x) > 0$ b-линии направлены параллельно, а при $g(x) < 0$ — антипараллельно оси y. Поэтому от каждой «плоскости» P, т. е. от отрезка, параллельного оси x, возможно движение по b-линии в обе стороны и множество нулей распространяется на всю область.

Другой пример дает оператор $L(u) = u_{rr} + f(r)u_\varphi$ в кольце $r_1 < r < r_2$, если $f(r) \not\equiv 0$. Достаточно в окрестности данного радиуса интерпретировать r, φ как прямоугольные координаты, а потом перекрыть такими окрестностями все кольцо. Нуль функции u распространяется здесь в одну сторону, если $f(r)$ не меняет знака, но это дает обход по всему кольцу.

Наконец, подобным свойством обладает оператор

$$L(u) = u_{xx} + u_y \cos x + u_z \sin x$$

в цилиндре с осью, параллельной оси x и имеющей длину $\geq 2\pi$.

2. Простейший случай нашей теоремы получаем, когда $m = n - 1$, так что, полагая $x_n = t$, можно представить оператор в виде

$$L(u) = \sum a_{ik}u_{ik} + \sum b_i u_i + bu_t + cu.$$

Тогда при выполнении условия (B) нули функции u (при $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$) распространяются в направлении оси t или против нее, в зависимости от знака b. При условии, что форма

$$\sum a_{ik}\xi_i\xi_k > a\sum \xi_i^2 \qquad (a > 0),$$

этот результат был получен Л. Ниренбергом [2].

Частный случай представляет уравнение теплопроводности, в котором $b < 0$, $c \equiv 0$. Поэтому из нашей теоремы следует, что каковы бы ни были начальные условия при $t = 0$ и условия нагревания на границе, ни при каком $t_0 > 0$ температура внутри тела не может достигать ни максимума, ни минимума (в сравнении со значениями в близких точках при t, близких к t_0), если только она не имела одно и то же значение во всем теле при всех $t < t_0$.

Подобные утверждения относительно либо максимума, либо минимума можно вывести при отводе или введении тепла внутрь тела (например, в результате идущих в теле реакций), что соответствует $L(u) \geq 0$ или $L(u) \leq 0$. Так, при отводе тепла, т. е. при $L(u) \geq 0$, температура u не может достигать внутри тела максимума ни при каком $t_0 > 0$, если только она не была постоянна при $0 < t < t_0$.

3. В теореме 1 по условию (B) из $u(X_0) = 0$ должно следовать $u \equiv 0$ на $P(X_0)$. Это требование можно несколько ослабить, предполагая, что оно нарушается на некоторых плоскостях P. Это может, например, происходить там, где некоторые, в остальном положительные, собственные значения матрицы $\|a_{ik}\|$ обращаются в нуль.

Соответственно теорема 1 допускает, например, следующее обобщение.

Теорема 3. *Если при условиях* (A), (C) *условие* (B) *выполнено для всех плоскостей P, кроме, может быть, счетного множества «особых» плоскостей P, то результат теоремы* 1 *все же имеет место, т. е. если $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$, $u(X_0) = 0$ и из точки X_0 исходит b-линия, то $u \equiv 0$ на $P(X_0)$ и на всем множестве M, составленном из плоскостей P, достижимых от $P(X_0)$ по b-линиям, проходимым согласно их ориентации.*

Доказательство. Докажем, что на b-линии C_0, исходящей из X_0, $u \equiv 0$. Допустим, что это не так. Тогда на C_0 есть отрезок, на котором $u > 0$. Его начало можно принять за X_0.

Если плоскость $P(X_0)$ неособая, то простая ссылка на теорему 1 приводит к противоречию (так как в окрестности каждой неособой плоскости P все плоскости P неособые).

Допустим, что $P(X_0)$ — особая. Множество, где $u = 0$, обозначим M.

Так же, как в начале доказательства теоремы 1, пересечем окрестность точки X_0 $(n-m)$-мерной плоскостью R и найдем в ней точку $X_1 \in R \cap M$, которой можно коснуться таким шаром $S \subset R$, что внутри S $u > 0$. На шаре S построим, как и прежде, цилиндр Z, образованный плоскостями P.

Если всюду внутри Z $u > 0$, то повторение доказательства теоремы 1 приведет к противоречию. Однако теперь нельзя, как в теореме, заключать, что всюду внутри Z $u > 0$, так как на особых плоскостях, входящих в этот цилиндр, u могла бы обращаться в нуль.

Множество таких плоскостей счетно, а потому среди них найдется изолированная особая плоскость P^0. В ее окрестности, за вычетом самой P^0, $u > 0$.

Возьмем на P^0 точку X^0, где $u = 0$. Построим параболоид Q, как в лемме 1, с вершиной в X^0 и с осью на векторе $b(X^0)$. Тогда, применяя лемму 1, получим, что внутри Q должны быть точки, где $L(u) > 0$. Это противоречило бы основному предположению, что всюду $L(u) \leq 0$. Тем самым наше утверждение, что $u \equiv 0$ на C_0, доказано.

Так как C_0 сколь угодно близко к X_0 пересекает неособые плоскости, то при $u \equiv 0$ на C_0 $u \equiv 0$ на всех этих плоскостях, а следовательно, и на $P(X_0)$. Кроме того, тот же вывод будет верен для любой b-линии, исходящей от плоскости $P(X_0)$, так что мы приходим к утверждению нашей теоремы.

§ 3. *Окончательный характер теоремы I*

1. Оказывается, что теорема 1 вместе с результатами работы [1], в известном смысле, исчерпывает то, что можно сказать общего о распространении нулей функции u (с условиями $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$). Это выражается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть оператор L в G удовлетворяет условиям* (A), (B) *и еще двум условиям:*

(C*) *вектор $b(X)$ удовлетворяет условию Липшица;*

(D) $\sum a_{ii} > A = \text{const} > 0$.

Пусть для точки $X_0 \in G$ $U(X_0)$ означает ее окрестность, а $M(X_0, U)$ — то множество точек в U, на которое согласно теореме 1 *должны распространяться нули функции и с условиями $L(u) \leq 0$, $u \geq 0$.*

Утверждается, что для любой точки X_0 существуют такая окрестность U и такая функция u, что всюду в U $\quad L(u) < 0$, $u \equiv 0$ на $M = M(X_0, U)$ и $u > 0$ на $U \setminus M$.

В частности, если $b \equiv 0$ на $P(X_0)$, то теорема 1 ничего не дает, так что в этом случае $M = P(X_0)$, точнее, $M = P(X_0) \cap U$.

Если же в какой-нибудь точке на $P(X_0)$, которую можно принять за X_0, $b \neq 0$, то из условия (C*) следует, что в окрестности этой точки существуют b-линии и теорема 1 приложима.

Согласно теореме 1, множество M обладает тем свойством, что оно состоит из плоскостей P и b-линии нигде из него не выходят, если проходить их в направлении вектора b. Точнее, M обладает следующими свойствами:

(M$_1$) M есть замкнутое (относительно U) множество;

(M$_2$) M состоит из плоскостей P, точнее, из их кусков $P \cap U$;

(M$_3$) если X — точка на его границе (относительно U), то либо $b(X) = 0$, либо существует конус с вершиной X и осью на отрезке, направленном противоположно $b(X)$, содержащийся в $U \setminus M$, не считая, конечно, его вершины X. (Иначе из точки X исходила бы b-линия, не содержащаяся в M.)

Фактически в теореме 4 под $M = M(X_0, U)$ можно понимать любое множество с этими свойствами. Ничего большего в доказательстве не потребуется.

Теорема 4 показывает, между прочим, что коэффициент c, по крайней мере локально, не играет роли в распространении нулей.

2. Доказательство теоремы 4. Пусть выполнены условия теоремы 4. По условию (A) оператор L представим в виде

$$L(u) = L'(u) + \sum_{i=m+1}^{n} b_i u_i, \qquad L'(u) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i,k=1}^{m} b_i u_i + cu. \tag{1}$$

По условию (D)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ii} > A = \text{const} > 0, \tag{2}$$

а по условию (C*)

$$|b(X) - b(X')| < Br(XX'), \tag{3}$$

где $r(XX')$ — расстояние между точками X, X'; $B = \text{const}$.

Фиксировав точку X_0, перенесем в нее начало координат.

Будем искать функцию u с требуемыми свойствами в виде

$$u = vw, \quad v = 1 - a\sum_{i=1}^{m} x_i^2, \quad w = w(x_{m+1}, \dots, x_n), \quad \text{где } a = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Из (1) и определения u следует, что

$$L(u) = wL'(v) + v \sum_{i=m+1}^{n} b_i w_i, \tag{5}$$

$$L'(v) = -2a\sum_{i=1}^{m} a_{ii} - 2a\sum_{i=1}^{m} b_i x_i + c\left(1 - a\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right).$$

Из последней формулы, ввиду предполагаемой ограниченности коэффициентов и неравенства (2), следует, что как только a достаточно велико, так достаточно близко к началу будет, скажем,

$$L'(v) < -Aa. \tag{6}$$

Кроме того, мы подчиним a условию

$$-Aa + 3B < -\frac{1}{2}Aa. \tag{7}$$

Для любого a достаточно близко к началу

$$v > 0. \tag{8}$$

Фиксировав a как указано, ограничимся пределами такой окрестности U начала, т. е точки X_0, где одновременно выполнены неравенства (6) и (8).

3. Перейдем к нахождению функции w.

Для этого введем функцию $r(X)$ — расстояние точки X до множества $M = M(X_0, U)$. Так как по теореме 1 M состоит из плоскостей P, то $r(X)$ не зависит от $x_1, \dots, x_m$, а, кроме того, $r \equiv 0$ на M и $r > 0$ на $U \setminus M$.

Как известно из «неравенства треугольника», $r(X)$ удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, почти везде дифференцируема. Очевидно, что $\operatorname{grad} r$ в точке X, не принадлежащей M, должен быть направлен противоположно направлению из X в ближайшую к X точку $X' \in M$. Если такая ближайшая точка X' единственная, то $\operatorname{grad} r$ существует и представляет собой единичный вектор, противоположный направлению $\overrightarrow{XX'}$. Если же ближайшая к X точка на M не единственная, то в X $\operatorname{grad} r$ либо не существует, либо равен нулю.

Опишем вокруг точки $X \notin M$, где $\operatorname{grad} r$ существует и не равен нулю, шар радиуса $r(X)$. В силу сказанного, он имеет с M единственную общую точку

X' и $\operatorname{grad} r$ направлен противоположно $\overrightarrow{XX'}$. Вместе с тем по свойству (M_3) множества M вектор $b(X')$ не может быть направлен внутрь этого шара (или он равен нулю). Отсюда следует, что в таких точках X

$$b(X') \operatorname{grad} r(X) \leq 0. \tag{9}$$

То же неравенство тривиально верно в точках, где $\operatorname{grad} r = 0$. Следовательно, оно верно почти везде в $V \setminus M$. Неравенство (9) позволяет оценить скалярное произведение $b(X) \operatorname{grad} r(X)$. Для этого воспользуемся условием (3), замечая, что в данном случае $r(XX') = r(X)$ и что $|\operatorname{grad} r| = 1$ или 0. Тогда получим, что в каждой точке $X \in U \setminus M$, где существует $\operatorname{grad} r$,

$$b \operatorname{grad} r \leq Br. \tag{10}$$

4. Положим предварительно $w = r^3(X)$ (эта функция может еще не вполне удовлетворять всем нашим условиям, так как заранее неизвестно, будет ли она хотя бы дифференцируемой).

Так как $r(X)$ не зависит от $x_1, \ldots, x_m$, то там, где существует $\operatorname{grad} r$, будет

$$\sum_{i=m+1}^{n} b_i (r^3)_i = 3r^2 (b \operatorname{grad} r).$$

Отсюда, пользуясь (9), получаем, что почти везде на $U \setminus M$

$$\sum_{i=m+1}^{n} b_i (r^3)_i \leq 3Br^3. \tag{11}$$

Но на M $r = 0$ и все производные $(r^3)_i = 0$. Поэтому неравенство (11) верно также на M. Стало быть, оно верно почти везде в U. Более того, оно, очевидно, верно также везде, если под производными $(r^3)_i$ в точках X, где они не существуют, понимать любые их предельные значения, получающиеся при $\overline{X} \to X$. Мы будем понимать производные $(r^3)_i$ в этом обобщенном смысле.

Пользуясь теперь неравенством (11), а также неравенствами (6) и (7), получим из (5), что

$$L(vr^3) \leq -(Aa - 3B) r^3 \leq -\frac{1}{2} A a r^3. \tag{12}$$

Так как $r^3 \geq 0$, то из этого неравенства, а также из того, что $r^3 \equiv 0$ на M и $r^3 > 0$ вне M, видно, что функция $u = vr^3$ удовлетворяет всем нашим требованиям с той, однако, особенностью, что она может быть не везде дифференцируемой. (Если множество M «достаточно гладкое», например, если оно сводится к плоскости $P(X_0)$, функция u будет заведомо дважды дифференцируемой. Мы же ищем дважды дифференцируемую функцию $u = vw$.)

5. Перейдем теперь от r^3 к дважды дифференцируемой функции w, определяя ее следующим образом.

Положим $w \equiv 0$ на M, т. е. $w = r^3$ на M. В области же $U \setminus M$ определим w так, чтобы она была положительной, дважды дифференцируемой и приближала r^3 вместе с первыми производными там, где они существуют. (Там же, где $(r^3)_i$ не существует, w_i будет приближать какое-либо предельное значение $(r^3)_i$ в указанном выше смысле.)

При r, большем любого данного $r_0 > 0$, неравенство (12) дает $L(vr^3) < -\varepsilon$, где $2\varepsilon = Aar_0^3$. Поэтому указанное приближение можно осуществить так, что всюду в $U \setminus M$ будет

$$L(vw) < 0. \tag{13}$$

Наконец, всюду на M, включая и его границу, вторые производные $(r^3)_{ij} \equiv 0$, если определять их в точках границы как производные от обобщенных производных $(r^3)_i$. (Эти последние определяются, согласно сказанному выше, как любые их предельные значения при $\overline{X} \to X$.)

Действительно, понимая r_i в этом обобщенном смысле, можно утверждать, что так как в любой точке $X \in M$ $(r^3)_i = 0$, то

$$[r^3(X)_{ij}] = \lim_{X' \to X} \frac{[r^3(X')]_i}{x'_j - x_j} = 3 \lim \frac{r^3(X') r_i(X')}{x'_j - x_j}. \tag{14}$$

Здесь $|x'_j - x_j| = r(XX')$ и так как $X \in M$, то

$$|x'_j - x_j| = r(XX') \geq r(X').$$

Поэтому из (14) следует, что $[r^3(X)]_{ij} = 0$.

Итак, $(r^3)_{ij} \equiv 0$ на M. Если же w приближает r^3 в $U \setminus M$ так, что близко к границе производные w_i все точнее подходят к $(r^3)_i$, то точно так же на границе окажется, что все $w_{ij} = 0$. Внутри же M w заведомо дважды дифференцируема и все $w_{ij} = 0$.

В результате мы получаем функцию w, дважды дифференцируемую всюду. Кроме того, мы определяли w так, что $w \equiv 0$ на M, $w > 0$ на $U \setminus M$. Наконец, по (13) всюду в $U \setminus M$ $L(vw) < 0$, а так как на M $w \equiv 0$ и все $w_i \equiv 0$, то из (4) следует, что на M $L(vw) = 0$. Следовательно, функция $u = vw$ удовлетворяет всем поставленным требованиям, и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.
2. *Nirenberg L.* A strong maximum principle for parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1953. V. 6, No. 2. P. 167–177.

Исследования о принципе максимума. III

Известия высших учебных заведений. Математика. 1959. № 5. С. 16–32

§ 1. Постановка вопроса

1. Дальше неизменно имеются в виду следующие условия и обозначения. Рассматривается ограниченная область G изменения переменных $x_1, \dots, x_n$, которые интерпретируются как прямоугольные координаты; Γ обозначает границу области. Под u всегда понимается определенная в G положительная, дважды дифференцируемая функция, под L — определенный в G оператор

$$L(u) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu.$$

Причем предполагается, что матрица $\|a_{ik}\|$ нигде не имеет отрицательных собственных значений.

Определение 1. Пусть возрастающая функция $p(r)$ определена при $r \geq 0$ и $p(0) = 0$. Мы говорим, что u касается нуля в точке O быстрее p, коротко — p-касается нуля, если в G существует такая последовательность точек $X_m \to O$, что

1) $\lim \dfrac{u(X_m)}{p(r_m)} = 0$, где $r_m = r(X_m\Gamma)$ — расстояние X_m до Γ.

Мы говорим, что u p-касается нуля вдоль луча l, если, кроме условия 1), выполнено еще условие

2) лучи, идущие из O через X_m, сходятся к лучу l.

Это понятие применяется только в том случае, если луч l идет существенно внутрь G, т. е. содержится в каком-либо конусе, заключенном в $G \cup \{O\}$. Если $p(r) = r$, то вместо того, чтобы говорить о p-касании нуля, мы скажем просто, что u касается нуля.

Определение 2. Точка O называется обыкновенной для области G, оператора L и класса $\{u\}$ функций u, если для всякой $u \in \{u\}$ сколь угодно близко к O существуют точки $X \in G$, где $L(u) > 0$. В частности, O называется p-обыкновенной, если она обыкновенная для функций, p-касающихся нуля в O, и p-обыкновенной относительно луча l, если она обыкновенная для функций, p-касающихся нуля вдоль l.

2. Наша задача состоит в исследовании условий того, чтобы точка $O \in \Gamma$ была обыкновенной. Эти условия касаются строения Γ вблизи O, характера касания функций u нуля в точке O и коэффициентов оператора L. Результаты, которые мы здесь получим, были в их простейшей форме высказаны во введении к нашей работе [1] в виде теоремы 1.

Поставленный вопрос рассматривался раньше в более частных случаях. Можно сослаться на работу М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [2], где даются условия того, чтобы точка была обыкновенной для оператора Лапласа. В частности, наша теорема 6 § 4 может рассматриваться как развитие теоремы Келдыша — Лаврентьева. Она, очевидно, таким же образом приводит к единственности решения задачи Неймана для более общих операторов L. Кстати, мы показываем, что получаемые нами достаточные условия для обыкновенной точки очень близко подходят к необходимым.

§ 2. *Исходная теорема*

1. Теорема 1. *Пусть область G, функция u и оператор L удовлетворяют следующим условиям:*

1) *G расположена в полупространстве $x_1 > 0$ и Γ имеет на плоскости $x_1 = 0$ $(n-1)$-мерную область V, заключающую начало O;*

2а) *для всякой точки $X_0 \in \Gamma \setminus V$ $\displaystyle\lim_{X \to X_0} u(X) > 0$;*

2б) *в точке O u p-касается нуля, где при $r > 0$ $p(r)$ дважды дифференцируема и $p''(r) \geq 0$;*

3) *существует такая функция h с конечным интегралом*[1]*, что коэффициенты оператора L удовлетворяют (по крайней мере достаточно близко к плоскости $x_1 = 0$) следующим неравенствам:*

$$(B_1) \qquad b_1 + \left[\frac{p''(x_1)}{p'(x_1)} + h(x_1)\right] a_{11} \geq 0;$$

$$(C_1) \qquad x_1 c + b_1 + \left[\frac{p''(x_1)}{p'(x_1)} + h(x_1)\right] a_{11} \geq 0.$$

[1] Согласно определению, данному в [1], мы говорим, что $h(x)$ есть функция с конечным интегралом, если она определена в некотором интервале $(0, x_0)$ и ее интеграл от 0 до x_0 конечен, т. е. если при $x \to 0$, $h(x) \to \infty$, то все же указанный интеграл сходится.

При этих условиях сколь угодно близко к плоскости $x_1 = 0$ существуют точки, где $L(u) > 0$.

Говоря, что выполнены неравенства (B_1), (C_1), мы подразумеваем, что в каждой точке хотя бы одно из них представляет собой строгое неравенство. Так как от данной h можно перейти, скажем, к $h+1$, то (B_1), (C_1) могут превращаться в равенства при любой h только тогда, когда $a_{11} = b_1 = c = 0$.

Всюду дальше, когда мы пишем неравенства (B), (C), сходные с (B_1), (C_1), неизменно подразумевается, что хотя бы одно из них не сводится к равенству.

Замечания. 1. Если $a_{11} > \mathrm{const} > 0$ и b_1, c ограничены, а $p'' \geq 0$, то условие 3) заведомо выполнено.

2. Очевидно, функцию h можно считать положительной. То, что в условиях (B_1), (C_1) стоит одна и та же функция h, не является ограничением, так как, если бы в них стояли разные (положительные) функции h_1, h_2, то такие же неравенства тем более были бы верны при $h = h_1 + h_2$.

3. Теорема 1 усиливает основную лемму 2 работы [1]: там берется только случай $p(x_1) = x_1$, а вместо (B_1), (C_1) требуется

$$(B) \quad b_1 + h(x_1)a_{11} \geq 0, \qquad (C) \quad x_1 c + \max[b_1, h(x_1)a_{11}] \geq 0.$$

Легко убедиться, что эти условия являются несколько более узкими, чем (B_1), (C_1) при $p(x_1) = x_1$.

2. Доказательство теоремы 1 основано на двух леммах.

Лемма 1. *При условии теоремы 1 относительно области G и функции u существует такая дифференцируемая выпуклая функция $f(x_1)$, что*

1) *всюду в G, по крайней мере достаточно близко к плоскости $x_1 = 0$, $u(x_1, \ldots, x_n) \geq f(x_1)$;*

2) *существуют точки со сколь угодно малыми x_1, где*

$$u(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1);$$

3) *во всех точках, где $u > f$, $f'' = 0$.*

(Из 1) и 2) очевидно, что f касается нуля быстрее p.)

Эта лемма доказана в [1, § 1, п. 3] по ходу доказательства леммы 1. То, что теперь мы понимаем касание функции u нуля в более общем смысле, не играет никакой роли.

Лемма 2. *Если выпуклая положительная функция $f(y)$ касается нуля быстрее $p(y)$, то при всякой $h(y)$ с конечным интегралом существуют сколь угодно малые y, при которых*

$$f''(y) > \left[\frac{p''(y)}{p'(y)} + h(y)\right] f'(y), \tag{1}$$

где под f'' можно понимать верхнюю вторую производную, допуская для нее бесконечные значения.

Доказательство. Допустим, что всюду

$$f'' \leq \left(\frac{p''}{p'} + h\right) f'. \tag{2}$$

Так как f выпукла, то $f'' \geq 0$, а потому из (2) следует, что при $y > \varepsilon$ f'' ограничена и, стало быть, f' абсолютно непрерывна. Поэтому из (2) очевидным образом получим

$$f'(y) \geq Cp'(y)e^{-\int\limits_y^{y_1} h\,dy}.$$

А так как h имеет конечный интеграл, то $f(y) \geq \mathrm{const} \cdot p(y)$, т. е. f не может касаться нуля быстрее p.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть f — функция, существование которой утверждает лемма 1; она касается нуля быстрее p.

По лемме 2 существуют сколь угодно малые x_1, при которых верно неравенство (1) с заменой y на x_1. Так как здесь под h можно понимать любую функцию с конечным интегралом, то берем именно ту, которая стоит в условиях (B_1), (C_1).

Из (1), в частности, следует, что при таких x_1 $f'' > 0$. А тогда из свойств 2) и 3), указанных для функции f в лемме 1, следует, что каждому такому x_1 отвечает хотя бы одна точка $(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$u = f. \tag{3}$$

Так как, кроме того, всюду $u \geq f$, то в таких точках

$$du = df = f'dx_1 \tag{4}$$

и

$$d^2u \geq d^2f = f''dx_1^2. \tag{5}$$

Из (3)–(5), в силу негиперболичности L, следует, что в таких точках

$$L(u) \geq a_{11}f'' + b_1f' + cf.$$

Отсюда, используя (1), получаем, что

$$L(u) \geq \left[\left(\frac{p''}{p'} + h\right) a_{11} + b_1\right] f' + cf. \tag{6}$$

Но так как f выпукла и не линейна, то $x_1 f' > f$, а в силу условия (B_1) коэффициент при f' в (6) неотрицателен. Поэтому из (6) следует, что

$$L(u) \geq \left[\left(\frac{p''}{p'} + h\right) a_{11} + b_1 + x_1 c\right] \frac{f}{x_1}, \tag{7}$$

причем здесь будет строгое неравенство, если оно имело место в (B_1).

Пользуясь теперь условием (C_1), получим, что $L(u) > 0$, так как по меньшей мере либо в (B_1), либо в (C_1) имеет место строгое неравенство.

§ 3. *Обобщение теоремы 1*

1. Пусть O — точка на границе Γ области G и пусть в окрестности O Γ оказывается гладкой поверхностью, причем единичные нормальные векторы к ней удовлетворяют условию

$$|n(X) - n(X')| \leq k(r_{XX'}), \tag{1}$$

где $r_{XX'}$ — расстояние между точками X, X', а k — вогнутая функция с условием $k(0) = 0$ [2)].

Примем точку O за начало координат и направим ось x_1 по внутренней нормали к Γ в этой точке. При этом условии вводим для оператора L, заданного в G, следующие обозначения:

$$a = \sum_{i=2}^{n} a_{ii}, \qquad b = \sqrt{\sum_{i=2}^{n} b_i^2}. \tag{2}$$

В окрестности O Γ представляет собой поверхность S с уравнением $x_1 = f(x) \equiv f(x_2, \ldots, x_n)$, причем, вследствие (1), существует такая постоянная a_0, что

$$|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(x')| \leq a_0 k(|x - x'|) = \overline{k}(|x - x'|). \tag{3}$$

В частности, так как

$$\operatorname{grad} f(0) = 0, \qquad \text{то} \qquad |\operatorname{grad} f(x)| \leq \overline{k}(d),$$

где d — диаметр поверхности S.

Теорема 2. *Пусть при сформулированных условиях в G заданы функция u и оператор L со следующими свойствами:*

I) *u касается нуля в точке O быстрее $r^{1+\alpha}$ $(\alpha \geq 0)$;*

II) *для всякой точки X_0 на краю поверхности S*

$$\varliminf_{X \to X_0} u(X) > 0;$$

[2)] То, что k — вогнутая, означает, что $k(r_t) \geq (1-t)k(r_0) + tk(r_1)$, $r_t = (1-t)r_0 + tr_1$. Вогнутая функция, для которой верно (1), всегда существует. Полагаем

$$l(x) = \sup_{r_{XX'} \leq x} |n(X) - X(X')|.$$

По непрерывности $n(X)$, $l(0) = 0$. Построение выпуклой оболочки кривой $y = l(x)$ даст вогнутую функцию $k(x)$ с условием $k(0) = 0$.

III) *существует такая невозрастающая функция h с конечным интегралом, что в каждой точке $X \in G$ вблизи поверхности S выполнены следующие неравенства:*

$$(B_2) \qquad \Phi \equiv b_1 - \varepsilon b - M\frac{k(r)}{r}(a_{11}+a) + \left[\frac{\alpha}{r} + h(r)\right]\frac{(\sqrt{a_{11}} - \theta\varepsilon\sqrt{a})^2}{1+\delta} \geq 0,$$

$$(C_2) \qquad (1+\gamma)rc + \Phi \geq 0.$$

Здесь $r = r(X\Gamma)$; M — постоянная, зависящая только от n и $k(d)$, где d — диаметр рассматриваемой окрестности поверхности S, $0 \leq \theta \leq 1$, а ε, δ, $\gamma \to 0$ вместе с $k(d)$ (точнее, $0 \leq \varepsilon, \delta, \gamma < Ck(d)$, где C зависит только от n).

При этих условиях сколь угодно близко к поверхности S существуют точки, где $L(u) > 0$.

(Если S — область на плоскости, так что $k \equiv 0$, то теорема 2 переходит в теорему 1 с теми ограничениями, что h не возрастающая, а $p(r) = r^{1+\alpha}$.)

2. Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 2. Произведем преобразование

$$x_1 = y_1 + g(y_1, \ldots, y_n), \qquad x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n, \tag{4}$$

где функция g определяется равенством

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2y_1)^{n-1}} \int_{-y_1}^{y_1} \cdots \int_{-y_1}^{y_1} f(y_2+\eta_2, \ldots, y_n+\eta_n)d\eta_2 \ldots d\eta_n \tag{5}$$

и

$$g(0, y_2, \ldots, y_n) = f(y_2, \ldots, y_n). \tag{6}$$

В результате такого преобразования область G, оператор L и функция u преобразуются соответственно в $\overline{G}$, $\overline{L}$, $\overline{u}$.

Так как f непрерывно дифференцируема, то g дважды дифференцируема по всем аргументам при $y_1 > 0$. Кроме того, она непрерывно дифференцируема при $y_1 \geq 0$ и ее производная по y_1 $g_1 \to 0$ при $y_1 \to 0$ и даже удовлетворяет неравенству

$$|g_1| \leq \frac{3(n-1)}{2}\overline{k}(y_1). \tag{7}$$

(Вывод этой оценки мы опускаем; он вполне аналогичен выводу оценок для производных g_{ij}, который дается в п. 7.)

Якобиан преобразования (4) равен $1+g_1$, т. е. положителен при малых y_1. Ввиду всего этого, функция $\overline{u}$ дважды дифференцируема и оператор $\overline{L}$ определен вблизи поверхности S.

Ограничимся пределами той части U области G, где имеет место сказанное и выполнены неравенства (B_2), (C_2).

Мы докажем, что область $\overline{U}$, функция $\overline{u}$ и оператор $\overline{L}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Этим теорема 2 будет, очевидно, доказана.

3. Проверим выполнение условий теоремы 1 для области $\overline{U}$.

Из (6) и (4) видно, что поверхность S с уравнением

$$x_1 = f(x_2, \dots, x_n)$$

отображается в некоторую часть $\overline{S}$ плоскости $y_1 = 0$. Кроме того, так как в U $\quad x_1 > f(x_2, \dots, x_n)$ и

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 1 + g_1 > 0,$$

то в U $\quad y_1 > 0$.

Таким образом, область $\overline{U}$ лежит в полупространстве $y_1 > 0$ и имеет на плоскости $y_1 = 0$ грань $\overline{S}$, т. е. для нее выполнены условия теоремы 1.

4. Из условия II теоремы 2 очевидно, что $\overline{u}$ удовлетворяет условию 2a) теоремы 1.

Далее, так как u $\quad r^{1+\alpha}$-касается нуля в точке O, то существует такая последовательность точек $X_m \to O$, что

$$\frac{u(X_m)}{r(X_m\Gamma)^{1+\alpha}} \to 0. \tag{8}$$

Пусть s — расстояние точки X от S вдоль оси x_1, т. е.

$$s = x_1 - f(x_2, \dots, x_n). \tag{9}$$

Очевидно, $s \geq r$ и вместе с тем, как легко видеть, $s \leq (1+\sigma')r$, где $\sigma' \to 0$ вместе с $\overline{k}(d)$.

С другой стороны, из (9), (6) и (4) следует, что

$$s = y_1 + g(y_1, \dots, y_n) - g(0, y_2, \dots, y_n) = y_1[1 + g_1(\theta y_1, y_2, \dots, y_n)],$$

где, в силу (7), $g_1 \to 0$ вместе с $\overline{k}(y_1)$.

В результате оказывается, что

$$y_1 = (1+\sigma)r, \tag{10}$$

где $\sigma \to 0$ вместе с $\overline{k}(d)$.

Поэтому из (8), поскольку $\overline{u}(y_1, \ldots, y_n) = u(X)$, следует, что

$$\frac{\overline{u}(y_1, \ldots, y_n)}{y_1^{1+\alpha}} \to 0,$$

т. е. $\overline{u}$ касается в точке O нуля быстрее $y_1^{1+\alpha}$.

Таким образом, для u выполнено также условие 2б) теоремы 1 при $p(r) = r^{1+\alpha}$.

5. Остается показать, что оператор $\overline{L}$ также удовлетворяет условиям теоремы 1. Для этого оценим сперва его коэффициент $\overline{a}_{11}$. Он выражается известным образом через коэффициенты a_{ij} исходного оператора и первые производные от y_1 по $x_1, \ldots, x_n$. Эти производные вычисляются, если заметить, что согласно (4)

$$y_1 = x_1 - g(y_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{11}$$

Для удобства повернем оси $x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы ось x_2 совпала по направлению с проекцией $\operatorname{grad} g$ на плоскость $x_1 = 0$ в данной точке, т. е., чтобы в данной точке было $g_3 = \ldots = g_n = 0$. Тогда оказывается, что

$$\overline{a}_{11} = \frac{1}{(1+g_2)^2}(a_{11} - 2a_{12}g_2 + a_{22}g_2^2)$$

или, так как $a_{12}^2 \leq a_{11}a_{22}$,

$$a_{11} \geq \frac{(\sqrt{a_{11}} - |g_2|\sqrt{a_{22}})^2}{(1+g_1)^2}.$$

А так как

$$a_{22} \leq a = \sum_{i=2}^{n} a_{ii}$$

и

$$|g_2| = \sqrt{\sum_{i=2}^{n} g_i^2},$$

что мы обозначим через g', то окончательно

$$\overline{a}_{11} \geq \frac{(\sqrt{a_{11}} - \theta g'\sqrt{a})^2}{(1+g_1)^2}, \tag{12}$$

где $0 \leq \theta \leq 1$.

6. Коэффициент $\overline{b}_1$ выражается известным образом через b_i, a_{ij} и первые и вторые производные от y_1 по $x_1, \ldots, x_n$. Для вычисления пользуемся (11) и выбираем оси $x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы в данной точке оказалось $a_{ij} = 0$ при всех i, $j > 1$, $i \neq j$.

Тогда для $\overline{b}_1$ получим формулу

$$\overline{b}_1 = \frac{1}{1+g_1}\left(b_1 - \sum_{i=2}^{n} b_i g_i\right) - \frac{1}{1+g_1}\sum_{i=2}^{n} a_{ii} g_{ii} -$$

$$- \frac{g_{11}}{(1+g_1)^3}\left(a_{11} - 2\sum_{i=2}^{n} a_{1i} g_i + \sum_{i=2}^{n} a_{ii} g_i^2\right) + \frac{2}{(1+g_1)^2}\sum_{i=2}^{n}(a_{ii} g_i - a_{1i}) g_{1i}.$$

Обозначим через g'' наибольшую из абсолютных величин, входящих сюда вторых производных g_{ij}. Тогда, пользуясь, в частности тем, что $a_{1i}^2 \leq a_{11} a_{ii}$, нетрудно получить

$$\overline{b}_1 \geq \frac{1}{1+g_1}[b_1 - g' b - N g''(a_{11} + a)], \tag{13}$$

где g' то же, что в (12), b имеет смысл (2) и N — некоторое число, оцениваемое только в зависимости от n и величин производных g_i $(i = 1, \ldots, n)$, т. е. в зависимости от n и $k(d)$.

7. Оценим теперь g'', т. е. наибольшую из $|g_{11}|$, $|g_{1i}|$, $|g_{ii}|$ $(i = 2, \ldots, n)$.

Для этого перепишем формулу (5), определяющую g, в виде

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{2y_1}\int\limits_{-y_1}^{y_1} \overline{g}(y_1, y_2 + \eta, y_3, \ldots, y_n)\, d\eta, \tag{14}$$

где $\overline{g}$ есть усреднение f по аргументам $y_3, \ldots, y_n$. Поэтому, если рассматривать в $\overline{g}$ переменную y_2 как параметр, то $\overline{g}$ имеет тот же смысл, что g, но при числе переменных, на единицу меньшем. Если же $n = 2$, то $\overline{g} = f(y_2, \ldots, y_n)$.

Дальше для простоты записи будем выписывать в $\overline{g}$ только второй аргумент, играющий роль параметра.

Заметим, что для $\overline{g}$, как усреднения f, тем более верно (3). А так как функция $\overline{k}$ — неубывающая и вогнутая, то при любых λ, μ между 0 и 1

$$|g_2(y_2 + \lambda y) - g_2(y_2 - \mu y)| \leq \overline{k}(2y) \leq 2\overline{k}(y). \tag{15}$$

Из (14) следует, что

$$g_{22} = \frac{\overline{g}_2(y_2 + y_1) - \overline{g}_2(y_2 - y_1)}{2y_1},$$

откуда, в силу (15), $|g_{22}| \le \overline{k}(y_1)/y_1$. А так как переменные $y_2, \dots, y_n$ играют одинаковую роль, то вообще

$$|g_{ii}(y_1, \dots, y_n)| \le \frac{\overline{k}(y_1)}{y_1} \qquad (i = 2, \dots, n). \tag{16}$$

Далее, из (14) следует

$$g_{12} = \frac{1}{2y_1}\left[\overline{g}_2(y_2+y_1)+\overline{g}_2(y_2-y_1)-\frac{1}{y_1}\int\limits_{-y_1}^{y_1}\overline{g}_2(y_2+\eta)d\eta\right]+\frac{1}{2y_1}\int\limits_{-y_1}^{y_1}\overline{g}_{12}d\eta. \tag{17}$$

Последнее слагаемое при $n = 2$ отсутствует, так как тогда $\overline{g} = f$ не зависит от y_1, первое слагаемое, как следует из (15), не превосходит по модулю $3\overline{k}(y_1)/(2y_1)$, и потому

$$|g_{12}| \le \frac{3}{2}\frac{\overline{k}(y_1)}{y_1}.$$

А применяя индукцию по числу переменных, получим из (17), что для любого n $|g_{12}| \le 3(n-1)\overline{k}(y_1)/(2y_1)$. И так как переменные $y_2, \dots, y_n$ играют одинаковую роль, то вообще

$$|g_{1i}(y_1, \dots, y_n)| \le \frac{3(n-1)}{2}\frac{\overline{k}(y_1)}{y_1} \qquad (i = 2, \dots, n). \tag{18}$$

Аналогичным путем получим сходную оценку для g_{11}, а соединяя все эти оценки и имея в виду, что $\overline{k}$ пропорциональна k, входящей в (1), получим

$$g'' \le q_0\frac{k(y_1)}{y_1}, \tag{19}$$

где q_0 зависит только от n.

8. Наконец, чтобы перейти в (19) от y_1 к $r = r(X\Gamma)$, воспользуемся соотношением (10), из которого следует

$$y_1 \ge (1 - |\sigma|)r. \tag{20}$$

Так как функция $k(y_1)$ — вогнутая, то $k(y_1)/y_1$ — невозрастающая; сама же $k(y_1)$ — неубывающая. Поэтому из (20) получаем

$$\frac{k(y_1)}{y_1} \le \frac{k(r-|\sigma|r)}{(1-|\sigma|)r} \le \frac{1}{1-|\sigma|}\frac{k(r)}{r}.$$

Следовательно, оценку (19) можно переписать в виде

$$g'' \leq q\frac{k(r_1)}{r_1}.$$

Благодаря этому, оценка (13) для $\overline{b}_1$ дает

$$\overline{b}_1 \geq \frac{1}{1+g_1}\left[b_1 - g'b - M\frac{k(r)}{r}(a_{11}+a)\right], \tag{21}$$

где $M = qN$ зависит только от n и $k(d)$.

9. В условиях (B_2), (C_2) фигурирует величина $\sigma/r + h(r)$, которая в силу условия, наложенного на h, есть невозрастающая функция r. А так как из (10) следует $y_1 \leq (1+|\sigma|)r$, то

$$\frac{\alpha}{r} + h(r) \leq \frac{(1+|\sigma|)\alpha}{y_1} + h\left(\frac{y_1}{1+|\sigma|}\right)$$

и

$$\frac{\alpha}{y_1} + h_1(y_1) \geq \frac{1}{1+|\sigma|}\left[\frac{\alpha}{r} + h(r)\right], \tag{22}$$

где

$$h_1(y_1) = \frac{1}{1+|\sigma|}h\left(\frac{y_1}{1+|\sigma|}\right)$$

есть, очевидно, функция с конечным интегралом.

Теперь, пользуясь (12), (21) и (22), получим

$$\overline{b}_1 + \left[\frac{\alpha}{y_1} + h_1(y_1)\right]a_{11} \geq \frac{1}{1+g_1}\Phi, \tag{23}$$

где Φ есть левая часть неравенства (B_2), если только принять

$$\varepsilon = g', \qquad 1+\delta = (1+g_1)(1+|\sigma|).$$

Так как по неравенству (B_2) $\Phi \geq 0$, то из (23) следует неравенство (B_1) теоремы 1 для $\overline{b}_1$, $\overline{a}_{11}$ при $p = y_1^{1+\alpha}$.

Совершенно аналогично получаем, что из (C_2) следует выполнение неравенства (C_1) теоремы 1. Следовательно, оператор L удовлетворяет условиям теоремы 1 и теорема 2 доказана.

§ 4. *Условия для обыкновенной точки*

1. Теорема 3. *Пусть в окрестности точки $O \in \Gamma$ выполнено условие* (1) *§ 3 для нормалей, где функция k — неубывающая. Тогда, если $k(r)/r$ есть функция с конечным интегралом, то точка O будет обыкновенной относительно всякого оператора с ограниченными коэффициентами и с коэффициентом $a_{11} > \mathrm{const} > 0$ (при условии, что ось x_1 направлена по нормали в точке O).*

То же верно в отношении операторов, для которых в малой окрестности O выполнены более общие условия:

$$(A_3) \qquad a = \sum_{i=2}^{n} a_{ii} \leq A a_{11}, \quad A = \mathrm{const};$$

$$(B_3) \qquad b_1 - \varepsilon_0 b + h_1(r) a_{11} \geq 0, \quad b = \sqrt{\sum_{i=2}^{n} b_i^2}\,;$$

$$(C_3) \qquad (1+\varepsilon_0) rc + b_1 - \varepsilon_0 b + h_1(r) a_{11} \geq 0,$$

где h_1 — некоторая невозрастающая функция с конечным интегралом; ε_0 — сколь угодно малая постоянная, $r = r(X\Gamma)$.

2. Доказательство. Пусть u касается в O нуля, так что существует такая последовательность точек $X_m \to O$, для которой

$$\frac{u(X_m)}{r(X_m\Gamma)} \to 0. \tag{1}$$

Построим поверхность S, проходящую через O, а в остальном лежащую в G и отделяющую точки X_m от Γ. Эту поверхность выберем настолько близкой к Γ, чтобы для нее имело место соотношение (1) § 3 для нормалей с несколько иной функцией k, но все же такой, что $k(r)/r$ имеет конечный интеграл. Кроме того, выберем S так, чтобы соотношение (1) сохранялось при замене Γ на S.

Соответственно будем рассматривать область $\overline{G}$, выделенную из G поверхностью S и заключающую точки X_m.

В области $\overline{G}$ вблизи O $\quad r(XS) \leq r(X\Gamma)$. А так как в условиях $(B_3), (C_3)$ функция $h_1(r)$ не возрастающая, то эти условия тем более выполнены, если в них под r понимать $r(XS)$. Итак, мы можем относить все условия к области $\overline{G}$.

Так как $S \subset G \cup \{O\}$ и по основному предположению $u > 0$ в G, то $u > 0$ на $S \setminus \{O\}$, т. е. u удовлетворяет условию II теоремы 2.

Допустим, что функция k — вогнутая, как в теореме 2. Так как u просто касается нуля, то в условиях (B_2), (C_2) нужно взять $\alpha = 0$. Поэтому, а также благодаря (A_3), условие (B_2) получает вид

$$b_1 - \varepsilon b - M(1+A)\frac{k(r)}{r} a_{11} + h(r)\frac{(1-\theta\varepsilon\sqrt{A})^2}{1+\delta} a_{11} \geq 0, \tag{2}$$

где ε можно считать сколь угодно малым, стоит лишь ограничиться малой окрестностью точки O.

Так как $k(r)/r$ имеет конечный интеграл и не возрастает (поскольку k вогнута), неравенство (2) будет следовать из (B_3), стоит лишь подобрать подходящую функцию h_1, т. е. условие (B_2) теоремы 2 выполнено.

Аналогично из (C_3) следует выполнение условия (C_2), так что при условии вогнутости k теорема 3 доказана.

3. Остается освободиться от дополнительного условия вогнутости k. Это возможно благодаря следующему.

Лемма 3. *Если $k(x) > 0$ — монотонная функция и $k(x)/x$ есть функция с конечным интегралом, то существует такая вогнутая функция $\overline{k}(x) \geq k(x)$, что $\overline{k}(x)/x$ также имеет конечный интеграл.*

Доказательство. Пусть $k(x)/x$ имеет конечный интеграл. Построим на плоскости x, y выпуклую оболочку кривой $y = k(x)$. Пусть $y = \overline{k}(x)$ — уравнение той части ее границы, которая обращена в сторону $y > 0$. Функция $\overline{k}$ будет вогнутой. Покажем, что она имеет конечный интеграл.

По известному свойству выпуклой оболочки $\overline{k}(x)$ линейна на интервалах, где $k(x) < \overline{k}(x)$. На концах этих интервалов $\overline{k}(x) = k(x)$. Пусть (x', x'') — такой интервал. Тогда из указанных свойств $\overline{k}$ и монотонности k следует, что в интервале (x', x'')

$$\overline{k}(x) - k(x) \leq \overline{k}(x) - k(x') = \frac{k(x'') - k(x')}{x'' - x'}x.$$

Поэтому

$$\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\overline{k}(x)}{x}dx - \int\limits_{x'}^{x''} \frac{k(x)}{x}dx \leq k(x'') - k(x').$$

Так как вне таких интервалов $\overline{k} = k$, k неубывающая и $k(0) = 0$, то суммирование по конечному числу интервалов с последующим предельным переходом, исчерпывающим их все, даст

$$\int\limits_{0}^{x} \frac{\overline{k}(x)}{x}dx - \int\limits_{0}^{x} \frac{k(x)}{x}dx \leq k(x).$$

Этим лемма, а вместе с нею и теорема 3, доказана.

4. Теорема 4. *Если в окрестности точки O граница области гладкая, то O будет $r^{1+\alpha}$-обыкновенной при любом $\alpha > 0$ для всякого оператора, удовлетворяющего условиям теоремы 3.*

Доказательство. Так как в окрестности точки O нормали к Γ непрерывны, то для них выполнено условие (1) § 3 с подходящей функцией k, которую можно, без ограничения общности, считать вогнутой. Поэтому вводя так же, как в доказательстве теоремы 3, поверхность S, можно будет сослаться на теорему 2.

При условии (A_3) неравенство (B_2) приобретает вид

$$b_1 - \varepsilon b - M(1+A)\frac{k(r)}{r}a_{11} + \left[\frac{\alpha}{r} + h(r)\right]\frac{(1+\theta\varepsilon\sqrt{A})^2}{1+\delta}a_{11} \geq 0.$$

Но так как ε сколь угодно мало, а $k(r) \to 0$, когда $r \to 0$, то вблизи точки O это неравенство, очевидно, следует из (B_3). Таким образом, условие (B_2) оказывается выполненным. Аналогично из (C_3) выводим (C_2) и теорема доказана.

5. Если функция u касается в O нуля вдоль луча, идущего существенно внутрь G, то требование гладкости Γ можно заменить более слабым. Введем следующее определение.

Определение 3. Будем говорить, что луч l, исходящий из точки $O \in \Gamma$, есть обобщенная внутренняя нормаль к Γ в точке O, если на всяком луче, исходящем из O и образующем с l угол $< \pi/2$, найдется отрезок OX, содержащийся в G.

Если в точке O фиксирована обобщенная внутренняя нормаль l, то мы всегда направляем ось x_1 по l. Кроме того, мы вводим обозначение $s = \sqrt{x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Лемма 4. *То, что l есть обобщенная внутренняя нормаль к границе области G в точке O, равносильно тому, что существует выпуклое тело вращения Q с осью l, имеющее гладкую поверхность. Это тело можно всегда выбрать так, что в уравнении $x_1 = f(s)$, представляющем его поверхность S вблизи точки O, функция f такова, что f' является вогнутой.* (Мы говорим, что тело Q или поверхность S касается точки O изнутри G.)

Первое утверждение леммы наглядно очевидно. Доказательство мы опускаем. Докажем второе утверждение.

Пусть точки O изнутри G касается выпуклая поверхность вращения $\overline{S}$ с уравнением $x_1 = \overline{f}(s)$. Построим на плоскости x, y выпуклую оболочку кривой $y = \overline{f}(x)$. Пусть $y = g(x)$ есть уравнение той части границы этой выпуклой оболочки, которая обращена в сторону $y > 0$. Функция g будет вогнутой.

Определим функцию

$$f(x) = \int\limits_0^x g(x)dx.$$

Тогда поверхность S с уравнением $x_1 = f(s)$ касается точки O изнутри G и f' есть вогнутая функция. На некотором отрезке $(0, x)$ она — неубывающая, так что поверхность S выпуклая. Таким образом, второе утверждение леммы доказано.

Дополнение к лемме 4. Как следует из доказательства леммы 3, $f'(s)/s$ есть функция с конечным интегралом, если $\overline{f}'(s)/s$ является таковой.

6. Теорема 5. *Если в точке O Γ имеет обобщенную внутреннюю нормаль l, то точка O — обыкновенная по отношению ко всякому оператору, удовлетворяющему условиям (A_3)–(C_3) теоремы 3, и функции u, касающейся в O нуля быстрее $r^{1+\alpha}$ $(\alpha < 0)$ вдоль какого-нибудь луча, образующего с l угол $< \pi/2$.*

Доказательство. Пусть Γ имеет в O обобщенную внутреннюю нормаль l. Тогда согласно лемме 4 точки O можно коснуться изнутри G гладкой поверхностью S с нормалью l. Рассмотрим некоторую часть U области G, для которой S является частью границы, причем l направлена внутрь U. Всякий луч, идущий из O под углом $< \pi/2$ к l, идет внутри U. Поэтому функция u, касающаяся нуля вдоль такого луча, обладает этим свойством в области U; применяя к U теорему 4, получаем теорему 5.

Теорема 5а. *Точка O, где Γ имеет обобщенную внутреннюю нормаль, является обыкновенной для функций, производные которых удовлетворяют условию Липшица с любым показателем $\alpha > 0$, и по отношению ко всякому оператору с условиями (A_3)–(C_3).*

Если функция с указанным свойством касается нуля, то она $r^{1+\alpha}$-касается нуля. Поэтому теорема 5а следует из теоремы 5.

7. Теорема 6. *Если точки O можно коснуться изнутри G такой гладкой поверхностью S: $x_1 = f(s)$, что $f'(s)/s$ имеет конечный интеграл, то O — обыкновенная по отношению ко всякому лучу, образующему с осью x_1 угол $< \pi/2$, и по отношению ко всякому оператору, удовлетворяющему условиям (A_3)–(C_3).*

Доказательство. Как следует из леммы 4 и дополнения к ней, можно считать, что f' — вогнутая, неубывающая. Рассмотрим часть U области G, ограниченную со стороны меньших x_1 поверхностью S. Луч l, образующий с осью x_1 угол $< \pi/2$, идет внутрь U, и потому функция, касающаяся нуля вдоль l, касается в O нуля также из U. А так как поверхность S гладкая, то можно воспользоваться теоремой 3. Нужно лишь проверить, что выполнено условие этой теоремы относительно k.

Но пользуясь тем, что f' — вогнутая, неубывающая, нетрудно убедиться, полагая $f(s) = \overline{f}(x)$, что $|\operatorname{grad}\overline{f}(x) - \operatorname{grad}\overline{f}(x')| \le C f'(|x - x'|)$. Сравнивая это с формулой (3) § 3, убеждаемся, что функция k пропорциональна f' и, стало быть, $k(x)/x$ имеет конечный интеграл. Поэтому, ссылаясь на теорему 3, получаем теорему 6.

§ 5. *Дополнения к теоремам 1–6*

1. В теореме 6 требуется, чтобы $f'(s)/s$ имела конечный интеграл. Следующая теорема показывает, что это условие близко к необходимому. Вследствие связи теорем 6 и 3 это верно также в отношении условия теоремы 3, что $k(r)/r$ имеет конечный интеграл.

Теорема 7. *Пусть $f(s)$ — такая выпуклая, дважды дифференцируемая при $s > 0$ функция, что $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(s)^2/s$ имеет бесконечный интеграл (от 0 до s_0) и $sf''(s) < (1-\varepsilon)f'(s)$ (при малых s и сколь угодно малом данном $\varepsilon > 0$)* [3]*. Тогда в области $x_1 > f(s)$ ($s = \sqrt{x_2^2 + \ldots + x_n^2}$) существует такая, касающаяся нуля в начале, функция u, что по крайней мере вблизи начала $\Delta u \leq 0$, где Δ — оператор Лапласа.*

Такую функцию при числе переменных $n \geq 3$ можно определить, например, следующим образом:

$$u = g(x_1) - g(f(s)), \tag{1}$$

где g находится из условия

$$g'(f(s)) = e^{-\int\limits_s^{s_0} s^{-1} f'^2(s)\, ds}. \tag{2}$$

Легко видеть, что $u > 0$ в области $x_1 > f(s)$ и касается нуля в начале. Вычисление, с учетом (2), дает

$$\Delta u = g''(x_1) - (n-2)g''(f) - g''(f)f'^2 - g'(f)f'',$$

откуда

$$\Delta u < g''(x_1) - (n-2)g''(f(s)).$$

Вычисляя же $g'''(f)$ и используя дополнительное условие, наложенное в теореме на функцию f, убеждаемся, что, по крайней мере при малых s, $g''(f) < 0$, т. е. функция $g'''(f)$ невозрастающая. Поэтому в области $x_1 > f(s)$ оказывается $\Delta u < 0$.

В общем случае $n \geq 2$, полагая $r = \sqrt{x_1^2 + s^2}$, вводим функцию $\overline{f}(r)$ так, что неравенство $x_1 > \overline{f}(r)$ определяет ту же область $x_1 > f(s)$. Тогда u можно найти, пользуясь теми же формулами (1), (2) с заменой f на $\overline{f}$ и s — на r.

---

[3] Примером функции, удовлетворяющей этому неравенству и другим поставленным условиям, может служить $f(s) = s/\sqrt{|\ln s|}$.

2. Условия, налагаемые в теоремах 1–6 на оператор L, выводятся из условий теоремы 1. При $c = 0$ условия (C) сводятся к (B); а то, что условие в теореме 1 при $c = 0$ близко к необходимому, показывает следующее утверждение.

Пусть при условиях теоремы 1 относительно области G, при данной функции p и данных a_{11}, b_1, существует такая функция g, не имеющая конечного интеграла [4)], *что*

$$b_1 + \left[\frac{p''(x_1)}{p'(x_1)} + g(x_1)\right] a_{11} \leq 0. \tag{3}$$

Тогда существует функция u, удовлетворяющая условиям теоремы 1, для которой всюду в G

$$L(u) \equiv a_{11}u_{11} + b_1 u_1 \leq 0.$$

Для доказательства определим функцию

$$v(x_1) = \int\limits_0^{x_1} p'(x) e^{-\int\limits_x^{x^0} g\,dx}\,dx. \tag{4}$$

Тогда из (3) легко найдем

$$a_{11}v'' + b_1 v' \leq 0, \tag{5}$$

а так как v зависит только от x_1, то при любом операторе L с данными коэффициентами a_{11}, b_1 и $c = 0$ будет $L(v) \leq 0$. Но $v = 0$ на всей плоскости $x_1 = 0$, вопреки требованию теоремы 1. Если же положить $u = v + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, то u будет касаться нуля только в начале координат и вместе с тем, согласно (5), будет

$$a_{11}u_{11} + b_1 u_1 \leq 0.$$

3. Условия того, чтобы точка была обыкновенной в отношении луча, идущего внутрь области, можно вывести проще, минуя теорему 2, получив при этом некоторые дополнительные результаты.

Введем следующие обозначения в отличие от принятых в § 3: r — расстояние от O,

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \qquad b = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

[4)] Т. е. существует такая последовательность $x^i \to 0$, для которой $\int\limits_{x^i}^{x^0} g(x)dx \to \infty$.

Теорема 8. *Пусть точки O можно коснуться изнутри G телом Q, поверхность S которого вблизи O, если O принята за начало и ось x_1 идет внутрь Q, представляется уравнением*

$$x_1 = f(r),$$

где $f(r)$ дважды дифференцируема при $r > 0$. Тогда точка O будет $r^{1+\alpha}$-обыкновенной по отношению ко всякому лучу, идущему внутрь Q, и по отношению ко всякому оператору, для которого найдется такая невозрастающая функция h с конечным интегралом, что вблизи выполнены условия:

$$(B_8) \qquad \psi \equiv b_1 - |f'(r)|b - \max\left[cf'(r)/r, f''(r)\right] a + \\ + \left[\alpha/(2r) + h(r)\right] (\sqrt{a_{11}} - \theta|f'(r)|\sqrt{a})^2 \geq 0;$$

$$(C_8) \qquad 2rc = \psi \geq 0,$$

где $0 \leq \theta \leq 1$. (При $f(r) \geq \gamma r$ можно заменить $2r$ там, где оно стоит, на $(1-\gamma)r$. Так как всегда $|f(r)| < r$, то $0 < 1-\gamma < 2$.)

Для доказательства производим преобразование

$$y_1 = x_1 - f(r),\ y_2 = x_2,\ \ldots,\ y_n = x_n.$$

Поверхность S отобразится в плоскость $y_1 = 0$, а тело Q — в полупространство $y_1 \geq 0$. Функция u, $r^{1+\alpha}$-касающаяся нуля в точке O, перейдет в функцию с тем же свойством. Вычисляя же коэффициенты $\overline{a}_{11}$, $\overline{b}_1$ преобразованного оператора и производя элементарные оценки, убедимся, что, в силу (B_8), (C_8), они удовлетворяют условиям (B_8), (C_8) теоремы 1 при $p(r) = r^{1+\alpha}$. Таким образом, придем к доказательству теоремы 8.

4. Теоремы 5, 6 выводятся из теоремы 8, если предположить $f(r)/r \geq f''(r)$ и воспользоваться леммой 3, заметив, что область $x_1 > f(r)$ содержится в области $x_1 > f(s)$ (если $f'(r) \geq 0$).

Если Γ не имеет в O обобщенной внутренней нормали, но точки O можно коснуться изнутри G конусом $x_1 = \gamma r_1$, то теорема 8 приложима и дает оценку для γ, т. е. для раствора конуса, при котором точка O заведомо будет $r^{1+\alpha}$-обыкновенной относительно лучей, идущих внутрь конуса.

Теорема 8 допускает также, что при $r > 0$ $\quad f(r) \leq 0$, и дает несколько больше того, что можно извлечь из теоремы 2. Впрочем, теорему 2 можно дополнить так, чтобы относящийся к такому случаю результат получался простой ссылкой на нее.

Особенно просто условия того, что точка O — обыкновенная, выводятся, если Γ в окрестности O дважды дифференцируема. Тогда, представляя Γ вблизи O уравнением $x_1 = f(x_2, \ldots, x_n)$, можно применить преобразование

$$y_1 = x_1 - f(x_2, \ldots, x_n),\ y_2 = x_2,\ \ldots,\ y_n = x_n.$$

5. Теорема 1 допускает следующее видоизменение.

Будем говорить, что u касается нуля в точке O не медленнее p, если существует такая последовательность точек

$$X_m \to O,$$

что

$$\frac{u(X_n)}{p(r_n)} < \mathrm{const},$$

где

$$r_n = r(X_n \Gamma).$$

Теорема 9. *Пусть для области G выполнено условие (1), а для функции u — условие (2а) теоремы 1. Пусть вместо (2б) выполнено условие: в O u касается нуля не медленнее p, причем $p(x)/x \to 0$ при $x \to 0$. Пусть, наконец, вместо условия (3) теоремы 1 выполнено следующее.*

Существует такая функция g с бесконечным интегралом[5]*, что коэффициенты оператора L удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$(B_9) \qquad b_1 + \left[\frac{p''(x_1)}{p'(x_1)} - g(x_1)\right] a_{11} \geq 0;$$

$$(C_9) \qquad x_1 c + b_1 + \left[\frac{p''(x_1)}{p'(x_1)} - g(x_1)\right] a_{11} \geq 0.$$

При этих условиях сколь угодно близко к плоскости $x_1 = 0$ есть точки, где $L(u) > 0$.

Для доказательства достаточно дословно повторить доказательство теоремы 1, пользуясь условиями (B_9), (C_9) вместо (B_1), (C_1) и вместо леммы 2 — следующей леммой.

Лемма 2а. *Если выпуклая положительная функция $f(y)$ касается нуля не медленнее $p(y)$, то при всякой $g(y)$ с бесконечным интегралом существуют сколь угодно малые y, при которых*

$$f'' > \left(\frac{p''}{p'} - g\right) f'.$$

Доказательство. Допуская, что всюду

$$f'' \leq \left(\frac{p''}{p'} - g\right) f',$$

---

[5] Под этим подразумевается, что $\int\limits_{x'}^{x''} g(x)dx \to \infty$ при $x' \to 0$.

получим

$$f'(y) \geq Cp'(y)e^{\int\limits_y^{y_0} g\,dy}.$$

А так как g имеет бесконечный интеграл, то отсюда при $y \to 0$ следует

$$\frac{f(y)}{p(y)} \to \infty,$$

т. е. f не может касаться нуля не медленнее p. Лемма доказана.

§ 6. *Некоторые приложения*

1. Как указано в § 1, теоремы 3–6 известным образом влекут теоремы единственности решения задачи Неймана. Легко сформулировать соответствующие результаты, комбинируя эти теоремы с теоремой 4 нашей работы [1]. Мы не делаем этого, так как в следующей работе получим более общие теоремы единственности.

2. Если дважды дифференцируемая функция $v \geq 0$ обращается в какой-либо точке $X \in G$ в нуль, то она касается здесь нуля не медленнее r^2. Если к тому же $L(v) \leq 0$, то в такой точке v касается нуля быстрее r^2 вдоль плоскости, определенной главными направлениями матрицы a_{ik}, отвечающими положительным собственным значениям. Из этих замечаний вытекает, например, следующее видоизменение теоремы 1 работы [1].

Теорема 10. *Пусть в G задан такой оператор L, что при соответствующем выборе оси x_1 всюду $a_{11} > 0$ и каждая точка $X^0 \in G$ имеет такую полуокрестность $V^+(X^0)$ (где $x_1 > x_1^0$), что в ней L удовлетворяет условиям теоремы 1 при $p = x_1^2$. Тогда, если в G $v \geq 0$, $L(v) \leq 0$ и хоть где-нибудь $v = 0$, то множество нулей функции v имеет точки сгущения на Γ.* (Если снять требование $a_{11} > 0$, то вместо условий теоремы 1 берем условия теоремы 9.)

Доказательство дословно то же, что и для теоремы 1 [1].

Для выполнения условий теоремы 1 при $p = x_1^2$ достаточно, чтобы в каждой точке X^0, если в нее переносить начало, было

$(B_{10})\quad b_1x_1 + a_{11} \geq 0, \qquad (C_{10})\quad cx_1^2 + b_1x_1 + a_{11} \geq 0.$

(Для выполнения условий теоремы 9 достаточно, чтобы при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ было

$$b_1x_1 + (1-\varepsilon)a_{11} \geq 0, \qquad cx_1^2 + b_1x_1 + (1-\varepsilon)a_{11} \geq 0.)$$

Ослабить эти условия, вообще говоря, невозможно, как показывает пример функции $v = x^2 + y^2$, которая касается нуля в точке $(0, 0)$ и удовлетворяет уравнению $xv_{xx} - v_x = 0$.

3. Применяя теоремы 1, 2 к оценке допустимых особенностей коэффициентов в теореме 2 работы [1], придем к следующему.

Теорема 11. *Пусть в G задан оператор L с условиями:*

1) *для каждой точки $X_0 \in G$*

$$\lim_{X \to X_0} b(X) r(XX_0) = 0, \qquad \lim_{X \to X_0} c(X) r(XX_0)^2 \geq 0;$$

2) *за исключением некоторого множества «существенно особых точек», без точек сгущения внутри G, для всякой точки X_0*

$$\lim_{X \to X_0} a(X) r(XX_0) = 0,$$

где a, b имеют смысл, принятый в п. 3 § 5.

Тогда, если в G задана функция v с условиями: $v \geq 0$, $L(v) \leq 0$ и $v(X_1) = 0$, то $v \equiv 0$ на всякой линии эллиптичности оператора L, проходящей через X_1.

Доказательство получается, если повторить доказательство теоремы 2б из [1], но вместо лемм 2 и 3 из [1] воспользоваться нашими теоремами 1 и 2, полагая в них $p(r) = r^2$ и $k(r) = Cr^2$. Теорема 11 не только несколько сильнее, но и проще теоремы 2 из [1].

Отметим, что в теореме 2б из [1], а также в лемме 3 и п. 6 § 4 [1] введено лишнее требование, чтобы невозрастающая функция h_1 с конечным интегралом удовлетворяла условию $yh_1(y) \to 0$ при $y \to 0$; этим свойством обладает всякая невозрастающая функция с конечным интегралом.

Статья поступила в редакцию
17.IV.1959

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.
2. *Келдыш М. В., Лаврентьев М. А.* О единственности задачи Неймана // Докл. АН СССР. 1937. Т. 16, № 3. С. 151–152.

Исследования о принципе максимума. IV

Известия высших учебных заведений. Математика. 1960. № 3. С. 3–15

§ 1. *Постановка задачи*

1. В предыдущих частях этих «Исследований» [1–3] мы рассматривали нигде не гиперболические линейные операторы второго порядка L над дважды дифференцируемыми функциями $u(X) \equiv u(x_1, \ldots, x_n)$.

Теперь нашей задачей будет распространение полученных результатов на случай функций $u(X)$, дважды дифференцируемых лишь почти везде и при том в соответственно обобщенном смысле. Конечно, функции подчиняются некоторым дополнительным условиям, которые, как будет показано, существенны для справедливости принципа максимума.

При намеченной более общей постановке задачи, требования, налагаемые на операторы L в теоремах, аналогичных соответствующим теоремам в [1–3], должны быть несколько усилены. Но для операторов с ограниченными коэффициентами все результаты, полученные в [1–3], обобщаются дословно.

В настоящей статье мы дадим обобщение только части результатов работ [1–3], относя остальное в следующее сообщение.

2. Рассматриваемые функции $u(X)$ подразумеваются определенными и непрерывными в некоторой области G. Определим, в каком смысле понимаются их производные.

Именно *предполагается, что $u(X)$ имеет почти везде в G «общие» первый и второй дифференциалы.* При этом, говоря, что $u(X)$ имеет в точке X_0 «общие» дифференциалы, мы имеем в виду, что существуют такие числа u_i, $u_{ik} = u_{ki}$, что

$$\Delta u = \sum u_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum u_{ik} \Delta x_i \Delta x_k + \varepsilon \sum \Delta x_i^2, \tag{1}$$

причем для каждого направления l, выходящего из точки X_0, существует последовательность точек $X_m \to X_0$, для которой направления $X_0 X_m$ сходятся к l и $\varepsilon(X_m) \to 0$. Коэффициенты u_i, u_{ik} по определению принимаются за первые и вторые производные в точке X_0.

Соответственно сказанному, всюду дальше, если явно не оговорено иное, под u_i, u_{ik} подразумеваются производные в указанном смысле, а под du, d^2u — общие дифференциалы:

$$du = \sum u_i dx_i, \quad d^2u = \sum u_{ik} dx_i dx_k.$$

Это определение производных не однозначно, так как в одной точке, вообще говоря, может быть несколько (бесконечно много) разных общих дифференциалов. Но это не имеет значения: мы считаем, что там, где они существуют, они как-то выбраны и зафиксированы.

Из данного определения du и d^2u легко заключить, что они обладают следующими свойствами:

1) при всяком дважды непрерывно дифференцируемом преобразовании они преобразуются как обычные дифференциалы;

2) если в окрестности точки X_0 $\quad u(X) \geq \overline{u}(X)$, а в самой точке X_0 $\quad u = \overline{u}$, функция $\overline{u}$ дважды дифференцируема в обычном смысле, а u имеет общие дифференциалы du, d^2u, то в X_0 $\quad du = d\overline{u}$, $d^2u \geq d^2\overline{u}$.

3. Частным случаем общих дифференциалов являются аппроксимативные дифференциалы, определяемые из той же формулы (1) при условии, что при $X \to X_0$, $\varepsilon \to 0$ аппроксимативно, т. е. с точностью до множества, плотность которого в точке X_0 равна нулю.

Из известных свойств обобщенных производных легко заключить, что функция, имеющая первые и вторые обобщенные производные u_i, u_{ik}, почти везде имеет общие дифференциалы [1)], так что в операторе L можно иметь в виду обобщенные производные. Преимущество общих производных состоит, в частности, в том, что они охватывают как обобщенные, так и обычные вторые производные, которые, в отличие от обобщенных, не обязаны быть суммируемыми.

4. Формулируем теперь дополнительное условие, налагаемое на функции $u(X)$.

Пусть S — поверхность, представляющая функцию $u(X)$ в прямоугольных координатах $x_1, \ldots, x_n, z$. Пусть выделена область $V \subset G$ и S_V есть часть поверхности S, расположенная над V. Пусть M_V — множество тех точек, где S_V имеет опорные плоскости.

[1)] Доказательство будет дано в следующей статье. (См. теорему 7 на с. 549 настоящего издания. — *Прим. ред.*)

На $u(X)$ *налагается следующее условие* (A). Для всякой области $V \subset G$ сферическое изображение любого множества меры нуль, содержащегося в M_V, должно иметь также нулевую меру. При этом сферическое изображение определяется нормалями не к касательным, а к опорным плоскостям. Касательных же плоскостей в точках некоторого множества меры нуль может и не существовать.

Условие (A) равносильно тому, что лежащая над V часть $\overline{S}_V$ поверхности выпуклой оболочки поверхности S_V имеет «абсолютно непрерывное сферическое изображение», т. е. площадь этого изображения есть абсолютно непрерывная функция множества. (Гладкость $\overline{S}_V$ отсюда не вытекает.)

Равносильность этого требования предыдущему следует из того, что области, где поверхность выпуклой оболочки не касается S_V, имеют, как известно, нулевую площадь сферического изображения.

Всюду дальше неизменно имеются в виду функции, удовлетворяющие условию (A).

5. В следующей статье будет доказано:

1) условие (A) выполнено, если в каждой точке X $u(X)$ дважды дифференцируема или даже имеет только первые производные u_i и конечные верхние и нижние вторые производные числа $\overline{u}_{ii}$, $\underline{u}_{ii}$;

2) условие (A) выполнено, если $u(X)$ имеет обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью, где n — число переменных x_i.

6. То, что свойство (A) существенно для принципа максимума, показывает следующее замечание.

Г. Буземан и В. Феллер [4] показали, что существуют гладкие замкнутые выпуклые поверхности, у которых почти все точки суть точки уплощения, т. е. такие, что в них кривизны всех нормальных сечений равны нулю. Функция, представляющая в прямоугольных координатах x, y, z кусок такой поверхности, отрезанный плоскостью $z = 0$, удовлетворяет почти везде уравнению Лапласа, а на границе равна нулю, т. е. принцип максимума для уравнения Лапласа здесь нарушается.

7. Мы будем рассматривать операторы

$$L(u) = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu,$$

где u_{ik}, u_i понимаются в определенном выше смысле. Коэффициенты подразумеваются определенными и не обращающимися одновременно все в нуль почти везде; соотношения типа $L(u) \leq 0$ понимаются так же, как выполненные почти везде. Подразумевается, что L негиперболичен, т. е. что матрица $\|a_{ik}\|$ почти везде не имеет отрицательных собственных значений.

Все это имеется в виду дальше без особых оговорок.

§ 2. Основная лемма

1. Лемма 1. *Пусть в ограниченной области G задана функция $u(X)$, причем, помимо условий, подразумеваемых п. 2, 4 § 1, выполнены следующие условия:*

1) G лежит в полупространстве R, ограниченном некоторой плоскостью P и ее граница Γ имеет на P $(n-1)$-мерную область V;

2) $u(X) > 0$ и для всякой точки $X_0 \in \Gamma \setminus V$ $\varliminf_{X \to X_0} u(X) > 0$;

3) $u(X)$ касается в некоторой точке $O \in V$ нуля быстрее r^{1+q}, $q \geq 0$ [2].

При этих условиях, при всяком $\varepsilon > 0$ и при всякой функции $h(s)$ с конечным интегралом [3]*, в G существует множество M положительной меры, где du, d^2u существуют, $\operatorname{grad} u$ образует с внутренней нормалью к плоскости P угол, меньший ε, и*

$$d^2u > \left[\frac{q}{s} + h(s)\right] |\operatorname{grad} u| ds^2, \tag{I}$$

$$|\operatorname{grad} u| > \frac{u}{s}, \tag{II}$$

где s — координата в направлении $\operatorname{grad} u$ (так что $s|\operatorname{grad} u| = \sum u_i x_i$), и соответственно ds — смещение в направлении $\operatorname{grad} u$.

Доказательство леммы разлагается на доказательство ряда утверждений, в которых условия леммы подразумеваются выполненными.

2. Рассуждения будем вести в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве, где введены прямоугольные координаты $x_1, \ldots, x_n$, z с началом в точке O и осью x_1, направленной по внутренней нормали к плоскости P.

Рассмотрим поверхность S, представляемую в координатах $x_1, \ldots, x_n$, z уравнением $z = u(X)$.

Пусть l — луч, идущий из начала O в плоскости $z = 0$ в сторону $x_1 > 0$. Проведем через l и ось z двумерную плоскость P_l и введем в ней координаты: z по оси z и s по лучу l.

Пусть S_l — проекция поверхности S на плоскость P_l. Натянем на S_l снизу выпуклую кривую L_l. Под этим подразумевается, что L_l есть часть границы выпуклой оболочки S_l, обращенная в сторону меньших z. Пусть $z = f_l(s)$ есть уравнение кривой L_l.

---

[2] Согласно определению, данному в [3], $u(X)$ касается нуля в точке $O \in \Gamma$ быстрее r^{1+q}, если в G существуют такие точки $X_m \to O$, что $u(X_m)/r_m^{1+q} \to 0$, где $r_m = r(X_m\Gamma)$ — расстояние X_m до Γ.

[3] Согласно определению, данному в [1], это значит, что $h(s)$ определена при $s > 0$ и $\int\limits_0^{s_0} h(s)ds < \infty$.

Проведя через каждую точку кривой L_l $(n-1)$-мерную плоскость, перпендикулярную плоскости P_l, получим выпуклый цилиндр C_l. Можно сказать, что это есть выпуклый цилиндр, натянутый на S снизу перпендикулярно лучу l. Очевидно, C_l есть цилиндр, описанный около выпуклой поверхности $\overline{S}$, натянутой на S снизу, т. е. около той части границы выпуклой оболочки S, которая лежит над $G \cup \Gamma$ и обращена в сторону $z<0$.

3. Утверждение 1. *В плоскости $z=0$ существует такой конус K с вершиной O, содержащий на границе положительную полуось x_1, что для всех лучей $l \subset K$ функции $f_l(s)$ касаются нуля при $s \to 0$ быстрее s^{1+q} и притом равномерно по l. Последнее означает, что при всяком $\varepsilon > 0$ существует такое $s(\varepsilon)$, что для всякого $l \subset K$ найдется такое $s_l > s(\varepsilon)$, при котором $f_l(s_l)/s_l^{1+q} < \varepsilon$.*

Доказательство. По условию $u(X)$ касается в O нуля быстрее r^{1+q}, т. е. существует такая последовательность точек $X_m \to O$, что

$$\frac{u(X_m)}{x_{1,m}^{1+q}} \to 0, \tag{1}$$

так как расстояние близкой к O точки X_m до границы Γ есть как раз ее координата x_1.

Из точек X_m можно выбрать такую последовательность, что лучи OX_m сходятся к некоторому лучу l_0, может быть, лежащему в плоскости $x_1=0$. Ограничимся дальше точками этой последовательности.

Повернем оси $x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы луч l_0 оказался в плоскости x_1, x_2, именно в той ее полуплоскости, где $x_2>0$, если l_0 не идет по оси x_1. Если же l_0 идет по оси x_1, то повернем оси $x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы для точек X_m с достаточно большими номерами было $x_{2,m} \geq 0$.

При таком выборе осей, при данном $\varepsilon>0$, можно утверждать, что для точек X_m с достаточно большими номерами m, будет

$$x_1>0, \quad x_2 \geq 0, \quad |x_3|+\ldots+|x_n| < \varepsilon(x_1+x_2). \tag{2}$$

Ограничимся только теми точками X_m, для которых это верно.

Пусть теперь $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — направляющие косинусы произвольного луча l по отношению к выбранным осям. Определим конус K условиями

$$\alpha_1 - \varepsilon \sum_{i=3}^{n} |\alpha_i| \geq \alpha_0 = \text{const} > 0, \quad \alpha_2 - \varepsilon \sum_{i=3}^{n} |\alpha_i| \geq 0. \tag{3}$$

Покажем, что этот конус обладает требуемым свойством. Он, очевидно, содержит положительную полуось x_1.

Если $l \subset K$, то координата s вдоль l будет, согласно (2) и (3), такова:

$$s = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \geq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \varepsilon \sum_{i=3}^{n} |\alpha_i|(x_1 + x_2) \geq \alpha_0 x_1. \quad (4)$$

Из определения функции $f_l(s)$ очевидно, что $u(X) \geq f_l(s)$. Поэтому из (1), с учетом (4), следует, что, каково бы ни было $\delta > 0$, при достаточно больших m и для всех $l \subset K$ будет

$$\frac{f_l(s_m)}{s_m^{1+q}} < \delta.$$

Этим наше утверждение доказано.

В дальнейшем мы без особых оговорок будем иметь в виду только лучи l, содержащиеся в такого рода конусе.

4. Утверждение 2. *При всяких $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существуют такие положительные $\alpha < \varepsilon$, $s_0 < \delta$, $s_1 > s_0$ (причем s_1 не зависит от δ), что как только луч l образует с осью x_1 угол $\varphi < \alpha$, так на кривой L_l на отрезке $s_0 < s < s_1$ нет точек, служащих проекциями точек края поверхности S и даже точек края выпуклой поверхности $\overline{S}$, натянутой на S снизу. Иными словами, на участке $s_0 < s < s_1$ цилиндр C_l не касается точек края поверхности $\overline{S}$.*

Доказательство. Граница Γ области G состоит из двух частей: области V, лежащей на плоскости $x_1 = 0$, и остальной части $\Gamma \setminus V$.

По условию (3), наложенному на $u(X)$, $u(X) > 0$ и при $X_0 \in \Gamma \setminus V$

$$\varliminf_{X \to X_0} u(X) > 0.$$

Поэтому часть края поверхности S, лежащая над $\Gamma \setminus V$, удалена от плоскости $z = 0$ на положительное расстояние. Отсюда следует, что тем же свойством обладает соответствующая часть края поверхности $\overline{S}$.

Потому $\overline{S}$, включая ее край, нигде не касается плоскости $z = 0$, кроме как на каком-то множестве $N \subset V$, удаленном от границы V на положительное расстояние.

С другой стороны, цилиндр C_l, соответствующий лучу l, идущему по оси x_1, касается плоскости $z = 0$ при $s = x_1 = 0$. Поэтому при s, меньших некоторого $s' > 0$, он не только не касается части края поверхности $\overline{S}$, лежащей над $\Gamma \setminus V$, но удален от нее на положительное расстояние.

Отсюда очевидно, что цилиндры C_l, отвечающие лучам l, образующим с осью x_1 достаточно малые углы, будут обладать тем же свойством на некотором участке $0 < s < s_1$.

