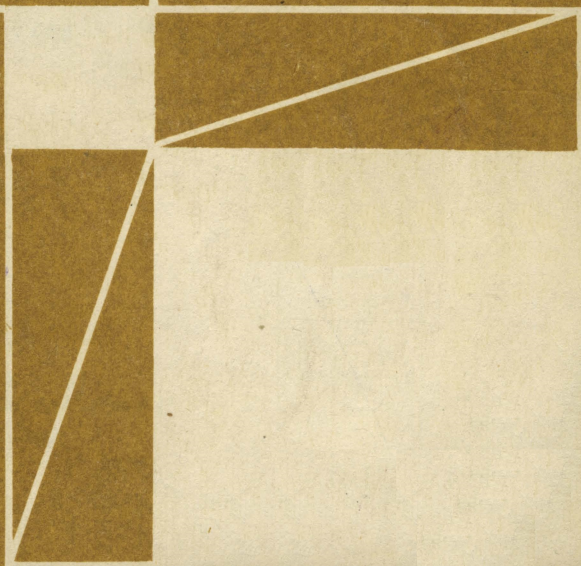
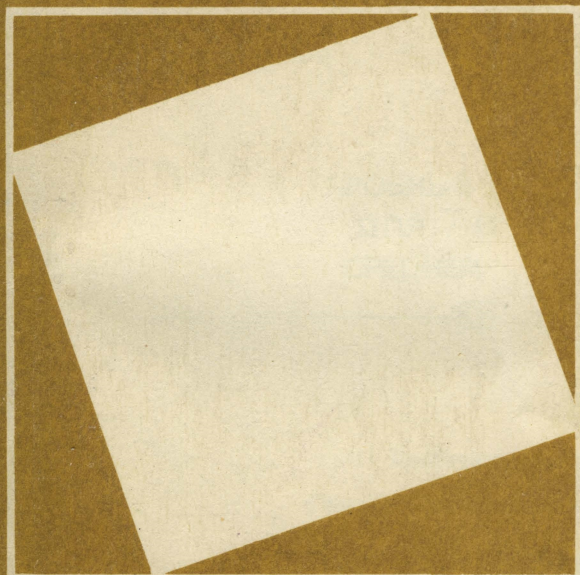


А.Д.АЛЕКСАНДРОВ, А.Л.ВЕРНЕР, В.И.РЫЖИК

ГЕОМЕТРИЯ



**А.Д.АЛЕКСАНДРОВ,
А.Л.ВЕРНЕР,
В.И.РЫЖИК**

ГЕОМЕТРИЯ

**ПРОБНЫЙ УЧЕБНИК
для 7 КЛАССА
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ**



**Рекомендовано
Главным управлением школ
Министерства просвещения
СССР**

**МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1985**

ББК 22.151я72
А46

Условные обозначения

- — окончание доказательства утверждения
* — необязательный материал

А $\frac{4306020400-473}{103(03) - 85}$ инф. письмо—85

© Издательство «Просвещение», 1985 г.

ВВЕДЕНИЕ

Перед тем как приступить к изучению курса геометрии VII класса, вспомним основные результаты курса геометрии VI класса. На них мы будем опираться при доказательствах последующих теорем.

В основании всего курса геометрии лежат пять аксиом.

Аксиома отрезка. *Каждые две точки можно соединить отрезком и притом только одним* (рис. 1).



Рис. 1

Аксиома продолжения отрезка. *Каждый отрезок можно продолжить за любой из его концов* (рис. 2).



Рис. 2

Аксиома откладывания отрезка. *На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один* (рис. 3).

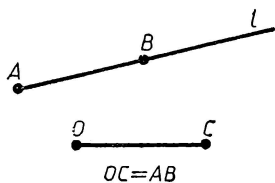


Рис. 3

Аксиома откладывания угла. *От каждого луча по любую сторону от него можно отложить угол, равный данному, и притом только один* (рис. 4).

Углы между лучами (или отрезками) a , b и a_1 , b_1 , исходящими из точек O и O_1 , называются равными, если найдутся такие точки $A \in a$, $B \in b$, $A_1 \in a_1$ и $B_1 \in b_1$, что $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$ и $AB = A_1B_1$ (рис. 5).

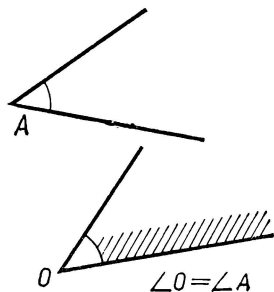


Рис. 4

Аксиома прямоугольника. *На любом отрезке как на основании можно построить прямоугольник любой заданной высоты* (рис. 6), т. е. если

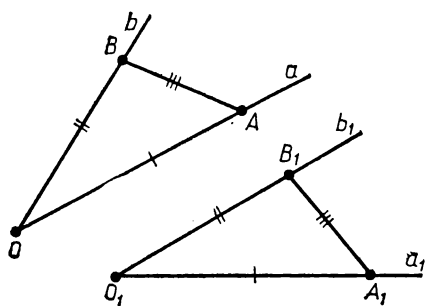


Рис. 5

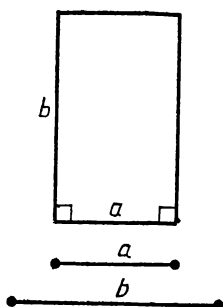


Рис. 6

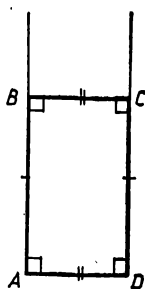


Рис. 7

из концов некоторого отрезка AD сначала проведем к нему в одну сторону два равных перпендикуляра AB и DC , а затем проведем отрезок BC , то получится **прямоугольник $ABCD$** (рис. 7).

Основными фигурами, которые мы изучали в первом полугодии VI класса, были треугольники.

Равными треугольниками мы называли такие треугольники, у которых соответственные стороны равны, т. е. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$ (рис. 8).

О равных треугольниках были доказаны две важные теоремы.

Теорема об углах равных треугольников. В равных треугольниках соответственные углы равны, т. е. если $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 9).

Признак равенства треугольников. Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны, т. е. если $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$ и $\angle A_1 = \angle A$, то $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ (рис. 10).

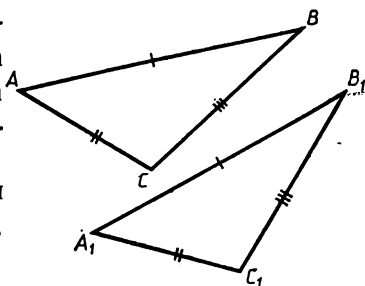


Рис. 8

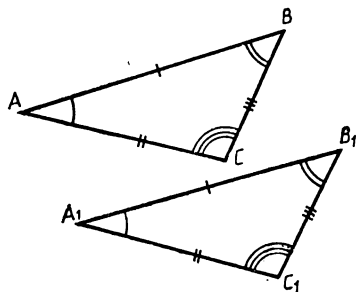


Рис. 9

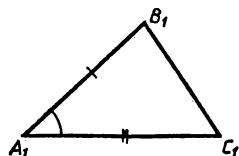
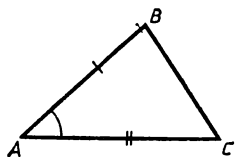


Рис. 10

С помощью этих двух теорем устанавливались другие результаты, в том числе следующая теорема.

Теорема о равнобедренном треугольнике. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны и биссектриса, проведенная из вершины, является также медианой и высотой (рис. 11.)*

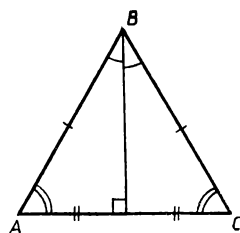


Рис. 11

Во втором полугодии VI класса измерялись простейшие геометрические величины: длины отрезков, величины углов, площади многоугольных фигур. Выбрав соответствующую единицу измерения (некоторый отрезок, угол, квадрат), мы смогли (для каждого отрезка, угла и многоугольной фигуры) найти численное значение величины (длины отрезка, величины угла и площади многоугольной фигуры) при выбранной единице измерения. Эти численные значения складываются при сложении отрезков, углов, многоугольных фигур.

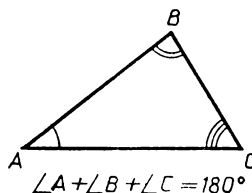


Рис. 12

Основные теоремы второго полугодия:

Теорема о сумме углов треугольника. *Сумма углов треугольника равна развернутому углу, т. е. 180° (рис. 12).*

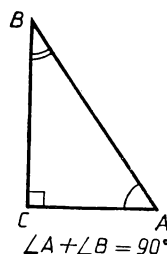
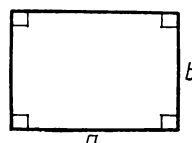


Рис. 13

Сначала с помощью аксиомы прямоугольника мы доказали частный случай этой теоремы для прямоугольного треугольника: **сумма острых углов прямоугольного треугольника равна прямому углу, т. е. 90° (рис. 13).**



$$S = ab$$

Рис. 14

Теорема о площади прямоугольника. *Площадь прямоугольника равна произведению длин его соседних сторон (рис. 14).*

Теорема о площади треугольника. *Площадь треугольника равна половине произведения длины любой его стороны и длины соответствующей высоты (рис. 15).*

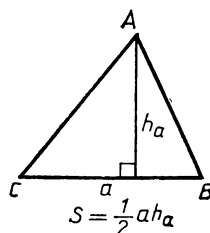


Рис. 15

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Продолжим изучение треугольников. Основная задача этой главы — выразить одни элементы треугольника (стороны и углы) через другие его элементы. Мы выведем несколько формул, связывающих элементы треугольника. Пока мы знаем лишь одну такую формулу: сумма углов любого треугольника равна 180° . Поэтому, зная два угла треугольника, мы можем найти третий угол. Кроме того, мы знаем, что площадь треугольника равна половине произведения стороны треугольника на соответствующую высоту. Дальнейшие выводы опираются на эти две теоремы.

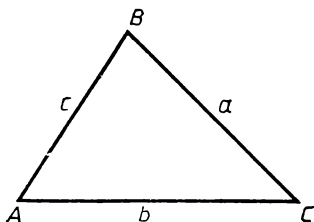


Рис. 16

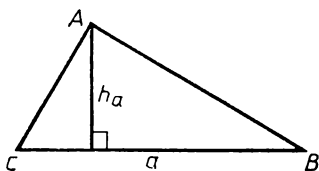


Рис. 17

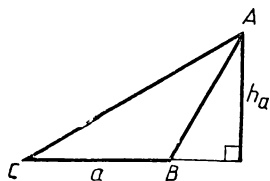


Рис. 18

Примем следующие условия. Фиксируем отрезок e , задающий единицу длины, и соответствующий квадрат e^2 (со стороной, равной e), задающий единицу площади. Под длиной и площадью будем понимать их численные значения в этих единицах.

В треугольнике ABC будем обозначать через a, b, c его стороны, противолежащие соответственно вершинам A, B, C (рис. 16), так что $a=BC$, и т. п. Так же будем обозначать в формулах численные значения длин этих сторон и нередко для краткости будем говорить «сторона a » и т. п., подразумевая численное значение ее длины.

Градусные меры углов при вершинах A, B, C будем обозначать $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ (или даже совсем коротко A, B, C , когда ясно, что речь идет о градусных мерах). При этом, например, говоря «угол A »,

будем подразумевать также его градусную меру.

Высоту треугольника, так же как и численное значение ее длины, будем обозначать буквой h ; причем h_a , h_b , h_c — это высоты, проведенные из вершин A , B , C к сторонам a , b , c (рис. 17, 18). В прямоугольном треугольнике ABC прямой угол обозначается обычно буквой C (рис. 19).