Пусть D — диаметр области V. Пусть луч l образует с осью x_1 угол φ. Тогда $(n-1)$-мерная плоскость, перпендикулярная лучу l и пересекающая его в точке, где $s > D\sin\varphi$, не пересекает V. Поэтому на участке $s > D\sin\varphi$ цилиндр C_l не касается части края поверхности $\overline{S}$, лежащей над V.

Выбирая теперь $\alpha < \varepsilon$ так, что $D\sin\alpha < s_1$, и полагая $s_0 = D\sin\alpha$, получим, что для всякого луча l, образующего с осью x_1 угол $\varphi < \alpha$, цилиндр C_l не касается края поверхности $\overline{S}$ на участке $s_0 < s < s_1$. При этом мы могли взять также $s_0 = D\sin\alpha$ меньше данного δ. Этим наше утверждение доказано.

В дальнейшем имеются в виду определенные здесь α, s_0, s_1 для каких-либо ε и δ и речь идет только о лучах l, образующих с осью x_1 углы $\varphi < \alpha$.

5. Утверждение 3. *На участке (s_0, s_1) те точки кривой L_l, где кривизна отлична от нуля (или не существует), суть проекции тех точек поверхности S, где ее касается цилиндр C_l.*

Доказательство. Пусть S_l — проекция поверхности S на плоскость P_l. Кривая L_l есть обращенная в сторону $z < 0$ часть границы выпуклой оболочки S_l. Поэтому на основании известного свойства выпуклой оболочки там, где L_l не касается S_l, ее кривизна равна нулю. Вместе с тем точки, где она касается S_l, суть, очевидно, проекции тех точек на поверхности S, где ее касается цилиндр C_l (касание же края на участке (s_0, s_1) исключено).

6. Утверждение 4. *В интервале (s_0, s_1) функции $f_l(s)$ для почти всех l имеют абсолютно непрерывные первые производные.*

Доказательство. По условию (A) п. 4 § 1, налагаемому на $u(X)$, выпуклая поверхность $\overline{S}$, натянутая на S, имеет абсолютно непрерывное сферическое изображение.

Абсолютная непрерывность $f_l'(s)$ равносильна абсолютной непрерывности нормали к цилиндру C_l как функции s. То, что нормали абсолютно непрерывны у почти всех цилиндров C_l, следует из абсолютной непрерывности сферического изображения поверхности $\overline{S}$.

Для доказательства заметим, что сферическое изображение цилиндра C_l есть попросту некоторая дуга l' большого круга, получающегося в сечении сферы плоскостью P_l. Абсолютная непрерывность нормали к C_l означает, что множеству образующих цилиндра (соответственно, точек кривой L_l), имеющему меру нуль, отвечает на l' множество также нулевой меры.

Нарушение же этого последнего свойства может происходить лишь от того, что на L_l существует множество меры нуль, в точках которого верхняя кривизна L_l бесконечна и это множество (т. е. соответствующее множество на C_l) имеет сферическое изображение Q_l ненулевой линейной меры. (Говоря языком анализа, речь идет о тех значениях s, при которых верхняя вторая производная $f_l''(s)$ бесконечна.)

Если бы указанное свойство имело место для множества лучей l положительной меры, то мы имели бы множество $Q = \cup Q_l$ положительной меры (в смысле меры на сфере). Это Q было бы сферическим образом множества W на поверхности $\overline{S}$, где кривизна ее обращается в бесконечность. Это очевидно из утверждения 3 и того, что кривизны сечений поверхности $\overline{S}$ в какой-либо ее точке не меньше кривизн сечений цилиндра C_l в той же точке. (Кроме того, имеем в виду, что согласно п. 4 речь идет о частях цилиндров C_l, которые не касаются края поверхности $\overline{S}$.)

Однако, как известно, выпуклая поверхность почти везде дважды дифференцируема, а потому $\operatorname{mes} W = 0$. По условию абсолютной непрерывности сферического изображения поверхности $\overline{S}$ отсюда следует, что $\operatorname{mes} Q = 0$.

Полученное противоречие показывает, что для почти всех лучей l цилиндры C_l имеют абсолютно непрерывные нормали, т. е. $f_l'(s)$ абсолютно непрерывна.

7. Утверждение 5. *Пусть $h(s)$ — функция с конечным интегралом. При достаточно малом s_0 на почти всех лучах l, достаточно близких к оси x_1, в интервале (s_0, s_1) существуют множества M_l положительной меры, где*

$$f_l''(s) > \left(\frac{q}{s} + h(s)\right) f_l'(s). \tag{5}$$

Доказательство. Пока оставляем s_0 неопределенным, не уточняя нужную степень его малости.

По утверждению 4, $f_l'(s)$ абсолютно непрерывна на интервале (s_0, s_1) для почти всех лучей l, достаточно близких к оси x_1. Поэтому можно ограничиться только такими лучами.

Допустим, что в противоположность доказываемому на таком луче почти везде в интервале (s_0, s_1)

$$f'' \leq \left(\frac{q}{s} + h\right) f'.$$

Индекс l у функции f пока, для простоты, опускаем. Так как f' абсолютно непрерывна, то интегрирование от s до s_1 дает

$$f'(s) \geq f'(s_1) \left(\frac{s}{s_1}\right)^q e^{-\int\limits_s^{s_1} h\,ds}. \tag{6}$$

Так как h имеет конечный интеграл, то последний множитель больше какого-то $a > 0$. Далее, значение s_1 фиксировано и потому, независимо от выбора луча l, $f'(s_1)$ больше какого-то $b > 0$. Поэтому вместо (6) можно написать

$$f'(s) \geq C(1 + q)s^q,$$

где C — подходящая положительная постоянная, не зависящая от l. Отсюда $f(s) - f(s_0) \geq C(s_0^{1+q} - s^{1+q})$ и тем более

$$f_l(s) \geq C(s^{1+q} - s_0^{1+q}). \tag{7}$$

Если бы наше утверждение 5 было неверным, то полученное неравенство было бы верно на интервале (s_0, s_1) для множества лучей l, имеющего положительную меру в сколь угодно узком конусе вблизи оси x_1. Границу ε для угла раствора этого конуса, т. е. для углов φ между l и осью x_1, можно считать фиксированной. Поэтому s_1 фиксировано. Но величиной s_0 можно еще распорядиться подходящим образом.

По утверждению 1 функции $f_l(s)$ касаются нуля быстрее s^{1+q} равномерно по l. Поэтому между 0 и s_1 найдется такое s', что при некотором s_l в интервале (s', s_1)

$$f_l(s_l) < \frac{1}{2} C s_l^{1+q} \quad (s' < s_l < s_1). \tag{8}$$

Выберем s_0 так, что $2s_0 < s'$ и, следовательно, интервал (s', s_1) заключается в (s_0, s_1).

Тогда можно соединить неравенства (7) и (8), что даст $s_l < 2s_0$. А так как $s_l > s'$, то тем более $s' < 2s_0$.

Это противоречит выбору s_0, чем наше утверждение 5 доказано.

8. Утверждение 6. *Лемма 1 верна.*

Доказательство. В точках кривой L_l, где выполнено (5), кривизна ее не равна нулю. Поэтому согласно утверждению 3 им отвечают точки цилиндра C_l, где он касается поверхности S (так как касание края S исключено по выбору s_0 и s_1).

По утверждению 5 неравенство (5) верно на множествах положительной линейной меры для почти всех лучей, близких к оси x_1. Следовательно, множество соответствующих точек X, где цилиндры C_l касаются S, имеет сферическое изображение положительной меры. Отсюда по абсолютной непрерывности сферического изображения следует, что само это множество имеет положительную меру.

Наконец, по основному условию п. 2 § 1 почти везде существуют общие дифференциалы du, d^2u. Потому мы имеем множество M положительной меры, где выполнены одновременно следующие свойства: I) C_l касается S; II) имеет место (5); III) существуют du, d^2u.

Из I очевидно, что в точке $X \in M$ $\operatorname{grad} u$ направлен параллельно лучу l и

$$u(X) = f_l(s), \quad |\operatorname{grad} u(X)| = f_l'(s). \tag{9}$$

Из III и того, что C_l касается S снизу, следует

$$d^2u \geq f_l''(s) ds^2. \tag{10}$$

Соединяя (5), второе равенство (9) и (10), получаем на M

$$d^2u > \left(\frac{q}{s} + h(s)\right) |\operatorname{grad} u| ds^2. \tag{11}$$

Наконец, по выпуклости $f_l(s)$, $sf_l'(s) > f_l(s)$, откуда, вследствие (9),

$$|\operatorname{grad} u| > \frac{u}{s}. \tag{12}$$

Так как $\operatorname{grad} u$ направлен параллельно l, а речь шла о лучах, образующих с осью x_1 сколь угодно малые углы, то неравенства (11), (12) и дают нам утверждение леммы.

§ 3. *Основная теорема*

1. Теорема 1. *Пусть область G и функция $u(X)$ удовлетворяют условиям леммы 1. Пусть в G задан оператор L, подчиненный следующему условию: существуют такое $\varepsilon > 0$ и такая функция h с конечным интегралом, что как только ось x_1 образует с внутренней нормалью l к плоскости P угол $< \varepsilon$, так почти везде в G выполнены неравенства*

(B_1) $\quad \left(\dfrac{q}{x_1} + h(x_1)\right) a_{11} + b_1 \geq 0,$

(C_1) $\quad \left(\dfrac{q}{x_1} + h(x_1)\right) a_{11} + b_1 + x_1 c \geq 0.$

Тогда в G имеется множество положительной меры, где $L(u) > 0$ [4]*.*

Замечание. Предполагается, что почти везде, хотя бы в одном из соотношений (B_1), (C_1), имеет место строгое неравенство. (Впрочем, основываясь на том, что почти везде коэффициенты a_{ik}, b_l, c не обращаются все одновременно в нуль, можно убедиться, что (B_1), (C_1) будут строгими неравенствами почти везде при всех допустимых по условию направлений оси x_1, исключая, может быть, конечное их число.)

Следствие. Тот же результат имеет место, если все коэффициенты оператора L ограничены, а $a_{11} > \mathrm{const}$, так как тогда неравенства (B_1), (C_1), очевидно, выполняются, как только ε достаточно мало, а h превосходит достаточно большое число.

Действительно, соотношения (B_1), (C_1) не нарушаются при замене функции h на бо́льшую, например $h + 1$.

[4] Заметим, что при $\varepsilon = 0$ условия этой теоремы превращаются в соответствующие условия теоремы 1 из [3], отнесенные к случаю функции $u(X)$, касающейся нуля быстрее x_1^{1+q}.

Вместе с тем легко видеть, что если бы (B_1), (C_1) представляли собой равенства и оставались бы ими при указанной замене h, то отсюда следовало бы, что все коэффициенты оператора обращаются в нуль. Согласно же условию п. 7 § 1, это допускается самое большее на множестве меры нуль.

2. Доказательство теоремы 1. Мы покажем, что искомое множество M, где $L(u) > 0$, есть как раз то M, существование которого установлено леммой 1 (пренебрегая множеством нуль, мы считаем, что L определен и не исчезает тождественно во всех точках множества M).

Возьмем какую-либо точку $X \in M$ и направим ось x_1 из точки O по $\operatorname{grad} u(X)$, так что координата вдоль $\operatorname{grad} u(X)$ и будет x_1. Поэтому неравенство (I) леммы 1 перепишется в виде

$$d^2u > \left(\frac{q}{x_1} + h(x_1)\right) |\operatorname{grad} u|\, dx_1^2,$$

откуда, вследствие негиперболичности L,

$$\sum a_{ik}u_{ik} \geq a_{11}\left(\frac{q}{x_1} + h(x_1)\right) |\operatorname{grad} u|. \tag{1}$$

Так как ось x_1 направлена вдоль $\operatorname{grad} u(X)$, то в точке X

$$u_1 = |\operatorname{grad} u|, \quad u_2 = \ldots = u_n = 0,$$

так что

$$\sum b_i u_i = b_1 |\operatorname{grad} u|. \tag{2}$$

Если в точке X $c > 0$, то $cu > 0$, и поэтому из (1) и (2) следует

$$L(u) > \left[a_{11}\left(\frac{q}{x_1} + h(x_1)\right) + b_1\right] |\operatorname{grad} u|.$$

Отсюда, вследствие условия (B_1) нашей теоремы 1, вытекает, что в точке $X \in M$, где $c > 0$, $L(u) > 0$.

Если же в точке X $c = 0$, то условия (B_1), (C_1) совпадают. Тогда, в силу замечания к теореме 1, в (B_1) должно иметь место неравенство. Поэтому, складывая (1) и (2), получаем, что в точке $X \in M$, где $c = 0$, $L(u) > 0$.

Допустим теперь, что в точке X $c < 0$. Тогда из неравенства (II) леммы 1, поскольку $s = x_1$, следует

$$cu > x_1 c\, |\operatorname{grad} u|. \tag{3}$$

Складывая (1)–(3), получаем, что если в точке $X \in M$ $c < 0$, то

$$L(u) > \left[a_{11}\left(\frac{q}{x_1} + h(x_1)\right) + b_1 + cx_1\right] |\operatorname{grad} u|,$$

откуда, вследствие условия (C_1), вытекает, что в такой точке X $L(u) > 0$.

Таким образом, оказывается, что во всякой точке $X \in M$, независимо от знака c, $L(u) > 0$, и теорема 1 доказана.

§ 4. *Распространение нулей до границы области*

1. Лемма 2. *Пусть в области G задана функция $u(X) \geq 0$. Пусть $u(X_0) = 0$ и через точку X_0 проходит такая плоскость P_0, что (хотя бы в некоторой окрестности точки X_0) множество E, где $u(X) = 0$, лежит по одну сторону от P_0 и не имеет на P_0 других точек, кроме X_0. Тогда сколь угодно близко к X_0 найдется точка $X_1 \in E$ со следующими свойствами:*

1) через X_1 проходит плоскость P_1 со свойствами, аналогичными свойствам плоскости P_0, и образующая с P_0 сколь угодно малый угол;

2) эта плоскость P_1 отделяет такую полуокрестность V точки X_1, что функция $u(X)$ касается в X_1 нуля из V, т. е. в V существует такая последовательность точек $X^m \to X_1$, что $u(X^m)/r(X^m P_1) \to 0$.

Эта лемма означает, в частности, что если X_0 — изолированный нуль функции $u(X)$, то в X_0 $u(X)$ касается нуля.

2. Доказательство леммы 2. Ограничимся сферической окрестностью точки X_0.

Построим поверхность S с уравнением $z = u(X)$ и натянем на нее снизу выпуклую поверхность $\overline{S}$. Тогда $\overline{S}$ имеет с плоскостью $z = 0$ общую часть $\overline{E}$, которая является выпуклой оболочкой множества E.

Плоскость P_0 является опорной к $\overline{E}$ в точке X_0 и не содержит других точек из $\overline{E}$. Поэтому граница множества $\overline{E}$ имеет вблизи X_0 сферическое изображение положительной площади. Речь идет о сферическом изображении в плоскости $z = 0$, определяемом $(n-1)$-мерными опорными плоскостями.

Сферическое изображение тех опорных плоскостей, каждая из которых касается выпуклой области более чем в одной точке, имеет, как известно, меру нуль. Поэтому можно ограничиться только такими точками на границе $\overline{E}$, через которые проходят опорные плоскости, не содержащие других точек $\overline{E}$. По известному свойству выпуклой оболочки, каждая такая точка X принадлежит вместе с тем множеству E. Кроме того, мы можем ограничиться точками X, в которых опорные плоскости к $\overline{E}$ образуют с P_0 углы, меньшие любого фиксированного ε. (В частности, если нормали к $\overline{E}$ в точке X_0 заполняют целый конус, то рассматриваем саму точку X_0.)

В каждой такой точке, если ее рассматривать как точку поверхности $\overline{S}$, плоскость $z = 0$ является опорной к $\overline{S}$. Если бы вместе с этим в такой точке X имелась бы и другая опорная плоскость к $\overline{S}$, то ее сферическое изображение содержало бы целую дугу большого круга. Поэтому, в силу предыдущего вывода, сферическое изображение множества всех таких точек имело бы положительную площадь. Но эти точки X принадлежат поверхности S и множество их имеет, очевидно, меру нуль, поскольку они лежат на границе выпуклой области $\overline{E}$. Следовательно, по условию (A) п. 4 § 1 сферическое изображение множества точек X имеет меру нуль.

Полученное противоречие показывает, что не может быть, чтобы во всех рассматриваемых точках X поверхность $\overline{S}$ имела опорные плоскости, отличные от $z = 0$.

Таким образом, сколь угодно близко к точке X_0 найдется точка X_1 со следующими свойствами:

1) X_1 принадлежит E и лежит на границе $\overline{E}$;

2) $(n-1)$-мерная опорная плоскость P_1 к E в точке X_1 не содержит других точек из E и даже из $\overline{E}$;

3) в X_1 нет других опорных плоскостей к поверхности $\overline{S}$, кроме плоскости $z = 0$, так что, вследствие выпуклости $\overline{S}$, эта плоскость — касательная к $\overline{S}$.

3. Покажем, что точка X_1 с указанными свойствами удовлетворяет требованиям леммы.

Первое из этих требований выполнено, так как оно совпадает с отмеченным свойством 2).

Второе также выполнено. Действительно, пусть V — полуокрестность точки X_1 (на плоскости $z = 0$), ограниченная плоскостью P_1, не содержащая точек из $\overline{E}$. Проведем через P_1 n-мерную плоскость Q под малым углом к плоскости $z = 0$ так, чтобы она проходила над V. Так как плоскость $z = 0$ — касательная к поверхности $\overline{S}$, то такая плоскость Q пересекает $\overline{S}$.

Очевидно, при достаточно малом наклоне плоскости Q она отсекает от $\overline{S}$ шапку. А так как $\overline{S}$ натянута на поверхность S, то на такой шапке есть точки поверхности $S : z = u(X)$. И если α — угол наклона плоскости Q, то для таких точек будет

$$\frac{u(X)}{r(XP_1)} < \operatorname{tg}\alpha.$$

Беря $\alpha \to 0$, приходим к выводу, что $u(X)$ касается в точке X_1 нуля из полуокрестности V.

4. Теорема 2. *Пусть в ограниченной области G задан такой оператор L, что во всякой замкнутой области, содержащейся в G, его коэффициенты ограничены и $a_{11} > \mathrm{const} > 0$. Тогда, если в G задана такая функция $u(X) \geq 0$, что $L(u) \leq 0$, и хотя бы в одной точке $X_0 \in G$ $u(X_0) = 0$, то множество E, где $u(X) = 0$, имеет точки сгущения на границе области G.*

Имеет место и более сильная

Теорема 2а. *Пусть в ограниченной области G задан оператор L со следующим свойством. Существует такое направление l и для каждой точки $X_1 \in G$ — такая ее окрестность $V(X_1)$, такие $q \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и функция h с конечным интегралом, что, перенеся начало в X_1 и поворачивая оси так, чтобы ось x_1 образовывала с направлением l угол, меньший ε, будем иметь в той части $V(X_1)$, где $x_1 > 0$, те же неравенства (B_1), (C_1), что в теореме 1.*

Пусть функция $u(X) \geq 0$ такова, что $L(u) \leq 0$ и, кроме того, если для точки X_1 $q > 0$, то в X_1 $u(X)$ дифференцируема и существуют такие

$p > q$ и $N = N(X_1)$, что

$$|\operatorname{grad} u(X) - \operatorname{grad} u(X_1)| < Nr(XX_1)^p. \tag{1}$$

(Это, в частности, так, если $\operatorname{grad} u$ *удовлетворяет условию Липшица с показателем $p > q$.)*

Тогда, если хоть где-нибудь в G $u(X) = 0$, то множество E, где $u(X) = 0$, имеет точки сгущения на границе G.

Очевидно, теорема 2 содержится в теореме 2а.

Заметим, что если предполагать $u(X)$ дважды дифференцируемой и $L(u) \leq 0$ определенным всюду, то в условиях, налагаемых на L, можно взять любое $q < 1$ $(q > 0)$ и $\varepsilon = 0$. Доказательство получающейся таким путем теоремы повторяет доказательство теоремы 1а в [1], если в нем сослаться на теорему 1 из [3].

5. Доказательство теоремы 2а. Допустим, вопреки утверждению теоремы, что множество E не имеет точек сгущения на границе G. Тогда E замкнуто и имеет опорные плоскости любого направления.

Пусть P_0 — опорная плоскость к E с внешней нормалью, направленной по l. Пусть $\overline{E}$ — выпуклая оболочка множества E. Ее «грань» $\overline{E}P_0$ есть выпуклая оболочка «грани» EP_0. Поэтому на краю $\overline{E}P_0$ есть хотя бы одна такая точка $X_0 \in E$, что проходящая через нее $(n-2)$-мерная опорная плоскость к $\overline{E}P_0$ не содержит других точек из $\overline{E}$.

Пользуясь известными свойствами выпуклой оболочки и ссылаясь на лемму 2, можно будет указать, сколь угодно близко к X_0, точку X_1 со следующими свойствами:

1) через X_1 проходит опорная плоскость P_1 к E, не содержащая других точек из E и образующая с P_0 сколь угодно малый угол;

2) $u(X)$ касается в X_1 нуля из той полуокрестности $V(X_1)$, ограниченной плоскостью P_1, где нет точек множества E, так что в $V(X_1)$ $u(X) > 0$. Если в окрестности точки X_1 выполнено неравенство (1), то $u(X)$ касается в X_1 нуля быстрее r^{1+q}.

Перенесем начало в точку X_1 и повернем оси так, чтобы ось x_1 пошла по нормали к плоскости P_1 внутрь полуокрестности $V(X_1)$. Тогда согласно условиям теоремы в полуокрестности $V(X_1)$ для L и $u(X)$ выполнены условия теоремы 1.

Поэтому, в силу теоремы 1, в полуокрестности $V(X_1)$ должно существовать множество положительной меры, где $L(u) > 0$. Но это противоречит тому условию, что $L(u) \leq 0$, и теорема 2а доказана.

6. Результат, подобный теореме 2 или 2а, может быть получен во многих случаях, когда условия, налагаемые на оператор, относятся в разных частях области к разным направлениям l. Простейшим примером может служить оператор с ограниченными коэффициентами, имеющий в сферических координатах вид $L(u) = u_{rr} + L'(u)$, где L' уже не содержит u_{rr}. Так, имеет место следующая теорема, относящаяся, в частности, к такому оператору.

Теорема 3. *Пусть ограниченная область G однозначно покрывается внешними нормалями к некоторой выпуклой поверхности F_0. Пусть в G задан такой оператор L, что если за направление l принять направление нормали к F_0, проходящей через любую данную точку $X_1 \in G$, то в окрестности X_1 выполнены условия теоремы 2а. Тогда, если функция $u(X)$ удовлетворяет условиям теоремы 2а и хоть где-нибудь в G $u(X) = 0$, то множество E, где $u(X) = 0$, имеет точки сгущения на границе G.*

Теорема 2а получается из этой теоремы, если F_0 — плоскость.

Доказательство. Допустим, что E не имеет точек сгущения на границе G. Тогда, вследствие условия теоремы, существует такая поверхность F, параллельная F_0, которая охватывает E и касается E хотя бы в одной точке.

Пользуясь выпуклой оболочкой $\overline{E}$ множества E, легко найти точку $X_1 \in E$ со следующими свойствами:

1) через X_1 проходит опорная плоскость к E;

2) в этой плоскости нет других точек из E;

3) внешняя нормаль к ней образует сколь угодно малый угол с проходящей через X_1 нормалью поверхности F_0. (В простейшем случае X_1 лежит на поверхности F, но это не обязательно так, если F не является строго выпуклой, т. е. содержит прямолинейные отрезки.)

Применяя в окрестности точки X_1 те же рассуждения, что в доказательстве теоремы 2а, придем к аналогичному противоречию, и теорема 3 оказывается доказанной.

Статья поступила в редакцию
19.I.1960

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.
2. *Александров А. Д.* То же. II // Там же. 1959. № 3. С. 3–12.
3. *Александров А. Д.* То же. III // Там же. 1959. № 5. С. 16–32.
4. *Busemann H., Feller W.* Krümmungseigenschaften konvexer Flächen // Acta Math. 1935. Bd 66. S. 1–47.

Исследования о принципе максимума. V

Известия высших учебных заведений. Математика. 1960. № 5. С. 16–26

§ 1. Рассматриваемые функции

1. Эта работа входит в цикл [1–4] и является непосредственным продолжением [4]; соответственно все условия, наложенные на рассматриваемые функции $u(X)$ и операторы $L(u)$ в [4, § 1], предполагаются выполненными.

Таким образом, предполагается, что $u(X)$ имеет почти везде первый и второй общие дифференциалы, как они определены в [4, § 1]. Производные принимаются как коэффициенты в этих дифференциалах.

2. В [4, § 1] на функции $u(X)$ было наложено следующее условие (A), играющее решающую роль в выводах работы [4].

(A) Пусть S — поверхность, представляемая в прямоугольных координатах уравнением

$$z = u(X) \equiv u(x_1, \ldots, x_n).$$

Пусть U — подобласть области G, где определена функция $u(X)$; S_U — часть поверхности S, лежащая над U; M_U — множество точек поверхности S_U, где она имеет опорные плоскости (не исключено, что оно пусто).

Требуется, чтобы для любой подобласти $U \subset G$ всякое, содержащееся в M_U, множество меры нуль имело сферическое изображение также нулевой меры.

При этом сферическое изображение определяется посредством опорных плоскостей; существование же касательных плоскостей, т. е. дифференцируемость $u(X)$, не предполагается и не следует из самого условия (A).

Теперь мы будем налагать на функции $u(X)$ следующее, более сильное условие.

(D) Функция $u(X)$ такова, что не только она, но и всякая функция, полученная из нее дважды непрерывно дифференцируемым преобразованием с якобианом, отличным от нуля, обладает свойством (A), если новые переменные снова интерпретируются как прямоугольные координаты.

Всюду дальше, если не оговорено противное, подразумевается, что рассматриваемые функции u удовлетворяют этому условию.

Доказываемые в § 4 теоремы 6, 8, 9 дают достаточные условия для того, чтобы $u(X)$ обладала свойством (D), выраженным в более обычных понятиях теории функций. Из § 4 следует, что наши результаты применимы, в частности, к функциям, имеющим вторые обобщенные производные, суммируемые с n-й степенью, где n — число переменных.

3. Дальше в § 2 дается обобщение результатов, полученных в [3] для дважды дифференцируемых функций, на функции, подчиненные сформулированным только что требованиям. В § 3 аналогично обобщаются результаты, полученные в [1, 2]. Если иметь в виду операторы с ограниченными коэффициентами, то эти обобщения оказываются дословными; при более общих предположениях необходимы некоторые несущественные изменения.

§ 2. *Обыкновенная точка границы*

1. Дадим определение обыкновенной точки границы Γ области G, приспосабливая определение, данное в [3], к условиям, принимаемым теперь, когда значения $L(u)$ подразумеваются определенными лишь почти везде.

Точка O называется обыкновенной относительно области G, оператора L и класса $\{u\}$ функций $u(X)$, если для всякой $u \in \{u\}$ в сколь угодно малой окрестности точки O найдется множество положительной меры, на котором $L(u) > 0$.

Речь всегда идет здесь о функциях, не меняющих знака вблизи O и касающихся в O нуля (в смысле определения, данного в [3, § 1]). Поэтому, если на функции u не налагается никаких других условий, то ссылка на их класс $\{u\}$ опускается.

2. Следующая теорема, служащая основой дальнейших выводов, представляет, собственно, перефразировку теоремы 1 [4]. Для ее формулировки введем следующие обозначения (подразумевая, что $L(u) = \sum a_{ik}u_{ik} + \sum b_i u_i + cu$):

$$a = \sum_{i=2}^{n} a_{ii}, \qquad b = \sqrt{\sum_{i=2}^{n} b_i^2}, \qquad r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Теорема 1. *Пусть область G и определенная в ней функция $u(X)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) *G расположена в полупространстве $x_1 > 0$ и ее граница имеет на плоскости $x_1 = 0$ «грань» V — $(n-1)$-мерную (открытую) область;*

2) *$u(X) > 0$ и для всякой $X_0 \in \Gamma \setminus V$ $\lim\limits_{X \to X_0} u(X) > 0$;*

3) *$u(X)$ касается нуля в точке $O \in V$ быстрее x_1^{1+q}, $q \geq 0$* [1]. *(Точку O считаем началом координат.)*

Пусть в G задан оператор L со следующими условиями: существуют такое $\varepsilon > 0$ и такая невозрастающая функция $h(r)$ с конечным интегралом, что почти везде в G выполнены неравенства:

(A_1) $\quad \varepsilon a \leq a_{11}$;

(B_1) $\quad \Phi_1 \equiv \left[\dfrac{(1-\varepsilon)q}{r} + h(r)\right] a_{11} + b_1 - \varepsilon b \geq 0$;

(C_1) $\quad \Phi_1 + (1+\varepsilon) rc \geq 0.$

Тогда в G существует множество положительной меры, на котором $L(u) > 0$. (Условия на L заведомо выполнены, если все коэффициенты ограничены и $a_{11} > \text{const} > 0$.)

Условия, налагаемые здесь на G и $u(X)$, те же, что в теореме 1 в [4]. Легко также убедиться, что условия, налагаемые на L, обеспечивают выполнение условий, налагаемых на L в теореме 1 в [4]. Таким образом, теорема 1 следует из теоремы 1 из [4].

3. Теорема 2. *Если граница Γ области G представляет собой в окрестности точки O гладкую поверхность с первыми производными, удовлетворяющими условию Липшица, то точка O — обыкновенная в отношении функций, касающихся в O нуля быстрее r^{1+q} ($q \geq 0$), и в отношении всякого оператора L, удовлетворяющего вблизи O условиям теоремы 1, если O принята за начало координат и ось x_1 направлена по нормали к Γ внутрь G.*

Доказательство осуществляется сведением к теореме 1 посредством приема, неоднократно применявшегося в [1–3].

Пусть функция $u(X) > 0$ касается нуля в O, так что существуют такие точки $X_m \to O$, что

$$\frac{u(X_m)}{r(X_m\Gamma)^{1+q}} \to 0. \tag{1}$$

Проведем поверхность S, отделяющую вблизи O точки X_m от Γ. Эту поверхность можно, очевидно, взять удовлетворяющей тем же условиям регулярности и даже дважды непрерывно дифференцируемой, кроме, может быть, точки O. Ее можно также выбрать настолько близкой к Γ, что (1) остается верным, если в нем вместо $r(X_m\Gamma)$ взять $r(X_mS)$.

Выделим из G часть G', ограниченную вблизи O поверхностью S.

---

[1] По определению, данному в [3, § 1], $u(X)$ касается нуля в точке $O \in \Gamma$ быстрее r^{1+q}, если в G существует такая последовательность точек $X_m \to O$, что $\frac{u(X_m)}{r(X_m\Gamma)^{1+q}} \to 0$. В данном случае для точек, близких к O, $r(X_m\Gamma) = x_1$.

Пусть уравнение поверхности S будет

$$x_1 = f(x_2, \ldots, x_n)$$

и в области G'

$$x_1 > f(x_2, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Координаты предполагаются выбранными, как указано в теореме, так что в O

$$f_2 = \ldots = f_n = 0.$$

Произведем преобразование

$$\overline{x}_1 = x_1 - f(x_2, \ldots, x_n), \qquad \overline{x}_2 = x_2, \ldots, \overline{x}_n = x_n. \tag{3}$$

Тогда, вследствие (2), область G' перейдет в такую область $\overline{G}$, которая удовлетворяет условиям теоремы 1. Функция $u(X)$ перейдет в функцию $\overline{u}$, также удовлетворяющую условиям теоремы 1, хотя бы вблизи O (здесь мы пользуемся условием (D), введенным в § 1 [2]).

Если оператор L, заданный в G, удовлетворял условиям теоремы 1, то после преобразования он перейдет в оператор $\overline{L}$, удовлетворяющий тем же условиям, по крайней мере вблизи точки O. Чтобы убедиться в этом, достаточно выразить его коэффициенты через коэффициенты оператора L, пользуясь преобразованием (3).

Так, в силу (3), $\overline{a}_{ii} = a_{ii}$ при $i > 1$ и

$$\overline{a}_{11} = a_{11} - 2\sum_{k=2}^{n} a_{1k} f_k + \sum_{i,k=2}^{n} a_{ik} f_i f_k \geq a_{11} - 2\sum_{k=2}^{n} a_{1k} f_k. \tag{4}$$

Из неравенства (A_1) и того, что $a_{1k}^2 \leq a_{11}a_{kk}$, следует, что

$$|a_{1k}| \leq \frac{1}{\varepsilon} a_{11}. \tag{5}$$

Но вблизи точки O производные f_k сколь угодно малы. Поэтому достаточно близко к O $\quad \overline{a}_{11} \geq (1-\varepsilon)a_{11}$ и условие (A_1) сохраняется (с несколько бóльшим ε).

[2] Преобразование (3) дважды непрерывно дифференцируемо всюду, кроме, может быть, оси x_1, но на ней оно тождественное с точностью первого порядка, т. е. $\frac{\partial \overline{x}_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$, откуда легко заключить, что возможное нарушение двукратной дифференцируемости на оси x_1 не может повлиять на площадь сферического изображения.

Далее, в силу (3), $\overline{b}_i = b_i$ при $i > 1$, так что $\overline{b} = b$ и, кроме того,

$$\overline{b}_1 = b_1 - \sum_{k=2}^{n} b_k f_k - \sum_{i,k=2}^{n} a_{ik} f_{ik}. \tag{6}$$

При этом вторые производные f_{ik} существуют почти везде и ограничены, поскольку первые производные f_i удовлетворяют условию Липшица.

Поэтому как только f_k достаточно малы, так, в силу (6) и (5), будем иметь при $\varepsilon' > \varepsilon$

$$\overline{b}_1 - \varepsilon\overline{b} = \overline{b}_1 - \varepsilon b \geq b_1 - \varepsilon' b - \frac{C}{\varepsilon} a_{11}.$$

При подстановке этого соотношения в условие (B_1) последний член можно погасить выбором бо́льшей функции $h(r)$. Кроме того, можно заметить, что при преобразовании (3) r мало меняется вблизи O. Поэтому условие (B_1) также выполняется для оператора $\overline{L}$.

В отношении условия (C_1) это теперь очевидно.

4. Теорема 3. *Пусть вблизи точки O Γ представляет собой гладкую поверхность, причем для нормалей $n(X)$ к Γ выполнено условие*

$$|n(X) - n(X')| \leq k(r(XX')), \tag{7}$$

где k — вогнутая функция; $k(0) = 0$. Тогда точка O — обыкновенная по отношению функций, касающихся в O нуля быстрее r^{1+q}, и операторов L, удовлетворяющих соответственно следующим условиям. Существуют такое $\varepsilon > 0$ и такая невозрастающая функция $h(r)$ с конечным интегралом, что если O принята за начало и ось x_1 направлена по $n(O)$ внутрь G, так (по крайней мере вблизи O) выполнены следующие неравенства:

(A_3) $\quad \varepsilon a \leq a_{11}$;

(B_3) $\quad \Phi_3 \equiv \left(\dfrac{(1-\varepsilon)q}{r} + h(r) - \dfrac{M}{\varepsilon}\dfrac{k(r)}{r} \right) a_{11} + b_1 - \varepsilon b \geq 0$;

(C_3) $\quad \Phi_3 + (1+\varepsilon) rc \leq 0$,

где M зависит только от числа переменных n.

В частности, если коэффициенты ограничены и $a_{11} > \mathrm{const} > 0$, то условия, как легко видеть, сводятся к следующему: должны существовать такое $\varepsilon > 0$ и такая невозрастающая функция $h_1(r)$ с конечным интегралом, что

$$r h_1(r) - M_1 k(r) + \varepsilon q > 0, \tag{8}$$

где M_1 зависит только от n.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, но здесь приходится пользоваться преобразованием более сложным, чем (3). Это преобразование можно определить так же, как в доказательстве теоремы 2 в [3]. Простое воспроизведение проведенных там выводов, с некоторыми упрощающими изменениями, связанными с несколько иной формой условий, налагаемых на L, приводит к доказательству теоремы 3.

5. Теорема 2 представляет собой частный случай теоремы 3, так как, если нормали $n(X)$ удовлетворяют условию Липшица, то в (7) можно взять $k(r) = Cr$. Тогда вычитаемый в множителе при a_{11} в Φ_3 член $Mk(r)/(\varepsilon r)$ сводится к постоянной, которую можно погасить выбором большей функции $h(r)$.

Далее, из теоремы 3 непосредственно следуют результаты, дословно повторяющие теоремы 3–7 из [3]. При условии, что все коэффициенты ограничены и $a_{11} > \text{const} > 0$, дело сводится к тому, чтобы обеспечить выполнение неравенства (8). Например, если $q = 0$, т. е. речь идет о функциях, просто касающихся нуля, то точка O будет обыкновенной, если $k(r)/r$ имеет конечный интеграл, так как тогда (8) можно удовлетворить соответствующим выбором $h_1(r)$. Если же $q > 0$, то (8) заведомо выполнено при любом данном $\varepsilon > 0$ и достаточно малых r, так как $k(r) \to 0$ при $r \to 0$, т. е. точка O будет обыкновенной для функций, касающихся нуля быстрее r^{1+q}, $q > 0$, если только Γ гладкая в окрестности O.

Точно так же все дальнейшие результаты, полученные в [3], непосредственно обобщаются на рассматриваемые здесь более общие функции $u(X)$.

§ 3. *Распространение нулей внутри области*

1. Вопрос состоит в следующем. Пусть в области G заданы функция $u(X) \geq 0$ и оператор L, причем почти везде в G $L(u) \leq 0$. Тогда, если хоть в одной точке $X_0 \in G$ $u(X_0) = 0$, то на каком множестве можно гарантировать, что $u \equiv 0$?

Если исключить теоремы 2, 2а, доказанные в [1] и обобщенные в [4], то решение вопроса сводим к применению теоремы 1 посредством следующего приема.

Пусть E_0 — множество всех точек, где $u = 0$, и допустим, что оно не покрывает G. Тогда найдется шар S и даже бесконечно много таких шаров, что S касается E_0 в одной единственной точке X_0, в остальном содержится в $G \setminus \overline{E}_0$. В таком случае $u(X) > 0$ в S. Пусть, более того, $u(X)$ касается нуля в X_0 из шара S, а это заведомо так, если $u(X)$ дифференцируема в X_0. Тогда для шара S и функции $u(X)$ в нем выполнены условия теоремы 2.

Приняв X_0 за начало координат и направив ось x_1 из X_0 в центр шара S, мы будем иметь выполненными условия теоремы 2 также в отношении оператора L, тогда ссылка на эту теорему привела бы к тому, что в S содержится множество положительной меры, где $L(u) > 0$. Но это противоречит условию, что почти везде $L(u) \leq 0$.

Следовательно, либо $u(X)$ должно обращаться в нуль внутри шара S, либо условия на L не могут выполняться в шаре S.

Условия на L заведомо выполняются, если во всякой замкнутой области $D \subset G$ все коэффициенты ограничены и

$$\sum a_{ik}\xi_i\xi_k > a\sum \xi_i^2, \qquad a = \text{const} > 0.$$

Поэтому мы приходим к теореме.

Теорема. *Если в G $u(X) \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и $u(X)$ дифференцируема, а L удовлетворяет указанным только что условиям, то как только хоть где-нибудь в G $\quad u = 0$, так $u \equiv 0$ в G.*

2. Однако предполагаемые нами условия относительно функций $u(X)$ не влекут ее дифференцируемости. Поэтому изложенный прием нуждается в дополнении.

Пусть S — шар, фигурировавший выше, касающийся множества E_0 в точке X_0. Произведем инверсию в сфере, проходящей через X_0 и имеющей центр в точке на S, диаметрально противоположной X_0. Эта инверсия преобразует шар S в полупространство, а его поверхность — в плоскость P. Эта плоскость будет опорной к множеству $\widetilde{E}_0$, в которое перейдет $\overline{E}_0$, упираясь в него только в точке X_0.

Согласно условию (D) § 1, по крайней мере в окрестности точки X_0, функция $\widetilde{u}(X)$, в которую перейдет $u(X)$, будет подчиняться условию (A) § 1. Поэтому мы можем воспользоваться леммой 2 из [4, § 4].

Согласно этой лемме, сколь угодно близко к точке X_0 найдется точка $\widetilde{X}_1 \in \widetilde{E}_0$ со следующими свойствами:

1) через $\widetilde{X}_1$ проходит опорная плоскость P_1, не содержащая других точек из $\widetilde{E}_0$ и образующая с P сколь угодно малый угол;

2) $\widetilde{u}(X)$ касается в $\widetilde{X}_1$ нуля со стороны того полупространства R, ограниченного P, в котором нет точек множества $\widetilde{E}_0$.

Если мы произведем теперь обратное преобразование, т. е. повторим ту же инверсию, то точка $\widetilde{X}_1$ перейдет в точку X_1, сколь угодно близкую к X_0, а полупространство R — в шар S_1. При этом будет выполнено следующее.

1) Шар S_1 касается $\overline{E}_0$ только в точке X_1. Кроме того, касательная плоскость к нему в этой точке сколь угодно близка к касательной плоскости шара S в точке X_0.

2) $u(X)$ касается в X_1 нуля из шара S_1.

Теперь мы можем применить к шару S_1 те же рассуждения, которые были применены выше в отношении шара S.

3. Простейший получаемый таким путем результат содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть в G задан такой оператор L, что во всякой замкнутой области $D \subset G$ его коэффициенты ограничены и*

$$\sum a_{ik}\xi_i\xi_k > a\sum \xi_i^2, \qquad a = \text{const} > 0.$$

Пусть в G задана также такая функция $u(X) \geq 0$, что почти везде $L(u) \leq 0$. Тогда, если хоть где-нибудь в G $u = 0$ или $u(X)$ касается нуля в обыкновенной точке границы, то $u \equiv 0$ в G.

Действительно, если в какой-то точке $X \in G$ $u(X_0) = 0$, то проведенные выше рассуждения приводят к требуемому результату. Остается допустить, что $u(X) > 0$, но касается нуля в какой-то обыкновенной точке $X_0 \in \Gamma$. Тогда, по самому определению такой точки, вблизи нее нашлось бы множество положительной меры, на котором $L(u) > 0$. Но это противоречит условию и теорема доказана.

4. Центральным результатом работы [1] является теорема о распространении нулей вдоль линий эллиптичности. Эта теорема переносится на рассматриваемый теперь более общий класс функций $u(X)$ без всяких изменений. Определение линий эллиптичности остается тем же самым [3)]. Таким образом, можно утверждать следующее.

Теорема 5. *Пусть в области G задан такой оператор L, что во всякой замкнутой области $D \subset G$ его коэффициенты ограничены. Тогда, если $u(X) \geq 0$, почти везде $L(u) \leq 0$ и $u(X_0) = 0$, то $u \equiv 0$ на всякой линии эллиптичности оператора L, проходящей через X_0.*

Доказательство этой теоремы повторяет соответствующее доказательство из [1, § 5] дословно с единственным небольшим изменением. В нем используется, по существу, тот же описанный выше прием и соответственно возникает та же необходимость от одного шара S, касающегося множества $\overline{E}_0$, перейти к другому — S_1. При этом существенно, что касательная плоскость шара S_1 в точке X может считаться сколь угодно близкой к касательной плоскости шара S в точке X_0.

Именно пусть шар S таков, что, направляя ось x_1 из точки X_0 в центр, мы будем иметь в операторе L $a_{11} > \text{const} > 0$ в окрестности X_0. Тогда,

---

3) Мы говорим, что кривая C есть линия эллиптичности оператора L, если (1) в каждой своей точке X она касается плоскости, определенной главными направлениями матрицы $\|a_{ik}(X)\|$, отвечающими ее положительным собственным значениям $a_1, \ldots, a_m$, (2) она гладкая и входит в гладкое семейство кривых с теми же свойствами, (3) на этом семействе упомянутые собственные значения $a_1, \ldots, a_m$ ограничены снизу положительным числом. То, что матрица $\|a_{ik}\|$ заранее определяется лишь почти везде, конечно, не важно, так как в точках, где она не определена, можно положить $a_{ik} = \delta_{ik}$.

так как X_1 близка к X_0 и направление l из X_1 в центр шара S_1 близко к соответствующему направлению для шара S, то, направляя ось x_1 по l, мы снова будем иметь $a_{11} > \mathrm{const} > 0$.

Имея в виду это замечание, остается только повторить ход доказательства, данного в [1] для теоремы о распространении нулей вдоль линий эллиптичности.

5. После этого все остальные результаты, которые выводятся в [1] в связи с этой теоремой, обобщаются дословно без всяких изменений в доказательствах.

Ослабление требования ограниченности коэффициентов оператора L также может быть осуществлено подобно тому, как это сделано в [1, § 5] или [3, § 6]. Это очевидно из того, что мы пользуемся в доказательствах теоремой 2 с более общими условиями для коэффициентов.

6. В работе [2] был рассмотрен вопрос о распространении нулей функции $u(X)$ (с условиями $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$), поскольку оно определяется коэффициентами b_i при первых производных. Полученные там результаты обобщаются теперь без всяких изменений.

§ 4. *Достаточное условие для рассматриваемых функций*

1. Теорема 6. *Если функция $v(X) \equiv v(x_1, \ldots, x_n)$ имеет вторые обобщенные производные, суммируемые с n-й степенью, то она удовлетворяет условию (D) § 1.*

То, что $v(X)$ имеет указанные обобщенные производные, означает следующее. Существует такая последовательность дважды непрерывно дифференцируемых функций $v^{(m)}(X) \to v(X)$ в L^n, что их вторые производные $v_{ik}^{(m)}$ сходятся к функциям v_{ik} в смысле сходимости в L^n. Это можно принять за определение указанных производных.

Из этого определения очевидно, что при всяком дважды непрерывно дифференцируемом преобразовании переменных существование производных v_{ik} не нарушается и что они преобразуются как обычные вторые производные.

2. Для доказательства теоремы 6 удобно воспользоваться вместо сферического так называемым нормальным изображением. Его определение следующее [5].

Если $v(X)$ задана в области G и дифференцируема, то нормальное отображение сопоставляет точке $X \in G$ конец вектора $\operatorname{grad} v(X)$, отложенного из некоторой фиксированной точки. Соответственно «*нормальное изображение $\psi_v(E)$ множества $E \subset G$ посредством функции $v(X)$*» есть множество концов всех векторов $\operatorname{grad} v(X)$, $X \in E$.

Если $v(X)$ дважды непрерывно дифференцируема и

$$w = \operatorname{Det} \|v_{ik}\|,$$

то площадь нормального изображения, с учетом кратности, есть

$$W(v; E) = \int_E |w| dX \qquad (dX = dx_1 \dots dx_n). \tag{1}$$

Для выпуклой функции $v(X)$ можно определить нормальное изображение в более общем смысле, аналогично тому, как это делается для сферического изображения.

Именно пусть S — поверхность, представляемая в прямоугольных координатах уравнением $z = v(X) \equiv v(x_1, \dots, x_n)$; P — опорная плоскость к S в точке (X^0, z^0). Напишем уравнение плоскости P в виде

$$z - z^0 = \sum (x_i - x_i^0) v_i,$$

где коэффициенты v_i будут производными, если v дифференцируема в точке X^0.

Плоскости P сопоставляется точка $\Psi(P)$ с координатами $v_1, \dots, v_n$.

Нормальное изображение $\Psi_v(E)$ множества $E \subset G$ посредством функции $v(X)$ есть множество всех точек $\Psi(P)$, отвечающих всем опорным плоскостям P во всех точках поверхности S, лежащих над E.

Для всякого борелевского E $\quad \Psi_v(E)$ измеримо и его площадь $W(v; E)$ является вполне аддитивной функцией множества E. И если выпуклые функции $v^{(m)}$ сходятся к v, то $W(v^{(m)}; E)$ слабо сходятся к $W(v; E)$ [5].

3. Связь нормального и сферического изображений очевидна. Из нее легко заключить, что в условиях (A) и (D) § 1 можно говорить о нормальном изображении вместо сферического.

Именно условию (A) можно придать следующую форму. Пусть функция $v(X)$ задана в области G и S — поверхность с уравнением $z = v(X)$, а S_U — ее часть, расположенная над областью $U \subset G$. Будем говорить, что выпуклая функция $\overline{v}(X)$ натянута на $v(X)$ над областью U, если $z = = \overline{v}(X)$ есть уравнение той части границы выпуклой оболочки поверхности S_U, которая лежит над U и обращена выпуклостью вниз (или вверх).

По известному свойству выпуклой оболочки площадь сферического изображения той части ее границы, где она не касается S_U, равна нулю. Вследствие простой связи площади сферического изображения с площадью нормального изображения, то же верно в отношении этой последней.

В силу этих замечаний, условию (A) можно придать следующую форму: функция $v(X)$ должна быть такой, что для всякой выпуклой $\overline{v}(X)$, натянутой на $v(X)$ над любой областью U, площадь нормального изображения $W(\overline{v}; E)$ должна быть абсолютно непрерывной (относительно обычной меры множества $E \subset U$).

Соответственно условие (D) пересказывается в тех же терминах.

4. Докажем теперь теорему 6, понимая в ней условие (D) в указанном только что смысле.

Пусть функция $v(X)$, определенная в области G, имеет обобщенные производные v_{ik}, так что существуют регулярные функции $v^{(m)} \to v$ в L^n такие, что $v_{ik}^{(m)} \to v_{ik}$ в L^n.

Из последнего вытекает, что если положить

$$w^{(m)} = \operatorname{Det} \|v_{ik}^{(m)}\|, \qquad w = \operatorname{Det} \|v_{ik}\|,$$

то при всяком $E \subset G$

$$\int_E |w^{(m)}| dX \to \int_E |w| dX$$

или, принимая во внимание (1),

$$W(v^{(m)}; E) \to \int_E |w| dX. \tag{2}$$

Вместе с тем, если $\overline{v}^{(m)}$ и $\overline{v}$ суть выпуклые функции, натянутые на $v^{(m)}$ и v над любой областью $U \subset G$, то $\overline{v}^{(m)} \to \overline{v}$, и потому соответствующие функции $W(\overline{v}^{(m)}; E)$ слабо сходятся к $W(\overline{v}; E)$:

$$W(\overline{v}^{(m)}; E) \xrightarrow{\text{сл}} W(\overline{v}; E). \tag{3}$$

Кроме того, очевидно, что

$$W(\overline{v}^{(m)}; E) \leq W(v^{(m)}; E), \tag{4}$$

так как нормальное изображение того множества, где $\overline{v}^{(m)}$ не касается $v^{(m)}$, имеет меру нуль; а там, где касание имеет место,

$$W(\overline{v}^{(m)}; E) = W(v^{(m)}; E).$$

Сопоставляя (2)–(4), убеждаемся, что

$$W(\overline{v}; E) \leq \int_E |w| dX,$$

т. е. что функция $W(\overline{v}; E)$ ограничена сверху абсолютно непрерывной функцией и, стало быть, сама абсолютно непрерывна. Этим доказано, что функция v удовлетворяет условию (A).

Но существование обобщенных производных v_{ik} не нарушается при регулярных преобразованиях координат, поэтому одновременно доказано выполнение условия (D).

5. Кроме условия (D), мы налагали на функции $u(x)$ требование существования почти везде первого и второго общих дифференциалов. Поэтому для того, чтобы наши результаты были применимы к функциям, имеющим обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью, нужно еще доказать следующее.

Теорема 7. *Функция v с обобщенными вторыми производными, суммируемые с n-й степенью, имеет почти везде первый и второй общие дифференциалы dv, d^2v, причем коэффициенты в d^2v почти везде совпадают с обобщенными вторыми производными.*

Доказательство. Пусть $v(X)$ имеет обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью. Тогда, как известно, во-первых, $v(X)$ обладает также первыми обобщенными производными, а во-вторых, $v(X)$ почти везде имеет обычные первые и вторые производные, почти везде равные этим обобщенным производным [6].

Кроме того, при регулярных преобразованиях переменных, обобщенные производные преобразуются как обычные.

Образуем формальные дифференциалы dv, d^2v с этими обобщенными производными в качестве коэффициентов.

Подвергая оси координат счетному множеству вращений, плотному в группе всех вращений, убедимся, что почти во всех точках функция v дважды дифференцируема по всему плотному множеству направлений. При этом первые и вторые дифференциалы по этим направлениям оказываются частными значениями dv, d^2v. Сравнивая этот результат с определением общих дифференциалов, убеждаемся, что дифференциалы dv, d^2v оказываются общими дифференциалами функции v, чем теорема 7 доказана.

6. Теоремы 6, 7 позволяют сформулировать следующее утверждение. *Все результаты о принципе максимума, полученные в этой и предыдущей работе* [4], *верны для функций, имеющих обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью.*

7. Теорема 8. *Всякая дважды дифференцируемая функция удовлетворяет условию (D).*

Доказательство. Если функция $v(X)$ дважды дифференцируема, то поверхность $S : z = v(X)$ имеет в каждой точке конечную гауссову кривизну, так что производная ее площади сферического изображения по мере на плоскости $z = 0$ всюду конечна. Но, как известно [7, с. 229], функция множества с таким свойством абсолютно непрерывна. Отсюда ясно, что условие (A) выполнено. Поскольку двукратная дифференцируемость сохраняется при регулярных преобразованиях переменных, то и условие (D) выполнено.

Так как обычные первый и второй дифференциалы тривиальным образом являются также общими, то, благодаря теореме 8, все результаты этой работы и работы [4] относительно принципа максимума верны для дважды дифференцируемых функций.

8. Теорема 8 содержится в следующей более общей теореме.

Теорема 9. *Функция $v(X)$ удовлетворяет условию (D), если*

1) *в каждой точке существует хотя бы одна из первых производных v_i и всюду, за исключением, может быть, счетного множества точек, существуют все производные v_i, причем для них допускаются бесконечные значения;*

2) *в каждой точке, где все v_i существуют и конечны, их производные числа v_{ii} также конечны.*

Если, кроме того, функция v удовлетворяет условию Липшица, то она почти везде имеет первый и второй аппроксимативные, а тем самым и общие дифференциалы.

Эту теорему мы не будем здесь доказывать. Можно сформулировать еще более общие условия того, чтобы функция обладала свойством (D).

Статья поступила в редакцию
4.III.1960

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.
2. *Александров А. Д.* То же. II // Там же. 1959. № 3. С. 3–12.
3. *Александров А. Д.* То же. III // Там же. 1959. № 5. С. 16–32.
4. *Александров А. Д.* То же. IV // Там же. 1960. № 3. С. 3–15.
5. *Александров А. Д.* Задача Дирихле для уравнения $\mathrm{Det}\,\|z_{ij}\|=\varphi(z_1,\dots,z_n,z,x_1,\dots,x_n)$. I // Вестн. ЛГУ. 1958. № 1. Сер. математики, механики, астрономии. Вып. 1. С. 5–24.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.; Л.: Гостехиздат, 1959. Т. 5.
7. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Иностр. лит., 1949.

Исследования о принципе максимума. VI [1)]

Известия высших учебных заведений. Математика. 1961. № 1. С. 3–20

§ 1. *Введение*

1. Пусть L — оператор второго порядка

$$L(u) = \sum a_{ik}u_{ik} + \sum b_i u_i + cu, \tag{1}$$

определенный почти везде в некоторой области изменения переменных $x_1, \dots, x_n$. Оператор подразумевается негиперболическим, т. е. матрица $\|a_{ik}\|$ не имеет отрицательных собственных значений. (Это утверждение, как и все неравенства или равенства, включающие коэффициенты оператора, понимается как выполненное с точностью до множества меры нуль.)

Функции $u(X)$ можно подразумевать удовлетворяющими одному из следующих условий:

1) $u(X)$ всюду дважды дифференцируема;

2) $u(X)$ непрерывна и имеет обобщенные вторые производные по С. Л. Соболеву, суммируемые с n-й степенью в окрестности любой точки $X \in G$. (Согласно известным теоремам С. Л. Соболева, функция с такими вторыми производными имеет обобщенные первые производные. Кроме того, она эквивалентна непрерывной, так что поставленное требование непрерывности не является ограничением общности [3].)

Общие требования на $u(X)$, охватывающие оба указанных условия, будут сформулированы ниже (они те же, что в $[1, 2]$).

2. Основные результаты настоящей работы, в несколько упрощенном виде, можно сформулировать следующим образом.

[1)] Мы воспроизводим все необходимые определения, так что для понимания этой работы обращение к предыдущим статьям [1, 2] этой серии не нужно.

Теорема I. *Пусть в ограниченной области G задан такой оператор L, что в окрестности каждой точки $X \in G$ все коэффициенты суммируемы с n-й степенью и* $\operatorname{Det}\|a_{ik}\| > \mathrm{const} > 0$. *Пусть в G определена еще такая функция $u(X) \geq 0$, что $L(u) \leq 0$ и хоть где-нибудь в $G \quad u(X) = 0$. Тогда $u \equiv 0$ в G.*

Теорема II. *Если оператор L и функция $u(X)$ удовлетворяют условиям теоремы* I, *за вычетом требования суммируемости n-х степеней коэффициентов a_{ik}, то множество нулей функции $u(X)$ заведомо имеет точки сгущения на границе области.*

Условие $a \equiv \operatorname{Det}\|a_{ik}\| > \mathrm{const} > 0$ само по себе не составляет ограничения, если $a > 0$, потому что тогда, деля оператор на $\sqrt[n]{a}$, придем к оператору, у которого $a = 1$. С другой стороны, простые примеры показывают, что при условии $a > \mathrm{const} > 0$ требование суммируемости коэффициентов с n-й степенью не может быть заменено суммируемостью со степенью, меньшей n (такие примеры даются в § 6).

Теорема III. *Пусть в области G с границей Γ заданы оператор L и функция $u(X)$ так, что у некоторой точки $X_0 \in \Gamma$ существует окрестность U, для которой верно следующее:*

1) в $U \cap G$ для L и $u(X)$ выполнены условия теоремы I, не считая того, что заранее не требуется, чтобы где-то в G было $u = 0$;

2) на $\Gamma \cap U \quad u(X)$ обращается в нуль вместе с первыми производными.

Тогда заведомо в $U \cap G$ есть точки, где $u = 0$ (следовательно, в силу теоремы I, $u \equiv 0$ в $U \cap G$).

Теорема IV. *Тот же результат имеет место, если в условии 1) теоремы* III *требовать только условий теоремы II, но зато дополнительно потребовать, что $\Gamma \cap U$ имеет хотя бы одну опорную плоскость, упирающуюся в нее изнутри G и притом только в одной точке.* (Например, $\Gamma \cap U$ может представлять собой участок границы, обращенный выпуклостью внутрь G, либо даже одну изолированную точку границы.)

3. Фактически мы начинаем с того, что доказываем «основную теорему» (теорема 1, § 2), являющуюся более сильной формой теоремы IV. После этого из нее выводятся теоремы I–III, причем теоремы II, III устанавливаются также в более сильной форме (теоремы 2, § 4; 4, § 5). При этом трудность возникает от того, что мы не предполагаем дифференцируемости $u(X)$. Если же предположить, что $u(X)$ дифференцируема, то вывод теорем I–III из теоремы IV — соответственно теорем 2–4 из основной теоремы 1 — существенно упрощается.

Покажем, например, как при этом предположении из теоремы IV вытекает теорема II. Допустим, что условия последней выполнены, но множество E нулей функции $u(X)$ нигде не подходит к границе. Тогда оно замкнуто и найдется такая точка $X_0 \in E$, что в нее упирается опорная плоскость к E, не имеющая с E других общих точек.

Рассмотрим область $G \setminus E$ вблизи точки X_0; на ней $u > 0$. Из того, что $u(X)$ дифференцируема, следует, что на общей границе $G \setminus E$ и E $u(X)$ обращается в нуль вместе с первыми производными. В итоге оказывается, что вблизи X_0 выполнены условия теоремы IV. Тогда по этой теореме в области $G \setminus E$ должны иметься точки, в которых $u = 0$. Получается противоречие и, следовательно, E не может не достигать границы области G. Сведе́ние теорем I, III к теореме IV, при том же предположении дифференцируемости $u(X)$, получается так же просто (см. § 5).

4. На рассматриваемые функции $u(X)$ налагаются прежде всего следующие условия.

I. $u(X)$ почти везде непрерывна и почти везде имеет общие первый и второй дифференциалы $du = \sum u_i dx_i$, $d^2u = \sum u_{ik} dx_i dx_k$.

Согласно определению, введенному в [1], мы говорим, что $u(X)$ имеет в точке X_0 такие дифференциалы, если существуют такие числа u_i, $u_{ik} = u_{ki}$, что

$$u(X) = u(X_0) + \sum u_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum u_{ik} \Delta x_i \Delta x_k + \varepsilon(X) \sum \Delta x_i^2, \qquad (2)$$

причем для каждого направления l из X_0 существует такая последовательность точек $X_m \to X_0$, что направления $X_0 X_m$ сходятся к l, а $\varepsilon(X_m) \to 0$.

Под производными u_i, u_{ik} понимаются коэффициенты в формуле (1). Определение их не однозначно в том смысле, что в данной точке общие дифференциалы определяются, вообще говоря, не единственным образом. Но подразумевается, что в каждой точке, где они существуют, они фиксированы.

Легко убедиться, что если $u(X)$ имеет обобщенные первые и вторые производные u_i, u_{ik}, то она почти везде имеет общие дифференциалы с коэффициентами u_i, u_{ik} (см. [1, § 1] или [2, § 4]).

Нам будут нужны только следующие два очевидных свойства общих дифференциалов:

1) если в окрестности точки X_0 $u(X) \geq \overline{u}(X)$, а в самой точке X_0 $u = \overline{u}$ и существуют общие дифференциалы du, d^2u, а $\overline{u}$ дважды дифференцируема в том смысле, что в формуле (1), написанной для $\overline{u}$, $\varepsilon(X) \to 0$ при $X \to X_0$, то в X_0 $du = d\overline{u}$, $d^2u \geq d^2\overline{u}$;

2) при регулярном, т. е. дважды непрерывно дифференцируемом преобразовании переменных du, d^2u преобразуются как обычные дифференциалы.

В связи с тем, что $u(X)$ не предполагается непрерывной, мы будем понимать равенство $u(X_0) = 0$ в том смысле, что существуют такие точки

$X \to X_0$, что $u(X) \to 0$. Впрочем, можно предполагать $u(X)$ непрерывной, и тогда это условие выполнено само собой.

5. Далее, на функции $u(X)$ налагается следующее условие.

II. Для всякой подобласти U той области G, где определена $u(X)$, выпуклая функция $\overline{u}(X)$, натянутая на $u(X)$ над областью U, имеет абсолютно непрерывное нормальное изображение.

При этом мы говорим, что выпуклая функция $\overline{u}(X)$ натянута на $u(X)$ над U, если $\overline{u}(X)$ есть наибольшая из выпуклых функций $v(X)$ таких, что всюду в $U \quad u(X) \geq v(X)$. Говоря геометрически, это значит, что $z = \overline{u}(X)$, $X \in U$, есть уравнение поверхности, являющейся обращенной выпуклостью вниз частью границы выпуклой оболочки поверхности $z = u(X)$, $X \in U$.

Нормальное изображение было определено в [2] § 4. Оно сопоставляет каждой опорной плоскости

$$z - \overline{u}(X^0) = \sum (x_i - x_i^0)\overline{u}_i$$

поверхности $z = \overline{u}(X)$ точку с координатами u_i. Соответственно каждому множеству $E \subset U$ оно сопоставляет множество $\varphi_{\overline{u}}(E)$ всех точек, отвечающих всем опорным плоскостям в точках поверхности $z = \overline{u}(X)$ при $X \in E$.

Мера множества $\varphi_{\overline{u}}(E)$ есть вполне аддитивная функция множества E, которую мы обозначаем $W(\overline{u}; E)$.

То, что нормальное изображение абсолютно непрерывно, означает, что эта функция абсолютно непрерывна (относительно обычной меры множеств E).

6. Во всем дальнейшем $u(X)$ неизменно обозначает функцию, подчиненную сформулированным только что условиям I, II.

Но в ряде случаев нам нужно будет еще третье условие.

III. Функция $u(X)$ такова, что не только она, но и всякая функция, полученная из нее регулярным преобразованием переменных с якобианом, отличным от нуля, удовлетворяет условию II (если переменные каждый раз интерпретируются как прямоугольные координаты).

Функции, удовлетворяющие условиям, упомянутым в п. 1, удовлетворяют этому условию III (доказательство см. в [2, § 4]).

§ 2. *Основная теорема*

1. Теорема 1. *Пусть в области G с границей Γ заданы функция $u(X) > 0$ и оператор L, у которого $a \equiv \mathrm{Det}\,\|a_{ik}\| > \mathrm{const} > 0$. Пусть для некоторой точки $X_0 \in \Gamma$ существуют такая ее окрестность U и такое множество K лучей l, исходящих из X_0 внутрь G, имеющее положительную меру в смысле телесного угла, что выполнены следующие условия:*

1) для каждого $l \in K$ существует перпендикулярная l плоскость P_l, опорная к $\Gamma' = \Gamma \cap U$;

2) какова бы ни была такая плоскость P_l, хотя бы в одной точке $X \in P_l \cap \Gamma'$ функция $u(X)$ касается нуля из того полупространства R, в которое направлен луч l, т. е. в R существуют такие точки $X_m \to X$, что $r_m^{-1} u(X_m) \to 0$, где $r_m = r(X_m P_l)$ — расстояние от X_m до P_l;

3) существует такая функция $h(X)$, суммируемая с n-й степенью, что если поворотом осей направлять ось x_1 по любому из лучей $l \in K$ [2]*, то в $U \cap R_l$ выполнены неравенства*

(B_1) $\quad b_1 \geq -h(X)$,

(C_1) $\quad b_1 + rc \geq -h(X)$,

где $r = r(XP_l)$. Тогда в U существует множество положительной меры, на котором $L(u) > 0$.

Деля L на h, убеждаемся, что условия, налагаемые на L, равносильны следующим:

(A_2) a^{-1} суммируемо в $U \cap G$, и как только ось x_1 направлена по какому-либо лучу $l \in K$, так в $U \cap R_l$ выполнены неравенства

(B_2) $\quad b_1 > -C$,

(C_2) $\quad b_1 + rc > -C$,

где C — постоянная, не зависящая от l. Именно эту форму условий мы используем в доказательстве.

2. Замечания. 1) Условия на L можно записать в форме, не связанной с нормировкой L:

$$a > 0, \qquad \sqrt[n]{a}h + b_1 > 0, \qquad \sqrt[n]{a}h + b_1 + rc > 0$$

при тех же условиях относительно выбора оси x_1.

2) Направим ось x_1 по такому фиксированному лучу $l_0 \in K$, в сколь угодно малой окрестности которого содержится часть K' множества K, имеющая положительную меру. Тогда, как легко убедиться, условия (B_1), (C_1) заменятся следующими:

$$b_1 - \varepsilon b > -h_1, \qquad b_1 - \varepsilon b + rc > -h_1,$$

где $b = \sqrt{\sum b_i^2}$. Отсюда, между прочим, видно, что для выполнения этих условий достаточно суммируемости коэффициентов b_i, c с n-й степенью, так что теорема 1 содержит вторую часть теоремы I § 1.

---

[2] Здесь и всюду дальше, говоря о направлении оси x_1, мы, естественно, имеем в виду направление положительной полуоси x_1. Именно в этом смысле будут пониматься, например, утверждения, что ось x_1 образует с лучом l угол $< \varepsilon$.

3) Условия (C) имеют значение лишь при $c < 0$, а тогда в них множитель r можно заменить на любой бо́льший, например на $|X - X_0|$, отчего условие только усилится.

4) $\Gamma' = \Gamma \cap U$ не обязана быть поверхностью и может состоять, например, из одной точки.

3. Для доказательства теоремы 1 ограничимся пределами окрестности U точки X_0, считая ее, ради простоты, замкнутым шаром. Соответственно под G будем понимать часть исходной области, содержащуюся в U.

Тогда функция $u(X)$ будет определенной и положительной на $\overline{G} \setminus \Gamma'$, так что на любом фиксированном расстоянии от Γ' $u(X) > \text{const} > 0$. (Если мы не считаем $u(X)$ непрерывной, то пользуемся здесь тем смыслом соотношений $u = 0$, $u > 0$, который установлен соглашением п. 4 § 1.)

Натянем на функцию $u(X)$ выпуклую функцию $\overline{u}(X)$, и пусть G' — та часть замкнутой области $\overline{G}$, где $\overline{u}(X) > 0$. Очевидно, G' получается из $\overline{G}$, исключением выпуклой оболочки Γ'. Ту часть ее границы, которая входит в границу области G', обозначим Γ''. Так как на расстоянии от Γ'' $u(X) > \text{const} > 0$, то же верно для $\overline{u}(X)$.

Геометрически речь идет о том, что мы натягиваем на поверхность $S : z = u(X)$ выпуклую поверхность $\overline{S}$ и рассматриваем ее часть, лежащую над плоскостью $z = 0$.

4. Лемма 1. *Условия 1) и 2) теоремы 1 для $u(X)$ и Γ' равносильны таким же условиям для $\overline{u}(X)$ и Γ''.*

Опорная плоскость P к F' является одновременно опорной плоскостью к Γ'' в той же точке. Кроме того, как известно, совокупность нормалей к опорным плоскостям данного множества, содержащим каждая более одной его точки, имеет меру нуль. Поэтому такими плоскостями P можно пренебречь и ограничиться только теми из них, которые упираются в Γ'' только в одной точке. При этом условии лемма 1 вытекает из следующего простого утверждения.

Лемма 1а. *Для того чтобы функция $u(X)$ касалась нуля в точке X_0 со стороны полупространства R, ограниченного плоскостью P, проходящей через X_0, необходимо и достаточно, чтобы то же имело место для $\overline{u}(X)$.* При этом имеется в виду полупространство R, определенное в условии 2), а также то, что X_0 — единственная точка, где P упирается в Γ''.

Доказательство. Так как по самому определению выпуклой функции, натянутой на данную, $\overline{u}(X) \leq u(X)$, то необходимость условия очевидна.

Допустим, что $\overline{u}(X)$ касается нуля в точке X_0 со стороны полупространства R, ограниченного плоскостью P. Для поверхности $\overline{S} : z = \overline{u}(X)$ это означает следующее: какую n-мерную плоскость $\overline{P}$, проходящую через P над R и образующую с плоскостью $z = 0$ достаточно малый угол, не взять, под ней сколь угодно близко к X_0 есть точки поверхности $\overline{S}$.

Но из того, что на любом фиксированном расстоянии от Γ'' $\overline{u}(X) > > \mathrm{const} > 0$, следует, что в R $\overline{u}(X) > \mathrm{const} > 0$ вне любой окрестности точки X_0. Поэтому при достаточно малом наклоне плоскости $\overline{P}$ край поверхности $\overline{S}$ оказывается над $\overline{P}$. Вместе с предыдущим выводом это означает, что такая плоскость $\overline{P}$ отсекает от поверхности $\overline{S}$ некоторую «шапочку», лежащую под $\overline{P}$.

На такой «шапочке» необходимо есть точки поверхности S, чему отвечают точки X, где $u(X) = \overline{u}(X)$. Беря наклон плоскости $\overline{P}$ все меньше и меньше, убеждаемся, что $u(X)$ касается в точке X_0 нуля.

5. Теперь мы утверждаем, что теорема 1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1а. *Пусть выполнены условия теоремы 1 с дополнительным требованием, что функция $u(X)$ выпуклая. Тогда, если $W = W(u; E)$ есть площадь нормального изображения, определенного функцией $u(X)$, то существует такое множество $E_0 \subset G$, что*

$$\int_{E_0} L(u)dW > 0. \tag{1}$$

(По основному условию II § 1 функция W абсолютно непрерывна и, стало быть, стоящий здесь интеграл сводится к интегралу Лебега.)

Эту теорему мы докажем в § 3, а сейчас убедимся, что из нее действительно вытекает теорема 1.

Итак, пусть для функции $u(X)$ выполнены условия теоремы 1, включая дополнительное условие п. 3. Пусть, как и выше, $\overline{u}(X)$ — выпуклая функция, натянутая на $u(X)$, а G' и Γ'' имеют тот же смысл, что в п. 3. Согласно лемме 1, для $\overline{u}(X)$ и Γ'' выполнены те же условия теоремы 1.

Поэтому, принимая теорему 1а, мы можем заключить, что существует такое множество $E_0 \subset G'$, что

$$\int_{E_0} L(\overline{u})d\overline{W} > 0. \tag{2}$$

Поверхность $\overline{S} : z = \overline{u}(X)$ есть лежащая над G' и обращенная выпуклостью вниз часть границы выпуклой оболочки поверхности $S : z = u(X)$. По известному свойству выпуклой оболочки всякое множество на поверхности $\overline{S}$, не содержащее точек, принадлежащих S, или предельных для S, имеет сферическое изображение меры нуль. Отсюда и из очевидной связи сферического и нормального изображений следует, что для всякого $E \subset G'$, в котором нет точек, где $\overline{u}(X) = u(X)$ [3], $W(\overline{u}; E) = 0$.

[3] Если $u(X)$ не непрерывна, то это равенство понимается в смысле соглашения п. 4 § 1.

Поэтому в неравенстве (2) имеет значение только та часть E_1 множества E_0, где $\overline{u}(X) = u(X)$.

С другой стороны, всякая выпуклая функция, как известно, почти везде дважды дифференцируема, а по основному условию I §1 $u(X)$ почти везде непрерывна и имеет общие дифференциалы du, d^2u. Кроме того, $\overline{u}(X) \leq u(X)$. Поэтому, в силу указанного в п. 4 §1 свойства 1) общих дифференциалов, почти везде на E_1

$$u = \overline{u}, \qquad du = d\overline{u}, \qquad d^2u \geq d^2\overline{u}.$$

Вследствие негиперболичности L, отсюда следует, что в таких точках $L(u) \geq L(\overline{u})$. Таким образом, из формулы (2) следует, что

$$\int\limits_{E_1} L(u)d\overline{W} > 0.$$

А так как $\overline{W}$ абсолютно непрерывна, то отсюда очевидно, что на некотором множестве E_2 положительной меры $L(u) > 0$, т. е. мы получаем теорему 1. Остается доказать теорему 1а.

§ *3.* *Доказательство теоремы 1*а

1. Начнем с леммы, в которой речь может идти о совершенно произвольной выпуклой функции $u(X)$, так как такая функция почти везде дважды дифференцируема. Здесь, как и в дальнейшем, мы полагаем

$$\operatorname{Det}\|a_{ik}\| = a, \qquad \operatorname{Det}\|u_{ik}\| = w. \tag{1}$$

Лемма 2. *При всякой выпуклой $u(X)$ для всякого множества E в области ее определения*[4)]

$$\Bigl(\int\limits_E a^{-1}dx\Bigr)^{1/n} \int\limits_E \sum a_{ik}u_{ik}w\,dX \geq n\Bigl(\int\limits_E w\,dX\Bigr)^{1+1/n}. \tag{2}$$

(Собственно говоря, неравенство (2) верно для любых матриц $\|a_{ik}\|$, $\|u_{ik}\|$, не имеющих отрицательных собственных значений.)

[4)] Существование стоящих здесь интегралов можно не предполагать (конечно, считая a_{ik} измеримыми!), так как подынтегральные функции не отрицательны и, стало быть, интегралы либо существуют, либо бесконечны. Но в последнем случае неравенство тривиально, так как интеграл в правой части заведомо не превосходит площади нормального изображения $W(u; E)$.

Доказательство. Так как матрицы $\|a_{ik}\|$, $\|u_{ik}\|$ не имеют отрицательных собственных значений, то

$$\frac{1}{n}\sum a_{ik}u_{ik} \geq (\mathrm{Det}\,\|a_{ik}\| \cdot \mathrm{Det}\,\|u_{ik}\|)^{1/n},$$

так что в обозначениях (1)

$$\int \sum a_{ik}u_{ik}w dX \geq n \int a^{1/n}w^{(n+1)/n}dX. \tag{3}$$

По неравенству Гёльдера

$$\left(\int a^{1/n}w^{(n+1)/n}dx\right)^{n/(n+1)} \left(\int a^{-1}dX\right)^{1/(n+1)} \geq \int wdX,$$

что вместе с (3) и дает неравенство (2).

Известно, что если функция $u(X)$ имеет абсолютно непрерывное нормальное изображение, то его площадь есть

$$W(E) = \int\limits_E wdX.$$

Отсюда и из леммы 2 следует

Лемма 3. *При условии абсолютной непрерывности нормального изображения выпуклой функции $u(X)$*

$$\int\limits_E \sum a_{ik}u_{ik}dW \geq n\left(\int\limits_E a^{-1}dX\right)^{-1/n} W(E)^{1+1/n}. \tag{4}$$

2. Теперь обратимся непосредственно к доказательству теоремы 1а. Пусть, следовательно, для выпуклой функции $u(X)$ выполнены условия теоремы 1. Выделим из фигурирующего в них множества K лучей l часть положительной меры, заключенную в некотором конусе вокруг одного из лучей $l_0 \in K$, и обозначим ее также K. Пусть $K(p_0)$ — множество точек этих лучей, удаленных от X_0 на расстояние $< p_0$. Сама точка X_0 исключается. Примем точку X_0 за начало в нормальном изображении. Тогда можно утверждать следующее.

Нормальное изображение функции $u(X)$ содержит множество $K(p_0)$, как только p_0 достаточно мало.

Рассмотрим поверхность $S : z = u(X)$; она выпуклая и лежит над плоскостью $z = 0$. Пусть C_l — цилиндр, описанный около S, с $(n-1)$-мерными образующими, перпендикулярными лучу l, т. е. параллельными плоскости P_l, фигурирующей в условиях 1), 2) теоремы 1.

Из условия 2) очевидно, что этот цилиндр касается плоскости $z = 0$, подходя к P_l. Поэтому нормальное изображение функции, задающей цилиндр C_l, представляет собой некоторый отрезок $(0, p)$ луча l. А так как C_l описан около поверхности S, то ее нормальное изображение, т. е. нормальное изображение функции $u(X)$, содержит тот же отрезок. Нетрудно убедиться, что при достаточно малом p_0 все лучи $l \in K$ (по крайней мере достаточно близкие к выбранному лучу) будут содержать такие отрезки $(0, p_0)$, чем наше утверждение доказано.

3. Пусть $E(p_0)$ есть то множество в области задания функции $u(X)$, нормальное изображение которого есть $K(p_0)$. Так как по условию конус K имеет положительную меру, то множество $K(p_0)$ также положительной меры, а по абсолютной непрерывности нормального изображения отсюда следует, что аналогичное верно и для $E(p_0)$. При этом, как очевидно, при $p_0 \to 0 \quad \operatorname{mes} E(p_0) \to 0$.

Из леммы 3 вытекает следующее утверждение.

При условии (A_2) *теоремы 1*

$$\int\limits_{E(p_0)} \sum a_{ik} u_{ik} dw > A(p_0) p_0^{n+1}, \tag{5}$$

где $A(p_0) \to \infty$ *при* $p_0 \to 0$.

В самом деле, обозначая через ω телесный угол конуса K, получаем, что мера множества $K(p_0)$, т. е. мера нормального изображения множества $E(p_0)$, есть

$$W(E(p_0)) = \frac{1}{n} \omega p_0^n.$$

Поэтому из (4) следует, что

$$\int\limits_{E(p_0)} \sum a_{ik} u_{ik} dw \geq \frac{\omega^{(n+1)/n}}{n^{1/n}} \Bigg(\int\limits_{E(p_0)} a^{-1} dX \Bigg)^{-1/n} p_0^{n+1}. \tag{6}$$

По условию (A_2) интеграл от a^{-1} существует, и так как при $p_0 \to 0$ $\operatorname{mes} E(p_0) \to 0$, то этот интеграл также стремится к нулю. Следовательно, неравенство (6) и дает неравенство (5), где $A(p_0) \to \infty$ при $p_0 \to 0$.

4. Докажем теперь, что при условиях (B_2), (C_2) теоремы 1

$$\int\limits_{E(p_0)} \Big(\sum b_i u_i + cu \Big) dW \geq -B p_0^{p+1}, \tag{7}$$

где B не зависит от p_0.

Прежде всего заметим, что вследствие абсолютной непрерывности функции W, стоящий здесь интеграл можно вычислять непосредственно по нормальному изображению, т. е. по множеству $K(p_0)$. При этом, если p — расстояние от начала в нормальном изображении, т. е. от X_0, и $d\omega$ — элемент телесного угла, то

$$dW = p^{n-1} dp d\omega. \tag{8}$$

По выпуклости функции $u(X)$ почти везде существует $\operatorname{grad} u$, и он существует почти везде также в смысле меры в нормальном изображении, поскольку оно абсолютно непрерывно. Дальше мы, естественно, пренебрегаем множеством меры нуль, где $\operatorname{grad} u$ не существует.

Тогда, как ясно из самого определения нормального изображения, его точка есть конец вектора $\operatorname{grad} u$, отложенного от начала X_0. Поэтому ее расстояние от X_0 есть

$$p = |\operatorname{grad} u|, \tag{9}$$

и если она лежит на луче l, $\operatorname{grad} u$ направлен по l.

Следовательно, если, выбрав точку $X \in E(p_0)$, направить ось x_1 по $\operatorname{grad} u(X)$, то в этой точке

$$\sum b_i u_i = b_1 |\operatorname{grad} u| = b_1 p. \tag{10}$$

Так как $\operatorname{grad} u(X)$ направлен по соответствующему лучу l, то мы можем воспользоваться условием (B_2) теоремы 1. Тогда из (10) следует, что при $c \geq 0$

$$\sum b_i u_i + cu > -Cp. \tag{11}$$

Это неравенство уже не связано со специальным выбором оси x_1 и верно во всех точках $X \in E(p_0)$, где $c \geq 0$.

Рассмотрим теперь точку X, где $c < 0$. Опишем около поверхности $S : z = u(X)$ цилиндр с образующими, перпендикулярными лучу l, направленному по $\operatorname{grad} u$ в данной точке X. Цилиндр этот выпуклый и касается плоскости $z = 0$ по плоскости P_l. Поэтому, если r — расстояние точки X от P_l, то

$$u(X) \leq r |\operatorname{grad} u(X)|,$$

откуда, имея в виду (9), получаем, что при $c < 0$

$$cu \geq rcp.$$

Вместе с (10) это дает, что

$$\sum b_i u_i + cu \geq (b_1 + rc)p,$$

откуда, вследствие условия (C_2) теоремы 1,

$$\sum b_i u_i + cu > -Cp. \tag{12}$$

Это есть то же неравенство (11), которое таким образом установлено при любом c.

Пользуясь этим неравенством и выражением (8) для dW, получим

$$\int\limits_{K(p_0)} \left(\sum b_i u_i + cu\right) dW > -C \int\limits_{\omega} \int\limits_{0}^{p_0} p^n dp d\omega = -\frac{C\omega}{n+1} p_0^{n+1}. \tag{13}$$

А так как интегрирование по $K(p_0)$ равносильно здесь интегрированию по $E(p_0)$, то это и есть неравенство (7).

5. Теперь соединим неравенства (7) и (5). Тогда, имея в виду, что в (5) $A(p_0) \to \infty$ при $p_0 \to 0$, убеждаемся, что как только p_0 достаточно мало́, так

$$\int\limits_{E(p_0)} L(u) dW > 0.$$

Таким образом, теорема 1а, а вместе с нею и теорема 1, доказаны.

§ 4. *Распространение нулей до границы области*

1. Теорема 2. *Пусть в ограниченной области G заданы такой оператор L и функция $u(X)$, что выполнены следующие условия:*

1) существует такая выпуклая поверхность F, внешние нормали которой покрывают область G, причем для каждой точки $X_0 \in G$ существуют такая ее окрестность $U(X_0)$ и такое $\alpha > 0$, что если путем поворота осей направить ось x_1 так, чтобы она образовала с проходящей через X_0 нормалью $n(X_0)$ к F угол, меньший α, так в $U(X_0)$ оказываются выполненными условия, налагаемые на оператор L в теореме 1, если в (C_1) заменить r на $|X - X_0|$;

2) $L(u) \le 0$, $u(X) \ge 0$ и хоть где-нибудь в G $u = 0$.

Тогда множество нулей функции $u(X)$ имеет точки сгущения на границе области G.

В простейшем случае F есть плоскость и тогда условие 1) сводится просто к тому, что для оператора L выполнены условия теоремы 1 для направлений оси x_1, близких к какому-либо фиксированному направлению.

Как легко подсчитать, при повороте осей, поворачивающем ось x_1 на угол φ, для коэффициента $\overline{b}_1$ в новых координатах имеем оценку

$$\overline{b}_1 \ge b_1 \cos\varphi - b \sin\varphi, \qquad b = \sqrt{\sum b_l^2}.$$

Поэтому для выполнения условия 2) теоремы 2 достаточно, чтобы при направлении оси x_1 по $n(X_0)$ было

$$b_1 - \varepsilon b > 0, \qquad b_1 - \varepsilon b + |X - X_0| c > 0.$$

2. Доказательство теоремы 2 получается сведéнием к теореме 1, что основано на следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть в области G задана функция $u(X) \geq 0$, множество E_0 нулей которой не пусто, но не имеет точек сгущения на границе области. Пусть F — выпуклая поверхность, внешние нормали к которой покрывают G. Тогда на границе множества E_0 существует такая точка X_0, что в некоторой ее окрестности для области $G \setminus E_0$ и функции $u(X)$, рассматриваемой на этой области, выполнены условия теоремы 1, причем фигурирующее там множество K лучей l можно выбрать так, что эти лучи образуют с проходящей через X_0 нормалью $n(X_0)$ поверхности F углы, меньшие любого данного.*

Доказательство. Так как E_0 не имеет точек сгущения на границе, то оно замкнуто (поскольку, согласно соглашению п. 4 § 1, мы считаем $u(X) = 0$ тогда, когда есть такие точки $X' \to X$, что $u(X') \to 0$).

Пусть X_1 — точка множества E_0, в которой достигается максимум расстояний его точек до поверхности F. Проведем через X_1 поверхность F_1, параллельную F. Она строится путем откладывания на нормалях отрезков, равных расстоянию X_1 до F. Такая поверхность — выпуклая и ее нормали совпадают с нормалями к F в соответственных точках. Множество E_0 лежит с одной стороны от F_1 — с ее «внутренней» стороны, не считая, конечно, точек, лежащих на самой F_1.

Проведем через X_1 опорную плоскость P_1 к поверхности F_1; она будет также опорной к E_0. Рассмотрим «грань» $P_1 \cap E_0$ множества E_0. На ней заведомо найдется такая точка X_0, через которую проходит $(n-2)$-мерная плоскость $Q \subset P_1$, опорная к $P_1 \cap E_0$ и не содержащая других точек из E_0, кроме самой X_0. (В частности, если $P_1 \cap E_0$ состоит из одной точки X_1, то она и будет этой X_0.)

Покажем, что такая точка X_0 удовлетворяет требованиям леммы.

3. Заметим прежде всего, что внешняя нормаль к плоскости P_1 является нормалью к F_1 в точке X_0 и, следовательно, также проходящей через X_0 нормалью $n(X_0)$ поверхности F.

Далее, из того, что плоскость Q упирается в $P_1 \cap E_0$ в единственной точке X_0, легко заключить, что найдется опорная к E_0 плоскость P_2, параллельная Q, сколь угодно мало наклоненная к P_1 и упирающаяся в E_0 сколь угодно близко к точке X_0. Сдвигая эту плоскость во «внутреннюю» сторону, получим плоскость P_3, отрезающую от E_0 сколь угодно малую «горбушку» вблизи точки X_0. (В частности, если E_0 сводится к одной точке X_0, то построение тривиально.)

Внешние нормали l к опорным плоскостям этой «горбушки» (точнее, к множеству E_0 в точках, принадлежащих «горбушке»), будучи отложенными из одной точки, заполняют некоторый телесный угол K_0. Опорные плоскости к E_0 являются опорными к общей границе Γ' множества E_0 и области $G \setminus E_0$. Стало быть, каждому лучу $l \in K_0$ отвечает перпендикулярная ему плоскость P_l, опорная к Γ'.

Кроме того, плоскость P_3, отрезающая «горбушку», наклонена к P_1 под сколь угодно малым углом. Нормаль же к P_1 есть, как было отмечено, нормаль $n(X_0)$ к поверхности F. Поэтому из телесного угла K_0 можно выделить часть K, состоящую из лучей, образующих с $n(X_0)$ соответственно малые углы.

В итоге мы видим, что множество K лучей l удовлетворяет первому условию, налагаемому на такое множество в теореме 1, и может быть выбрано так, что входящие в него лучи образуют с $n(X_0)$ сколь угодно малые углы, как того и требует утверждение леммы.

4. Теперь проверим, что здесь выполняется также условие 2) теоремы 1, касающееся уже функции $u(X)$. Ограничимся замкнутой сферической окрестностью $U \subset G$ точки X_0. Тогда в пределах $(G \setminus E_0) \cap U$ не только $u(X) > 0$, но на любом фиксированном расстоянии от E_0, т. е. от Γ', $u(X) > \mathrm{const} > 0$. Натягивая здесь на $u(X)$ выпуклую функцию $\overline{u}(X)$, мы можем сослаться на выводы п. 2 § 2. Согласно доказанной там лемме 1, для выполнения условия 2) теоремы 1 достаточно, чтобы оно выполнялось для $\overline{u}(X)$.

Функция $\overline{u}(X)$ обращается в нуль на множестве $\overline{E}_0$, которое представляет собой выпуклую оболочку E_0. Его граница Γ'' (в окрестности U) есть выпуклая поверхность, натянутая на Γ'.

Возьмем какую-либо опорную плоскость P_l к Γ'' с нормалью $l \in K$. Пусть R_l — то ограниченное P_l полупространство, куда направлена l. Допустим, что функция $\overline{u}(X)$ не касается нуля со стороны R_l в точке $X_l \in R_l \cap \Gamma''$.

Однако $\overline{u}(X_l) = 0$, поскольку $X_l \in \Gamma'' \subset E_0$.

Для выпуклой поверхности $\overline{S} : z = \overline{u}(X)$ это означает, что она проходит через точку X_l и имеет в ней опорную плоскость, отличную от плоскости $z = 0$. (Иначе, как показывает рассуждение, проведенное в доказательстве леммы 1, $\overline{u}(X)$ касалась бы нуля со стороны R_l.)

С другой стороны, поскольку $\overline{u}(X) \geq 0$ и $\overline{u}(X_l) = 0$, плоскость $z = 0$ также является опорной к $\overline{S}$ в точке X_l. Поэтому в точке X_l имеется целый пучок опорных плоскостей и ее сферическое изображение заполняет некоторую дугу большого круга. Для нормального изображения это означает, что такое изображение точки X_l заполняет некоторый отрезок на луче l.

Отсюда следует, что если бы имелось множество лучей l положительной меры, для которых $\overline{u}(X)$ не касалась бы нуля со стороны R_l, то нормальное изображение множества Γ'' имело бы положительную меру. Но Γ'' есть часть границы выпуклого множества $\overline{E}_0$ и потому имеет меру нуль. Поэтому такой результат противоречил бы основному условию об абсолютной непрерывности нормального изображения функции $\overline{u}(X)$.

Этим доказано, что, с точностью до множества меры нуль, все лучи $l \in K$ таковы, что функция $\overline{u}(X)$ касается нуля из R_l в точке $X_l \in \Gamma''$. Следовательно, в силу леммы 1, то же верно для исходной функции $u(X)$, т. е. для нее выполнено условие 2) теоремы 1. В итоге наша лемма 4 доказана полностью.

5. Доказательство теоремы 2. Пусть для G, F, L, $u(X)$ выполнены условия теоремы 2. Допустим, вопреки теореме, что множество E_0 нулей функции $u(X)$ не имеет точек сгущения на границе области. Тогда, согласно доказанной только что лемме 4, существует точка $X_0 \in E_0$ такая, что в некоторой ее окрестности для области $G \setminus E_0$ и функции $u(X)$ на этой области выполнены условия теоремы 1.

Кроме того, согласно той же лемме, относительно множества K лучей l можно считать, что лучи l образуют с проходящей через точку X_0 нормалью $n(X_0)$ поверхности F сколь угодно малые углы. Согласно же условию 1) теоремы 2, это означает, что оператор L удовлетворяет в окрестности точки X_0 требованиям теоремы 1, если в них иметь в виду это множество K. Оговоренная в условии 1) замена r на $|X - X_0|$ не имеет значения, как ясно из замечания 3 к теореме 1.

Итак, в окрестности точки X_0 для области $G \setminus E_0$, функции $u(X)$ на ней и для оператора L выполнены все условия теоремы 1. Поэтому, в силу этой теоремы, в $G \setminus E_0$ есть множество положительной меры, где $L(u) > 0$. Но это противоречит тому условию, что почти везде в $G \quad L(u) \le 0$. Полученное противоречие доказывает, что множество E_0 не может не иметь точек сгущения на границе области, и теорема 2 доказана.

§ 5. *Другие теоремы о распространении нулей*

1. Теорему 1 можно, конечно, перефразировать как «теорему о распространении нулей от границы области». Достаточно в ней потребовать, что $u(X) \ge 0$ и $L(u) \le 0$, как она даст, что, при прочих ее условиях, в G заведомо есть точки, где $u = 0$. Из нее вытекает также следующая теорема того же типа.

Теорема 3. *Пусть в области G с границей Γ заданы функция $u(X) \ge 0$ с условием* III § 1 *и такой оператор L, что $L(u) \le 0$. Пусть для точки $X_0 \in \Gamma$ существует такая ее окрестность U, что если точки $X_1 \in \Gamma \cap U$ можно кос-*

нуться изнутри G шаром S, то $u(X)$ касается в X_1 нуля из шара S[5]*. Пусть, наконец, для оператора L в пределах окрестности U выполнены условия:*

(A_3) $a = \mathrm{Det}\,\|a_{ik}\| > \mathrm{const} > 0$;

(B_3) *коэффициенты a_{ik}, b_i суммируемы с n-й степенью;*

(C_3) *существует такая функция $h(X)$, суммируемая с n-й степенью, что $c = c(X) > -h(X)/|X - X_0|$. При этих условиях $u \equiv 0$ в U.*

Доказательство. Очевидно, сколь угодно близко к любой точке $X \in \Gamma$ существуют шары, касающиеся Γ изнутри G и притом в единственной точке. Возьмем такой шар, касающийся Γ в точке X_1, близкой X_0. Соответствующей инверсией, оставляющей X_1 на месте, превратим его в полупространство. Его поверхность превратится тогда в плоскость, опорную к границе Γ' преобразованной области G вблизи точки X_1.

Эта плоскость P_1 касается Γ' в единственной точке X_1, поскольку это имело место для выбранного шара. Следовательно, вблизи X_1 Γ' имеет опорные плоскости всех направлений, достаточно близких к направлению плоскости P_1. Эти плоскости P являются результатом преобразования некоторых шаров, касавшихся Γ. Поэтому из условий теоремы следует, что функция $u'(X)$, в которую перешла $u(X)$, будет касаться нуля в точках X, где в нее упираются эти плоскости. Это касание нуля происходит к тому же со стороны полупространств, ограниченных плоскостями P и «внешних» по отношению Γ'.

В силу предполагаемого условия III § 1, для $u'(X)$ выполнено основное требование об абсолютной непрерывности нормального изображения выпуклой функции, вытянутой на u'.

Таким образом, для $u'(X)$, Γ' здесь воспроизводятся условия теоремы 1. Кроме того, вследствие регулярности преобразования, для преобразованного оператора L' выполняются те же условия, что для исходного. (В частности, условие (A_3) не нарушается, так как $\mathrm{Det}\,\|a_{ik}\|$ множится на квадрат якобиана.) Тем более для L' выполнены условия теоремы 1. Наконец, так как $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$, то также $u' \geq 0$, $L'(u') \leq 0$.

Поэтому, ссылаясь на теорему 1 в той форме, как она интерпретирована только что в начале этого пункта, получим, что в G' заведомо должны иметься точки, где $u' = 0$, и теорема доказана.

2. Условия, налагаемые на a_{ik}, b_i в теореме 3, можно ослабить, заменяя их некоторыми неравенствами. Это очевидно из того, что нам достаточно, чтобы эти условия обеспечивали выполнение условий теоремы 1 для оператора L', полученного из L при соответствующей инверсии. Получить

---

[5] Т. е. в S существует такая последовательность точек $X^m \to X_1$, что $u(X^m)/r_m \to 0$, где r_m — расстояние X^m до поверхности шара S. Условие теоремы, например, заведомо выполнено, если Γ — гладкая и на $\Gamma \cap U$ нормальная производная $\partial u/\partial n = 0$.

такую усиленную формулировку теоремы 3 не представляет труда, и мы ее не будем приводить.

3. Теорема 4. *Пусть в области G задан такой оператор L, что у каждой точки $X_0 \in G$ существует окрестность, в которой выполнены условия (A_3)–(C_3) теоремы 3. Тогда, если для определенной в G функции $u(X) \geq 0$ с условием* III § *1 почти везде $L(u) \leq 0$ и хоть где-нибудь в $G \quad u = 0$, то $u \equiv 0$ в G.*

Доказательство. Пусть E_0 — множество нулей функции $u(X)$. Допустим, что оно не распространяется на всю область. Тогда, если $u(X)$ дифференцируема, то она касается нуля всюду на общей границе Γ' множества E_0 и области $G \setminus E_0$. Поэтому вблизи любой точки $X \in \Gamma'$ оказываются выполненными условия теоремы 3. Ссылаясь на эту теорему, видим, что в $G \setminus E_0$ должны иметься точки, где $u = 0$. Это противоречит самому определению E_0. Следовательно, $E_0 = G$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим общий случай, когда $u(X)$ может быть недифференцируемой. Если E_0 не покрывает G, то найдется шар S, касающийся E_0 в какой-то единственной точке X_0, а в остальном заключенный в $G \setminus E_0$.

Путем соответствующей инверсии с центром в точке, диаметрально противоположной X_0, превратим поверхность шара S в плоскость P, а его внутренность — в полупространство R. Множество E_0 превратится в E_0', не имеющее точек в R, причем точка X_0 будет единственной, в которой плоскость P упирается в E_0'. Таким образом, мы получим ту же ситуацию, которая рассматривалась в доказательстве теоремы 2.

Функция $u(X)$ перейдет в $u'(X)$, для которой также верны требования теоремы 2 (в частности, ссылаемся на условия III § 1).

Наконец, вследствие регулярности произведенного преобразования, оператор L', в который перейдет L, удовлетворяет в окрестности точки X_0 прежним условиям (A_3)–(C_3) и, следовательно, условиям теорем 1 и 2.

Итак, вся ситуация, рассмотренная в доказательстве теоремы 2, повторяется. Следуя проведенному там выводу, придем к противоречию и получим, таким образом, доказательство теоремы 4.

§ *6. Примеры и приложения*

1. Покажем, что налагаемое нами требование суммируемости коэффициентов b_i с n-й степенью не может быть заменено требованием суммируемости с какой-либо меньшей степенью. Пусть

$$u = \frac{1}{2} \sum x_i^2 \equiv \frac{1}{2} r^2. \tag{1}$$

Тогда u удовлетворяет уравнению

$$\Delta u - n \sum \frac{x_i}{r^2} u_i = 0.$$

Здесь $b = \sqrt{\sum b_i^2} = 1/r$, стало быть, суммируемо с любой степенью, меньшей n. Между тем функция u касается нуля только в начале координат.

Этот же пример показывает, что требование на коэффициент c также не может быть ослаблено аналогичным образом. Функция (1) удовлетворяет уравнению

$$\Delta u - \frac{2n}{r^2} u = 0.$$

Здесь $rc = -2n/r^2$ и, стало быть, также суммируемо с любой степенью, меньшей n.

2. Следующий пример показывает, что в теоремах 3, 4 суммируемость коэффициентов a_{ik} с n-й степенью также нельзя заменить суммируемостью с меньшей степенью. Рассмотрим функцию двух переменных:

$$u(x,y) = \begin{cases} (x-y^2)^3/6 & \text{при} \quad x > y^2, \\ 0 & \text{при} \quad x \le y^2. \end{cases} \tag{2}$$

Она дважды непрерывно дифференцируема. Собственные значения k_1, k_2 ее второго дифференциала в области $x > y^2$ суть

$$k_1 = (1-\varepsilon)(x-y^2), \qquad k_2 = -\frac{(x-y^2)^2}{1-\varepsilon}, \tag{3}$$

где $\varepsilon(x,y) \to 0$ при x, $y \to 0$.

Так как k_1, k_2 разных знаков, то, направляя оси ξ, η по главным направлениям d^2u в данной точке, получим

$$|k_2| u_{\xi\xi} + |k_1| u_{\eta\eta} = 0$$

или

$$\sqrt{\left|\frac{k_2}{k_1}\right|} u_{\xi\xi} + \sqrt{\left|\frac{k_1}{k_2}\right|} u_{\eta\eta} = 0. \tag{4}$$

Поскольку в области $x \le y^2$ $u \equiv 0$, то в ней $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Таким образом, функция $u(x,y)$ всюду удовлетворяет уравнению

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} = 0,$$

где $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1$, $a_{11}a_{22} > 0$. При этом коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} суммируемы с любой степенью $q < 2$. Это достаточно проверить для коэффициентов уравнения (4), так как вращение осей не изменяет указанного свойства. Определяя эти коэффициенты из (3), непосредственно убеждаемся, что они суммируемы с любой степенью $q < 2$ в любой конечной области.

3. Последний пример служит иллюстрацией к следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть у функции $u(x,y) \geq 0$ в области G собственные значения общего второго дифференциала k_1, k_2 почти везде разных знаков. Тогда, если на каком-то участке Γ' границы области G $u(x,y)$ обращается в нуль вместе с первыми производными (или удовлетворяет соответствующему, более общему условию теоремы 3), то $|k_1/k_2| + |k_2/k_1|$ не может быть суммируемой ни в какой части области G, прилегающей к Γ'.*

Доказательство. Так как k_1, k_2 разных знаков, то $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (4). Поэтому, если бы $|k_1/k_2| + |k_2/k_1|$ было бы суммируемой, то из теоремы 3 следовало бы, что $u(x,y)$ должна обращаться где-то в нуль внутри G. Тогда по теореме 4 она была бы тождественным нулем и, вопреки условию, всюду было бы

$$k_1 = k_2 = 0.$$

С помощью теоремы 5 можно получить следующий результат. Пусть $H(x,y,z)$ — положительно однородная, непрерывно дифференцируемая функция, определенная во всем пространстве, за исключением начала. Вследствие однородности, одно из собственных значений ее второго дифференциала всегда равно нулю. Мы предполагаем, что H имеет обобщенные вторые производные, суммируемые с квадратом (во всякой конечной области, не подходящей к началу или, что вследствие однородности равносильно, на единичной сфере S с центром в начале). Имеет место следующая

Теорема 6. *Пусть у функции H указанного типа собственные значения R_1, R_2 ее второго дифференциала (не считая тривиально равного нулю) удовлетворяют условиям: 1) почти в каждой точке либо $R_1 = R_2 = 0$, либо $R_1R_2 < 0$; 2) $|R_1/R_2| + |R_2/R_1|$ суммируема на всяком множестве, где $R_1R_2 < 0$ на сфере S. При этих условиях функция H — линейная.*

Подобная теорема доказана в [4] в предположении, что $|R_1/R_2| + |R_2/R_1|$ ограничено на S (там, где $R_1R_2 < 0$). Чтобы получить теорему 6, достаточно повторить данное там доказательство, ссылаясь в нужном месте на теорему 5. Из теоремы 6 непосредственно вытекает весьма общая теорема единственности для замкнутых поверхностей [4].

4. Рассмотрим уравнение Монжа — Ампера

$$E(rt - s^2) + Ar - 2Bs + Ct + D = 0 \tag{5}$$

для функции $z = z(x,y)$ с коэффициентами, зависящими, вообще говоря, от x, y, z, p, q, причем под p, q, r, s, t понимаются обобщенные производные[6)].

[6)] Имеются в виду традиционные обозначения $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$. — *Прим. ред.*

Теорема 7. *Пусть уравнение (5) в некоторой области G имеет решения $u(x,y)$, $v(x,y)$, причем во всякой области G', лежащей существенно внутри G, выполнено следующее:*

1) $u_{xx},\ldots,v_{yy}$ суммируемы с квадратом;

2) при подстановке в $A,\ldots,E$ $\quad z=u,v$; $p=u_x,v_x$; $q=u_y,v_y$ оказывается

$$\Delta\equiv AC-B^2-ED>\mathrm{const}>0,\quad (Eu_x+C)(Eu_y+C)>0^{7)};$$

3) E зависит только от x, y; A, B, C таковы, что их производные по z, p, q ограничены, если в них подставить z, p, q для $z=(1-t)u+tv$ $(0\le t\le 1)$; производные от D по z, p, q суммируемы с квадратом при том же условии.

Тогда, если всюду $u\ge v$ и хоть где-нибудь $u=v$, то множество, где $u=v$, имеет точки сгущения на границе G.

Если же, помимо условий 1) − 3), во всякой G' $\quad E$ ограничено, а A, B, C суммируемы с квадратом (если в них подставить $z=u,v$; $p=u_x,v_x$; $q=u_y,v_y$), то $u=v$ всюду в G.

Дополнение. Допустим, что условие 1) заменяется требованием, что обобщенные производные $u_{xx},\ldots,v_{yy}$ суммируемы со степенью $m>2$. Тогда для правильности первой части теоремы от производных A_z, $A_p,\ldots,C_q$ достаточно требовать суммируемости со степенью $2m/(m-2)$. Если же $m\ge 4$, то E может зависеть от z, p, q, но так, что при $m=4$ производные E_z, E_p, E_q ограничены, а при $m>4$ суммируемы со степенью $2m/(m-4)$.

Для правильности же второй части теоремы достаточно дополнительно требовать от E только суммируемости со степенью $2m/(m-2)$ (оставляя условие на A, B, C).

Доказательство теоремы 7 вместе с дополнением сводится к тому, что для $u-v$ получается линейное уравнение, к которому применяются наши теоремы 2, 4. Это сведéние к линейному уравнению делается так же, как в известной теореме Реллиха [3] о единственности решения задачи Дирихле для уравнения (5).

Из теоремы 7, естественно, следует обобщение этой теоремы Реллиха.

Теоремы 2, 4 влекут также другие теоремы единственности как для линейных, так и для нелинейных уравнений с обобщенными вторыми производными. К этим теоремам мы обратимся в другой статье.

5. В заключение еще одно существенное замечание, которым я обязан Ю. Г. Решетняку.

Как указано в п. 1 § 1, наши результаты применимы к функциям $u(X)$, имеющим вторые обобщенные производные, суммируемые с n-й степенью.

---

7) Достаточно, чтобы было для обоих решений $\Delta>0$ и хотя бы для одного $\Delta>\mathrm{const}>0$.

Следующий пример, указанный Ю. Г. Решетняком, показывает, что это условие на вторые обобщенные производные не может быть заменено условием их суммируемости с какой бы то ни было степенью, меньшей n. Пусть числа p, q удовлетворяют неравенствам

$$n > p > \frac{n}{2}, \qquad 1 > q > 2 - \frac{n}{p}. \tag{6}$$

Введем функцию

$$u(X) = r^q \equiv \left(\sum x_i^2\right)^{q/2}. \tag{7}$$

Она непрерывна, а ее вторые производные существуют и непрерывны всюду, кроме начала ($r = 0$). Для них, очевидно, имеет место оценка

$$|u_{ik}| \leq \mathrm{const} \cdot r^{q-2}.$$

А так как из (6) следует, что $(q-2)p > -n$, то они суммируемы со степенью p во всякой конечной области. Поэтому функция (7) имеет вторые обобщенные производные, суммируемые со степенью p.

Вместе с тем, как убеждаемся прямой проверкой, функция (7) удовлетворяет уравнению

$$\sum u_{ii} + \frac{n+q-2}{1-q} \sum \frac{x_i x_k}{r^2} u_{ik} = 0.$$

Легко проверить, что оно строго эллиптично; кроме того, его коэффициенты ограничены и всюду, кроме начала, непрерывны. Однако функция (7) обращается в нуль в начале координат, так что принцип максимума, содержащийся в теоремах 2, 4, здесь не выполняется.

Функция (7) не дифференцируема в начале координат; поэтому неизвестно, можно ли ослабить условия на вторые обобщенные производные, если требовать, чтобы функция $u(X)$ имела всюду непрерывные первые производные.

Статья поступила в редакцию
21.VI.1960

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. IV // Изв. вузов. Математика. 1960. № 3. С. 3–15.
2. *Александров А. Д.* То же. V. // Там же. 1960. № 5. С. 16–26.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.; Л.: Гостехиздат, 1959. Т. 5.

Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле

Доклады Академии наук СССР. 1960. Том 134, № 5. С. 1001–1004

1. Рассмотрим в ограниченной области G изменения n переменных x_i квазилинейное уравнение

$$\sum a_{ik} u_{ik} = \varphi. \tag{1}$$

Предполагается, что матрица $\|a_{ik}\|$ не имеет отрицательных собственных значений (по крайней мере, рассматриваются только такие решения u, для которых это так). Дальше X обозначает точку области G, а D — область, содержащуюся в G вместе с замыканием.

Рассматриваемые решения $u(X)$ предполагаются непрерывными и удовлетворяющими одному из следующих условий:

I. u имеет обобщенные вторые производные по С. Л. Соболеву, суммируемые с n-й степенью во всякой D;

II. u дважды дифференцируемо.

2. Пусть L — m-мерная плоскость, проходящая через начало координат O, и T — какая-либо $(n-1)$-мерная плоскость, не проходящая через O и пересекающая L. Вращая L вокруг O так, чтобы пересечение $L \cap T$ однозначно зачеркивало T, получим $(n-m)$-мерное множество плоскостей L, которое назовем пучком. В пучке естественно определяется $(n-m)$-мерная мера множества плоскостей L.

Далее, обозначим через a_L главный минор матрицы $\|a_{ik}\|$, отвечающий индексам $1, \ldots, m$, если оси $x_1, \ldots, x_m$ путем поворота всех осей располагаются в плоскости L.

Во всех дальнейших теоремах подразумевается следующее.

Если имеются в виду решения уравнения (1) *с условием* I, *то фигурирующие в теореме соотношения, зависящие от L, выполнены для множества $\{L\}$, имеющего в каком-либо пучке положительную меру.*

Если же иметь в виду решения с условием II, *то такие соотношения достаточно считать выполненными для какой-либо одной плоскости L.*

Для каждой плоскости L оси координат поворачиваются так, что оси $x_1, \ldots, x_m$ параллельны L. Размерность m плоскостей L всякий раз любая данная, $1 \leq m \leq n$. При $m = n$ L сводится ко всему пространству и оговорки о множестве $\{L\}$ и выборе осей отпадают, а $a_L = \operatorname{Det}\|a_{ik}\|$.

Если U — область изменения n переменных $y_1, \ldots, y_n$, то под

$$\int\limits_U f(y_1, \ldots, y_m) dy_1 \ldots dy_m$$

будем понимать интеграл по всем значениям $(y_1, \ldots, y_m)$, имеющимся в U.

3. Все дальнейшие результаты основаны на следующей лемме.

Пусть $\overline{u}(X)$ — выпуклая (вогнутая) функция, «натянутая на $u(X)$ снизу (сверху)», т. е. наибольшая (наименьшая) из выпуклых (вогнутых) функций $v(X) \leq u(X)$ $(v \geq u)$, $X \in D$. Пусть $\psi(D, u)$ — ее нормальное изображение (определение см., например, в [1]). При условиях I или II, наложенных на u, $\psi(D, u)$ с точностью до множества меры нуль есть множество точек с координатами $\overline{u}_i(X)$, $X \in D$.

Лемма. *Пусть для данного решения $u(X)$ уравнения* (1) *выполнено неравенство*

$$a_L^{-1/m} \varphi \leq P_L(x_1, \ldots, x_m) Q_L(u_1, \ldots, u_n), \tag{2}$$

где P_L, $Q_L \geq 0$. Тогда для всякой D и почти всех L, для которых верно (2),

$$\int\limits_D P_L^m dx_1 \ldots dx_m \geq m^m \int\limits_{\psi(D,u)} Q_L^{-m}(u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0) du_1 \ldots du_m, \tag{3}$$

где $\psi(D, u)$ берется для выпуклой $\overline{u}$, натянутой на $u(X)$ снизу. Если же $a_L^{-1/m} \varphi \geq -P_L Q_L$, то (3) *верно для вогнутой $\overline{u}$, натянутой на $u(X)$ сверху.*

Неравенство (2) подразумевается выполненным с точностью до множеств меры нуль, так что не исключено, например, что a_L где-то обращается в нуль. Интегралы в (3) могут быть бесконечными.

Когда решение $u(X)$ внутри области далеко отходит от значений на краю, то $\psi(D, u)$ увеличивается. Поэтому (3) неявно содержит оценку для отклонений $u(X)$ от краевых значений.

4. Теорема 1. *Пусть для данного решения $u(X)$ уравнения (1) выполнено (2), причем P_L^m суммируема по всякой D, а $Q(u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0)$ не суммируемо в плоскости $u_1, \ldots, u_m$ ни в какой окрестности начала. Тогда $u(X)$ достигает точной нижней границы на краю G, и если $a_L^{-1/m} \varphi \geq$ $\geq -P_L Q_L$ с аналогичными условиями, то $u(X)$ достигает верхней границы также на краю.*

Из теоремы 1 можно вывести условия единственности решения задачи Дирихле. Так, имеет место

Теорема 2. *Задача Дирихле для уравнения* (1) *имеет не более одного решения с условием* I, *если:*

1) $a = \operatorname{Det}\|a_{ik}\| > \text{const} > 0$ (*что можно считать выполненным, если* $a > 0$, *стоит лишь разделить* (1) *на* $a^{1/n}$);

2) a_{ik} *не зависят от* u, *а* φ — *не убывающая по* u;

3) *во всякой области* D *при ограниченных* u, u_j

$$|\overline{a}_{ik}(u_j + \Delta u_j, x_j) - a_{ik}(u_j, x_j)| \leq M\Big[\sum \Delta u_j^2\Big]^{1/2},$$

$$|\varphi(u_j + \Delta u_j, u, x_j) - \varphi(u_j, u, x_j)| \leq N(x_j)\Big[\sum \Delta u_j^2\Big]^{1/2},$$

где M — *постоянная, а* $N(x_j)$ *суммируема с* n*-й степенью* (M *и* N *зависят, вообще говоря, от* D *и границ для* u, u_j).

5. Теорема 3. *Пусть для некоторых решений* $u(X)$ *уравнения* (1) *выполнено неравенство* (2) *с одинаковыми для всех них функциями* P_L, Q_L *и*

$$\int\limits_G P_L^m dx_1 \ldots dx_m < m^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_L^{-m}(u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0) du_1 \ldots du_m,$$

что заведомо верно, если левый интеграл конечен, а правый — бесконечен. Тогда для всех таких решений величина $\inf\limits_G u(X) - \inf\limits_\Gamma u(X)$ *ограничена снизу одним и тем же числом. Аналогично* $\sup\limits_G u(X) - \sup\limits_\Gamma u(X)$ *ограничено сверху, если* $a_L^{-1/m}\varphi \geq -P_L Q_L$ *при тех же условиях на* P_L, Q_L.

6. Рассмотрим, в частности, линейное уравнение

$$L(u) \equiv \sum a_{ik}u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = f. \tag{4}$$

Введем обозначение: $\big[\sum b_i\big]^{1/2} = b$ и для любой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ при условии, что оси $x_1, \ldots, x_m$ лежат в плоскости L, положим

$$g_L(x_1, \ldots, x_m) = \sup_{(x_{m+1}, \ldots, x_n)} g(x_1, \ldots, x_n).$$

Из теоремы 1 легко выводится

Теорема 4. *Пусть в уравнении (4)* $c \leq 0$ *и* $a_L^{-1} b_L^m$ *суммируемо по каждой области* D. *Тогда при* $f = 0$ *никакое решение не может достигать внутри* *области отрицательного (положительного) минимума (максимума), не достигая его на границе, и задача Дирихле поэтому не может иметь более одного решения.*

При $m = n$ теорема 4 сводится к тому, что при $c \leq 0$ единственность решения задачи Дирихле обеспечивается суммируемостью $a^{-1/n} b$ с n-й степенью, где $a = \operatorname{Det} \|a_{ik}\|$. Вместе с тем простые примеры показывают, что это требование уже нельзя заменить суммируемостью с какой бы то ни было степенью, меньшей n. Кроме того, как показывает пример, указанный мне Ю. Г. Решетняком, предполагаемую нами суммируемость обобщенных производных u_{ik} с n-й степенью также нельзя заменить суммируемостью с меньшей степенью. Наконец, в теорему входит только a_L (при $m = n$ соответственно $\operatorname{Det} \|a_{ik}\|$), что существенно при отказе от ограниченности коэффициентов a_{ik}. Таким образом, теорема 4 дает в известном смысле минимальные условия единственности решения задачи Дирихле при $c \leq 0$.

7. Введем обозначения: $c_+ = c$ при $c > 0$ и $c_+ = 0$ при $c \leq 0$,

$$B_L = \int\limits_G \frac{b_L^m}{a_L} dx_1 \ldots dx_m, \ C_L = \int\limits_G \frac{c_{+L}^m}{a_L} dx_1 \ldots dx_m, \ F_L = \int\limits_G \frac{|f|_L^m}{a_L} dx_1 \ldots dx_m.$$

Обозначим также H_L выпуклую оболочку проекции области G на плоскости L.

Теорема 5. *Существует такая убывающая положительная функция $\Phi(B_L; H_L)$ [1], что единственность решения задачи Дирихле для уравнения* (4) *обеспечивается условием $C_L < \Phi(B_L; H_L)$.*

Так как $\Phi > 0$, то при $C_L = 0$ это условие выполнено само собой, коль скоро $B_L < \infty$. (Это последнее замечание обеспечивает единственность решения задачи Дирихле при $c \leq 0$, если $a_L^{-1}\ b_L^m$ суммируемо по всей области G, что, однако, сильнее условия теоремы 4.)

Можно дать явное выражение функции Φ, но оно довольно сложно. При $B_L = 0$, т. е. $b = 0$, условию $C_L < \Phi$ можно придать простой вид:

$$C_L \leq m^m \varkappa_m^2 V_L^{-1}, \tag{5}$$

где $\varkappa_m$ — объем m-мерного единичного шара, а V_L — объем m-мерного эллипсоида, содержащего H_L.

Теорема 5 очевидным образом включает оценку снизу для первого собственного значения уравнения $L(u) + \lambda u = 0$.

Теоремы, подобные теореме 5, хорошо известны для эллиптических уравнений при более жестких предположениях о коэффициентах и характере

[1] Т. е., в частности, при $H_L' \supset H_L''$ $\quad \Phi(B_L; H_L') \leq \Phi(B_L; H_L'')$.

решения. Известны оценки в зависимости от объема области (см., например, [2, § 37; 3]). Заключающаяся в теореме 5 оценка зависит от выпуклой оболочки области, а не от объема самой области; но для выпуклых областей характер оценки тот же, что в указанных известных случаях.

8. Теорема 6. *Если для решения* $u(X)$ *уравнения (4) положить* $h = \inf\limits_{\Gamma} u(X) - \inf\limits_{G} u(X)$, $h_\Gamma = \inf\limits_{\Gamma} u(X)$, *то*

$$h \leq \Psi(B_L, (1 + h_\Gamma^n)C_L, F_L; H_L),$$

где Ψ — *возрастающая функция всех своих аргументов.*

Та же оценка верна для $h = \sup\limits_{G} u(X) - \sup\limits_{\Gamma} u(X)$ при $h_\Gamma = \sup\limits_{\Gamma} u(X)$.

В простейшем случае, когда $b = c_+ = 0$, оценка может быть представлена в виде

$$h^m \leq m^{-m} \varkappa_m^{-2} V_L F_L,$$

где $\varkappa_m$ и V_L те же, что в (5).

9. Отметим еще следующий результат.

Теорема 7. *Если уравнение* (4) *с* $b = f = 0$ *имеет нетривиальное знакопостоянное решение* $u(X)$ *с краевым условием* $u|_\Gamma = 0$, *то, полагая* $\sup |u| = h$, *имеем*

$$\int\limits_G \Big(\frac{|u|_L}{h}\Big)^{2m} dx_1 \ldots dx_m > m^{m/2} \varkappa_m V_L^{-1/2} \Big[\int\limits_G \frac{|c|_L^{2m}}{a_L^2} dx_1 \ldots dx_m\Big]^{-1}. \qquad (6)$$

Это означает, что $u(X)$ не может иметь слишком выделяющегося максимума (минимума). Подобное же утверждение верно при $b \neq 0$, но тогда оценка для левой части (6) получается более сложной и включает также B_L.

Статья поступила в редакцию
18.VII.1960

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Линейчатые поверхности в метрических пространствах // Вестн. ЛГУ. 1957. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–26.
2. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях в частных производных. М.: Гостехиздат, 1950.
3. *Polya G., Szegö G.* Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Princeton: Princeton University Press, 1951. (Русский перевод: *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.)

О принципе максимума [1)]

Некоторые проблемы математики и механики. Новосибирск, 1961. С. 25–41

§ *1. Введение*

1. Еще С. Заремба [1] дополнил известное свойство отличной от постоянной гармонической функции — не достигать максимума (минимума) внутри области — теоремой, что в точке на границе области, где такая функция достигает верхней (нижней) границы, ее нормальная производная не может быть равной нулю, если этой точки можно коснуться изнутри области каким-либо шаром.

Этот результат был усилен в совместной работе [2] М. А. Лаврентьева и М. В. Келдыша. Они показали, что при тех же условиях для точки A на границе Γ области G для гармонической функции $u(X)$, достигающей в A своей верхней (нижней) границы $u(A)$, имеет место неравенство

$$\lim_{X\to A}\inf \frac{|u(X)-u(A)|}{r(XA)} > 0,$$

если $X \in G$ стремится к A по лучу, образующему с нормалью в точке A острый угол ($r(XA)$ — расстояние XA). Тоже верно, если точки A можно коснуться изнутри области параболоидом любой степени $p > 1$. Стало быть, в частности, это верно во всех точках границы, если она есть поверхность Ляпунова (т. е. нормали удовлетворяют условию Гёльдера).

Подобный результат был получен другими авторами (Ж. Жирб, Э. Хопф, О. А. Олейник) для решений эллиптических уравнений. Его формулировку и ссылки на соответствующие работы (кроме [2]) можно найти в книге К. Миранды [3].

---

1) Статья представляет собой дополненное детальным доказательством основной теоремы и некоторыми ссылками изложение доклада, прочитанного 19 ноября 1960 г. в Новосибирске на симпозиуме по математической физике в связи с юбилеем М. А. Лаврентьева.

Подобные результаты можно вообще назвать принципом максимума на границе в противопоставление «внутреннему» принципу максимума, в котором речь идет о максимуме (минимуме) решения внутри области. Оба принципа известным путем приводят к теоремам единственности решения краевых задач.

2. Внутренний принцип максимума для эллиптических уравнений может быть легко сведен к теореме Э. Хопфа [4] о том, что если для линейного эллиптического оператора второго порядка L и функции $u(X)$ в области G выполнены неравенства $L(u) \leq 0$, $u(X) \geq 0$ и в какой-то точке $X_0 \in G$, $u(X_0) = 0$, то $u \equiv 0$ в G.

Соответственно принцип максимума на границе может быть сведен к тому, что если $L(u) \leq 0$, $u(X) \geq 0$ и $u(X)$ «касается» нуля в некоторой точке $A \in \Gamma$ (при возможности коснуться A из G параболоидом), то $u \equiv 0$ в G. (В простейшем смысле $u(X)$ «касается» нуля в точке A, если в A сама $u(X)$ и ее производная по нормали или вообще по лучу, идущему строго внутрь G, обращается в нуль. Более общий смысл будет определен дальше, когда мы точно сформулируем наши результаты.)

3. Была поставлена задача — выяснить возможно более общие условия выполнения обоих принципов максимума. Это касается, во-первых, возможного расширения класса допускаемых функций $u(X)$, в особенности в смысле понимания ее производных по С. Л. Соболеву. Во-вторых, это относится к выяснению возможно более общих условий на коэффициенты уравнения и, в частности, возможностей ослабления требований строгой эллиптичности оператора L. (Хорошо известно, что не для всех форм принципа максимума она необходима.) В-третьих, это касается выяснения возможно более общих условий на границу вблизи данной точки A в духе упомянутого выше условия, что ее можно коснуться изнутри G параболоидом.

При этом вопрос о внутреннем принципе максимума ставится в следующей общей форме: если в G $L(u) \leq 0$ и $u(X) \geq 0$ и в какой-то точке $X_0 \in G$ $u(X_0) = 0$, то на какого рода множестве можно гарантировать, что $u \equiv 0$? Или, иными словами, на какое множество заведомо должны распространяться нули функции $u(X)$?

Вопрос же о принципе максимума на границе аналогично заменяется вопросом о распространении нуля от границы, т. е. о том, когда можно гарантировать, что если $u(X)$ «касается нуля» в точке $X_0 \in \Gamma$, то хоть где-то в G вблизи X_0 $u(X) = 0$.

4. В основу кладется именно вопрос о распространении нуля от границы, а вопрос распространения нулей внутри области к нему сводится. Если, например, в [5] при выводе принципа максимума на границе используется внутренний принцип максимума, то пока этот принцип не установлен, скажем, для более общего рассматриваемого класса функций, мы все равно не можем им воспользоваться. Напротив, мы выводим его из принципа максимума на границе.

Это сведение вытекает из следующего очевидного замечания. Если уже известно, что $u = 0$ на множестве E, то рассмотрим область $G \setminus E$. Тогда в точках ее границы, принадлежащих E, $u(X)$ касается нуля. И, кроме того, очевидно, что вблизи любой такой точки есть точки, где множества E можно коснуться шаром изнутри $G \setminus E$. Поэтому тут можно будет воспользоваться принципом максимума на границе и при соответствующих условиях проследить, что нули функции должны распространяться дальше.

Наконец, вопрос о распространении нуля от границы можно ставить в том частном случае, когда вблизи данной точки X_0 граница плоская. Если вопрос решен в такой частной постановке, то, применяя подходящее преобразование переменных, превращающее плоскость, скажем, в параболоид, можно будет получить его решение при более общем виде границы.

Таким образом, отправным пунктом всего исследования оказывается вопрос о распространении нуля от плоской части границы области.

Вся эта программа осуществляется в моих работах [6–11].

5. Здесь имеется в виду прежде всего дать новое доказательство основной теоремы о распространении нуля от плоской части границы — теорема 1 § 3.

Эта теорема содержит, правда, несколько меньше, чем соответствующая теорема в [10]. Зато применяемый здесь метод, который можно назвать методом выпуклой оболочки и интегрирования по ее нормальному изображению [2)], имеет свои преимущества. Он позволяет получить более сильные результаты о внутреннем принципе максимума [11], а также некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле [12].

Далее в § 2 точно формулируются условия, налагаемые на рассматриваемые функции $u(X)$, и общие предположения об операторе L. В § 3, 4 доказывается теорема о распространении нуля от плоского куска границы. В § 5 дается обзор некоторых дальнейших результатов.

§ 2. *Основные условия на функции и операторы*

1. Всюду дальше имеется в виду некоторая ограниченная область G изменения переменных $x_1, \dots, x_n$; Γ — граница области; $X = (x_1, \dots, x_n)$ — точка пространства.

Рассматриваемые функции $u(X)$, определенные на G, можно считать подчиненными одному из следующих двух условий:

[2)] Для гладкой функции $u(X)$ нормальное отображение сопоставляет точке X области, где определена $u(X)$, конец вектора $\operatorname{grad} u(X)$. Общее определение дается дальше. Впрочем, оно не ново; см., напр., [13].

(A) $u(X)$ непрерывна и имеет обобщенные вторые производные по С. Л. Соболеву, суммируемые с n-й степенью в окрестности каждой точки $X \in G$;

(B) $u(X)$ всюду дифференцируема, и существует такая всюду конечная функция $M(X)$, что во всякой точке

$$\varlimsup_{X' \to X} \frac{|\operatorname{grad} u(X') - \operatorname{grad} u(X)|}{r(X'X)} < M(X).$$

Напомним, что если $u(X)$ имеет обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью, то она, во-первых, имеет такие же первые производные, а во-вторых, эквивалентна непрерывной (см., например, [14]). Стало быть, в частности, требование непрерывности, налагаемое в (A), не является, собственно, ограничением общности.

Ниже мы сформулируем условия на $u(X)$, которые непосредственно используются в доказательствах и которые удовлетворяются при каждом из условий (A) или (B).

2. Из условий (A) и (B) мы можем заключить о существовании почти везде первого и второго дифференциалов. Поэтому мы введем понятие об этих дифференциалах и соответственно производных в некотором обобщенном смысле.

Именно дифференциалы du, d^2u и соответственно производные u_i, u_{ik} функции u можно определить следующим образом.

Положим,

$$u(X) \equiv u(X_0 + \Delta X) =$$
$$= u(X_0) + \sum u_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum u_{ik} \Delta x_i \Delta x_k + \varepsilon(X) \sum \Delta x_i^2. \tag{1}$$

Допустим, что для каждого направления l из точки X_0 существует такая последовательность точек $X_i \to X_0$, что направления X_0X_i сходятся к l, а $\varepsilon(X_i) \to 0$. Тогда будем говорить, что $u(X)$ имеет в точке X_0 общий первый и второй дифференциалы $du = \sum u_i dx_i$, $d^2u = \sum u_{ik} dx_i dx_k$ и соответственно обобщенные производные u_i, $u_{ik} = u_{ki}$.

Конечно, так определенные дифференциалы, если они существуют, не обязаны быть единственными в данной точке. Однако из дальнейшего будет ясно, что это не играет никакой роли. Общность же введенного понятия позволяет пользоваться им, обходясь без доказательств существования дифференциалов в каком-либо более узком смысле.

Первое условие, налагаемое на рассматриваемые далее функции $u(X)$, состоит в следующем.

I. Функция $u(X)$ непрерывна и почти везде имеет первый и второй общие дифференциалы [3)].

3. *Если $u(X)$ имеет обобщенные первые и вторые производные u_i, u_{ik}, то она почти везде имеет общие дифференциалы $du = \sum u_i dx_i$, $d^2u = \sum u_{ik} dx_i dx_k$ в указанном смысле.*

Действительно, почти на всех прямых, параллельных, скажем, оси x_1, такая функция почти везде дважды дифференцируема по x_1 (см., например, [14]). Это свойство сохраняется при повороте осей. Подвергая оси счетному множеству подходящих вращений, получим, что почти везде u дважды дифференцируема по всему плотному множеству направлений. В силу того, что при повороте осей обобщенные производные преобразуются как обычные, производные по этим направлениям связаны с u_i, u_{ik} обычными формулами. Отсюда следует, что u почти везде имеет общие дифференциалы.

Можно доказать также, что *при выполнении условия (B) функция $u(X)$ также имеет почти везде общие дифференциалы du, d^2u* (и даже аппроксимативные дифференциалы, определяемые из формулы (1) условием, что $\varepsilon(X) \to 0$ по множеству, имеющему в точке X_0 плотность 1).

4. Общие дифференциалы обладают следующими двумя очевидными свойствами:

1) при всяком регулярном, т. е. дважды непрерывно дифференцируемом, преобразовании переменных они преобразуются как обычные дифференциалы;

2) если в окрестности точки X_0 $u \geq v$, а в самой точке X_0 $u = v$, функция u имеет общие дифференциалы du, d^2u, а v дважды дифференцируема в обычном смысле, то в X_0 $du = dv$, $d^2u \geq d^2v$.

Только этими двумя свойствами мы и будем пользоваться. (Поэтому под du, d^2u можно в конечном счете понимать линейную и квадратичную формы, обладающие этими двумя свойствами.)

5. Для формулировки дальнейших условий, налагаемых на функции $u(X)$, так же как и для доказательства основной теоремы, нам понадобится понятие нормального изображения.

Если u дифференцируема, то нормальное изображение множества $M \subset G$ посредством функции u есть по определению множество концов векторов $\operatorname{grad} u(X)$, $X \in M$, отложенных из начала координат.

[3)] Можно отказаться от требования непрерывности, требуя непрерывности $u(X)$ почти везде, но тогда в дальнейшем нужно считать $u(X)$ в каждой точке X_0 ее разрыва неоднозначной, приписывая ей значения $\overline{\lim\limits_{X \to X_0}}\, u(X)$ и $\underline{\lim\limits_{X \to X_0}}\, u(X)$. Тогда, скажем, неравенство $u > 0$ нужно понимать так, что все значения $u(X) > 0$, а равенство $u = 0$ в том смысле, что одно из значений равно нулю.

Пусть теперь u — выпуклая функция; P — опорная плоскость к поверхности $z = u(X)$ в точке $(X_0,\, u(X_0))$. Напишем ее уравнение в форме

$$z - z_0 = \sum (x_i - x_{i0}) u_i.$$

Плоскости P сопоставляем точку $\psi(P) = (u_1, \ldots, u_n)$. Если плоскость P — касательная, то u_i — производные и $\psi(P)$ есть конец вектора $\operatorname{grad} u(X_0)$.

Нормальным изображением $\psi_u(M)$ множества $M \subset G$ посредством функции u называется множество всех точек $\psi(P)$ для всех опорных плоскостей P во всех точках $[X, u(X)]$, $X \in M$.

Мера множества $\psi_u(M)$ оказывается вполне аддитивной функцией множества M, определенной для всех борелевских M. Мы обозначаем ее $W(u; E)$. (Вследствие очевидной связи нормального изображения со сферическим, указанное свойство W является прямым следствием такого же хорошо известного свойства площади сферического изображения.)

6. Будем говорить, что выпуклая функция $\overline{u}$ натянута на функцию u над областью $G' \subset G$ снизу, если она есть наибольшая из определенных в G' выпуклых функций v таких, что $v \leq u$ в G'. (Аналогично определена выпуклая, или, вернее, вогнутая функция, натянутая на данную сверху.)

Такая функция $\overline{u}$ существует для всякой ограниченной снизу u (для любой области $G' \subset G$). Геометрически она определяется тем, что $z = \overline{u}(X)$ есть уравнение лежащей над G' и обращенной книзу части границы выпуклой оболочки поверхности $z = u(X)$, $X \in G'$.

Мы налагаем на рассматриваемые функции $u(X)$ следующее условие.

II. Функция $u(X)$ такова, что для всякой области $G' \subset G$ выпуклая функция $\overline{u}$, натянутая на u над областью G', имеет абсолютно непрерывное нормальное изображение, т. е. для всякого множества $M \subset G'$ меры нуль множество $\psi_{\overline{u}}(M)$ также имеет меру нуль.

Так как нормальное изображение определяется посредством опорных плоскостей, а опорные плоскости к поверхности $z = \overline{u}(X)$ являются также опорными к поверхности $z = u(X)$ над G', то указанное условие можно формулировать, обходясь вовсе без функции $\overline{u}$. Однако мы будем пользоваться выпуклыми функциями, натянутыми на данную, и соответственно будем ссылаться на условие II именно в том виде, как оно здесь сформулировано.

7. В дальнейшем без особых оговорок подразумевается, что функции u удовлетворяют условию I о существовании почти везде общих дифференциалов du, d^2u и условию II.

Для получения большей части следствий основной теоремы 1 § 3 нам нужно условие, более сильное, чем II.

III. Функция u такова, что не только она, но и всякая функция, полученная из нее регулярным преобразованием переменных с якобианом, отличным от нуля, обладает свойством II, если новые переменные также интерпретируются как прямоугольные координаты.

Там, где это условие понадобится, это будет оговорено.

Можно доказать (см. [10, § 4]), что *функции, подчиненные одному из требований* (A), (B), *сформулированных в начале этого параграфа, удовлетворяют условию* III *и тем более условию* II.

Отсюда вместе со сделанным в п. 3 замечанием о существовании общих дифференциалов следует, что *все наши выводы будут относиться к функциям с условиями* (A) или (B).

8. Мы будем рассматривать операторы

$$L(u) = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu$$

над функциями $u(X)$ с условиями I, II. Под u_i, u_{ik} подразумеваются общие производные, определенные в п. 2. Коэффициенты a_{ik}, b_i, c определены почти везде в G и не обращаются одновременно в нуль ни на каком множестве положительной меры. Всякое включающее эти коэффициенты условие понимается как выполненное с точностью до множества меры нуль.

Оператор L всегда без особых оговорок будет подразумеваться негиперболическим, т. е. матрица $\|a_{ik}\|$ почти везде не имеет отрицательных собственных значений.

§ 3. *Основная теорема*

1. Пусть $u(X) \geq 0$. Мы говорим, что $u(X)$ касается нуля в точке $X_0 \in \Gamma$, если существует такая последовательность точек $X_i \to X_0$, $X_i \in G$, что

$$\frac{u(X_i)}{r(X_i\Gamma)} \to 0, \tag{1}$$

где $r(X_i\Gamma)$ — расстояние от X_i до Γ.

Мы говорим, что $h(x)$ есть функция с конечным интегралом, если она определена при $x > 0$ и имеет конечный интеграл от 0 до какого-либо x_0.

2. Теорема 1. *Пусть область* G, *функция* $u(X)$, *оператор* L *удовлетворяют следующим условиям:*

1) G *лежит в полупространстве, ограниченном некоторой плоскостью* P, *и* Γ *содержит* $(n-1)$*-мерную (открытую) область* V *плоскости* P*;*

2) $u(X) > 0$, *и для всякой* $X_0 \in \Gamma \setminus V$ $\quad \varliminf\limits_{X \to X_0} u(X) > 0$*;*

2a) $u(X)$ *касается нуля в некоторой точке* $O \in V$*;*

3) *существуют такое* $\varepsilon > 0$, *такая постоянная* $B > 0$ *и такая функция* $h(x)$ *с конечным интегралом, что если точка* O *принята за начало, а ось* x_1

образует с перпендикуляром к плоскости P, идущим внутрь G, угол $< \varepsilon$, то коэффициенты оператора L удовлетворяют неравенствам:

(A) $a_{11} \geq 1/h(x_1)$,

(B) $b_1 > -B$,

(C) $b_1 + x_1 c > -B$.

При этих условиях в G существует множество положительной меры, на котором $L(u) > 0$.

Замечание. Поскольку коэффициенты оператора можно считать определенными с точностью до общего положительного множителя, условие 3), как легко убедиться, равносильно тому, что существуют такое $\varepsilon > 0$ и такая функция k с конечным интегралом, что при том же условии и на направлении оси x_1

(A^*) $a_{11} > 0$,

(B^*) $k(x_1)a_{11} + b_1 > 0$,

(C^*) $k(x_1)a_{11} + b_1 + x_1 c > 0$.

Достоинство этого вида условия 3) в его однородности, но при доказательстве 1 используются неравенства (A)–(C). Легко также сформулировать соответствующие условия при фиксированном направлении оси x_1 по нормали к плоскости P (ср. [10, теорема 1]).

3. Мы установим справедливость теоремы 1, доказав следующее утверждение.

Теорема 1а. *Пусть для G, $u(X)$, L выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, функция $u(X)$ — выпуклая. Пусть $W(u, E)$ — площадь нормального изображения множества $E \subset G$ посредством функции $u(X)$. Существует такое множество $E_0 \subset G$, что*

$$\int_{E_0} L(u) dW > 0. \tag{2}$$

Согласно условию II § 2, подразумевается, что функция W абсолютно непрерывна, так что стоящий здесь интеграл сводится к обычному интегралу Лебега.

Покажем, что теорема 1 следует из теоремы 1а.

Допустим, что верна теорема 1а. Пусть $u(X)$ — любая функция, удовлетворяющая условиям 2), 2а) теоремы 1, а $\overline{u}(X)$ — натянутая на нее снизу выпуклая функция. Легко видеть, что она удовлетворяет тем же условиям 2), 2а). Поэтому из теоремы 1а следует, что существует такое множество $E_0 \subset G$, что (полагая $W(\overline{u}, E) = \overline{W}$)

$$\int_{E_0} L(\overline{u}) d\overline{W} > 0. \tag{3}$$

Так как $\overline{W}$ абсолютно непрерывна, то такое E_0 имеет положительную меру.

Уравнение $z = \overline{u}(X)$ определяет выпуклую поверхность $\overline{S}$ — часть границы выпуклой оболочки поверхности $S : z = u(X)$, лежащую над G и обращенную выпуклостью вниз. По известному свойству выпуклой оболочки всякое множество на $\overline{S}$, не содержащее точек, где $\overline{S}$ касается S, имеет сферическое изображение меры нуль. Отсюда и из очевидной связи сферического и нормального изображений следует, что для всякого $E \subset G$, в котором нет точек, где $\overline{u}$ «касается» u, $\overline{W} = 0$.

Поэтому в интеграле (3) имеет значение только часть E_1 множества E_0, состоящая из точек касания u и $\overline{u}$, и, в силу неравенства (3), E_1 имеет положительную меру.

С другой стороны, функция $\overline{u}$ почти везде дважды дифференцируема, а u имеет почти везде общие дифференциалы du, d^2u. Кроме того, всюду $\overline{u} \le u$. Поэтому в силу указанного в п. 4 § 2 свойства 2) общих дифференциалов почти везде на множестве E_1

$$u = \overline{u}, \quad du = d\overline{u}, \quad d^2u \ge d^2\overline{u}.$$

Вследствие же негиперболичности L отсюда следует, что $L(u) \ge L(\overline{u})$.

Таким образом, из (3) вытекает

$$\int\limits_{E_1} L(u) d\overline{W} > 0.$$

А так как $\overline{W}$ абсолютно непрерывна, то отсюда очевидно, что на некотором множестве E_2 положительной меры $L(u) > 0$, т. е. мы получаем теорему 1.

Остается доказать теорему 1а.

§ 4. *Доказательство теоремы 1а*

1. Во всех утверждениях этого параграфа подразумеваются выполненными условия теоремы 1а, т. е. условия теоремы 1 с дополнительным требованием, что функция $u(X)$ — выпуклая. Нормальное изображение $\psi_u(E)$ множества $E \subset G$ посредством функции u будем называть просто нормальным изображением $\psi(E)$.

Фиксируем направление оси x_1 внутрь G по нормали к плоскости P, фигурирующей в теореме 1.

Пусть S — поверхность с уравнением $z = u(X)$. Из условий 2), 2а) теоремы 1, налагаемых на u, легко заключить, что

1) S расположена над плоскостью $z = 0$ вместе с частью ее края, лежащего над $\Gamma \setminus V$;

2) проекция поверхности S на плоскость (x_1, z) касается оси x_1 в начале O. (Однако неверно было бы думать, что плоскость P обязательно будет касательной к S в точке O.)

Будем обозначать через l лучи, исходящие из O в плоскости $z = 0$ в полуплоскость $x_1 > 0$. Пусть C_l — цилиндр, описанный около S с $(n-1)$-мерными образующими, перпендикулярными плоскости (l, z), а $z = v_l(X)$ — его уравнение. Непосредственно очевидно, что нормальное изображение посредством $v_l(X)$ представляет собой отрезок луча l. Вместе с тем оно содержится в нормальном изображении $\psi(E_l)$ множества E_l, образованного проекциями точек касания цилиндра C_l и поверхности S.

Отсюда и из отмеченного выше свойства 2) поверхности S очевидно, в частности, что $\psi(G)$ содержит некоторый интервал $(0, p)$ оси x_1.

2. Пусть $K(\alpha)$ — конус, состоящий из лучей l, образующих с осью x_1 углы $\varphi < \alpha$. Обозначим через $K(\alpha, p_0, p_1)$ часть этого конуса, заключенную между сферами радиусов $p_0 > p_1$ с центром в O.

Лемма 1. *При всяких положительных β, δ, $\theta < 1$ существуют такие $\alpha < \beta$, $p_0 < \delta$, $p_1 < \theta p_0$, что нормальное изображение $\psi(G)$ области G содержит множество $K(\alpha, p_0, p_1)$.*

Доказательство. Как было отмечено в п. 1, $\psi(G)$ содержит некоторый интервал $(0, p)$ оси x_1. Легко видеть, что можно взять такую часть $I' = (0, p')$ этого интеграла I, что какова бы ни была точка Y из интервала I', некоторая ее окрестность также включается в $\psi(G)$.

Действительно, пусть точка $Y \in I$. Ей отвечает опорная плоскость P к S такая, что $\psi(P) = Y$. Пусть $\overline{X} = (X, z)$ — точка, в которой P упирается в S. Она лежит также на цилиндре C_{x_1}, а этот цилиндр касается плоскости $z = 0$ при $x_1 = 0$. Поэтому точка $\overline{X}$ будет сколь угодно близкой к плоскости $z = 0$, как только наклон плоскости P достаточно мал, т. е. как только точка Y достаточно близка к O. А так как край поверхности S над $\Gamma \setminus V$ удален от плоскости $z = 0$ на положительное расстояние, то такая опорная плоскость P заведомо не будет касаться края S.

Таким образом, как только точка Y достаточно близка к O, так плоскость $P(\psi(p) = Y)$ не упирается в край поверхности S. Поэтому S имеет опорные плоскости всевозможных направлений, достаточно близких к направлению плоскости P. Это значит, что существует окрестность точки Y, содержащаяся в $\psi(G)$.

Этим доказано, что существует такой интервал $I' = (0, p')$ оси x_1, что каждая точка $Y \in I'$ имеет окрестность, содержащуюся в $\psi(G)$. Следовательно, $\psi(G)$ содержит некоторую окрестность интервала I' оси x_1. А отсюда утверждение леммы непосредственно очевидно.

3. Пусть s — координата вдоль луча l и $z = f_l(s)$ — уравнение направляющей цилиндра C_l, описанного около поверхности S, как указано в п. 1.

Лемма 2. *Для почти всех лучей l функции $f_l(s)$ имеют абсолютно непрерывные производные $f_l'(s)$.*

Доказательство. Абсолютная непрерывность производной $f_l'(s)$ равносильна абсолютной непрерывности нормального изображения (множества значений переменной s) посредством функции $f_l(s)$. Отсюда следует, что если $f_l'(s)$ не является абсолютно непрерывной, то существует такое множество Q_l значений s меры нуль, нормальное изображение M_l которого имеет положительную (линейную) меру, и, кроме того (согласно известной теореме), при $s \in Q_l$ верхняя производная $f_l''(s) = \infty$.

Нормальное изображение посредством $f_l(s)$ есть, очевидно, отрезок луча l и содержится в нормальном изображении множества E_l тех точек $X \in G$, над которыми лежат точки касания цилиндра C_l и поверхности S. Стало быть, это нормальное изображение, а вместе с ним и множество M_l входят в $\psi(G)$.

Множеству Q_l отвечает множество $\overline{Q}_l$, над которыми цилиндр C_l касается поверхности S и d^2u не существует, так как $f_l''(s) = \infty$.

Из сказанного вытекает следующее. Допустим, что лемма неверна, так что для некоторого множества лучей l положительной меры $f_l'(s)$ не являются абсолютно непрерывными. Тогда содержащееся в $\psi(G)$ множество $M = \cup M^l$ имеет положительную меру. Вместе с тем оно является нормальным изображением множества $\overline{Q} = \cup \overline{Q}_l$, причем на $\overline{Q}$ d^2u нигде не существует.

Но по основному условию II § 2 п. 4 нормальное изображение посредством u абсолютно непрерывно, так что из положительности меры M следует, что $\overline{Q}$ также имеет положительную меру. Получается, что d^2u не существует на множестве положительной меры, а это невозможно, так как выпуклая функция почти везде дважды дифференцируема. Этим лемма доказана.

4. Пусть $E(\alpha, p_0, p_1)$ есть множество в области G, нормальное изображение которого есть $K(\alpha, p_0, p_1)$, фигурирующее в лемме 1.

Лемма 3. *Если ε — число, фигурирующее в условии 3) теоремы 1, то при $\alpha < \varepsilon$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{E(\alpha,p_0,p_1)} \sum a_{ik}u_{ik}\,dW > A(p_0)\omega(\alpha)\left(p_0^{(n+1)/2} - p_1^{(n+1)/2}\right)^2, \tag{1}$$

где $\omega(\alpha)$ — телесный угол конуса $K(\alpha)$, а $A(p_0) \to \infty$ при $p_0 \to 0$.

Доказательство. Имея в виду предполагаемую, согласно условию II § 1, абсолютную непрерывность нормального изображения, мы можем вычислить интеграл (1) по нормальному изображению, т. е. по множеству

$K(\alpha, p_0, p_1)$. Тогда $\sum a_{ik}u_{ik}$ понимается как функция точки в нормальном изображении. Нарушение ее однозначности может происходить лишь на множестве меры нуль. (Так как направления опорных плоскостей, которые касаются выпуклой поверхности более чем в одной точке, образуют множество меры нуль.)

Введем в $K(\alpha, p_0, p_1)$ сферические координаты с центром в начале O, т. е. в вершине конуса $K(\alpha)$. Тогда

$$dW = p^{n-1} dp d\omega, \tag{2}$$

где p — расстояние от O и ω — телесный угол.

Так как $u(X)$ — выпуклая, то почти везде существует $\operatorname{grad} u$. По абсолютной непрерывности нормального изображения он существует почти везде также в смысле меры W. Там, где он существует,

$$p = |\operatorname{grad} u|, \tag{3}$$

как ясно из самого определения нормального изображения. Стало быть, равенство (3) верно почти везде в $K(\alpha, p_0, p_1)$.

Пусть l — луч, принадлежащий конусу $K(\alpha)$; s — координата вдоль l и $z = f_l(s)$ — уравнение направляющей цилиндра C_l. Пренебрегая множеством лучей нулевой меры, согласно лемме 2, мы можем считать, что $f_l'(s)$ абсолютно непрерывна. Поэтому в смысле меры W почти везде в $K(\alpha, p_0, p_1)$ существует $f_l''(s)$.

Очевидно, что там, где цилиндр C_l касается поверхности S и $\operatorname{grad} u$ существует,

$$|\operatorname{grad} u| = f_l'(s). \tag{4}$$

Из (2)–(4), имея в виду существование почти везде $f_l''(s)$, заключаем, что почти везде

$$dW = f_l'(s)^{n-1} f_l''(s) ds d\omega. \tag{5}$$

Пусть над точкой X цилиндр C_l касается поверхности S, причем в X существует d^2u и при соответствующем s существует также $f_l''(s)$. Тогда в такой точке X

$$d^2u \geq f_l''(s) ds^2. \tag{6}$$

Если путем поворота осей направить ось x_1 по лучу l, то координата s вдоль l будет играть роль x_1 и вместо (6) можно будет написать, что в точке X

$$d^2u \geq f_l''(s) dx_1^2. \tag{7}$$

А так как матрица $\|a_{ik}\|$ не имеет отрицательных собственных значений, то отсюда следует, что в точке X

$$\sum a_{ik}u_{ik} \geq a_{11}f_l''(s). \tag{8}$$

По неравенству (A), предполагаемому, согласно условиям теоремы 1,

$$a_{11} \geq \frac{1}{h(x_1)} = \frac{1}{h(s)}, \tag{9}$$

где $h(s)$ — функция с конечным интегралом.

Теперь, пользуясь (5), (8) и (9), мы получаем

$$\int\limits_{K(\alpha,p_0,p_1)} \sum a_{ik}u_{ik}\,dW \geq \int\limits_{\omega(\alpha)} \int \frac{1}{h(s)} f_l'(s)^{n-1} f_l''(s)^2\,ds d\omega. \tag{10}$$

Чтобы избавиться здесь от квадрата второй производной, воспользуемся неравенством Буняковского, которое дает

$$\int h(s)\,ds \cdot \int \frac{1}{h(s)} f'(s)^{n-1} f_l''(s)^2\,ds \geq \left(\int f_l'(s)^{(n-1)/2} f_l''(s)\,ds\right)^2. \tag{11}$$

При фиксированном l интегрирование по s в (10) и (11) происходит в некоторых пределах $s_1(l)$, $s_0(l)$, отвечающих p_1 и p_0, т. е. таких, что $f_l'(s_1) = p_1$, $f_l'(s_0) = p_0$.

Вследствие (3) и (4), а также вследствие того, что p меняется у нас от p_1 до p_0, стоящий в (11) справа интеграл сводится к следующему:

$$\int\limits_{p_1}^{p_0} p^{(n-1)/2} dp = \frac{2}{n+1}\left(p_0^{(n+1)/2} - p_1^{(n+1)/2}\right). \tag{12}$$

Заметим еще, что если интеграл от $h(s)$ брать не в пределах $s_1(l)$, $s_0(l)$, но в пределах от 0 до $s_0 = \sup\limits_l s_0(l)$, то неравенство (11) только усилится. Имея в виду это замечание и представление (12) для интеграла в правой части неравенства (11), мы легко получим вместо (10) следующее неравенство:

$$\int \sum a_{ik}u_{ik}\,dW \geq \frac{4\omega(\alpha)}{(n+1)^2 \int\limits_0^{s_0} h(s)ds}\left(p_0^{(n+1)/2} - p_1^{(n+1)/2}\right)^2. \tag{13}$$

Так как h — функция с конечным интегралом, то интеграл в знаменателе правой части этого неравенства не только конечен, но и стремится к нулю вместе с s_0. Само s_0 определяется верхним пределом p_0 для $p = |\operatorname{grad} u|$ и стремится к нулю вместе с p_0, так как функция $u(X)$ — выпуклая и касается нуля в начале координат. Следовательно, неравенство (13) и есть неравенство (1), которое таким образом доказано.

5. Лемма 4. *При условиях теоремы 1a*

$$\int\limits_{E(\alpha,p_0,p_1)} \left(\sum b_i u_i + cu\right) dW > -B\omega(\alpha)\left(p_0^{n+1} - p_1^{n+1}\right), \tag{14}$$

где $B = \mathrm{const}$, *то же, что в условиях* (B), (C) *теоремы 1.*

Доказательство. Воспользуемся тем же приемом оценки стоящего здесь интеграла, какой был применен в доказательстве леммы 3.

Возьмем какой-либо луч l из конуса $K(\alpha)$, для которого $f_l'(s)$ абсолютно непрерывна. В точках X, над которыми лежат точки касания цилиндра C_l и поверхности S, $\operatorname{grad} u$ направлен, очевидно, по лучу l. Поэтому, если поворотом осей направить ось x_1 по l, то в таких точках X будем иметь

$$u_1 = p, \quad u_2 = \ldots = u_n = 0, \tag{15}$$

так как согласно (3) $|\operatorname{grad} u| = p$.

Согласно же условию (B) теоремы 1, при таком выборе осей $b_1 > -B$. А так как, кроме того, $u > 0$, то там, где $c \geq 0$, из (15) следует

$$\sum b_i u_i + cu = b_1 u_1 + cu > -Bp. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь точки, где $c < 0$.

Напишем уравнение опорной плоскости к поверхности S в точке $(x_1, \ldots, x_n, u(X))$ и заметим, что S лежит над этой плоскостью. Тогда для всякой точки $(y_1, \ldots, y_n, z) \in S$

$$z - u(X) \geq \sum (y_i - x_i) u_i.$$

Так как S подходит к началу координат, то это неравенство верно, в частности, для начала, т. е. при $z = y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Поэтому $u(X) \leq \sum x_i u_i$, откуда вследствие (15)

$$u(X) \leq p x_1. \tag{17}$$

Если, как предложено, $c < 0$, то из (15) и (17) вытекает

$$\sum b_i u_i + cu > (b_1 + x_1 c) p. \tag{18}$$

А так как по условию (C) теоремы 1 выражение, стоящее здесь справа в скобках, превосходит постоянную $-B$, то

$$\sum b_i u_i + cu > -Bp. \tag{19}$$

Неравенства (16), (19) дают общую оценку для подынтегральной функции в (14), независимо от знака c. Поэтому, пользуясь еще выражением (2) для dW, получим, что

$$\int \left(\sum b_i u_i + cu\right) dW > -B \int\limits_{\omega(\alpha)} \int\limits_{p_1}^{p_0} p^n \, dp d\omega = -\frac{B\omega(\alpha)}{n+1} \left(p_0^{n+1} - p_1^{n+1}\right),$$

что и есть неравенство (14).

6. Доказательство теоремы 1а. Согласно лемме 1, можно выбрать p_0 сколь угодно малым, а $p_1 = \theta p_0$, где $\theta < 1$, можно фиксировать, например, $\theta = 1/2$. Тогда, складывая неравенства (1) и (14), установленные леммами 3 и 4, и имея в виду, что при достаточно малом p_0 $A(p_0)$ будет сколь угодно велико, получим, что при соответствующем $E_0 = E(\alpha, p_0, p_1)$

$$\int\limits_{E_0} L(u) \, dW > 0,$$

чем теорема 1а доказана.

§ 5. *Некоторые другие теоремы о принципе максимума*

1. В этом параграфе всюду имеются в виду функции, удовлетворяющие вместо условия II более сильному условию III § 2 п. 7.

Будем говорить, что определенная в G функция $u(X) \geq 0$ касается нуля в точке $O \in \Gamma$ быстрее r^{1+q}, если в G существует такая последовательность точек $X_i \to O$, что

$$\frac{u(X_i)}{r(X_i\Gamma)^{1+q}} \to 0.$$

Пусть опять O — точка на Γ и пусть $\{u\}$ — класс определенных в G функций $u(X) \geq 0$, касающихся в O нуля.

Будем говорить, что точка O — обыкновенная в отношении класса функций $\{u\}$ и данного класса операторов L, если из того, что (хотя бы вблизи O) $L(u) \leq 0$, следует, что в G вблизи O есть точки, где $u = 0$. Грубо говоря, обыкновенная точка такая, от которой при соответствующих условиях на u и L касание функции нуля заведомо распространяется внутрь области.

Теорема 1 очевидным образом равносильна утверждению, что точка O, лежащая внутри плоской части границы, обыкновенная по отношению функций с условиями 2), 2а) и оператора с условием 3) этой теоремы.

Вместе с тем имеет место следующая общая теорема [10].

Теорема 2. *Пусть вблизи O Γ представляет собой гладкую поверхность, причем для нормалей $n(X)$ к Γ выполнено условие*

$$|n(X) - n(X')| \leq k(r(XX')), \tag{1}$$

где k — вогнутая функция; $k(0) = 0$. Тогда точка O — обыкновенная по отношению функций, касающихся в O нуля быстрее r^{1+q} и операторов L, удовлетворяющих соответственно следующим условиям.

Существует такое $\varepsilon > 0$ и такая невозрастающая функция $h(r)$ с конечным интегралом, что если O принята за начало и ось x_1 направлена по $n(O)$ внутрь G, то по крайней мере вблизи O выполнены неравенства:

(A_2) $\quad \varepsilon a \leq a_{11}, \quad$ где $a = \sum a_{ii}$,

(B) $\quad \Phi \equiv \left(\dfrac{(1-\varepsilon)q}{r} + h(r) - \dfrac{M}{\varepsilon}\dfrac{k(r)}{r}\right) a_{11} + b_1 - \varepsilon b \geq 0,$

(C_2) $\quad \Phi + (1+\varepsilon) rc \geq 0,$

где $b = \sqrt{\sum b_i^2}$; r — расстояние от O; M — постоянная, зависящая только от числа переменных n.