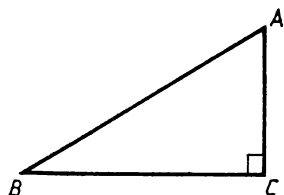


Рис. 19

§ 14. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

14.1. Формулировка и доказательство теоремы Пифагора

Начнем с прямоугольных треугольников. Для них выполняется знаменитая теорема Пифагора, названная так в честь древнегреческого мыслителя, с именем которого связывают ее открытие.

Теорема Пифагора. *Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Доказательство. Пусть T — прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c (рис. 20). Теорема Пифагора утверждает, что выполняется равенство

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Докажем это равенство.

Построим квадрат Q со стороной $a + b$. На сторонах квадрата Q возьмем точки A , B , C , D так, чтобы отрезки AB , BC , CD и DA отсекали от квадрата Q прямоугольные треугольники T_1 , T_2 , T_3 , T_4 с катетами a и b (рис. 21). Четырехугольник $ABCD$ обозначим через P . Покажем, что P — квадрат со стороной c .

Все треугольники T_1 , T_2 , T_3 , T_4 равны треугольнику T (по признаку равенства треугольников). Поэтому их

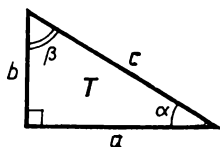


Рис. 20

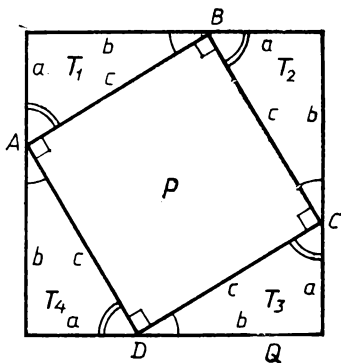


Рис. 21

гипотенузы равны гипотенузе треугольника T , т. е. отрезку c . Итак, все стороны четырехугольника P равны c . Покажем, что все углы этого четырехугольника прямые.

Обозначим через α и β величины острых углов треугольника T . Тогда, как вам известно, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Угол при вершине A четырехугольника P вместе с углами, равными острым углам треугольника T , составляет развернутый угол. Поэтому

$$\widehat{DAB} + \alpha + \beta = 180^\circ. \quad (2)$$

А так как $\alpha + \beta = 90^\circ$, то $\widehat{DAB} = 90^\circ$. Точно так же можно доказать, что и остальные углы четырехугольника P прямые. Следовательно, мы доказали, что четырехугольник P — квадрат со стороной c .

Квадрат Q со стороной, равной $a + b$, складывается из квадрата P со стороной, равной c , и четырех треугольников, равных треугольнику T . Поэтому для их площадей $S(Q)$, $S(P)$ и $S(T)$ выполняется равенство

$$S(Q) = S(P) + 4S(T). \quad (3)$$

Так как $S(Q) = (a + b)^2$, $S(P) = c^2$ и $S(T) = \frac{1}{2}ab$, то, подставляя эти выражения в (3), получаем такое равенство

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab. \quad (4)$$

Поскольку $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, то равенство (4) можно записать так:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab. \quad (5)$$

Из равенства (5) следует равенство (1). Теорема доказана.

14.2. О значении и истории теоремы Пифагора

Теорема Пифагора — это одна из главных и, можно даже сказать, самая главная теорема геометрии. Значение ее состоит прежде всего в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии. В нашем курсе она будет служить основой многих дальнейших выводов. Поэтому ее нужно твердо усвоить.

Теорему Пифагора можно сформулировать иначе, если заметить, что a^2 , b^2 , c^2 — это численные значения площадей квадратов со сторонами a , b , c . Поэтому равенство $c^2 = a^2 + b^2$ означает, что площадь квадрата со стороной c равна сумме площадей квадратов со сторонами a и b . Стало быть, теорема Пифагора выражает это соотношение между площадями (рис. 22): *площадь квадрата, построен-*

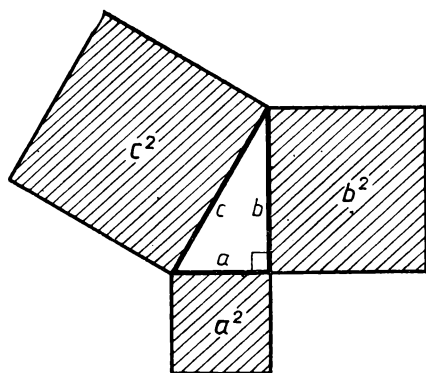


Рис. 22

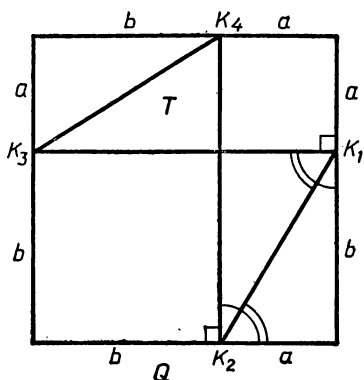


Рис. 23

ного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Пифагор, именем которого названа доказанная теорема, — древнегреческий мыслитель, жил в VI в. до н. э. (ок. 570 — ок. 500 гг. до н. э.). Тогда математика только складывалась у греков в теоретическую науку и Пифагор оказал на нее большое влияние. Однако он не открыл теорему, носящую его имя. Она была известна еще раньше в Древнем Египте и Вавилоне, но, возможно, только как факт, выведенный из измерений. Надо думать, Пифагор знал это, но нашел доказательство. И вот факт, взятый из отдельных измерений, выступил как необходимый закон, потому что если уж доказано, то, значит, «оно не может быть иначе». Теорема относилась тогда к площадям квадратов, а не к численным значениям длин. Общего понятия о численном значении длины любого отрезка еще не было. Само название второй степени числа — «*a* квадрат» или «*a* в квадрате» — происходит от геометрического понятия «квадрат со стороной *a*». Сначала была геометрия, алгебра возникла гораздо позже.

Теорема Пифагора замечательна еще и тем, что сама по себе она вовсе не очевидна. Если, например, свойства равнобедренного треугольника, указанные в теореме о нем, можно видеть непосредственно на чертеже, то, сколько ни гляди на прямоугольный треугольник, никак не увидишь, что между его сторонами есть такое простое соотношение: $a^2 + b^2 = c^2$. Зато это соотношение между соответственными площадями становится очевидным из построения на рисунках 21 и 23. На них мы видим два различных разбиения одного и того же квадрата *Q* со стороной $a + b$. На первом из них квад-

рат Q со стороной $a + b$ складывается из квадрата со стороной c и четырех треугольников. На втором тот же квадрат складывается из квадратов со сторонами a и b и таких же четырех треугольников. Исключив и там и там треугольники, видим, что $c^2 = a^2 + b^2$. В этом состоит самый лучший математический стиль: посредством остроумного построения сделать неочевидное очевидным. В математических трактатах в Древней Индии, доказывая теорему, часто приводили только рисунок и сопровождали его лишь одним словом: «Смотри!» Запомнить два рисунка нетрудно, а в них вся суть доказательства.

14.3. Квадратный корень

Теорема Пифагора позволяет по любым двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону. Сначала находят квадрат стороны. Например, если катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см, то по теореме Пифагора квадрат его гипотенузы равен $3^2 + 4^2 = 25$, т. е. площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна 25 см^2 (рис. 24). И чтобы завершить решение этой задачи, надо найти сторону квадрата, площадь которого равна 25 см^2 . Ясно, что она равна 5 см, так как $5^2 = 25$. Итак, гипотенуза рассматриваемого треугольника равна 5 см. Этот прямоугольный треугольник был известен еще в Древнем Египте (о нем мы уже говорили в начале курса геометрии).

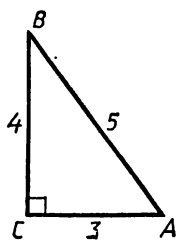


Рис. 24

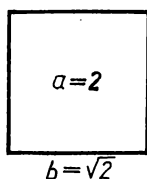


Рис. 25

Если известны гипотенуза и один из катетов, то можно найти другой катет. Например, если гипотенуза равна 13 см, а катет равен 5 см, то по теореме Пифагора квадрат другого катета равен $13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$. И мы снова приходим к такой задаче: найти положительное число, квадрат которого известен. В данном случае, когда квадрат равен 144, легко подобрать такое число. Оно равно 12. Следовательно, второй катет рассматриваемого треугольника равен 12 см.

В обеих рассмотренных задачах нам пришлось по известному квадрату положительного числа находить само это число, т. е., зная некоторое число $a > 0$, мы находим такое число $b > 0$, что $b^2 = a$ (рис. 25).

Найденное положительное число b называ-

ется арифметическим квадратным корнем числа a и обозначается так: $b = \sqrt{a}$ (читается: « b равно корню квадратному из a »). Операцию нахождения квадратного корня называют *извлечением квадратного корня*.

Геометрически операцию извлечения квадратного корня можно истолковать как нахождение стороны квадрата, площадь которого известна. Ясно, что подобные задачи постоянно возникают в практической деятельности: в строительстве, при планировке земельных участков и т. п.

Подробно об операции извлечения квадратного корня и ее свойствах говорится в курсе алгебры.

В тех случаях, когда нельзя найти точное значение квадратного корня в виде отношения натуральных чисел (например, для $\sqrt{2}$), мы будем искать его приближенное значение по таблицам (например, $\sqrt{2} \approx 1,414$) или оставлять в ответе знак квадратного корня (например, $x = \sqrt{3}$).

Задачи к § 14

Основные задачи

1. Докажите, что квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его смежных сторон.

2. Нарисуйте треугольник. Проведите в нем высоту на большую сторону. Для каждого из полученных прямоугольных треугольников запишите теорему Пифагора. Какие следствия можно получить из этих равенств?

3. Докажите равенство двух прямоугольных треугольников по:
а) двум катетам; б) катету и гипотенузе.

4. Заполните пустые места в таблице, если a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, S — его площадь.

5. В Древней Индии было известно, что квадрат, построенный на диагонали данного квадрата,

№	a	b	c	S
1	6	8		
2		12	13	
3	0,3	0,4		
4		1	$\sqrt{3}$	
5	2			6
6		3		1
7			1	$\frac{1}{4}$
8			$\frac{1}{2}$	1

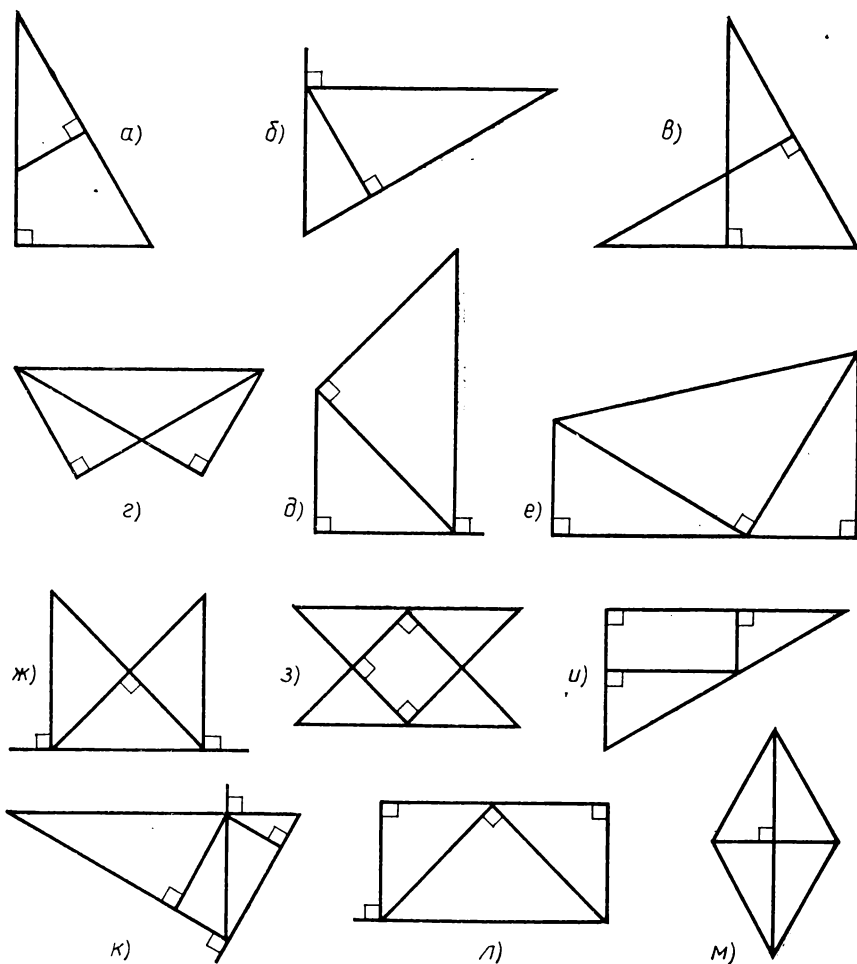


Рис. 26

имеет площадь в два раза бóльшую, чем данный квадрат. Как в этом можно убедиться?

6. Запишите теорему Пифагора для треугольника PQR с прямым углом Q . (Попробуйте это сделать без рисунка.) Выразите из этого равенства длину каждого катета.

7. а) Какие из отрезков, изображенных на рисунке 26, можно выразить по теореме Пифагора? б) Сколько отрезков на рисунке надо знать, чтобы вычислить длины остальных?

Выберите сами численные данные и получите результат.

8. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. а) В данном треугольнике провели медиану BK . Как найти длину этой медианы, если катеты известны? б) Известна длина медианы BK и катета BC . Как найти другой катет? Другие медианы? в) Известна длина медианы BK и катета AC . Ответьте на те же вопросы, что и в пункте б. г) Известна гипотенуза и медиана BK . Как найти катеты и другие медианы? д) Известны две медианы. Как найти третью медиану?

В каждом пункте выберите сами числовые данные и получите результат.

9. AB и CD — два перпендикуляра к прямой BD , лежащие с одной стороны от нее.

а) $|BD| = 1$, $|AB| = 1$, $|CD| = 2$. Вычислите $|AC|$.

б) $|AC| = 3$, $|CD| = 3$, $|AB| = 2$. Вычислите $|BD|$.

в) $|AB| = |BD| = 3$, $|AC| = 5$. Вычислите $|CD|$. г) $|BD| = d_1$, $|AC| = d_2$, $AB = 2CD$. Найдите $|AD|$.

10. Два прямоугольных треугольника с катетами 3 и 4 расположены так, что по одному их катету лежит на данной прямой, причем треугольники имеют общую вершину острого угла и лежат с одной стороны от этой прямой. Вычислите расстояние между другими вершинами острых углов этих треугольников.

11. Как вычислить площадь: а) квадрата, если известна его диагональ; б) прямоугольника, если известна его диагональ и одна из сторон; в) треугольника, если известны две его стороны и высота на третью сторону?

Выберите сами числовые данные и получите результат.

12. Вычислите площадь: 1) равностороннего треугольника:

а) со стороной 1, б) со стороной d ; 2) равнобедренного треугольника:

а) с боковой стороной 3 и основанием 2, б) с боковой стороной d_1 и основанием d_2 .

13. В окружности проведены две хорды. а) Докажите, что если эти хорды равны, то равны и перпендикуляры, проведенные к ним из центра. Докажите обратное. б) Пусть одна хорда больше другой. Какой из перпендикуляров будет больше? Проверьте обратное.

Решите эту задачу, используя теорему Пифагора и без нее.

14. а) В окружности радиуса R проведены две равные и перпендикулярные между собой хорды длины d . Чему равно расстояние от центра окружности до точки пересечения этих хорд? б) Составьте и решите обратную задачу. в) Ответьте на вопрос пункта а), если длины хорд будут равны d_1 и d_2 .

15. В окружности проведены диаметр и хорда, перпендикулярная ему. Она делит диаметр на отрезки длиной d_1 и d_2 . Можете ли вы найти длину хорды?

16. Дана окружность радиуса 1. AB и CD — два взаимно перпендикулярных диаметра. Точка X движется по окружности, и из нее опущены перпендикуляры XX_1 на AB и XX_2 на CD .

Вычислите $|X_1X_2|$.

§ 15. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

15.1. Перпендикуляр, наклонная, проекция

Пусть p — любая прямая и точка A не лежит на ней (рис. 27). Из точки A опустим перпендикуляр AC на p . Затем возьмем на p точку B , отличную от точки C , и соединим A с B отрезком AB .

Отрезок AB называется **наклонной**, проведенной из точки A к прямой p , а отрезок CB называется **проекцией наклонной AB на прямую p** . Наклонная, перпендикуляр и проекция являются гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника ABC .

По теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + CB^2. \quad (1)$$

Поэтому $AB^2 > AC^2$, т. е. $AB > AC$. Аналогично, $AB > CB$.

Итак, доказано, что *если из одной точки к некоторой прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр и проекция короче наклонной*. Часто это утверждение формулируют короче: *перпендикуляр и проекция короче наклонной* (подразумевая, что они проведены из одной точки к одной прямой).

Теперь из той же точки A проведем еще одну наклонную AD (рис. 28). Тогда по теореме Пифагора

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \quad (2)$$

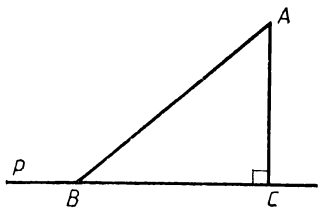


Рис. 27

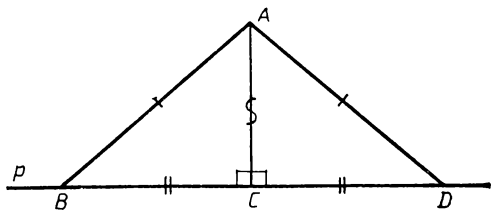


Рис. 28

Сравнивая (1) и (2), получаем два утверждения:

1) Если наклонные AB и AD равны, то равны и их проекции CB и CD . Действительно, из равенства $AB = AD$ следует, что $AC^2 + CB^2 = AC^2 + CD^2$. Поэтому $CB^2 = CD^2$, т. е. $CB = CD$.

2) Если проекции CB и CD равны, то равны наклонные AB и AD . Действительно, из равенства $CB = CD$ и равенств (1) и (2) следует, что $AB^2 = AD^2$, т. е. $AB = AD$.

Эти два утверждения (две теоремы) построены так, что условие одной из них является заключением другой и наоборот. Такие два утверждения называются **взаимно обратными**. Часто для краткости их формулируют вместе, применяя оборот *тогда и только тогда*. Именно так мы их и объединим в виде первой части следующей теоремы.

Теорема (о наклонных и проекциях). Если из одной точки к некоторой прямой проведены перпендикуляр и наклонные, то

1) наклонные равны тогда и только тогда, когда равны их проекции;

2) одна наклонная больше другой наклонной тогда и только тогда, когда проекция первой наклонной больше проекции второй наклонной.

Доказательство. В справедливости первого утверждения теоремы мы убедились. Докажем второе.

Проведем из точки A перпендикуляр AC и две наклонные AB и AD к прямой p (рис. 29). Пусть $AB > AD$. Тогда $AB^2 > AD^2$. Используя равенства (1) и (2), получаем, что

$$AC^2 + CB^2 > AC^2 + CD^2,$$

т. е. $CB^2 > CD^2$. Но тогда $CB > CD$.

Итак, если наклонная AB больше наклонной AD , то ее проекция CB больше проекции CD , т. е. из неравенства $AB > AD$ следует неравенство $CB > CD$.

Нам осталось показать, что верно и обратное, т. е. из неравенства $CB > CD$ следует, что $AB > AD$. Если $CB > CD$, то $CB^2 > CD^2$ и потому

$$AC^2 + CB^2 > AC^2 + CD^2.$$

Но тогда из (1) и (2) следует, что $AB^2 > AD^2$, т. е. $AB > AD$.

Теорема полностью доказана.

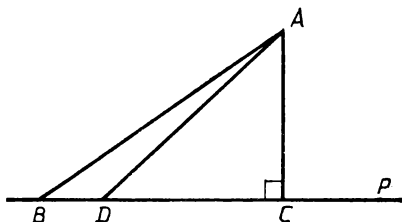


Рис. 29

15.2. Расстояние от точки до фигуры

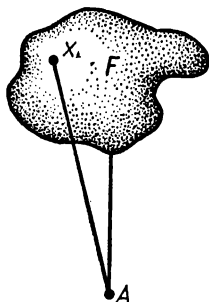


Рис. 30

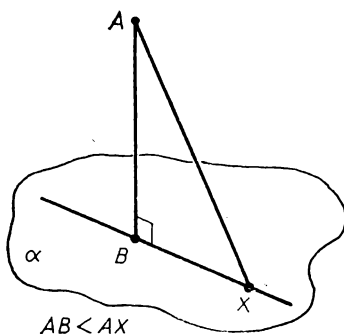


Рис. 31

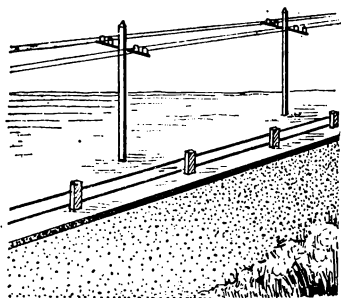


Рис. 32

Свойство перпендикуляра, что он короче наклонной, можно выразить еще так.

Из всех отрезков, проведенных из данной точки A до точек прямой p , перпендикуляр — самый короткий. Иначе говоря, его длина представляет кратчайшее расстояние от точки A до точек прямой p .

Это свойство хорошо известно из практики, хотя может и не осознаваться явно. Например, когда говорят: «Иди прямо на дорогу — так короче», то «прямо» и значит по перпендикуляру.

Расстоянием от данной точки A до какой-либо фигуры F называют кратчайшее из расстояний от этой точки до точек фигуры. Иначе говоря, это длина самого короткого из отрезков AX с концом X в фигуре F (рис. 30). Если A принадлежит самой фигуре F , то расстояние от A до F считается равным нулю.

В соответствии с этим определением расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Данное общее определение расстояния от точки до фигуры также употребляется на практике: расстояние до предмета, до города и т. д. всегда считают по кратчайшей линии.

* Определяя расстояние от точки до фигуры, мы можем не предполагать, что эта фигура и точка лежат в одной плоскости: данное определение годится и для пространственных фигур. Например, как найти расстояние от точки A до плоскости α , не содержащей эту точку? Надо взять длину самого короткого (кратчайшего) отрезка из всех отрезков, сое-

диняющих точку A с точками плоскости α (рис. 31). Такой кратчайший отрезок AB называется *перпендикуляром к плоскости α , опущенным из точки A* . Он перпендикулярен к любой прямой, проходящей через точку B в плоскости α (подумайте почему). Реальным примером перпендикуляра к горизонтальной плоскости могут служить вертикально стоящие столбы или мачты (рис. 32), а также отвесы.

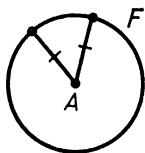


Рис. 33

Кратчайших отрезков, соединяющих точку A с точками фигуры F , может быть и больше одного (рис. 33).

15.3. Неравенство треугольника

Теорема (неравенство треугольника). *В каждом треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон, т. е. если a, b, c , — стороны треугольника ABC , то*

$$a < b + c \quad (3)$$

(а также $b < a + c$ и $c < a + b$).