Доказательство теоремы 2 получается посредством приема, указанного в § 1: путем подходящего преобразования граница вблизи точки O превращается в кусок плоскости, так что для преобразованной области (вблизи O) выполнены условия теоремы 1. Тогда если $q = 0$, т. е. от функции u требуется лишь то, чтобы она как-то касалась нуля в точке O, то мы ссылаемся на теорему 1. Если же $q > 0$, то необходима ссылка на теорему, соответственно усиливающую теорему 1 (теорема 1 из [9]).

2. Допустим для простоты, что коэффициенты оператора L ограничены и $a_{11} > \text{const} > 0$; тогда условие, налагаемое в теореме 2 на L, как легко видеть, можно заменить следующим: существует такая невозрастающая $h_1(r)$ с конечным интегралом, что, каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$, при достаточно малых r будет

$$rh_1(r) - k(r) + \varepsilon q > 0. \tag{2}$$

Если $k(r)/r$ имеет конечный интеграл (что, например, будет если $k(r) = Cr^p$, $p > 0$), то неравенству (2) можно удовлетворить при любом $q \geq 0$, полагая $h_1(r) = k(r)/r + 1$; т. е. если $k(r)/r$ имеет конечный интеграл, то точка O — обыкновенная в отношении любых функций, касающихся нуля.

С другой стороны, как можно показать [8], точка O, вообще говоря, не будет обыкновенной, в частности для оператора Лапласа, если $k(r)^2/r$ имеет бесконечный интеграл. Остается невыясненным, что будет, когда при каком-либо $0 < p < 1$ $k(r)^{1+p}/r$ будет иметь конечный (бесконечный) интеграл.

Аналогичные результаты относятся к точке O, которой можно коснуться изнутри G поверхностью вращения с уравнением $x_1 = f(s)$, $s^2 = \sum\limits_{i=2}^{n} x_i^2$. Точка будет обыкновенной для любых функций, касающихся нуля (изнутри S), если $f'(s)/s$ имеет конечный интеграл, и не будет, вообще говоря, таковой, если $f'(s)^2/s$ имеет бесконечный интеграл. (Точные формулировки см. в [8, 10].)

Если о Γ предполагается только гладкость, то все равно (1) верно при подходящей функции $k(r)$ [4)]. Поэтому (2) заведомо выполняется при малых r, если только $q > 0$ (поскольку, как легко убедиться, для невозрастающей функции h_1 с конечным интегралом $rh_1(r) \to 0$ при $r \to 0$).

Следовательно, при гладкости границы любая ее точка обыкновенная в отношении функций, для которых гарантировано касание нуля быстрее r^{1+q} с каким-либо $q > 0$, как только такая функция вообще касается нуля. Таковыми будут, например, функции, первые производные которых удовлетворяют условию Гёльдера.

Ради простоты мы предполагали, что коэффициенты оператора ограничены, но такие же результаты выводятся из теоремы 2 и при более общих условиях (см. [8, 10]).

3. Отметим некоторые результаты о внутреннем принципе максимума, получающиеся тем же методом интегрирования по нормальному изображению выпуклой оболочки, каким доказана выше теорема 1.

Теорема 3. *Пусть во всякой области, содержащейся существенно внутри G, коэффициенты оператора L суммируемы с n-ми степенями и $a = \operatorname{Det}\|a_{ik}\| > \mathrm{const} > 0$. Тогда если функция $u(X)$ такова, что $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и хотя бы в одной точке $X \in G$ $u = 0$, то $u \equiv 0$ в G* (доказательство см. в [11]).

Заметим, что если $a = \operatorname{Det}\|a_{ik}\| > 0$, то, деля L на $\sqrt[n]{a}$, получим оператор, у которого $\operatorname{Det}\|a_{ik}\| = 1$, так что условие на коэффициенты L равносильно тому, что $a > 0$ и по делении на $\sqrt[n]{a}$ они суммируемы с n-ми степенями в окрестности U любой точки X из G. (Условие на коэффициент c можно ослабить, требуя лишь, чтобы в окрестности U любой $X \in G$

[4)] Полагаем, $l(r) = \sup\limits_{r(XX') \leq r} |n(X) - n(X')|$. По непрерывности $n(X)$ $l(r) \to 0$ при $r \to 0$. После этого определяем $k(r)$ как вогнутую функцию, натянутую на l сверху.

было $rc > -h\sqrt[n]{a}$, где $r = r(XX')$, $X' \in U$ и $h > 0$ — функция, суммируемая с n-й степенью.)

Теорема 3 интересна, между прочим, в следующих отношениях. Во-первых, ограничивается снизу не наименьшее собственное значение матрицы $\|a_{ik}\|$, как это обычно делается, а только произведение собственных значений, что не одно и то же, поскольку не предполагается ограниченность коэффициентов. Это, кстати, вообще относится к результатам, получаемым упомянутым методом [11, 12].

Во-вторых, условие суммируемости коэффициентов с n-ми степенями, как показывают простые примеры, не может быть заменено требованием их суммируемости с какой бы ни было степенью, меньшей n.

В-третьих, если в операторе имеются в виду обобщенные производные функции u по С. Л. Соболеву, то требование их суммируемости с n-й степенью (условие (A) п. 1 § 2) также не может быть заменено условием суммируемости с какой бы то ни было степенью, меньшей n (соответствующий пример был указан Ю. Г. Решетняком). Таким образом, наши условия на коэффициенты и обобщенные производные функции u, в известном смысле, крайние возможные.

4. Для формулировки другого результата введем понятие линий эллиптичности, обобщающее понятие о них, введенное в [6].

Мы говорим, что кривая C есть линия m-эллиптичности оператора L, если она обладает следующими свойствами:

1) она гладкая и в каждой своей точке X касается m-мерной плоскости, определяемой главными направлениями матрицы $\|a_{ik}(X)\|$, отвечающими положительным собственным значениям;

2) произведения этих собственных значений ограничены снизу положительным числом, по крайней мере в окрестности каждой точки $X \in C$;

3) кривая C (или, по крайней мере, малая ее дуга около любой ее точки) входит в гладкое семейство кривых, обладающих свойствами 1), 2).

При $m = n$ всякая гладкая кривая будет линией эллиптичности.

Теорема 4. *Пусть в G задан оператор L со следующими свойствами. Для каждой точки $X \in G$ существуют такая ее окрестность U и невозрастающая функция $h(r)$ с условием*

$$\int_0^r h(r)^m r^{m-1} dr < \infty, \tag{3}$$

что во всякой точке $X' \in U$ при $r = r(XX')$ все

$$|a_{ik}|, |b_i| < h(r), \quad rc > -h(r). \tag{4}$$

Тогда, если в G *задана такая функция* $u(X)$, *что* $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ *и в какой-то точке* $X_0 \in G \quad u = 0$, *то* $u \equiv 0$ *на всякой линии* m*-эллиптичности, проходящей через* X_0.

Так как при $m = n$ всякая кривая есть линия эллиптичности, то в этом случае $u \equiv 0$ в G.

Условие 3) имеет тот смысл, что если функцию h представлять как функцию расстояния от начала в m-мерном пространстве, то она суммируема в нем с m-й степенью. Отсюда видна связь этого условия с условиями теоремы 3. Однако при $m = n$ условие теоремы 4 сильнее, так как включает, очевидно, требования, что точки, где коэффициенты не ограничены, лежат изолированно. Можно при любом m сформулировать менее стеснительное условие, не включающее этого требования и при $m = n$ переходящее в условие теоремы 3. Но такая формулировка несколько сложна и мы ее не будем здесь приводить.

Из теоремы 4 следует, что при ее условиях нули функции u распространяются на множество точек, достижимых по цепочкам линий эллиптичности из той точки X_0, где уже известно, что $u = 0$. Характер этого множества зависит от интегрируемости поля плоскостей, фигурирующих в определении линий эллиптичности (см. [6, § 6]). В частности, если это поле вполне неголономно, то это множество будет опять-таки всей областью G.

Теорема о распространении нулей вдоль линий эллиптичности, подобная теореме 4, доказана в [6, 10] при более узких предположениях о коэффициентах и при определении линий эллиптичности, в котором ограничивается снизу не произведение фигурирующих в нем собственных значений матрицы $\|a_{ik}\|$, но наименьшее из них. Полученные в [6] следствия из указанной теоремы сохраняют силу при условиях теоремы 4. В отношении же этих последних верны замечания, аналогичные сделанным выше замечаниям к теореме 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заремба С.* Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа // Успехи мат. наук. 1946. Т. 1, вып. 3–4. С. 125–146.
2. *Келдыш М. В., Лаврентьев М. А.* О единственности задачи Неймана // Докл. АН СССР. 1937. Т. 16, № 3. С. 151–152.
3. *Миранда К.* Уравнения в частных производных эллиптического типа. М.: Иностр. лит., 1957.
4. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // Sitzungsberichte Akad. Berlin. 1927. S. 147–152.
5. *Олейник О. А.* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // Мат. сб. 1952. Т. 30, № 3. С. 695–702.
6. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.

7. *Александров А. Д.* То же. II // Там же. 1959. № 3. С. 3–12.
8. *Александров А. Д.* То же. III // Там же. 1959. № 5. С. 16–32.
9. *Александров А. Д.* То же. IV // Там же. 1960. № 3. С. 3–15.
10. *Александров А. Д.* То же. V // Там же. 1960. № 5. С. 16–26.
11. *Александров А. Д.* То же. VI // Там же. 1961. № 1. С. 3–20.
12. *Александров А. Д.* Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 5. С. 1001–1004.
13. *Александров А. Д.* Задача Дирихле для уравнения $\mathrm{Det}\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$. I // Вестн. ЛГУ. 1958. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–24.
14. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.; Л.: Гостехиздат, 1959. Т. 5.

Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле

Вестн. ЛГУ. 1963. № 13. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 3. С. 5–29

Наша основная задача состоит в нахождении возможно более общих условий единственности решения задачи Дирихле и оценок отклонения решения от граничных значений для уравнений второго порядка эллиптического типа с возможным вырождением. Эти вопросы удается решить в известном смысле при минимальных предположениях об уравнениях и их решениях и с максимальной (при такой общности) точностью оценок по крайней мере для линейных уравнений. Подобные вопросы рассматриваются, например, в [1–3], но при других условиях, в частности мы обходимся без условия строгой эллиптичности.

Часть полученных результатов была сообщена без доказательства в [4]. Простейший из них получен тем же методом в [5]. Аналогичный метод применен в [6] для вывода принципа максимума. Вообще, применяемый нами метод позволяет получить также другие результаты.

§ *1. Условия, подразумеваемые в дальнейшем*

1. Мы рассматриваем уравнения вида

$$\sum a_{ik}u_{ik} = \varphi \tag{1.1}$$

с n переменными $x_1, \ldots, x_n$ всегда в ограниченной области G. Всюду дальше G, n имеют указанный смысл; Γ — граница G; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка пространства; n любое ≥ 1; u_i, u_{ik} означают $\partial u/\partial x_i$, $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_k$. (В суммах, как в (1.1), где не указаны пределы суммирования, подразумевается, что оно происходит от 1 до n.)

Об уравнении (1.1) неизменно предполагается, что матрица $\|a_{ik}\|$ не имеет отрицательных собственных значений. Если a_{ik} зависят от функции u и ее производных, то неизменно имеются в виду лишь такие $u(x)$, при которых указанное требование относительно матрицы $\|a_{ik}\|$ выполнено. (Коэффициенты a_{ik}, так же как φ, могут даже содержать производные от u

выше первого порядка. Тогда достаточно предполагать, что данное условие на матрицу $\|a_{ik}\|$ выполняется в тех точках, где $d^2u \geq 0$. Простейший пример представляет уравнение $u_{11}u_{22} - u_{12}^2 = \varphi$, если в нем положить $a_{11} = u_{22}/2$ и т. д. Впрочем, в данной статье такое обобщение не имеет особого значения.)

2. Рассматриваемые решения предполагаются непрерывными и подчиненными одному из следующих условий:

I) u имеет обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью во всякой замкнутой области $D \subset G$; соответственно при этом условии первые и вторые производные u_i, u_{ik} понимаются как обобщенные по С. Л. Соболеву;

II) u всюду в G дифференцируемо в каждой точке $x \in G$ (за исключением, может быть, счетного множества)

$$\lim_{x' \to x} \frac{|\operatorname{grad} u(x) - \operatorname{grad} u(x')|}{|x - x'|} < \infty.$$

При этом условии, вследствие известной теоремы В. В. Степанова (см. [7, с. 449]), $\operatorname{grad} u$ почти везде дифференцируем. Соответственно производные u_{ik} можно понимать в обычном смысле; они существуют почти везде.

Как показал Ю. Г. Решетняк (см. [6]), существование вторых обобщенных производных, суммируемых с какой-либо степенью, меньшей n, не гарантирует единственности решения задачи Дирихле даже для линейного строго эллиптического уравнения вида $\sum a_{ik}u_{ik} = 0$, с ограниченными коэффициентами. В этом смысле условие I оказывается предельно слабым.

Если в последующих формулировках не делается никаких оговорок относительно решений, то подразумевается, что они удовлетворяют любому из условий I, II, и если рассматриваются одновременно два решения, то оба считаются подчиненными одному из этих условий, так что ему удовлетворяет и их разность. Само уравнение, так же как условия, налагаемые на коэффициенты, и т. п. считаются выполненными почти везде в G.

Однако можно рассматривать решения, дважды дифференцируемые всюду, и требовать соответственно выполнения уравнения и других условий всюду в G. В таком случае можно получить несколько более сильные результаты. Поэтому каждая формулировка, в которой ничего не оговорено о классе решений, может пониматься в двух несколько различных смыслах в зависимости от того, относится она к решению класса I или II либо к дважды дифференцируемым решениям.

Определим это различие.

3. В наших результатах фигурируют плоскости L того или иного числа измерений m, $1 \leq m \leq n$; подразумевается, что L проходит через начало координат. При $m = 1$ L — прямая, при $m = n$ L — все пространство. В последнем случае формулировки, приспособленные, собственно, для $m < n$, должны пониматься не совсем буквально, но их смысл всегда очевиден и они только упрощаются.

Возьмем какую-либо $(m-1)$-мерную плоскость M, проходящую через начало; если $m = 1$, M — точка. Множество всех плоскостей L, проходящих через M, образует «полный пучок плоскостей L с осью M». Пересекая его $(n-m+1)$-мерной плоскостью R, перпендикулярной M, получим в R пучок (связку) прямых. Мера множества этих прямых (в смысле телесного угла) принимается за меру множества соответствующих плоскостей L.

Пучком плоскостей L с осью M мы называем любое множество $\{L\}$ из полного пучка, имеющее положительную меру.

Всякий раз, как указана плоскость L, будет подразумеваться, что путем поворота всех осей оси $x_1, \ldots, x_m$ переведены в L. Кроме того, во всех связанных с L соотношениях, содержащих производные u_i, будем полагать $u_i = 0$ при $i > m$.

Соответственно, рассматривая уравнение вида (1.1), мы будем понимать под a_L главный минор матрицы $\|a_{ik}\|$, отвечающий индексам $1, \ldots, m$, если оси $x_1, \ldots, x_m$ лежат в плоскости L; причем если a_{ik} зависят от u_j, то в a_L положено $u_j = 0$ для $j > m$. В частности, при $m = 1$ $\quad a_L = a_{11}$ и $u_2 = \ldots = u_n = 0$.

Если $m = n$, так что L есть все пространство, то формально можно считать, что «пучок» состоит из этой единственной «плоскости». В этом случае a_L есть просто $a = \mathrm{Det}\,\|a_{ik}\|$.

(Плоскости L числа измерений $m < n$ появляются в наших результатах для того, чтобы учесть, например, возможное вырождение уравнения, когда $a = 0$, но для какой-то L $(m < n)$ $\quad a_L > \mathrm{const} > 0$.)

4. Все дальнейшие формулировки должны пониматься в двух смыслах.

Пусть формулируется какое-либо условие, связанное с плоскостями L. Тогда, если имеется в виду решение класса I или II, нужно подразумевать, что такое условие выполнено для какого-либо пучка плоскостей L. Если же иметь в виду дважды дифференцируемые решения, то достаточно считать, что условие выполнено для одной какой-нибудь плоскости L.

Если утверждается некоторое соотношение (обычно неравенство), связанное с плоскостями L, и имеются в виду решения класса I или II, то подразумевается, что это соотношение верно для почти всех плоскостей L любого пучка, для которого выполнены условия, поставленные в утверждении, если такие условия указаны. Стало быть, если никакие условия не оговариваются, то соотношение верно для почти всех плоскостей любого пучка. Если же иметь в виду дважды дифференцируемые решения, то утверждаемое соотношение верно для всех плоскостей, для которых выполнены поставленные условия.

При $m = n$, когда L есть все пространство, указанное различие исчезает: все относится к этой единственной «n-мерной плоскости».

§ 2. *Основная лемма*

1. Применяемый метод основан на рассмотрении нормального изображения выпуклой (вогнутой) функции, натянутой на данную $u(x)$ [8] [1)]. Под этим понимается следующее.

Воспользуемся геометрическими представлениями в $(n+1)$-мерном пространстве R^{n+1} с прямоугольными координатами $x_1, \ldots, x_n, z$. С этой точки зрения выпуклая (вогнутая) функция, натянутая на $u(x) \equiv u(x_1, \ldots, x_n)$, есть функция $\overline{u}(x)$, задающая поверхность, которая ограничивает снизу (сверху) выпуклую оболочку поверхности $z = u(x)$. Эта функция $\overline{u}$ определена на выпуклой оболочке области G.

Пусть $v(x)$ — выпуклая функция, определенная в какой-то области H. Нормальным изображением $\psi(E, v)$ множества $E \subset H$ посредством функции v называется множество точек $(p_1, \ldots, p_n)$, координаты которых суть угловые коэффициенты опорных плоскостей [2)] поверхности $z = v(x)$, причем берутся все опорные плоскости во всех точках, лежащих над E. Когда $E = H$, мы говорим «нормальное изображение функции v» вместо «нормальное изображение H посредством функции v» и пишем $\psi(v)$ вместо $\psi(H, v)$.

2. Все наши выводы опираются на следующую основную лемму.

Лемма 1. *Пусть для данного решения $u(x)$ уравнения (1.1) для плоскостей L выполнены неравенства*

$$a_L^{-1/m}\varphi \le P_L(x_1, \ldots, x_m) Q_L(u_1, \ldots, u_m), \tag{2.1}$$

где P_L, $Q_L \ge 0$. Тогда

$$\int\limits_{G_L} P_L^m \, dx_1 \ldots dx_m \ge m^m \int\limits_{L \cap \psi(\overline{u})} Q_L^{-m} \, du_1 \ldots du_m, \tag{2.2}$$

где G_L — проекция области G на плоскость L; $L \cap \psi(\overline{u})$ — пересечение плоскости L и нормального изображения выпуклой функции $\overline{u}(x)$, натянутой на $u(x)$.

Если же вместо (2.1) имеет место неравенство $a_L^{-1/m}\varphi \ge -P_L Q_L$, то (2.2) верно для вогнутой, натянутой на $u(x)$ сверху.

[1)] В оригинале ссылка на эту работу пропущена. — *Прим. ред.*

[2)] Т. е. коэффициенты p_i в уравнениях $z = \sum p_i x + q$ этих плоскостей. Если опорная плоскость — касательная, то $p_i = v_i$ есть частная производная.

Эта формулировка требует некоторых пояснений.

1. Согласно условию, высказанному в п. 4 § 1, подразумевается, что если решение $u(x)$ принадлежит классу I или II, то неравенство (2.1) должно иметь место для плоскостей какого-либо пучка, и тогда (2.2) верно для почти всех плоскостей этого пучка. Конечно, P_L, Q_L, вообще говоря, зависят от L. Если же u дважды дифференцируемо, то (2.1) можно предполагать выполненным хотя бы для одной плоскости L, а (2.2) верно для всех L, для которых верно (2.1). При $m = n$ L — все пространство и все эти оговорки отпадают.

2. Напомним, что согласно условию, высказанному в п. 3 § 1, при данной плоскости L оси $x_1, \ldots, x_m$ располагаются в L, а в функциях, содержащих производные u_i, положено $u_i = 0$ для $i > m$. Это условие имеется в виду в неравенстве (2.1).

3. Наконец, поскольку a_L, φ могут зависеть не только от x_i, u_i, но и от u, то (2.1) можно понимать в том смысле, что в a_L, φ u представлено как функция x либо входит в них как параметр (который может входить так же в P_L или Q_L).

4. Заранее не исключается, что интегралы в (2.2) могут быть бесконечными. Не исключено также, что $L \cap \psi(\overline{u})$ пусто; тогда правый интеграл в (2.2) принимается равным нулю.

3. Обобщение леммы 1. Если a_{ik}, φ зависят от производных u_{ik}, то неравенство (2.1) достаточно требовать там, где $d^2u \geq 0$ (так же как, согласно оговорке п. 1 § 1, достаточно предполагать $\sum a_{ik}\xi_i\xi_k \geq 0$; при этом производные u_{ik} можно считать выраженными как функции x_j). И при таких обобщенных условиях будет верно (2.2).

Доказательство леммы 1, даваемое дальше, включает доказательство этого обобщения, так как неравенство (2.1) будет использоваться только в тех точках, где $d^2u \geq 0$.

4. В доказательстве леммы 1 достаточно ограничиться первой ее частью, связанной с выпуклой функцией $\overline{u}$, натянутой на u. Вторая часть сводится к этому, если заметить, что при перемене знака u натянутая на нее выпуклая функция заменяется вогнутой и обратно.

Введем некоторые нужные для доказательства понятия и результаты.

Пусть $\overline{u}(x)$ — выпуклая функция и $S : z = \overline{u}(x)$ — соответствующая выпуклая поверхность в пространстве $(x_1, \ldots, x_n, z)$.

Возьмем плоскость L и расположим в ней оси $x_1, \ldots, x_m$. Опишем около S цилиндр C с $(n-m)$-мерными образующими, перпендикулярными L, т. е. параллельными плоскости осей $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Пересечем цилиндр C $(m+1)$-мерной плоскостью (L, z). Пусть уравнение поверхности, полученной в сечении, будет $z = \overline{u}^L(x_L) = \overline{u}^L(x_1, \ldots, x_m)$.

Так определенную функцию $\overline{u}^L$ мы называем проекцией функции $\overline{u}$ на плоскость L. Аналитически $\overline{u}^L(x_L) = \min u(x)$, где минимум берется по всем $x \in G$ с проекцией x_L.

Если при данной x_L $\min \overline{u}$ не достигается, то $\overline{u}^L$ в такой точке не определена. Вообще говоря, $\overline{u}^L$ определена лишь на части G_L и для некоторых L может быть вовсе неопределенной. Если $\overline{u}^L$ определена на каком-либо множестве положительной меры, мы говорим, что она не вырождается.

Из геометрического определения $\overline{u}^L$ очевидно, что $\psi(\overline{u}^L) = L \cap \psi(\overline{u})$, т. е. полное нормальное изображение $\overline{u}^L$ совпадает с $L \cap \psi(\overline{u})$.

5. Следуя определению, введенному в [6, 9], мы говорим, что $u(x)$ имеет в точке x_0 общие первый и второй дифференциалы $du = \sum u_i dx_i$, $d^2u = \sum u_{ik} x_i x_k$, если для

$$\varepsilon(x) = u(x) - \left(u(x_0) + \sum u_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum u_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \right) \tag{2.3}$$

верно следующее: для всякого луча l, исходящего из x_0, найдется такая последовательность точек $x^{(i)} \to x_0$, что лучи $x_0 x^{(i)}$ сходятся к l и $\varepsilon(x^{(i)}) \to 0$.

Лемма 2. *Если $u(x)$ удовлетворяет условиям* I, II § 1, *то она почти везде имеет общий второй дифференциал.*

При условии I это доказано в [10]. При условии II, как отмечено в п. 2 § 1, $u(x)$ имеет почти везде обычный второй дифференциал.

6. Как известно, площадь $W(E; \overline{u})$ нормального изображения множества E посредством выпуклой функции $\overline{u}$ есть вполне аддитивная функция множества E. Если она абсолютно непрерывна, мы говорим, что функция $\overline{u}$ имеет абсолютно непрерывное нормальное изображение. Если это так, то

$$W(E; \overline{u}) = \int\limits_E w\, dx, \quad w = \operatorname{Det} \|\overline{u}_{ik}\|. \tag{2.4}$$

Доказательства см., например, в [9].

Лемма 3. *Если $u(x)$ удовлетворяет условию* I *или* II § 1, *то натянутая на нее выпуклая $\overline{u}$ имеет абсолютно непрерывное нормальное изображение.*

В случае условия I это доказано в [10]. Если же u удовлетворяет условию II, то тому же условию удовлетворяет $\overline{u}$. А тогда, очевидно, что верхняя симметрическая производная от $W(E; \overline{u})$ всюду конечна[3)]; нижняя же заведомо ≥ 0. Поэтому по известной теореме [7, с. 229] $W(E; \overline{u})$ абсолютно непрерывна.

[3)] Т. е. $\varlimsup\limits_{E \to \{x\}} W(E; \overline{u}) / \operatorname{mes} E < \infty$, если E — шары с центрами в x.

Лемма 4. *Если выпуклая функция имеет абсолютно непрерывное нормальное изображение, то то же верно для почти всех ее не вырождающихся проекций на плоскости любого пучка.*

Это достаточно, впрочем, очевидная лемма доказана в [5] для $m = 1$, т. е. когда плоскости прямые, но доказательство при любом m буквально то же (см. [9, § 2, утверждение 4]).

7. Лемма 5. *Если* $u(x)$ *удовлетворяет условию* I *или* II § 1, *то для почти всех* L, *для которых проекция* $\overline{u}^L(x_L)$ *выпуклой функции, натянутой на* $u(x)$, *не вырождается, верно следующее:*

(A) $\overline{u}^L$ *имеет абсолютно непрерывное нормальное изображение;*

(B) *нормальное изображение (посредством* $\overline{u}^L$*) множества точек* x_L, *где* $\overline{u}^L(x_1, \dots, x_m) = u(x_1, \dots, x_n)$ *и* $u(x)$ *не имеет общего второго дифференциала, имеет меру нуль в* L.

Если же $u(x)$ *всюду дважды дифференцируема, то* (A) *и* (B) *верно для всех* L, *для которых* $\overline{u}^L$ *не вырождается.*

Доказательство. Утверждение насчет свойства (A) следует из лемм 3, 4.

Далее, если бы (B) не выполнялось для множества плоскостей положительной меры, то в нормальном изображении функции $\overline{u}$ имелось бы множество N положительной меры, отвечающее множеству M точек x, где $\overline{u} = u$ и $u(x)$ не имеет общего второго дифференциала. По абсолютной непрерывности нормального изображения множество M имело бы положительную меру. А это по лемме 2 невозможно.

Вторая часть леммы 5, касающаяся дважды дифференцируемых функций, может считаться очевидной.

8. Лемма 6. *Пусть для данного решения* $u(x)$ *уравнения* (2.1) *и некоторой фиксированной плоскости* L *верно следующее:*

а) *проекция* $\overline{u}^L$ *выпуклой функции, натянутой на* $u(x)$, *не вырождается и обладает свойствами* (A), (B), *указанными в лемме* 5;

б) *имеет место неравенство* (2.2) *леммы* 1.

Тогда верно также неравенство (2.3) *леммы* 1.

Эта лемма в сочетании с леммой 5 дает, очевидно, лемму 1.

Для доказательства леммы 6 введем функцию

$$v(x) \equiv v(x_1, \dots, x_n) = \overline{u}^L(x_1, \dots, x_m),$$

так что v определена при $x_1, \dots, x_m$, для которых определена $\overline{u}^L$, и при всех $x_{m+1}, \dots, x_n$. Говоря геометрически, функция v задает тот самый цилиндр C, описанный около поверхности $S : z = \overline{u}(x)$, посредством которого определялась сама проекция $\overline{u}^L$ функции $\overline{u}$.

Из определения выпуклой функции $\overline{u}$, натянутой на u, ее проекции $\overline{u}^L$ и функции v очевидно, что всюду (где $v(x)$ и $u(x)$ одновременно определены)

$$v(x) \leq u(x). \tag{2.5}$$

Пусть M — множество точек x, в которых

1) $v(x) = u(x)$, т. е. $\overline{u}^L(x_1, \dots, x_m) = u(x_1, \dots, x_n)$;

2) $u(x)$ имеет общий второй дифференциал;

3) функция $v(x)$ дважды дифференцируема.

Пусть M_L — проекция множества M на плоскость L и $\psi(M_L)$ ее нормальное изображение посредством функции $\overline{u}^L$.

Мы утверждаем, что с точностью до множества меры нуль $\psi(M_L)$ совпадает с нормальным изображением $\psi(\overline{u}^L)$ всей функции $\overline{u}^L$.

В самом деле, пусть M^1 — множество точек x, где $u = v$ и $u(x)$ имеет общий второй дифференциал, а M_L^1 — его проекция на плоскость L. Из условия а) нашей леммы (точнее, из свойства (B), указанного в лемме 3) непосредственно следует

$$\operatorname{mes}\psi(M_L^1) = \operatorname{mes}\psi(\overline{u}^L). \tag{2.6}$$

Пусть M_L — множество точек, где $v(x)$ дважды дифференцируема, а M_L^2 — его проекция. Она, очевидно, есть то множество, на котором дважды дифференцируема $\overline{u}^L$. А так как всякая выпуклая функция дважды дифференцируема почти везде и по условию леммы функция $\overline{u}^L$ имеет абсолютно непрерывное нормальное изображение, то

$$\operatorname{mes}\psi(M_L^2) = \operatorname{mes}\psi(\overline{u}^L). \tag{2.7}$$

Так как, очевидно, введенное выше множество $M = M^1 \cap M^2$, то из (2.6) и (2.7) следует наше утверждение

$$\operatorname{mes}\psi(M_L) = \operatorname{mes}\psi(\overline{u}^L). \tag{2.8}$$

9. Возьмем теперь любую точку $x \in M$. В ней $v = u$ и, очевидно, $dv = du$. А так как вообще $v \leq u$ и в x существуют обычный и общий вторые дифференциалы соответственно функций v, u, то в x $d^2v \leq d^2u$ (то, что это верно, когда du, d^2u суть общие дифференциалы, достаточно очевидно из их определения). Таким образом, всюду на M

$$v = u, \qquad dv = du, \qquad d^2v \leq d^2u. \tag{2.9}$$

Из того, что $d^2v \leq d^2u$, поскольку матрица $\|a_{ik}\|$ не имеет отрицательных собственных значений, следует

$$\sum a_{ik}v_{ik} \leq \sum a_{ik}u_{ik}. \tag{2.10}$$

А так как $v(x_1, \dots, x_n) = \overline{u}^L(x_1, \dots, x_m)$, то (2.10) равносильно тому, что

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\overline{u}_{ik}^L \leq \sum a_{ik}u_{ik}. \tag{2.11}$$

Так как матрицы $\|a_{ik}\|$, $\|\overline{u}_{ik}^L\|$ не имеют отрицательных собственных значений, то

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\overline{u}_{ik}^L \geq m(a_L w_L)^{1/m}, \tag{2.12}$$

где

$$a_L = \operatorname{Det}\|a_{ik}\|, \quad i < k \leq m, \qquad w_L = \operatorname{Det}\|\overline{u}_{ik}^L\|.$$

Вследствие уравнения (1.1) из (2.11) и (2.12) следует, что на M

$$m(a_L w_L)^{1/m} \leq \varphi. \tag{2.13}$$

Далее, поскольку на M $dv = du$, а v не зависит от x_j при $j > m$, то на M $u_j = 0$ при $j > m$. А так как $v = \overline{u}^L$, то $u_j = \overline{u}_j^L$ при $j \leq m$. Следовательно, в (2.13) в a_L и φ нужно полагать $u_j = 0$ при $j > m$ и $u_j = \overline{u}_j^L$ при $j \leq m$.

Теперь воспользуемся неравенством (2.1). Тогда из (2.13) получим, что почти всюду на проекции M_L множества M

$$P_L^m \geq m^m Q_L^{-m} w_L. \tag{2.14}$$

Поэтому

$$\int\limits_{M_L} P_L^m \, dx_L \geq m^m \int\limits_{M_L} Q_L^{-m} w_L \, dx_L. \tag{2.15}$$

Здесь левый интеграл может лишь увеличиться, если его распространить на всю область G_L — проекцию области G. Далее, так как по предположению нормальное изображение функции $\overline{u}^L$ абсолютно непрерывно, то здесь применима формула (2.4). Значит, $w_L dx_L$ есть элемент нормального изображения функции $\overline{u}^L$, так что (заменяя обозначения $\overline{u}_i^L$ на u_i)

$$w_L \, dx_L \equiv w_L \, dx_1 \ldots dx_m = du_1 \ldots du_m \equiv dW_L. \tag{2.16}$$

При таком преобразовании правого интеграла он должен распространяться на $\psi(M_L)$, но, вследствие (2.8), это равносильно тому, что он распространяется на $\psi(\overline{u}^L) = L \cap \psi(u)$.

Все эти замечания приводят к тому, что из (2.15) следует

$$\int\limits_{G_L} P_L^m dx_L \geq m^m \int\limits_{L\cap\psi(\overline{u})} Q_L^{-m} dW_L.$$

Лемма 3 доказана. Вместе с этим доказана и основная лемма 1.

§ 3. Условие достижения экстремума на границе и теоремы единственности

1. В формулировках этого параграфа D — область, заключающаяся вместе с замыканием в той области G, где рассматривается уравнение (1.1); D_L — проекция D на плоскость L.

Теорема 1. *Пусть для данного решения $u(x)$ уравнения (1.1) во всякой D выполнены условия первой части леммы 1, причем P_L^m суммируема в D_L, а Q_L^{-m} не суммируема ни в какой окрестности точки $(0, \dots, 0)$ (функции P_L, Q_L могут зависеть от D). Тогда $u(x)$ достигает точной нижней границы на краю G*[4]*. Если же выполнены условия второй части леммы 1, то $u(x)$ достигает точной верхней границы на краю G.*

Доказательство. Если $\inf u$ не достигается на Γ, то имеется такая D, что на краю D $u = h = \mathrm{const}$ и внутри D $u < h$. Тогда выпуклая функция $\overline{u}$, натянутая на u над областью D, заведомо достигает минимума и ее нормальное изображение содержит окрестность точки $(0, \dots, 0)$. То же верно и для ее проекции $\overline{u}^L$ на любую плоскость L.

Поэтому вследствие условия, наложенного в теореме на функцию Q_L, правый интеграл в неравенстве (2.2) леммы 1 будет бесконечным. (Лемма применяется к области D.) А тогда это неравенство невозможно, так как по условию, налагаемому в теореме на P_L, левый интеграл должен быть конечным.

2. Применим теорему 1 к линейному уравнению

$$A(u) = f, \quad A(u) = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu. \tag{3.1}$$

При данной L, в которой согласно принятому нами условию располагаются оси $x_1, \dots, x_m$, полагаем

$$b_L = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}. \tag{3.2}$$

Теорема 2. *Пусть в (3.1) $c \le 0$ и во всякой D*

$$a_L^{-1/m} b_L \le P_L(x_1, \dots, x_m), \tag{3.3}$$

где $P_L \ge 0$ зависит от L и D; P_L^m суммируема в D_L. (При $m = n$ это условие сводится просто к тому, что $a^{-1} b^n$ суммируемо во всякой D.) Тогда

---

[4] Непрерывность $u(x)$ в замкнутой области $G \cup \Gamma$ не предполагается; речь идет о том, что существует такая последовательность точек $x^i \in G$, что $x^i \to \Gamma$ и $u(x^i) \to \inf\limits_G u$.

I) *если* $A(u) \le 0$ *и хоть где-то* $u(x) < 0$, *то* $u(x)$ *достигает нижней границы на* Γ*;*

II) *если* $A(u) \le A(v)$ *и* $u|_\Gamma \ge v|_\Gamma$, *то* $u \ge v$*;*

III) *задача Дирихле для уравнения (3.1) имеет не более одного решения.*

Доказательство. Утверждение III очевидно из II, а II легко следует из I. Докажем I.

Пусть $A(u) = f \le 0$ и множество G', где $u(x) < 0$, не пусто. Перепишем (3.1) в форме

$$\sum a_{ik}u_{ik} = \varphi \equiv -\sum b_i u_i - cu + f. \tag{3.4}$$

Так как $c \le 0$, $f \le 0$ и в G' $u < 0$ и так как при фиксированной плоскости L мы полагаем $u_i = 0$, при $i > m$, то в G'

$$\varphi = -\sum b_i u_i - cu + f \le -\sum b_i u_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2}. \tag{3.5}$$

Отсюда вместе с (3.3) следует, что в G' выполнено неравенство (2.2) леммы 1, причем $Q = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} u_i^2}$ и, стало быть, не суммируема в окрестности $(0, \ldots, 0)$.

А так как P_L^m суммируема в D_L, то выполнены условия теоремы 1, из которой следует, что $u(x)$ достигает нижней границы на краю G'. Но G' есть множество всех x, где $u(x) < 0$. Поэтому $u(x)$ достигает нижней границы на краю всей области G.

3. Условие теоремы 2 является предельно слабым в том смысле, что суммируемость P_L^m не может быть заменена суммируемостью $P_L^{m-\varepsilon}$ ни при каком $\varepsilon > 0$. Это видно из следующего примера. Функция $u = r^2 - 1$, $r^2 = \sum x_i^2$, обращается в нуль на единичной сфере и удовлетворяет уравнению

$$\sum u_{ii} - \frac{n}{r^2}\sum x_i u_i = 0. \tag{3.6}$$

Вместе с тем, если при данном m положить $P_L = nr_L^{-1}$, где $r_L^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2$, то для такой P_L верно (3.3) и она суммируема с любой степенью, меньшей m. (Еще более сильное утверждение см. в п. 4 § 6.)

4. По принятому в § 1 условию, если в теореме 2 иметь в виду функции класса I или II, то (3.3) нужно предполагать выполненным для какого-либо пучка плоскостей L. При повороте плоскости L вместе с нею мы поворачиваем оси $x_1, \ldots, x_m$. Вместе с этим преобразуются $b_1, \ldots, b_m$; они линейно выражаются через все b_i в исходных осях. Поэтому (3.3) не отличается существенно от условия: для некоторого пучка $\{L\}$

$$a_L^{-1/m} b \leq P_L(x_1, \ldots, x_m), \quad b = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{3.7}$$

Если же рассматриваются дважды дифференцируемые решения, то достаточно, чтобы (3.3) выполнялось хотя бы для одной плоскости. Тогда, при $m < n$ (3.3), вообще говоря, заведомо слабее (3.7), так как в (3.3) входят только данные $b_1, \ldots, b_m$. В простейшем случае, когда $m = 1$, условие (3.3) сводится к тому, что $a_{11}^{-1}|b_1| \leq P(x_1)$, где $P(x_1)$ суммируема на всяком замкнутом отрезке, содержащемся в проекции области G на ось x_1. Если это так и $c \leq 0$, то утверждения теоремы 2 верны для дважды дифференцируемых решений без всяких ограничений на остальные коэффициенты.

§ 4. *Оценки отклонения решения от краевых значений*

1. Нас интересуют оценки величин

$$h = \inf_{\Gamma} u(x) - \inf_{G} u(x), \qquad h' = \sup_{G} u(x) - \sup_{\Gamma} u(x). \tag{4.1}$$

Выводы будут проводиться для h; для h' они вполне аналогичны.

Рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами $x_1, \ldots, x_n, z$, поверхность $S : z = u(x)$. Пусть $u(x)$ достигает минимума в точке $x_0 \in G$.

Построим конус с вершиной в точке $(x_0, -h)$, опирающийся на край какой-либо выпуклой области H, содержащей G. Этот конус мы обозначим K, а его нормальное изображение, т. е. нормальное изображение задающей его функции, — $\psi(K)$.

Пусть $\overline{u}$ — выпуклая функция, натянутая на u, так что $z = \overline{u}(x)$ задает выпуклую поверхность $\overline{S}$, натянутую на S. Из рассмотрения поверхности $\overline{S}$ и конуса K легко убедиться, что $\psi(K) \subset \psi(\overline{u})$. В самом деле, проведем через нижнюю точку края поверхности S горизонтальную плоскость, т. е. проведем плоскость $z = \inf_{\Gamma} u$. Эта плоскость отсекает от $\overline{S}$ шапку S^* высотою h. Если эту шапку перенести основанием на плоскость $z = 0$, то это основание уместится в основании H конуса K, а самая нижняя точка шапки совпадает с вершиной конуса K. При таком расположении очевидно, что для каждой опорной плоскости в вершине конуса есть параллельная опорная плоскость к шапке S^*. А это означает, что $\psi(K) \subset \psi(\overline{u})$.

Отсюда и из леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 7. *В условиях леммы 1*

$$\|P_L\|^m \geq m^m \int\limits_{L\cap\psi(K)} Q_L^{-m}\, du_1 \dots du_m, \tag{4.2}$$

где $\|P_L\|^m$ есть левая часть неравенства (2.2) леммы 1, т. е. $\|P_L\|$ — норма P_L в пространстве L_m (над областью G_L). При этом в (4.2) верно строгое неравенство (если (4.2) не сводится к $0 \geq 0$ или $\infty \geq \infty$).

Последнее следует из того, что не только $\psi(K) \subset \psi(\overline{u})$, но и площадь (объем) $L \cap \psi(K)$ меньше площади (объема) $L \cap \psi(\overline{u})$, как легко установить из рассмотрения поверхности $\overline{S}$ и конуса K (если только $h \neq 0$).

Поэтому дальше, ссылаясь на лемму 7 или формулу (4.2), мы всегда будем иметь в виду строгое неравенство.

2. Введем следующее обозначение: если $S(p)$ означает шар в плоскости L радиуса p с центром в начале координат, то полагаем

$$\int\limits_{S(p)} Q_L^{-m}\, du_1 \dots du_m = R_L(p)^m. \tag{4.3}$$

Теорема 3. *При условии леммы 1*

$$mR_L\left(\frac{h}{d_L}\right) < \|P_L\|, \tag{4.4}$$

где d_L — диаметр области G_L (то же верно для h'). (Если $\|P_L\| < mR_L(\infty)$, что заведомо верно, если $\|P_L\|$ конечна, а $R_L(\infty)$ бесконечно, то (4.4) содержит оценку для h, так как функция R_L возрастающая.)

Доказательство. Пусть x^0 — точка, где $u(x)$ достигает минимума, а x_L^0 — ее проекция на данную плоскость L. Лежащий в L шар H_L радиуса d_L с центром в точке x_L^0 содержит область G_L.

Пусть H — выпуклая область, содержащая G и имеющая своей проекцией на плоскость L шар H_L. (В качестве такой области можно взять, например, «произведение» H_L на достаточно большую $(n-m)$-мерную область.) Если K — конус, опирающийся на область H и имеющий вершину на высоте h под точкой x^0, то его проекция на плоскость (L, z) — круглым конусом, опирающимся на H_L, а нормальное изображение этой проекции $\psi(K_L) = L \cap \psi(K)$ будет шаром радиуса h/d_L.

Поэтому неравенство (4.4) есть не что иное, как неравенство (4.2) для такого конуса, и теорема доказана.

Теорема 3 важна прежде всего тем, что позволяет устанавливать ограниченность решений уравнения (1.1). Однако, вообще говоря, в уравнении (1.1) коэффициенты a_{ik} и φ содержат u. Поэтому правая часть неравенства

(1.2) леммы 1 также, вообще говоря, зависит от u. Можно допустить, что функция Q не зависит от u, а P зависит. Это, очевидно, сводится к тому, что P зависит от границ для u[5]. Тем самым, вообще говоря, P зависит от h. В таком случае (4.3) может давать оценку для h при том (необходимом) условии, что при $h \to \infty$ правая часть (4.3) растет не быстрее левой.

Такого рода оценку h мы получим в § 5 для случая линейного уравнения.

3. Содержащаяся в теореме 3 оценка для h в зависимости от размеров области может быть улучшена хотя бы при некоторых предположениях о функции Q.

Фиксируем плоскость L. Если H_L — выпуклая область, содержащая G_L, то, очевидно, найдется такая выпуклая область $H \supset G$, что H_L есть ее проекция на L. Если K — конус, опирающийся на H, то его проекция на плоскость L будет конусом K_L, опирающимся на H_L. Нормальное же изображение конуса K_L будет пересечением плоскости L с нормальным изображением конуса K:

$$\psi(K_L) = L \cap \psi(K). \tag{4.5}$$

Ввиду этих замечаний мы можем ограничиться пределами плоскости L или (L, z), как если бы она была всем пространством. Соответственно опустим индекс L.

Пусть x_0 — точка, над которой лежит вершина конуса K, и h — его высота; P_ν — опорная плоскость к области H с внешней нормалью ν; $q(\nu)$ — ее расстояние от точки x_0 — значение опорной функции области H относительно точки x_0.

Опорная плоскость к конусу K, проходящая через плоскость P_ν (и вершину конуса), образует с плоскостью $z = 0$ угол, тангенс которого равен $h/q(\nu)$.

При построении нормального изображения, по самому его определению, мы откладываем из начала отрезки, равные тангенсу угла наклона опорной плоскости. Поэтому из предыдущего становится очевидным, что нормальное изображение $\psi(K)$ конуса K есть область, ограниченная поверхностью, расстояние которой от начала в направлении ν есть $p = h/q(\nu)$.

Если ввести в нормальном изображении сферические координаты p, ν

$$p = \sqrt{\sum u_i^2}, \tag{4.6}$$

---

[5]Положим $\inf\limits_{\Gamma} u = \gamma$. Пусть G' — область, где $u < \gamma$. Можно, выводя оценку для h, ограничиться областью G', а в ней $\gamma > u > \gamma - h$ и считать, что $a_L^{-1/m}\varphi \leq$ $\leq P(x_1, \ldots, x_m; \gamma; h)\ Q(u_1, \ldots, u_m)$. В частности, если a_{ik} не зависят от u, а φ не убывающая по u, то $a_L^{-1/m}\varphi(x_i, u_i, u) < a_L^{-1/m}\varphi(x_i, u_i, \gamma)$ и можно считать P не зависящим от h.

то из сказанного следует, что $\psi(K)$ есть область, определенная неравенством $p \le h/q(\nu)$. Поэтому

$$\int\limits_{\psi(K)} Q^{-m} du_1 \dots du_m = \int\limits_{\omega} \int\limits_{0}^{h/q(\nu)} Q^{-m} p^{m-1} dp d\omega, \tag{4.7}$$

где $d\omega$ — элемент единичной сферы ω.

Интеграл (4.7) и есть тот, который входит в неравенство (4.2). Он, а стало быть и содержащаяся в лемме 7 оценка для h, зависит от точки x_0, где $u(x)$ достигает минимума. Для того чтобы получить оценку, не зависящую от x_0, достаточно найти минимум интеграла (4.7) как функции точки x_0 по всем $x_0 \in H$. При некоторых предположениях о Q это приводит к наглядным оценкам для h. Два частных случая, нужных в дальнейшем, дают следующие ниже теоремы 4 и 5.

4. Теорема 4. *Если в условиях теоремы 3 Q зависит только от p и Qp^{-1} есть невозрастающая функция, то неравенство (4.4) теоремы 3 можно заменить другим:*

$$mR_L\left(\frac{h}{q_L}\right) < \|P_L\|, \tag{4.8}$$

где q_L — среднее геометрическое опорной функции $q(\nu)$ области G_L (т. е. ее выпуклой оболочки) относительно такой точки x_0, для которой

$$\int\limits_{\omega} \nu q^{-1}(\nu) d\omega = 0. \tag{4.9}$$

Среднее геометрическое определяется формулой

$$\ln q_L = \frac{1}{\varkappa_m} \int\limits_{\omega} \ln q(\nu) d\omega, \tag{4.10}$$

где $\varkappa_m$ — площадь единичной сферы ω.

Доказательство. Из условия, наложенного на Q, легко заключить, что

$$\int\limits_{0}^{h/q(\nu)} Q^{-m} p^{m-1} dp$$

есть выпуклая функция $\ln q(\nu)$. А среднее значение выпуклой функции не меньше ее значения при среднем значении переменной. Поэтому

$$\int\limits_{\omega} \int\limits_{0}^{h/q(\nu)} Q^{-m} p^{m-1} dp d\omega \ge \varkappa_m \int\limits_{0}^{h/q} Q^{-m} p^{m-1} dp, \tag{4.11}$$

где q есть среднее геометрическое $q(\nu)$.

Это среднее будет, как легко проверить, максимальным, а стало быть, правый интеграл в (4.10) — минимальным, если $q(\nu)$ определяется относительно точки с условием (4.9) [6]. Поэтому можно считать, что в (4.11) q есть то самое q_L, которое фигурирует в формулировке нашей теоремы.

Далее мы замечаем, что правая часть (4.11) есть, согласно (4.3), не что иное, как $R_L^m\,(h/q)$. Левая его часть, как видно из (4.7) и (4.2), не превосходит $\|R_L\|^m$. Поэтому (4.11) приводит к (4.8).

5. Теорема 5. *Если $Q = 1$ (что можно считать выполненным, если Q ограничено), то неравенство (4.4) теоремы 3 можно заменить другим*

$$h \leq m^{-1}\tau_m^{-1/m}\overline{q}_L\|P_L\|, \tag{4.12}$$

где τ_m — объем единичного m-мерного шара, а $\overline{q}_L$ — среднее опорной функции $q(\nu)$ области G_L, определенное условиями

$$\overline{q}_L^{\,-m} = \frac{1}{\varkappa_m}\int\limits_{\omega} q^{-m}(\nu)\,d\omega, \tag{4.13}$$

причем $q(\nu)$ определяется относительно такой точки, что

$$\int\limits_{\omega} \nu q^{-m-1}(\nu)\,d\omega = 0. \tag{4.14}$$

Доказательство. При $Q = 1$ интеграл в правой части (4.2) есть просто объем нормального изображения $L \cap \psi(K) = \psi(K_L)$. Вычисляя его из (4.7) и подставляя в (4.2), получим

$$\|P_L\|^m > m^m\frac{h^m}{m}\int\limits_{\omega}\frac{d\omega}{q(\nu)^m}. \tag{4.15}$$

Минимум правой части достигается при таком положении точки x_0, что выполнено (4.14). (Это устанавливается аналогично условию (4.9) в теореме 4.) Но тогда данный интеграл можно заменить по формуле (4.12) на $\varkappa_m\overline{q}^{\,-m}$. Замечая еще, что $\tau_m = \varkappa_m/m$, получим, что из (4.14) следует (4.12).

6. Геометрический смысл величины $\overline{q}$ выясняется из ее связи с объемом нормального изображения конуса K. Если $h = 1$, то минимум этого объема есть $\tau_m\overline{q}^{\,-m}$. Следовательно, величина $\overline{q}$ для m-мерной области G определяется тем, что $\tau_m\overline{q}^{\,-m}$ есть минимум объемов нормальных изображений конусов высотой единица, опирающихся на выпуклую оболочку G.

---

[6] При смещении x_0 на вектор a $q(\nu)$ заменяется на $q(\nu) - a\nu$. Условия экстремума интеграла $\int\limits_{\omega}\ln(q(\nu) - a\nu)d\omega$ как функции составляющих вектора a и дают (4.9).

Отсюда, между прочим, легко вывести, что для эллипсоида $\overline{q}$ есть среднее геометрическое его полуосей. Вообще же существуют такие α_m, $\beta_m > 0$, зависящие только от m, что для выпуклой области величина $\overline{q}$ связана с ее объемом V неравенствами

$$\alpha_m \leq \frac{\overline{q}}{V^{1/m}} \leq \beta_m,$$

т. е. $\overline{q}$ есть величина порядка объема выпуклой оболочки области G. (Точные значения α_m, β_m не установлены. Оценки можно найти в [11].)

Что же касается величины q, входящей в теорему 4, то она, как легко убедиться, порядка диаметра области G: существует такое $\gamma_m > 0$, что $\gamma_m d \leq q \leq d/2$. Поэтому для «очень вытянутых» областей оценки с $\overline{q}$ гораздо лучше. Кроме того, для любой области $\overline{q} \leq q$.

§ 5. *Применение к линейным уравнениям*

1. Применив результаты § 4 к линейному уравнению

$$\sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = f, \tag{5.1}$$

мы получим оценки величин h, h', определенных формулой (4.1), и условия единственности решения задачи Дирихле, когда коэффициент c может быть положительным.

Введем следующие обозначения. Если g — какая-либо функция в области G, то полагаем

$$g_+ = \begin{cases} g & \text{при} \quad g > 0, \\ 0 & \text{при} \quad g \leq 0, \end{cases} \qquad g_- = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad g > 0, \\ -g & \text{при} \quad g \leq 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Далее, если, как всегда, оси $x_1, \ldots, x_m$ располагаются в плоскости L, то полагаем

$$g^L(x_L) \equiv g^L(x_1, \ldots, x_m) = \sup_{(x_{m+1}, \ldots, x_n)} g(x_1, \ldots, x_n). \tag{5.3}$$

Наконец, вводим величину

$$N_L^m(g) = \int\limits_{G_L} \left(a_L^{-1} \left|g\right|^m\right)^L dx_L, \tag{5.4}$$

где a_L имеет прежний смысл (см. п. 4 § 1). Величина $N_L(g)$ есть некоторая норма функции g; при $m = n$, когда L сводится ко всему пространству, она оказывается нормой с весом $a^{-1}(\operatorname{Det} \|a_{ik}\|)$ в пространстве L_n.

2. Перепишем уравнение (5.1) в виде

$$\sum a_{ik}u_{ik} = \varphi \equiv g - \sum b_i u_i, \quad g = f - cu. \tag{5.5}$$

Лемма 8. *Для любого решения уравнения (5.5) выполняются неравенства*[7)]

$$h < m^{-1}\tau_m^{-1/m} q_L N_L(g_+) F_m(N(b_L)), \tag{5.6}$$

и такие же неравенства — для h' с заменой g_+ на g_-, причем q_L то же, что в теореме 4 (формулы (4.9), (4.10)), b_L — в теореме 2 (формула (3.2)), а

$$F_m(\xi) = e^{m^{-m}\varkappa_m^{-1}\xi^m + \varphi_m(\xi)}, \tag{5.7}$$

где $\varphi_m(\xi) \geq 0$ ограничена на полуоси $\xi > 0$; $\varphi_m(0) = 0$. В частности, $\varphi_1(\xi) \equiv 0$, так что

$$F_1(\xi) = e^{\xi/2}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Достаточно доказать неравенство (5.6) для h, так как соответствующее неравенство для h' получается тогда переменой знака в (5.5). Ради упрощения записи мы будем опускать индекс L, так что вместо b_L, a_L, N_L будем писать просто b, a, N и т. п. Кроме того, будем предполагать $b > 0$. Ниже в случае $b = 0$ мы получим даже несколько более сильное неравенство, чем (5.6).

Полагая в (5.5), как условлено для данной L, $u_i = 0$ при $i > m$, получим (помня, что $b = b_L$, и определяя p формулой (4.6))

$$\varphi = g - \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \leq g_+ + bp. \tag{5.9}$$

По неравенству Гёльдера при любом $\mu > 0$, если $m > 1$,

$$(g_+ + bp) \leq (\mu^m g_+^m + b^m)^{1/m} \left(\mu^{-m/(m-1)} + p^{m/(m-1)}\right)^{1-1/m}. \tag{5.10}$$

Поэтому, определив функции P, Q равенствами

$$P = [a^{-1}(\mu^m g_+^m + b^m)]^{L/m}, \qquad Q = \left(\mu^{-m/(m-1)} + p^{m/(m-1)}\right)^{1-1/m}, \tag{5.11}$$

получим из (5.9) и (5.10) условие (2.1) леммы 1: $a^{-1/m}\varphi \leq PQ$.

[7)] Не считая случая, когда $h = 0$, $N_L(g_+) = 0$.

Если $m = 1$, то P определяется так же, а

$$Q = \begin{cases} \mu^{-1} & \text{при } \ p \le \mu^{-1}, \\ p & \text{при } \ p > \mu^{-1}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Из определения функции Q видно, что Qp^{-1} есть невозрастающая функция p при любом m. Поэтому можно воспользоваться теоремой 4, согласно которой в любом случае

$$m^m R^m \left(\frac{h}{q}\right) < \|P\|^m, \tag{5.13}$$

где согласно (4.3) — поскольку Q зависит только от p —

$$R^m(p) = \varkappa_m \int\limits_0^p Q^{-m} p^{m-1} dp. \tag{5.14}$$

Из определения (5.11) функции P и определения нормы N следует (так как для любых неотрицательных функций α, β $(\alpha+\beta)^L \le \alpha^L + \beta^L$)

$$\|P\|^m \le \mu^m N^m(g_+) + N^m(b). \tag{5.15}$$

С другой стороны, при $m > 1$ из определения (5.11) функции Q и из (5.14) следует, что

$$R^m \left(\frac{h}{q}\right) = \varkappa_m \int\limits_0^{h/q} \frac{p^{m-1} dp}{\left(\mu^{-m/(m-1)} + p^{m/(m-1)}\right)^{m-1}} =$$

$$= \frac{(m-1)}{m} \varkappa_m \int\limits_1^{1+(\mu h/q)^{m/(m-1)}} \frac{(\zeta-1)^{m-2}}{\zeta^{m-1}} d\zeta. \tag{5.16}$$

Последнее выражение получено подстановкой $\zeta = 1 + (\mu p)^{m/(m-1)}$. Предположим, что

$$\frac{h}{q} > k = m^{-1} \tau_m^{-1/m} N(g_+), \tag{5.17}$$

где k просто обозначает величину, стоящую справа. Если бы выполнялось обратное неравенство, то при $b > 0$ было бы верно (5.6) и нам нечего было бы доказывать.

Выберем μ следующим образом[8]:

$$\mu^{\frac{m}{m-1}} = k^{-\frac{m}{m-1}} - \left(\frac{h}{q}\right)^{-\frac{m}{m-1}}, \quad \text{т. е.} \quad 1 + \left(\mu\frac{h}{q}\right)^{\frac{m}{m-1}} = \left(\frac{h}{kq}\right)^{\frac{m}{m-1}}. \tag{5.18}$$

Это допустимо, так как из (5.17) следует, что здесь $\mu^{m/(m-1)} > 0$.

Подставляя μ из (5.18) в (5.15) и (5.16) получим соответственно

$$\|P\|^m \le N^m(b) + \sigma_m\left(\frac{h}{kq}\right), \qquad \sigma_m(\xi) = m^m\tau_m(1-\xi^{-\frac{m}{m-1}})^{m-1}, \tag{5.19}$$

$$R^m\left(\frac{h}{q}\right) = \frac{m-1}{m}\varkappa_m \int\limits_1^{\left(\frac{h}{kq}\right)^{\frac{m}{m-1}}} \frac{(\zeta-1)^{m-2}}{\zeta^{m-1}}\,d\zeta = \varkappa_m \ln\frac{h}{kq} - \psi_m\left(\frac{h}{kq}\right), \tag{5.20}$$

где $\psi_m(\xi)$ ограничена и положительна при $\xi \ge 1$ и $\psi_m(1) = 0$. Теперь неравенство (5.13) с применением (5.19), (5.20) дает

$$m^m\varkappa_m \ln\frac{h}{kq} - \chi_m\left(\frac{h}{kq}\right) < N^m(b), \tag{5.21}$$

где $\chi_m = \sigma_m + m^m\psi_m$, так что $\chi_m(\xi) \ge 1$; χ_m ограничена при $\xi \le 1$; $\chi_m(1) = 0$.

Отсюда видно, что h удовлетворяет неравенству (5.6) с функцией F_m вида (5.7).

Легко проверить, что правая часть (5.21) есть возрастающая функция $h/(kq)$, равная нулю при $h/(kq) = 1$ и, следовательно, положительная при $h/(kq) > 1$. Отсюда, в частности, следует, что $F_m(0) = 1$.

Таким образом, лемма полностью доказана для $m > 1$.

3. Пусть теперь $m = 1$. Положим

$$\mu = 2N^{-1}(g_+). \tag{5.22}$$

Можно считать, что $h \ge \mu^{-1}q$, так как иначе $h < \mu^{-1}q = 2q^{-1}N(g_+)$, т. е. выполнено доказываемое неравенство (5.6) для $m = 1$.

Но если $h \ge \mu^{-1}q$, то, подставляя в (5.14) (при $m = 1$) функцию Q из (5.12), получим

$$R\left(\frac{h}{q}\right) = 2\int\limits_0^{\mu^{-1}} \mu dp + 2\int\limits_{\mu^{-1}}^{h/q} \frac{dp}{p} = 2\left(1 + \ln\mu\frac{h}{q}\right).$$

[8] Это есть «наилучшее» значение μ, т. е. то, при котором $m^mR^m(h/q) - \mu^mN^m(g_+) - N^m(b)$, т. е. разность левой части (5.13) и правой части (5.15) достигает минимума, как функция μ. Приравнивая нулю производную этой разности по μ, получаем (5.18).

Подставляя это выражение для R в неравенство (5.13) и пользуясь (5.15), а также подставляя μ из (5.22), получим

$$h < \frac{1}{2} q N(g_+) e^{N(b)/2}.$$

А это и есть неравенство (5.8) для $m = 1$ с F_1 вида (5.10).

4. Лемма 9. *Для любого решения уравнения (5.5) для плоскостей L, для которых $b_L = 0$, имеет место неравенство*

$$h < m^{-1} \tau_m^{-1/m} \overline{q}_L N(g_+), \tag{5.23}$$

где $\overline{q}_L$ то же, что в теореме 5. То же верно для h' с заменой g_+ на g. (Неравенство (5.23) лучше, чем (5.6) при $b_L = 0$, как видно из сравнения величин q, $\overline{q}$, данного в п. 6 § 4.)

Доказательство. Так как при заданной L мы полагаем $u_i = 0$ для $i > m$, то при $b_L = 0$ (5.9) сводится к тому, что $\varphi = g \leq g_+$. Поэтому, полагая $Q_L = 1$, $P_L = \left(a_L^{-1/m} g_+\right)^L$, будем иметь неравенство $a_L^{-1/m} \varphi \leq P_L Q_L$. Мы оказываемся в условиях теоремы 5. Ее неравенство (4.12) и дает (5.23), так как в данном случае $\|P_L\| = N_L(g_+)$.

5. Теорема 6. *Задача Дирихле для уравнения (5.1) не может иметь более одного решения, если для каких-либо L*

$$\Delta_L(q_L, c_+, b_L) \equiv m \tau_m^{1/m} q_L^{-1} F_m^{-1}(N_L(b_L)) - N_L(c_+) \geq 0. \tag{5.24}$$

В случае же $b_L = 0$ достаточно

$$\Delta_L(\overline{q}_L, c_+, 0) \equiv m \tau_m^{1/m} q_L^{-1} - N_L(c_+) \geq 0. \tag{5.25}$$

Доказательство. Как всегда достаточно доказать, что однородное уравнение с краевым условием $u|_\Gamma = 0$ имеет только нулевое решение.

Допустим противное, и пусть $u(x)$ — ненулевое решение с условием $u|_\Gamma = 0$. Можно считать, что $u < 0$. Тогда из определения величины h заключаем, что $|u| \leq h$.

Далее, так как $f = 0$ и $u < 0$, то

$$g_+ = (f - cu)_+ = c_+|u| \leq c_+ h.$$

Поэтому, подставляя в (5.6) $c_+ h$ вместо g_+ и деля на h, получим неравенство, обратное (5.24). По лемме 8 это неравенство должно быть верным для почти всех плоскостей любого пучка (или для всех плоскостей, если речь идет о дважды дифференцируемых решениях). А это противоречит условию теоремы, чем первая ее часть доказана.

Условие (5.25) в случае $b_L = 0$ получается совершенно также из леммы 9.

6. Следствия теоремы 6. I. Теорему 6 можно, очевидно, перефразировать так: однородное уравнение может иметь ненулевое решение с краевым условием $u|_\Gamma = 0$, только если для (почти) всех L верно неравенство, обратное (5.20), а при $b_L = 0$ — обратное (5.21).

Поэтому здесь содержится оценка для собственного числа: уравнение

$$\sum a_{ik}u_{ik} + \sum b_i u_i + cu + \lambda\sigma u = 0,$$

где $c \leq 0$, $\sigma \geq 0$, может иметь ненулевое решение с $u|_\Gamma = 0$, только если

$$\lambda N_L(\sigma) > m\tau_m^{1/m} q_L^{-1} F_m(N_L(b_L))^{-1}, \tag{5.26}$$

а при $b_L = 0$

$$\lambda N_L(\sigma) > m\tau_m^{1/m} \overline{q}_L. \tag{5.26a}$$

II. Если $c_+ = 0$, т. е. $c \leq 0$, то (5.24) выполняется само собой, если только $N_L(b_L)$ конечна, т. е. если $(a_L^{-1} b_L^m)^L$ суммируемо по всей области G_L. Этот результат, однако, слабее теоремы 2 § 3, так как из нее следует, что достаточно суммируемости $(a_L^{-1} b_L^m)^L$ только во всякой замкнутой $D \subset G_L$.

Но если, предполагая существование ненулевого решения $u(x)$, взять область, где $u < -\varepsilon$ (или $u > \varepsilon$), то вполне аналогично выводу теоремы 6 (беря $\varepsilon \to 0$) получим результат теоремы 3.

7. Теорема 7. *Если для уравнения (5.1) выполнено (5.24), то для его решения $u(x)$, полагая $\inf u = \gamma$, имеем неравенства*

$$h < \frac{N_L((f - c\gamma)_+)}{\Delta_L(q_L, c_+, b_L)}, \tag{5.27}$$

а если $b_L = 0$, то при выполнении (5.25)

$$h < \frac{N_L((f - c\gamma)_+)}{\Delta_L(\overline{q}_L, c_+, 0)}. \tag{5.28}$$

Для h' верно то же с заменой $(f - c\gamma)_+$ на $(f - c\gamma')_-$, $\gamma' = \sup\limits_\Gamma u$.

Общая для h и h' оценка может быть получена соответственно из (5.22) и (5.23) заменой числителя на $N_L(f) + N_L(c)\sup\limits_\Gamma |u|$.

Доказательство. Из определения величин h и γ $\gamma - h = \inf\limits_G u \leq u$, откуда $u - \gamma \geq h$. А так как, согласно (5.5), $g = f - cu$, то

$$g_+(f - c\gamma - c(u - \gamma))_+ \leq (f - c\gamma)_+ + c_+ h.$$

Поэтому
$$N_L(g_+) \le N_L((f - c\gamma)_+) + hN_L(c_+).$$

Подставляя это выражение вместо $N_L(g_+)$ в (5.6), получим (5.27), а при подстановке в (5.23) получим (5.28).

Неравенства для h' получаются переменой знака в уравнении (5.1). Общая для h и h' оценка отсюда очевидна.

Для самого решения $u(x)$ из (5.22) и (5.23) непосредственно выводится оценка, которую можно записать в виде

$$\frac{N_L(f_-) + \beta' K_L}{\Delta_L} > u > -\frac{N_L(f_+) + \beta K_L}{\Delta_L}, \tag{5.29}$$

где
$$\beta' = \max(\sup_\Gamma u, 0), \qquad \beta = \max(-\inf_\Gamma u, 0),$$

$$K_L = m\tau_m^{1/m} q_L^{-1} F_m(N_L(b_L))^{-1}, \qquad \Delta_L = \Delta_L(q_L, c_+, b_L),$$

а при $b_L = 0$
$$K_L = m\tau_m^{1/m}\overline{q}_L^{-1}, \qquad \Delta_L = \Delta_L(\overline{q}_L, c_+, 0).$$

8. Из теоремы 7 легко выводится следующее обобщение известной «первой теоремы Гарнака».

Теорема 8. *Пусть в G имеется последовательность решений $u^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots)$ задачи Дирихле для уравнений*

$$A(u) + c^{(k)}u = f^{(k)}, \qquad A(u) = \sum a_{ij}u_{ij} + \sum b_i u_i \tag{5.30}$$

со следующими свойствами:

I) *$u^{(k)}$ равномерно сходятся на границе;*

II) *$f^{(k)}, c^{(k)}$ сходятся к некоторым f, c в смысле нормы N_L, т. е. $N_L(f^{(k)} - f) \to 0$, $N_L(c^{(k)} - c) \to 0$;*

III) *при тех же (той же) L для c выполнено неравенство $\Delta_L(q_L, c_+, b_L) > 0$ или, если $b_L = 0$, $\Delta_L(\overline{q}_L, c_+, 0) > 0$.*

Тогда $u^{(k)}$ сходятся равномерно в G к некоторой, необходимо непрерывной, функции $u(x)$. И если у каждой точки $x \in G$ имеется окрестность, в которой задача Дирихле для предельного уравнения

$$A(u) + cu = f \tag{5.31}$$

разрешима при любых непрерывных граничных условиях, то $u(x)$ есть решение этого предельного уравнения.

Доказательство. Для разности $u^{(k)} - u^{(l)}$ имеем уравнение

$$A(u^{(k)} - u^{(l)}) + c^{(k)}(u^{(k)} - u^{(l)}) = (f^{(k)} - f^{(l)}) + (c^{(l)} - c^{(k)})u^{(l)}. \tag{5.32}$$

Из сходимости $c^{(k)}$ к c по норме N_L и условия III следует, что для достаточно больших k

$$\Delta_L(q_L, c_+^{(k)}, b_L) > \text{const} > 0 \tag{5.33}$$

или при $b_L = 0$

$$\Delta_L(\overline{q}_L, c_+^{(k)}, 0) > \text{const} > 0. \tag{5.33a}$$

Следовательно, к уравнению (5.32) при достаточно больших k, l можно применить оценку для отклонения решения от граничных значений, даваемую теоремой 7: знаменатель в этой оценке ограничен снизу положительным числом. Числитель же согласно второй части теоремы 7 можно взять

$$N_L[(f^{(k)} - f^{(l)}) + (c^{(l)} - c^{(k)})u^{(l)}] + N_L(c^{(k)}) \sup_{\Gamma} |u^{(k)} - u^{(l)}|. \tag{5.34}$$

Первое слагаемое здесь не превосходит

$$N_L(f^{(k)} - f^{(l)}) + N_L(c^{(l)} - c^{(k)}) \sup |u^{(l)}|,$$

и из условия II следует, что обе стоящие здесь нормы N_L стремятся к нулю при $k, l \to \infty$. Кроме того, вследствие тех же неравенств (5.33), (5.33a), для отклонений решений $u^{(l)}$ от их граничных значений имеется равномерная оценка. А так как на Γ эти решения равномерно сходятся, то $\sup |u^{(l)}|$ равномерно ограничены в G. Поэтому первое слагаемое в (5.34) стремится к нулю при $k, l \to \infty$.

Так как по условию I $u^{(k)}$ сходятся на Γ равномерно и из условия II следует, что $N_L(c^{(k)})$ равномерно ограничены, то второе слагаемое в (5.34) также стремится к нулю.

Следовательно, отклонение разности $u^{(k)} - u^{(l)}$ от граничных значений стремится к нулю. А так как эти граничные значения по условию сами стремятся к нулю и притом равномерно, то $u^{(k)} - u^{(l)} \to 0$ равномерно в G.

Таким образом, $u^{(k)}$ сходятся равномерно к некоторой функции u, которая непрерывна как равномерный предел непрерывных функций. Этим первая часть теоремы доказана.

Допустим теперь, что выполнено условие второй части нашей теоремы и пусть $v(x)$ есть решение уравнения (5.31) в окрестности V какой-либо точки $x \in G$, совпадающее с $u(x)$ на границе V. Тогда из (5.30) и (5.31) выводим, что $u^{(k)} - v$ удовлетворяет уравнению вида (5.32) с заменой $c^{(l)}$, $f^{(l)}$ на c, f.

Так как $u^{(k)} \to u$ равномерно, то $u^{(k)} \to v$ равномерно на границе V. Отсюда аналогично предыдущему убеждаемся, что $u^{(k)} \to v$ в V. Следовательно, $u = v$ в V и, стало быть, u есть решение уравнения (5.31), что и требовалось доказать.

§ 6. *Точность полученных оценок*

1. Теорема 9. *Все оценки § 5, специально сформулированные для случая $b_L = 0$, являются точными.*

Это означает следующее.

Пусть L — плоскость, натянутая на оси $x_1, \ldots, x_m$; G_L — данная выпуклая область в L; G' — какая-либо выпуклая область в плоскости осей $x_{m+1}, \ldots, x_n$. Берем область $G_L = G_L \times G'$, получающуюся, когда G' параллельно перемещается так, что какая-либо ее точка зачеркивает G_L.

В области G рассматривается уравнение вида

$$\sum a_{ik} u_{ik} + cu = f \tag{6.1}$$

с непрерывными a_{ik}, c, f. (Можно считать его строго эллиптическим.) Решения, о которых будет идти речь, предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяющими краевому условию $u|_\Gamma = 0$.

Утверждается:

I. Для всяких $N_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое уравнение вида (6.1) в G, что $N_L(g_+) = N_0$, $g = f - cu$, и такое его решение $u(x)$, что

$$h > m^{-1} \tau_m^{-1/m} \overline{q}_L N_L(g_+) - \varepsilon. \tag{6.2}$$

Это означает, что оценка для h, данная в лемме 9, точная.

II. При всяком $\varepsilon > 0$ найдется такое однородное уравнение вида (6.1) в G, которое имеет ненулевое решение $u(x)$ и для которого вместе с тем

$$N_L(c_+) < m \tau_m^{1/m} \overline{q}_L^{-1} + \varepsilon, \tag{6.3}$$

т. е оценка (5.25), обеспечивающая согласно теореме 6 единственность решения задачи Дирихле, является точной.

Так как оценка (5.26а) для наименьшего собственного значения равносильна (5.25), то и она является точной.

III. Для всяких $C_0 < m \tau_m^{1/m} \overline{q}_L^{-1}$, $F_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется такое уравнение вида (6.1) в G, для которого $N_L(_+) = C_0$, $N_L(f_+) = F_0$ и которое имеет такое решение $u(x)$, что

$$h > \frac{N_L(f_+)}{m \tau_m^{1/m} \overline{q}_L^{-1} - N_L(c_+)} - \varepsilon, \tag{6.4}$$

т. е. оценка (5.28) в теореме 7 оказывается точной.

2. Мы ограничимся доказательством утверждения I. Как оценки теорем 6, 7 для случая $b_L = 0$ вытекают из леммы 9, так и доказательства утверждений II, III о точности этих оценок довольно просто получаются из доказательства утверждения I. Нетрудно также усмотреть, что наши утверждения достаточно доказать в предположении $m = n$, т. е. когда m равно числу переменных.

Итак, докажем I для $m = n$. Пусть G — данная выпуклая область и x_0 — такая ее точка, что для отсчитанной от нее опорной функции

$$\int\limits_{\omega} \frac{d\omega}{q(\nu)^n} = \frac{\varkappa_n}{\overline{q}^n}.$$

Пусть K — конус в пространстве $x_1, \ldots, x_n, z$, обращенный отверстием в сторону $z > 0$, опирающийся на край G и имеющий вершину под точкой x_0 на высоте h_K. Объем (площадь) его нормального изображения будет (как следует из (4.7) при $Q = 1$)

$$W_k = \tau_n \left(\frac{h_K}{\overline{q}}\right)^n. \tag{6.5}$$

Конус K можно с любой степенью точности приблизить такой выпуклой поверхностью $S : z = u(x)$, что $u|_\Gamma = 0$, а в G $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и d^2u — строго положительная форма.

Можно поверхность S взять настолько близкой к конусу K, что при данном $\varepsilon' > 0$ для ее «высоты» $h = \sup |u|$ будем иметь

$$h > h_K - \varepsilon'. \tag{6.6}$$

Кроме того, S, т. е. $u(x)$, можно выбрать так, чтобы ее нормальное изображение $\psi(u)$ сколь угодно мало отличалось от нормального изображения конуса K. Тогда, если W — объем $\psi(u)$, то можно считать, что

$$W < W_K + \varepsilon'. \tag{6.7}$$

В результате из (6.5)–(6.7) следует, что

$$h > \tau_n^{-1/n} \overline{q} W^{1/n} + \varepsilon, \tag{6.8}$$

где ε можно считать сколь угодно малым.

Рассмотрим теперь в G уравнение

$$\sum a_{ik} u_{ik} = g, \tag{6.9}$$

где a_{ik} суть миноры матрицы $\|u_{ik}\|$ (для построенной функции u). Тогда, если w — определитель этой матрицы, то

$$\sum a_{ik} u_{ik} = nw, \tag{6.10}$$

так что функция u удовлетворяет уравнению (6.9) при $g = nw$. Так как u_{ik} непрерывны и d^2u — строго положительная форма, то уравнение (6.9) строго эллиптично и коэффициенты его непрерывны (при $n = 1$ левая часть (6.9) есть просто u).

При указанном выборе a_{ik}

$$a = \operatorname{Det} \|a_{ik}\| = w^{n-1}. \tag{6.11}$$

Отсюда, поскольку $g = nw > 0$, следует, что

$$N^n(g_+) = N^n(g) = \int\limits_G a^{-1} g^n \, dx = n^n \int\limits_G w \, dx. \tag{6.12}$$

Стоящий справа интеграл есть площадь W нормального изображения функции u. Поэтому из (6.8) и (6.12) вытекает

$$h > n^{-1} \tau_n^{-1/n} \overline{q} N(g_+) - \varepsilon, \tag{6.13}$$

что есть неравенство (6.2) утверждения I теоремы 9.

Поскольку высота h_K конуса K была взята произвольно, то ее можно выбрать так, чтобы W_K имело данное значение. А поскольку W можно взять сколь угодно близким к W_K, то и W можно придать заранее заданное значение. Согласно (6.12) $N^n(g_+) = n^n W$. Значит, можно обеспечить, чтобы $N(g_+) = N_0$ с заданным N_0.

Таким образом, утверждение I теоремы 9 доказано.

3. Теорема 10. *Все оценки § 5, содержащие $N_L(b_L)$, дают по крайней мере точный порядок роста по $N_L(b_L)$. А для $m = 1$ они вообще оказываются точными.*

Точнее, утверждается следующее. Введем функцию

$$\widetilde{F}_m(\xi) = e^{m^{-m} \varkappa_m^{-1} \xi^m}. \tag{6.14}$$

Сравнивая ее с $F_m(\xi)$ в лемме 8, видим, что

$$1 \le \widetilde{F}_m^{-1}(\xi) F_m(\xi) \le \text{const}, \tag{6.15}$$

где константа зависит от m. Кроме того,

$$\widetilde{F}_1(\xi) = F_1(\xi) = e^{\xi/2}. \tag{6.16}$$

Пусть область $G = G_L \times G'$ определена так же, как в теореме 9. Пусть q_L обозначает среднее геометрическое опорной функции области G_L, определенное формулами (4.9), (4.10).

В области G рассматривается линейное уравнение общего вида (5.1), с непрерывными коэффициентами и правой частью. Решения, о которых будет идти речь, предполагаются удовлетворяющими краевому условию $u|_\Gamma = 0$ и дважды непрерывно дифференцируемыми.

Утверждается следующее.