Доказательство. Неравенство (3) будем доказывать лишь для случая, когда сторона a — наибольшая из сторон треугольника ABC , так как в других случаях неравенство (3) очевидно. Проведем из вершины A высоту AD (рис. 34). Она лежит внутри треугольника ABC . Действительно, в противном случае (рис. 35) оказалось бы, что сторона $a = BC$ — не наибольшая (объясните почему).

В прямоугольном треугольнике ABD катет BD меньше гипотенузы $AB = c$, т. е.

$$BD < c. \quad (4)$$

Аналогично, рассматривая прямоугольный треугольник ADC , получаем, что

$$DC < b. \quad (5)$$

Но $BD + DC = BC = a$, поэтому $a < b + c$. Теорема доказана.

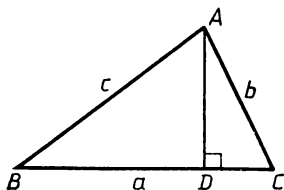


Рис. 34

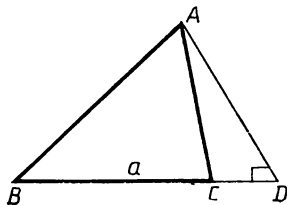


Рис. 35

Задачи к § 15

Основные задачи

1. Пусть в прямоугольном треугольнике отрезки a_1 и b_1 — проекции катетов a и b на гипотенузу c . Докажите, что: а) $h^2 = a_1 b_1$ (h — высота, опущенная на гипотенузу); б) $b^2 = cb_1$; в) $a^2 = ca_1$.

2. Перпендикулярные прямые пересекаются в точке A . Точки B_1 и B_2 — проекции точки B на эти прямые. а) Докажите, что $|AB|^2 = |AB_1|^2 + |AB_2|^2$. б) Рассмотрите более общий случай этой задачи, когда конец C отрезка BC не совпадает с A .

3. Пусть A, B, X_1, X_2 — любые точки плоскости. Докажите, что $|AB| \leq |AX_1| + |X_1 X_2| + |X_2 B|$. Обобщите этот результат. В каком случае имеет место равенство?

Задачи к п. 15.1

4. Отрезок AC является проекцией отрезка AB . Пусть $|AB| = c$, $|AC| = b$. Может ли: а) $b > c$; б) $b = c$; в) $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$; г) $\frac{b}{c} = \frac{1}{100}$?

5. Точка A лежит на прямой a . Отрезок AB поворачивают вокруг A . Как изменяется его проекция на a ?

6. Точка X движется по стороне BC прямоугольника $ABCD$. Докажите, что с увеличением $|XA|$ уменьшается $|XD|$.

7. Из одной точки к одной прямой проведены перпендикуляр и две наклонные. Докажите, что разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций. Проверьте обратное утверждение. Получите возможные следствия.

8. Через точку A проходят две перпендикулярные прямые. Точка X движется по окружности с центром A . Отрезок AX проектируется на каждую из них. а) Пусть одна из проекций увеличивается. Что происходит с другой? б) Каким числом может быть отношение этих проекций?

9. На сторонах угла, равного 45° , взяты точки A и B на расстояниях 1 и 2 от вершины. Отрезок AB проектируется на каждую из сторон угла. а) Вычислите длины этих проекций. б) Вычислите $|AB|$. в) Сможете ли вы решить задачу для других углов?

10. Внутри угла A , равного 60° , взята точка B . Длины проекций отрезка AB на стороны угла равны 2 и 3. Вычислите $|AB|$. Сможете ли вы решить задачу для других углов?

Задачи к п. 15.2

11. Как найти расстояние от вершины треугольника: а) до прямой, проходящей через сторону треугольника, противоположную этой вершине; б) до противоположной стороны? Обязательно ли оно равно высоте треугольника, проведенной из этой вершины? Может ли оно быть меньше этой высоты; больше этой высоты?

12. Вычислите расстояние от вершин треугольника до противоположных сторон, если: а) треугольник равносторонний со стороной 1; б) треугольник равнобедренный с боковой стороной 3 и основанием 2; в) треугольник равнобедренный с основанием 5 и боковой стороной 3; г) треугольник прямоугольный с катетами d_1 и d_2 ; д) стороны треугольника равны 4, 5 и 6.

13. На данной прямой лежат основания BC и B_1C_1 двух равносторонних треугольников со стороной 1: ABC и $A_1B_1C_1$. Общих точек они не имеют. Расстояние между ближайшими вершинами этих треугольников C и B_1 равно 1. Вычислите расстояния: а) BB_1 ; б) BA_1 ; в) от B до прямой A_1B_1 ; г) от B до стороны A_1B_1 ; д) от B до треугольника $A_1B_1C_1$.

14. а) Дан равнобедренный треугольник ABC . Точка X движется по основанию BC от B к C . Займет ли точка X такое положение, при котором расстояния от этой точки до AB и AC будут равны? Докажите, что сумма этих расстояний постоянна. б) Теперь точка находится внутри равностороннего треугольника. Докажите, что сумма расстояний от нее до сторон треугольника постоянна.

15. Нарисуйте треугольник ABC . Постройте прямую в его плоскости, проходящую через A и равноудаленную от точек B и C .

16. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр. Докажите, что расстояния от P до сторон основания равны. Для каких других тетраэдров это тоже справедливо? Приведите пример другой пирамиды, у которой вершина одинаково удалена от сторон основания.

Задачи к п. 15.3

17. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.

18. Перед вами кусок гибкой проволоки. Можно ли ее согнуть в треугольник, у которого: а) большая сторона равна половине длины проволоки; б) большая сторона равна трети длины проволоки; в) большая сторона равна четверти длины проволоки; г) стороны пропорциональны числам 3, 2, 1; д) стороны пропорциональны числам 2, 2, 1?

19. Точка X находится внутри треугольника $AУВ$. Докажите, что $|AX| + |XB| < |AY| + |YB|$.

20. Докажите, что при любом положении точки X на отрезке KL путь AXB короче пути $AKLB$. (Точки A и B не лежат на прямой KL .) Когда длина пути AXB достигает наименьшего значения?

21. Нарисуйте четырехугольник. Докажите, что каждая его сторона меньше суммы всех других его сторон. Верно ли это для любого многоугольника?

22. Даны круг и точка вне его. Как найти расстояние от точки до круга?

23. Длина куска проволоки имеет целое число сантиметров. Из нее стали делать треугольник. Одну сторону треугольника взяли в 1 см, другую — в 10 см. Получился равнобедренный треугольник. Почему?

24. Из складного метра делают треугольник. В каких границах лежит его наибольшая сторона?

25. а) Могут ли высоты треугольника равняться 1, 2, 3? б) Докажите, что в треугольнике бóльшая высота меньше суммы двух других высот.

§ 16. СИНУС

Начиная с этого параграфа и до конца главы мы будем изучать важный раздел геометрии, который называется тригонометрией. Само слово «тригонометрия» происходит от греческого и означает «измерение треугольников».

16.1. Отношение отрезков

Отношение $\frac{a}{b}$ отрезков a и b можно определить как отношение численных значений их длин. Как вы знаете, если заменить единицу длины на некоторый другой отрезок, то численные значения длин всех отрезков изменяются в одно и то же число раз: во сколько раз увеличивается (или уменьшается) единица длины, во столько же раз уменьшается (или увеличивается) численное значение длины. (Например, число метров в данном отрезке в 100 раз меньше, чем число сантиметров.) Из этого следует, что *отношение численных значений длин двух отрезков не изменяется при замене единицы длины*. Именно поэтому об этом отношении можно говорить просто как об отношении этих отрезков. Так мы и будем делать.

16.2. Отношение перпендикуляра к наклонной

Начнем с практического примера. Известно, что при подъеме (или спуске) по наклонному прямолинейному пути высота подъема (или глубина спуска) пропорциональны пройденному пути: чем глубже станция метрополитена, тем длиннее надо сделать эскалатор, чем длиннее лента транспортера в карьере, тем выше он поднимает добываемую породу (рис. 36), чем дальше вы идете или едете в гору по ровной наклонной дороге, тем выше вы поднимаетесь (рис. 37).

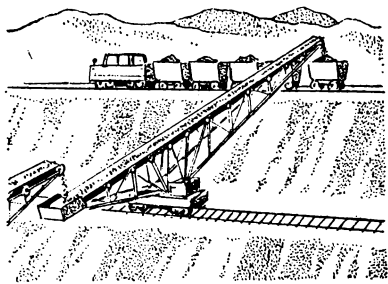


Рис. 36

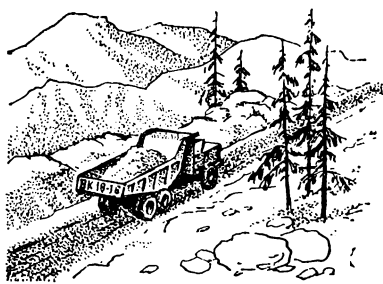


Рис. 37

Переведем сказанное на язык геометрии. Имеется некоторый острый угол A со сторонами p и q (рис. 38). Луч p изображаем горизонтальным, а луч q — наклонным. Если мы «прошли» из точки A по наклонному лучу q до точки B , то мы «поднялись» на высоту, равную перпендикуляру BC , опущенному из точки B на луч p . Пропорциональность высоты подъема пройденному пути означает, что если из любой другой точки B_1 на луче q тоже опустить перпендикуляр B_1C_1 на луч p , то выполняется равенство

$$\frac{B_1C_1}{B_1A} = \frac{BC}{BA}. \quad (1)$$

Равенство (1) означает, что отношение перпендикуляра BC и наклонной BA не зависит от выбора точки B на луче q . Это и выражает следующая теорема, которую нам предстоит доказать.

Теорема (об отношении перпендикуляра к наклонной). Если из точки, лежащей на одной стороне острого угла, опустить перпендикуляр на другую его сторону, то отношение этого перпендикуляра к наклонной не зависит от выбора точки.

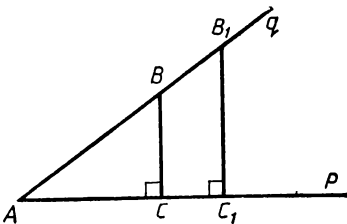


Рис. 38

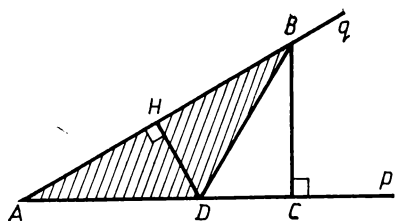


Рис. 39

Доказательство. Нам нужно доказать, что отношение перпендикуляра BC к наклонной BA одно и то же для любого положения точки B на стороне угла A (ясно, что $B \neq A$).

Для доказательства рассмотрим площадь S треугольника ABD , где D — некоторая фиксированная точка на луче p (рис. 39).

С одной стороны, $S = \frac{1}{2}AD \cdot BC$, где BC — высота, опущенная из вершины B .

С другой стороны, $S = \frac{1}{2}AB \cdot DH$, где DH — высота, опущенная из вершины D .

Из этих равенств следует, что $AD \cdot BC = AB \cdot DH$.

Отсюда переходим к пропорции

$$\frac{BC}{BA} = \frac{DH}{AD}. \quad (2)$$

В ее правой части стоит число $\frac{DH}{AD}$. Оно не зависит от положения точки B на луче q . Поэтому и выражение $\frac{BC}{BA}$ не зависит от положения точки B на луче q . Теорема доказана.

16.3. Определение синуса

Итак, мы доказали, что отношение перпендикуляра BC (рис. 40), опущенного из точки B одной стороны острого угла A на другую его сторону, к наклонной BA не зависит от выбора точки B .