I. *При всяких $N_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ и $B_0 > 0$, достаточно большом в сравнении с N_0, найдется такое уравнение в G с таким решением $u(x)$, что, во-первых, $N_L(g_+) = N_0$, $g = f - cu$, $N_L(b_L) = B_0$, а, во-вторых, для $u(x)$*

$$h > m^{-1}\tau_m^{-1/m} q_L N_L(g_+)\widetilde{F}_m(N_L(b_L)) - \varepsilon. \tag{6.17}$$

Это означает, что оценка для h, даваемая леммой 8, точная в отношении роста по $N_L(b_L)$ и точная в отношении других величин. А так как $\widetilde{F}_1 = F_1$, то (6.17) означает также, что при $m = 1$ указанная оценка вообще является точной. Вследствие (6.15), неравенство (6.17) можно переписать в виде

$$h > C(m) q_L N_L(g_+) F_m(N_L(b_L)) - \varepsilon, \tag{6.18}$$

где $C(m)$ — постоянная, зависящая только от m.

II. *При всяком $\varepsilon > 0$ найдется такое однородное уравнение в G, которое имеет ненулевое решение и для которого вместе с тем*

$$N_L(c_+) < m\tau_m^{1/m} q_L^{-1}\widetilde{F}_m(N_L(b_L))^{-1} + \varepsilon. \tag{6.19}$$

При этом можно обеспечить, чтобы $N_L(b_L)$ имело заданное, достаточно большое значение.

Это означает, что оценка в (5.24), обеспечивающая согласно теореме 6 единственность решения задачи Дирихле является точной в смысле, оговоренном в утверждении I. В частности, она точная при $m = 1$. Так как оценка (5.26) наименьшего собственного значения равносильна (5.24), то и она оказывается точной в указанном смысле.

III. *При всяком $\varepsilon > 0$ найдется такое уравнение в G с таким решением $u(x)$, что*

$$h > \frac{N_L(f_+)}{m\tau_m^{1/m} q_L^{-1}\widetilde{F}_m(N_L(b_L))^{-1} - N_L(c_+)} - \varepsilon. \tag{6.20}$$

При этом можно обеспечить, чтобы $N_L(b_L)$ имело заданное, достаточно большое значение B_0, а $N_L(f_+) = F_0$, $N_L(c_+) = C_0$, где F_0, C_0 — данные положительные числа с условием $C_0 < m\tau_m^{1/m} q_L^{-1}\widetilde{F}(B_0)^{-1}$. Это означает, что оценка (5.27) теоремы 7 точная в том же выше определенном смысле.

Доказательство утверждений II–III основано на той же идее, что доказательство соответствующих утверждений предыдущей теоремы. За недостатком места мы это доказательство не приводим.

4. Теперь мы спрашиваем: возможны ли оценки, аналогичные полученным в § 5, но через другие нормы коэффициентов и правой части?

При решении этого вопроса можно ограничиться случаем $m = n$. Норма N, через которую в этом случае осуществляются наши оценки, есть не что иное, как норма в L_n с весом $a^{-1/n}$. Спрашивается, возможны ли оценки через «более слабые нормы». Такую норму мы определим следующим образом.

Пусть $\varphi(\xi)$ — такая непрерывная возрастающая функция, что

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi^n} = 0. \tag{6.21}$$

Определим норму N_φ равенством

$$\varphi(N_\varphi(g)) = \int\limits_G \varphi\left(a^{-1/n}|g|\right) dx. \tag{6.22}$$

(Множитель $a^{-1/n}$ означает, что линейное уравнение с $a > 0$ может быть нормировано так, что $a = 1$.)

Теорема 11. *Общие оценки, аналогичные оценкам § 5, но через «более слабые» нормы N_φ, невозможны. Точно так же для единственности решения задачи Дирихле недостаточно ограничений на нормы N_φ от коэффициентов b и c.*

Точнее, утверждается следующее.

Пусть N_φ — какая-либо такая норма, определенная как указано выше; G — единичный шар. Дальше имеются в виду уравнения и их регулярные решения в G с краевым условием $u|_\Gamma = 0$.

I. Существует такая последовательность уравнений вида $\sum a_{ik}u_{ik} = f$ и их решений $u(x)$, что $N_\varphi(f)$ ограничены, но $h = \sup|u| \to \infty$ (и, стало быть, $N(f) \to \infty$). Это и значит, что оценка h через $N_\varphi(f)$, вообще говоря, невозможна.

II. Существует последовательность уравнений вида $\sum a_{ik}u_{ik} + cu = 0$, такая что $N_\varphi(c) \to 0$, но уравнения имеют в G ненулевые решения (так как $u|_\Gamma = 0$, то, стало быть, $N(c_+) > \text{const} > 0$). Это означает, что нет общей оценки для $N_\varphi(c)$, которая обеспечивала бы единственность решения задачи Дирихле.

III. Существует такое уравнение вида $\sum a_{ik}u_{ik} + \sum b_i u_i = 0$, в котором $N_\varphi(b)$ конечно и которое вместе с тем имеет ненулевое решение с $u|_\Gamma = 0$ (так что $N(b) = \infty$). Это означает, что наши теоремы единственности (теоремы 2 § 3 и 6 § 5) не могут быть усилены ослаблением нормы b.

Эти утверждения мы, за недостатком места, вынуждены оставить без доказательства.

5. Оценки через более слабые нормы получаются при дополнительных предположениях об уравнениях. Так, Г. Стампаккиа [2] и Г. Вейнбергер [3] дают оценки через нормы в L_q при любом $q > n/2$. Но эти оценки относятся к самосопряженным уравнениям, и, главное, в них входит наименьшее собственное значение матрицы $\|a_{ik}\|$, тогда как в наших оценках (при $m = n$) фигурирует только ее определитель. В доказательствах теорем 9–11 строятся именно такие уравнения, у которых разброс собственных значений матрицы $\|a_{ik}\|$ не ограничен.

Статья поступила в редакцию
11.III.1963

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* О допустимых расширениях понятия решения для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Вестн. ЛГУ. 1963. № 18. Сер. математики, механики, астрономии. Вып. 1. С. 10–25.
2. *Stampacchia G.* Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat. Ser. III. 1958. T. 12. P. 223–245.
3. *Weinberger H. F.* Symmetrization in uniformly elliptic problems // Stud. Math. Anal. Related Topics, Essays in Honor of G. Polya. 1962. P. 424–428.
4. *Александров А. Д.* Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 5. С. 1001–1004.
5. *Бакельман И. Я.* К теории квазилинейных эллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 2. С. 179–186.
6. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. VI // Изв. вузов. Математика. 1961. № 1. С. 3–20.
7. *Сакс С.* Теория интеграла. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
8. *Александров А. Д.* Задача Дирихле для уравнения $\operatorname{Det}\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$. I // Вестн. ЛГУ. 1958. № 1. Сер. математики, механики, астрономии. Вып. 1. С. 5–24.
9. *Александров А. Д.* То же. IV // Там же. 1960. № 3. С. 3–15.
10. *Александров А. Д.* То же. V // Там же. 1960. № 5. С. 16–26.
11. *Bambah R. P.* Polar reciprocal convex bodies // Proc. Camb. Phil. Soc. 1955. V. 51. P. 377–378.

Теория поверхностей и дифференциальные уравнения в частных производных

Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда, Ленинград. Л.: ЛГУ, 1963. С. 3–16. Совместно с А. В. Погореловым

Из многообразных связей теории поверхностей с теорией дифференциальных уравнений в частных производных мы выделяем в этом докладе вопросы, касающиеся выпуклых поверхностей и соответственно эллиптических, вообще говоря, нелинейных уравнений второго порядка (с возможным вырождением в параболические). Некоторые вопросы, касающиеся гиперболических уравнений и соответственно поверхностей отрицательной кривизны, освещены в докладе Н. В. Ефимова [1].

Значение теории поверхностей для теории дифференциальных уравнений состоит прежде всего в том, что она дает естественные постановки задач этой теории и вместе с тем естественные подходы к их решению.

§ 1. *Проблема Минковского и задачи, с нею связанные*

Классическим примером, иллюстрирующим только что высказанное утверждение, является проблема Минковского о существовании замкнутой выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной. Решение этой проблемы, полученное самим Г. Минковским больше полувека назад, есть обобщенное решение в смысле современной терминологии.

Сущность проблемы Минковского состоит в следующем. Пусть на единичной сфере Ω задана непрерывная положительная функция $K(n)$ единичного вектора n. Требуется выяснить условия существования замкнутой выпуклой поверхности, у которой гауссова кривизна K как функция внешней нормали n совпадала бы с заданной функцией $K(n)$. Если ограничить решение проблемы условием двукратной дифференцируемости поверхности, то вопрос сводится к существованию решения некоторого нелинейного уравнения с частными производными, заданного на сфере.

---

[1] См. *Н. В. Ефимов.* Проблемы изометрического погружения в целом // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда. Л.: ЛГУ, 1963. С. 86–99. — *Прим. ред.*

Как уже было указано, Г. Минковский решил поставленную им проблему [1]. Именно он доказал, что для существования замкнутой выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной $K(n)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_{\Omega} \frac{n}{K(n)} d\omega = 0.$$

(Необходимость условия очевидна, так как оно выражает, что векторная площадь замкнутой поверхности равна нулю.)

При этом гауссова кривизна поверхности в данной точке понимается как предел отношения площади сферического изображения области на поверхности к площади области, когда область стягивается к этой точке.

Если понимать гауссову кривизну поверхности, вопреки К. Ф. Гауссу, как произведение главных кривизн поверхности, то полученное Г. Минковским решение проблемы надо рассматривать как обобщенное. Ибо, как установлено геометрами в недалеком прошлом (см., например, [2]), существование и непрерывность гауссовой кривизны в смысле Гаусса еще не гарантируют двукратной дифференцируемости поверхности и, следовательно, существования главных кривизн, с помощью которых гауссова кривизна определяется в современных учебниках. Это дало основание некоторым авторам (Г. Леви [3], К. Миранда [4, 5]), решавшим проблему Минковского с точки зрения теории дифференциальных уравнений, изобразить дело так, будто Г. Минковский вообще ничего не доказал. Мы видим, однако, что это неверно; подобный взгляд был вызван лишь тем, что понятие обобщенного решения дифференциального уравнения не было еще ясно осознано. Между тем то, что здесь мы имеем дело именно с обобщением решений дифференциальных уравнений, было в то время уже ясно геометрам (см., например, [6]). Решение проблемы Минковского представляет собой, может быть, первый пример обобщенного решения нелинейного уравнения в частных производных.

Путь, которым шел Г. Минковский, очень характерен для геометрического подхода к такого рода задачам и служит в известном смысле образцом. Он решил сначала соответствующую задачу для многогранников и потом путем предельного перехода получил решение формулированной выше проблемы для поверхностей с непрерывной кривизной $K(n)$.

Таким же путем позднее было получено решение обобщенной проблемы Минковского для общих замкнутых выпуклых поверхностей, не подчиненных никаким условиям регулярности [5, 6]. Пусть S — такая поверхность. Множеству ω на единичной сфере Ω сопоставляется множество $\sigma(\omega)$ на S следующим образом. Точка $x \in S$ относится к $\sigma(\omega)$, если через нее проходит опорная плоскость, внешняя нормаль к которой, отложенная из центра сферы Ω, идет в ω. Площадь множества $\sigma(\omega)$ есть функция $F(\omega)$ множества $\omega \subset \Omega$ — так называемая поверхностная функция поверхности S. Она неотрицательна, вполне аддитивна и определена для всех борелевских множеств ω. Обобщение проблемы Минковского состоит в нахождении необходимых и достаточных условий, при которых данная функция множества $F(\omega)$ на сфере оказывается поверхностной функцией какой-либо замкнутой выпуклой поверхности. (Необходимые условия здесь опять-таки очевидны; геометрически они сводятся к тому, что 1) векторная площадь замкнутой поверхности равна нулю и что 2) площадь ее проекции ни в каком направлении не равна нулю.) Если $F(\omega)$ есть (неопределенный) интеграл непрерывной функции $1/K(n)$, то получаем формулированную выше проблему Минковского. Если $F(\omega)$ состоит из конечного числа точечных нагрузок, то получаем соответствующую проблему для многогранников.

Решение обобщенной проблемы проще всего получается тем же путем предельного перехода от многогранников, чему соответствует приближение данной функции $F(\omega)$ функциями, состоящими из конечного числа точечных нагрузок.

Г. Минковский доказал также единственность решения своей проблемы в том смысле, что две поверхности с одной и той же функцией $K(n)$ равны и параллельно расположены. Тот же результат тем же методом получается и для обобщенной проблемы: поверхности с одной и той же поверхностной функцией переводятся друг в друга параллельным переносом [6].

Заметим еще, что все это совершенно одинаково доказывается в евклидовом пространстве любого числа измерений.

Геометрами было получено также решение краевой задачи: доказаны существование и единственность выпуклой поверхности со следующими условиями: 1) сферическое изображение поверхности покрывает какую-либо данную выпуклую область ω_0 на сфере, 2) поверхностная функция совпадает с данной в ω_0 положительной функцией множества, 3) опорная функция принимает на границе ω_0 данные значения, удовлетворяющие необходимому условию выпуклости [7, 8] [2)].

В настоящее время геометрами решен вопрос о степени регулярности выпуклой поверхности в зависимости от регулярности ее гауссовой кривизны как функции нормали (однако только для поверхности в трехмерном пространстве) [9]. Именно доказано, что если функция $K(n)$ положительна и m раз дифференцируема ($m \geq 3$), то поверхность дифференцируема по крайней мере $m+1$ раз. Если функция $K(n)$ аналитическая, то и поверхность аналитическая. Этот результат не предполагает замкнутости поверхности. В частности, он дает условия, при которых полученное Г. Минковским обоб-

[2)] В оригинале ссылка на работу [7] пропущена. — *Прим. ред.*

щенное решение достаточно регулярно и, следовательно, является решением проблемы с точки зрения классической теории поверхностей. Результат, касающийся только замкнутых поверхностей, получен в работе [10].

Следующий вопрос касается «устойчивости» решения (обобщенной) проблемы Минковского и соответствующей краевой задачи. Точнее, речь идет об оценке изменения решения в зависимости от изменения предписанной функции $K(n)$ или вообще поверхностной функции $F(\omega)$. Здесь получен следующий результат [11, 12] для сформулированной только что краевой задачи. Если две m-мерные поверхности в $(m+1)$-мерном пространстве решают эту краевую задачу для одной и той же области ω_0 с одинаковыми краевыми значениями, но с разными поверхностными функциями $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$, то для разности их опорных функций $H_1(n)$, $H_2(n)$ имеет место оценка

$$\sup_{n\in\omega_0} |H_1(n) - H_2(n)| \le C \sup_{\omega\subset\omega_0} (F_1(\omega) - F_2(\omega))^{1/m},$$

где C зависит только от m и ω_0. (К моменту сдачи настоящего доклада в печать Ю. А. Волков сообщил, что им решен также вопрос об устойчивости решения самой обобщенной проблемы Минковского для замкнутых поверхностей [3].)

§ 2. *Общая постановка задач*

На примере проблемы Минковского можно видеть, во-первых, что естественная с точки зрения геометрии постановка проблемы выступает в отношении дифференциальных уравнений как обобщенная. При этом с геометрической точки зрения на первый план выдвигаются не краевые задачи, а задачи, касающиеся замкнутых поверхностей, что отвечает рассмотрению уравнений на замкнутых многообразиях. Во-вторых, для таких естественных, соответственно обобщенных, проблем и их решений выявляются четыре задачи.

1. Существование естественного обобщенного решения. Один из естественных с точки зрения геометрии подходов к доказательству состоит в том, чтобы, поставив и решив проблему для многогранников, получить потом общую теорему существования путем предельного перехода.

2. Единственность такого естественного обобщенного решения (вообще говоря, с точностью до некоторого тривиального преобразования, как перенос в случае проблемы Минковского). Один из общих методов состоит здесь в применении принципа максимума или, как в самой проблеме Минковского, некоторых интегральных формул, специфических для данной проблемы.

---

[3] См. *Ю. А. Волков.* Устойчивость решения проблемы Минковского // Вестн. ЛГУ. 1963. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 33–43. — *Прим. ред.*

Своего рода прототип этого второго метода можно видеть в применении интеграла энергии в известных задачах математической физики.

3. Регулярность решения в зависимости от регулярности определяющих его данных (чем выясняются условия, при которых обобщенное решение оказывается классическим в смысле дифференциальных уравнений). При решении этой задачи основной момент составляет вывод априорных оценок для кривизны поверхности и затем ее высших производных. Это получается сочетанием специфических геометрических приемов с последующим применением приемов теории дифференциальных уравнений, восходящих к С. Н. Бернштейну [13].

4. Устойчивость решения, т. е. оценки изменения решения в зависимости от изменения данных задачи. При геометрическом подходе такие оценки достаточно найти для многогранников (независимо, конечно, от числа их вершин). Если такие оценки находятся независимо от ссылок на теорему единственности, то они дают, в частности, и эту теорему. Наконец, поскольку для многогранников задача сводится к конечному числу переменных и тем самым для нее могут быть легче получены эффективные методы приближенного отыскания решения, постольку такие оценки обеспечивают также приближенное отыскание решений в общем случае.

§ *3. Проблема Вейля и примыкающие к ней задачи*

Другим примером взаимодействия теории поверхностей и дифференциальных уравнений с частными производными является проблема изометрического погружения. Сущность проблемы состоит в построении поверхности с данным линейным элементом ds^2. Более подробно: пусть на двумерном аналитическом многообразии R задана положительно определенная квадратичная форма

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Задача состоит в построении поверхности Φ, которая при соответствующей параметризации (выборе системы криволинейных координат u, v) имела бы своим линейным элементом эту форму.

При условии достаточной регулярности коэффициентов формы ds^2 эта проблема сводится к рассмотрению уравнения Монжа — Ампера с коэффициентами, зависящими от коэффициентов формы ds^2 и их производных [14]. Решение проблемы «в малом» получается тривиальным применением теоремы Коши — Ковалевской. Что же касается решения «в целом», то здесь средствами дифференциальных уравнений отдельные геометрические результаты получены ценой большого труда.

В простейшем случае, когда гауссова кривизна, определенная формой ds^2, положительна и многообразие R гомеоморфно сфере, задача о погружении составляет содержание известной проблемы Вейля. Решение этой проблемы средствами дифференциальных уравнений, намеченное самим Г. Вейлем в 1916 г. [15], было завершено два десятилетия спустя в работах Г. Леви [16]. Полученный результат гласит: риманова метрика, заданная на сфере аналитическим линейным элементом ds^2 с положительной гауссовой кривизной, реализуется на замкнутой аналитической выпуклой поверхности. Таким образом, решение проблемы о погружении уже в простейшем случае при аналитической трактовке вопроса оказалось возможным благодаря значительным усилиям выдающихся математиков. Позже эти вопросы рассматривались в работе [17].

Трудности, возникшие при аналитическом решении проблемы погружения, заставили геометров искать ее решение в рамках самой геометрии. Такое решение было найдено [2]. И как следствие получил свое разрешение ряд вопросов теории дифференциальных уравнений, естественно возникающих при аналитической трактовке проблемы.

Успех решения проблемы погружения геометрическими средствами был обеспечен благодаря естественному с геометрической точки зрения расширению постановки задачи и соответственно переходу к обобщенному решению, отвечающему ее аналитическому истолкованию. Именно, проблема была поставлена для общих метрических многообразий с внутренней метрикой, удовлетворяющих условию положительности кривизны. Последнее сводится к тому, чтобы сумма углов любого треугольника, ограниченного кратчайшими, была бы не меньше π. Каждая выпуклая поверхность без каких-либо предположений о ее регулярности является в смысле ее внутренней метрики таким многообразием.

Среди многообразий с внутренней метрикой положительной кривизны в известном смысле простейшими являются многообразия с выпуклой многогранной метрикой. Геометрически проблема погружения была решена первоначально именно для них (см., например, [8]), а затем уже для общих многообразий с положительной кривизной путем приближения их многогранными и переходом к пределу.

В то время как решение проблемы Вейля для многообразий с аналитической метрикой было всего только изящным геометрическим результатом, решение этой проблемы для общих многообразий с внутренней метрикой положительной кривизны, по существу, означало полное решение проблемы погружения. В самом деле задача о погружении любого (незамкнутого) многообразия теперь сводится к тому, чтобы данное многообразие дополнить до замкнутого с соблюдением весьма общих условий, обеспечивающих положительность кривизны.

Приведем пример. Пусть в гомеоморфной кругу области G задана метрика положительной кривизны линейным элементом ds^2. Пусть геодезическая кривизна края области G в метрике ds^2 не отрицательна. Ставится задача о построении поверхности с линейным элементом ds^2. Решение просто. Из двух экземпляров области G склеивается замкнутое многообразие Ω путем отождествления соответствующих точек границ этих областей. Внутренняя метрика на гомеоморфном сфере многообразии Ω, задаваемая линейным элементом ds^2, имеет положительную кривизну в смысле данного выше определения, а поэтому реализуется замкнутой выпуклой поверхностью Φ. Поверхность Φ составлена из двух изометричных частей, каждая из которых решает поставленную задачу.

Такого рода примеров можно было бы привести очень много. В частности, так было получено решение проблемы о погружении для полных многообразий положительной кривизны и (в основных случаях) для многообразий с бесконечным краем. Что касается общего случая многообразия с краем, то вопрос сведен к задаче включения в полное многообразие; в конкретных примерах эта задача часто решается совершенно элементарно.

Полное решение проблемы погружения в основных случаях дало вместе с тем новое и притом исчерпывающее решение ряда задач для уравнения Дарбу, к которому аналитически сводится эта проблема. Приведем пример. Пусть в гомеоморфной кругу области G плоскости uv рассматривается уравнение Дарбу

$$(z_{11} - \Gamma_{11}^i z_i)(z_{22} - \Gamma_{22}^j z_j) - (z_{12} - \Gamma_{12}^k z_k)^2 = (1 - \Delta_1 z)K, \tag{1}$$

где $\Delta_1 z$ — первый дифференциальный параметр Бельтрами. Ставится вопрос об условиях разрешимости задачи Дирихле для этого уравнения при заданных граничных значениях для функции z. Эта задача эквивалентна решению вопроса о существовании поверхности с данным линейным элементом ds^2 при заданном удалении точек ее края от плоскости xy. Трудность аналитического решения задачи очевидна, а геометрическое решение очень просто и состоит в следующем.

Допустим, при заданном краевом условии задача Дирихле разрешима. Тогда существует однозначно проектирующаяся на плоскость xy поверхность с линейным элементом ds^2. Он дополняется до бесконечной полной поверхности полуцилиндром с образующими, параллельными оси z. Внутренняя геометрия этого полуцилиндра однозначно определяется граничными значениями решения, и, следовательно, не имея самого решения, мы без труда строим многообразие G', изометричное полуцилиндру.

Построим полное многообразие $\overline{G}$, отождествляя соответствующие точки границ G и G'. Если сумма геодезических кривизн границ G и G' неотрицательна, то многообразие G имеет неотрицательную кривизну и, следовательно, реализуется бесконечной выпуклой поверхностью. Если, кроме того, и геодезическая кривизна края G всюду неотрицательна и не меньше геодезической кривизны края G', то на поверхности, реализующей $\overline{G}$, многообразие G' является полуцилиндром. Отсюда следует, что указанные геометрические условия гарантируют разрешимость рассматриваемой краевой задачи для уравнения Дарбу.

В связи с обобщенной постановкой проблемы погружения для общих метрических многообразий с положительной кривизной и указанным выше обобщенным ее решением в классе общих выпуклых поверхностей, естественно, возникли две проблемы, которые на языке дифференциальных уравнений воспринимаются как проблема единственности обобщенного решения и его регулярность в зависимости от регулярности коэффициентов соответствующего уравнения. Усилиями геометров обе эти проблемы полностью решены. Наиболее общие результаты получены в работах [18–20].

Решению первой проблемы с постепенным устранением излишних ограничений посвящались ранее работы многих геометров [21–23]. Решающую роль сыграл принцип максимума, геометрическое содержание которого состоит в том, что *если две выпуклые поверхности* $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, *обращенные выпуклостью в одну сторону, находятся в изометрическом соответствии, то разность* $z_1 - z_2$, *взятая для соответствующих по изометрии точек поверхностей, достигает максимума на границе поверхностей.* Этот принцип установлен для выпуклых поверхностей, не подчиненных никаким условиям регулярности, и составляет основу доказательств почти всех основных теорем об однозначной определенности (единственности).

Проблема регулярности погружения многообразий с регулярной метрикой (регулярность обобщенных решений) была решена путем одновременного использования геометрических и аналитических средств доказательства [13, 19, 20, 24–29]. При этом существенно используются однозначная определенность для общих выпуклых поверхностей и априорные оценки для вспомогательных функций, имеющих геометрически инвариантный смысл. Полученный здесь основной результат [19, 20] допускает следующую геометрическую формулировку. *Если выпуклая поверхность имеет регулярную метрику (коэффициенты линейного элемента* ds^2 *принадлежат классу* C^n, $n \geq 2$) *и положительную гауссову кривизну, то сама поверхность регулярна (вектор-функция, задающая поверхность, принадлежит классу* $C^{n-1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$). *Если метрика поверхности аналитическая, то и поверхность аналитическая.* В этих формулировках не предполагается, что поверхность замкнутая; результат верен, так сказать, для произвольно малого куска выпуклой поверхности.

Для регулярного случая комплекс вопросов, связанных с проблемой Вейля, решен в трехмерном римановом пространстве [20, 30].

Вопрос об оценке деформации замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики был поставлен еще в 1936 г. С. Э. Кон-Фоссеном [22]. Пусть между двумя такими поверхностями S_1 и S_2 установлен гомеоморфизм $X_2 = f(X_1)$, при котором внутренние расстояния изменяются не более чем на некоторое ε, т. е. для любых пар соответственных точек X_1', $X_1'' \in S_1$, $\quad X_2'$, $X_2'' \in S_2$

$$|\rho_1(X_1', X_1'') - \rho_2(X_2', X_2'')| < \varepsilon.$$

Требуется оценить в зависимости от этого ε возможное изменение пространственных расстояний между парами соответственных точек, т. е. величину

$$\delta = \sup \left| r\left(X_1', X_1''\right) - r\left(X_2', X_2''\right) \right|.$$

Задача эта до сих пор остается нерешенной.

§ 4. *Бесконечно малые изгибания*

Исчерпывающее решение ряда вопросов теории бесконечно малых изгибаний выпуклых поверхностей также связано с рассмотрением обобщенных решений соответствующих уравнений.

Бесконечно малым изгибанием поверхности $F : r = (u, v)$ называется такая ее деформация $r = r(u, v) + t\tau(u, v)$, при которой длины кривых на поверхности в начальный момент $(t = 0)$ стационарны. Если поверхность F и изгибающее поле $\tau(u, v)$ регулярны, то исследование бесконечно малых изгибаний поверхности сводится к исследованию дифференциального уравнения $dr d\tau = 0$ или эквивалентной ему системы

$$r_u \tau_u = 0, \qquad r_u \tau_v + r_v \tau_u = 0, \qquad r_v \tau_v = 0.$$

Как видно из определения, понятие бесконечно малого изгибания не нуждается в каких-либо предположениях о регулярности изгибающего векторного поля, и всякое изгибающее поле поверхности можно рассматривать как обобщенное решение уравнения $dr d\tau = 0$ или эквивалентной ему системы. Естественно, возникают вопросы о дифференциальных свойствах такого решения и о единственности решения. Оба эти вопроса решены достаточно полно. Доказано [31], что в случае общей выпуклой поверхности, не подчиненной никаким условиям дифференцируемости, поле τ является изгибающим тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию Липшица в каждой компактной области и почти всюду удовлетворяет уравнению $dr d\tau = 0$. Если выпуклая поверхность регулярна (принадлежит классу $C^{n+\alpha}$, $n \geq 2$, $0 < \alpha < 1$) и имеет положительную гауссову кривизну, то каждое ее изгибающее поле регулярно (принадлежит классу $C^{n+\beta}$, $0 < \beta < \alpha$).

Что касается вопроса единственности, то он решается в виде геометрических теорем о жесткости.

Поверхность называется жесткой, если она не допускает никаких бесконечно малых изгибаний, помимо движений. Доказано [32], что *всякая замкнутая выпуклая поверхность является жесткой (кроме плоских областей, если таковые имеются)*, т. е. на ней всюду (кроме этих областей) изгибание заведомо сводится к движению. Стало быть, в частности, комплекс вершин замкнутого выпуклого многогранника при бесконечно малом изгибании движется как твердое целое, хотя грани при этом изгибаются.

§ 5. *Обобщенные уравнения Монжа — Ампера*

При решении различных геометрических вопросов в аналитическом истолковании мы очень часто приходим к рассмотрению уравнения Монжа — Ампера того или иного частного вида. Примерами могут служить рассмотренные проблемы Вейля и Минковского. В связи с этим геометрами была предпринята попытка подвергнуть своеобразному геометрическому исследованию уравнения Монжа — Ампера достаточно общего вида. Успех и здесь был обеспечен благодаря расширению постановки задачи и переходу к обобщенным решениям.

Дело в том, что еще до получения каких-либо результатов на этом пути были известны теоремы весьма общего содержания о существовании и единственности выпуклых многогранников. Вот одна из таких теорем [8]: *пусть $S(P)$ — неотрицательная непрерывная функция, определенная на плоских многоугольниках, равная нулю, когда многоугольник вырождается, и стремящаяся к бесконечности, когда многоугольник неограниченно растет, монотонно возрастающая в том смысле, что если $P \subset Q$, то $S(P) \leq S(Q)$; теоремой утверждается существование и единственность бесконечного многогранника с данными плоскостями бесконечных граней, данными направлениями конечных граней и данными значениями функции S на конечных гранях.*

Если положение плоскости многоугольника P

$$z = px + qy + \zeta$$

характеризовать коэффициентами p, q, ζ в ее уравнении, то в качестве функции $S(P)$ можно взять, например,

$$S(P) = \iint f(p, q, \zeta, x, y)\, dxdy,$$

где f — любая непрерывная положительная функция, а интегрирование выполняется по площади проекции многоугольника на плоскости xy. Нетрудно видеть, что определенная таким образом функция $S(P)$, которую естественно назвать условной площадью, удовлетворяет всем перечисленным в теореме условиям. Предельным переходом в указанной геометрической теореме при неограниченном увеличении числа граней получается теорема о существовании общей выпуклости поверхности, удовлетворяющей уравнению вида

$$\iint\limits_{G} f(p,q,\zeta,x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\omega(G)} \lambda(p,q)\,dpdq, \tag{1}$$

где слева интегрирование производится по любой области G, а справа — по множеству угловых коэффициентов p, q опорных плоскостей в тех точках поверхности, которые проектируются в область G.

Если поверхность, существование которой устанавливается этой теоремой, регулярна (дважды дифференцируема), то уравнение (1) сводится к дифференциальному уравнению для функции $\zeta(p,q)$, задающей поверхность в тангенциальных координатах,

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial p\partial q}\right)^2 = \frac{f}{\lambda}.$$

В общем случае указанная геометрическая теорема дает обобщенное решение этого уравнения. В обычных обозначениях, когда независимые переменные обозначаются x, y, это уравнение записывается, конечно, в виде

$$rt - s^2 = \varphi(x,y,z,p,q). \tag{2}$$

Изложенный геометрический подход к этому уравнению можно заменить двойственным, в смысле геометрического принципа двойственности, когда плоскостям сопоставляются точки, и обратно. Соответственно вместо условных площадей граней многогранника появляются условные кривизны вершин (угловые меры многогранных углов, заполняемых нормалями к опорным плоскостям в вершинах). Здесь также имелись геометрические теоремы, пересказ которых в терминах дифференциальных уравнений дал подход к получению обобщенных решений уравнения (2).

Исходя из самого этого уравнения, указанную его геометрическую трактовку можно получить следующим путем. Уравнение удобно представить в форме

$$f(x,y,z,p,q)(rt - s^2) = h(x,y). \tag{3}$$

Выгода такой записи видна из следующего примера. Нахождение поверхности $z = z(x,y)$ с данной как функции x, y гауссовой кривизной $K(x,y)$ приводит к уравнению (3) с $f = (1+p^2+q^2)^{-2}$ и $h = K(x,y)$.

Интегрируя (3) по dx, dy и замечая, что $rt - s^2$ есть якобиан $\frac{D(p,q)}{D(x,y)}$, мы получаем

$$\iint\limits_{\psi(G)} f(x,y,z,p,q)\,dpdq = \iint\limits_{G} h(x,y)\,dxdy. \tag{4}$$

Здесь $\psi(M)$ есть «нормальное изображение» множества M посредством функции $z(x,y)$, т. е. множество точек с координатами $p = z_x(x,y)$, $q = z_y(x,y)$ для $(x,y) \in M$.

Если $z(x,y)$ есть общая выпуклая функция, то нормальное изображение множества M посредством функции z определяется как множество точек, координаты которых суть коэффициенты в уравнении опорной плоскости к поверхности $z = z(x,y)$ в точках, лежащих над множеством M. Для общей выпуклой функции $z(x,y)$ стоящий в (4) слева интеграл также определен, так как по известному свойству выпуклых поверхностей x, y, z как функции p, q однозначны почти везде. Таким образом, для данной функции $z(x,y)$ этот интеграл есть некоторая вполне аддитивная функция множества —- «условная кривизна», или «условная площадь нормального изображения» с весовой функцией f. (Вследствие очевидной связи между нормальным и сферическим изображениями оба понятия равносильны, но с аналитической точки зрения удобнее пользоваться нормальным изображением.) Обозначая эту функцию через $\omega_f(M;z)$ и вводя вместо стоящего в (4) справа интеграла произвольную вполне аддитивную функцию множества $\nu(M)$, мы получаем вместо (4) уравнение

$$\omega_f(M;z) = \nu(M), \tag{5}$$

обобщающее уравнение Монжа — Ампера (3).

Это уравнение рассматривается в предположении, что весовая функция f и функция ν неотрицательны, а решения ищутся среди общих выпуклых функций.

Совершенно так же обобщается уравнение для n переменных

$$f(x_i, z, z_i)\,\mathrm{Det}\,\|z_{ij}\| = h(x_i), \tag{6}$$

где

$$z_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad z_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (i,j = 1,\ldots,n).$$

Точно так же изложенный выше подход с понятием условной площади буквально переносится на случай любого числа переменных. Соответственно геометрические теоремы о существовании многогранников с данными условными площадями граней или с данными условными кривизнами вершин дают при предельном переходе теоремы о существовании решений уравнения (5) для n переменных. Сформулируем общую получающуюся здесь теорему.

Пусть G — ограниченная выпуклая область изменения переменных x, y (мы ограничиваемся двумя переменными только для простоты записи). Пусть весовая функция f непрерывна и существует такая функция $f_0(p,q) > 0$, что при всех $(x,y) \in G$ и при всех z верно неравенство $f(x,y,z,p,q) \geq f_0(p,q)$. Тогда для всякой заданной в G неотрицательной функции $\nu(M)$, такой что

$$\nu(G) < \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(p,q)\, dpdq \tag{7}$$

при любой функции φ, заданной на границе Γ области G, существует определенная на G выпуклая функция $z(x,y)$ (обращенная выпуклостью вниз), которая

1) удовлетворяет уравнению (5) и

2) в каждой точке границы отклоняется от функции φ вниз (т. е. в область меньших значений) не больше, чем всякое другое выпуклое решение уравнения (5).

Если f не зависит от x, y и не возрастает по z, то такое решение единственно (если же f зависит от x, y, то вопрос о единственности остается пока открытым).

То, что для существования какого бы то ни было решения необходимо ограничение на $\nu(G)$, очевидно, так как $\nu(G)$ не может превосходить $\sup \omega_f(G;z)$, где точная верхняя граница берется по всем выпуклым функциям z. Если f зависит только от p, q, то это сводится к тому, что

$$\nu(G) \leq \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(p,q)\, dpdq.$$

Кстати, мы видим, что при f, зависящей только от p, q, достаточное условие (7) почти совпадает с этим необходимым.

Простые примеры показывают, что решение, существование которого утверждает высказанная теорема, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям, хотя бы они и были регулярными. Иначе говоря, для обеспечения разрешимости задачи Дирихле нужны дополнительные условия. Такими условиями служат, в частности, ограничения на порядок роста функции f^{-1} по p, q при $p, q \to \infty$. Так, в случае именно двух переменных можно утверждать, что задача Дирихле заведомо разрешима, если область строго выпукла и f^{-1} имеет порядок роста не выше чем $p^2 + q^2$.

Устойчивость решения уравнения (5) устанавливается при условии, что f зависит только от производных и дается следующей теоремой. *Если z', z''*

совпадают на границе области G и удовлетворяют уравнению (5) с правыми частями ν_1, ν_2, то

$$|z' - z''| \le \frac{C}{m} \sup_{M \subset G} |\nu_1(M) - \nu_2(M)|^{1/n},$$

где C зависит только от G и числа переменных n, а $m = \inf f(z_1, \dots, z_n)$.

В случае двух переменных наглядное геометрическое представление обобщенного решения уравнения (2) позволяет естественно подойти к установлению априорных оценок путем использования имеющих четкий геометрический смысл вспомогательных функций и таким образом выяснить степень гладкости решения в зависимости от гладкости данных задачи (функции $\varphi(x, y, z, p, q)$). Так, *для уравнения (2) доказано, что всякое обобщенное решение дифференцируемо по крайней мере $k+1$ раз, если функция φ дифференцируема k раз ($k \ge 3$). Если же функция φ аналитическая, то и решение аналитическое.* В случае n переменных вопрос о регулярности обобщенного решения остается открытым.

Решение уравнения (2) при достаточно общих предположениях позволило средствами функционального анализа перенести полученные результаты и на более общее уравнение Монжа — Ампера

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi \tag{8}$$

в случае положительной определенности формы $a\zeta^2 + 2b\zeta\eta + c\eta^2$.

В частности, *доказаны единственность решения задачи Дирихле в предположении неубывания формы $a\zeta^2 + 2b\zeta\eta + c\eta^2$ и функции φ по z, разрешимость задачи Дирихле при условии ограниченности роста коэффициентов уравнения по переменным p, q*

$$a, |b|, c < K(p^2 + p^2)^{1/2-\varepsilon}, \qquad \varphi < N(p^2 + q^2)$$

и регулярность обобщенного решения при достаточной регулярности коэффициентов уравнения, положительной определенности формы $a\zeta^2 + 2b\zeta\eta + c\eta^2$ и выпуклости функции φ по переменным p, q.

Геометрические исследования обобщенных решений уравнения Монжа — Ампера и условий регулярности таких решений развиты соответственно в работах [8, 9, 11–13, 33–41].

§ 6. *Теоремы единственности и оценки решений*

Геометрические соображения, исходящие из некоторых понятий теории выпуклых поверхностей, позволяют получить весьма общие теоремы типа принципа максимума и теоремы единственности для дифференциальных уравнений эллиптического (и параболического) типа, а применение этих теорем дает, в свою очередь, богатые результаты, касающиеся единственности поверхностей с теми или иными данными, связанными с кривизной.

Указанные соображения связаны прежде всего с рассмотрением выпуклых функций, «натягиваемых на решения уравнения», а также нормального изображения, определяемого этими функциями, согласно сказанному в § 5. Под выпуклой функцией $\overline{u}(x)$, натянутой на $u(x)$ снизу над областью G, понимается наибольшая из выпуклых функций $v(x)$, таких что в G всюду $v(x) \leq u(x)$ (соответственно определяется выпуклая — на этот раз выпуклостью вверх — функция, натянутая на $u(x)$ сверху). Геометрически речь идет о нижней (верхней) поверхности выпуклой оболочки множества точек, представляющего функцию $u(x)$ в прямоугольных координатах. Рассмотрение же нормального изображения равносильно рассмотрению сферического изображения этих поверхностей.

Вот несколько простейших результатов, получаемых таким путем.

Рассмотрим в области G изменения n переменных x_i линейный оператор

$$L(u) \equiv \sum a_{ik}u_{ik} + \sum b_iu_i + cu, \tag{1}$$

предполагая, что матрица $\|a_{ik}\|$ нигде не имеет отрицательных собственных значений. Производные u_{ik}, u_i понимаются в обобщенном смысле по С. Л. Соболеву, причем предполагается, что вторые производные суммируемы с n-й степенью во всякой области D, содержащейся в G вместе с замыканием. Дальше под D разумеется любая такая область.

Если почти везде $a = \operatorname{Det}\|a_{ik}\| > 0$, то, деля (1) на $\sqrt[n]{a}$, получим оператор, в котором почти везде $\operatorname{Det}\|a_{ik}\| = 1$. Это мы и будем предполагать выполненным.

Тогда имеет место следующий принцип максимума.

Если все коэффициенты суммируемы с n-й степенью во всякой области D, то из того, что всюду в G $u \geq 0$, $L(u) \leq 0$ и хотя бы где-то $u = 0$, следует $u \equiv 0$ в G.

Если же исключить требование суммируемости n-х степеней коэффициентов a_{ik}, то — при остальных тех же условиях — множество нулей функции $u(x)$ заведомо имеет точки сгущения на границе области. Отсюда, как известно, сразу вытекает единственность решения задачи Дирихле для уравнения $L(u) = f$, если $c \leq 0$.

Примеры показывают, что эти результаты не могут быть усилены так, чтобы требовать суммируемости коэффициентов с какой бы то ни было степенью, меньшей n, или суммируемости вторых производных также с какой-либо степенью, меньшей n. Таким образом, тут содержатся в известном смысле минимальные условия для принципа максимума и единственности решения задачи Дирихле при $c \leq 0$.

Для рассмотрения общего случая, когда допускается $c > 0$, введем функцию $c_+ = c$ при $c > 0$ и $c_+ = 0$ при $c \leq 0$. Введем такие обозначения:

$$b = \sqrt{\sum b_i^2}, \qquad B = \int\limits_G b^n dx, \qquad C = \int\limits_G c_+^n dx, \qquad F = \int\limits_G |f|^n dx.$$

Для единственности решения задачи Дирихле достаточно, чтобы C не превосходило некоторой (явно выражаемой) положительной убывающей функции от B и размеров выпуклой оболочки области G. В частности, если $B = 0$, то достаточно, чтобы

$$C \leq n^n \chi_n^2 V^{-1},$$

где χ_n — объем n-мерного шара и V — объем эллипсоида, содержащего G. Здесь, очевидно, содержится оценка снизу для первого собственного значения уравнения $L(u) + \lambda u = 0$.

Отклонение h решения уравнения $L(u) = f$ от значений на границе может быть явно оценено в зависимости от величин B, C, F и размеров выпуклой оболочки G, а также максимума и минимума на границе. В простейшем случае, когда $B = C = 0$,

$$h^n \leq n^{-n} \chi_n^{-2} V F,$$

где χ_n и V имеют тот же смысл, что в предыдущем неравенстве.

Подобные результаты получаются и для таких уравнений, в которых матрица $\|a_{ik}\|$ вырождается, но некоторый ее главный минор остается положительным.

Изложенные в § 6 результаты содержатся в работах [36, 42–45]. К этому примыкают результаты для квазилинейных уравнений [46, 47].

§ 7. *Некоторые проблемы*

1. Подход к обобщенному уравнению Монжа — Ампера, изложенный в § 5, может быть представлен следующим образом.

Получение решения из приближения многогранниками сводится, собственно, к тому, что в правой части уравнения (5) § 5 мы берем сначала функцию $\nu(M)$, состоящую из конечного числа точечных нагрузок. Решение тогда представляется многогранником. Далее приближаем общую функцию множества такими функциями из конечного числа точечных нагрузок и переходим к переделу.

В этом есть аналогия с решением уравнения Пуассона. Решение с одной точечной нагрузкой, представляющее собой выпуклый конус, аналогично фундаментальному решению уравнения Пуассона, в правой части которого стоит δ-функция, или, если понимать уравнение в терминах функций множества, функция из одной точечной нагрузки.

Известное получение решения уравнения Пуассона с помощью функции Грина сводится к тому, что берется решение, соответствующее конечному числу точечных нагрузок, и затем производится переход к пределу.

Уравнение (6) § 5, из которого получается уравнение (5) § 5, содержит вторые производные в виде определителя матрицы $\|z_{ij}\|$, а уравнение Пуассона — в виде ее следа. Помимо этих двух инвариантов, матрица вторых производных имеет и другие: суммы главных миноров одного порядка.

Можно ожидать, что теория уравнения Пуассона и теория обобщенного уравнения Монжа — Ампера являются крайними случаями общей теории уравнений, в левых частях которых стоят указанные инварианты или обобщающие их функции множества. Продвижение в такой теории представлялось бы нам чрезвычайно интересной задачей.

Такие уравнения имеют простой геометрический смысл. Именно, пусть S есть n-мерная поверхность в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве с взаимно-однозначным сферическим изображением. Пусть $H(u) \equiv H(u_1, \ldots, u_{n+1})$ — ее опорная функция, т. е. правая часть уравнения касательной плоскости

$$u_1 x_1 + \ldots + u_{n+1} x_{n+1} = H(u),$$

где нормальный вектор u не предполагается единичным. Тогда, как известно, элементарно-симметрическая функция m-й степени от главных радиусов кривизны R_i поверхности S, т. е. ее m-я функция кривизны, как раз равна сумме главных миноров m-го порядка матрицы вторых производных H_{ij}. Стало быть, уравнения, о которых идет речь, связаны с задачей определения поверхности по ее функциям кривизны. Проблема Минковского есть частный случай этой задачи, относящейся к функции $R_1 \ldots R_n$.

Уже давно функции кривизны были обобщены на любые выпуклые поверхности в виде функций множества (нормалей к опорным плоскостям) и доказана теорема о единственности — с точностью до переноса — замкнутой выпуклой поверхности с данной такой функцией кривизны [48]. Вопрос существования решен для крайних случаев: функций $R_1 \ldots R_n$ (проблема Минковского) и $R_1 + \ldots + R_n$. Это как раз соответствует двум крайним случаям: определителю из вторых производных и сумме $\sum H_{ii}$. (По сказанному выше $R_1 \ldots R_n$ равна сумме миноров n-го порядка матрицы $\|H_{ij}\|$ и поэтому не сводится прямо к определителю. Но так как функция $H(u)$ однородна, то она легко сводится к функции только n переменных. При подходящем их выборе $R_1 \ldots R_n$ будет, во всяком случае с точностью до множителя, не зависящего от вторых производных, равна определителю из этих производных.)

Словом, вопрос об уравнениях с инвариантами матрицы вторых производных естественно возник в геометрии и здесь геометрами были сделаны некоторые шаги.

2. В теории самого уравнения (5) § 5, особенно в случае более двух переменных, остается нерешенным ряд важных вопросов.

1) Вопрос о возможно более близких к необходимым достаточных условиях разрешимости задачи Дирихле.

2) Вопрос об условиях единственности решения и тем более об его устойчивости, если весовая функция зависит не только от z, z_i, но и от координат x_i.

3) Вопрос об условиях, обеспечивающих регулярность решения. Тут в случае более двух переменных нам ничего не известно (если не говорить о теоремах, в которых решение уже предполагается регулярным и доказывается еще бóльшая его регулярность в зависимости от регулярности функций f, h).

Впрочем, в случае двух переменных тоже остается невыясненным самый естественный вопрос регулярности: каковы минимальные условия, обеспечивающие двукратную дифференцируемость решения, т. е. минимум того, что позволяет понимать решение в классическом смысле (двукратная дифференцируемость почти везде обеспечивается просто тем, что этим свойством вообще обладает любая выпуклая функция любого числа переменных).

В случае более двух переменных полезно получить самое первое — условие хотя бы однократной дифференцируемости решения. В случае двух переменных для этого достаточно, чтобы функция $\nu(M)$ была бы интегралом функции точки.

4) В случае более двух переменных интересно перейти к уравнениям, содержащим не только $\operatorname{Det}\|z_{ij}\|$, но и другие зависящие от вторых производных члены, например линейные, как в уравнении (8) § 5.

3. Из геометрических соображений представляет интерес рассмотреть уравнения вида (6) § 5, понимая под z_{ij} ковариантные производные в некоторой римановой метрике. В частности, уравнение Дарбу (1) § 3 есть как раз уравнение такого вида.

4. Мы уже имели случай указать, что с геометрической точки зрения часто бывает более интересным и естественным рассматривать уравнение на замкнутых многообразиях, соответственно задачам, касающимся замкнутых поверхностей. Все рассмотренные выше задачи, начиная от проблем Минковского, особенно исследовались именно для замкнутых поверхностей. Рассмотренный в § 5 подход к обобщенному уравнению Монжа — Ампера тоже начинался с задач, касающихся замкнутых поверхностей; говоря аналитически, рассматривались некоторые уравнения типа Монжа — Ампера на сфере, обобщенные в терминах функций множества.

Некоторые геометрические вопросы, приводящие к уравнениям на замкнутых многообразиях, остаются нерешенными до конца, несмотря на достаточно долгие усилия. Так, до сих пор не выяснено, будет ли замкнутая поверхность постоянной кривизны непременно сферой, независимо от предварительных предположений о ее топологической структуре или расположении в пространстве. Вопрос решен, если предполагать заранее, что она гомеоморфна сфере или что она есть граница области в пространстве, или даже что она получается как образ границы какой-либо области при непрерывном отображении этой области. Можно предполагать еще меньше, но без всяких предположений такого рода вопрос остается нерешенным. А между тем он сводится к рассмотрению сравнительно простого уравнения на замкнутой поверхности.

Другой вопрос, к которому приводят многочисленные теоремы единственности для замкнутых выпуклых поверхностей в трехмерном пространстве, может быть в терминах дифференциальных уравнений сформулирован следующим образом.

Рассмотрим такое эллиптическое дифференциальное уравнение на сфере, которое в каждой точке приводится к виду

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

если декартовы оси x, y располагаются в касательной плоскости к этой точке. Если коэффициенты ограничены, а функция u предполагается регулярной, то решениями могут быть только $u = an$, где a — постоянный вектор; n — вектор из центра в точку сферы. Вопрос состоит в том, будет ли верно то же самое без ограниченности коэффициентов? Сильный принцип максимума, сформулированный в § 6, позволяет ответить утвердительно, если отношение собственных значений формы $a_{11}\zeta^2 + 2a_{12}\zeta\eta + a_{22}\eta^2$ суммируемо. При этом достаточно требовать, чтобы функция u имела обобщенные вторые производные, суммируемые с квадратом. Но не будет ли то же верно без всяких ограничений, кроме $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$? Уже давно доказано, что это так, если функция u предполагается аналитической. Но при сколько-нибудь меньших условиях регулярности вопрос остается открытым. Как указано в § 6, в упомянутом принципе максимума нельзя ослабить требование на коэффициенты. Поэтому принцип максимума здесь заведомо недостаточен. Но может быть, есть какие-то существенно глобальные основания для решения стоящего вопроса.

Тем более интересно рассмотреть обобщение этой задачи в терминах функций множества. Это не кажется невозможным, потому что давно известна теорема единственности для многогранников [49], аналогичная теорема единственности для регулярных поверхностей, которая равносильна рассматриваемой проблеме. Заметим еще, что, как показывают простые примеры, теорема заведомо не обобщается на случай более чем двумерной сферы, даже если функция u аналитическая.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. Bd 57. S. 447–495.
2. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
3. *Lewy H.* On differential geometry in the large. I (Minkowski's problem) // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. V. 43, No. 2. P. 258–270.
4. *Miranda C.* Su un problema di Minkowski // Rend. Sem. Mat. Roma. IV. Ser. 3. 1939. P. 96–108.
5. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Иностр. лит., 1957.
6. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. III: Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела // Мат. сб. 1938. Т. 3, вып. 1. С. 27–44.
7. *Fenchel W., Jessen B.* Mengenfunktionen und konvexe Körper // Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 1938. V. 16, No. 3. P. 1–31.
8. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
9. *Погорелов А. В.* Регулярность выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной // Мат. сб. 1952. Т. 31, № 1. С. 88–103.
10. *Nirenberg L.* The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large // Comm. Pure Appl. Math. 1953. V. 6. P. 337–394.
11. *Волков Ю. А.* Оценка изменения решения уравнения вида $f(z_1, \ldots, z_n) \det \|z_{ij}\| = h(x_1, \ldots, x_n)$ в зависимости от изменения правой части // Вестн. ЛГУ. 1960. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 5–14.
12. *Бакельман И. Я.* Об устойчивости решений уравнений Монжа — Ампера // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 1. С. 163–170.
13. *Бернштейн С. Н.* Собр. соч. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
14. *Darboux G.* Theorie des surfaces. T. 3. Paris: Gauthier-Villars, 1894.
15. *Weyl H.* Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch die ihr Linienelement // Vierteiljahresschrift der naturforschenden Gesellschaft. Zürich, 1916. Bd 61.
16. *Lewy H.* On the existence of a closed convex surface realizing a given Riemannian metric // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1938. V. 24, No. 2. P. 104–106.
17. *Caccioppoli R.* Ovaloidi di metrica assegnata // Comment. Pontificia Acad. Sci. 1940. T. 4. P. 1–20.
18. *Погорелов А. В.* Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Киев: Изд. АН УССР, 1952.
19. *Погорелов А. В.* Изгибание выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
20. *Погорелов А. В.* Некоторые результаты по геометрии в целом. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1961.
21. *Rellich F.* Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge — Ampereschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen // Math. Ann. 1932. Bd 107. S. 505–513.
22. *Кон-Фоссен С. Э.* Изгибание поверхностей «в целом» // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 1. С. 33–76.
23. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформации поверхностей // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, вып. 2. С. 47–158.
24. *Александров А. Д.* Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной // Докл. АН СССР. 1942. Т. 36, № 7. С. 211–216.
25. *Schauder J.* Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung // Math. Z. 1934. Bd 38. S. 257–282.

26. *Schauder J.* Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen // Studia Math. 1934. Bd 5. S. 34–42.
27. *Heinz E.* Neue a-priori-Abschätzungen für den Ortsvektor einer Fläche positiver Gauıscher Krümmung durch ihr Linienelement // Math. Z. 1960. Bd 74. S. 129–157.
28. *Heinz E.* Über die Differentialungleichung $a < \alpha \leq rt - s^2 \leq \beta < \infty$ // Math. Z. 1959. Bd 72. S. 107–126.
29. *Wintner A.* On Weyl's imbedding problem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. V. 42, No. 3. P. 157–160.
30. *Погорелов А. В.* Некоторые вопросы геометрии «в целом» в римановом пространстве. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1956.
31. *Александров А. Д.* О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей // Мат. сб. 1936. Т. 1, № 3. С. 307–321.
32. *Погорелов А. В.* Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1959.
33. *Александров А. Д.* Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной // Докл. АН СССР. 1942. Т. 35, № 5. С. 143–147.
34. *Бакельман И. Я.* Обобщенные решения уравнений Монжа — Ампера // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 6. С. 1143–1145.
35. *Бакельман И. Я.* К теории уравнений Монжа — Ампера // Вестн. ЛГУ. 1957. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 25–38.
36. *Александров А. Д.* Задача Дирихле для уравнения $\mathrm{Det}\,\|z_{ij}\|=\varphi(z_1,\ldots,z_n,z,x_1,\ldots,x_n)$. I // Вестн. ЛГУ. 1958. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–24.
37. *Бакельман И. Я.* Задача Дирихле для уравнений типа Монжа — Ампера и их n-мерных аналогов // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 5. С. 923–926.
38. *Погорелов А. В.* Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1960.
39. *Hartman P., Wintner A.* On elliptic Monge — Ampére equations // Amer. J. Math. 1953. V. 75, No 3. P. 611–620.
40. *Бакельман И. Я.* Регулярность решений уравнений Монжа — Ампера // Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. Герцена. 1958. Т. 166. С. 143–184.
41. *Бакельман И. Я.* Априорные оценки и регулярность обобщенных решений уравнений Монжа — Ампера // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 5. С. 719–722.
42. *Александров А. Д.* Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I // Вестн. ЛГУ. 1956. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–17.
43. *Александров А. Д.* То же. II // Там же. 1957. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 15–44.
44. *Александров А. Д.* Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 5. С. 1001–1004.
45. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. VI // Изв. вузов. Математика. 1961. № 1. С. 3–20.
46. *Бакельман И. Я.* Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 5. С. 1005–1008.
47. *Бакельман И. Я.* К теории квазилинейных эллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 2. С. 179–186.
48. *Александров А. Д.* Новые неравенства для смешанных объемов выпуклых тел // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 4. С. 155–157.
49. *Александров А. Д.* Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей // Докл. АН СССР. 1938. Т. 19, № 4. С. 233–236.

Мажорирование решений линейных уравнений второго порядка

Вестн. ЛГУ. 1966. № 1. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 1. С. 5–25

§ 1. Введение

1.1. Речь идет о построении функций, мажорирующих решения первой краевой задачи для линейных уравнений

$$a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + cu = f \tag{1.1}$$

с n переменными $x^1, \ldots, x^n$. Уравнения предполагаются эллиптическими с возможным вырождением, т. е. $a^{ij}\xi_i\xi_j \geq 0$.

Получаемые результаты представляют собой непосредственное приложение общего метода мажорирования решений уравнения второго порядка, изложенного в [1]. Одновременно они существенно усиливают результаты, полученные ранее в [2]. Условия, при которых рассматривается поставленная задача, собственно, те же, что в [1, 2]. Но мы их повторим здесь, чтобы избежать ссылок при формулировках определений и теорем.

Всюду дальше n — число переменных, любое ≥ 1. Переменные x^i интерпретируются как прямоугольные координаты в n-мерном евклидовом пространстве E_n; x обозначает точку $(x^1, \ldots, x^n)$ или вектор, проведенный в нее из начала; G — область, где задано уравнение (1.1); Γ — границу G. Область будем предполагать конечной. Обобщение на бесконечные области будет дано в § 5.

Производные $u_i = u_{x^i}$, $u_{ij} = u_{x^i x^j}$ могут пониматься как аппроксимативные, что включает и обычные, и обобщенные производные. Если явно не оговорено иное, во всех связанных с ними соотношениях допускается пренебрежение множеством меры нуль. Соответственно функция u считается удовлетворяющей уравнению (1.1), если для ее аппроксимативных производных почти везде в G выполнено равенство (1.1) [1)].

[1)] Для наших целей достаточно даже предполагать, что (1.1) выполняется лишь в почти всех точках выпуклости и вогнутости u.

Помимо этого условия от рассматриваемых далее решений требуется, чтобы они были ограниченными и непрерывными в G и имели абсолютно непрерывное опорное изображение. Согласно [1], это последнее условие можно выразить следующим образом. Мы говорим, что x_0 есть точка выпуклости (вогнутости) функции u, если существует такая линейная функция $l = p_i x^i + q$, что всюду в $G \quad l(x) \le u(x)$ (соответственно $l(x) \ge u(x)$) и $l(x_0) = u(x_0)$. Такой функции l, «опорной» к u снизу (сверху) в точке x_0, мы сопоставляем точку $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Нижним (верхним) опорным изображением $\psi_u(M) \quad (\overline{\psi}_u(M))$ множества $M \subset G$ называется множество всех точек p, отвечающих всем функциям l, опорным к u снизу (сверху) в точках $x \in M$. Не исключено, конечно, что $\psi(M)$ пусто. Мы говорим, что опорное изображение абсолютно непрерывно, если при $\operatorname{mes} M = 0$ также $\operatorname{mes}\psi(M) = \operatorname{mes}\overline{\psi}(M) = 0$. (Так как $\psi(M)$, $\operatorname{mes}\overline{\psi}(M)$ суть вполне аддитивные функции множества M, то сказанное равносильно их абсолютной непрерывности.)

Этому условию абсолютной непрерывности опорного изображения удовлетворяют, в частности, функции следующих классов:

I. Непрерывные функции, имеющие обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью во всякой замкнутой области $D \subset G$ [2)].

II. Функции всюду в G дифференцируемые и такие, что для всякой $x \in G$, за исключением, может быть, счетного множества,

$$\limsup_{x' \to x} \frac{|u(x) - u(x') - (x - x')\nabla u(x)|}{|x - x'|^2} < \infty. \tag{1.2}$$

Это последний класс включает указанный в [2] класс II^0 функций всюду дифференцируемых и таких, что для всякой $x \in G$, кроме, может быть, счетного множества,

$$\limsup_{x' \to x} \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(x')|}{|x - x'|} < \infty. \tag{1.3}$$

Доказательство того, что функции класса I удовлетворяют упомянутому условию, дано в [5]. Доказательство для класса II не отличается от доказательства для класса II^0, данного в [2].

[2)] Более общими можно рассматривать такие непрерывные функции u, для каждой из которых существует такое счетное замкнутое в G множество F, что 1) u имеет в $G \setminus F$ обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью во всякой замкнутой области $D \subset G \setminus F$ и 2) в каждой точке $x \in F$ u дифференцируема хотя бы в одном направлении. Возможность исключить множество F основана на том, что его опорное изображение заведомо меры нуль. О значении такого обобщения см. конец работы [6].

1.2. Основные получаемые нами результаты сводятся в простейшем случае к следующему.

Пусть Ω — единичная сфера с центром в начале координат; ν — точка на Ω, или соответствующий единичный вектор; $h(x,\nu)$ — расстояние от точки $x \in G$ до опорной плоскости к $G \cup \Gamma$ с внешней нормалью ν; $\varkappa_n$ — площадь Ω; $\tau_n = n^{-1}\varkappa_n$ — объем единичного шара.

Введем функции $h_k(x)$, представляющие собой следующие средние значения расстояний $h(x,\nu)$:

$$h_0(x) = \exp \frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{\Omega} \ln h(x,\nu) d\nu, \qquad h_k(x) = \left[\frac{1}{\varkappa_n} \int\limits_{\Omega} h^{-k}(x,\nu) d\nu \right]^{-1/k}. \tag{1.4}$$

Между прочим, так как опорные плоскости у $G \cup \Gamma$ те же, что у ее выпуклой оболочки G^*, то функции h_k можно считать определенными на G^*. При $n = 1$ $h(x,\nu)$ принимает два значения (они суть расстояния от x до концов отрезка, к которому сводится в этом случае область G); интегралы (1.4) сводятся к соответствующим суммам, $\varkappa_1 = 2$. Функции h_k были введены в [1] и там же были указаны некоторые их свойства.

Пусть в уравнении (1.1) почти везде $a = \det(a^{ij}) > 0$. Тогда, разделив на $a^{1/n}$, мы получим уравнение, в котором $a = \det(a^{ij}) = 1$.

Положим при этом условии

$$\|b\| = \left\| \sqrt{\sum (b^i)^2} \right\|_{L_n(G)}, \quad \|f\| = \|f\|_{L_n(G)}, \quad \|c_+u\| = \|c_+u\|_{L_n(G)}, \tag{1.5}$$

где знаком плюс обозначается положительная часть функции.

Мы докажем теорему, простейший частный случай которой можно формулировать следующим образом.

Теорема А. *Пусть в уравнении (1.1)* $\det(a^{ij}) = 1$. *Тогда для его решения* $u \not\equiv 0$ *с граничным условием* $u|_\Gamma = 0$[3] *выполняется неравенство*

$$|u(x)| < n^{-1}\tau_n^{-1/n}(\|f\| + \|c_+u\|)F_n(\|b\|)h_0(x), \tag{1.6}$$

где F_n *есть*

$$F_n(\xi) = \exp\left(\frac{\xi^n}{n^n \varkappa_n} + \varphi_n(\xi) \right), \tag{1.7}$$

причем φ_n *ограничена,* $\varphi_n(0) = 0$, *а, в частности,* $\varphi_1 \equiv 0$, *так что* $F_1(\xi) = \exp(\xi/2)$.

[3] Здесь и всюду дальше это условие подразумевает, что u непрерывно в $G \cup \Gamma$.

Отсюда, как будет показано в § 2, легко выводится, что если при тех же условиях для норм в $L_n(G)$ верны неравенства

$$\|c_+h_0\|F_n(\|b\|) < n\tau_n^{1/n}, \qquad \|c_+\| < \infty, \tag{1.8}$$

то

$$|u(x)| < \frac{\|f\|h_0(x)}{n\tau_n^{1/n}F_n^{-1}(\|b\|) - \|c_+h_0\|}. \tag{1.9}$$

Если $c_+ = 0$, т. е. $c \le 0$, то (1.6) и (1.9) совпадают. Неравенства (1.8) представляют собой достаточное условие несуществования ненулевого решения однородного уравнения с условием $u|_\Gamma = 0$. (Второе неравенство (1.8) следует из первого не для всякого G, потому что h_0 может обращаться в нуль в некоторых точках Γ.)

Главное в формулированных результатах состоит в том, что неравенства (1.6), (1.9) дают не просто оценку $\max|u|$, как это обычно делается (см., например, [2–4] и работы, цитируемые в [3]). Оценки даются здесь для возможного значения $|u(x)|$ в любой данной точке области [4]. Иначе говоря, правые части (1.6), (1.9) представляют собой функции, мажорирующие решение любого уравнения (1.1) с $\det(a^{ij}) = 1$ при $u_\Gamma = 0$.

Более того, полученные мажоранты оказываются точными для выпуклых областей. Например, для (1.9) это означает, в частности, следующее. Для всякой выпуклой области G, при всяких данных H, $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in G$, можно указать такое уравнение (1.1) в G с $\det(a^{ij}) = 1$ и условием (1.8), что, во-первых, множитель при $h_0(x)$ в (1.9) оказывается равным данному H, а во-вторых, уравнение имеет такое решение с $u_\Gamma = 0$, что его значение в точке x_0 отличается от правой части (1.9) меньше, чем на ε.

Однако это утверждение о точности получаемых нами мажорант мы докажем в другой статье.

Отметим, что неравенство (1.6) не предполагает единственности решения; в частности, оно применимо к ненулевому решению однородной задачи. Достаточно положить $\|f\| = 0$. Тогда (1.6) означает, в частности, что отношение $|u(x)|/h_0(x)$ не может иметь слишком острого максимума. Если $|u|$ мало́ на значительной части области, то из (1.6) следует, что $|u|/h_0$ мало́ при всех x. С другой стороны, максимум отношения $|u|/h_0$ может быть тем более острым, чем больше c_+. Это замечание можно сопоставить с известной теоремой о колебании собственных функций.

1.3. Несмотря на то, что оценки (1.6), (1.9) являются точными в указанном выше смысле, они страдают существенным недостатком. Входящая в

[4] Между прочим, в практических задачах нередко требуются именно такие оценки, на что обратил мое внимание С. В. Валландер. Вопрос о таких оценках для уравнений с двумя переменными рассматривался в [7].

них функция h_0 при $n > 1$ заведомо не обращается в нуль ни в какой точке границы, которой можно коснуться изнутри области параболоидом какой-либо степени > 1. Поэтому представляет интерес мажорировать решения уравнения (1.1) другими функциями.

Мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях $|u(x)|$ оценивается той или иной из функций h_k с $0 < k \leq n$. Множитель при $h_k(x)$ в такой оценке, подобно (1.6), (1.9), зависит от некоторых норм в $L_n(G)$.

Из известного неравенства между средними следует, что для всякой данной области $h_k(x)$ тем меньше, чем больше k, кроме того случая, когда область — шар и x — его центр. Можно также показать, что при $k > n-1$ $h_k(x)$ для любой выпуклой области обращается в нуль всюду на ее границе. В этом смысле оценки через функции h_k при $k > 0$ оказываются более точными, чем оценки через h_0. Они приводят, в частности, к существенным выводам относительно возможного поведения решения вблизи границы области.

Простейший результат, относящийся к указанным оценкам, который мы получим в § 4, состоит в следующем.

Пусть $b = b(x)$ — вектор с составляющими $b^i = b^i(x)$, коэффициентами при первых производных в уравнении (1.1). Пусть $r = r(x)$ — расстояние от точки x до границы выпуклой оболочки области G в направлении, противоположном вектору $b(x)$. (Неопределенность r при $b = 0$ не существенна, так как дальше играет роль только отношение $|b|/r$.) Положим

$$\overline{c} = c + |b|r^{-1}. \tag{1.10}$$

Теорема B. *В условиях теоремы A имеет место оценка*

$$|u(x)| < n^{-1}\tau_n^{-1/n}\left(\|f\| + \|\overline{c}_+u\|\right)h_n(x), \tag{1.11}$$

где нормы относятся к $L_n(G)$ и h_n определена второй из формул (1.4) при $k = n$.

Отсюда легко выводится, что если $\|\overline{c}_+\| < \infty$ и

$$\|\overline{c}_+h_n\| < n\tau_n^{-1/n}, \tag{1.12}$$

то

$$|u(x)| < \frac{\|f\|h_n(x)}{n\tau_n^{-1/n} - \|\overline{c}_+h_n\|}. \tag{1.13}$$

В отношении этих результатов верны те же замечания, какие были сделаны в п. 1.2 в связи с теоремой A.

Сравнивая (1.11)–(1.13) с (1.6)–(1.9), мы можем повторить сказанное выше относительно преимущества оценок через функции h_k с $k > 0$. Это тем более верно для оценок через h_n, так как для каждой области она наименьшая из всех h_k с $k \leq n$.

С другой стороны, (1.11)–(1.13) имеют смысл лишь тогда, когда входящие туда нормы с $\overline{c}_+$ конечны. Это налагает довольно сильное ограничение на b из-за величины r, стоящей в знаменателе (1.10). Пусть точка $x_0 \in \Gamma$ лежит на границе выпуклой оболочки области G, так что через нее проходит опорная плоскость P. Тогда, если при $x \to x_0$ угол между вектором $b(x)$ и внешней нормалью к P становится больше $\pi/2+\varepsilon$, то $r(x)$ заведомо подходит к нулю вблизи x_0. Напротив, если P — единственная опорная плоскость в точке x_0 и указанный угол меньше $\pi/2-\varepsilon$, то вблизи x_0 $\quad r > \mathrm{const} > 0$.

Если же, в частности, $b \equiv 0$, то (1.11)–(1.13) оказываются гораздо точнее того, что получается при $b \equiv 0$ из (1.6)–(1.9). Так как h_n обращается в нуль во всех точках выпуклости границы области, то (1.12) слабее любого ограничения на $\|\overline{c}_+\|$.

§ 2. Оценки в общем случае

2.1. Здесь и всюду дальше, если явно не оговорено иное, мы рассматриваем решения уравнения (1.1) с теми условиями, которые высказаны в п. 1.1.

Определим величины, которыми будем оценивать эти решения. Всюду дальше $E = E_m$ — m-мерная плоскость, проходящая через начало координат, $1 \le m \le n$; x_E — проекция точки x на E; G_E — проекция области G.

Введем для области G связанные с плоскостью E функции $h_{kE}(x)$, $x \in G$, аналогично тому, как определены h_k в п. 1.2. Именно пусть Ω, ν, $h(x,\nu)$ имеют тот же смысл, что в п. 1.2. Пусть $\Omega_E = \Omega \cap E$, т. е. это есть единичная сфера в плоскости $E = E_m$; $\varkappa_m$ — ее площадь; $\tau_m = m^{-1}\varkappa_m$. Мы полагаем

$$h_{0E}(x) = \exp\frac{1}{\varkappa_m}\int\limits_{\Omega_E} \ln h(x,\nu)\,d\nu, \quad h_{kE}(x) = \left[\frac{1}{\varkappa_m}\int\limits_{\Omega_E} h^{-k}(x,\nu)\,d\nu\right]^{-1/k}. \quad (2.1)$$

В частности, h_{0E}, h_{mE} будут обозначаться h_E, $\overline{h}_E$ или h, $\overline{h}$. При $m = 1$ интегралы (2.1) сводятся к соответствующим суммам, как указано в п. 1.2. При $m = 1$ (2.1) сводятся к (1.4).

В (2.1) играют роль только $\nu \in \Omega_E$, а при таких ν для всех x с данной проекцией x_E $\quad h(x,\nu)$ одно и то же, и если P — опорная плоскость к $G \cup \Gamma$ с нормалью $\nu \in \Omega_E$, то $P \cap E$ есть опорная плоскость к $(G \cup \Gamma)_E$ с той же нормалью. Поэтому функции h_{kE} зависят только от G_E, точнее от ее выпуклой оболочки. Именно $h_{kE}(x) = h_k(x_E)$, где $h_k(x_E)$ определяется для G_E так же, как h_k определена соответствующей формулой (1.4) для G, стоит лишь заменить там n на m. Отметим еще, что $h_{kE}(x)$ непрерывно зависит от E.

2.2. Определим нормы, через которые будут производиться наши оценки.

Пусть задано уравнение (1.1) или хотя бы только матрица (a^{ij}), $a^{ij}\xi_i\xi_j \geq 0$. Выберем плоскость E и преобразуем уравнение, повернув оси координат так, чтобы E стала плоскостью $(x^1, \dots, x^m)$. Тогда положим

$$a_E = \det(a^{ij}), \qquad i, j \leq m. \tag{2.2}$$

Рассмотрим функции φ в G, если угодно даже неизмеримые, для каждой из которых найдется такая определенная в G_E функция $\psi \in L_m(G_E)$, что

$$a_E^{-1/m}(x)|\varphi(x)| \leq \psi(x_E). \tag{2.3}$$

Каждой φ мы сопоставляем величину

$$\|\varphi\|_E = \inf \|\psi\|_{L_m(G)}, \tag{2.4}$$

где инфимум берется по всем ψ с указанным свойством. Очевидно, $\|\varphi\|_E$ обладает свойствами нормы.

Отметим, что для каждой φ среди всех соответствующих ψ существует такая ψ_φ, что

$$\|\varphi\|_E = \|\psi_\varphi\|_{L_m(G)}. \tag{2.5}$$

Действительно, по определению (2.4), существуют такие $\psi_1, \psi_2, \dots$, что $\|\psi_i\|_{L_m} \to \|\varphi\|_E$. Введем функции $\overline{\psi}_i$, полагая $\overline{\psi}_i(x) = \min(\psi_1(x), \dots, \psi_i(x))$. Тогда точно так же для них верно (2.3), $\|\overline{\psi}_i\|_{L_m} \to \|\varphi\|_E$ и, кроме того, $\overline{\psi}_i \geq \overline{\psi}_{i+1}$. Полагая $\psi_\varphi = \lim \overline{\psi}_i$, получим измеримую функцию, для которой выполнены (2.3) и (2.5). Мы будем говорить, что ψ_φ реализует норму $\|\varphi\|_E$.

Если $m = n$, то $a_E = a = \det(a^{ij})$, и если $a^{-1/n}|\varphi|$ измерима, то $\psi_\varphi = a^{-1/n}|\varphi|$, а норма $\|\varphi\|_{E_n}$ сводится к норме в $L_n(G)$ с весом a^{-1}.

Так же как в [1, 2], назовем пучком любое множество плоскостей E_m, проходящих через данную E^0_{m-1} (точку, если $m = 1$), если оно имеет положительную меру в смысле естественной меры в множестве всех E_m, проходящих через E^0_{m-1}. Наши результаты будут относиться к пучкам плоскостей с точностью до множеств меры нуль. Если $m = n$, то пучок сводится к одной «плоскости» E_n и оговорка насчет множеств плоскостей меры нуль отпадает.

Мы будем обозначать через b_E проекцию вектора $b = (b^i)$ на плоскость E, а ее норму, т. е. норму $|b_E|$ — через $\|b\|_E$. Вообще, если норма берется для функции, зависящей от E, то индекс E будем писать только при норме; например, $\|c_+ h_E\|_E$ обозначается $\|c_+ h\|_E$.

Поскольку коэффициенты и правая часть уравнения (1.1) могут считаться определенными с точностью до их значений на множестве меры нуль, постольку при определении норм $\|b\|_E$, $\|f\|_E$ и т. п. их можно положить равными нулю на любом таком множестве M. Но это множество должно быть одним и тем же для плоскостей каждого данного пучка, к которому мы хотим относить формулируемые результаты. Иначе объединение множеств M, отнесенных к разным плоскостям E, могло бы не иметь нулевой меры и при одновременном рассмотрении разных E из данного пучка уравнение уже не выполнялось бы почти везде.

Между прочим, всякая измеримая функция эквивалентна функции, измеримой B. Если же $a_E^{-1/m}|\varphi|$ измерима B, то функцию, реализующую норму φ, можно определить как

$$\psi_\varphi(x) = \sup_{x'_E = x} a_E^{-1/m}(x')|\varphi(x')| \tag{2.6}$$

— супремум по всем $x \in G$ с данной проекцией $x'_E = x$ [5)].

2.3. Теорема 1. *Пусть u — решение уравнения (1.1) с $u|_\Gamma \geq 0$. Тогда для значений $u(x) < 0$ при любом m, $1 \leq m \leq n$, для почти всех плоскостей $E = E_m$ любого пучка выполняются неравенства*

$$|u(x)| < m^{-1}\tau_m^{1/m}(\|f_+\|_E + \|c_+u\|_E)F_m(\|b\|_E)h_E(x), \tag{2.7}$$

где функция h_E есть h_{0E}, а F_m — та же, что F_n в (1.7), т. е.

$$F_m(\xi) = \exp\biggl(\frac{\xi^m}{m^m \varkappa_m} + \varphi_m(\xi)\biggr), \tag{2.8}$$

причем φ_m ограничена, $\varphi_m(0) = 0$, в частности $\varphi_1 \equiv 0$, так что $F_1(\xi) = \exp(\xi/2)$. Нормы в (2.7) можно брать не для всей области G, а для той ее части $G(u < 0)$, где $u < 0$.

Если же $u|_\Gamma \leq 0$, то для значений $u(x) > 0$ верны такие же неравенства с заменой положительной части f на отрицательную, причем нормы можно брать для $G(u > 0)$.

Само собой разумеется, в данной формулировке не исключается априори, что нормы, входящие в наши неравенства, бесконечны. Но тогда неравенства тривиальны, так как по условию п. 1.1 рассматриваемые решения

[5)] Здесь ψ_φ определено как «верхняя проекция» функция $a_E^{-1/m}|\varphi|$ на плоскость E. Для функции, измеримой по Лебегу, рассматриваемой как данная, а не с точностью до эквивалентности, верхняя проекция может быть неизмеримой. В [2] была введена норма $N_E(\varphi)$, определяемая как норма верхней проекции $a_E^{-1/m}|\varphi|$ на плоскость E без оговорки, то φ должна рассматриваться с точностью до эквивалентности. Однако во всех результатах [2] можно заменить $N_E(\varphi)$ на $\|\varphi\|_E$.

подразумеваются ограниченными. Для того чтобы теорема 1 не сводилась к такой тривиальности, достаточно, чтобы для плоскостей хотя бы одного какого-то пучка фигурирующие в ней нормы были конечными. Это и есть минимальное условие на уравнение (1.1), при котором наши результаты имеют смысл.

Не обязательно предполагать, что решение имеет определенные граничные значения. Например, условие $u|_\Gamma \geq 0$ можно понимать в том смысле, что для всякой последовательности точек $x \in G$, сходящейся к точке на Γ, $\liminf u(x) \geq 0$.

Эти замечания к теореме 1 будут иметься в виду в отношении последующих аналогичных теорем без напоминаний. Точно так же мы будем опускать указание на то, что оценкам значений $u(x) < 0$ при $u|_\Gamma \geq 0$ соответствуют аналогичные оценки для $u(x) > 0$ при $u|_\Gamma \leq 0$. Одни оценки получаются из других переменой знака f и u.

Точное определение функции $F_m(\xi)$ при $m > 1$ следующее: она есть обратная для функции

$$\xi = m\varkappa_m^{1/m}(\ln\eta - \chi_m(\eta))^{1/m}, \qquad \eta \geq 1, \tag{2.9}$$

где

$$\chi_m(\eta) = \frac{m-1}{m}\sum_{l=1}^{m-1}(-1)^{l-1}l^{-l}C_{m-1}^l\left(1 - \eta^{-lm/(m-1)}\right). \tag{2.10}$$

Отсюда $\chi_m(1) = 0$ и

$$\chi_m(\infty) = \alpha_m = \frac{m-1}{m}\sum_{l=1}^{m-1}(-1)^{l-1}l^{-l}C_{m-1}^l. \tag{2.11}$$

Кроме того, легко видеть, что χ_m есть возрастающая функция.