Это отношение не зависит от того, на какой стороне угла A взя-

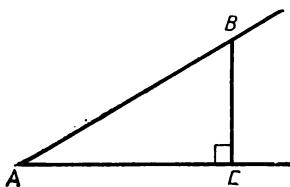


Рис. 40

та точка, из которой опускается перпендикуляр. Действительно, по равенству (2) $\frac{DH}{DA} = \frac{BC}{BA}$. Здесь DH — перпендикуляр, опущенный из точки D на другую сторону угла A , причем точку D можно выбрать произвольно.

Поэтому каждому острому углу можно сопоставить значение этого отношения. Оно называется **синусом угла** и для угла A (или угла B и т. п.) обозначается $\sin A$ ($\sin B$ и т. п.):

$$\sin A = \frac{BC}{BA}.$$

Вернемся теперь к практическому примеру о подъеме (или спуске), с которого мы начали предыдущий пункт. Крутизну подъема (или спуска) можно, конечно, задать углом наклона, выраженным в градусах. Но часто удобно его задать высотой подъема (или глубиной спуска), приходящейся на данную длину. А это равносильно указанию синуса угла. Например, подъем на 2 м на 100 м пути означает крутизну — синус угла подъема, равный $\frac{2}{100} = 0,02$. Можно сказать, что синус угла — это высота подъема, приходящаяся на единицу пути.

Для тупого угла синус определяется как синус смежного ему острого угла. Это вполне естественно. Действительно, перпендикуляр и наклонная, участвующие в определении синуса острого угла A (рис. 41), можно отнести и к смежному с ним тупому углу, лишь считать при этом, что перпендикуляр из точки B опускается не на другую сторону тупого угла, а на ее продолжение. Тогда $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AB}$.

Следовательно, **синусы смежных углов равны**.

Для прямого угла перпендикуляр, опущенный из точки одной стороны на другую сторону, совпадает с соответствующим отрезком первой стороны (в остальных случаях этот отрезок — наклонная). Поэтому отношение этих отрезков равно единице (рис. 42). Следовательно, **синус прямого угла равен единице**.

Наконец, для *развернутого угла* перпендикуляр вырождается в точку (рис. 43) и потому его **синус равен нулю**.

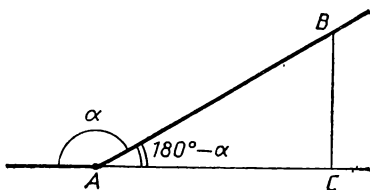


Рис. 41

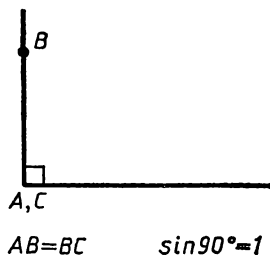


Рис. 42

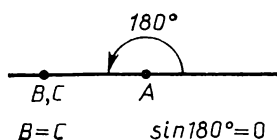


Рис. 43

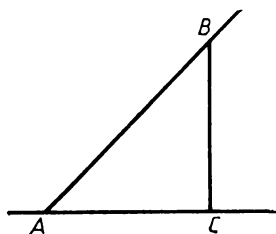


Рис. 44

Подведем итог.

Каждому углу сопоставляется число, называемое синусом этого угла и определяемое следующим образом. Из какой-нибудь точки B одной стороны угла A опускается перпендикуляр BC на другую сторону угла A или ее продолжение. Отношение перпендикуляра BC к наклонной BA называется синусом данного угла A и обозначается $\sin A$ (рис. 44):

$$\sin A \cong \frac{BC}{BA}. \quad (3)$$

16.4. Синус величины угла

Итог, к которому мы пришли в предыдущем пункте, еще не окончательный. Вопрос вот в чем. Если взять два равных угла, то будут ли равны синусы этих углов? Докажем, что они равны.

Пусть A_1 — другой угол, равный данному углу A (рис. 45). Из какой-нибудь точки P стороны угла A_1 опустим перпендикуляр PQ на другую его сторону. Покажем, что

$$\frac{PQ}{PA_1} = \frac{BC}{BA}. \quad (4)$$

Отложим на луче q отрезок $AB_1 = A_1P$, а на луче p отрезок $AC_1 = A_1Q$. Треугольники AB_1C_1 и A_1PQ равны (по признаку равенства треугольников). Поэтому $B_1C_1 = PQ$ и $\angle AC_1B_1 = \angle A_1QP = 90^\circ$. Следовательно, B_1C_1 — перпендикуляр, опущенный из точки B_1 одной стороны угла A на другую его сторону. Как уже доказано, для угла A выполняется равенство

$$\frac{B_1C_1}{B_1A} = \frac{BC}{BA}. \quad (5)$$

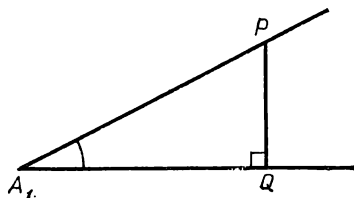
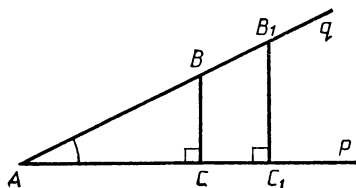


Рис. 45

Заменим в равенстве (5) отрезки B_1C_1 и B_1A равными им отрезками PQ и PA_1 , получим равенства (4), т. е. если $\angle A_1 = \angle A$, то $\sin A_1 = \sin A$.

Но равенство углов равносильно равенству их величин. Следовательно, синус однозначно определяется как самим углом, так и его величиной. Поэтому мы можем говорить не только о синусе угла, но и о синусе величины угла и писать, например, $\sin 30^\circ$ (или $\sin \alpha$, где $\alpha = 30^\circ$).

Определив синус величины угла, мы теперь можем писать, что $\sin 90^\circ = 1$ и $\sin 180^\circ = 0$.

Так как синусы смежных углов равны, то

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

16.5. Синусы углов прямоугольного треугольника

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 46) с прямым углом C катет $a = BC$ — это перпендикуляр к прямой AC , а гипотенуза $c = AB$ — это наклонная. Поэтому по определению синуса

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

Аналогично, $\sin B = \frac{b}{c}$, где $b = AC$.

Итак, синус острого угла в прямоугольном треугольнике есть отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе.

Используя это правило и пользуясь теоремой Пифагора, мы легко можем найти синусы 30° , 45° и 60° .

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC . Его острые углы равны 45° (рис. 47). Пусть его катеты AC и BC равны 1. Тогда гипотенуза $|AB| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Поэтому

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник ABC , в котором $\hat{A} = 30^\circ$ и $\hat{B} =$

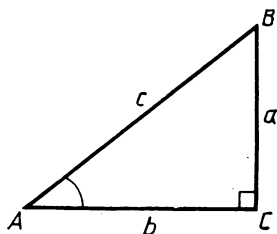


Рис. 46

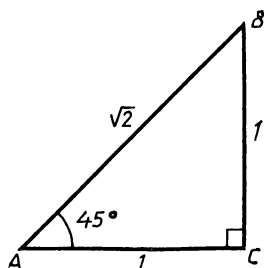


Рис. 47

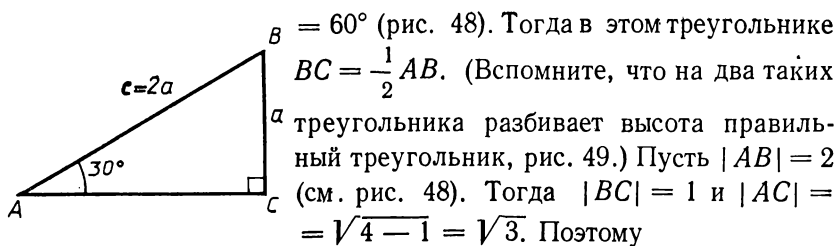


Рис. 48

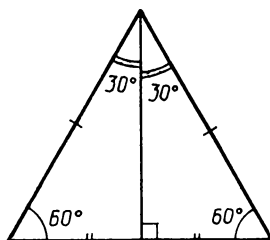


Рис. 49

$= 60^\circ$ (рис. 48). Тогда в этом треугольнике $BC = \frac{1}{2} AB$. (Вспомните, что на два таких треугольника разбивает высота правильный треугольник, рис. 49.) Пусть $|AB| = 2$ (см. рис. 48). Тогда $|BC| = 1$ и $|AC| = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$. Поэтому

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sin 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

16.6. Свойства и график синуса

Рассмотрим, как зависит синус угла от величины угла, когда угол меняется от 0° до 180° . Легко проверить следующие свойства синуса.

1. Синус каждого угла, кроме прямого, меньше единицы.

Это свойство вытекает из того, что перпендикуляр короче наклонной.

2. Синус возрастает от 0 до 1 с ростом угла от 0° до 90° . Это значит, что если $\alpha < \beta \leq 90^\circ$, то $\sin \alpha < \sin \beta$.

Доказательство. Построим два прямоугольных треугольника ABC и ABC_1 с общей гипотенузой AB , у которых $\widehat{BAC} =$

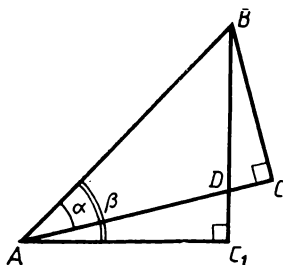


Рис. 50

$= \alpha$ и $\widehat{BAC_1} = \beta$ (рис. 50). Так как $\alpha < \beta$, то отрезки AC и BC_1 пересекаются в некоторой точке D . Если бы они не пересекались, то точка C лежала бы внутри треугольника ABC_1 (рис. 51). А тогда оказалось бы, что $\widehat{CBA} = 90^\circ - \alpha < \widehat{C_1BA} = 90^\circ - \beta$, что невозможно, поскольку $\alpha < \beta$. Итак, отрезки AC и BC_1 пересекаются. Поэтому $BD < BC_1$. А так как $BC < BD$, то $BC < BC_1$.

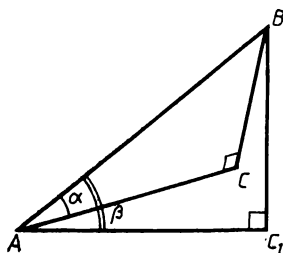


Рис. 51

Следовательно,

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} < \frac{BC_1}{AB} = \sin \beta.$$

Мы доказали второе свойство синуса.

3. Для острых углов значение синуса определяет угол, т. е. для таких углов из равенства $\sin A = \sin B$ вытекает, что $\hat{A} = \hat{B}$.

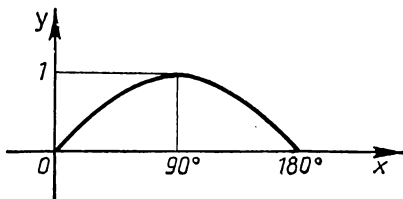


Рис. 52

Действительно, допустим, что $\hat{A} \neq \hat{B}$. Тогда либо $\hat{A} < \hat{B}$, либо $\hat{A} > \hat{B}$ и по свойству 2 оказалось бы, что либо $\sin A < \sin B$, либо $\sin A > \sin B$. А это противоречит данному равенству $\sin A = \sin B$. Итак, неравенства $\hat{A} \neq \hat{B}$ быть не может, т. е. $\hat{A} = \hat{B}$. Способ рассуждения, которым мы сейчас воспользовались, называется методом «от противного».

4. Для тупых углов синус убывает с ростом угла и значение синуса определяет угол.

Это свойство вытекает из свойств 2 и 3 и равенства

$$\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha).$$

Если задано численное значение величины угла, то синус этого угла находят по таблицам синусов. По таблицам же определяют величину острого угла, если известен его синус. Сколь угодно точное вычисление синуса для любых углов осуществляется по формулам высшей математики.

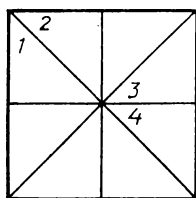
На рисунке 52 изображен график синуса: на горизонтальной оси откладываются углы в градусах, на вертикальной — значение синуса.