Следовательно, φ_m в (2.8) тоже возрастающая, $\varphi_m(0) = 0$ и $\varphi_m(\infty) = \alpha_m$. Поэтому в (2.7) можно вместо $F_m(\|b\|)$ взять просто $e^{m^{-m}\varkappa_m^{-1}\|b\|^m + \alpha_m}$.

Данное точное определение функции F_m имеет значение, в частности в связи с тем, что оценка (2.7), так же как следующие оценки, содержащие эту функцию, оказываются точными.

Доказательство теоремы 1 будет дано в § 3. Здесь же мы формулируем дополнение к ней, а также выведем ее прямые следствия.

2.4. Будем говорить, что решение u уравнения (1.1) почти классическое, если оно дифференцируемо всюду в G, а также дважды (аппроксимативно) дифференцируемо и соответственно удовлетворяет уравнению всюду в G, кроме, может быть, счетного множества точек. (При этих условиях оно заведомо имеет абсолютно непрерывное опорное изображение.)

При таком понимании решения коэффициенты и правая часть уравнения не могут рассматриваться с точностью до их значений на множестве меры нуль. Поэтому при определении их норм они не могут заменяться на эквивалентные функции.

Дополнение к теореме 1. *Если в условиях теоремы 1 иметь в виду почти классическое решение, то неравенство (2.7) будет верно для всех плоскостей без исключения.*

Совершенно аналогичные дополнения допускают последующие теоремы. Но мы их уже не будем формулировать. Они сводятся к тому, что если иметь в виду почти классические решения, то утверждение теоремы верно для всех плоскостей, для которых выполнены ее условия.

2.5. Теорема А, приведенная в п. 1.2, получается из теоремы 1 при $m = n$. Оценки, связанные с разными плоскостями, дают более гибкий аппарат для исследования решений. Например, легко убедиться, что при $m = 1$, т. е. когда плоскость E — прямая, функция h_E обращается в нуль на концах отрезка G_E; она имеет вид $h = \sqrt{l^2 - x^2}$, где l — половина длины отрезка G_E, а x — расстояние от его середины. Но при $m > 1$ h_E не обращается в нуль в точках гладкости границы G_E. Кроме того, может случиться, например, что $a = \det(a^{ij})$ так обращается в нуль на некотором множестве точек, что нормы $\|f_+\|_{E_n}$ и т. п. оказываются бесконечными. Тогда оценка (2.7) для $m = n$ теряет смысл. Но тогда же для некоторых плоскостей $E = E_m$ с $m < n$ нормы $\|f_+\|_E$ и т. п. могут оказаться конечными и соответствующие оценки (2.7) будут применимы.

То, что в правую часть оценок (2.7) входит само решение, не лишает их значения. Во-первых, если $c_+ = 0$, т. е. $c \leq 0$, то (2.7) дает оценку $|u(x)|$, уже не зависящую от u.

Во-вторых, если $f = 0$, то (2.7) и соответствующее неравенство для значений $u > 0$ дает для всех значений $u(x)$

$$|u(x)| < m^{-1}\tau_m^{-1/m}\|c_+u\|F_m(\|b\|)h(x), \tag{2.12}$$

где опущен индекс E, что мы будем для краткости зачастую делать и дальше. В отношении смысла этого неравенства можно сделать такое же замечание, какое было сделано в п. 1.2 в связи с теоремой А, т. е. в случае $m = n$.

2.6. Теорема 2. *Для существования нетривиального решения уравнения (1.1) с $f = 0$ при условии $u|_\Gamma = 0$ необходимо, чтобы при всяком m, $1 \leq m \leq n$, для почти всех плоскостей $E = E_m$ любого пучка, для которых $\|c_+\| < \infty$, выполнялись неравенства*

$$\|c_+h\|_E F_m(\|b\|_E) > m\tau_m^{1/m}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Умножая обе части (2.12) на c_+ и беря нормы, получим (2.13), если $\|c_+\|$ и, стало быть, $\|c_+u\|$ конечна. (Норма $\|b\|$ может быть бесконечной, но тогда (2.13) тривиально.)

Обращение теоремы 2 не дает условий единственности в классе рассматриваемых решений с абсолютно непрерывным опорным изображением, так как этот класс не аддитивен. Единственность получается в любом его аддитивном подклассе. В частности, из теоремы 2 вытекает

Теорема 2а. *Если в уравнении (1.1) для плоскостей E_m некоторого пучка*

$$\|c_+h\|_E F_m(\|b\|_E) \le m\tau_m^{1/m}, \qquad \|c_+\|_E < \infty, \tag{2.14}$$

то решение задачи Дирихле в каждом из классов I, II, *указанных в п. 1.1, единственное.*

Если же речь идет о почти классических решениях, то достаточно, чтобы (2.14) выполнялось хотя бы для одной плоскости.

Последнее утверждение вытекает из дополнения к теореме 1, п. 2.4.

2.7. Теорема 3. *Пусть для уравнения (1.1) для плоскостей E некоторого пучка $\{E\}$ выполнены строгие неравенства (2.14). Тогда для его решения u, $u|_\Gamma \ge 0$, там, где $u(x) < 0$, для почти всех $E \in \{E\}$ выполняются неравенства*

$$|u(x)| < \frac{\|f_+\|_E h_E(x)}{m\tau_m^{1/m} F_m^{-1}(\|b\|_E) - \|c_+h\|_E}, \tag{2.15}$$

где нормы можно брать для $G(u < 0)$.

Доказательство. Умножая обе части неравенства (2.7) на c_+ и беря нормы для $G(u<0)$, получим

$$\|c_+u\| < m^{-1}\tau^{-1/m}(\|f_+\| + \|c_+u\|)F_m(\|b\|)\|c_+h\|, \tag{2.16}$$

если $\|c_+\| < \infty$, что заведомо верно, когда выполнено второе неравенство (2.14). Если же, кроме того, в первом неравенстве (2.14) имеет место строгое неравенство, то из (2.16) можно оценить $\|c_+u\|$. Подставляя эту оценку в (2.7), получим (2.15).

§ 3. *Доказательство теоремы 1 и дополнений к ней*

3.1. Мы докажем теорему, из которой теорема 1 и дополнение п. 2.4 к ней вытекают непосредственно. Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$a^{ij}u_{ij} + b^iu_i = g, \qquad g = f - cu. \tag{3.1}$$

Теорема 4. *В условиях и обозначениях теоремы 1 для значений $u(x) < 0$ решения уравнения (3.1), в том же смысле как в теореме 1, верны неравенства*

$$|u(x)| < m^{-1}\tau_m^{-1/m}\|g_+\|_E F_m(\|b\|_E)h_E(x). \tag{3.2}$$

При этом нормы здесь можно брать не для всей области G, а для той ее части $G(u<0)$, где $u<0$.

Для почти классического же решения эти неравенства выполняются для всех плоскостей.

Там, где $u<0$, имеем

$$g_+ = (f - cu)_+ \leq f_+ + c_+|u|. \tag{3.3}$$

Поэтому для норм, относящихся к $G(u<0)$,

$$\|g_+\| \leq \|f_+\| + \|c_+u\|. \tag{3.4}$$

Тем самым из (3.2) следует неравенство (2.7) теоремы 1 с нормами, относящимися к $G(u<0)$, а тогда (2.7) тем более верно для норм, относящихся ко всей G.

(Может показаться, что ограничение нормами для $G(u<0)$ тривиально. Так как $u|_\Gamma \geq 0$, то, беря связную часть G^* множества $G(u<0)$, получим решение в G^* с $u|_{\Gamma^*} \geq 0$ и достаточно применить к нему (3.2) или (2.7). Это соображение, однако, неверно при тех общих условиях, каким подчиняются рассматриваемые решения. Условие абсолютной аддитивности опорного изображения глобальное: оно относится к решению u на всей G, но может не выполняться для его ограничения на какой-либо подобласти. Легко дать тому простые примеры. Тогда наши выводы к такому ограничению решения неприменимы.)

3.2. Доказательство теоремы 4 опирается на общую теорему, доказанную в [1] (теорема 2 [1]), для которой теорема 4 является частным случаем, отвечающим уравнению (3.1).

Пусть u — решение уравнения (3.1) с $u|_\Gamma \geq 0$. Допустим, что оно принимает отрицательные значения.

Выберем плоскость E и, повернув оси, сделаем ее плоскостью $(x^1,\ldots,x^m)$. Пусть u_E обозначает «нижнюю проекцию» u на плоскость E, т. е. такую функцию в G_E, что для каждой $x \in G_E$.

$$u_E(x) = \inf_{x'_E = x} u(x'), \tag{3.5}$$

т. е. инфимум по всем $x' \in G_E$ с данной проекцией $x'_E = x$.

Так как u принимает отрицательные значения, а $u|_\Gamma \geq 0$, то заведомо существуют такие точки выпуклости [6)] функции u, что в них

$$u(x) = u_E(x_E). \tag{3.6}$$

[6)] Т. е. точки, над которыми поверхность $z = u(x)$ имеет опорные плоскости.

Рассмотрим такую точку x, предполагая, что в ней существуют аппроксимативные дифференциалы [7] du, d^2u; так как x — точка выпуклости, то $d^2u \geq 0$. В такой точке вектор ∇u параллелен плоскости E и $\nabla u = \nabla u_E$. Поэтому

$$b^i u_i = b\nabla u = b_E \nabla u_E. \tag{3.7}$$

Пусть $v_{ij}dx^i dx^j$, где $v_{ij} = 0$ при i, $j > m$, есть нижняя проекция формы d^2u на плоскость E. По определению это есть наибольшая из таких форм $h_{ij}dx^i dx^j$ с $h_{ij} = 0$ при i, $j > m$, что $h_{ij}dx^i dx^j \leq d^2u$. Положим

$$w_E = \det(v_{ij}), \qquad i, j \leq m. \tag{3.8}$$

Из $a^{ij}\xi_i\xi_j \geq 0$ и $d^2u \geq 0$ вытекает, что

$$a^{ij}u_{ij} \geq m(a_E w_E)^{1/m}, \qquad a_E = \det(a^{ij}), \qquad i, j \leq m. \tag{3.9}$$

Действительно, так как $v_{ij}dx^i dx^j \leq u_{ij}dx^i dx^j$ и $v_{ij} = 0$ при $i, j > m$, то

$$a^{ij}u_{ij} \geq a^{ij}v_{ij} = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}v_{ij}. \tag{3.10}$$

Сумма, стоящая здесь справа, есть след произведения матриц (a^{ij}), (v_{ij}), $i, j \leq m$. Величина же $a_E w_E$ есть его определитель. Поэтому если это произведение привести к диагональному виду, то (3.9) оказывается известным неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим.

Итак, в рассматриваемой точке x мы имеем соотношения (3.6), (3.7) и (3.9). Предположим еще, что в ней выполнено уравнение (3.1). Тогда, пользуясь указанными соотношениями, мы получим из (3.1)

$$w_E^{1/m} \leq m^{-1} a_E^{-1/m}(g - b_E \nabla u_E). \tag{3.11}$$

Полагая теперь

$$|\nabla u_E| = p, \qquad |b_E| = b, \tag{3.12}$$

пользуясь неравенством Шварца и заменяя g на g_+, получим из (3.11)

$$w_E \leq m^{-m} a_E^{-1}(g_+ + bp)^m. \tag{3.13}$$

[7] Как показано в [1], это так почти во всех точках выпуклости любой функции.

Таким образом, мы показали, что во всякой точке выпуклости решения u, в которой выполнено (3.6), существуют du, d^2u и выполняется уравнение (3.1), имеет место неравенство (3.13). То есть (3.13) верно почти во всех точках выпуклости с условием (3.6).

3.3. Дальнейший вывод заимствуется, собственно, из [1, 2]. Пусть μ — пока произвольное, положительное число. По неравенству Гёльдера при $m > 1$

$$(g_+ + bp)^m \leq (\mu^m g_+^m + b^m)(\mu^{-m/(m-1)} + p^{m/(m-1)})^{m-1}. \tag{3.14}$$

Введем функцию $U(p)$, полагая при $m > 1$

$$U = (\mu^{-m/(m-1)} + p^{m/(m-1)})^{m-1}, \tag{3.15}$$

а при $m = 1$

$$U = \begin{cases} \mu^{-1} & \text{при} \ \ p \leq \mu^{-1}, \\ p & \text{при} \ \ p > \mu^{-1}. \end{cases} \tag{3.16}$$

При любом m эта U такова, что $U(p)p^{-m}$ — невозрастающая.

Пусть, далее, q, r — функции, реализующие нормы $\|g\|_E$, $\|b\|_E$ в $G(u < 0)$. Согласно п. 2.2, это означает, что q, r суть такие функции в $G_E(u < 0)$, что, во-первых, в $G(u < 0)$

$$a_E^{-1/m}(x)g_+(x) \leq q(x_E), \qquad a_E^{-1/m}(x)b(x) \leq r(x_E), \tag{3.17}$$

и, во-вторых,

$$\|q\|_{L_m} = \|g_+\|_E, \qquad \|r\|_{L_m} = \|b\|_E, \tag{3.18}$$

где нормы относятся соответственно к $G_E(u < 0)$ и $G(u < 0)$. (Если, например, $\|g_+\|$ бесконечна, то можно формально положить $q \equiv \infty$.)

На основании (3.14), (3.15) и (3.17) из (3.13) следует, что при $m > 1$

$$w_E(x) \leq m^{-m}(\mu^m q^m(x_E) + r^m(x_E))U(p). \tag{3.19}$$

То же верно при $m = 1$, как это видно из (3.13), (3.16), (3.17).

Неравенство (3.19), как ясно из его вывода, верно для любой плоскости E почти во всех точках выпуклости решения u, в которых $u = u_E$.

Поэтому, согласно доказанному в [1] § 3, для почти всех плоскостей E любого пучка, поскольку функция $U(p)p^{-m}$ невозрастающая, из неравенства (3.19) следует, что при $u(x) < 0$

$$\varkappa_m \int\limits_0^{|u(x)|/h(x)} U^{-1}(p)p^{m-1}dp < m^{-m} \int\limits_{G_E(u<0)} (\mu^m q^m + r^m)dx. \tag{3.20}$$

Вследствие (3.18) это равносильно

$$m^m \varkappa_m \int\limits_0^{|u(x)|/h(x)} U^{-1}(p) p^{m-1} dp < \mu^m \|g_+\|^m + \|b\|^m. \tag{3.21}$$

3.4. Остается выбрать подходящее значение μ и вычислить стоящий в (3.21) интеграл. Это было сделано в [2, § 5], и мы сошлемся на готовый результат.

Положим для краткости

$$m^{-1} \tau_m^{-1/m} \|g_+\| = k. \tag{3.22}$$

Предположим, что $\|b\| > 0$. Фиксируем точку x, где $u(x) < 0$ и тем самым верно (3.21). Можно считать, что $|u(x)| > kh(x)$. Иначе было бы $|u(x)| \leq kh(x)$, и так как $\|b\| > 0$, то доказываемое неравенство (3.2) было бы заведомо верно. При этих предположениях и при соответствующем выборе μ из (3.21) следует, что

$$\ln \frac{|u(x)|}{kh(x)} - \chi_m \left(\frac{|u(x)|}{kh(x)} \right) < \frac{\|b\|^m}{m^m \varkappa_m}, \tag{3.23}$$

где при $m > 1$ функция χ_m определяется формулой (2.10), а $\chi_1 \equiv 0$. Отсюда, ввиду (3.22), непосредственно следует (3.2), причем функция F_m оказывается обратной функции (2.9) [8)].

Таким образом, неравенство (3.2) теоремы 4 доказано при $\|b\| > 0$.

Отсюда, конечно, следует, что при $\|b\| = 0$ верно такое же, только, может быть, не строгое неравенство. Однако в § 4 мы докажем неравенство (4.2), из которого непосредственно следует, что при $b = 0$, т. е. при $\|b\| = 0$, верно (3.2) с функцией $\overline{h} = h_m$ вместо h. По известному неравенству между средними $\overline{h} \leq h$. Поэтому (3.2) и тем самым первую часть теоремы 4 можно считать доказанной полностью.

3.5. Вторая часть теоремы 4, касающаяся почти классических решений, доказывается точно так же. Разница состоит только в следующем. Решение предполагается дважды (аппроксимативно) дифференцируемым и удовлетворяющим уравнению всюду, кроме, самое большое, счетного множества точек. Поэтому неравенство (3.13) верно также для всех точек выпуклости

[8)] Неравенство (3.23) есть (5.21) работы [2], написанное только в несколько иных обозначениях. Функция χ_m там не вычислена явно, но из данных в [2] формул она находится очевидными выкладками. При объяснении обозначений в (5.21) в [2] допущены опечатки, впрочем легко исправимые. (В наст. издании они исправлены, см. с. 616. — *Прим. ред.*)

решения, в которых выполнено (3.6), за возможным вычетом счетного их множества. В том же смысле будет выполнено и (3.19), если неравенства (3.17) предполагаются выполненными всюду в $G(u<0)$, опять-таки кроме, может быть, счетного множества точек.

В [1] показано, что в таком случае для почти классического решения неравенство (3.20) верно для всех плоскостей без исключения. Поэтому повторяя выводы п. 3.4, получим доказательство второй части теоремы 4.

3.6. Предыдущие результаты относились к решениям с граничным условием $u|_\Gamma \geq 0$ или $u|_\Gamma \leq 0$. В общем случае можно было бы ввести функцию v в G такую, что $(u-v)_\Gamma \geq 0$ или $(u-v)_\Gamma \leq 0$, и применить к $u-v$ оценки, относящиеся к случаю $u|_\Gamma \geq 0$, или соответственно $u|_\Gamma \leq 0$. Стоит лишь заменить f на $f - L(v)$, где L — правая часть (1.1).

Однако особенность рассматриваемого класса решений с абсолютно непрерывным опорным изображением состоит в его нелинейности: если u принадлежит этому классу, то даже при сколь угодно регулярной v $u-v$ может ему не принадлежать. Поэтому применение предыдущего простого соображения требует дополнительных условий. Такие условия даются следующей теоремой.

Теорема 5. *Пусть u — решение уравнения (1.1). Введем в G две функции: выпуклую v' и вогнутую v'' с условиями*

$$(u-v')_\Gamma \geq 0, \qquad (u-v'')_\Gamma \leq 0, \tag{3.24}$$

и положим

$$u - v' = u', \qquad u - v'' = u''. \tag{3.25}$$

Тогда оценки, относящиеся к значениям $u(x)<0$ при $u|_\Gamma \geq 0$, могут быть отнесены к $u'(x)<0$, а оценки для $u(x)>0$ при $u|_\Gamma \leq 0$ — к $u''(x)>0$. Нужно только заменить f на $f-L(v')$ или соответственно на $f-L(v'')$.

Кроме того, поскольку $a^{ij}\xi_i\xi_j \geq 0$, то для выпуклой функции при $a^{ij}v'_{ij} \geq 0$, так что

$$f - L(v') \leq f' = f - b^i v'_i - cv'. \tag{3.26}$$

Поэтому в оценках для u' можно заменить $f-L(v')$ на f'.

Иначе говоря, *все оценки для $u(x)<0$ при $u|_\Gamma \geq 0$ дословно применимы к $u'(x)<0$, если заменить u на u' и f на f'. Аналогично, оценки для $u(x)>0$ при $u|_\Gamma \leq 0$ применимы к $u''(x)>0$, если заменить u на u'' и f на f''.*

В качестве v', v'' можно взять функции, натянутые на граничные значения $u|_\Gamma$. Под этим понимается следующее. Пусть φ — ограниченная функция на множестве M и M^* — выпуклая оболочка M. Выпуклой функцией, натянутой на φ, называется наибольшая из выпуклых функций v, определенных на M^* и таких, что на M $v \leq \varphi$. Соответственно, вогнутая на φ есть наименьшая из вогнутых $v \geq \varphi$.

Геометрически это означает, что в $(n+1)$-мерном пространстве $(x^1, \ldots, x^n, z)$ строится выпуклая оболочка множества, представляющего график граничных значений $u|_\Gamma$, и мы оцениваем, насколько поверхность $z = u(x)$ может выступить из этой выпуклой оболочки над любой данной точкой $x \in G$. Если область строго выпукла (т. е. через каждую точку $x \in \Gamma$ проходит опорная плоскость, не содержащая других точек Γ), а $\varphi = u|_\Gamma$ непрерывна, то $v'|_\Gamma = v''|_\Gamma = \varphi$. Поэтому введение функций v', v'', натянутых на $u|_\Gamma$, может оказаться удобным независимо от указанной выше особенности рассматриваемого класса решений.

Доказательство теоремы 5 получается простым применением к уравнению (1.1) замечания, сделанного в [1, § 2, п. 6].

§ 4. Оценки через функцию $\overline{h} = h_m$

4.1. Пусть E – m-мерная плоскость; x_E, G_E — проекции точки x и области G на E. Для любой $x \in G$ обозначим через $r_E(x)$ расстояние от x_E до границы выпуклой оболочки области G_E в направлении, противоположном проекции b_E вектора $b = (b^i)$ в точке x. Положим

$$\overline{c} \equiv \overline{c}_E = c + |b_E| r_E^{-1}. \tag{4.1}$$

Теорема 6. *Для решения $u(x)$ уравнения (1.1) с $u|_\Gamma \geq 0$, там, где $u < 0$, для почти всех плоскостей E любого пучка при любом m, $1 \leq m \leq n$, имеют место неравенства*

$$|u(x)| < m^{-1} \tau_m^{-1/m} (\|f_+\|_E + \|\overline{c}_+ u\|_E \overline{h}_E(x)), \tag{4.2}$$

где $\overline{h}_E$ есть h_{mE}, определенная формулой (2.1) при $k = m$. Нормы здесь можно брать для $G(u < 0)$.

К этой теореме относятся также замечания, какие сделаны по поводу теоремы 1 в п. 2.3–2.5, а также в п. 1.3 по поводу теоремы B. Эта последняя есть прямое следствие теоремы 6, относящееся к случаю $m = n$. Кроме того, к теореме 6 можно отнести дополнения, вполне аналогичные тем, какие содержатся в п. 2.4, 3.6 для теоремы 1.

Отложив доказательства теоремы 6, приведем ее прямые следствия.

4.2. Если u есть нетривиальное решение однородного уравнения с $u|_\Gamma = 0$, то теорема 4 дает

$$|u(x)| < m^{-1} \tau_m^{-1/m} \|\overline{c}_+ u\| \overline{h}(\cdot). \tag{4.3}$$

Теорема 7. *Для существования нетривиального решения однородного уравнения (1.1) с условием $u|_\Gamma = 0$ необходимо, чтобы при всех m,*

$1 \le m \le n$, во всяком пучке для почти всех плоскостей E, для которых $\|\overline{c}_+\|_E < \infty$, выполнялись неравенства

$$\|\overline{c}_+\overline{h}\|_E > m\tau_m^{1/m}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Умножая обе части (4.3) на $\overline{c}_+$ и беря нормы, получим (4.4), если $\|\overline{c}_+u\|$ конечна; а это так, если $\|\overline{c}_+\| < \infty$.

Теорема 7, подобно теореме 2, влечет следующую теорему единственности.

Теорема 7а. *Если в уравнении (1.1) для некоторого пучка плоскостей*

$$\|\overline{c}_+\overline{h}\|_E \le m\tau_m^{1/m}, \qquad \|\overline{c}_+\|_E < \infty, \tag{4.5}$$

то решение задачи Дирихле в каждом из классов I, II, *указанных в п. 1.2, единственное.*

Для почти классических решений здесь применима та же оговорка, какая сделана в связи с аналогичной теоремой 2а.

Теорема 8. *Пусть для уравнения (1.1) для плоскостей некоторого пучка $\{E\}$ выполнены строгие неравенства (4.5). Тогда для решения u с $u|_\Gamma = 0$ для почти всех $E \in \{E\}$ в точках, где $u(x) < 0$, выполняются неравенства*

$$|u(x)| < \frac{\|f_+\|_E\overline{h}_E(x)}{m\tau_m^{1/m} - \|\overline{c}_+\overline{h}\|_E}. \tag{4.6}$$

Эта теорема выводится из теоремы 6 совершенно так же, как теорема 3 была выведена из теоремы 1.

Имея результаты § 2, мы можем комбинировать их с формулированными здесь, выбирая тот, который оказывается лучшим при данных условиях. Например, перепишем оценку (2.15) теоремы 3 в виде

$$|u(x)| < \|f_+\|_E A_E h_E(x), \qquad A_E = \Big(m\tau_m^{1/m}F_m(\|b\|) - \|c_+h\|\Big)^{-1}. \tag{4.7}$$

Оценивая с помощью этого неравенства $\|\overline{c}_+u\|$ в (4.2), придем к следующему выводу, дополняющему теорему 3.

Теорема 8а. *В условиях теоремы 3, наряду с неравенствами (4.7), выполняются неравенства*

$$|u(x)| < m^{-1}\tau_m^{-1/m}\|f_+\|_E(1 + A_E\|\overline{c}_+h\|_E)\overline{h}_E(x). \tag{4.8}$$

Таким образом, мы можем при данной x выбрать лучшую из оценок (4.7), (4.8). Вторая из них, если только $\|\overline{c}_+h\| < \infty$, будет заведомо лучше вблизи точек Γ, через которые проходят опорные плоскости, так как в них $\overline{h}$ обращается в нуль.

4.3. Теорема 6 выводится из следующей теоремы совершенно так же, как теорема 1 — из теоремы 4 п. 3.1.

Теорема 9. *В условиях теоремы 6 и в том же смысле выполняются неравенства*

$$|u(x)| < m^{-1}\tau_m^{-1/m}\|(f-\overline{c}u)_+\|_E\overline{h}_E(x), \tag{4.9}$$

причем норму здесь можно относить к $G(u<0)$.

Для почти классического решения то же верно для всех плоскостей E без исключения.

Отсюда вытекает теорема 6 вместе с соответствующим дополнением относительно почти классических решений.

Остается доказать теорему 9. При доказательстве теоремы 4 в п. 3.2 было установлено, что при любой плоскости E, в почти всех точках выпуклости функции u, в которых $u(x)=u_E(x_E)$, выполняется неравенство (3.11). Поскольку там $g=f-cu$ и в рассматриваемых точках $u=u_E$, то его можно переписать в виде

$$w_E^{1/m} \le m^{-1}a_E^{-1/m}(f-cu_E-b_E\nabla u_E). \tag{4.10}$$

Это неравенство мы будем рассматривать только в тех точках с указанным выше свойством, которые являются точками выпуклости функции $u_-(x)=\min(u(x),0)$. В них $u=u_-<0$, так как иначе u не принимало бы отрицательных значений. Докажем, что в таких точках из (4.10) следует неравенство

$$w_E^{1/m} \le m^{-1}a_E^{-1/m}(f-\overline{c}_Eu_E). \tag{4.11}$$

Если в какой-то точке $b_E\nabla u_E\ge 0$, то в правой части (4.10) этот член можно отбросить, от чего неравенство может только усилиться. Тогда, так как $\overline{c}\ge c$ и $u_E<0$, из (4.10) следует (4.11). Поэтому дальше достаточно рассматривать только точки, где $b_E\nabla u_E<0$.

Как сказано, мы ограничиваемся точками выпуклости функции u_-, в которых $u(x)=u_E(x_E)$. Их проекции x_E являются точками выпуклости функции u_{E-}, которую мы для краткости обозначим y. В указанных точках $u(x)=u_E(x_E)=y(x_E)$.

Покажем, что если в какой точке $b_E\nabla u_E<0$, т. е. $b_E\nabla y<0$, то

$$-b_E\nabla y \le |b_E|\frac{|y(x_E)|}{r_E(x_E)}, \tag{4.12}$$

где $r_E(x_E)=r_E(x)$. Тогда, поскольку здесь $y=u_E$, из (4.10) следует неравенство (4.11).

Вообразим себе поверхность S, представляющую в $(m+1)$-мерном пространстве функцию y. Касательная плоскость в точке ее выпуклости не пересекает области G_E. Поэтому ее наклон не больше $|y(x_E)|/h(x_E,\nu)$, где ν — единичный вектор в направлении $\nabla y(x_E)$ и $h(x_E,\nu)$ — расстояние до опорной плоскости P к G_E с нормалью ν. Сказанное означает, что

$$|\nabla y(x_E)| \leq \frac{|y(x_E)|}{h(x_E,\nu)}. \tag{4.13}$$

Поэтому в рассматриваемой точке

$$-b_E\nabla y = |b_E||\nabla y|\cos\theta \leq |b_E||y|\frac{\cos\theta}{h}, \tag{4.14}$$

где θ — угол между векторами $-b_E$, ∇y, т. е. между $-b_E$ и ν, причем $\theta < \pi/2$, так как $b_E\nabla y < 0$.

Так как h есть расстояние от x_E до плоскости P в направлении ν, то $h\cos^{-1}\theta$ есть расстояние от x_E до P в направлении $-b_E$. Но так как плоскость P опорная, то это расстояние не меньше расстояния в том же направлении до границы выпуклой оболочки G_E, т. е. $h\cos^{-1}\theta \geq r_E(x_E)$. Поэтому из (4.14) следует (4.12). А как уже сказано, из (4.12) и (4.10) следует (4.11).

В неравенстве (4.11) $u_E = u$, и его можно переписать в виде

$$w_E^{1/m} \leq m^{-1}a_E^{-1/m}(f-\overline{c}u)_+. \tag{4.15}$$

Пусть q — функция, реализующая норму $\|(f-cu)_+\|_E$ в $G(u<0)$. Согласно п. 2.2 это означает, что почти во всех $x \in G(u<0)$

$$a_E^{-1/m}(x)(f(x)-\overline{c}(x)u(x))_+ \leq q(x_E) \tag{4.16}$$

и

$$\|(f-\overline{c}u)_+\|_E = \|q\|_{L_m}, \tag{4.17}$$

где нормы относятся соответственно к $G(u<0)$ и $G_E(u<0)$. Если $\|(f-\overline{c}u)_+\| = \infty$, то можно формально положить $q=\infty$.

Из (4.15) и (4.16) следует

$$w_E(x) \leq m^{-m}q^m(x_E). \tag{4.18}$$

Это неравенство, как ясно из его вывода, верно при любой E для почти всех точек выпуклости функции u_-, в которых $u(x) = u_E(x_E)$. В [1] доказано, что в таком случае для почти всех плоскостей E любого пучка, для всякой $x \in G(u<0)$ из (4.18) следует

$$\tau_m\left(\frac{|u(x)|}{\overline{h}(x)}\right)^m < m^{-m}\int\limits_{G_E(u<0)} q^m dx = m^{-m}\|q\|_{L_m}^m. \tag{4.19}$$

Вследствие (4.17) это равносильно (4.9), и первая часть теоремы 9 доказана.

4.4. Доказательство второй части теоремы 9, касающейся почти классических решений, проводится точно так же. Изменения, которые нужно при этом сделать, вполне аналогичны указанным в п. 3.5 в связи с доказательством второй части теоремы 4.

§ 5. *Промежуточные оценки. Обобщение на бесконечные области*

5.1. Оценки § 2–4 оказываются крайними в непрерывном ряду оценок через функции h_k при $k \in [0, m]$.

Теорема 10. *В условиях теоремы 6 для почти всех плоскостей $E = E_m$ любого пучка при любом m, $1 \le m \le n$, и $k = sm$, $s \in (0, 1)$, для значений $u(x) < 0$ имеют место неравенства*

$$|u(x)| < H_{m,s}(\|(f - cu)_+ + |b| r^{-s} |u|^s \|_E) h_{k_E}(x), \tag{5.1}$$

где $b = b_E$, $r = r_E$, те же в теореме 6, а $H_{m,s}$ — непрерывная возрастающая функция; $H_{m,s}(0) = 0$ и при больших ξ

$$H_{m,s}(\xi) = \alpha \xi^{1/s} + o\left(\xi^{1/s}\right), \qquad \alpha = \left(\frac{k}{m^m \varkappa_m}\right)^{1/k}. \tag{5.2}$$

Здесь, так же как в теоремах 1, 6, норму можно брать для $G(u < 0)$ и имеет место дополнение, касающееся почти классических решений.

Эта теорема дает оценку отношения $|u|/h_k$ в зависимости от $\|(f - cu)_+\|_E$, а также от $\|br^{-s}u^s\|_E$ или $\|br^{-s}\|_E$ и $\max|u|$. С ростом s условие конечности этих норм становится более сильным. Но, с другой стороны, по известному неравенству между средними, если $k_1 > k_2$, то $h_{k_1}(x) < h_{k_2}(x)$ (кроме того случая, когда выпуклая оболочка G_E — шар, а x_E — его центр). Поэтому теорема 10 открывает возможность более точных оценок в зависимости от свойств функции $b_E r_E^{-s}$. К тому же мы можем выбирать разные плоскости разных размерностей m. Все это дает аппарат для довольно детального исследования некоторых свойств решений уравнения (1.1).

5.2. Докажем теорему 10. При этом будем исходить из неравенства (4.10) и воспользуемся неравенством (4.12). Согласно последнему, в точках выпуклости функции u_-, в которых $u(x) = u_E(x_E)$ и поэтому $\nabla u = \nabla u_E$,

$$-b_E \nabla u \le |b_E| \frac{|u|}{r_E}. \tag{5.3}$$

Поэтому при любом $s \in (0,1)$ из (4.10) следует, что в таких точках (опуская здесь и дальше индекс E)

$$w \leq m^{-m} a^{-1} (g + l p^{1-s})^m, \tag{5.4}$$

где для краткости положено

$$g = (f - cu)_+, \qquad l = |b_E| \left(\frac{|u|}{r_E}\right)^s, \qquad p = |\nabla u|. \tag{5.5}$$

Так как $g + lp^{1-s} \leq (g+l)(1+p^{1-s})$, то из (5.4) получаем

$$w \leq q^m(x_E) U(p), \tag{5.6}$$

где $U = m^{-m}(1+p^{1-s})^m$, а $q(x_E)$ такая функция в $G_E(u<0)$, что $a^{-1/m}(g+$ $+l) \leq q(x_E)$ и

$$\|g + l\|_E = \|q\|_{L_m}. \tag{5.7}$$

Здесь U такова, что $U(p)p^{-m(1-s)}$ убывает с ростом p. Поэтому на основании теоремы 5 работы [2] из (5.6) следует, что при $k = ms$ в точках, где $u < 0$,

$$m^m \varkappa_m \int\limits_0^{|u(x)|/h_k(x)} (1+p^{1-s})^{-m} p^{m-1} dp < \int\limits_{G_E(u<0)} q^m dx. \tag{5.8}$$

Пользуясь (5.7) и раскрывая смысл g и l из (5.5), видим, что здесь сперва стоит m-я степень той самой нормы, которая входит в (5.1). Левая же часть (5.8) есть неограниченно растущая функция верхнего предела. Поэтому (5.1) следует из (5.8). Асимптотическая формула (5.2) столь же очевидна из (5.8). Получаемая из (5.8) функция H, конечно, не является наилучшей, но порядок ее роста не может быть понижен.

5.3. Вместо оценки (5.1) можно получить другие. Например, *при условиях теоремы 10*

$$|u(x)| < (\|(f-cu)_+\|_E^m + \|br^{-s}u\|_E^m)^{1/m} F_{m,s}(\|br^{-s}\|_E) h_{k_E}(x), \tag{5.9}$$

где $F_{m,s}$ — непрерывная, возрастающая функция и при больших ξ

$$F_{m,s}(\xi) = \alpha \xi^{(1-s)/s} + o\left(\xi^{(1-s)/s}\right), \qquad \alpha = \left(\frac{k}{m^m \varkappa_m}\right)^{1/k}. \tag{5.10}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и мы его опускаем.

Из (5.9), подобно тому как, например, теоремы 2, 3 выводятся из теоремы 1, получаем следующее:

необходимым условием существования нетривиального решения однородной задачи является при любом данном $s \in (0,1)$ *и* $\|c_+\|$, $\|br^{-s}\| < \infty$ *выполнение неравенств для почти всех* E *любого пучка*

$$\Delta_{Ek} \equiv F_{ms}(\|br^{-s}\|_E) - (\|c_+ h_k\|_E^m + \|br^{-s} h_k\|_E^m) < 0. \tag{5.11}$$

Если же в некотором пучке $\Delta_{Ek} > 0$, *то при* $u(x) < 0$

$$|u(x)| < \|f_+\|_E \Delta_{Ek}^{-1/m} h_{kE}(x). \tag{5.12}$$

Иначе говоря, *если* $\|br^{-s}\|$, $\|c_+\| < \infty$ *и* $\|br^{-s}h_k\|$, $\|c_+ h_k\|$ *достаточно малы, то решение задачи Дирихле единственно в классах I и II и имеет место оценка (5.12).*

5.4. До сих пор мы считали область G конечной, но в [1] было показано, что полученные там общие выводы, на которые мы здесь ссылались, переносятся с некоторыми небольшими изменениями на бесконечные области. Это позволяет утверждать следующую теорему.

Теорема 11. *Все предыдущие теоремы 1–10 переносятся на бесконечные области* G *при следующих дополнительных условиях.*

1. Требование ограниченности решения заменяются требованием «проективной ограниченности»: существуют такие линейные функции $l(x)$, $l'(x)$, *что* $l(x) \geq u(x) \geq l'(x)$.

2. Условие $u|_\Gamma \geq 0$ *понимается в том смысле, что при всяком* $\varepsilon > 0$ *найдется такая компактная область* $D \subset G$, *что в* $G \setminus D$ $\quad u(x) > -\varepsilon(|u|+1)$ *(*$u|_\Gamma \leq 0$, *если* $-u|_\Gamma| \geq 0$, *и* $u|_\Gamma = 0$, *если* $u|_\Gamma \geq 0 \quad u \leq 0$*).*

3. Допускаются лишь такие плоскости E, *для которых выпуклая оболочка проекции* G_E *области* G *не содержит прямых, так что сферическое изображение* ω_E *границы этой выпуклой оболочки имеет внутренние точки (относительно* Ω_E*).*

4. Функции h_{kE} *определяются теми же формулами (2.1) с заменой* Ω_E *на* ω_E *и* $\varkappa_m$ *— на* $|\omega_E| = \operatorname{mes}\omega_E$.

5. Соответственно во всех формулах теорем 1–10 $\varkappa_m$, τ_m *должны быть заменены на* $|\omega_E|$, $m^{-1}|\omega_E|$.

*6. В теоремах 2, 2*а*, 8, 8*а *нужно добавить требование конечности* $\|c_+ x\|_E$.

Всё остальное остается без изменений.

Можно еще добавить, что мы, очевидно, считаем в (4.1) и далее $r_E^{-1}(x) = 0$, если луч, проведенный из точки x_E в направлении $-b_E(x)$, не встречает Γ.

Условие 3 имеет смысл лишь тогда, когда у области G такие проекции существуют. Оно будет выполнено для плоскостей некоторого пучка, если сама G такова, что ее выпуклая оболочка не содержит прямых. Если же речь идет о почти классических решениях, то достаточно существования хотя бы одной плоскости E с условием 3.

Условие 6 связано с тем, что ограниченность решения заменяется ограничением его линейными функциями. Поэтому конечность $\|c_+u\|$ гарантируется конечностью $\|c_+\|$ и $\|c_+x\|$. Если же рассматривать ограниченные решения, то условие (5.6) лишнее.

Заметим еще, что, как очевидно из указанного в условии 4 определения функций h_{kE}, они заведомо конечны для бесконечных G_E с условием 3, если $k > 0$. Функция же h_{0E} может быть как конечной, так и бесконечной. В этом смысле оценки с $h = h_{0E}$ оказываются условными. Например, h заведомо конечна, если расстояния $h(x, \nu)$ ограничены, как это имеет место, например, для гиперболоида. Нетрудно показать, что для каждой G либо h всюду конечна, либо всюду в $G \quad h = \infty$. Непосредственно легко проверить, что для всякой G, сферическое изображение которой покрывает полусферу и которая содержит поверхность с уравнением в цилиндрических координатах $z = r\ln(r+1)$, $h(x) = \infty$. Напротив, для всякой G, содержащейся в поверхности $z = r\ln^l(r+1)$, $l > 1$, $h(x) < \infty$.

Доказательство теоремы 11 получается непосредственным применением [1, § 4] к приведенным выше доказательствам теорем 1–10.

Статья поступила в редакцию
15.VII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Один общий метод мажорирования решений задачи Дирихле // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 2. С. 486–498.
2. *Александров А. Д.* Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле // Вестн. ЛГУ. 1963. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 5–29.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
4. *Weinberger H. F.* Symmetrization in uniformly elliptic problems // Stud. Math. Anal. Related Topics, Essays in Honor of G. Polya. 1962. P. 424–428.
5. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. V // Изв. вузов. Математика. 1960. № 5. С. 16–26.
6. *Александров А. Д.* То же. VI // Там же. 1961. № 1. С. 3–20.
7. *Frasca M.* Un problema variazionale per operatori ellittici // Matematiche. 1963. T. 18. P. 1–11.

Невозможность общих оценок решений и условий единственности для линейных уравнений с нормами, более слабыми, чем в L_n

Вестн. ЛГУ. 1966. № 13. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 3. С. 5–10

1. В [1, 2] были получены оценки решений и условия единственности первой краевой задачи для линейных уравнений

$$a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + cu = f, \qquad a^{ij}\xi_i\xi_j \geq 0 \tag{0}$$

в n-мерной области G. В простейшем случае эти оценки и неравенства, выражающие условия единственности, содержат нормы в $L_n(G)$ с весом a^{-1}, $a = \det(a^{ij})$, т. е., например, $\left\|a^{-1/n}f\right\|_{L_n(G)}$ и др.

Пусть $\varphi(\xi)$ — положительная ограниченная функция, определенная на полуоси $\xi \geq 0$, и такая, что

$$\lim_{\xi\to\infty} \varphi(\xi) = 0. \tag{1}$$

Сопоставим любой функции g в G «псевдонорму», связанную с уравнением (0):

$$N_\varphi(g) = \int\limits_G \varphi(a^{-1}|g|^n)a^{-1}|g^n|dx, \qquad a = \det(a^{ij}). \tag{2}$$

Мы докажем здесь, что *никакие общие оценки решения, так же как никакие условия единственности, выраженные через такие псевдонормы, невозможны*[1)]. В силу условия (1) такая псевдонорма «слабее» нормы в $L_n(G)$ с весом a^{-1}. Множитель a^{-1} означает лишь то, что эллиптическое уравнение (0) всегда можно нормировать так, что $\det(a^{ij}) = 1$. Сказанное не означает, конечно, что невозможны оценки через нормы более слабые, чем норма в L_n, если уравнение подчиняется дополнительным условиям, помимо эллиптичности. Пусть решение можно представить с помощью функции Грина

$$u(x) = \int G(x,y)f(y)dy. \tag{3}$$

[1)]Этот результат был сообщен без доказательства в [2].

Тогда по неравенству Гёльдера

$$|u| \leq \left(\int |G|^p dy\right)^{1/p} \left(\int |f|^q dy\right)^{1/q}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4}$$

Поэтому если $G(x, y)$ имеет обычную особенность порядка $|x-y|^{2-n}$, $n \geq 3$, то интеграл от $|G|^p$ будет конечным, когда $p < n/(n-2)$, так что $q > n/2$. Тогда (4) дает оценку $|u|$ через норму f в L_q при любом $q > n/2$. Такие оценки получены, например, в [3–5], но в них входит нижняя грань собственных значений матрицы a^{ij}, предполагаемая положительной. В наших же оценках она отсутствует, а играет роль только $a = \det(a^{ij})$. А в таком случае имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть N_φ — какая-либо псевдонорма, определенная условиями* (1), (2). *В единичном шаре G существует такая последовательность уравнения*

$$a^{ij}u_{ij} = f \tag{5}$$

и их решений $u(x)$ с $u|_\Gamma = 0$, что $N_\varphi(f) \to 0$, но для всех $x \in G$, $u(x) \to \infty$.

Это и значит, что никакие общие оценки через N_φ невозможны. Можно обеспечить, чтобы уравнения (5) были строго эллиптичными, а a^{ij}, f, так же как решения u, — сколь угодно гладкими. Однако эти свойства не выполняются равномерно по всей последовательности уравнений, существование которой утверждает теорема.

2. В доказательстве теоремы 1, как и других результатов этой работы, мы воспользуемся следующим замечанием.

Лемма. *Для любой функции φ с указанными выше свойствами существует такая последовательность непрерывных, убывающих функций $k_\lambda(\zeta)$ на интервале (0, 1), что*

$$\int_0^1 k_\lambda(\zeta)d\zeta = \infty, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^1 \varphi(k_\lambda(\zeta))k_\lambda(\zeta)d\zeta = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Мажорируем $\varphi(\xi)$ непрерывно дифференцируемой функцией $\overline{\varphi}$ с $\overline{\varphi}' < 0$ и стремящейся при $\xi \to \infty$ к нулю столь медленно, что $\overline{\varphi}(\xi)\xi$ возрастает и стремится к бесконечности. Эту функцию мы также обозначим через φ. Если для нее мы найдем функции k_λ с требуемыми в лемме условиями, то тем более (6) будет верно для исходной функции φ с теми же k_λ.

Итак, пусть $\varphi'(\xi) < 0$,

$$\lim_{\xi\to\infty} \varphi(\xi) = 0, \qquad \lim_{\xi\to\infty} \xi\varphi(\xi) = \infty. \tag{7}$$

Определим при любом данном $\lambda > 0$ функцию $k_\lambda(\zeta)$ как обратную для

$$\zeta = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_k^\infty \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi^{3/2}(\xi)}\cdot\frac{d\xi}{\xi}. \tag{8}$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание второе условие (7), убедимся, что стоящий здесь интеграл при $k > 0$ конечен, так что равенство (8) действительно определяет некоторую функцию $\zeta(k)$ и, вследствие того, что $\varphi' < 0$, также обратную ей $k_\lambda(\zeta)$. Кроме того, видно, что $\zeta(0) = \infty$ и $\zeta(\infty) = 0$. Поэтому $k_\lambda(\zeta)$ определена при всех $\zeta > 0$, убывает и $k_\lambda(0) = \infty$.

Из (8) следует, что k_λ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dk_\lambda}{d\zeta} = \lambda\frac{\varphi^{3/2}(k_\lambda)}{\varphi'(k_\lambda)}k_\lambda. \tag{9}$$

Отсюда, имея в виду, что $k_\lambda(0) = \infty$, а $\varphi(\infty) = 0$, получим

$$\int\limits_0^1 k_\lambda(\zeta)\,d\zeta = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_{k_\lambda(1)}^\infty \frac{\varphi'(k)}{\varphi^{3/2}(k)}\,dk = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\varphi(k_\lambda(1))}\frac{d\varphi}{\varphi^{3/2}} = \infty, \tag{10}$$

т. е. первое условие (6) на функции k_λ выполнено. С другой стороны, точно так же получим

$$\int\limits_0^1 \varphi(k_\lambda)k_\lambda\,d\zeta = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_{k_\lambda(1)}^\infty \frac{\varphi'(k)}{\sqrt{\varphi(k)}}\,dk = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\varphi(k_\lambda(1))}. \tag{11}$$

Так как $\varphi(\xi)$ ограничена на полуоси $\xi \geq 0$, то правая часть (11), а вместе с ней и левый интеграл в (11), стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. То есть второе условие (6) также выполнено, и лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Воспользуемся тем же приемом, какой был применен в доказательствах теорем 1–6 работы [1]. Именно примем за u регулярную выпуклую функцию в единичном шаре G и положим $a^{ij} = w^{ij}$, где w^{ij} — алгебраические дополнения элементов матрицы (u_{ij}). Тогда

$$a^{ij}u_{ij} = f, \qquad f = nw, \qquad w = \det(u_{ij}), \tag{12}$$

т. е. u удовлетворяет уравнению (5) с $f = nw$, причем

$$a = \det(a^{ij}) = w^{n-1}, \qquad a^{-1}f^n = n^n f. \tag{13}$$

Введем сферические координаты r, ν с началом в центре шара G и будем предполагать u зависящей только от r. Тогда [2)]

$$nw = \frac{(u_r^n)_r}{r^{n-1}}. \tag{14}$$

Поэтому второе равенство (12) сводится к тому, что

$$(u_r^n)r = r^{n-1} f(r). \tag{15}$$

Соответственно тому, что уравнение (5) рассматривается в единичном шаре, уравнение (15) рассматривается на отрезке [0, 1]. Граничное условие $u|_\Gamma = 0$ сводится к тому, что $u(1) = 0$. Кроме того, $u_r(0) = 0$.

Поэтому из (15) находим

$$u_r^n(r) = \int\limits_0^r f(r) r^{n-1} dr, \tag{16}$$

откуда, пользуясь условием $u(1) = 0$, находим $u(r)$.

Пусть теперь φ — функция, определяющая псевдонорму N_φ. Согласно лемме 2, существует такая последовательность непрерывных убывающих функций $l_\lambda(r)$, что

$$\int\limits_0^1 l_\lambda(r) r^{n-1} dr = \infty, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \varphi(n^n l_\lambda(r)) l_\lambda(r) r^{n-1} dr = 0. \tag{17}$$

Эти соотношения те же, что (6), стоит лишь положить $\zeta = r^n$, $k_\lambda(\zeta) = n^n l_\lambda(r)$.

Срезая подходящим образом функции l_λ вблизи $r = 0$, получим последовательность функций $f_\lambda(r)$, непрерывных на замкнутом отрезке [0, 1] и таких, что при всяком данном $r > 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_0^r f_\lambda(r) r^{n-1} dr = \infty, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_0^1 \varphi(n^n f_\lambda) f_\lambda r^{n-1} dr = 0. \tag{18}$$

[2)] Объем опорного изображения шара радиуса r с центром в начале координат (посредством функции u) будет, как очевидно, $\tau_n u_r^n(r) = \varkappa_n \int\limits_0^r w r^{n-1} dr$, откуда, дифференцируя по r, получаем (14); τ_n, $\varkappa_n$ — объем и поверхность единичной сферы.

По функциям $f_\lambda(r)$ определим из (16) соответствующие $u^{(\lambda)}(r)$. Тогда из первого соотношения (18) видно, что $u_r^{(\lambda)}(r) \to \infty$ при всяком $r > 0$, поэтому сами функции $u^{(\lambda)}$ бесконечно возрастают. А так как они являются решениями соответствующих уравнений (12), то мы получим последовательность уравнений вида (5) с такими решениями $u^{(\lambda)}$, что всюду в $G \quad u^{(\lambda)} \to \infty$.

С другой стороны, из последнего равенства (13) видно, что второй интеграл (18) есть не что иное, как $N_\varphi(f_\lambda)$ с точностью до постоянного множителя. Следовательно, $N_\varphi(f_\lambda) \to 0$ и теорема 1, таким образом, доказана.

4. Относительно условий единственности решения задачи Дирихле имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть N_φ — какая-либо псевдонорма, определенная условиями* (1), (2)*; G — единичный шар; ε — данное положительное число.*

I. *Существует такое уравнение в G вида*

$$a^{ij}u_{ij} + cu = 0, \tag{19}$$

что $N_\varphi(c) < \varepsilon$, но уравнение имеет ненулевое решение с $u|_\Gamma = 0$.

II. *Существует такое уравнение в G вида*

$$a^{ij}u_{ij} + b\nabla u = 0, \tag{20}$$

что $N_\varphi(b) < \varepsilon$, но уравнение имеет ненулевое решение с $u|_\Gamma = 0$.

Первое утверждение означает, очевидно, невозможность какой бы то ни было общей оценки для $N_\varphi(c)$, которая обеспечивала бы единственность решения задачи Дирихле.

В связи со вторым утверждением укажем, что в [2] относительно уравнения (0) с $c \le 0$ в любой области G было доказано следующее. Для единственности решения задачи Дирихле достаточно, чтобы для всякой замкнутой области $D \subset G$ было $\|a^{-1/n_b}\|_{L_n(D)} < \infty$[3]. Утверждение же II показывает, что ни при какой псевдонорме N_φ ограничения на $N_\varphi(b)$ для всей G не обеспечат единственности в классе сколь угодно гладких решений. То, что единственность не обеспечивается конечностью $\|a^{-1/n_b}\|_{L_q(G)}$ ни при каком $q < n$, показывает пример уравнения $\Delta u + nr^{-1}u_r = 0$. В единичном шаре оно имеет решение $u = r^2 - 1$, но r^{-1} суммируемо с любой степенью $q < n$.

5. Доказательство утверждения I теоремы 2. Функцию φ, определяющую псевдонорму N_φ, можно мажорировать такой $\overline{\varphi}$, что $\overline{\varphi}(\xi)\xi$ не убывает с ростом ξ. Поэтому мы можем без ограничения общности саму φ считать удовлетворяющей этому условию.

---

[3] Имеется в виду единственность в любом множестве функций с абсолютно непрерывным опорным изображением, в частности в классе функций, имеющих обобщенные вторые производные, суммируемые с n-й степенью во всякой замкнутой области $D \subset G$.

Рассмотрим те же уравнения (12) с теми же функциями $u^{(\lambda)}$, f_λ, что в доказательстве теоремы 1. Опуская дальше для простоты записи индекс λ, положим

$$f = c|u|. \tag{21}$$

Тогда, поскольку $u < 0$, оказывается, что функции u удовлетворяют уравнениям вида (19).

В условиях (18) на функции f играет роль только их поведение вблизи значения $r = 0$. Поэтому, сохраняя данные условия, можно подчинить функции f дополнительному требованию, чтобы при r, достаточно близких к 1, было

$$f(r) < C'(1-r)^n, \qquad C' = \text{const}\,. \tag{22}$$

Покажем, что при этом условии $N_\varphi(c) \to 0$; тем самым утверждение I теоремы 2 будет доказано.

Из (21) и последнего равенства (13) следует

$$n^n f = a^{-1}c^n|u|^n. \tag{23}$$

Кроме того, очевидно, $u_r(1) > \text{const} > 0$, так что $|u| > C''(1-r)$. Отсюда в соединении с (22) заключаем из (23), что при r, достаточно близких к 1,

$$a^{-1}c^n < C = \text{const}\,. \tag{24}$$

Далее, вследствие (23), второе равенство (18) приводится к

$$\lim \int_0^1 \varphi(a^{-1}c^n|u|^n)a^{-1}c^n|u|^n r^{n-1}dr = 0. \tag{25}$$

Пусть r_λ таково, что при $r < r_\lambda$, $u(r) \equiv u^{(\lambda)}(r) > 1$. Так как при всяком $r < 1 \quad u^{(\lambda)}(r) \to \infty$, то $r_\lambda \to 1$.

По сделанному в начале предположению $\varphi(\xi)\xi$ не убывает с ростом ξ. Поэтому при $r < r_\lambda$ подынтегральная функция в (25) не меньше $\varphi(a^{-1}c^n)a^{-1}c^n r^{n-1}$ и из (25) следует, что

$$\lim \int_0^{r_\lambda} \varphi(a^{-1}c^n)a^{-1}c^n r^{n-1}dr = 0. \tag{26}$$

Но так как $r_\lambda \to 1$ и согласно (24) при r, близких к 1, $a^{-1}\ c^n < \text{const}$, то точно так же

$$\lim \int_{r_\lambda}^0 \varphi(a^{-1}c^n)a^{-1}c^n r^{n-1}dr = 0. \tag{27}$$

Складывая (26) и (27), получаем $N_\varphi(c) \to 0$, чем утверждение I теоремы 2 доказано.

6. Доказательство утверждения II теоремы 2. При данной функции φ, определяющей псевдонорму N_φ, и данном $\varepsilon > 0$ можно согласно лемме п. 2 задать такую функцию $l(r)$, что

$$\int_0^1 l(r)r^{n-1}dr = \infty, \qquad \int_0^1 \varphi(n^n l(r))n^n l(r)r^{n-1}dr < \varepsilon. \tag{28}$$

Определим функцию $u(r)$:

$$u(r) = -\int_r^1 e^{-g(r)}dr, \qquad g(r) = \int_r^1 l(r)r^{n-1}dr. \tag{29}$$

Функция u выпукла и удовлетворяет условиям $u(1) = 0$, $u_r(0) = 0$; последнему — вследствие первого равенства (28). Кроме того, она удовлетворяет уравнению

$$u_{rr} = r^{n-1}l(r)u_r. \tag{30}$$

С другой стороны, составим для u уравнение (12): $a^{ij}u_{ij} = nw$, где $a^{ij} = w^{ij}$. Тогда, вследствие (14) и (30), оно сводится к

$$a^{ij} = nw = n\left(\frac{u_r}{r}\right)^{n-1}, \qquad u_{rr} = nl(r)u_r^n. \tag{31}$$

Это означает, что функция u является решением уравнения

$$a^{ij}u_{ij} + b\nabla u = 0, \tag{32}$$

где, поскольку $|\nabla u| = u_r$,

$$|b| = nl(r)u_r^{n-1}. \tag{33}$$

Так как $a = \det(a^{ij}) = w^{n-1}$ и согласно (31) $w = lu_r^n$, то

$$a^{-1}|b|^n = n^n l(r). \tag{34}$$

Поэтому вторая формула (28) означает, что $N_\varphi(b) < \varepsilon$, чем утверждение II теоремы 2 доказано.

Статья поступила в редакцию
15.VII.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* О мажорантах решений и условиях единственности для эллиптических уравнений // Вестн. ЛГУ. 1966. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 5–20.
2. *Александров А. Д.* Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле // Там же. 1963. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 5–29.
3. *Мазья В. Г.* Некоторые оценки решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1057–1059.
4. *Stampacchia G.* Some limit cases of L^p-estimates for solutions of second order elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16, No. 4. P. 505–510.
5. *Weinberger H. F.* Symmetrization in uniformly elliptic problems // Stud. Math. Anal. Related Topics, Essays in Honor of G. Polya. 1962. P. 424–428.

Один общий метод мажорирования решений задачи Дирихле

Сибирский математический журнал. 1966. Т. 7, № 3. С. 486–498

§ *1. Основы метода*

1. Для дифференциальных уравнений второго порядка достаточно общего вида (вообще говоря, эллиптических) мы строим здесь функции, возможно точнее мажорирующие решения задачи Дирихле. При этом мажоранта зависит от области и некоторых интегральных характеристик уравнения, типа норм коэффициентов, а также, может быть, от аналогичных характеристик самого решения и граничных условий. Попутно выводятся необходимые условия существования ненулевых решений однородных задач и другие результаты. Используемый метод является обобщением метода, применявшегося в [1–3] к эллиптическим квазилинейным уравнениям и частично обобщенного в [4]. В [1–4], как обычно делается в работах по этим вопросам (см., например, [6–8]), оценивался только максимум модуля решения, а не возможное значение решения в любой данной точке области. Здесь же мы даем именно такие оценки [1)].

Достаточно искать оценки снизу, так как из них оценки сверху получаются переменой знака решения с соответствующими изменениями вводимых условий. В связи с этим вместо уравнений можно рассматривать неравенства

$$F(u_{ij}, u_i, u, x) \leqslant 0, \tag{1}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$; n — любое целое число $\geqslant 1$. Если явно не оговорено иное, производные $u_i = u_{x_i}$, $u_{ij} = u_{x_i x_j}$ понимаются как аппроксимативные, что включает и обычные, и обобщенные производные, а во всех связанных с ними соотношениях допускается пренебрежение множеством x меры нуль.

[1)] Вопрос о таких оценках для линейных уравнений с двумя переменными рассматривался в [9].

Матрицу из u_{ij} обозначим через (u_{ij}) и будем писать $(u_{ij}) > 0$, если ее собственные значения $\geqslant 0$ и не все нули.

Определим класс рассматриваемых неравенств (1) условием:

(F) для функции F существует такая функция $K(\nabla u, u, x)$, что если $(u_{ij}) > 0$ и $F \leqslant 0$, то

$$w \leqslant K(\nabla u, u, x), \qquad w = \det(u_{ij}). \tag{2}$$

Как обычно, достаточно ограничиваться значениями u_i, u, x для оцениваемых решений (примеры см. в п. 6 § 2).

Далее, вводим условие:

(K) существуют такие функции $X(x, u)$, $U(\nabla u) \geqslant 0$, что $K \leqslant XU$. (Это условие практически всегда выполнено.) Тогда из (2) следует что

$$w \leqslant X(x, u)\, U(\nabla u). \tag{3}$$

2. Неравенство (1) предполагается заданным в конечной области G, а функции u, допускаемые в качестве его решений, предполагаются ограниченными и полунепрерывными снизу.

Пусть $\overline{u}$ — выпуклая функция, натянутая на u, т. е. наибольшая из выпуклых v таких, что всюду в G $v(x) \leqslant u(x)$. Она определена в выпуклой оболочке G^* области G. Мы говорим, что x_0 есть точка выпуклости функции u, если $u(x_0) = \overline{u}(x_0)$. В таких точках $(u_{ij}) \geqslant 0$ и $w \geqslant \overline{w} = \det(\overline{u}_{ij})$, а в других — $\overline{w} = 0$. Поэтому $\overline{u}$ удовлетворяет тому же неравенству (3), и оценки решений неравенства (1) с условиями (F), (K) сводятся к оценкам выпуклых функций, удовлетворяющих (3) в G^*.

В связи с этим достаточно требовать, чтобы функция u удовлетворяла неравенству (3) (а также (1)) только в точках выпуклости. Заметим, что почти во всех таких точках для любой функции существует аппроксимативные дифференциалы du, d^2u. Действительно, если M — множество точек выпуклости u, то на M $\quad u = \overline{u}$ и существует такое $M' \subset M$, что $\operatorname{mes} M = \operatorname{mes} M'$ и на M' $\quad \overline{u}$ дважды дифференцируема. Поэтому, если x — точка плотности M', то в x существуют аппроксимативные дифференциалы du, d^2u, $du = d\overline{u}$, $d^2u = d^2\overline{u}$. Отсюда следует, что при ограничении точками выпуклости требование существования производных делается лишним. К тем же точкам достаточно относить условия (F), (K). Тогда, если точек выпуклости нет, неравенство (3) отпадает; зато функция u, очевидно, оценивается ее значениями на границе G.

Функции u подчиняются, как и в [1], условию (A): натянутая на u выпуклая функция имеет абсолютно непрерывное нормальное (или, как мы будем говорить, опорное) изображение [2]. Это условие предполагается дальше выполненным без оговорок. В частности, ему удовлетворяют функции, имеющие обобщенные производные u_{ij}, суммируемые с n-й степенью во всякой замкнутой области $D \subset G$ [5].

3. Определим граничные значения $u|_\Gamma$ следующим образом: при $x \in \Gamma$ $u(x) = \varliminf\limits_{x' \to x} u(x')$ — нижний предел по всем $x' \to x$, $x' \in G$.

Введем обозначения: $u_{(x)} = \min(u(x), 0)$; ν — точка на единичной сфере ω в E_n или соответствующий единичный вектор; $h(x, \nu)$ — расстояние от точки x до опорной плоскости к $G \cup \Gamma$ с внешней нормалью ν; $\nabla u = p\nu$, $p = |\nabla u|$.

Теорема 1. *Пусть функция u в области G с условием $u|_\Gamma \geqslant 0$ удовлетворяет неравенству (3) в точках выпуклости функции u_-. Тогда для тех x, где $u(x) < 0$,*

$$\int\limits_\omega \Bigg(\int\limits_0^{|u(x)|/h(x,\nu)} U^{-1}(p\nu)\, p^{n-1}\, dp \Bigg) d\nu \ < \int\limits_{G(u<0)} X(x,\, u(x))\, dx, \tag{4}$$

если правый интеграл, который берется по той части G, где $u < 0$, конечен.

Доказательство. По условиям теоремы можно вместо u рассматривать u_-, предполагая, что $u_- \not\equiv 0$. Перепишем неравенство (3) в виде $U^{-1} w \leqslant X$ и проинтегрируем по множеству M точек выпуклости функции u_-. Замечая, что $w = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}$, и пользуясь условием (A), интеграл от $U^{-1} w$ можно преобразовать к переменным u_i. В результате получим

$$\int\limits_{\psi_{u_-}(M)} U^{-1} du_1 \ldots du_n = \int\limits_M U^{-1} w\, dx \leqslant \int\limits_M X dx \leqslant \int\limits_{G(u<0)} X(x,\, u(x))\, dx. \tag{5}$$

Выбрав точку x, где $u(x) < 0$, построим в пространстве с координатами $x_1, \ldots, x_n, z$ конус с вершиной в точке $(x, u(x))$, проектирующий из нее границу выпуклой оболочки области G. Из геометрических соображений видно, что его опорное изображение содержится в $\psi_{u_-}(M)$ и представляет собой область, ограниченную поверхностью, имеющей в координатах p, ν

---

[2] Это условие можно выразить, не вводя выпуклой функции $\overline{u}$. Точка x_0 выпуклости функции u характеризуется тем, что существует «опорная к u снизу» линейная функция $p_i x^i + q$, для которой $u(x) \geqslant p_i x^i + q$, $u(x_0) = p_i x_0^i + q$. Каждой такой функции сопоставляем точку $(p_1, \ldots, p_n)$. Множество $\psi_u(M)$ всех таких точек, отвечающих всем функциям $p_i x^i + q$, опорным в точках множества M, назовем (нижним) опорным изображением M посредством u. Условие (A) равносильно тому, что если $\operatorname{mes} M = 0$, то и $\operatorname{mes} \psi_u(M) = 0$. Заметим, что условие (A) глобальное: оно выполнено для u и G; но отсюда не следует, что оно выполняется для ограничения u на $G' \subset G$.

уравнение $p = |u(x)|/h(x,\nu)$. Ввиду этого, левый интеграл в (5) больше интеграла по такой области, а этот последний есть левый интеграл в (4). Поэтому (4) следует из (5), и теорема доказана.

Правый интеграл в (4), очевидно, оценивается сверху интегралом от $X(x,u(x))$ по всей области G. Для того чтобы обеспечить его конечность, на функцию X нужно наложить подходящие условия. Например, можно требовать, чтобы при любой ограниченной $v(x)$ $X(x,v(x))$ была суммируема в G. Тогда неравенство (4), очевидно, содержит оценку для $|u(x)|$, пока в неявном виде. Но и в таком виде оценка имеет смысл, так как значение решения в данной точке оценивается через некоторую его интегральную характеристику. Если же X не зависит от u, что будет, например, тогда, когда F в (1) не возрастает по u, то оценка сразу получается безусловной (если, конечно, левый интеграл растет с ростом $|u(x)|$). В общем предлагаемый метод мажорирования решений дифференциальных уравнений сводится к применению теоремы 1.

4. Обобщим условия (F), (K). Пусть E_m — m-мерная плоскость, $1 \leqslant m \leqslant n$; при $m = n$, $E_m = E_n$ есть все пространство и дальнейшее сводится к сказанному выше. Пока опустим индекс m. Будем считать оси $x^1,\dots,x^m$ лежащими в E, повернув соответственно все оси. Пусть x_E обозначает проекцию точки x на E, G_E — проекцию G. Проекцией функции u назовем такую функцию u_E, определенную на G_E так, что при всякой $x \in G_F$ $u_E(x) = \inf_{x'_E=x} u(x')$. Обозначим через w_E определитель проекции формы d^2u; если $d^2u \geqslant 0$, эта проекция определена и является квадратичной формой; w_E вычисляется из u_{ij} алгебраически.

Введем условие (F_E): для функции F в (1) и данной E существует такая функция $K(\nabla u, u, x_E)$, что если $(u_{ij}) > 0$ и $F \leqslant 0$, то

$$w_E \leqslant K(\nabla u, u, x_E). \tag{6}$$

Фактически сначала находится функция $K_0(\nabla u, u, x)$ с тем же свойством, а потом берется $K = \sup K_0$ по всем x с данной проекцией x_E.

Пусть $M(u,E)$ — множество таких точек выпуклости u, что $u(x) = u_E(x_E)$. Соответствующие x_E являются точками выпуклости u_E. Функцию u можно считать удовлетворяющей неравенству (6), если оно выполняется (почти везде) на $M(u,E)$ ($M(u,E)$ может быть пустым, но тогда u, очевидно, оценивается снизу значениями $u|_\Gamma$).

Если u в точке $x \in M(u,E)$ дифференцируема, то $\nabla u = \nabla u_E$. Поэтому, относя (6) к $M(u,E)$, можно в K заменить u на u_E, а ∇u на ∇u_E. (То же можно сделать сразу в условии (F_E).) Тогда (6) заменится на

$$w_E \leqslant K(\nabla u_E, u_E, x_E). \tag{7}$$

Вводя условие (K_E), аналогичное (K), получим отсюда

$$w_E \leqslant X(x_E, u_E)\, U(\nabla u_E). \tag{8}$$

Здесь в правой части все относится к G_E. Однако w_E может не существовать на таком множестве точек $x \in M(u, E)$ меры нуль, проекция которого имеет в E положительную меру, и (8) может даже вовсе не иметь смысла. Тогда условия (F_E), (K_E) и неравенство (8) применяются к пучкам плоскостей E.

Пусть $\{E_m\}_0$ — множество всех E_m, проходящих через данную E_{m-1} (точку, если $m = 1$). Пучком назовем подмножество любого $\{E_m\}_0$, если оно имеет положительную меру в смысле естественной меры в $\{E_m\}_0$.

5. Имеет место следующая теорема, включающая теорему 1.

Теорема 2. *Пусть для функции u с $u|_\Gamma \geqslant 0$ для плоскостей E некоторого пучка $\{E\}$ выполнены неравенства* (8) *с X, U, вообще говоря, различными для разных E, и хотя бы только в точках $x \in M(u_-, E)$. Тогда при таких x с $u(x) < 0$ для почти всех E из $\{E\}$ выполняются неравенства*

$$\int\limits_{\omega_E} \int\limits_0^{|u(x)|/h(x,\nu)} U^{-1}(p\nu)\, p^{n-1}\, dp d\nu \;<\; \int\limits_{G_E(u<0)} X(x,\, u_E(x))\, dx, \tag{9}$$

если правые интегралы конечны. Здесь ω_E — единичная сфера в E, а ν, p, $h(x,\nu)$ те же, что в п. 3. (Если $m = n$, то «пучок» сводится к одной «плоскости» E_n и теорема 2 превращается в теорему 1.)

Дополнение. Если функция u всюду дифференцируема, а также дважды дифференцируема и удовлетворяет неравенству (8) для некоторой плоскости E всюду за исключением, самое большее счетного множества точек, то (9) выполнено для этой E. (При этом достаточно требовать выполнения указанных условий только на множестве $M(u_-, E)$; предполагать выполненным условие (A) нет надобности.)

Доказательство теоремы 2 и дополнения к ней получается сведением к теореме 1. Пусть w'_E обозначает $\det(u_{Eij})$, если оси $x^1, \ldots, x^m$ лежат в E, т. е. w'_E для u_E то же, что w для u. Если в точке $x \in M(u_-, E)$ и в ее проекции x_E функции u, u_E дважды дифференцируемы, так что $w_E(x)$, $w'_E(x_E)$ существуют, то, как легко видеть, $w_E(x) \geqslant w'_E(x_E)$. Поэтому из (8) следует, что

$$w'_E(x_E) \leqslant X(x_E, u_E)\, U(\nabla u_E). \tag{10}$$

Это неравенство относится уже полностью к функции u_E и вполне аналогично неравенству (3) для самой u. Поэтому, если для u_E выполнены условия теоремы 1, то, сославшись на нее, мы получим неравенство (9). Условия эти следующие: 1) u_E должна удовлетворять условию (A); 2) неравенство (10) выполнено почти во всех точках выпуклости u_{E_-}. Это последнее условие, очевидно, будет выполнено, если неравенство (8) не выполняется максимум на таком множестве точек $x \in M(u_-, E)$, проекция которого на E имеет в E меру нуль.

При условиях, формулированных в дополнении к теореме 2, второе из указанных условий, очевидно, выполнено. Первое также выполнено. Действительно, здесь выпуклая функция, натянутая на $(u_E)_-$, будет дифференцируемой и всюду, кроме счетного множества точек, имеет конечные верхние вторые производные. Поэтому она удовлетворяет условию (A), как это непосредственно следует из известной теоремы об абсолютной непрерывности функции множества, имеющей всюду конечную производную [10].

Таким образом, дополнение к теореме 2 доказано. Выполнение указанных условий для u_E в предположениях самой теоремы 2 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть функция u в G с $u|_\Gamma \geqslant 0$ удовлетворяет условию (A). Пусть M — множество точек ее выпуклости и P — некоторое его подмножество с $\operatorname{mes} P = \operatorname{mes} M$. Тогда для почти всех E из любого пучка*

1) *(u_E) удовлетворяет условию (A);*

2) *почти все точки выпуклости $(u_E)_-$, в которых $w'_E > 0$, являются проекциями точек $x \in M((u_E)_-, E) \cap P$.*

Отложив доказательство этой леммы, примем за P то множество точек выпуклости, где u дважды дифференцируема и удовлетворяет неравенствам (8). Тогда для тех плоскостей E, для которых выполнены оба утверждения леммы, $(u_E)_-$ удовлетворяет условию (A) и почти во всех точках выпуклости — неравенству (10). Там, где $w'_E > 0$, это верно в силу второго утверждения леммы, а там, где $w'_E = 0$, это верно просто потому, что $XU \geqslant 0$. Теорема 2 доказана.

6. Докажем лемму 1. Пусть для данной E $(u_E)_-$ не удовлетворяет условию (A). Тогда в опорном изображении $\psi_{(u_E)_-}(G_E)$ есть множество N_E положительной меры, прообраз Q_E которого имеет в G_E меру нуль. Этому Q_E отвечает множество R_E точек $x \in M(u_-, E)$. Можно считать, что всюду на Q_E u_E не является дважды дифференцируемой; хотя бы одна ее верхняя вторая производная бесконечна (потому что на множестве, где все такие производные конечны, опорное изображение абсолютно непрерывно). Тогда в точках $x \in R_E$ сама u не будет дважды дифференцируемой.

Очевидно, опорное изображение $\psi_{(u_E)_-}(G_E) = \psi_{u_-}(G) \cap E$. Поэтому, если бы для плоскостей E какого-то пучка имела место указанная ситуация, то в $\psi_{u_-}(G)$ имелось бы множество $N = \sum N_E$ положительной внешней меры, на прообразе Q которого u не была бы дважды дифференцируемой. Но так как u имеет абсолютно непрерывное опорное изображение, то Q должно иметь положительную внешнюю меру. Это противоречит тому, что, как показано в п. 2, u на множестве точек своей выпуклости почти везде дважды дифференцируема. Этим первое утверждение леммы доказано.

Докажем ее второе утверждение. Пусть для некоторой E имеется множество $Q_E \subset G_E$ положительной меры, на котором $w'_E > 0$, но такое, что соответствующее множество $R_E \subset M(u_-, E)$ не имеет с данным P общих точек. Так как на Q_E $w'_E > 0$, то опорное изображение $N_E = \psi_{(u_E)_-}(Q_E)$ имеет положительную меру. Если бы это имело место для плоскостей E некоторого пучка, то, рассуждая как и выше, мы получили бы, что прообраз Q множества $N = \sum N_E$ имеет положительную меру, но не пересекается с P. Это противоречит условию, чем второе утверждение леммы и доказано.

§ 2. *Общая схема метода*

1. Теорема 2 позволяет установить некоторые формы принципа максимума. Простейшая из них следующая.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 2 функции X, U таковы, что*

1) при всякой ограниченной $v(x)$, $x \in G_E$, $X(x, v(x))$ суммируема во всякой замкнутой области $D \subset G_E$;

2) интеграл от $U^{-1}(p\nu)$ по любой окрестности точки $p = 0$ бесконечен. Тогда функция u, не обязательно с $u|_\Gamma \geqslant 0$, достигает точной нижней границы на Γ [3]*.*

Допустим, что теорема неверна, и выберем число $u_0 > \inf u$ так, что вне некоторой замкнутой области $D \subset G$ $u > u_0$. Тогда функция $u' = u - u_0$ удовлетворяет условию $u'|_\Gamma \geqslant 0$ и неравенству $w'_E \leqslant X(x_E, u_E)\, U(\nabla u'_E)$. Кроме того, $G(u' < 0) \subset D$. Поэтому, применяя к u' теорему 2, придем, вследствие условий 1), 2), к противоречию, чем теорема и доказана.

2. В противоположность предположению теоремы 3 подчиним функции U условию (U): интеграл от $U^{-1}(p\nu)$ по любой конечной области конечен. Это всегда можно обеспечить, заменяя U на $U + \varepsilon$. (Проведя оценки с $U + \varepsilon$, можно потом положить $\varepsilon = 0$.) При этом условии функция

$$V(\xi, x) = \int\limits_{\omega_E} \int\limits_0^{\xi/h(x,\nu)} U^{-1}(p\nu)\, p^{m-1}\, dp\, d\nu \tag{11}$$

будет определена при всех $\xi > 0$ и $x \in G_E$. Обращая равенство $\eta = V(\xi, x)$, получим возрастающую по η функцию

$$\xi = Y(\eta, x), \qquad 0 < \eta < V_\infty = V(\infty, x), \tag{12}$$

[3] Т. е. существует такая последовательность точек $x \to \Gamma$, что $u(x) \to \inf u$. Если предполагать $\inf u < 0$, то в условии на X достаточно брать функции $v \geqslant 0$.

где V_∞ может быть как конечным, так и бесконечным. Воспользовавшись функцией Y, неравенство (9) можно написать в виде

$$-u(x) < Y(P,x), \qquad P = \int\limits_{G_E(u<0)} X(x,u(x))\,dx. \tag{13}$$

Предположим теперь, что при почти всякой фиксированной x функция $X(x,v)$ ограничена при ограниченных $v \leqslant 0$. (Кстати, это будет так при условии 1) теоремы 2, если там брать только $v \leqslant 0$.) Тогда можно ввести функцию

$$\overline{X}(x,u) = \sup_{u \leqslant u' \leqslant 0} X(x,u'), \tag{14}$$

определенную при $u \leqslant 0$ и не возрастающую по u.

В наших теоремах выполнение неравенства (8) требуется только там, где $u \leqslant 0$, а тогда в (8) можно заменить X на $\overline{X}$. Произведя такую замену, мы сведем дело к случаю, когда функция X подчинена условию (X): она не возрастает по u (при $u \leqslant 0$) и при всяком $u_0 = \mathrm{const} \leqslant 0$ $X(x,u_0)$ суммируема в G_E.

Теорема 4. *Если в условиях теоремы 2 функции U, X удовлетворяют условиям (U), (X), то правый интеграл в (9), т. е. P в (3), имеет конечное значение и удовлетворяет неравенству*

$$P \leqslant \int\limits_{G_E} X(x,-Y(P,x))\,dx. \tag{15}$$

При этом, если функция X строго убывающая по u при любом фиксированном x из некоторого множества положительной меры, то в (15) имеет место строгое неравенство.

Конечность F очевидна из условия (X). По этому же условию X не возрастает по u, так что из (13) следует, что $X(x,u(x)) \leqslant X(x,-Y(P,x))$ при $u < 0$. Откуда, интегрируя левую часть по $G_E(u<0)$, а правую — по G_E, получим (15).

Из теоремы 4 следует, что если решения неравенства (15) ограничены сверху положительным числом $P_0 < V_\infty$, то из (13) получается оценка: $-u(x) < Y(P_0,x)$, где P_0 уже никак не зависит от самой u. Тем самым получаются безусловные оценки решений исходного неравенства (11) при условиях (F_E), (K_E), (U), (X).