Задачи к § 16

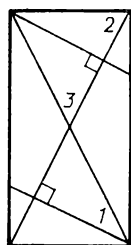
Основные задачи

1. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними. Какие следствия можно получить из этой формулы? В частности, рассмотрите два треугольника, имеющих по равному углу.

2. Выразите площадь выпуклого четырехугольника через его диагонали и угол между ними.



Квадрат



Прямоугольник

Рис. 53

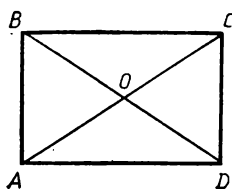


Рис. 54

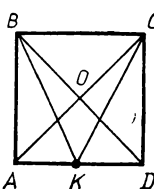


Рис. 55

3. Пусть в треугольнике ABC проведена биссектриса AK угла A . Докажите, что $AB : AC = KB : KC$. Какие следствия можно получить из этого равенства? Верно ли обратное утверждение?

4. Как вычислить синусы углов, отмеченных на рисунке 53?

5. а) Нарисуйте тупой угол и вычислите его синус. б) Вычислите синус угла в 120° , 135° , 150° .

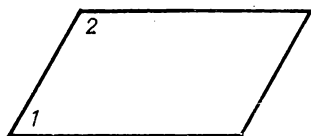
6. Дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 54). Как вы вычислите синусы углов CAD , ACB , AOB , AOD ?

7. Дан квадрат $ABCD$ (рис.

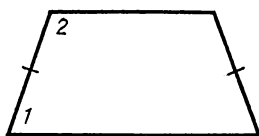
55). Точка K — середина стороны AD . Как вы вычислите синусы углов ADB , AOB , CBD , CKD , KCD , ACK , AKC , KBC , BKC , KOD ?

8. Как вы вычислите синусы углов, отмеченных на рисунке 56?

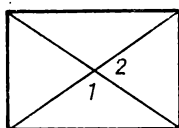
9. Для отмеченных на рисунке 57 углов выберите прямоугольные треугольники, в которых они лежат, и укажите противолежащие им катеты.



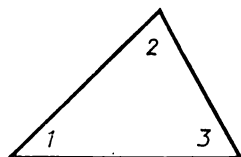
а)



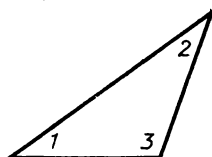
б)



в)



г)



д)

Рис. 56

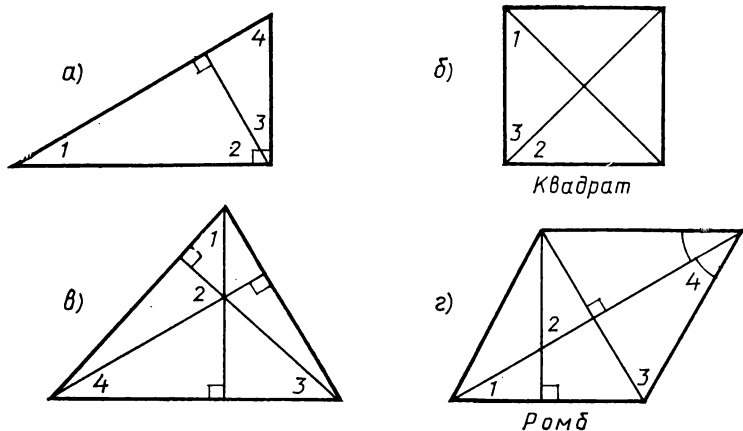


Рис. 57

10. Нарисуйте в тетради прямоугольный треугольник. Измерьте его углы с точностью до 1° . Вычислите синусы его острых углов. Оставьте один из катетов без изменения и начните увеличивать второй катет. Как будет изменяться при этом синус угла, лежащего против неизменяющегося катета? Как будет изменяться при этом синус угла, лежащего против изменяющегося катета?

11. Вычислите углы прямоугольного треугольника ABC , в котором гипотенуза AB равна 3 и а) $|AC| = 1$; б) $|BC| = 2$.

12. Как вычислить углы прямоугольного треугольника, если известны: а) катеты; б) отношение катетов; в) катет и медиана к другому катету; г) катет и медиана к этому катету; д) катет и медиана к гипотенузе; е) площадь и сумма катетов; ж) площадь и гипотенуза? Выберите сами числовые данные и получите результат.

13. В равнобедренном треугольнике известны все стороны. Как вычислить его углы? Приведите числовые примеры.

Задачи на формулу площади

14. Запишите формулу для вычисления площади треугольника по двум его сторонам и углу между ними. а) Выразите из нее синус этого угла и одну из сторон. б) Пусть эти две стороны равны. Как выглядит формула в этом случае? Выразите теперь из этой формулы синус угла и одну из сторон. в) Пусть в треугольнике при заданных длинах сторон угол между ними начинает изменяться. Как будет изменяться площадь треугольника? г) Объясните, как из этой формулы следует, что площадь треугольника может быть сколь

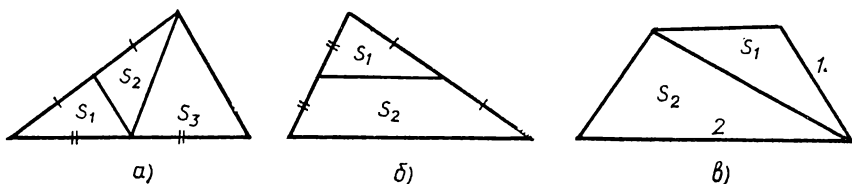


Рис. 58

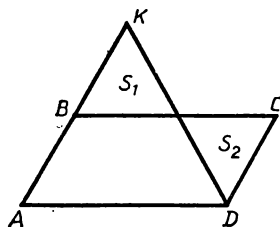


Рис. 59

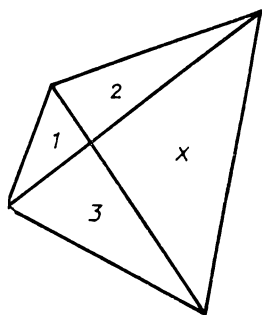


Рис. 60

угодно малой. д) При каком угле, если считать стороны постоянными, площадь треугольника становится наибольшей?

15. Сравните площади на рисунке 58.

16. На рисунке 59 $AB = CD$, $AD = BC$, $AB = BK$. Сравните площади S_1 и S_2 . Как изменится результат, если точка B — другая точка отрезка AK ?

17. Найдите площадь треугольника по: а) высоте h_b и углам A и C ; б) h_a и h_b и углу C .

18. В выпуклом шестиугольнике все углы равны по 120° , а стороны равны 1 и 2 (через одну). Вычислите его площадь.

19. Переменная хорда KL данного круга с центром O : а) движется перпендикулярно диаметру; б) проходит через одну и ту же точку внутри радиуса.

Найдите наибольшее значение площади треугольника KOL .

20. Докажите, что неизвестная площадь x на рисунке 60 больше, чем каждая из известных. Найдите неизвестную площадь.

§ 17. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА

ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

17.1. Решение прямоугольных треугольников

Решением треугольников называется нахождение всех сторон и углов треугольника по данным его сторонам и углам. В общем случае по трем заданным элементам треугольника можно найти остальные его элементы. У прямоугольного треугольника один угол уже задан — прямой. Поэтому задают лишь два других его элемента. Мы

будем рассматривать прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , гипотенузой c , острыми углами A и B , катетами a и b . Укажем пять основных случаев решения прямоугольных треугольников в общем виде.

Задача 1. Даны катеты. Найти гипотенузу и углы.

Решение. Даны катеты a и b . Тогда по теореме Пифагора $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Далее, $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin B = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Величины углов A и B находим по таблицам.

Задача 2. Даны гипотенуза и катет. Найти другой катет и углы.

Решение. Пусть даны c и a . Тогда $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Далее, $\sin A = \frac{a}{c}$ и угол A находим по таблицам, а $\hat{B} = 90^\circ - \hat{A}$.

Задача 3. Даны гипотенуза и острый угол. Найти другой угол и катеты.

Решение. Пусть даны c и \hat{A} . Тогда $\hat{B} = 90^\circ - \hat{A}$. Из равенств $\sin A = \frac{a}{c}$ и $\sin B = \frac{b}{c}$ находим, что $a = c \sin A$ и $b = c \sin B$.

Задача 4. Даны катет и противолежащий острый угол. Найти гипотенузу, другой катет и другой острый угол.

Решение. Пусть даны a и \hat{A} . Тогда $\hat{B} = 90^\circ - \hat{A}$. Из равенства $\sin A = \frac{a}{c}$ находим, что $c = \frac{a}{\sin A}$. А тогда $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ или $b = c \sin B$.

Задача 5. Даны катет и прилежащий острый угол. Найти гипотенузу, другой катет и другой острый угол.

Решение. Пусть даны a и \hat{B} . Тогда $\hat{A} = 90^\circ - \hat{B}$ и задача сводится к предыдущей.

17.2. Признаки равенства прямоугольных треугольников

Мы рассмотрели основные случаи решения прямоугольных треугольников. Во всех пяти задачах решение единственно. Поэтому каждой из этих задач соответствует признак равенства прямоугольных треугольников. Например, первой из задач соответствует такой признак: *если катеты одного прямоугольного треугольника соответ-*

ственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны. Короче: *прямоугольные треугольники равны по двум катетам*.

Всего же мы имеем пять следующих признаков равенства прямоугольных треугольников.

Первый признак — по двум катетам.

Второй признак — по катету и гипотенузе.

Третий признак — по гипотенузе и острому углу.

Четвертый признак — по катету и противолежащему острому углу.

Пятый признак — по катету и прилежащему острому углу.

Дайте развернутые формулировки всех этих признаков.

17.3. Характерные свойства серединного перпендикуляра и биссектрисы угла

Признаки равенства прямоугольных треугольников позволяют по-новому рассмотреть две фигуры — серединный перпендикуляр отрезка и биссектрису угла.

Теорема (о серединном перпендикуляре). *Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от его концов.* Верно и обратное: *каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на его серединном перпендикуляре.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из признака равенства прямоугольных треугольников по двум катетам (рис. 61): 1) $AO = OB$; 2) $\triangle AOX = \triangle BOX$. Поэтому $AX = XB$.

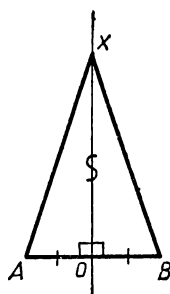


Рис. 61

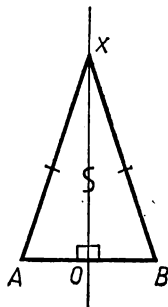


Рис. 62

Второе утверждение теоремы вытекает из признака равенства прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе (рис. 62):

1) $AX = XB$; 2) $\triangle AOX = \triangle BOX$.

Поэтому $AO = OB$. ■

Теорема (о биссектрисе угла). *Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.* Верно и обратное: *каждая точка угла, равноудаленная от его сторон, лежит на биссектрисе угла.*

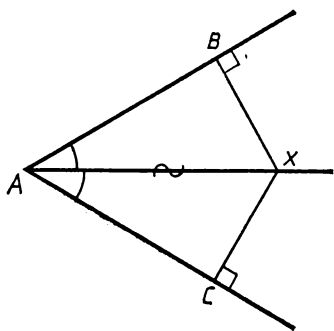


Рис. 63

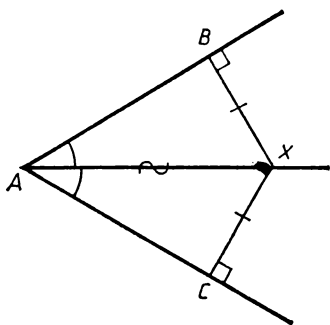


Рис. 64

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу (рис. 63). Второе утверждение теоремы вытекает из признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету (рис. 64): 1) $XB = XC$; 2) $\triangle XVB = \triangle XVC$. Поэтому $\angle XAB = \angle XAC$. ■

17.4. Характерные свойства фигур

Про серединный перпендикуляр отрезка мы доказали два взаимно обратных утверждения: 1. Если точка лежит на серединном перпендикуляре отрезка, то она равноудалена от его концов. 2. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на его серединном перпендикуляре.