Если же неравенство (15) не допускает положительных решений, то (13) невозможно, т. е. функция u не может принимать отрицательных значений. Этот «принцип минимума» равносилен следующей теореме.

Теорема 5. *Если для функции F выполнены все условия (F_E)–(X), то для того чтобы неравенство допускало решение $u(x)$ с $u|_\Gamma \geqslant 0$, принимающее отрицательные значения, необходимо, чтобы все неравенства* (15) *допускали положительные решения; это же утверждение верно для строгих неравенств при тех E, для которых функции X такие, как во второй части теоремы* 4.

Эта теорема дает необходимые условия существования нетривиальных решений однородных задач и соответственно оценки снизу для собственных значений, а также достаточные условия единственности решения задачи Дирихле, по крайней мере для линейных уравнений.

3. Если интересоваться только примерной оценкой для $\min u(x)$, то в (9) можно заменить $h(x,\nu)$ на диаметр d_E области G_E. (Потому что в (9) фигурируют только $\nu \in \omega_E$, а тогда $h(x,\nu) = h(x_E,\nu)$, где $h(x_E,\nu)$ есть расстояние от x_E до опорной плоскости к G_E.) После такой замены и замены $|u(x)|$ на $u_0 = |\min u|$ левый интеграл в (9) сводится к

$$\overline{V}(u_0/d_E) = \varkappa_m \int\limits_0^{u_0/d_E} U^{-1}(p\nu)\, p^{m-1}\, dp, \tag{16}$$

где $\varkappa_m$ — площадь ω_E. Если теперь Y — функция, обратная $\overline{V}$, то вместо (13) получим

$$u_0 = -\min u(x) < \overline{Y}(P)\, d_E, \qquad P = \int\limits_{G_E(u<0)} X(x, u(x))\, dx. \tag{17}$$

Соответственно упростится и неравенство (15).

4. До сих пор мы рассматривали только решения с $u|_\Gamma \geqslant 0$, но изложенный метод легко обобщается на случай произвольных граничных условий. Пусть u — решение неравенства (1) и v — такая выпуклая функция, что $(u-v)|_\Gamma \geqslant 0$. Тогда функция $u' = u - v$ обладает следующими свойствами: I) $u'|_\Gamma \geqslant 0$; II) ее точки выпуклости есть точки выпуклости u; III) если $(u'_{ij}) > 0$, то $(u_{ij}) > 0$ и $w_E \geqslant w'_E$.

Из II следует, что u' удовлетворяет условию (A) абсолютной непрерывности опорного изображения, а из III — что если для u (при $(u_{ij}) > 0$) выполнено (6), то при $(u'_{ij}) > 0$

$$w'_E \leqslant K(\nabla u' + \nabla v,\, u' + v,\, x_E) = K'(\nabla u', u', x_E).$$

Поэтому остается только, рассматривая это неравенство само по себе, применить все последующие выводы. В частности, если ∇v не входит в K, либо потому что $v = \mathrm{const}$, либо потому что K вообще не зависит от ∇u, то неравенство (8) для w'_E будет иметь вид $w'_E \leqslant X(x, u' + v)\, U(\nabla u')$, т. е. новые функции X, U для K' искать не придется. За v можно принять выпуклую функцию, натянутую на $u|_\Gamma$, и тогда оценки для $u' = u - v$ дадут оценки отклонения u от ее граничных значений $u|_\Gamma$.

5. В изложенном содержится общий метод вывода оценок решений и условий существования нетривиальных решений неравенства вида (1) с условием (F_E). Когда дана функция F, нахождение функции K, а тем самым проверка выполнения условия (F_E), осуществляется нахождением $\min F(u_{ij}, u_i, u, x)$ при $(u_{ij}) > 0$ и данных $w_E, \nabla u$, u, x_E. Пусть этот минимум есть $H(w_E, \nabla u, u, x_E)$. Тогда $K(\nabla u, u, x_E)$ можно определить как точную верхнюю грань тех w_E, для которых (при данных ∇u, u, x_E) $H \leqslant 0$. В силу этого определения, при $w_E > K$ будет $F \geqslant 0$, т. е. при $F \leqslant 0 \quad w_E \leqslant K$.

Условие (U), налагаемое на функции U, как было отмечено, всегда можно обеспечить. Условие (X) равносильно ограничениям на функцию F типа конечности некоторых норм коэффициентов. Практически такие ограничения выводятся достаточно просто.

Остается рассмотреть условие (K_E). Для него мы не имеем общего критерия проверки, но в практически интересных случаях его выполнимость очевидна. Однако, если оно выполнено, то выбор функций X, U оказывается, вообще говоря, неоднозначным. Поэтому, если интересоваться возможно более точными оценками, такой выбор нужно делать должным образом. Но когда функции X, U выбраны и соответственно найдены функции V, Y, остается только воспользоваться теоремой 4 и ее следствиями.

6. Приведем примеры, демонстрирующие общность условия (F_E).

Фактически мы сталкиваемся с более сильным условием (F^*_E): функция F такова, что при всякой $f(\nabla u, u, x)$ $F + f$ удовлетворяет условию (F_E). Это равносильно существованию такой функции $H(w_E, \nabla u, u, x_E)$, что $H \to \infty$ при $w_E \to \infty$ и при $(u_{ij}) > 0 \quad F > H$.

I. Пусть при $(u_{ij}) > 0$ функция F дифференцируема по u_{ij} и $(F_{u_{ij}}) \geqslant (a^{ij}) > 0$, где $a^{ij} = a^{ij}(\nabla u, u, x)$, т. е. имеет место эллиптичность с возможным вырождением. Тогда при $(u_{ij}) > 0$ для всякой E, в которой располагаем оси $x^1, \ldots, x^m$,

$$F(u_{ij}, u_i, u, x) \geqslant m a_m^{1/m} w_E^{1/m} + F(0, u_i, u, x),$$

где $a_m = \det (a^{ij})$ с $i, j < m$. Поэтому условие (F^*_E) выполнено, если $a_m \neq 0$. Если же $a_n \neq 0$, то условие (F^*_E) выполнено для всех E_m $(1 \leqslant m \leqslant n)$.

II. Пусть $w_{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_k}$ — минор матрицы (u_{ij}) из элементов строк $i_1 < \ldots < i_k$ и столбцов $j_1 < \ldots < j_k$. Число таких миноров равно $(C^k_n)^2$; обозначим их через $\underset{k}{w}_{ij}$, где $i, j = 1, \ldots, C^k_n$. В частности, при $k = 1 \quad \underset{1}{w}_{ij} = u_{ij}$, а при $k=n \quad \underset{n}{w}_{ij}=w$. Рассмотрим функцию $F=a^{ij}\underset{k}{w}_{ij}$, $a^{ij}=a^{ij}(\nabla u,u,x)$ с условием, что $a^{ij}\underset{k}{w}_{ij}\geqslant 0$, если $(u_{ij})>0$ (для чего достаточно $(a^{ij})>0$). Тогда при $(u_{ij})>0$ и $m\geqslant k$

$$F=a^{ij}\underset{k}{w}_{ij}\geqslant C_m^k\,a_m^{1/C_m^k}\,w_{E}{}_m^{k/m},\qquad a_m=\det(a^{ij}),\qquad i_s,j_s\leqslant m.$$

Поэтому условие (F_E^*) выполнено, если $a_m>0$.

III. Условие (F_E^*) может выполняться, если F и не эллиптична при $(u_{ij})>0$. Пример: $F=(a^{ij}\underset{k}{w}_{ij})^2-c(a^{ij}\underset{k}{w}_{ij})$ с теми же условиями, что в предыдущем пункте; $c=c(\nabla u,u,x)$.

§ 3. *Оценки при некоторых специальных предположениях*

1. Подчиним функции $U(p\nu)$ следующему условию (U^k): $U(p\nu)$ мажорируется такой функцией $U(p)$, зависящей только от p, что при некотором k функция $U(p)p^{k-m}$ невозрастающая. Тогда в предыдущих выводах $U(p\nu)$ можно заменить на $U(p)$. (Такое условие равносильно соответствующему ограничению роста функции $K(\nabla u,u,x)$ по $|\nabla u|$.) Так будет, например, тогда, когда в квазилинейном уравнении $a^{ij}u_{ij}+f=0$ ограничивается рост величины $a^{-1/n}f$, $a=\det(a^{ij})$, по $|\nabla u|$.

Лемма 2. *Если функция $U(p)p^{k-m}$ невозрастающая, то*

$$V(\xi,x)=\int\limits_{\omega_E}\int\limits_0^{\xi/h(x,\nu)}U^{-1}(p)\,p^{m-1}\,dp\,d\nu\ \geqslant\ \varkappa_m\int\limits_0^{\xi/h_k(x)}U^{-1}(p)\,p^{m-1}\,dp,\tag{18}$$

где $h_k(x)$ при $k\neq 0$ есть степенное среднее расстояний $h(x,\nu)$:

$$h_k(x)=\left[\frac{1}{\varkappa_m}\int\limits_{\omega_E}h^{-k}(x,\nu)\,d\nu\right]^{-1/k},\tag{19}$$

а при $k=0$ — среднее геометрическое, т. е.

$$h_0(x)=\exp\frac{1}{\varkappa_m}\int\limits_{\omega_E}\ln h(x,\nu)\,d\nu.\tag{20}$$

(Так как h_k зависит от E, то следовало бы писать $(h_k)_E$.)

Для доказательства обозначим правую часть (18) через $\overline{V}(\xi/h_k(x))$ и рассмотрим при $k\neq 0$ функцию $\overline{V}(\zeta^{1/k})$. Вычисляя ее производную по ζ, убедимся, что, в силу условия на $U(p)$, эта производная есть неубывающая функция ζ. Следовательно, сама $\overline{V}(\zeta^{1/k})$ выпуклая. А среднее значение выпуклой функции не меньше ее значения при соответствующем среднем значении аргумента. Это и дает неравенство (18). При $k=0$ то же рассуждение применяется к $V(e^{\zeta})$.

2. Заменив в предыдущих выводах $V(\xi,x)$ на $\overline{V}(\xi/h_k(x))$ и обозначив через $\overline{Y}$ функцию, обратную $\overline{V}$, получим, что неравенства (13), (15) приобретают более простой вид:

$$-u(x) < \overline{Y}(P)h_k(x), \qquad P = \int\limits_{G_E(u<0)} X(x,u(x))\,dx, \tag{21}$$

$$P \leqslant \int\limits_{G_E} X(x,-\overline{Y}(P)h_k(x))\,dx. \tag{22}$$

Заметим, что функция $\overline{Y}$ здесь та же, что в (17).

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 6. *При условиях* (F_E)–(U^k) *для решения неравенства* (1) *с* $u|_\Gamma \geq 0$ *имеет место оценка* (21), *где функция* $h_k(x)$ *зависит при данном* k *только от области* G_E *и* P *удовлетворяет неравенству* (22).

3. Простейший случай тот, когда $U(p\nu) < \mathrm{const}$, так что можно взять $U(p)=1$, относя в (8) соответствующий множитель к функции X. Тогда функция $V(\xi,x)$ вычисляется явно: $V=\tau_m\xi^m/h_m^m(x)$, где $\tau_m = m^{-1}\varkappa_m$ — объем единичного шара. Поэтому неравенство (21) имеет вид

$$-u(x) < \tau_m^{-1/m}\,P^{1/m}\,h_m(x). \tag{23}$$

Указанный частный случай заведомо имеет место, если F в (1) не зависит от u_i. Однако к нему можно свести гораздо более общий случай, поскольку в наших теоремах требуется выполнение неравенства (8) только в точках выпуклости функции u_-. Именно имеет место

Лемма 3. *Пусть функция* $K(\nabla u_E, u_E, x_E)$ *в* (7) *ограничена при ограниченных* $|\nabla u_E|$, *при любых фиксированных* u_E *и при почти всякой фиксированной* x_E. *Тогда из* (7) *следует, что в тех точках выпуклости функции* u_-, *где* $u(x)=u_E(x_E)$, *выполняется неравенство*

$$w_E \leqslant X(x_E,u_E), \tag{24}$$

причем здесь функция X *определяется следующим образом. Полагаем (опуская всюду индексы* E*)*

$$\sup_{|\nabla u|\leqslant p} K(\nabla u,u,x) = M(p,u,x). \tag{25}$$

После этого, обозначая через $r(x)$ расстояние точки $x = x_E$ до границы выпуклой оболочки области G_E, полагаем

$$X(x,u) = M(|u_-|\,/\,r(x), u, x). \tag{26}$$

Из определения функции M видно, что $w_E \leqslant M(|\nabla u|, u, x)$, если $w_E \leqslant K$. Но в точках x выпуклости функции $(u_-)_E$

$$|\nabla u| = |\nabla u_-| \leqslant \frac{|u_-(x)|}{r(x)}. \tag{27}$$

Откуда, в силу определения (26), следует (24).

Отметим, что наличие в аргументах функции M знаменателя $r(x)$ делает условие (X) для функции X, определенной равенством (26), очень сильным. Однако в некоторых вопросах такое сведение полезно.

4. Относительно функций h_{kE} заметим, что они одинаковы для области G и ее выпуклой оболочки G^* и что при данной E значение $h_{kE}(x)$ одно и то же для всех x с данной проекцией x_E (так как этими свойствами обладает расстояние $h(x,\nu)$, $\nu \in \omega_E$). Поэтому функции h_{kE} можно рассматривать как относящиеся к G^* или ее проекциям G^*_E.

Исследованием свойств функций h_k мы займемся в другой работе. Здесь заметим только, что оно ведет, во-первых, к оценкам h_{kE} через более наглядные геометрические характеристики области G^*_E, например к оценке $\max h_{kE}$ через объем G^*_E. Вследствие наших результатов, это дает соответствующие оценки для минимума решения u. Во-вторых, легко доказать, что при $k \geqslant -1$ функции h_k вогнутые: $d^2 h_k < 0$; далее выясняется, при приближении к каким точкам границы области G^* $h_k(x)$ заведомо стремится к нулю и с какой скоростью. В соединении с нашими оценками это позволяет извлечь информацию о том, с какой скоростью решение подходит к своим граничным значениям.

§ 4. *Обобщение на бесконечные области*

1. Требование конечности области G, где рассматривается неравенство (1), можно заменить более общим: область G такова, что проективным преобразованием ее можно превратить в конечную. Такие области естественно назвать проективно-конечными.

Соответственно требование ограниченности снизу функции u заменяется требованием «проективной ограниченности снизу», т. е. при проективном преобразовании пространства $(x^1, \dots, x^n, u)$, переводящем пространство $(x^1, \dots, x^n)$ в себя, а область G — в конечную, функция u должна переходить в ограниченную снизу. Условие $u|_\Gamma \geqslant 0$ также понимается в проективном смысле: при указанном преобразовании функция u переходит в такую $\widetilde{u}$, что $\widetilde{u}|_{\widetilde{\Gamma}} \geqslant 0$, где $\widetilde{\Gamma}$ — граница конечной области $\widetilde{G}$, в которую преобразуется G.

Те же условия можно выразить иначе. Условие проективной конечности области G, как легко видеть, равносильно требованию, что ее выпуклая оболочка $\widetilde{G}$ не содержит прямых. Если же это условие выполнено, то проективная ограниченность снизу функции u равносильна существованию такой постоянной A, что $u(x) > A(|x|+1)$. Проективное же понимание краевого условия $u|_\Gamma \geqslant 0$ равносильно следующему. При всяком $\varepsilon > 0$ найдется такая замкнутая, ограниченная область $D \subset G$, что в $D \quad u(x) > -\varepsilon(|x|+1)$. Наконец, мы вводим следующее естественное соглашение. Если $G \cup \Gamma$ не имеет опорной плоскости с внешней нормалью ν, то полагаем $h(x,\nu) = \infty$.

Теорема 7. *Теоремы* $1, 2, 4, 5$ *остаются справедливыми для проективно-конечных областей* G, *если иметь в виду указанное выше проективное понимание соответствующих условий и оставить все прочие условия без изменений. При этом допустимы только такие плоскости* E, *для которых* G_E *также проективно-конечны.* (*В условии* (X) *вместо постоянной* u_0 *нужно брать линейную функцию.*)

Сферическое изображение границы выпуклой области, не содержащей прямых, представляет собой выпуклую область σ на единичной сфере ω с возможным включением всей или части ее границы. А так как для $\nu \notin \sigma$ мы полагаем $h(x,\nu) = \infty$, то левые интегралы в неравенствах (4), (9) берутся фактически по области σ, $\sigma \cap E_m$, где σ — сферическое изображение границы G^*.

Доказательство теоремы 7 состоит в том, что сначала повторяется доказательство теоремы 1 в принятых теперь условиях. Ввиду проективной инвариантности свойства выпуклости, геометрическая часть доказательства остается без изменений. Аналитическая часть вообще не связана с конечностью области.

Когда теорема 1 таким образом обобщена, обобщение теоремы 2 получается простым повторением сказанного при ее доказательстве. При этом, конечно, ограничиваемся плоскостями E, для которых G_E проективно-конечны; иначе ссылка на обобщенную теорему 1 невозможна. Вслед за теоремой 2 теоремы 4, 5 обобщаются автоматически.

2. Пусть, как и выше, σ — сферическое изображение границы G^*, а C — бесконечный конус, проектирующий из центра сферы ω область σ. Этот центр мы берем в начале координат. Так как левые интегралы в (4), (9) берутся фактически по $\sigma \cap E$, то значения $p\nu = \nabla u$, фигурирующие в этих интегралах, принадлежат конусу C. Соответственно функцию $U(p\nu)$ достаточно рассматривать на конусе C.

Теорема 8. *Если функцию* $U(p\nu)$ *рассматривать только для* $p\nu \in C$, *то теоремы* 3, 6 *переносятся на случай проективно-конечной области* G *при тех же условиях, что в теореме* 7, *если только фигурирующие в теореме* 6 *функции* h_k *определены* (*не обращаются в бесконечность*).

Теорема 8 означает следующее. В теореме 3 требуется, чтобы интеграл от $U^{-1}(p\nu)$ по любой окрестности точки $p = 0$ был бесконечным. Теперь имеется в виду окрестность этой точки в конусе C. При таком понимании теоремы 3 она также непосредственно следует из обобщенной теоремы 2.

Далее, в лемме 2 средние значения $h_k(x)$ расстояний $h_k(x, \nu)$ должны определяться не по сфере ω_E, а по $\sigma \cap E$. Интегралы берутся по $\sigma \cap E$ и делятся на площадь $\sigma \cap E$. Соответственно в п. 3 § 3 объем τ_m единичного шара должен быть заменен на объем сферического сектора, опирающегося на $\sigma \cap E$.

При таком понимании все выводы § 3 сохраняются, но, конечно, только для таких G_E и k, что функция $h_k(x)$ определена (конечна). Последнее заведомо верно при $k > 0$. При $k \leqslant 0$ $h_k(x)$ может оказаться бесконечной, причем, как нетрудно показать, $h_k(x)$ либо конечно, либо бесконечно для всех $x \in G^*$ одновременно.

Статья поступила в редакцию
30.VI.1965

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле // Вестн. ЛГУ. 1963. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 5–29.
2. *Александров А. Д.* Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 5. С. 1001–1004.
3. *Бакельман И. Я.* К теории квазилинейных эллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 2. С. 179–186.
4. *Александров А. Д.* Метод опорного изображения в исследовании решений краевых задач // Материалы к совместн. сов.-амер. симпоз. по уравнениям с част. производными. Новосибирск, 1963. С. 3–10.
5. *Александров А. Д.* Исследования о принципе максимума. V // Изв. вузов. Математика. 1960. № 5. С. 16–26.
6. *Мазья В. Г.* Некоторые оценки для решений эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1057–1059.
7. *Stampacchia G.* Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche // Ann. Scuola Norm. Super Pisa Sci. Fis. Mat. Ser. III. 1958. T. 12. P. 223–245.
8. *Weinberger H. F.* Symmetrization in uniformly elliptic problems // Stud. Math. Anal. Related Topics, Essays in Honor of G. Polya. 1962. P. 424–428.
9. *Frasca M.* Un problema variazionale per operatori ellittici // Matematiche. 1963. T. 18. P. 1–11.
10. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Иностр. лит., 1949.

О кривизне поверхностей

Вестн. ЛГУ. 1966. № 19. Сер. математики, мех. и астрон. Вып. 4. С. 5–11

1. Мы докажем здесь следующую теорему о поверхностях в E_3. Поверхности предполагаются оснащенными нормалями определенного направления.

Теорема 1. *Пусть S — аналитическая поверхность типа сферы*[1] *и S^0 — такая же поверхность со всюду положительной кривизной, следовательно, выпуклая. Утверждается, что либо S равна и параллельна S^0, либо существуют такие точки $x \in S$, $x^0 \in S^0$ с параллельными нормалями, что кривизна любого нормального сечения в x отлична от кривизны параллельного нормального сечения в x^0.*

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть S, S^0 — такие поверхности, как в теореме 1, и $k_1 \geq k_2$, $k_1^0 \geq k_2^0$ — их главные кривизны в точках $x \in S$, $x^0 \in S^0$ с параллельными нормалями. Пусть $f(\xi, \eta; \mathbf{n})$ — такая функция численных переменных ξ, η и единичного вектора $\mathbf{n}$, что при $\xi > \xi'$ и $\eta > \eta'$ всегда $f(\xi, \eta; \mathbf{n}) > f(\xi', \eta'; \mathbf{n})$. Тогда если во всякой точке $x \in S$*

$$f(k_1, k_2; \mathbf{n}) = f(k_1^0, k_2^0; \mathbf{n}), \tag{1}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль в x, то поверхность S равна и параллельна S^0.

---

[1] Под этим можно понимать множество пар (x, ξ), где $x \in E_3$, ξ — точка какой-либо сферы Σ, пробегающая всю Σ, и x есть аналитическая функция соответствующей ξ, т. е. если, например, u, v — широта и долгота, то вектор $x(u, v)$ точки x разлагается в степенной ряд по $(u - u_0)$, $(v - v_0)$ в окрестности u_0, v_0.

Поверхность S в смысле этого определения гомеоморфна сфере. В том же смысле понимается в п. 8 поверхность, гомеоморфная области на сфере. Под точкой поверхности подразумевается, строго говоря, пара (x, ξ), хотя, как обычно, явно говорится лишь об x. Такое определение не исключает, например, что поверхность сводится к точке, т. е. $x = \mathrm{const}$. Но в теореме поверхности предполагаются гладкими, т. е. $x_u \times x_v \neq 0$.

Действительно, из (1), вследствие монотонности f, вытекает, что в каждой $x \in S$ либо $k_1 \geq k_1^0$, $k_2 \leq k_2^0$, либо $k_1 \leq k_1^0$, $k_2 \geq k_2^0$. Поэтому в соответствующих точках x, x^0 всегда есть пара параллельных нормальных сечений с равными кривизнами; а тогда по теореме 1 S равна и параллельна S^0.

Простейший пример получаем, когда $f = k_1 + k_2$ и S^0 — сфера. Соответственно из теоремы 2 вытекает теорема Х. Хопфа [1]: *поверхность типа сферы, имеющая постоянную среднюю кривизну, сама есть сфера.* (В [1] доказывается и более общее утверждение.) Аналитичность S здесь предполагать не нужно, так как для поверхности постоянной средней кривизны она обеспечена сама собой ввиду аналитичности и строгой эллиптичности соответствующего дифференциального уравнения [2]. По той же причине это верно вообще, если S^0 аналитична, а f симметрична по ξ, η, аналитична по всем аргументам и $\frac{\partial f}{\partial \xi}\,\frac{\partial f}{\partial \eta} > 0$. Между прочим, если S сама предполагается выпуклой, то функцию f достаточно считать определенной при $\xi, \eta > 0$.

Теорема, аналогичная теореме 2, была доказана мной [3] в предположениях, что S сама имеет всюду положительную кривизну, а f такова, что $f(\xi, \eta; \mathbf{n}) > f(\xi', \eta'; \mathbf{n})$, как только $\xi > \xi'$, $\eta \geq \eta'$ или $\xi \geq \xi'$, $\eta > \eta'$. Избавиться от аналитичности S, S^0 удается [4], предполагая $\frac{\partial f}{\partial \xi}\,\frac{\partial f}{\partial \eta} > 0$ или вводя некоторое условие на разности кривизн $k_1 - k_1^0$, $k_2 - k_2^0$ вблизи точек, где $k_1 = k_1^0$, $k_2 = k_2^0$.

Надо заметить, что в теоремах 1, 2 по крайней мере двукратная дифференцируемость необходима. Это показывает пример цилиндра, заклеенного с обоих концов полусферами. На такой поверхности $k_1 = \mathrm{const}$.

2. Формулируем теперь теорему 1 в том виде, в каком мы будем ее доказывать. Пусть поверхность S_0 такая, как в теореме 1: замкнутая, выпуклая со всюду положительной кривизной и аналитическая. Согласно известным определениям относительной дифференциальной геометрии [5], примем S_0 за «условную единичную сферу». Точкам x поверхности S сопоставляются точки $y \in S_0$ по параллельности нормалей. Направления dx в точке x, для которых $k\,dx = dy$, называются главными относительно S_0, а соответствующие значения k — относительными главными кривизнами. При этом либо есть только два главных направления и им отвечают разные значения k, либо все направления главные и им отвечает одно k.

Теорема 1а. *Пусть S — аналитическая поверхность типа сферы и $k_1(x) \geq k_2(x)$, $x \in S$, — ее главные кривизны относительно какой-либо условной сферы S_0. Если существует такое число k_0, что всюду на S $k_1(x) \geq k_0 \geq k_2(x)$, то S гомотетична S_0, так что $k_1 \equiv k_2 \equiv k_0$; коэффициент подобия есть, очевидно, k_0^{-1}.* ($k_0 = 0$ исключено, так как иначе было бы всюду $k_1 k_2 \leq 0$, а это невозможно, потому что знак $k_1 k_2$ тот же, что у гауссовой кривизны.)

Утверждение этой теоремы равносильно тому, что если S не гомотетична S_0, то при всяком k_0 на ней найдется точка x, где либо $k_0 > k_1 \geq k_2$, либо $k_0 < k_2 \leq k_1$. В такой точке кривизны всех нормальных сечений поверхности S больше или, наоборот, меньше кривизн параллельных сечений поверхности S_0 в точке y_0 с параллельной нормалью. Обратно, если последнее имеет место, то либо $k_0 > k_1 \geq k_2$, либо $k_0 < k_2 \leq k_1$. (Сказанное становится абсолютно очевидным, если заметить, что определение относительных главных кривизн инвариантно относительно совместного аффинного преобразования поверхностей S, S_0. Если же таким преобразованием превратить индикатрису Дюпена в данной точке поверхности S_0 в окружность, то в соответствующей точке на S относительные главные направления и кривизны станут обычными.)

Из сказанного ясно, что теорема 1а равносильна теореме 1, если в последней заменить S^0 на $k_0^{-1} S_0$.

Отметим еще, что теорема 1а, очевидно, равносильна следующему утверждению. *Если S не гомотетична условной сфере S_0, то* $\min k_1(x) < \max k_2(x)$.

Наконец, можно заметить, что в теореме 2 можно иметь в виду главные кривизны относительно какой-либо условной сферы. Тогда из нее следует, например, что поверхность типа сферы, имеющая постоянную среднюю кривизну относительно S_0, гомотетична S_0. Здесь опять-таки требование аналитичности S выполняется само собой, поскольку S_0 предполагается аналитической.

В конце статьи мы укажем обобщение наших теорем на поверхности с краем.

3. Докажем теорему 1а. Пусть на S $\quad k_1(x) \geq k_0 \geq k_2(x)$. Докажем, что тогда в каждой точке верно хотя бы одно из равенств: $k_1 = k_0$, $k_2 = k_0$. Допустим, однако, что это не так.

Обозначая через x и y радиусы-векторы точек на S и S_0 и сопоставляя точки с параллельными нормалями, построим поверхность S', определяемую вектором [2)]

$$x' = x - k_0^{-1} y. \tag{2}$$

Под главными направлениями и кривизнами будем понимать эти понятия относительно S_0. Если dx — главное направление на S, то $k_i dx = dy$ и из (2) следует

$$k_i' dx' = dy, \quad k_i' = \frac{k_i k_0}{k_0 - k_i}, \qquad i = 1, 2, \tag{3}$$

[2)] По определению, данному в примечании [1)], S' будет аналитической поверхностью типа сферы и (2) устанавливает гомеоморфизм S на S'. Однако S' может иметь особенности. Более того, утверждение теоремы 1 состоит именно в том, что S' сводится к точке, но при сделанном предположении, что хоть где-то $k_1 \neq k_0$, $k_2 \neq k_0$, это не так.

т. е. соответствующее направление dx' на S' тоже главное и ему соответствует кривизна k'_i. Исключение составляют особые точки, где $k_1 = k_0$ или $k_2 = k_0$. В остальных точках S' регулярна, ее главные направления параллельны таковым на S; тем более ее касательная плоскость параллельна касательной плоскости к S. Поэтому для любого множества регулярных точек сферическое изображение будет то же, что для соответствующего множества на S (может быть, с точностью до симметрии в центре сферы, что соответствует обращению нормали, но это для нас не существенно).

Поскольку $k_1 \geq k_0 \geq k_2$ и в регулярных точках $k_1 \neq k_0$, $k_2 \neq k_0$, то в них $(k_0 - k_1)(k_0 - k_2) < 0$. Поэтому из (3) следует, что в таких точках произведения $k_1 k_2$ и $k'_1 k'_2$ имеют противоположные знаки, либо если $k_1 k_2 = 0$, то и $k'_1 k'_2 = 0$. Знак произведения относительных кривизн тот же, что у гауссовой кривизны. Из сказанного в соединении с предыдущим следует: если M — множество точек на S, где $k_1 > k_0 > k_2$, и M' — соответствующее множество на S', то для интегральных кривизн ω имеем

$$\omega(M') = -\omega(M). \tag{4}$$

4. Пусть N — множество тех точек на S, где $(k_0 - k_1)(k_0 - k_2) = 0$. Оно не пусто. Иначе S' была бы регулярна и согласно (4) ее полная кривизна равнялась бы $-\omega(S) = -4\pi$, что невозможно. Впрочем, то же ясно из существования (относительных) точек округления: в них необходимо $k_1 = k_2 = k_0$, раз везде $k_1 \geq k_0 \geq k_2$.

Будем различать точки $x \in N$ трех типов: I) точки, лежащие на линиях кривизны k_0, т. е. на огибающих главных направлений, для которых $k_0 dx = dy$; II) точки, не принадлежащие указанным линиям, но такие, что в них $k_1 = k_2 = k_0$; III) все остальные точки, в них либо $k_1 \neq k_0$, либо $k_2 \neq k_0$, и они не лежат на линиях кривизны k_0.

Докажем, что в точках $x' \in S'$, соответствующих точкам типа III, поверхность S' гладкая[3)]. Пусть, например, в точке x типа III $k_1 = k_0$, $k_2 \neq k_0$. Через нее проходит линия кривизны L_2, отвечающая k_2, и ее пересекают линии кривизны L_1, отвечающие k_1. В окрестности x ни одна из них не есть линия кривизны k_0. Поэтому на каждой из них $k_1 = k_0$ максимум в конечном числе точек (вследствие аналитичности S).

Вдоль линий кривизны $k_i dx = dy$. Поэтому из (2) следует, что вдоль соответствующих линий на S'

$$k_0 dx' = (k_0 - k_i) dx, \qquad i = 1, 2. \tag{5}$$

[3)]Проводимое здесь, как и в п. 5, рассмотрение особых точек не содержит, собственно, ничего нового: такие выводы можно найти, напр., у С. Кон-Фоссена [6].

Так как $k_2 \neq k_0$, то отсюда следует, что линия L_2', отвечающая L_2, гладка. Далее, $k_1 \geq k_0$ и $k_1 = k_0$ лишь в конечном числе точек на каждой L_1, т. е. везде на L_1, кроме этих точек, $k_0 - k_1 < 0$. Поэтому из (5) следует, что вдоль L_1

$$\frac{dx'}{|dx'|} = -\frac{dx}{|dx|}.$$

Это значит, что линии L_1' также гладкие и их касательные параллельны касательным к линиям L_1. Следовательно, в окрестности точки x' поверхность S' образована гладкими кривыми L_1', пересекающими гладкую кривую L_2. Отсюда ясно, что S' — гладкая в окрестности x'.

Из гладкости S' в точках x', отвечающих точкам типа III, следует, что присоединение таких точек к регулярным не нарушит равенства (4).

5. Пусть теперь x_0 — точка типа II и x_0' — соответствующая точка на S'. Докажем, что S' имеет в x_0' касательную плоскость P_0', параллельную касательной плоскости P_0 к S в точке x_0. (Это понимается в том смысле, что контингенция поверхности S' в x_0' есть плоскость P_0'. Проекция же окрестности точки x_0' на P_0' может быть неоднолистной.)

Заметим, во-первых, что вблизи x_0 нет других точек типа II. Иначе, по аналитичности S, имелась бы линия таких точек, содержащая x_0. Но кривая, на которой $k_1 = k_2 = k_0$, есть линия кривизны k_0, так что x_0 оказывалась бы точкой типа I. Отсюда и из доказанного в п. 4 следует, что в некоторой окрестности U' точки x_0' поверхность S' гладкая; сама x_0' при этом исключается. Касательные плоскости в точках $x' \in U' \setminus \{x_0'\}$ параллельны касательным к S в соответствующих точках x. Поэтому они близки по направлению к плоскости P_0. Отсюда доказываемое утверждение уже достаточно очевидно.

В самом деле пусть U — окрестность x_0. Ее можно взять столь малой, чтобы она не содержала ни других точек типа II, ни таких точек, образы которых на S' попадают в точку x_0'. Пусть h — отображение S на S' и p — проектирование на плоскость P_0'. В пределах малой окрестности U' точки x_0' p оказывается локально гомеоморфным ввиду отмеченного выше свойства касательных плоскостей. Следовательно, отображение $p \circ h$ из U в P_0' также локально гомеоморфно. Поэтому, если контур C в U охватывает x_0, то контур $C'' = (p \circ h)(C)$ охватывает x_0' и образ $(p \circ h)(U)$ окрестности U образует окрестность точки x_0'. Если через нормаль к плоскости P_0' в точке x_0' провести полуплоскость Q, то она пересекает U'. Берем точки x' на пересечении $Q \cap U'$, сходящиеся к x_0'. Касательные плоскости в них сходятся к P_0'. Отсюда легко заключить, что лучи $x_0'x'$ сходятся к лучу $Q \cap P_0'$. Этим доказано, что плоскость P_0' есть касательная к поверхности S' в точке x_0'. (Отображение $p \circ h$ есть накрытие; образ $U \setminus \{x_0\}$ покрывает окрестность x_0' в P_0', вообще говоря, неоднократно.)

Теперь очевидно, что измеренный на S' полный угол вокруг точки x'_0 не меньше 2π. Кривизна же $\omega(x'_0)$ есть 2π минус этот угол [4)]. Поэтому $\omega(x'_0) \le 0$. Отсюда следует, что присоединение точек типа II к регулярным превращает равенство (4) в неравенство

$$\omega(M') \le -\omega(M). \tag{6}$$

По доказанному в п. 4 это неравенство верно и тогда, когда M содержит точки типа III. Поэтому если бы особые точки были только типов II, III, то поверхность S' имела бы кривизну $\omega(S') \le -\omega(S) = -4\pi$, что невозможно. Следовательно, на S есть точки типа I, т. е. есть линии кривизны k_0.

6. Итак, на S необходимо существуют линии кривизны k_0. Из (5) следует, что вдоль такой линии $dx' = 0$, т. е. на поверхности S' ей отвечает одна точка.

По аналитичности S эти линии образуют сеть из конечного числа топологических отрезков без свободных концов, разбивающую S на конечное число областей.

Пусть G — такая область и G' — соответствующая область на S'. Каждой связной компоненте границы области G соответствует на S' одна точка. Если присоединить к G' эти точки x'_i, то получим поверхность типа сферы. Поэтому $\omega(G') + \sum \omega(x'_i) = 4\pi$. Но кривизна одной точки всегда не больше 2π, так что $\sum \omega(x'_i) \le 2\pi m$, где m — число компонент границы области G. Кроме того, в силу (6) $\quad -\omega(G') \ge \omega(G)$. Все это вместе дает

$$\omega(G) \le 2\pi m - 4\pi.$$

Суммируя по всем областям и пользуясь тем, что $\sum \omega(G) = 4\pi$, получим отсюда $4\pi \le 2\pi \sum m - 4\pi f$, где f — число областей, т. е.

$$2(f+1) \le \sum m. \tag{7}$$

Однако, как мы сейчас убедимся, для всякой сети на сфере верно неравенство

$$2(f-1) \ge \sum m. \tag{8}$$

Пусть мы имеем сеть, состоящую из k связных компонент, причем, как и выше, f — число областей, $n = \sum m$ — сумма числа связных компонент

[4)]Здесь и дальше мы пользуемся понятием кривизны в смысле общей теории [7]. Но можно обойтись обычным понятием, если воспользоваться теоремой Гаусса — Бонне, что лишь отяжелит изложение. Заметим, что $\omega(x'_0) = 2\pi(1-m)$, где m — кратность покрытия окрестности точки x'_0 в плоскости P'_0 при отображении $p \circ h$.

границ областей. Пусть C — одна из связных компонент сети и G_i — те области, границы которых содержат части C. Для каждой такой области часть ее границы, входящая в C, является связной компонентой границы (потому что речь идет о сети на сфере).

Если мы исключим C, то области G_i сольются в одну. Поэтому, если l — число этих областей, то число областей по исключении C станет $f_1 = f - l + 1$. А так как с каждой областью G_i исключается связная компонента ее границы, входящая в C, то общее число компонент границ областей станет $n_1 = n - l$. Следовательно, $f_1 - n_1 = f - n + 1$.

Исключая последовательно одну за другой все k связных компонент сети, получим $f_k - n_k = f - n + k$. А так как $f_k = 1$, $n_k = 0$, то $f - n + k = 1$, т. е.

$$n = \sum m = f + k - 1. \tag{9}$$

Очевидно, $k \leq f - 1$, поэтому из (9) следует (8). Вместе с тем (8) противоречит (7). Это доказывает невозможность сделанного вначале предположения, что не везде на S $k_1 = k_0$ или $k_2 = k_0$.

7. Итак, мы доказали, что на поверхности S, на которой $k_1 \geq k_0 \geq k_2$, неизбежно в каждой точке либо $k_1 = k_0$, либо $k_2 = k_0$. А тогда S либо есть условная сфера $k_0^{-1} S_0$, либо является огибающей однопараметрического семейства таких условных сфер. Это доказывается совершенно так же, как в случае обычных главных кривизн, когда поверхность оказывается огибающей семейства равных обычных сфер. Нет необходимости воспроизводить этот вывод (см. также [6]).

По аналитичности S семейство сфер должно быть аналитическим. Область значений параметра семейства должна быть поэтому топологической окружностью. Тогда S была бы поверхностью топологического типа тора. По условию это не так и, следовательно, остается одна возможность: S есть условная сфера. (Тот же вывод можно сделать при одной двукратной дифференцируемости более прямым методом.) Таким образом, наша теорема 1а, а вместе с нею теоремы 1, 2 доказаны [5)].

8. Теорема 1а допускает следующее обобщение.

Теорема 3. *Пусть аналитическая поверхность S гомеоморфна области на сфере, ограниченной p контурами, и пусть на ней так же, как в теореме* 1а, $k_1(x) \geq k_0 \geq k_2(x)$, $k_0 \neq 0$, *а ее край состоит из линий кривизны* k_0. *Тогда есть только следующие три возможности: (1) S равна и параллельна, возможно неоднолистной, области на поверхности $k_0^{-1} S_0$; (2) S есть,*

---

5) Г. Ф. Мюнцнер на Международном математическом съезде (Москва, 1966 г.) сообщил мне, что он доказал теорему 1 другим путем (методом индексов) и что его работа будет опубликована в Mathematische Zeitschrift (см. [8]).

возможно неоднолистная, область на огибающей однопараметрического семейства поверхностей, равных и параллельных $k_0^{-1}S_0$; (3) $\omega(S) \leq 2\pi(p-2)$. При этом, если $p = 1$, т. е. S гомеоморфна кругу, то вторая возможность исключается, так что если еще $\omega(S) > -2\pi$, то S равна и параллельна области (однолистной) на $k_0^{-1}S_0$.

Эта теорема содержит теорему 1а: достаточно положить в ней $p = 0$. Ей также можно придать форму, аналогичную теореме 1.

Из теоремы 3, очевидно, вытекает теорема о равенстве и параллельности гомеоморфной кругу поверхности S куску поверхности $k_0^{-1}S_0$, вполне аналогичная теореме 2. Нужно лишь ввести условие, что край S есть линия кривизны k_0 и что $\omega(S) > -2\pi$.

Доказательство теоремы 3 вполне аналогично проведенному доказательству теоремы 1а. Последний его этап проводится так же, если включить кривые, ограничивающие S, в рассматриваемую там сеть.

Статья поступила в редакцию
4.VII.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hopf H.* Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen // Math. Nachr. 1951. Bd 4. S. 213–231.
2. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Иностр. лит., 1957.
3. *Александров А. Д.* Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей // Докл. АН СССР. 1938. Т. 19, № 4. С. 233–236.
4. *Александров А. Д.* Теоремы единственности для поверхностей «в целом». VII // Вестн. ЛГУ. 1960. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 5–13.
5. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Русский перевод: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)
6. *Кон-Фоссен С. Э.* Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М.: Физматгиз, 1959.
7. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
8. *Münzner H. F.* Über Flächen mit einer Weingartenschen Ungleichung // Math. Z. 1967. Bd 97. S. 123–139. См. также замечание к этой статье, опубликованное тем же автором в Math. Z. 1967. Bd 100. S. 416 [6].

[6] Ссылка [8] добавлена в настоящем издании. — *Прим. ред.*

Некоторые оценки решений задачи Дирихле

Вестник ЛГУ. 1967. № 7. Сер. мат., мех. и астрономии. Вып. 2. С. 19–29

§ *1. Оценки в простейшем случае*

1.1. Мы рассматриваем в n-мерной области G решения задачи

$$a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + cu = f, \quad u|_{\partial G} = 0 \qquad (a^{ij}\xi_i\xi_j \geq 0). \tag{1.1}$$

Условия на u те же, что в [1]: u непрерывно в $G \cup \partial G$ и имеет в G абсолютно непрерывное опорное изображение; это, в частности, так, если $u \in W_n^n(D)$ для всякой области D с $D \cup \partial D \subset G$. Производные u_i, u_{ij} можно понимать как коэффициенты аппроксимативных дифференциалов и достаточно считать уравнение выполненным в почти всех точках выпуклости u; в почти всех них u_i, u_{ij} заведомо существуют.

Так же как в [1], вводим норму:

$$\|\varphi\| = \left\|a^{-1/n}\varphi\right\|_{L_n}, \qquad a = \det(a^{ij}). \tag{1.2}$$

Вопрос состоит в исследовании таких оценок $u(x)$, или, иначе говоря, функций, мажорирующих $u(x)$, которые содержали бы нормы (1.2) и давали бы наиболее сильные заключения о скорости, с какой $u(x) \to 0$, когда $x \to \partial G$. Соответственно условия на уравнение (1.1) выражаются в терминах норм (1.2); например, $\|f\| < \infty$. Они устанавливаются дальше по ходу изложения.

Такой же вопрос о скорости приближения $u(x)$ к граничным значениям при других нормах и без условия $u|_{\partial G} = 0$ рассматривается в § 3. Этот вопрос в иных терминах и при других условиях был предметом многих исследований (см., например, [2] и цитируемые там работы).

1.2. Будем обозначать через G^* выпуклую оболочку G. В [1] были получены оценки $u(x)$ через функции $h_k(x)$, определяемые следующим образом.

Пусть $h(x,\nu)$ — расстояние от $x \in G^*$ до опорной плоскости к G^* с внешней нормалью ν; при $k \neq 0$ $h_k(x)$ есть степенное среднее $h(x,\nu)$, степени $-k$, по всем ν; $h_0(x)$ есть среднее геометрическое. Свойства функций h_k исследованы в [3]. Будем обозначать через $r(x)$ расстояние от $x \in G$ до ∂G^* в направлении, противоположном вектору $b(x) = (b^i(x))$. Там, где $b = 0$, r не определено, но дальше это не существенно (при $b = 0$ можно принять, например, $r = 1$). Положим

$$\overline{c} = c + |b|r^{-1}, \qquad \overline{g} = f - \overline{c}u, \qquad g = f - cu. \tag{1.3}$$

В [1] было, в частности, доказано:

Теорема 1. *При принятых условиях, там, где $u(x) < 0$, выполняется неравенство*

$$|u(x)| < n^{-1}\tau_n^{-1/n}\|\overline{g}_+\|h_n(x), \tag{1.4}$$

где τ_n — объем единичного шара.

Если же $\|\overline{c}_+h_n\| < n\tau_n^{1/n}$ и $\|\overline{c}_+u\| < \infty$, то

$$|u(x)| < \frac{\|f_+\|h_n(x)}{n\tau_n^{1/n} - \|\overline{c}_+h_n\|}. \tag{1.5}$$

При $\|\overline{c}_+h_n\| \leq n\tau_n^{1/n}$ задача (1.1) с $f = 0$ не имеет ненулевого решения, для которого $\|\overline{c}_+u\| < \infty$.

Нормы в (1.4), (1.5) можно брать не для всей G, а для той ее части $G(u < 0)$, где $u < 0$. Оценки значений $u(x) > 0$ получаются переменой знака u, f и, следовательно, $\overline{g}$.

Оценка (1.4) имеет смысл, только если $\|\overline{g}_+\| < \infty$. Вопрос, рассматриваемый дальше в § 2, состоит в нахождении возможных слабых условий на b, которые это обеспечивают.

1.3. Оценкам (1.4), (1.5) можно придать более наглядную форму. Пусть G^*_x — область, симметричная G^* относительно точки x, и $V(x)$ — объем $G^* \cap G^*_x$. Как показано в [3], существуют такие α_n, $\beta_n > 0$, зависящие лишь от n, что [1)]

$$\alpha_n \geq h_n(x)V^{-1/n}(x) \geq \beta_n. \tag{1.6}$$

Поэтому из теоремы 1 следует

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 там, где $u(x) < 0$,*

$$|u(x)| < \gamma_n\|\overline{g}_+\|V^{1/n}(x), \qquad \gamma_n = n^{-1}\tau_n^{-1/n}\alpha_n, \tag{1.7}$$

и аналогичная оценка через $V^{1/n}(x)$ получается из (1.5).

[1)] Наилучшие значения α_n, β_n неизвестны, но можно взять $\alpha_n = 2\tau_n^{-1/n}n^{1/2}$.

Половина области $G^*\cap G^*_x$, отсекаемая любой плоскостью, проходящей через x, содержится в соответствующей части самой G^*. Поэтому если $\overline{V}(x)$ — наименьший из объемов, отсекаемых от G^* плоскостями, проходящими через x, то $2\overline{V}(x) \geq V(x)$, так что из (1.7)

$$|u(x)| < \overline{\gamma}_n \|\overline{g}_+\| \overline{V}^{1/n}(x), \qquad \overline{\gamma}_n = 2^{1/n}\gamma_n. \tag{1.8}$$

Это включает, в частности, оценку $\max|u|$ через объем G^*.

Пусть $h(x)$ — расстояние от x до ∂G^*. Очевидно, $\overline{V}(x)$ не превосходит объема круглого цилиндра высоты $h(x)$ с радиусом основания, равным диаметру d области G. Поэтому всегда

$$\overline{V}(x) \leq Ah(x), \qquad A = \tau_{n-1}d^{n-1}. \tag{1.9}$$

Если G^* включается в параболоид P степени l с вершиной в $x_0 \in \partial G^*$, то $\overline{V}(x)$ не превосходит объема, отсекаемого от P плоскостью, проходящей через x перпендикулярно оси P. Этот объем равен, очевидно, $A'|(x-x_0)\nu|^{1+(n-1)/l}$, где $A' = A'(P)$, в ν — единичный вектор по оси P. Поэтому здесь

$$\overline{V}(x) \leq A'|(x-x_0)\nu|^{(n+l-1)/l}. \tag{1.10}$$

Если x_0 есть точка, ближайшая к x на ∂G^*, то $|(x-x_0)\nu| = h(x)$. Поэтому если G^* включается в параболоид, равный P, с вершиной в любой точке на ∂G^*, то

$$\overline{V}(x) \leq A'h^{(n+l-1)/l}(x). \tag{1.11}$$

Кстати, в таком случае $\partial G^* \subset \partial G$, т. е. внешняя граница области G выпуклая. Кроме того, возможно лишь $l \geq 2$, так как условие относится ко всем точкам на ∂G^*. Если ∂G^* имеет всюду строго положительную кривизну, то можно взять $l = 2$, так что $\overline{V}(x) \leq A'h^{(n+1)/2}(x)$. Подстановка оценок (1.9)–(1.11) в (1.8) дает соответствующие оценки $|u(x)|$.

Заметим еще, что для эллипсоида объема V

$$h_n(x) = \tau_n^{-1/n}V^{1/n}(1-\rho^2(x))^{(n+1)/2n}, \tag{1.12}$$

где $\rho(x)$ — отношение расстояния x от центра к радиусу, идущему через x. Подставляя в (1.4) (1.12), получаем оценки решения задачи (1.1) в эллипсоиде.

§ 2. *Условия возможности оценки через* $V(x)$

2.1 Оценки (1.4), (1.7) теорем 1, 2 имеют смысл, только если $\|\overline{g}_+\| < \infty$, а во второй части теоремы 1 требуется $\|\overline{c}_+u\| < \infty$. Мы будем предполагать, что

$$\|f\|,\ \|c_+\| < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда для $\|\overline{g}_+\|$, $\|\overline{c}_+\| < \infty$ достаточно $\|br^{-1}u\| < \infty$. Действительно, как указано в теореме 1, нормы можно брать для $G(u < 0)$. А при $u < 0$ из выражений (1.3) для $\overline{g}$, $\overline{c}$ легко находим

$$\|\overline{g}_+\| \leq \|f_+\| + \|\overline{c}_+ u\|, \qquad \|\overline{c}_+ u\| \leq \|c_+ u\| + \|br^{-1}u\|. \tag{2.2}$$

Поэтому сказанное следует из ограниченности u.

По той же причине для $\|br^{-1}u\| < \infty$ достаточно $\|br^{-1}\| < \infty$. Но если x приближается к ∂G^*, то, вообще говоря, $r(x) \to 0$. Вследствие определения величины $r(x)$ этого не будет, только если в точках, близких к ∂G^*, вектор $b(x)$, грубо говоря, направлен к ∂G^* или $b(x) = 0$. Поэтому требование $\|br^{-1}\| < \infty$ является очень сильным. Возможность его ослабить дается теоремой 3. В ней, как и в следующих, подразумевается (2.1).

Теорема 3. *Если при некотором $s > (n-1)/n$ $\|br^{-s}\| < \infty$, то $\|br^{-1}u\| < \infty$, и, следовательно, оценка (1.7) теоремы 2 имеет смысл. В уточненном виде утверждение состоит в том, что при $s > (n-1)/n$ $\|br^{-1}u\|$ оценивается через $\|br^{-s}\|$, $\|g\|$, s, n, d — диаметр G, а также $\|br^{-s}u^s\|$ (которая, конечно, $\leq \|br^{-s}\| \max |u|^s$).* Поэтому через те же величины оценивается множитель при $\overline{V}^{1/n}(x)$ в (1.8).

Хотя в теореме 3, так же как в теоремах 1, 2, допустимо $n = 1$, но при $n = 1$ верна оценка $|u(x)| < \|g\| F(\|b\|) h(x)$ (см. [4]), т. е. можно взять $s = (n-1)/n = 0$. Из такой оценки, конечно, следует, что $\|br^{-1}u\| < \infty$, так как $r \geq h$. Поэтому также выполняется (1.8).

Ввиду этого замечания случай $n = 1$ можно исключить из рассмотрения. Вместе с тем в § 3 будет доказано, что при $n > 1$ взять $s = (n-1)/n$ нельзя.

Следующая теорема ослабляет условие теоремы 2 за счет естественного дополнительного условия на область.

Теорема 4. *Пусть для области G существует такой параболоид P степени l, что G включается в параболоид, равный P, с вершиной в любой точке на ∂G^* (так что заведомо $l \geq 2$ и $\partial G^* \subset \partial G$). Тогда если при каком-либо $s > (n-1)(l-1)/(nl)$ $\|br^{-s}\| < \infty$, то там же $\|br^{-1}u\| < \infty$.* Именно $\|br^{-1}u\|$ оценивается через те же величины, что в теореме 3.

2.2. Теоремы 3, 4 вытекают из следующей общей теоремы.

Теорема 5. *Пусть при некотором $s > 0$ $\|br^{-s}\| < \infty$ и существуют такие C, $p > 0$, что для $k = ns$ там, где $b(x) \neq 0$, $h_k(x) \leq Cr^p(x)$. Тогда $\|br^{-1}u\| < \infty$. Именно $\|br^{-1}u\|$ оцениваются через $\|br^{-s}\|$, $\|g\|$, s, n, C, p, d, $\|br^{-s}u^s\|$.*

Так как, очевидно, $r(x) \geq h(x)$, то второе условие теоремы заведомо выполнено, если $h_k(x) \leq Ch^p(x)$. Наличие же такого неравенства зависит только от свойств G. Как показано в [3], при любом $k > 0$ и $k \leq n$

$$h_k(x) \leq \alpha_n V^{1/k}(x) h^{1-n/k}(x). \tag{2.3}$$

А так как, по (1.9), всегда $V(x) \leq Ah(x)$, то для всякой области

$$h_k(x) \leq Ch^p(x), \qquad p = 1 - \frac{n-1}{k}. \tag{2.4}$$

Благодаря этому теорема 3 непосредственно следует из теоремы 5. Действительно, в ее условиях $k = ns > n-1$, так что $p > 0$, т. е. выполнены условия теоремы 5.

При условии, наложенном на G в теореме 4, выполняется (1.11): $V(x) \leq Ah^p(x)$, $q = (n+l-1)/l$, а поэтому из (2.3)

$$h_k(x) \leq Ch^p(x), \qquad p = 1 - \frac{n}{k} + \frac{l+n-1}{lk} = 1 - \frac{n-1}{k} \cdot \frac{l-1}{l}. \tag{2.5}$$

Вместе с тем в теореме 4 $k = ns > (n-1)(l-1)/l$. Поэтому $p > 0$, т. е. условие теоремы 5 выполнено.

2.3. Докажем теорему 5. В [1] было доказано, что при всяком $s \in (0,1)$ и при $k = ns$, там, где $u(x) < 0$, выполняется неравенство

$$|u(x)| < H_{n,k}(\|g_+\| + \|br^{-s}u^s\|)h_k(x), \tag{2.6}$$

где $H_{n,k}$ — некоторая функция и нормы можно брать по $G(u<0)$.

При условиях теоремы 5 все нормы здесь конечны, а

$$h_k(x) \leq Cr^p(x), \qquad p > 0.$$

Поэтому

$$|u(x)| \leq Ar^p(x), \qquad A = \text{const}, \qquad p > 0. \tag{2.7}$$

Отсюда, при любом t, $r^{-t}|u|^t \leq Ar^{(1-p)t}$. А так как по условию $\|br^{-s}\| < \infty$, то $\|br^{-t}u^t\| < \infty$, если $(1-p)t \leq s$ (норма берется по $G(u<0)$).

Если $1-p \leq s$, то можно взять $t = 1$ и оказывается, что $\|br^{-1}u\| < \infty$, т. е. мы уже имеем нужный результат.

Допустим, что $1 - p > s$. Тогда, беря

$$t = s_1 = \frac{s}{1-p}, \tag{2.8}$$

будем иметь $\|br^{-s_1}u^{s_1}\| < \infty$. Поэтому нормы в (2.6) будут конечными при s_1 вместо s.

Далее, так как $s_1 > s$, то для $k_1 = ns_1$ и $k = ns$ заведомо $h_{k_1}(x) \leq h_k(x)$ (вследствие известного свойства степенных средних). Поэтому то условие, что $h_k \leq Cr^p$, тем более применимо к h_{k_1}.

В результате оказывается, что предыдущий вывод можно повторить, заменяя s на s_1. Тогда опять либо $1-p \le s_1$ и отсюда $\|br^{-1}u\| < \infty$, либо можно взять $s_2 = s_1/(1-p) = s/(1-p)^2$ и повторить тот же вывод с s_2. Так дойдем до $s_m = s/(1-p)^m \ge 1-p$, а тогда $\|br^{-1}u\| < \infty$, и теорема доказана.

Оценка для $\|br^{-1}u\|$ выводится следующим образом. Так как $h_k \le Cr^p$, то из (2.6) при любом $t > 0$

$$\|br^{-t}u^t\| \le H^t C^t \|br^{-(1-p)t}\|. \tag{2.9}$$

Если $1-p \le s$, то берем $t = 1$ и получаем искомую оценку, поскольку справа будет стоять $\|br^{-(1-p)}\| \le \|br^{-s}\| d^{s+p-1}$.

Если $1-p > s$, то берем $t = s_1$ из (2.8), т. е. $(1-p)t = s$. Тогда (2.9) дает оценку для $\|br^{-s_1}u^{s_1}\|$. Продолжая дальше, придем к оценке $\|br^{-1}u\|$.

2.4. Отметим еще теорему, в условиях которой функция $r(x)$ не фигурирует.

Теорема 6. *Пусть $n > 2$ и область G удовлетворяет условию теоремы 4 с $l < 2(n-1)/(n-2)$. Тогда, если при некотором*

$$t > \frac{n+l-1}{2(n-1)-l(n-2)} \tag{2.10}$$

функция $(a^{-1}|b|^n)^t$ суммируема в G, то имеет место оценка

$$|u(x)| \le NV^{1/n}(x), \tag{2.11}$$

где N зависит от $\|a^{-1}|b|^n\|_{L_t(G)}$, $\|g\|$, l, t, n, A, d, $\max|u|$. При этом, однако, оценка теоремы 2 может не иметь смысла, так как возможно $\|br^{-1}u\| = \infty$.

Если же $n = 2$, то при этом же условии на G с любым $l \ge 2$ и при том же условии на $a^{-1}|b|^n$ (т. е. $(a^{-1}|b|^2)^t$ суммируема при каком-то $t > (l+1)/2$) не только выполняется (2.11), но и оценка теоремы 2 имеет смысл, так как оказывается $\|br^{-1}u\| < \infty$.

Доказательство основано на теореме 5, но мы его опускаем.

§ *3. Неулучшаемость полученных результатов*

3.1. Величина $V(x)$, через которую, согласно теореме 2, оценивается $|u(x)|$, стремится к нулю, только если $x \to \partial G^*$. Поэтому наши оценки дают заключения о скорости, с какой $u(x) \to 0$ при $x \to x_0 \in \partial G^*$, но ничего не дают по этому поводу, когда $x_0 \notin \partial G^*$. Однако они дают максимум того, что можно заключить, как показывает следующая теорема.

Теорема 7. *Если область G выпукла, то для любой $x_0 \in \partial G^*$ и последовательности $x_k \to x_0$, $x_k \in G$, можно указать последовательность уравнений в G с $b = c = 0$, $\|f\| = 1$ и с такими решениями $u^{(k)}$, $u^{(k)}|_{\partial G} = 0$, что $u^{(k)}(x) > \delta_n V^{1/n}(x_k)$, где $\delta_n > 0$ зависит только от n. Короче, порядок оценки $|u(x)|$ через $V(x)$ не может быть повышен ни для какой $x_0 \in \partial G$.*

Если же G не выпукла, то для точек $x_0 \in \partial G$ и $\notin \partial G^*$ никакие заключения о скорости, с какой $u(x) \to 0$ при $x \to x_0$, невозможны.

Доказательство. Если G выпукла, то, как доказано в [5], подходящим выбором уравнения с $b = c = 0$ и заданной $\|f\|$ можно обеспечить, чтобы в данной точке $|u(x)|$ отличалась от правой части оценки (1.4) сколь угодно мало. В ту оценку входит $h_n(x)$, а по (1.6) $h_n(x) \geq \beta_n V^{1/n}$. Из этих замечаний первая часть теоремы 7 следует очевидным образом.

Вторая часть теоремы 7 непосредственно вытекает из условий п. 1.1. Они допускают, что u удовлетворяет уравнению (1.1) лишь в точках выпуклости. Если же $x_0 \in \partial G$, но $\notin \partial G^*$, то вблизи нее нет точек выпуклости u (если только $u \not\equiv 0$). Поэтому можно достаточно произвольно изменять u вблизи x_0, не нарушая условий п. 1.1, и, в частности, сделать так, чтобы при $x \to x_0$ $u(x) \to 0$ сколь угодно медленно. Впрочем, требование о выполнении уравнения всюду в G мало помогает.

Пусть точка $x_0 \in \partial G$ такова, что в ней ∂G имеет касательную плоскость P, которая вблизи x_0 содержится в $G \cup \{x_0\}$. Пусть ν — внутренняя нормаль к P, проведенная из x_0. При любой функции $\theta(\xi) \geq 0$, $\xi \in (0, \infty)$, такой что $\theta(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$, можно задать в G гладкую функцию u, решающую задачу (1.1) с $b = c = 0$, $\|f\| < \infty$, но такую, что для точек x на ν $|u(x)|/\theta(|x - x_0|) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Действительно, функцию $u(x)$ можно выбрать так, чтобы вблизи x_0 ее след на ν был выпуклой функцией, приближающейся к нулю при $x \to x_0$ достаточно медленно, следы на плоскостях, перпендикулярных ν, — вогнутыми. Тогда, если ось x_1 направлена по ν, будет $u_{11} > 0$, $\sum\limits_2^n u_{ii} < 0$. Поэтому тут u удовлетворяет уравнению

$$a_1 u_{11} + a_2 \sum_2^n u_{ii} = 0, \qquad a_1 = \left|\sum_2^n u_{ii}\right|, \qquad a_2 = |u_{11}|.$$

В остальной же части области можно определить u произвольно, обеспечивая желаемую гладкость и $u|_{\partial G} = 0$, а за уравнение для нее принять $\Delta u = f$, где f есть Δu.

3.2. Как было замечено в связи с теоремой 3, при $n = 1$ в ней можно взять $s = (n-1)/n = 0$. Поэтому исключим случай $n = 1$, а при $n > 1$ можно утверждать следующее.

Теорема 8. *Условия: $\|br^{-s}\| < \infty$ при каком-нибудь $s < (n-1)/n$, $\|f\|<\infty$, $c = 0$, не обеспечивают общей оценки вида $|u(x)| < N\theta(h(x))$ ни с какой $\theta(\xi)$, такой что $\theta(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$. При $n > 2$ можно требовать даже ограниченность $a^{-1/n}f$, $a^{-1/n}b$.*

Именно при всякой такой функции $\theta(\xi) \geq 0$ и всяком $s < (n-1)/n$ можно указать область G и в ней уравнение с $\|br^{-s}\| < \infty$, $\|f\| < \infty$, $c = 0$ и с таким решением u, $u|_{\partial G} = 0$, что в G есть последовательности точек, для которых $|u(x)|/\theta(h(x)) \to \infty$. При $n > 2$ это уравнение можно взять с ограниченными $a^{-1/n}f$, $a^{-1/n}b$. Область G (при любом n) можно взять строго выпуклой, а u — сколь угодно гладким.

3.3. Докажем теорему 8. Пусть $s < (n-1)/n$ и $\theta(\xi) \geq 0$ ($\theta(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$) заданы. Положим

$$(n-1) - ns = \varepsilon. \tag{3.1}$$

Пусть $\varphi(\xi)$ — функция на полуоси $\xi \geq 0$, удовлетворяющая следующим требованиям.

I. $\varphi(0) = 0$ и при малых ξ $\quad\varphi(\xi) \geq \sqrt{\theta(\xi)}$.

II. При $\xi > 0$ $\quad\varphi$ дважды непрерывно дифференцируема и $\varphi' > 0$, $\varphi'' < 0$.

III. $\xi\varphi'(\xi) > C\xi^{\delta}$, где $C = \mathrm{const} > 0$, $\delta = \varepsilon/(2(n-1))$ и ε то же, что в (3.1).

IV. При больших ξ $\quad\varphi(\xi) < \xi$.

При любой θ такую функцию всегда можно построить. (Например, если φ_0 уже удовлетворяет I, II, то $\varphi_0 + \xi^{\delta}$ удовлетворяет также III.)

Рассмотрим теперь функцию

$$u(x) = -\varphi(x_1) + x_1 + v(\rho), \qquad \rho = \left(\sum_2^n x_i^2\right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Непосредственно проверяется (ввиду $\varphi'' < 0$), что она удовлетворяет уравнению

$$\frac{u_{x_1x_1}}{|\varphi''(x_1)|} + \frac{\Delta u}{\Delta v(\rho)} + \frac{2u_{x_1}}{\varphi'(x_1)} = \frac{2}{\varphi'(x_1)}, \qquad \Delta = \sum_2^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{3.3}$$

Мы примем $v(\rho) = \rho^2/(2(n-1))$, так что $\Delta v = 1$. Пусть G' — область, где $u < 0$; ввиду условия IV она ограничена. Пусть G — заключающий ее конечный цилиндр с основанием на плоскости $x_1 = 0$. Мы полагаем $u = 0$ в $G \setminus G'$, а уравнение для u в $G \setminus G'$ можно взять, например, $u_{x_1x_1} + \Delta u = 0$. Так определенная функция u в G имеет, очевидно, абсолютно непрерывное опорное изображение (возможность заменить ее гладкой показывается ниже).

Из (3.2) и условия I на φ ясно, что для точек на оси x_1 $\quad|u(x)|/\theta(x_1) \to \infty$ при $x_1 \to 0$.

Ввиду выбора уравнения для u в $G\backslash G'$ нормы $\|br^{-s}\|$ и т. п. вычисляются для G'. Из (3.3) видно, что вектор b направлен по оси x_1, так что $r = x_1$. Далее, ввиду того, что $\Delta v = 1$, $\varphi'' < 0$ и в (3.3) $|b| = f = 2/\varphi'$, имеем

$$a^{-1}|b|^n = a^{-1}f^n = -2^n\frac{\varphi''(x_1)}{\varphi'^n(x_1)} = \frac{2^n}{n-1}\left(\frac{1}{\varphi'^{(n-1)}}\right)'. \tag{3.4}$$

Отсюда, так как $r = x_1$, очевидно, следует, что

$$\|br^{-s}\|^n = \int\limits_{G'} a^{-1}|b|^n x_1^{-sn}dx < C\int\limits_0^d \left(\frac{1}{\varphi'^{(n-1)}}\right)'\frac{dx_1}{x_1^{ns}}, \tag{3.5}$$

где, естественно, $d = \max x_1$ на G'.

Интегрируя по частям и пользуясь (3.1), получаем

$$\|br^{-s}\|^n < C\left[\frac{x_1^{\varepsilon}}{(\varphi' x_1)^{n-1}}\ \Big|_0^d + ns\int\limits_0^d \frac{dx_1}{(\varphi' x_1)^{n-1}x_1^{1-\varepsilon}}\right]. \tag{3.6}$$

По условию III на φ, $(\varphi' x_1)^{n-1} > C' x_1^{\varepsilon/2}$, то оба слагаемые справа конечны, так что $\|br^{-s}\| < \infty$. Поэтому $\|f\| < \infty$, так как $|b| = f$.

3.4. Докажем дополнительные утверждения при теореме 8. Покажем, что при $n > 2$ $a^{-1}|b|^n$, $a^{-1}f^n$ в (3.4) можно взять ограниченными. Очевидно, можно считать кривизну $\varphi''(1+\varphi'^2)^{-3/2}$ графика функции φ ограниченной. Тем самым, так как $\varphi' > \mathrm{const} > 0$, то ограничено также $\varphi''\varphi'^{-3}$ и вообще $\varphi''\varphi'^{-n}$, если $n \geq 3$.

За область G в выводах предыдущего пункта можно принять не цилиндр, а область, подобную G', с центром подобия в начале координат, $G \supset G'$. Тогда вообще $r \neq x_1$. Но так как G и G' подобны и r определяется только в G', то отношение $r : x_1$ заключено между положительными постоянными. Поэтому предыдущий вывод сохранится, а область G — строго выпукла.

Функцию u в G можно выбрать гладкой, потеряв разве что ограниченность $a^{-1/n}f$ при $n > 2$. Именно пусть G'' — область, подобная G' относительно начала и содержащаяся в G'. В G'' берем u ту же (3.2). А в $G \setminus G''$ принимаем за u гладкую функцию с $u|_{\partial G} = 0$, гладко смыкающуюся с (3.2) в $G \setminus G''$. Уравнение для нее берем $u_{x_1x_1} + \Delta u = f$, где f — просто $u_{x_1x_1} + \Delta u$. Можно обеспечить суммируемость ее вторых производных со степенью n и вообще с любой данной степенью, стоит лишь область, где они растут при приближении к началу координат, сделать достаточно быстро сужающейся.

При таком определении u и уравнения для нее $\|f\|$ конечна, и все предыдущие выводы сохраняются, кроме вывода об ограниченности $a^{-1/n}f$ при $n > 2$.

3.5. Теорема 9. *Условия теорем 3, 4, 6 не могут быть ослаблены* (теоремы 3 — вовсе, а теорем 4, 6 — сколько-нибудь существенно).

1. В теореме 3 требуется $s > (n-1)/n$, а в теореме 8 — $s < (n-1)/n$. Остается случай $s = (n-1)/n$. Для него верно следующее.

Условия $\|br^{-n-1/n}\| < \infty$, $\|f\| < \infty$, $c = 0$ не обеспечивают общей оценки вида $|u(x)| < Nh^q(x)$ ни с каким $q > 0$. Это утверждение разъясняется так же, как теорема 8, и тут верны такие же дополнительные утверждения.

Доказательство получается аналогично доказательству теоремы 8, если исходить из функции (3.2) с $\varphi(\xi) = \xi^q$ и $v(\rho) = e^{-q/\rho}\rho^4$. (Если требовать только $\|br^{-s}\| < \infty$ при всех $s < (n-1)/n$, то нельзя обеспечить оценки $|u(x)| < N|\ln|\ln\ldots|\ln h(x)|\ldots||^{-1}$.)

2. В теореме 4 требуется $s > (n-1)(l-1)/(nl)$. Вместе с тем требования: $\|br^{-s}\| < \infty$ при всех $s < (n-1)(l-1)/(nl)$, $\|f\| < \infty$, $c = 0$, не обеспечивают для областей с условием теоремы 4 общей оценки: $|u(x)| < NV^{1/n}(x)$ (и даже $|u(x)| < Nh^q(x)$ с каким-либо $q > 1/l$, что сильнее, так как для точки x на оси параболоида степени l $V^{1/n}(x) = Ah^q(x)$, $p = (l+n-1)/(ln) = 1/l + (l-1)/(ln)$).

Доказательство получается, если исходить из функции (3.2) с $\varphi(\xi) = \xi^q$, $v(\rho) = \rho^{ql}$ и определять G как в п. 3.4.

3. Условия теоремы 6 также не могут быть ослаблены. Например, при $n > 2$ и $l \geq 2(n-1)/(n-2)$ даже ограниченность $a^{-1/n}|b|$, $a^{-1/n}f$, а при $l < 2(n-1)/(n-2)$ — суммируемость $(a^{-1}|b|^n)^t$ при всех t, меньших правой части (2.10) в теореме 6, не обеспечивают $|u(x)| < NV^{1/n}(x)$.

Доказательство получается, если исходить из функции (3.2) того же вида, что в 2, с другими подходящими q.

§ 4. *Обобщения*

4.1. Все предыдущие результаты допускают обобщение совершенно так же, как в [1] обобщается теорема 1 и другие полученные результаты. Напомним определения из [1], необходимые для формулировок этих обобщений.

Пусть $E = E^m$ — m-мерная плоскость, $1 \leq m \leq n$; x_E — проекция точки x на E; G_E — проекция области G; G^*_E — ее выпуклая оболочка. Если поворотом осей E сделана плоскостью $x_1, \ldots, x_m$ и соответственно преобразовано уравнение (1.1), то полагаем $a_E = \det(a^{ij})$, $i, j \leq m$.

Определяем норму $\|\varphi\|_E$ для функций на G. Для данной φ рассматриваются все такие измеримые функции ψ в G_E, что $\varphi(x) \leq a_E^{1/n}(x)\psi(x_E)$ всюду в G. Полагаем

$$\|\varphi\|_E = \inf \|\psi\|_{L_m(G_E)}. \tag{4.1}$$

Пусть $b_E(x)$ — проекция вектора $b(x)$ на E, а $r_E(x)$ — расстояние от x_E до ∂G_E^* в направлении $b_E(x)$. Для краткости вместо $\|b_E r_E^{-1}\|_E$ и т. п. пишем $\|br^{-1}\|_E$. Определяем для G_E^* функции $h_{kE}(x)$, $x \in G_E^*$, так же как h_k определяются для G^*, и для любой $x \in G^*$ полагаем $h_{kE}(x) = h_{kE}(x_E)$.

Под пучком понимается множество плоскостей E^m, проходящих через данную E^{m-1} (точку, если $m = 1$). В множестве всех E^m, проходящих через E^{m-1}, определяется естественная мера и слова «почти все плоскости пучка» понимаются в соответствующем смысле.

Теорема 10. *Все предыдущие теоремы переходят в утверждения, верные для почти всех плоскостей E любого пучка, если в каждой из них заменить n на какое-либо m, $1 \le m \le n$, норму $\|\varphi\|$ — на $\|\varphi\|_E$, функции h_k, r — на h_{kE}, r_E и область G — на G_E.* Формально дело сводится к замене n на m и приписанию всюду, где следует, индекса E (при $m = n$ это сведется к повторению, так как тогда $G_E = G$, $\|\varphi\|_E = \|\varphi\|$, $h_{kE} = h_k$, $r_E = r$).

Например, теорема 2 обобщается так: для почти всех плоскостей E^m любого пучка

$$|u(x)| < \gamma_m \|g_+\|_E V_E^{1/m}(x), \tag{4.2}$$ [2)]

где $V_E(x)$ — объем пересечения G_E^* с областью, ей симметричной относительно x_E. Аналогично в оценках $V(x)$ через $h(x)$ нужно заменить $V(x)$ на $V_E(x)$, а $h(x)$ на $h_E(x)$ — расстояние от x_E до ∂G_E^*.

Обобщение теоремы 3: для почти всех E любого пучка, для которых при некотором $s > (m-1)/m$ оказывается $\|br^{-s}\|_E < \infty$, также $\|br^{-1}u\|_E < \infty$.

В обобщении теоремы 4 условие на область должно относиться к G_E, так же как в обобщении теоремы 5 функции h_k, r заменяются на h_{kE}, r_E.

При дополнительных условиях можно утверждать все то же не только для почти всех, а для всех E, а именно:

Теорема 11. *Пусть $u(x)$ дифференцируемо в каждой точке выпуклости хотя бы в одном направлении и во всех этих точках, за исключением, самое большое, счетного их множества, дважды дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (1.1). Тогда указанные в теореме 10 обобщения верны для любой плоскости.*

Дифференцируемость u можно и здесь понимать как аппроксимативную.

4.2. Для доказательства теорем 10, 11 можно было бы сослаться на «метод проекций», примененный в [1] и изложенный в общем виде в [4]. Но можно рассуждать более конкретно.

---

2) Как условлено, $\|\overline{g}_+\|_E = \|(f - c - |b_E| r_E^{-1} u)_+\|_E$.

Во-первых, замечаем, что соответствующее обобщение теоремы 1 уже доказано в [1]. Тогда обобщение теоремы 2 получается очевидным путем: достаточно сослаться на те же неравенства (1.6), но в применении к G_E.

Во-вторых, замечаем, что доказательство теоремы 5 основано на оценке (2.6), но ее обобщение тоже доказано в [1]. Поэтому доказательство обобщения теоремы 5 будет тем же.

Что же касается обобщений теорем 3, 4, то они выводятся из обобщения теоремы 5 буквально так же, как сами эти теоремы выводились из теоремы 5.

Наконец, обобщение теоремы 7 доказывается так же, как сама эта теорема, со ссылкой на доказанную в [3] точность обобщенной теоремы 1, а теоремы 8, 9 — из рассмотрения тех же функций (3.2).

4.3. Пусть теперь u удовлетворяет любому граничному условию $u|_{\partial G} = \varphi$. Пусть v — такая выпуклая функция в G, что $v|_{\partial G} \le \varphi$. Если v — наибольшая из функций с этими условиями, то говорим, что она натянута на φ.

Теорема 12. *При $u|_{\partial G} = \varphi$ все предыдущие результаты, поскольку они касаются значений $u(x) < 0$, верны для $u'(x) = u(x) - v(x)$ с заменой f на $f' = f - b^i v_i - cv$.*

Поэтому если в некоторой точке $x_0 \in \partial G^*$ $v|_{\partial G} = \varphi$, то получается оценка скорости, с какой $u(x) \to \varphi(x_0)$ при $x \to x_0$. Если v натянута на φ, то $v|_{\partial G} = \varphi$ по крайней мере во всех точках строгой выпуклости ∂G^* (т. е. в таких, через которые проходят опорные плоскости, не содержащие других точек ∂G^*).

Соответствующее утверждение о результатах, касающихся $u(x) > 0$, получается заменой выпуклой v на такую вогнутую v', что $v'|_{\partial G} = \varphi$. Натянутой на φ будет наименьшая из таких v'.

Доказательство содержится в [1].

Статья поступила в редакцию

29.XI.1966

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Мажорирование решений линейных уравнений второго порядка // Вестн. ЛГУ. 1966. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–25.
2. *Pucci C.* Regularità alla frontiera di soluzioni di equazioni ellittiche // Ann. Math. Ser. IV. 1964. T. 65. P. 311–328.
3. *Александров А. Д.* О средних значениях опорной функции // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172, № 4. С. 755–758.
4. *Александров А. Д.* Метод проекций в исследовании решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169, № 4. С. 751–754.
5. *Александров А. Д.* О мажорантах решений и условиях единственности для эллиптических уравнений // Вестн. ЛГУ. 1966. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 5–20.

К основам теории относительности

Памяти С. В. Валландера

Вестник ЛГУ. 1976. № 19. Сер. мат., мех., астроном. Вып. 4. С. 5–28

Занимаясь в 1950-х годах основами теории относительности, я не раз обсуждал встающие здесь вопросы и свои выводы с Сергеем Васильевичем Валландером. К этому было тем больше возможностей, что тогда мы постоянно встречались в совместной работе: весной 1952 г. я был назначен ректором университета и пригласил Сергея Васильевича быть проректором по научной работе. Среди захлестывающего потока дел, связанных с этой нашей деятельностью, мы находили передышки в научных беседах.

Сергей Васильевич был человеком острого мышления, способным проникать в глубокую суть проблем. А так как он был, скорее, склонен к критике, чем к похвалам, то общение с ним было тем более интересно и полезно, ибо проникновенный и придирчивый критик — лучший друг автора. Обсуждались, в частности, две мои работы [1, 2]. Здесь речь будет о [2].

Еще в 1949 г. [3] мною был получен вывод преобразований Лоренца из одного закона постоянства скорости света (без всяких предположений непрерывности и пр.) или, что равносильно, из условия сохранения системы световых конусов. Этот результат был существенно дополнен мною в [2], где преобразование Лоренца выводилось так же из условия сохранения системы таких конусов K_a в четырехмерном пространстве-времени, иначе говоря в пространстве событий, что конус K_a с вершиной a образуется точками-событиями, на которые воздействует (может воздействовать) событие a, или, другими словами, событие в «мировой» точке a. «Воздействие» можно понимать как передачу импульса-энергии. Сохранение системы указанных конусов означает сохранение отношения воздействия или, иначе говоря, отношения причинности, так что, можно сказать, преобразования Лоренца выводились из условия сохранения отношения причины — следствия.

Как в случае «конусов воздействия», так и световых конусов предполагалось, что речь идет о взаимно однозначных отображениях четырехмерного пространства на себя, сохраняющих систему рассматриваемых конусов (конусы отображаются на такие же конусы).

Это предположение, что рассматриваются отображения всего пространства на себя, Сергей Васильевич считал недостатком моих результатов, подчеркивая важность рассмотрения отображений не всего пространства, а ограниченной области. Основание такого взгляда состоит, в частности, в том, что, рассматривая отображения всего пространства, мы тем самым рассматриваем мир в целом, а это сомнительно как с эмпирической, так и философской точки зрения.

Таким образом, наши дискуссии с Сергеем Васильевичем выдвинули задачу: установить, каковы те взаимно однозначные отображения области четырехмерного, вообще n-мерного, пространства, при которых круговые конусы отображаются на круговые же конусы; понятно, имеются в виду не целые конусы, а их части, расположенные в данной области и соответственно в той, на которую она отображается. (Впрочем, точные формулировки задачи и результатов мы даем дальше.)

Прошло 20 с лишним лет, а вопрос оставался нерешенным. Теперь предложение написать статью для сборника памяти Сергея Васильевича подтолкнуло меня, и я довел до конца бывшие у меня соображения, получив, таким образом, полное решение вопроса. Изложение этого решения и составляет содержание данной работы.

Между прочим, результаты моих работ [2, 3] были повторены позже другими авторами, не заметившими их [4, 5]. В работе [5] 1972 г. авторы под впечатлением полученного вывода, «что группа Лоренца следует из одного постоянства скорости света», выделили его курсивом и снабдили восклицательным знаком. Между тем этот результат был получен и опубликован мною на 22 года раньше — еще в работе [3].

Хотя в данной статье мы получаем прежде всего локальный результат — для ограниченных областей, тем не менее из него далее получаются следствия глобального характера, касающиеся возможных моделей мира.

§ *1. Формулировки результатов*

1.1. Мы рассматриваем пространство Минковского — псевдоевклидово пространство R, в метрической форме которого один квадрат одного знака, а все другие — противоположного. Предполагается, что размерность пространства $\dim R \geqslant 3$, не исключая $\dim R = \infty$. Ввиду этого допущения дадим определение пространства R. Это допущение, однако, не усложняет доказательств.

Аффинное пространство A, не исключая $\dim A = \infty$, есть не что иное, как линейное пространство над полем вещественных чисел, при условии, что в нем введены переносы $x \mapsto x + a$ (соответственно $\dim A$ понимается как наибольшая мощность множества независимых векторов). Поэтому, беря любую точку $O \in A$ и принимая ее за начало, т. е. относя ей нуль-вектор, получаем отображение A на линейное пространство — точкам $x \in A$ отвечают векторы O_x. Дальше предполагается, что начало O фиксировано и x, y, a и т. п. будут обозначать как точки из A, так и векторы O_x, O_y, O_a и т. д. В A предполагается выпуклая топология.

Проведем через O прямую L и не содержащую ее плоскость E коразмерности 1. Каждый вектор однозначно разлагается на составляющие по L и E:

$$x = x_L + x_E.$$

Пусть в плоскости E определено скалярное произведение $x_E y_E$. Введем на L аффинную координату x_0; можно считать квадрат вектора $x_L : x_L^2 = x_0^2$. Определяем псевдоквадрат произвольного вектора $x = x_L + x_E$:

$$x^2 = x_L^2 - x_E^2 = x_0^2 - x_E^2.$$

Соответственно псевдоскалярное произведение

$$xy = x_0 y_0 - x_E y_E.$$

В результате мы получаем псевдоевклидово пространство R. То же пространство получается, если x^2 изменяется на постоянный множитель $\lambda \neq 0$, не исключая $\lambda < 0$. Мы выбрали знак так, что один квадрат положителен, и сохраним его.

1.2. Мы рассматриваем шесть отношений между точками $x, y \in R$: три симметричных (I) $(x-y)^2 = 0$, (II) $(x-y)^2 \geqslant 0$, (III) $(x-y)^2 > 0$ и три антисимметричных (I$^+$)–(III$^+$), получающихся из (I)–(III) присоединением условия $x_0 \leqslant y_0$. В частности, (I) означает, что вектор xy изотропный, а (I$^+$) — что, кроме того, его составляющая на ось x_0 неотрицательна.

Вопрос, решаемый в данной работе, состоит в исследовании отображений, сохраняющих указанные отношения вместе с их отрицаниями, т. е., например, соотношения $(x-y)^2 = 0$ и $(x-y)^2 \neq 0$.

Можно различить 4 типа элементарных преобразований — отображений, обладающих этим свойством:

1) гомотетии H: $x' = \lambda x + a$ ($\lambda \neq 0$, не исключая $\lambda < 0$; допуская $\lambda = 1$, мы относим к гомотетиям переносы);

2) преобразования Лоренца L, т. е. взаимно однозначные линейные отображения, сохраняющие x^2 и неравенство $x_0 > 0$ при $x^2 > 0$ («необращающие времени» x_0);

3) инверсии I; инверсия с центром a есть преобразование

$$x' = I_a(x) = \frac{x-a}{(x-a)^2} + a;$$

4) особые двойные инверсии, короче *ОД*-инверсии J,

$$x' = J_{ca}(x) = \frac{(x-a) + c\,(x-a)^2}{1 + 2c\,(x-a)} + a,$$

где вектор $c \neq 0$ таков, что $c^2 = 0$, а в остальном произволен. Что же касается вектора a, то, как и в 3), он любой. Название преобразования 4) связано с тем, что оно отличается от произведения двух инверсий с центрами a, $a-c$ только переносом (см. п. 2.2).

В отличие от преобразований 1), 2), определенных на всем пространстве, инверсия I_a не определена на конусе C_a: $(x-a)^2 = 0$, а *ОД*-инверсия J_{ca} — на плоскости P_{ca}: $1 + 2c\,(x-a) = 0$. Если $\dim R < \infty$, то преобразования Лоренца отображают R на себя, но при $\dim R = \infty$ могут отображать R на линейное подпространство.

Нужные нам свойства преобразований 1)–4) будут рассмотрены в § 2. Здесь мы отметим

Предложение 1. *Любое отображение f, являющееся комбинацией преобразований* 1)–4), *сохраняет соотношение* (I) *и его отрицание для всех пар x, y, коль скоро $f(x)$, $f(y)$ определены, и сохраняет отношения* (II), (III) *с их отрицаниями, если точки x, y принадлежат одной связной компоненте того множества, на котором f определено. Отношения же* (I^+), (II^+), (III^+) *с их отрицаниями при этом последнем условии сохраняются, если сумма числа входящих в f инверсий и гомотетий с коэффициентом $\lambda < 0$ четная.*

1.3. Оказывается верно предложение, обратное только что формулированному. А именно имеет место

Теорема 1. *Если взаимно однозначное отображение $f : G \to R$ области $G \subset R$ сохраняет одно из шести отношений* (I)–(III^+) *вместе с его отрицанием, то f есть комбинация преобразований* 1)–4). *Именно f либо есть преобразование Лоренца с гомотетией, либо может быть представлено как такое преобразование с добавлением инверсии или ОД-инверсии.*

Иначе говоря, f приводится к одному из трех видов: HL, HLI, HLJ, причем в двух последних случаях оно может быть приведено также к виду IHL и соответственно JHL (с другими H, I, J, кроме того случая, когда преобразование HL тождественное; можно еще заметить, что $HL = LH$).

Отношения (I^+)–(III^+) сохраняются, если в HL и HLJ коэффициент гомотетии $\lambda > 0$, в случае же HLI, напротив, если $\lambda < 0$.

Представление f в виде HL, а также HLI (или IHL) единственно. Но представление HLJ (как и JHL) не единственно: вместе с одним представлением HLJ возможно любое $H'L'J'$, где J' имеет ту же особую плоскость P: $1 + 2c\,(x-a) = 0$ (так что $c' = \lambda c$, $1 - 2c'a' = \lambda(1 - 2ca)$).

Заметим, что наша теорема для отношений (I^+)–(III^+) является непосредственным ее следствием для (I)–(III). Действительно, для любой пары точек x, y либо $x_0 \leqslant y_0$, либо $y_0 \leqslant x_0$. Поэтому если сохраняются, например, отношения $(x-y)^2 = 0$ и $(x-y)^2 \neq 0$ вместе с неравенством $x_0 \leqslant y_0$, то они сохраняются и независимо от него, потому что если для данных точек x, y $y_0 \leqslant x_0$, то достаточно переменить обозначения x на y, как будет $x_0 \leqslant y_0$.

Ввиду этого замечания случаи (I^+)–(III^+) можно было бы и не рассматривать. Но они имеют значение в физической интерпретации, которая излагается в п. 1.6.

В данной работе мы доказываем теорему 1 только для отношений (I) в § 3 и (II) в § 4, 5; доказательство для отношения (III) мы не даем за недостатком места.

1.4. Геометрическая формулировка теоремы 1. Задание отношения точек x, y равносильно отнесению каждой точке x множества всех y, находящихся к ней в данном отношении. Отношениям (I)–(III) отвечают конусы:

($\mathrm{I_M}$) $C_x = \{\, y\colon (x-y)^2 = 0 \,\}$ — изотропный конус с вершиной x;

($\mathrm{II_M}$) $K_x = \{\, y\colon (x-y)^2 \geqslant 0 \,\}$;

($\mathrm{III_M}$) $Q_x = \{\, y\colon (x-y)^2 > 0 \,\} \cup \{x\}$ — это открытый конус; включив его вершину x, мы дополнили отношение (III) отношением $y = x$.

Множества C_x^+, K_x^+, Q_x^+, отвечающие отношениям (I^+)–(III^+), получаются добавлением условия $x_0 \leqslant y_0$, так что ($\mathrm{I_M^+}$) $C_x^+ = \{y\colon y \in C_x,\ y_0 \geqslant x_0\}$ и аналогично определяются ($\mathrm{II_M^+}$) K_x^+, ($\mathrm{III_M^+}$) Q_x^+. Эти множества тоже суть конусы, но «ординарные» в отличие от «двойных» C_x, K_x, Q_x. Мы говорим, что они представляют собой «половины» этих конусов — те половины, на которых $y_0 \geqslant x_0$.

В терминах конусов ($\mathrm{I_M^+}$)–($\mathrm{III_M^+}$) теорема 1 пересказывается следующим образом.

Теорема 2. *Пусть f — такое взаимно однозначное отображение области G, что для каждого конуса M_x одного из шести типов* ($\mathrm{I_M}$)–($\mathrm{III_M^+}$) *при всякой $x \in G$ оказывается*

$$f(M_x \cap G) = M_{f(x)} \cap f(G). \tag{A}$$

Тогда f такое, как в теореме 1.

Теорема 2 равносильна теореме 1 вследствие такого замечания. Если $\mathcal{R}$ одно из рассматриваемых отношений и $M_x = \{\, y\colon \mathcal{R}(x,y) \,\}$, то сохранение отношения $\mathcal{R}$ при отображении f означает, что $f(M_x \cap G) \subset M_{f(x)} \cap f(G)$. Сохранение же отрицания $\mathcal{R}$ означает то же для обратного отображения f^{-1}, т. е. $M_{f(x)} \cap f(G) \subset f(M_x \cap G)$. Таким образом, (A) равносильно сохранению $\mathcal{R}$ и его отрицания, и тем самым теорема 2 равносильна теореме 1.

1.5. Теорема для конформного пространства. Пространство можно дополнить «бесконечно удаленным» конусом, на который при любой инверсии отображается ее особый конус (см., например, [6]; там $\dim R < \infty$, но в случае $\dim R = \infty$ указанное пополнение определяется буквально так же). В результате получается пространство C, на которое преобразования 1)–4) распространяются в качестве его взаимно однозначных отображений (и непрерывных при естественном определении топологии C).

Пространство C называется конформным, потому что конформные отображения областей в R — это преобразования 1)–4) и их комбинаций — те же HL, HLI, HLJ, так что дополнение R до C регуляризует конформные отображения. То, что конформные отображения — это HL, HLI, HLJ, хорошо известно при $\dim R < \infty$ (см., например, [6]). Теорема 2 позволяет доказать это и при $\dim R = \infty$ и получить даже более сильный результат, когда требование конформности заменяется существенно более слабым. Но это не входит в тему данной работы.

При пополнении R до C пополняются и конусы C_x, K_x, так что в C имеются в виду эти пополненные конусы. Каждая изотропная прямая пополняется «бесконечно удаленной» точкой и становится, таким образом, замкнутой.

Пространство C при исключении из него любого конуса C_x превращается в R. Отображение, которое в R является отражением в плоскости, оказывается в C инверсией. Выделение *ОД*-инверсий теряет смысл, поскольку инверсии не имеют на C особенностей [1)]. Поэтому естественно выделить на C только три вида отображений: 1) гомотетии H^C, 2) преобразования Лоренца L^C без отражений, 3) инверсии I^C, т. е. такие (гомеоморфные) отображения C на себя, которые при исключении из C подходящего конуса превращаются в названные. (При $\dim C < \infty$ это отображение C на себя.)

Имеет место следующая

Теорема 3. *Отображение $f : G \to C$ области $G \subset C$, удовлетворяющее тем же условиям, что в теореме 2, является либо $H^C L^C$, либо $H^C L^C$ с добавлением одной или двух инверсий I^C.*

В конечномерном случае отображение f представляется как произведение конечного числа инверсий (не более $n + 2$, если $\dim C = n$).

Теорема 3 легко выводится из теоремы 2 (см. §6). В свою очередь, теорема 2 является прямым следствием теоремы 3: достаточно дополнить данное R в теореме 2 до C и применить теорему 3.

Теорема 3 требует следующего замечания. Из того, что изотропные прямые в C замкнуты, следует, что нельзя выделить половины C_x^+, K_x^+, Q_x^+ конусов C_x, K_x, Q_x иначе как локально. Соответственно и условие (A) теоремы 2 для них применимо лишь локально. Впрочем, как уже было сказано, рассмотрение этих половин в наших теоремах не существенно. Кроме того,

[1)] Выделение *ОД*-инверсий в R имело тот смысл, что они определены на полупространствах, тогда как инверсии — на областях, на которые пространство разбивают их особые конусы.

можно заметить, что условие (А) в отношении C_x^+ равносильно сочетанию его для C_x с требованием сохранения ориентации или обхода, который задается на какой-либо изотропной прямой и затем распространяется на другие изотропные прямые — образующие конусов C_x по непрерывности. Аналогично можно пересказать условие для конусов K_x^+, Q_x^+, если ввести на конусах K_x, Q_x локальный порядок соответственно обходу на образующих конуса C_x.

Пространство C гомеоморфно произведению сферы на окружность[2)]. Поэтому существует накрывающее его пространство $\overline{C}$, гомеоморфное произведению сферы на прямую. В нем естественно индуцируется геометрия, локально совпадающая с геометрией в C. Изотропные прямые в $\overline{C}$ уже не замкнуты, так что можно выделить половины C_x^+, K_x^+, Q_x^+. На $\overline{C}$ распространяются отображения H^C, L^C, I^C и из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Сказанное в теореме* 3 *применимо соответственно к пространству* $\overline{C}$. *При этом условие для половин конусов имеет смысл не только локально, но и в целом.*

1.6. Физическая интерпретация. При физическом толковании отношений (I)–(III$^+$) и теорем 1–3 мы рассматриваем пространство событий или, что то же, пространство-время, с каждой точкой которого связано какое-либо событие; соответственно x, y обозначают точки-события, а координата x_0 — время в некоторой системе отсчета.

Отношения (I$^+$)–(III$^+$) означают, что x воздействует или в принципе может воздействовать на y, т. е. от x к y передается, может передаваться, импульс-энергия. Именно (I$^+$) означает воздействие прямым, т. е. нерассеянным, светом, а (II$^+$) — любое мыслимое воздействие, (III$^+$) — механическое воздействие — передачу импульса-энергии частицами с ненулевой массой покоя, или рассеянным светом.

Соответственно конусы C_x^+, K_x^+, Q_x^+ суть множества тех точек-событий, до которых x доходит, может доходить, соответствующее воздействие — светом, любое, механическое.

Симметричные отношения (I), (II) означают связь x и y, или возможную их связь, передачей импульса-энергии, безразлично от x к y, или наоборот: (I) — связь прямым светом, (II) — любую связь, (III) — механическую связь.

Наши теоремы означают, что одно сохранение любого из перечисленных шести отношений вместе с его отрицанием без всяких дополнительных условий уже обеспечивает определенный характер возможных преобразований пространства-времени. (При естественном требовании, что эти преобразования образуют группу, нет необходимости требовать сохранения вместе с

[2)] В случае $\dim R = \infty$ можно иметь в виду сферу, получающуюся из плоскости E (в определениях п. 1.1) присоединением бесконечно удаленной точки; топология определяется так же, как при $\dim R < \infty$, поскольку задан x_E^2.

данным отношением его отрицания, так как оно обеспечивается сохранением отношения при обратном преобразовании.) Естественно ограничиваться, однако, только неограниченно продолжаемыми преобразованиями; тогда инверсии и *ОД*-инверсии в плоском пространстве-времени Минковского R отпадают и остаются лишь преобразования Лоренца с гомотетиями. Но в случае конформного пространства C или его накрывающего $\overline{C}$ любые локально допустимые преобразования неограниченно продолжаемы и соответственно в этих пространствах действуют группы всех конформных преобразований. (Мы считаем $\dim C < \infty$.)

Требование, чтобы преобразования образовывали группы, влечет те же результаты, что и требование их продолжаемости. Заметим в скобках, что это последнее не означает рассмотрения мира в целом, как продолжаемость натурального ряда не означает рассмотрение его как актуально бесконечного. Считая, в соответствии с известным общим взглядом на геометрию, что геометрия пространства-времени определяется группой преобразований, мы заключаем из наших теорем, что каждое из шести отношений (I)–(III$^+$) определяет в этом смысле геометрию пространства-времени. Наиболее важным представляется случай отношения (II). Он показывает, что самое общее симметричное причинно-следственное отношение передачи импульса-энергии уже определяет геометрию пространства-времени.

Помимо пространства Минковского R мы имеем две модели C, $\overline{C}$ для пространства-времени, в котором геометрия определяется одним этим общим отношением. Модели эти рассматривались И. Сегалом в [7] в связи с космологией.

В пространстве C отношения (I$^+$)–(III$^+$) могут быть определены лишь локально, так что в нем обычная направленная причинная связь имеет лишь локальный смысл. В накрывающем же пространстве $\overline{C}$ она имеет и глобальное значение: продолжение локального причинного влияния не ведет к замкнутым причинным цепям, как в пространстве C. Считают, что наличие таких цепей недопустимо, невозможно, «так как оно противоречит понятию причинности». Это соображение, однако, неосновательно, потому что неосновательно думать, будто природа должна согласовываться с нашими понятиями. Понятие причинности отвечает локальной структуре природы. Из нее оно и взято, но это не значит, что в иных пределах данное понятие не требует изменений.

1.7. Дополнение. Имеет место следующая

Теорема 5. *Пусть* $f\colon\ G \to R$ *такое взаимно однозначное отображение области* $G \subset R$, *что* 1) $f(G)$ — *открытое множество и* 2) *для конуса* M_x *одного их шести типов* (I)–(III$^+$) *при всякой* $x \in G$ *найдется такая точка* $y \in f(G)$, *что*

$$f(M_x \cap G) = M_y \cap f(G).$$

Тогда f такое же, как в теореме 1. *Если аналогичное требовать для областей $G \subset C$ или $G \subset \overline{C}$: то f будет таким же, как в теоремах* 3, 4. *То же верно для конусов M_x без вершин, т. е. для множеств $M_x \setminus \{x\}$, или, что равносильно, для дополнительных конусов $N_x = \{ R \setminus M_x \} \cup \{x\}$.*

Если требовать как в условии (A) теоремы 2, что $y = f(x)$, т. е. чтобы вершина конуса M_x отображалась в вершину конуса M_y, то случаи M_x и $M_x \setminus \{x\}$ дают одно и то же, но тут они различаются, так как допускается априори $y \neq f(x)$. Зато вводится условие, что $f(G)$ открыто, хотя, возможно, это условие лишнее.

Теорему 5 мы не будем здесь доказывать за недостатком места. При $G = R$ она дает, что f есть преобразование Лоренца с гомотетией. Этот результат установлен в [8], а для случаев (I), (I$^+$), (II$^+$) — еще в работе [2], которую мы обсуждали с С. В. Валландером. Поэтому я и привел здесь теорему 5 как обобщение того, старого результата.

§ 2. *Об инверсиях и преобразованиях Лоренца*

Дальше имеются в виду определения и условия, введенные в п. 1.1, 1.2.

2.1. Докажем предложение 1, формулированное в п. 1.2. Можно принять центр инверсии, так же как и точку a в *ОД*-инверсии, за начало, а потом заменить, если нужно, x на $x - a$.

2.1.1. Элементарные выкладки приводят к

$$(I_0(x) - I_0(y))^2 = \frac{(x-y)^2}{x^2y^2}, \tag{1}$$

$$(J_{c0}(x) - J_{c0}(y))^2 = \frac{(x-y)^2}{(1+2cx)\,(1+2cy)}. \tag{2}$$

Из (1) следует, во-первых, что инверсия сохраняет отношение (I) $(x-y)^2 = 0$ и его отрицание всюду, где она определена. Во-первых, на связном множестве, на котором определена инверсия, x^2 не обращается в нуль, а потому не меняет знака. Поэтому на таком множестве $x^2y^2 > 0$ и, стало быть, инверсия сохраняет знак $(x-y)^2$. Из (2) аналогичное следует для *ОД*-инверсии.

Из этих замечаний вместе с тем, что гомотетии и преобразования Лоренца всюду сохраняют знак $(x-y)^2$, следует первая часть предложения 1.

2.1.2. Вторая часть предложения 1 касается сохранения отношений (I$^+$)–(III$^+$), т. е. сохранения знака $(x-y)^2$ вместе с условием $x_0 \leqslant y_0$. Это равносильно тому, что половины конуса K_x: $(x-y)^2 \geqslant 0$, где $x_0 \leqslant y_0$ и $x_0 \geqslant y_0$, переходят в такие же половины. Иначе конус «переворачивается».

При инверсии $I_0\colon x \mapsto x/x^2$ происходит преобразование $x_0 \mapsto 1/x_0$, так что каждая полуось $x_0 < 0$, $x_0 > 0$ «переворачивается». Всякий конус с вершиной в области $x > 0$, $x_0 > 0$ (или $x_0 < 0$) пересекает полуось $x_0 > 0$ (или $x_0 < 0$) двумя своими половинами, поэтому переворачивается вместе с нею.

В области, где $x^2 < 0$, инверсия I_0 обращает направление векторов x, откуда очевидно, что она переворачивает конусы с вершинами в этой области.

При *ОД*-инверсии конусы не переворачиваются, так как она, как сейчас будет показано, является с точностью до переноса произведением двух инверсий.

Из остальных преобразований H, L переворачивают конусы только гомотетии H с коэффициентами $\lambda < 0$.

Из этих замечаний, очевидно, следует вторая часть предложения 1.

2.2. Рассмотрим *ОД*-инверсии. Пусть вектор $c \neq 0$ таков, что $c^2 = 0$. Тогда

$$I_{-c}I_0(x) = \frac{x/x^2 + c}{(x/x^2 + c)^2} - c = \frac{x + cx^2}{1 + 2cx} - c = J_{c0}(x) - c.$$

Заменяя x на $x - a$ и тем самым $-c$, 0 на $a - c$, a, получим

$$I_{a-c}I_a(x) = J_{ca}(x) - c. \tag{3}$$

Заметим, что, как легко проверить, $J_{ca}^{-1} = J_{-ca}$.

Точно так же элементарными выкладками проверяется, что две *ОД*-инверсии с общей особой плоскостью отличаются на преобразование HL. (Достаточно проверить, что если $1 + 2c\,(x - a) = \lambda(1 + 2c_1 x)$, то $J_{ca}J_{-c_1 a} = HL$.)

2.3. Предложение 2. *Произведение отображений* 1)–4) *в любой комбинации приводится к одному из трех видов:* HL, HLI, HLJ *(в последних двух случаях также* IHL, JHL*). При этом представления* HL, HLI *единственны, а* $HLJ = HLJ'$*, где* J' *— любая ОД-инверсия с той же особой плоскостью, что* J.

Первую часть этого предложения мы не будем здесь доказывать в полном объеме, так как она последует из теоремы, которая будет доказана в § 3. Нам понадобится при этом только следующий частный случай первой части предложения 2.

2.3.1. Лемма. *Произведение отображений* H, L, I, *содержащее не более двух инверсий, приводимо к одному из трех видов:* HL, HLI, HLJ (а также IHL, JHL).

Доказательство. Элементарными выкладками проверяются следующие формулы для любых H, L, I (пользуясь, в частности, тем, что $(L(x - a))^2 = (x - a)^2$):

$$LI_a = I_{L(a)}L, \qquad HI_a = I_{H(a)}H'. \tag{4}$$

Далее также элементарно выводится

$$I_bI_a = I_{I_b(a)}HL = H'LI_{I_a(b)} \tag{5}$$

при условии, что $(a-b)^2 \neq 0$, так что точки $I_b(a)$, $I_a(b)$ определены[3]. Если же $(a-b)^2 = 0$, то из формулы (3)

$$I_b I_a = H'' J_{ca}, \tag{6}$$

где $c = a - b$ и H'' — перенос на $-c$. Подразумевается $a - b \neq 0$. Иначе имеем $I_a I_a$ — тождественное отображение.

Так как любое произведение отображений H, L, очевидно, есть HL, то формулы (4)–(6) позволяют привести произведение отображений H, L, I с не более чем двумя инверсиями к одному из видов: HL, HLI, HLJ или IHL, JHL.

2.3.2. Вторая часть предложения 2 вытекает из следующих замечаний.

Представление отображения в виде HL очевидно единственно (поскольку из L исключено обращение неравенства $x_0 > 0$ при $x^2 > 0$ и тем самым исключена гомотетия с $\lambda = -1$).

Представление HLI_a единственно, так как это отображение не определено на особом конусе C_a инверсии I_a, а инверсия с данным особым конусом единственна. (Отображение $I_a HL$ имеет особый конус C_b, где $b = L^{-1}H^{-1}(a)$.)

Отображение, представимое в виде HLJ, не определено на особой плоскости *ОД*-инверсии J. Поэтому оно может допускать представления $H'L'J'$ только с той же особой плоскостью. А как указано в п. 2.2, для любой *ОД*-инверсии J' с той же особой плоскостью $J = H''L''J'$, поэтому $HLJ = H'L'J'$.

Качественное, в частности топологическое, различие отображений HL, HLI, HLJ состоит прежде всего именно в том, что они определены на разных множествах: HL — на всем пространстве R, HLI — на трех областях, вырезаемых особым конусом инверсии, а HLJ — на двух полупространствах.

2.4. В § 3 нам понадобится

Лемма. *При инверсии с центром a с точностью до множеств, содержащихся в ее особом конусе C_a, выполняется следующее:*

1) *каждая плоскость, проходящая через a, отображается на себя и области, на которые конус C_a разбивает пространство, отображаются на себя;*

2) *каждый конус C_b с $b \in C_a$ отображается на плоскость, причем конусы с вершинами на одной образующей конуса C_a — на параллельные плоскости;*

3) *каждый содержащий a гиперболоид с изотропными образующими отображается на плоскость, двумерную — «2-плоскость».*

Принимая a за начало, мы имеем инверсию $x \mapsto x/x^2$.

---

[3] Заметим, что если положить $a - b = c$, то в (5) $L(x) = x - 2c\,(cx)/c^2$ — отражение в плоскости $cx = 0$, а $H(x) = c^2 x + d$, $H'(x) = c^2 x + d'$.

2.4.1. Утверждение 1) очевидно, так как инверсия $x \mapsto x/x^2$ отображает каждую, проходящую через O прямую (за вычетом O).

2.4.2. Докажем 2). Конус C_b с $b \in C_0$, т. е. с $b^2 = 0$, имеет уравнение

$$(x - b)^2 = x^2 - 2bx = 0.$$

При инверсии это дает плоскость $2bx = 1$. Если b, b_1 лежат на одной образующей, то $b_1 = \lambda b$ и плоскости $2bx = 1$, $2b_1 x = 1$ параллельны.

2.4.3. Докажем 3). Пусть гиперболоид H, образующие которого — изотропные прямые, проходит через начало O. Его асимптотический конус состоит из изотропных прямых, проходящих через центр c гиперболоида H и содержащихся в том трехмерном пространстве (плоскости) T, которое содержит H. Поэтому его уравнение можно записать в виде $(x - c)^2|_T = 0$, где $(x-c)^2|_T$ — функция $(x-c)^2$ на плоскости T. Соответственно уравнение гиперболоида H будет

$$(x - c)^2|_T = p = \text{const}.$$

Стало быть, H есть пересечение поверхности $S\colon (x-c)^2 = p$ с плоскостью T. Так как H проходит через O, то $O \in S$. Поэтому уравнение поверхности S должно не содержать свободного члена. Оно, стало быть, есть

$$x^2 - 2cx = 0.$$

При инверсии это дает плоскость W с уравнением

$$2cx = 1.$$

При этом плоскость T отображается на себя, так как $O \in H \subset T$. Поэтому гиперболоид $H = S \cap T$ отображается на пересечение $W \cap T$, т. е. на плоскость, что и требовалось доказать.

2.5. Аффинное отображение — это то же, что взаимно однозначное линейное с возможным добавлением переноса.

Лемма. *Если аффинное отображение сохраняет равенство $(x - y)^2 = 0$, то оно есть HL.*

Для доказательства установим сначала следующее.

2.5.1. *Если квадратичная форма $q(x)$ такова, что $q(x) = 0$ при $x^2 = 0$, то $q(x) = ax^2$, где a — постоянное число (по определению $q(x) = r(x, x)$, где $r(x, y)$ линейна по каждому аргументу и симметрична).*

Доказательство. Разлагая x на составляющие по прямой L и плоскости E как при определении x^2, мы имеем $x = x_L + x_E$, $x^2 = x_0^2 - x_E^2$, $q(x) = ax_0^2 + 2x_0 l(x_E) + k(x_E)$.

Если $q(x) = 0$ при $x^2 = 0$, т. е. при $x_0 = \pm\sqrt{x_E^2}$, то, значит, $ax_E^2 \pm \pm 2\sqrt{x_E^2}\, l(x_E) + k(x_E) = 0$. Это равенство должно выполняться при всех векторах $x_E \in E$, потому что при всяком x_E возможно равенство $x_E^2 = x_0^2$. Поэтому при всех x_E

$$l(x_E) = 0, \qquad ax_E^2 + k(x_E) = 0.$$

Следовательно,

$$q(x) = ax_0^2 - ax_E^2 = ax^2.$$

2.5.2. Докажем теперь саму лемму 2.5.

Перенос не изменяет величины $(x-y)^2$, поэтому лемма сводится к следующему.

Пусть линейное отображение g таково, что из $x^2 = 0$ следует $g(x)^2 = 0$, тогда $g = HL$. Так как $g(x)^2$ — квадратичная форма, то, применяя 2.5.1, получаем $g(x)^2 = ax^2$. При этом $a > 0$ (потому что есть плоскость, на которой $x^2 < 0$, но нет плоскости, где $x^2 > 0$, и по линейности g то же должно быть для $g(x)^2$). Беря теперь $g_1 = g/\sqrt{a}$, т. е. добавляя к g гомотетию — сжатие в $\sqrt{a}$ раз, получаем такое линейное отображение, что $g_1(x)^2 = x^2$. Оно, стало быть, есть L, либо, если оно меняет знак x_0 при $x^2 > 0$, то добавляем к нему гомотетию: $x \mapsto -x$ и тогда $-g_1$ есть L. Таким образом, $g = \pm\sqrt{a}L = HL$, что и требовалось доказать.

§ 3. *Доказательство теоремы 1 для отношения (I)*

Пусть выполнены условия теоремы 1 для отношения (I), т. е. дана область G в R и ее взаимно однозначное отображение $f : G \to R$, сохраняющее соотношения

$$\text{(I)} \quad (x-y)^2 = 0 \qquad \text{и} \qquad (\bar{\text{I}}) \quad (x-y)^2 \neq 0.$$

Будем предполагать, что область G выпуклая. (Доказав теорему в этом предположении, мы тем самым докажем ее для выпуклой окрестности любой точки произвольной области. А тогда полученное представление отображения f распространяется на всю область ввиду ее связности.)

3.1. Покажем, что f «переводит изотропные прямые в изотропные прямые», т. е. если l — изотропная прямая, то имеется такая изотропная прямая l', что

$$f(l \cap G) = l' \cap f(G).$$

Это очевидным образом вытекает из следующего утверждения.

Три точки x, y, z лежат на одной изотропной прямой, если и только если

$$(x-y)^2 = (y-z)^2 = (z-x)^2 = 0. \tag{1}$$

Доказательство. Если x, y, z лежат на изотропной прямой, то (1), очевидно, выполнено.

Пусть выполнено (1). Если бы при этом x, y, z не лежали на одной прямой, то мы имели бы на натянутой на них плоскости три независимых изотропных вектора xy, yz, zx. Однако в одной 2-плоскости может содержаться самое большее два независимых изотропных вектора — две изотропные прямые. Следовательно, точки x, y, z лежат на одной прямой.

3.2. Пусть P — 2-плоскость, содержащая две пересекающиеся изотропные прямые, т. е., иначе говоря, пересекающая какой-либо конус C_a с $a \in P$ по двум образующим. Утверждается, что *множество $f(P \cap G)$ содержится либо в 2-плоскости, либо в гиперболоиде.*

Доказательство. Для всякой точки $x \in P$ пересечение $P \cap C_x$ состоит из двух образующих конуса C_x. Таким образом, P покрыта двумя семействами параллельных образующих конусов C_x, т. е. изотропных прямых.

Как доказано, f отображает (в пределах G) такие прямые в такие же прямые. Поэтому множество $P' = f(P \cap G)$ содержится в линейчатой поверхности с двумя семействами прямолинейных образующих, а это, как известно, может быть только поверхность одного из трех типов: 1) плоскость, 2) гиперболоид, 3) гиперболический параболоид.

На параболоиде все образующие одного семейства параллельны 2-плоскости. В нашем случае они являются образующими конусов C_x; на P' — это части образующих, содержащиеся в $f(G)$. Но каждый конус имеет только две образующие, параллельные одной 2-плоскости, и эти образующие у разных конусов попарно параллельны. То есть имеется всего два направления образующих, параллельных одной 2-плоскости. Поэтому P' не может быть частью параболоида и, стало быть, содержится либо в плоскости, либо в гиперболоиде, что и требовалось доказать.

3.3. Пусть теперь a — любая точка из G. Рассмотрим отображение g, получающееся из данного f добавлением инверсий с центрами a и $f(a)$:

$$g = I_{f(a)}\, f\, I_a.$$

Мы докажем, что для *всякой 2-плоскости P, проходящей через a и пересекающей конус C_a по двум образующим, отображение g аффинно на области*

$$V = I_a(U), \qquad U = P \cap G \cap Q_a^+,$$

где Q_a^+ — половина внутренности конуса C_a. (Конечно, то же верно, если взять другую половину внутренности.)

3.3.1. Фиксируем точку a и плоскость P такую, как сказано. Произведем инверсию I_a. Так как $a \in P$, то P отображается в себя. И так как C_a не пересекает U, то инверсия I_a определена всюду на U. Поэтому получаем область

$$V = I_a(U) \subset P.$$

Согласно утверждению 2) леммы 2.4, при инверсии I_a конусы C_b с $b \in C_a$ отображаются в плоскости $I(C_b)$. Стало быть, пересечения $C_b \cap U$ отображаются в прямые. Назовем их прямыми l. Когда точка b движется по образующей конуса C_a, пересечение $C_b \cap U$ зачерчивает U; согласно лемме 2.3, плоскость $I(C_b)$ перемещается параллельно, так что прямая l перемещается параллельно и зачерчивает область V.

Таким образом, область V оказывается покрытой непрерывной совокупностью семейств параллельных прямых l: прямые одного семейства получаются, когда точка b движется по образующей конуса C_a. То же семейство может получаться при движении точки b по другой образующей. Но имеется непрерывная совокупность разных семейств, т. е. интервал направлений прямых l.

Действительно, принимая точку a за начало, мы видим из 2.4.2, что плоскость $I(C_b)$ имеет уравнение $2bx = 1$. Векторы b заполняют конус C_a. Прямые l суть пересечения $P \cap I(C_b)$, поэтому направления их меняются в некотором интервале.

3.3.2. Проведем это заключение более детально. Преобразованием Лоренца можно ось x_0 перевести в плоскость P, а также взять в ней ось x_1 так, что для вектора $x \in P$ $\quad x^2 = x_0^2 - x_1^2$, а для любого вектора — $x^2 = x_0^2 - x_E^2 \leqslant x_0^2 - x_1^2$. Уравнение прямой l будет $2(b_0x_0 - b_1x_1) = 1$. Так как $b \in C_a$, то $b^2 = 0$, и, стало быть, $b_0^2 \geqslant b_1^2$. Отсюда видно, во-первых, что направления прямых l не любые, но с угловым коэффициентом по модулю $|b_0/b_1| \geqslant 1$. Во-вторых, можно видеть, что через каждую точку (x_0, x_1) области $P \cap Q_a^+$ проходит прямая l с заранее данным наклоном b_0/b_1 с условием $|b_0/b_1| \geqslant 1$. Действительно, в области Q_a^+ $\quad x^2 > 0$, так что $x_0^2 > x_1^2$ и $x_0 > 0$. Берем любой вектор $d \in C_a^+$, так что $d_0 > 0$, $|d_1| \leqslant d_0$. Тогда для всякой точки $(c_0, c_1) \in P \cap Q_a^+$ будет $d_0c_0 - d_1c_1 > 0$. Поэтому, полагая

$$b_i = \frac{d_i}{2(d_0c_0 - d_1c_1)}, \qquad i = 1, 2,$$

получаем, что прямая $l = P \cap I(C_b)$, т. е. имеющая уравнение

$$2(b_0x_0 - b_1x_1) = 1,$$

проходит через точку (c_0, c_1).

3.4. Теперь, продолжая доказательство утверждения 3.3, применим отображение f и произведем инверсию $I_{f(a)}$.

3.4.1. Согласно 3.2, $f(P \cap G)$ содержится либо в плоскости, либо в гиперболоиде. Точка $f(a) \in f(P \cap G)$. Поэтому имеет место следующее.

Если $f(P \cap G)$ содержится в плоскости, то эта плоскость проходит через центр инверсии $I_{f(a)}$, а потому переходит в себя, так что $I_{f(a)}f(P \cap G)$ содержится в плоскости.

Допустим, $f(P \cap G)$ содержится в гиперболоиде. Его образующие — изотропные прямые. Поэтому, согласно лемме 2.4, при инверсии с центром в лежащей на нем точке $f(a)$ этот гиперболоид переходит в плоскость. Тем самым множество $I_{f(a)}f(P \cap G)$ опять-таки содержится в плоскости.

Таким образом, область $U = P \cap G \cap Q_a^+$ отображается в плоскость. Положим $I_{f(a)}f(U) = V'$. (Так как $U \cap C_a = \varnothing$ и $f(C_a \cap G) = C_{f(a)} \cap f(G)$, то также $f(U) \cap C_{f(a)} = \varnothing$. Поэтому инверсия $I_{f(a)}$ определена всюду на $f(U)$.)

3.4.2. Прежде введенная инверсия I_a отображает U на область $V \subset P$. Поэтому принимая во внимание, что инверсии сами по себе обратны, мы можем нарисовать схему отображений

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "I_a"'] & U' \arrow[d, leftrightarrow, "I_{f(a)}"] \\ V \arrow[r, "g=I_{f(a)}\, f\, I_a"] & V' \end{tikzcd} . \tag{2}$$

Конусы C_b с вершинами на конусе C_a переходят при отображении f в конусы $C_{f(a)}$ с вершинами на $C_{f(a)}$ [4)]. А эти конусы при инверсии $I_{f(a)}$ переходят в плоскости, так же как конусы C_b при инверсии I_a.

Поэтому мы получаем для области $V' = I_{f(a)}f(U)$ ту же картину, какая описана в 3.3.1 для области $V = I_a(U)$. Область V' покрыта семействами параллельных прямых l'. Содержащиеся в V' подмножества этих прямых суть образы соответствующих подмножеств прямых l: $l' \cap V' = g\,(l \cap U) = I_{f(a)}f\, I_a(l \cap V)$.

При отображении f образующие конусов C_x переходят в образующие. А конусы с вершинами на одной образующей конуса C_a (или $C_{f(a)}$) дают параллельные прямые l (соответственно l'). Поэтому параллельным прямым l отвечают параллельные прямые l'.

3.4.3. Итак, мы пришли к следующей ситуации.

На плоскости P имеются область V и непрерывная совокупность семейств F параллельных прямых l, каждое из которых покрывает V; имеется также отображение g, которое отображает V в плоскость так, что множества $l \cap V$

[4)] Т. е. $f(C_b \cap G) = C_{f(b)} \cap f(G)$, и если $b \in C_a$, то $f(b) \in C_{f(a)}$; мы пользуемся условием (А) п. 1.4.

отображаются в прямые, причем множества, содержащиеся в параллельных прямых, — в параллельные прямые.

Мы докажем утверждение 3.3, что отображение g аффинно. Так как $g(V)$ заведомо не содержится в прямой (хотя бы потому, что разные образующие одного конуса переходят в разные образующие), то аффинность g является следствием следующей общей леммы, никак не связанной с конусами.

3.5. Лемма. *Если для плоской области V, семейств F и отображения g имеет место указанная выше ситуация и $g(V)$ не содержится в прямой, то отображение g аффинно* (при этом взаимная однозначность g может не предполагаться; однако если отобразить V взаимно однозначно в прямую, то все условия выполнены, кроме того, что $g(V)$ не содержится в прямой, так что это условие необходимо).

3.5.1. Доказательство. Заметим прежде всего, что «прямые», т. е. содержащиеся в V части прямых, из разных семейств F не могут отображаться в параллельные. Действительно, допустим, что образы «прямых» из F_1 и F_2 параллельны.

Можно взять l_1, $l_1' \in F_1$ и $l_2 \in F_2$ так, что l_2 пересекает l_1, l_1'. Поскольку образы всех трех «прямых» параллельны, они лежат в одной прямой. Отсюда легко заключаем, что все «прямые» из F_1 и F_2 отображаются в одну прямую, а вместе с ними — и вся область V. Но это противоречит условию.

3.5.2. Введем в V аффинные координаты u, v так, чтобы прямые $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ были прямыми двух семейств F и начало координат (0,0) лежало в V. Прямые семейств F, кроме параллельных оси v, представятся уравнениями

$$v = cu + d. \tag{3}$$

При этом, поскольку семейства F образуют непрерывную совокупность, c может принимать любые значения на полуоси $[0, \infty)$ или $(-\infty, 0]$. Можно, конечно, считать $c \geqslant 0$. Далее, так как каждое из семейств F покрывает V, d может принимать любые значения из какого-то промежутка (d_1, d_2). Можно обеспечить, чтобы при любом $d \in (d_1, d_2)$ u и v могли принимать любые значения из некоторых промежутков около нуля.

На плоскости P', куда отображается область V, выберем аффинные координаты u', v' так, чтобы начало было образом начала координат u, v, а линии $u' = \text{const}$, $v' = \text{const}$ содержали соответственно образы линий $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Это можно сделать, так как данные линии принадлежат двум семействам F и потому отображаются в соответственно параллельные прямые.

При сделанном выборе координат отображение $g\colon V \to P'$ представится формулами

$$u' = p(u), \qquad v' = q(v), \tag{4}$$

и его аффинность равносильна линейности функций p, q.

3.5.3. Прямые $u = \text{const}$ отображаются, по выбору системы координат u', v', в прямые $u' = \text{const}$. И по доказанному прямые никакого другого семейства уже не могут отображаться в прямые $u' = \text{const}$. Таким образом, каждая «прямая» (3) отображается в прямую

$$v' = c'u' + d'. \tag{5}$$

И так как прямые одного семейства, т. е. с одним значением коэффициента c, отображаются в параллельные, то

$$c' = r(c). \tag{6}$$

Используя (3), (4), (6), мы получаем из (5)

$$q(cu + d) = r(c)\, p(u) + d'.$$

А так как $p(0) = 0$, то, полагая $u = 0$, имеем $d' = q(d)$. Поэтому

$$q(cu + d) = r(c)\, p(u) + q(d). \tag{7}$$

Далее, так как $q(0) = 0$, то, полагая $d = 0$, находим

$$r(c)p(u) = q(cu). \tag{8}$$

Поэтому из (7) следует

$$q(z + d) = q(z) + q(d). \tag{9}$$

Но линейность функции q отсюда еще не вытекает, так как о характере ее заранее ничего не предположено.

3.5.4. Возьмем такое число $a_0 \neq 0$, что $r(a_0)$, $p(a_0)$ определены; кроме того, ограничимся значениями u из такого промежутка вблизи нуля, что $r(u)$, $p(u)$, $q(a_0 u)$ определены. В таком случае согласно (8)

$$r(a_0)p(u) = q(a_0 u), \qquad r(u)p(a_0) = q(a_0 u), \tag{10}$$

откуда

$$r(u) = kp(u), \qquad k = \frac{r(a_0)}{p(a_0)}.$$

Потому, полагая в (7) $c = u = w$, получим

$$q(w^2 + d) = kp(w)^2 + q(d).$$

Поэтому при $z > 0$

$$q(d+z) = q(d) + kp(\sqrt{z}\,)^2,$$

так что q монотонна. А при этом условии из (9) следует, что q линейна:

$$q(v) = q_0 v.$$

Отсюда и из (10) следует линейность $p(u)$.

3.5.5. Таким образом, аффинность отображения g установлена по крайней мере в той окрестности начала (0,0), для которой действителен проведенный вывод. Но так как за начало можно взять любую точку из области V, то q аффинно во всей V, что и требовалось доказать.

3.6. Итак, мы доказали лемму 3.5, а вместе с нею и утверждение 3.3. Из него мы сейчас выведем, что *отображение* $g = I_{f(a)}\,f\,I_a$ *аффинно на области* $W = I_a(G \cap Q_a^+)$.

Согласно 3.3, g аффинно на всякой плоской области $V = W \cap P$, где P — 2-плоскость, проходящая через a и секущая конус C_a по двум образующим.

Пусть l — луч из a, проходящий через какую-либо точку из W, а l_x — луч, параллельный l из любой точки $x \in W$. Через эти лучи проходит плоскость P; на ней g аффинно, а поэтому лучи $g(l)$, $g(l_x)$ отображаются в параллельные лучи и на них g аффинно. Поэтому любые два луча l_x, l_y, параллельные l, также переходят в параллельные лучи и на них g аффинно.

Возьмем теперь любую конечномерную плоскость T, пересекающую область W, и пусть S — плоскость, натянутая на T и точку a. Введем в S аффинные координаты с началом в a, направляя оси внутрь Q_a^+. Потом перенесем начало в какую-нибудь точку $b \in W \cap S$.

Из доказанного о лучах очевидно, что при отображении g координатная сеть преобразуется аффинно. Тем самым g аффинно на $W \cap S$. А так как S содержит произвольно заданное конечномерное подпространство T, то g аффинно на W.

3.7. Теперь мы докажем утверждение теоремы 1 об отображении f, что оно есть либо HL, либо HLI, либо HLJ.

Прежде всего мы замечаем об отображении $g = I_{f(a)} f I(a)$, что оно переводит конусы C_x (в пределах области W, где g определено) в такие же конусы, поскольку это верно для составляющих его сомножителей. Так что при всякой $x \in W$

$$g(C_x \cap W) = C_{g(x)} \cap g(W).$$

А так как по доказанному g аффинно, то, согласно лемме 2.5, $g = HL$.

Таким образом, для отображения f на области $G \cap Q_a^+$ мы имеем

$$f = I_{f(a)} g I_a = I_{f(a)} HLI_a.$$

Поэтому, ссылаясь на выводы п. 2.3, можно написать

$$f = I_{f(a)} I_{g(a)} H' L'.$$

Отсюда: если $f(a) = g(a)$, то $f = H'L'$, иначе же согласно тому же п. 2.3 либо $f = IH''L''$, либо $JH''L''$.

Это мы вывели для f на области $G \cap Q_a^+$. Но так как точка $a \in G$ была выбрана произвольно, то же верно для всякой области $G \cap Q_x^+$, $x \in G$.

Отсюда, ссылаясь на выпуклость области G, заключаем, что представление отображения f в виде либо HL, либо IHL, либо JHL действительно на всей G.

Таким образом, мы доказали теорему 1 для отношения (I) в предположении, что область G выпуклая. Но если дана любая область, то, применяя доказанное к выпуклым окрестностям ее точек и используя связность области, мы получим заключение теоремы 1 и для данной области.

Дополнительные утверждения теоремы 1 о единственности представлений HL и т. д. содержатся в предложении 2 § 2.

§ 4. Доказательство теоремы 1 для отношения (II^+)

Вместо теоремы 1 для отношения (II) мы будем доказывать эквивалентную ей теорему 2 о конусах K_x. При этом мы сначала докажем ее для ординарных конусов K_x^+, а потом в § 5 сведем к этому случай конусов K_x. Кстати, ввиду физической интерпретации п. 1.5, случай конусов K_x имеет самостоятельный интерес. Так же как в § 3, будем предполагать область G выпуклой.

4.1. Итак, пусть $f\colon G \to R$ — такое взаимно однозначное отображение выпуклой области $G \subset R$, что для всякой $x \in G$

$$f(K_x^+ \cap G) = K_{f(x)}^+ \cap f(G). \tag{1}$$

Вместе с конусами K_x^+ мы рассматриваем конусы C_x^+ и Q_x^+ — границу и внутренность K_x^+ (при этом вершина x не причисляется к Q_x^+).

Мы докажем, что при всякой $x \in G$

$$f(C_x^+ \cap G) = C_{f(x)}^+ \cap f(G), \tag{2}$$

т. е. условие теоремы 2 выполнено для конусов C_x^+. А в этом случае теорема доказана, так как он сводится, как показано в п. 1.5, к случаю конусов C_x, который равносилен теореме 1 для отношения (I), доказанной в § 3.

4.2. Определим в пространстве R (частичный) порядок, полагая $y \geqslant x$, если и только если $y \in K_x^+$. Конус, симметричный K_x^+ относительно точки x, — «другая половина» двойного конуса K_x, будет $K_x^- = \{y\colon y \leqslant x\}$.

Условие (1) в терминах введенного порядка означает, что отображение f и ему обратное f^{-1} сохраняют порядок: при всяких x, $y \in G$, $x \leqslant y \Longleftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

Дальше мы пишем K, C, Q вместо K^+, C^+, Q^+.

4.2.1. Сегмент $[ab]$ в данном порядке есть по определению множество

$$[ab] = \{x\colon a \leqslant x \leqslant b\} = K_a \cap K_b^-.$$

Непосредственно очевидно следующее: если $b \in C_a$, то сегмент $[ab]$ есть отрезок ab образующей конуса C_a и он линейно упорядочен; если же $b \in Q_a$, то сегмент $[ab]$ не является линейно упорядоченным, т. е. имеются такие $u, v \in [ab]$, что ни $u \leqslant v$, ни $v \leqslant u$.

Из данного замечания о сегментах и сохранения порядка при отображении f следует

4.2.2. Внутренности Q_x конусов K_x отображаются во внутренности

$$f(Q_x \cap G) \subset Q_{f(x)}. \tag{3а}$$

Действительно, если бы для точки $y \in Q$ было $f(y) \in C_{f(x)}$, то сегмент $[f(x)f(y)]$ был бы линейно упорядоченным вопреки тому, что он является образом не линейно упорядоченного сегмента $[xy]$.

4.2.3. Теперь достаточно показать, что

$$f(C_x \cap G) \subset C_{f(x)}. \tag{3б}$$

Тогда из (1), (3а) и того, что $K_x = Q_x \cup C_x$, последует (2).

4.3. Нам понадобится следующая лемма. В ней имеется в виду такая топология в R, в которой базис окрестностей образуют внутренности сегментов, т. е. множества $Q_x \cap Q_y^-$. На множествах $M \subset R$ имеется в виду топология, индуцированная данной.

Лемма. *Монотонное отображение линейно упорядоченного множества непрерывно на нем всюду, за исключением самое большее счетного множества точек.*

4.3.1. Доказательство. Пусть M — линейно упорядоченное множество и g — его монотонное отображение. Пусть p обозначает проектирование на ось x_0 плоскостями, параллельными плоскости E, которая фигурирует в определении x^2 п. 1.1. Ввиду линейной упорядоченности множества M, проектирование p является взаимно однозначным его отображением в ось x_0. Тем самым определено обратное отображение

$$x = p^{-1}(x_0), \qquad x_0 \in p(M).$$

Соответственно мы определяем на $p(M)$ функцию

$$h = pgp^{-1}.$$

Ввиду монотонности g эта функция монотонна, а потому непрерывна всюду на $p(M)$, кроме самое большее счетного множества точек.

Вместе с тем мы покажем, что отображение g непрерывно во всякой такой точке $x \in M$, что h непрерывна в соответствующей точке $p(x)$. Этим наша лемма будет доказана.

4.3.2. Пусть $p(a)$ — точка непрерывности функции h, $a \in M$. Возьмем какой-либо сегмент U, содержащий точку $b = g(a)$ внутри. Проведем через b прямую, параллельную оси x_0, и возьмем на ней точки c, $d \in U$, $c < d$, так чтобы b делила отрезок cd пополам. Тогда сегмент $[cd] = K_c \cap K_d^-$ состоит из двух конусов с вершинами c, d и общим основанием на плоскости E_b. (Мы применяем обозначение: E_x — это плоскость, параллельная E и проходящая через точку x.) Это основание указанных конусов есть, очевидно, некоторый шар $S = K_c \cap E_b$ и точка b — его центр.

Пусть точка y такова, что $b \geqslant y$ и плоскость E_y лежит к E_b не менее чем вдвое ближе, чем плоскость E_c. Тогда $y \in K_c$.

Действительно, так как $b \geqslant y$ и, стало быть, $b \in K_y$, то шар $S_y = K_y \subset E_b$ содержит точку b. А так как плоскость E_y по крайней мере вдвое ближе к E_b, чем E_c, то диаметр этого шара S_y по крайней мере вдвое меньше диаметра шара $S = K_c \cap E_b$. Поэтому $S \supset S_y$ и, стало быть $K_c \supset K_y$, так что $y \in K_c$.

Кроме того, $y \in K_d^-$, поскольку $y \leqslant b$ и $b \leqslant d$. Поэтому

$$y \in K_c \cap K_d^- = [cd].$$

Совершенно так же убедимся, что если $y \geqslant b$ и плоскость E_y не менее чем вдвое ближе к E_b, чем плоскость E_d, то $y \in [cd]$.

Так как множество M линейно упорядочено, а отображение g монотонно, то для всякой $x \in M$ либо $y = f(x) \leqslant b = f(a)$, либо $y \geqslant b$.

Поэтому из предыдущего следует, что если точка $y \in f(M)$ такова, что плоскость E_y лежит не менее чем вдвое ближе к E_b, чем плоскости E_c и E_d, то $y \in [cd]$.

4.3.3. Если $p(a)$ — точка непрерывности функции h и $p(x_i) \to p(a)$, то $hp(x_i) \to hp(a)$, т. е. $pg(x_i) \to pg(a)$. Или, так как $g(a) = b$ и полагая $g(x_i) = y_i$, $p(y_i) \to p(b)$.

Но если $p(y_i) \to p(b)$, то при достаточно больших i плоскости E_{y_i} оказываются не менее чем вдвое ближе к E_b, чем E_c и E_d. Поэтому при таких i оказывается

$$y_i \in [cd] \subset U.$$

Этим непрерывность отображения g в точке a доказана. А вместе с этим доказана и наша лемма.

4.4. Докажем теперь (3б), т. е. что при всякой $x \in G \quad f(C_x \cap G) \subset C_{f(x)}$.

Допустим противное, так что существуют такие точки $a \in G$ и $b \in C_a \cap G$, что $f(b) \notin C_{f(a)}$. Так как $f(K_a) \subset K_{f(a)}$, то это значит, что $f(a)$ лежит внутри $K_{f(a)}$:

$$f(b) \in Q_{f(a)}. \tag{4}$$

Содержащийся в G отрезок прямой ab представляет собой линейно упорядоченное множество. Его отображение g, являющееся ограничением на нем отображения f, монотонно. Поэтому на нем в силу леммы 4.3 есть такая точка $c \leqslant a$, в которой g непрерывно.

Точка c лежит на продолжении образующей ab конуса C_a. Поэтому $b \in C_c$. Так как $c \leqslant a$, то $f(c) \leqslant f(a)$ и поэтому из (4) следует, что $f(b) \in Q_{f(c)}$. Таким образом,

$$b \in C_c, \qquad f(b) \in Q_{f(c)}. \tag{5}$$

Так как $b \in C_c$, то сегмент

$$[cb] = K_c \cap K_b^- = cb,$$

т. е. есть отрезок cb.

Как следует из сохранения порядка и из (1), при всякой $x \in K_c \cap G$, т. е. $x \geqslant c$, $x \in G$,

$$f([cx] \cap G) = [f(c)f(x)] \cap f(G). \tag{6}$$

Применяя последнее к сегменту $[cb]$, получаем

$$f(cb) = [f(c)f(b)] \cap f(G). \tag{7}$$

Поэтому в сегменте $[f(c)f(b)]$ нет образов точек ни из Q_c, ни из C_c, кроме отрезка cb. Вместе с тем, так как отображение g прямой ab непрерывно в точке c, то в любой окрестности точки $f(c)$ есть точки множества $f(cb)$, помимо самой $f(c)$. Эти точки ввиду (7) содержатся в сегменте $[f(c)f(b)]$.

Мы приведем это в противоречие с предыдущим утверждением о сегменте $[f(c)f(b)]$, чем (3б) и будет доказано.

4.5. Пусть l обозначает образующую cb конуса C_c, за вычетом точки c. Так как во всякой окрестности точки $f(c)$ есть точки из $f(l)$ и $f(l) \subset K_{f(c)}$, то при всякой $y \in Q_{f(c)}$

$$f(l) \cap K_y^- \neq \varnothing. \tag{8}$$

4.5.1. Покажем, что

$$f(C_c \setminus l) \subset C_{f(c)}. \tag{9}$$

Допустим противное. Тогда, так как $f(C_c) \subset K_{f(c)}$, мы имели бы такую точку $x \in C_c \setminus l$, что $f(x) \in Q_{f(c)}$ и по (8)

$$f(l) \cap K^-_{f(x)} \neq \varnothing.$$

По сохранению порядка это означало бы, что l содержит точки из K^-_x. Так как $l \subset K_c$, то это были бы точки сегмента $[cx]$. Но так как $x \in C_c$, то этот сегмент есть отрезок cx, который не имеет с l общих точек. Полученное противоречие доказывает (9).

4.5.2. Покажем теперь, что каждая образующая конуса C_x за вычетом l отображается в образующую конуса $C_{f(x)}$ и разные образующие — в разные. Действительно, при всякой $x \in C_c \setminus l$ сегмент $[cx]$ есть отрезок $cx \subset C_c$. А согласно 4.5.1, $f(x) \in C_{f(c)}$, так что сегмент $[f(c)f(x)]$ есть отрезок $f(c)f(x)$. И он является образом отрезка cx (как следует из (6)). Значит отрезки образующих конуса $C_c \setminus l$ отображаются на отрезки образующих конусов $C_{f(c)}$. Вместе с тем если точки x и y лежат на разных образующих конуса C_c, то, очевидно, ни $x \leqslant y$, ни $y \leqslant x$. Поэтому так же ни $f(x) \leqslant f(y)$, ни $f(y) \leqslant f(x)$ и, следовательно, точки $f(x)$, $f(y)$ лежат на разных образующих конуса $C_{f(c)}$.

Отсюда вместе с предыдущим заключением об отрезках образующих следует наше утверждение 4.5.2.

4.6. Пусть l_1, l_2 — две разные образующие конуса $C_c \setminus l$ за вычетом точки c. Как следует из 4.5.2, их образы $f(l_1)$, $f(l_2)$ содержатся в разных образующих l', l'' конуса $C_{f(c)}$. Кроме того, $f(l_1)$, $f(l_2)$ не содержит точек сегмента $[f(c)f(b)]$, как это следует из (7), поскольку $cb = l$ и $l_1, l_2 \subset C_c \setminus l$. Поэтому на l', l'' есть такие точки a', a'', отличные от $f(c)$, что отрезки $a'f(c)$, $a''f(c)$ не содержат точек из $f(l_1)$, $f(l_2)$.

Пусть d — середина отрезка $a'a''$. Так как a', a'' лежат на разных образующих конуса $C_{f(c)}$, то d лежит внутри $K_f(c)$: $d \in Q_{f(c)}$. Поэтому $f(c) \in Q^-_d$.

Во всякой окрестности точки $f(c)$ есть точки из $f(l)$. Поэтому существует точка $e \in l$ такая, что

$$f(e) \in Q^-_d. \tag{10}$$

Вместе с тем можно взять такую точку $p \in Q_c$, что $e \notin K^-_p$. Тем самым

$$f(e) \notin K^-_{f(p)}. \tag{11}$$

Однако конус K^-_p пересекает образующие l_1, l_2. Поэтому конус $K^-_{f(p)}$ пересекает множества $f(l_1)$, $f(l_2)$, тем самым заведомо содержит точки a', a'', а вместе с ними и точку d.

Следовательно, оказывается, что

$$Q_d^- \subset K^-_{f(p)}.$$

Отсюда и из (10) следует

$$f(e) \in K^-_{f(p)},$$

что противоречит (11). Этим включение (3б) доказано.

4.7. Итак, мы доказали, что

$$f(Q_x) \subset Q_{f(x)}, \qquad f(C_x) \subset C_{f(x)}.$$

Отсюда и из основного соотношения (1) для конусов $K_x = Q_x \cup C_x$ следует то же соотношение (2) для конусов C_x. Для этих конусов теорема 1 доказана. Тем самым она доказана и для конусов K_x.

Мы предполагаем область G выпуклой. Но если область G любая, то достаточно применить полученный результат к выпуклым окрестностям ее точек и воспользоваться связностью G.

§ 5. *Доказательство теорем 1, 2 для отношения (II)*

Теперь докажем теорему 2 для случая двойных конусов K_x, сводя его к случаю ординарных конусов K_x. Область G предполагаем выпуклой. Сведение осуществляется благодаря следующему предложению.

5.1. Предложение. *Если точки x, y лежат в разных половинах конуса K_a, например $x \in K_a^+$, $y \in K_a^-$, то*

$$K_a \subset K_x \cup K_y.$$

Если же точки x, y лежат в одной половине и отличны от a, то

$$K_a \not\subset K_x \cup K_y.$$

Если к тому же $x, y \in G$, то существуют такие точки $z_i \in K_a \cap G$, $i = 1, \ldots, m$, что $x = z_1$, $y = z_m$ и при всяком i

$$K_a \cap G \not\subset K_{z_i} \cap K_{z_{i+1}} \cap G.$$

(Заметим, что, как легко видеть на простейших примерах: 1) если G не выпукла, то утверждение, вообще говоря, неверно, 2) при выпуклой G возможно $K_a \cap G \subset K_x \cap K_y \cap G$, когда x, y лежат в одной половине и $x, y \neq a$.)

5.1.1. Докажем первое утверждение нашего предложения. Пусть $x \in K_a^+$, $y \in K_a^-$. Тогда $a \in K_x^-$ и $a \in K_y^+$, откуда

$$K_a^- \subset K_x^-, \qquad K_a^+ \subset K_y^+.$$

Поэтому

$$K_a = K_a^+ \cup K_a^- \subset K_y^+ \cup K_x^- \subset K_y \cup K_x.$$

5.1.2. Докажем второе утверждение предложения. Пусть $x, y \in K_a^+ \setminus \{a\}$. Проведем через точки a, x, y 2-плоскость P. Пересечения $V_a = K_a \cap P$, $V_x = K_x \cap P$, $V_y = K_y \cap P$ представляют собой равные и параллельно расположенные двойные углы (пары взаимно вертикальных углов) с вершинами a, x, y. При этом $x, y \in V_a^+ = K_a^+ \cap P$. Элементарное рассмотрение приводит к тому, что $V_a \not\subset V_x \cup V_y$. А потому тем более $K_a \not\subset K_x \cup K_y$.

5.1.3. Докажем последнее утверждение нашего предложения.

Пусть опять $x, y \in K_a^+ \setminus \{a\}$ и V_a, V_x, V_y, V_a^+ имеют предыдущий смысл, так что $x, y \in V_a^+$. Но теперь мы ограничиваемся пределами выпуклой области G и $x, y \in G$. Так что вместо углов V мы рассматриваем их пересечения с G:

$$W_a = V_a \cap G \ \text{ и т. д.}$$

Проведем отрезок xy. Он содержится в W_a^+, так как $W_a^+ = V_a^+ \cap G$, а область G и угол V_a^+ выпуклы.

Заметим теперь, что если $z \in W_a^+ \setminus \{a\}$, то, как легко видеть, $W_z \not\supset W_a$. Отсюда заключаем, что у каждой данной z есть такая окрестность U, что при всякой $v \in U \cap W_a^+$ будет

$$W_a \not\subset W_z \cup W_v.$$

Применяя это замечание к точкам z отрезка xy, получаем с помощью леммы Бореля третье утверждение нашего предложения.

5.2. Пусть теперь $f\colon G \to R$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы 1 для отношения (II), так что при всякой $x \in G$

$$f(K_x \cap G) = K_{f(x)} \cap f(G).$$

Тогда, как легко заключить из предложения 5.1, половины конусов K_x отображаются в половины, так что при каждой x $f(K_x^+ \cap G)$ содержится либо в $K_{f(x)}^+$, либо в $K_{f(x)}^-$. Нужно, однако, показать, что это будет K^+ либо K^- для x всех одинаково. Можно считать, что для данной точки a

$$f(K_a^+ \cap G) = K_{f(x)}^+ \cap f(G), \tag{1}$$

добавляя, если нужно, к f симметрию в точке a.

Покажем, что тогда то же будет для всякой $b \in G$.

5.2.1. Пусть $b \in K_a$, и допустим, что

$$f(K_b^+ \cap G) = K_{f(b)}^- \cap f(G). \tag{2}$$

Пусть $b \in K_a^+$, так что $f(b) \in K_{f(a)}^+$. Тогда

$$K_b^+ \subset K_a^+, \qquad K_{f(b)}^- \supset K_{f(a)}^-.$$

Вместе с (2) это дает

$$f(K_a^+ \cap G) \supset f(K_b^+ \cap G) = K_{f(b)}^- \cap f(G) \supset K_{f(a)}^- \cap f(G).$$

Отсюда, применяя (1), получаем

$$K_{f(a)}^+ \cap f(G) \supset K_{f(a)}^- \cap f(G),$$

что невозможно.

Пусть $b \in K_a^-$, так что $f(b) \in K_{f(a)}^-$. Тогда

$$K_b^+ \supset K_a^+, \qquad K_{f(b)}^- \subset K_{f(a)}^-.$$

Поэтому, пользуясь (2), получаем

$$K_{f(a)}^- \cap f(G) \supset K_{f(b)}^- \cap f(G) = f(K_b^+ \cap G) \supset f(K_a^+ \cap G),$$

откуда, пользуясь (1),

$$K_{f(a)}^- \cap f(G) \supset K_{f(a)}^+ \cap f(G),$$

что невозможно.

Таким образом, при $b \in K_a$ (2) невозможно, а поэтому для K_b выполняется то же (1), что для K_a.

5.2.2. Пусть теперь $b \notin K_a$, так что отрезок ab не имеет с K_a общих точек, кроме a, так как ни с какими K_x, $x \in ab$, кроме самой точки a. Если точки $x, y \in ab$ лежат достаточно близко друг к другу, то, как легко видеть, одноименные половины конусов K_x, K_y пересекаются в G, т. е.

$$K_x^+ \cap K_y^+ \cap G \neq \varnothing, \qquad K_x^- \cap K_y^- \cap G \neq \varnothing. \tag{3}$$

Соответственно образы этих половин пересекаются. Но так как $y \notin K_x$, то и $f(y) \notin K_{f(x)}$. А в таком случае, как очевидно, разноименные половины конусов $K_{f(x)}$, $K_{f(y)}$ не пересекаются.

Следовательно, образы пересекающихся половин конусов K_x, K_y должны быть одноименными. А в силу (3) это означает, что одноименные половины отображаются в одноименные. Это заключение верно для любой пары достаточно близких друг к другу точек x, y на отрезке ab. Поэтому для всех $x \in ab$ и, в частности, для b верно то же, что для точки a.

5.3. Таким образом, мы доказали, что одноименные половины конусов K_x отображаются на одноименные. Поэтому вместе с (1) выполнено то же условие для ординарных конусов K_x^+. Для них теорема 2 доказана в § 4, тем самым она доказана и для двойных конусов K_x.

§ 6. *Доказательство теорем 3, 4 для отношений (I), (II)*

6.1. Пусть G — область в конформном пространстве C и $f\colon G \to C$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы 3 для конусов C_x в C так, что при всякой $x \in G$

$$f(C_x \cap G) = C_{f(x)} \cap f(G). \tag{1}$$

6.1.1. Возьмем точку $a \in G$. Исключив из пространства C конус $C_{f(a)}$, получим пространство R. Рассмотрим множество

$$G' = G \setminus (C_a \cup C_{f(a)}).$$

Очевидно, G' открыто и содержится в R. Кроме того, если f' — ограничение отображения f на G', то $f'\colon G' \to R$.

Поэтому, если G_1 — какая-либо связная компонента G', то к отображению $f_1 = f'|_{G_1}$ применима теорема 2 для конусов C_x, так что f_1 есть либо HL, либо HLI, либо HLJ и распространяется на C в виде $H^C L^C$ либо $H^C L^G$ с добавлением одной или двух инверсий.

6.1.2. Пусть g — это распространенное на C отображение f_1. Рассмотрим отображение $h = g^{-1} f$ области G. Для него выполняется (1) и на G_1 оно тождественно. Покажем, что h тождественно на G. Возьмем точку $x \in G_1$ на границе G_1 и точку $b \in G_1$ так, что $x \notin C_b$. Исключая из пространства C конус C_b, получаем пространство R, а также открытое множество $G'' = G \setminus G_b \subset R$.

Из свойств отображения h ясно, что оно определено на множестве G'', в частности на той его компоненте G_2, которая содержит точку x и, стало быть, пересекается с G_1. На $G_1 \cap G_2$ отображение h тождественно. А применяя к нему и к области $G_2 \subset R$ теорему 2, заключаем, что оно тождественно на G_2. Тем самым оно тождественно в окрестности точки x. Но точка $x \in G$ — любая на границе области G_1. Поэтому h тождественно на некоторой области $G_3 \subset G$ такой, что $G_1 \cap G \subset G_3$.

Так как этот вывод применим к любой, заключающейся в G области, на которой h тождественно, то h тождественно на G. Значит, на G $f = g$, чем теорема 3 для рассматриваемого случая конусов C_x доказана.

6.2. Пусть теперь отображение $f\colon G \to C$ удовлетворяет условиям теоремы 3 для конусов K_x, так что при всякой $x \in G$

$$f(K_x \cap G) = K_{f(x)} \cap f(G). \tag{2}$$

Возьмем точку $a \in G$. Исключив из пространства C конус $C_{f(a)}$, получим пространство R. Рассмотрим множество

$$G' = G \setminus (K_a \cup C_{f(a)}).$$

Очевидно, G' открыто, содержится в R и не пусто, как ясно из того, что $a \in G$ есть вершина конуса K_a. Кроме того, если f' — ограничение отображения f на G', то $f' \colon G' \to R$ (потому что $K_a \supset C_a$, а значит, G' не содержит точек из C_a и потому f' отображает G' в $C \setminus G_{f(a)} = R$). Взяв теперь какую-либо связную компоненту G_1 множества G', мы буквально так же, как в п. 6.1, придем к выводу, что f есть либо $H^C I^C$, либо $H^G L^C$ с одной или двумя инверсиями, как то и утверждает теорема 3.

6.3. Теорема 4 для накрывающего пространства $\overline{C}$ следует из теоремы 3 очевидным образом, так что на ее выводе мы не останавливаемся.

Статья поступила в редакцию
2.VI.1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* О сущности теории относительности // Вестн. ЛГУ. 1953. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 103–128.
2. *Александров А. Д., Овчинникова В. В.* Замечания к основам теории относительности // Там же. 1953. № 11. Сер. математики, физики и химии. Вып. 4. С. 95–110.
3. *Александров А. Д.* О преобразованиях Лоренца // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, вып. 3. С. 187.
4. *Zeeman E. C.* Causality implies the Lorentz group // J. Math. Phys. 1964. V. 5, No. 4. P. 490–493.
5. *Borchers H. J., Hegerfeld G. C.* The structure of space-time transformations // Comm. Math. Phys. 1972. V. 28, No. 3. P. 259–266.
6. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. М.: Гостехиздат, 1955.
7. *Segal I.* Covariant chronogeometry and extreme distances // J. Astron. & Astrophys. 1972. V. 18. P. 143–148.
8. *Alexandrov A. D.* Mappings of spaces with families of cones and space-time transformations // Ann. Mat. Pura Appl. 1975. T. 103. P. 229–257.

Содержание

От редколлегии ... iii

Первый геометр России XX века ... v

Указатель трудов А. Д. Александрова ... xxiv

О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей ... 1

Элементарное доказательство теоремы Минковского и некоторых других теорем о выпуклых многогранниках ... 20

К теории смешанных объемов выпуклых тел. I: Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел ... 30

К теории смешанных объемов выпуклых тел. II: Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения ... 59

К теории смешанных объемов выпуклых тел. III: Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольные выпуклые тела . 97

К теории смешанных объемов выпуклых тел. IV: Смешанные дискриминанты и смешанные объемы ... 116

О поверхностной функции выпуклого тела: Замечание к работе «К теории смешанных объемов выпуклых тел» ... 144

Об одном классе замкнутых поверхностей ... 152

Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей ... 162

О теоремах единственности для замкнутых поверхностей ... 166

Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей ... 171

Внутренняя геометрия произвольной выпуклой поверхности ... 208

Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой ... 213

Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения ... 269

Замечания к основам теории относительности ... 288

О заполнении пространства многогранниками ... 307

Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка 318
Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I 336
Теоремы единственности для поверхностей «в целом». II 352
Теоремы единственности для поверхностей «в целом». III 388
Теоремы единственности для поверхностей «в целом». IV 403
Теоремы единственности для поверхностей «в целом». V 412
Теоремы единственности для поверхностей «в целом». VI 416
Задача Дирихле для уравнения $\mathrm{Det}\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$. I 427
Исследования о принципе максимума. I 451
Исследования о принципе максимума. II 491
Исследования о принципе максимума. III 502
Исследования о принципе максимума. IV 523
Исследования о принципе максимума. V 538
Исследования о принципе максимума. VI 551
Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле 572
О принципе максимума 577
Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле 597
Теория поверхностей и дифференциальные уравнения в частных производных . 627
Мажорирование решений линейных уравнений второго порядка 648
Невозможность общих оценок решений и условий единственности для линейных уравнений с нормами, более слабыми, чем в L_n 672
Один общий метод мажорирования решений задачи Дирихле 680
О кривизне поверхностей 695
Некоторые оценки решений задачи Дирихле 703
К основам теории относительности 715

Contents

Editors' preface ... iii

The first and foremost Russian geometer of the XXth century ... v

Chronological list of Alexandrov's publications ... xxiv

On infinitesimal bendings of nonregular surfaces ... 1

An elementary proof of the Minkowski and some other theorems on convex polyhedra ... 20

To the theory of mixed volumes of convex bodies. I: Extension of certain concepts of the theory of convex bodies ... 30

To the theory of mixed volumes of convex bodies. II: New inequalities for mixed volumes and their applications ... 59

To the theory of mixed volumes of convex bodies. III: Extension of two Minkowski theorems on convex polyhedra to all convex bodies ... 97

To the theory of mixed volumes of convex bodies. IV: Mixed discriminants and mixed volumes ... 116

On the area function of a convex body: A remark on the paper "To the theory of mixed volumes of convex bodies" ... 144

On one class of closed surfaces ... 152

A general uniqueness theorem for closed surfaces ... 162

Uniqueness theorems for closed surfaces ... 166

Almost everywhere existence of the second differential of a convex function and some related properties of convex surfaces ... 171

Intrinsic geometry of an arbitrary convex surface ... 208

Existence of a convex polyhedron and a convex surface with given metric ... 213

One theorem on triangles in a metric space and its applications ... 269

Remarks on the foundations of relativity theory ... 288

On tiling a space with polyhedra ... 307

Some theorems on partial differential equations of the second order ... 318
Uniqueness theorems for surfaces in the large. I ... 336
Uniqueness theorems for surfaces in the large. II ... 352
Uniqueness theorems for surfaces in the large. III ... 388
Uniqueness theorems for surfaces in the large. IV ... 403
Uniqueness theorems for surfaces in the large. V ... 412
Uniqueness theorems for surfaces in the large. VI ... 416
The Dirichlet problem for the equation $\mathrm{Det}\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$. I ... 427
Study of the maximum principle. I ... 451
Study of the maximum principle. II ... 491
Study of the maximum principle. III ... 502
Study of the maximum principle. IV ... 523
Study of the maximum principle. V ... 538
Study of the maximum principle. VI ... 551
Certain estimates for the Dirichlet problem ... 572
On the maximum principle ... 577
Uniqueness conditions and estimates for the solution of the Dirichlet problem ... 597
Surface theory and partial differential equations ... 627
Majorization of solutions of second-order linear equations ... 648
The impossibility of general estimates for solutions and of uniqueness conditions for linear equations with norms weaker than in L_n ... 672
General method for majorizing the solutions of the Dirichlet problem ... 680
On the curvature of surfaces ... 695
Some estimates of solutions of the Dirichlet problem ... 703
On the principles of relativity theory ... 715

Научное издание

Александров Александр Данилович

ГЕОМЕТРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Серия «Избранные труды»

Том 1

Редактор *А. М. Самсоненко*
Художник *И. С. Попов*
Художественный редактор *Е. П. Волокитин*
Технические редакторы *И. И. Кожанова, Н. М. Остроумова*
Корректоры *Л. А. Анкушева, Л. И. Кононенко, И. Л. Малышева, П. С. Филатов*
Компьютерный набор *Н. З. Киндалева, А. М. Налетов*

Изд. лиц. № 020297 от 23.06.1997.
Сдано в набор 17.05.2005. Подписано в печать 22.03.2006.
Бумага ВХИ. Формат $70 \times 100\,{}^{1}/_{16}$. Офсетная печать.
Усл. печ. л. $64{,}5 + 0{,}1$ вкл. на мел. бум. Уч.-изд. л. 45,1. Тираж 1000 экз. Заказ № 594.

Сибирская издательская фирма «Наука» РАН. 630099, Новосибирск, ул. Советская, 18.
СП «Наука» РАН. 630077, Новосибирск, ул. Станиславского, 25.

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

Избранные труды

Том 1

ГЕОМЕТРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