Первое из этих утверждений выражает свойство серединного перпендикуляра отрезка. Второе из этих утверждений выражает признак того, что точка лежит на серединном перпендикуляре отрезка. Проверив равенство расстояний от точки до концов отрезка, можно узнать, лежит ли она на его серединном перпендикуляре или нет. Равноудаленность точек от концов отрезка оказалась и свойством серединного перпендикуляра, и его признаком.

О свойстве фигуры, которое одновременно является и ее признаком, говорят как о характерном (или характеристическом) свойстве фигуры. Таким образом, равноудаленность точек от концов отрезка — характерное свойство серединного перпендикуляра отрезка. Серединный перпендикуляр содержит все точки, равноудаленные от концов отрезка, и никаких других точек он не содержит.

Точно так же равноудаленность точек угла от его сторон — характерное свойство биссектрисы угла. Биссектриса угла содержит

все точки угла, равноудаленные от его сторон, и никаких других точек на ней нет.

Если фигура имеет характерное свойство, определяющее, какие точки принадлежат фигуре, то про фигуру говорят, что она является множеством точек, обладающих данным свойством, или геометрическим местом точек, обладающих данным свойством.

Таким образом, серединный перпендикуляр отрезка — это множество точек, равноудаленных от концов этого отрезка, или, что все равно, геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка. А биссектриса угла — это... Закончите фразу сами.

Обращаем ваше внимание, что, устанавливая характерное свойство фигуры, всегда доказывают два взаимно обратных утверждения.

Задачи к § 17

Основные задачи

1. В равнобедренном треугольнике рассмотрим такие величины: длину основания, длину боковой стороны, высоту, угол при вершине, угол при основании. Пусть две из них известны. Как найти остальные?

2. В прямоугольном треугольнике провели высоту на гипотенузу. Используя синус, докажите, что: а) отношение проекций катетов на гипотенузу равно квадрату отношения самих катетов; б) квадрат высоты равен произведению проекций катетов на гипотенузу; в) квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию этого катета на гипотенузу.

3. Пусть в точке O_1 пересекаются два серединных перпендикуляра к сторонам треугольника. Докажите, что точка O_1 : а) равноудалена от всех вершин треугольника; б) лежит на серединном перпендикуляре к третьей стороне.

4. Пусть в точке O_2 пересекаются две биссектрисы углов треугольника. Докажите, что точка O_2 : а) равноудалена от всех его сторон; б) лежит на биссектрисе третьего угла треугольника.

5. а) Докажите, что в равностороннем треугольнике точки O_1 (см. задачу 3) и O_2 (см. задачу 4) совпадают. б) Проверьте обратное утверждение.

Задачи к п. 17. 1

6. Прямые a и b пересекаются. На прямой a взяли точку K . Пусть расстояние от точки K до прямой b равно d . Где на прямой a

взять точку L , чтобы расстояние от L до b равнялось $2d$; $\frac{1}{2}d$? Где на прямой b взять точку M такую, чтобы расстояние от M до a равнялось d ; $2d$?

7. Запишите синусы углов, отмеченных на рисунке 57. Выразите с помощью синусов противолежащие отмеченным углам катеты.

8. Запишите синусы углов, отмеченных на рисунках 57, а, б. Выразите с помощью этих синусов гипотенузы соответствующих треугольников.

9. Заполните пустые места в таблице:

c	\hat{A}	\hat{B}	a	b
12	40°			
	20°		3	
		75°		1
	18°			5
8			5	

10. Угол подъема дороги составляет в среднем 2° . На какую высоту поднимется турист, пройдя 12 км?

11. Как найти площадь равнобедренного треугольника, если известны: а) основание и угол при вершине; б) боковая сторона и угол при вершине; в) высота и угол при вершине; г) высота и угол при основании? Произведите вычисления при выбранных вами данных.

12. Как найти площадь прямоугольника, если известны: а) диагональ и угол, который она составляет с большей стороной; б) диагональ и угол между диагоналями; в) бо́льшая сторона и угол между диагоналями? Произведите вычисления при выбранных вами данных.

13. В круге радиуса R проведена хорда. Она видна из центра под углом φ . На каком расстоянии от центра она находится? Какова длина хорды? Произведите вычисления при выбранных вами данных.

Задачи к п. 17.2

14. Докажите равенство прямоугольных треугольников по: а) катету и медиане к другому катету; б) катету и медиане к этому катету; в) катету и биссектрисе на другой катет; г) катету и биссектрисе на гипотенузу; д) сумме двух катетов и площади.

Выберите сами два любых элемента в прямоугольном треугольнике и попробуйте доказать равенство двух прямоугольных треугольников по этим элементам.

15. а) В равнобедренном треугольнике проведите высоты на боковые стороны. Укажите на этом рисунке все пары равных треугольников. б) Пусть в треугольнике две высоты равны. Докажите, что он равнобедренный. в) Пусть угол при основании равнобедренного треугольника равен φ , а основание равно 1. На какие по площади части разделится треугольник этими высотами?

16. В четырехугольнике все стороны равны. Из одной его вершины на две стороны (или на их продолжения) проведены перпендикуляры. а) Докажите, что эти перпендикуляры равны. б) Сформулируйте обратное утверждение. в) На какие по площади части делится четырехугольник этими перпендикулярами (лежащими в нем), если сторона четырехугольника равна 1, а один из его острых углов равен φ ?

17. Из двух противоположных вершин прямоугольника опустили перпендикуляры на одну его диагональ. а) Укажите на рисунке равные треугольники. б) Пусть диагональ составляет с большей стороной прямоугольника угол φ . Какую часть от площади прямоугольника составляют площади получившихся треугольников?

18. Докажите равенство равнобедренных треугольников по основанию и медиане к нему.

19. Докажите равенство равносторонних треугольников по высоте.

Задачи к п. 17.3

20. Мимо двух поселков проходит шоссе. Где на нем нужно сделать остановку автобуса для жителей поселков?

21. Нарисуйте треугольник ABC . Постройте точку D такую, что $DA = DC$ и $\widehat{DBA} = \widehat{DBC}$. Получилось ли у кого-нибудь так, что точка D лежит в треугольнике? Из точки D постройте перпендикуляры на прямые AB и AC . Получилось ли у кого-нибудь так, что оба эти перпендикуляра попали на стороны треугольника? Поразмышляйте над этой задачей.

22. Нарисуйте четырехугольник. а) Проверьте, есть ли такая точка, которая равноудалена от его вершин. б) Если такая точка есть, то обязательно ли она лежит в этом четырехугольнике? Может ли она лежать на его стороне? В его вершине? в) Приведите пример такого четырехугольника, для которого такая точка найдется. Может ли такой четырехугольник быть невыпуклым? г) Можете ли вы придумать способ, как быстро нарисовать четырехугольник, для которого такая точка есть, и такой, для которого ее нет?

23. A, B, C, D — четыре точки плоскости. Найдите такую точку X , что $XA < XB < XC < XD$.

24. Даны два равных отрезка AB и CD . Постройте точку X такую, что треугольники ABX и CDX равны.

25. Какой фигурой является множество точек, равноудаленных от: а) двух пересекающихся прямых; б) сторон угла; в) двух отрезков с общей вершиной?

26. Составьте задачу, аналогичную задаче 22, про четырехугольник и точку, равноудаленную от его сторон.

27. Какой фигурой является множество точек, которые: а) к одной из данных точек ближе, чем к другой; б) к одной из сторон угла ближе, чем к другой?

28. Как вы объясните, почему линия сгиба листа бумаги является отрезком?

29. Какой, по-вашему, фигурой в пространстве будет множество точек, равноудаленных от двух данных точек? Приведите соображения в пользу вашей догадки.

§ 18. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

18.1. Формулировка и доказательство теоремы синусов

Теоремой синусов называют следующее важное утверждение.

Теорема. *Во всяком треугольнике синусы углов пропорциональны противолежащим сторонам, т. е. для любого треугольника ABC имеют место равенства*

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}. \quad (1)$$

Доказательство. Проведем в треугольнике ABC высоту из вершины C ; обозначим ее h (рис. 65). Согласно определению синуса

$$\sin A = \frac{h}{b} \quad \text{и} \quad \sin B = \frac{h}{a},$$

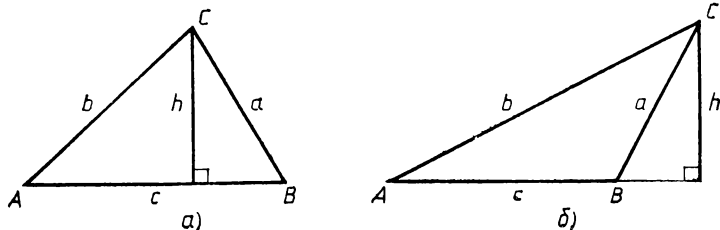


Рис. 65

т. е. $h = b \sin A$ и $h = a \sin B$. Отсюда следует, что $b \sin A = a \sin B$, т. е.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}.$$

Точно так же, проводя высоту, например, из вершины B , убедимся, что

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}.$$

Стало быть,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е. *Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства $\hat{A} = \hat{B}$ следует, что $\sin A = \sin B$, а тогда из равенства $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ вытекает, что $a = b$.

18.2. Решение треугольников по двум углам и стороне

Теорема синусов позволяет легко решить такую задачу.

З а д а ч а. *Даны сторона и два угла треугольника. Найти две другие стороны и третий угол.*

Р е ш е н и е. Возможны два случая.

С л у ч а й 1. Даны сторона (обозначим ее через a) и два прилежащих к ней угла \hat{B} и \hat{C} . Так как сумма углов треугольника равна 180° , то третий угол: $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C}$. А затем, пользуясь теоремой синусов, находим две другие стороны:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad \text{и} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}. \quad (2)$$

С л у ч а й 2. Даны сторона a и два угла: противолежащий угол \hat{A} и прилежащий угол \hat{B} . Тогда снова сначала находим третий угол: $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$, а затем по формулам (2) находим стороны b и c .

Итак, теорема синусов позволяет «решить треугольник» по двум углам и стороне, причем в обоих случаях получаем единственное решение: другие стороны и углы находятся однозначно. Это значит, что треугольник однозначно задается двумя углами и стороной, т. е. имеет место следующий признак равенства треугольников.

Теорема (признак равенства треугольников по стороне и двум углам). Если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

18.3. Практические приложения теоремы синусов

С помощью теоремы синусов решаются некоторые важные практические задачи.

Задача 1. Найти расстояние до недоступного предмета (например, задача артиллериста: найти расстояние до цели, рис. 66, а).

Решение. Пусть надо определить расстояние от данного пункта A до недоступного пункта B . Берут еще пункт C и измеряют расстояние $AC = b$, а также углы между линиями AB и AC , CB и CA .

Тогда получается геометрическая задача: в треугольнике ABC известны сторона AC и прилежащие к ней углы A , C ; найти сторону AB . Ее мы уже умеем решать (см. предыдущий пункт).

Решение. Полагаем $AB = c$, $AC = b$ (рис. 66, б). По теореме синусов

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}. \quad (3)$$

Сумма углов треугольника равна 180° . Поэтому

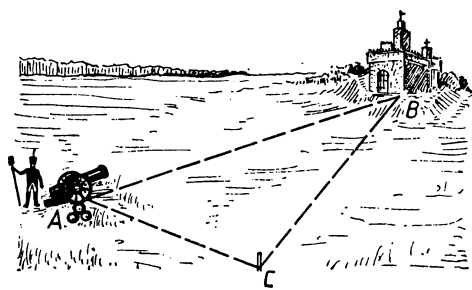
$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}).$$

И следовательно, $\sin B = \sin (A + C)$.

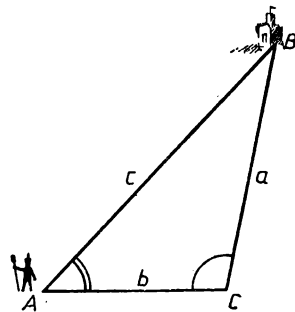
Поэтому из (3) следует: $c = b \frac{\sin C}{\sin (A + C)}$.

Задача решена.

Синусы нужных углов находят из соответствующих таблиц.



а)



б)

Рис. 66

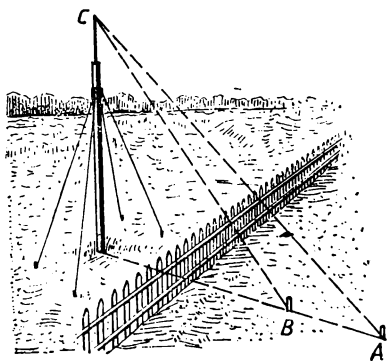


Рис. 67

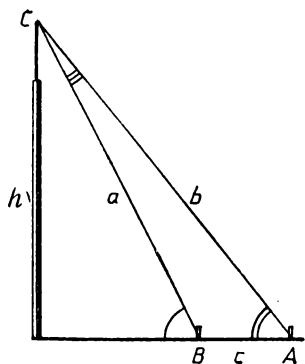


Рис. 68

Задача 2. *Определить высоту недоступного предмета (рис. 67).*

Решение. Предполагая, что есть возможность перемещаться по горизонтали в направлении к предмету, можно выбрать два пункта A и B и в каждом из них найти угол, под которым виден предмет, т. е. угол от горизонтали до линии на вершину предмета C . Так получается геометрическая задача:

В треугольнике ABC известны сторона AB , угол \hat{A} и внешний угол \hat{B} ; найти высоту, опущенную из вершины C .

Решение. Обозначим искомую высоту h и положим $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (рис. 68). Замечаем, что

$$h = a \sin B. \quad (4)$$

Поэтому надо найти a . По теореме синусов

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}, \quad a = c \frac{\sin A}{\sin C}.$$

Угол \hat{B} — внешний для треугольника ABC , и поэтому $\hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$. Отсюда

$$\hat{C} = \hat{B} - \hat{A}.$$

Таким образом,
$$a = c \frac{\sin A}{\sin (B - A)}.$$

Подставляя это в (4), получаем:

$$h = c \frac{\sin A \sin B}{\sin (B - A)}.$$

Подумайте, как, используя теорему синусов, решить такую задачу: определить ширину реки, оставаясь на одном ее берегу.

Задачи к § 18

Основные задачи

1. Углы одного треугольника соответственно равны углам другого. Докажите, что стороны этих треугольников пропорциональны.

2. Докажите, что равны: а) биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника; б) высоты на боковые стороны равнобедренного треугольника. Сформулируйте и докажите более общее утверждение.

3. Запишите теорему синусов для прямоугольного треугольника. Как с ее помощью можно решать прямоугольные треугольники? Приведите примеры.

Задачи к п. 18.1

4. а) Запишите формулу теоремы синусов в другом виде. б) Сколько можно составить пропорций из формулы теоремы синусов? Сколько из них независимы? в) Как вы объясните такую фразу: «Синусы углов треугольника пропорциональны его сторонам»? Запишите ее в виде формулы.

5. Запишите одну из пропорций из формулы теоремы синусов. Исходя из нее, запишите выражение для: а) отношения двух сторон треугольника; б) отношения синусов двух углов треугольника; в) одной из сторон треугольника; г) синуса одного из углов треугольника.

6. а) Запишите формулу теоремы синусов для треугольника PQR . б) Нарисуйте треугольник. Назовите его каким-либо образом. Из формулы теоремы синусов запишите выражение для каждой его стороны; для синуса каждого угла.

7. Углы треугольника пропорциональны числам: а) 2, 7, 9; б) 1, 2, 3. Как вычислить отношения их сторон?

8. Вычислите неизвестные элементы треугольника ABC , в котором даны: а) $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 65^\circ$, $a = 10$; б) $\hat{A} = 10^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$, $c = 2$; в) $a = 32$, $b = 42$, $\hat{A} = 40^\circ$; г) $a = 20$, $b = 10$, $\hat{A} = 30^\circ$.

9. Запишите одну из пропорций в теореме синусов. Сколько величин участвует в этой формуле? Зафиксируйте две из них. Начните изменять одну из двух оставшихся (увеличивать или уменьшать). Как будет изменяться другая? Сделайте соответствующий рисунок.

10. Как найти площадь параллелограмма, если его диагональ, равная d , составляет углы φ_1 и φ_2 со сторонами? Приведите конкретный пример.

11. Укажите, какие треугольники на рисунке 69 равны и что из этого следует.

12. Докажите, что в равных треугольниках равны соответствующие биссектрисы.

13. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на сторонах BC и BA взяты точки K и L так, что отрезок AC виден из них под одним и тем же углом. Сделайте рисунок и найдите на нем равные треугольники.

14. Два отрезка AC и BD пересекаются в точке O и делятся в ней пополам. Через нее проходит отрезок KL с концами на прямых AB и CD . Докажите, что он также делится в ней пополам.

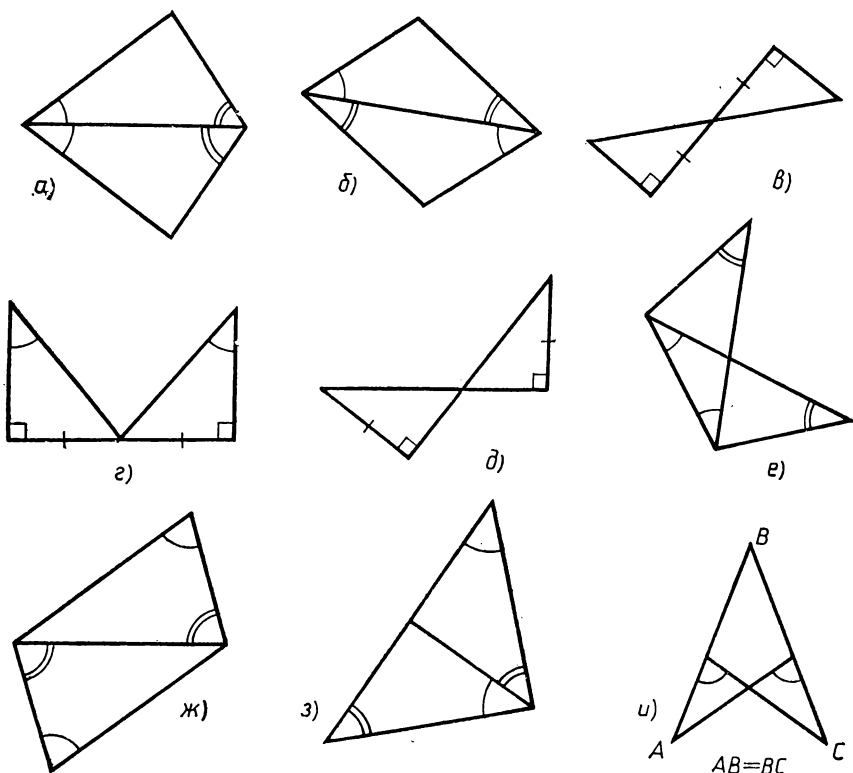


Рис. 69

15. Из вершин равностороннего треугольника ABC выходят три луча AK , BL , CM , образуя равные углы со сторонами AB , BC , CA . Докажите, что полученные в пересечении этих лучей три точки являются вершинами равностороннего треугольника.

16. На биссектрисе BL треугольника ABC нашлась такая точка, из которой его стороны AB и BC видны под равными углами. Какой это треугольник? А если такая точка нашлась на медиане BK ? На высоте BM ?

17. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC делит пополам два его угла. Будет ли она делить пополам другую его диагональ?

18. Через данную точку внутри угла проведите отрезок с концами на сторонах угла, который делится этой точкой пополам.

Задачи к п. 18.3

19. Докажите, что, находясь на земле перед домом, вы не сможете видеть два разных этажа одинаково хорошо, т. е. под равными углами (высота этажей в доме считается одинаковой).

20. Участок земли имеет форму выпуклого многоугольника. Как вы найдете его площадь, используя теорему синусов? (В задачах такого типа предполагается, что у вас есть инструмент для измерения длин, инструмент для измерения углов и тригонометрические таблицы.)

21. На холме стоит башня. Как найти ее высоту?

22. Желая узнать, далеко ли до реки, турист влез на дерево. Реку он увидел. Что ему делать дальше, чтобы вычислить расстояние до нее?

23. Из вершины триангуляционного пункта хотят измерить ширину реки. Высота пункта известна. Как это сделать?

24. Турист поднялся на скалу над берегом озера. С нее хорошо видно облако и его отражение в озере. Налюбовавшись этой картиной, он захотел узнать высоту облака. Сможет ли он это сделать?

25. Вы находитесь на прямой дороге, идущей мимо высокого здания. К основанию здания не подойти. Как можно вычислить высоту этого здания? Сделайте конкретный расчет при выбранных вами данных.

§ 19. КОСИНУС

19.1. Косинус острого угла прямоугольного треугольника

Рассмотрим какой-нибудь прямоугольный треугольник ABC (рис. 70) с катетами $a = BC$, $b = AC$ и гипотенузой $c = AB$. Как мы уже знаем, отношение $\frac{b}{c}$ является синусом угла B и зависит только от величины угла B . Но поскольку величина угла B выражается через величину угла A по формуле $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{A}$, то можно сказать, что это отношение $\frac{b}{c}$ зависит лишь от величины угла A . Для угла A отношение $\frac{b}{c}$ называется его **косинусом** и обозначается $\cos A$.

Итак, косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе:

$$\cos A = \frac{b}{c}. \quad (1)$$

Аналогично

$$\cos B = \frac{a}{c}. \quad (2)$$

Коротко о синусе и косинусе угла прямоугольного треугольника говорят так:

Синус — это отношение противолежащего катета к гипотенузе, а косинус — это отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Из формул (1) и (2) следует, что

$$a = c \cos B, \quad b = c \cos A.$$

Так как $\sin A = \frac{a}{c}$, $\sin B = \frac{b}{c}$ и $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^\circ$, то

$$\cos A = \sin (90^\circ - B) \quad \text{и} \quad \sin A = \cos (90^\circ - B). \quad (3)$$

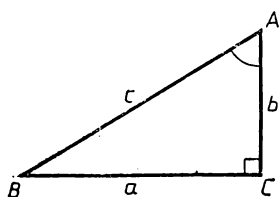


Рис. 70

Углы A и B в этом случае называются **дополнительными** (друг к другу до 90°).

В частности,

$$\begin{aligned} \cos 30^\circ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \\ &= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Теперь формулы (3) можно выразить так: *косинус угла равен синусу дополнительного угла, а синус — косинусу дополнительного угла.*

Отметим еще одно важное равенство, связывающее синус и косинус одного и того же угла.

Так как $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$ и $a^2 + b^2 = c^2$, то

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$

Принято вместо выражений $(\sin A)^2$ и $(\cos A)^2$ писать $\sin^2 A$ и $\cos^2 A$. Тогда формула (4) запишется так:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \quad (5)$$

19.2. Определение косинуса для любого угла

Сначала снова рассмотрим острый угол A (рис. 71, а). Возьмем на одной его стороне отрезок AB и построим его проекцию AC на другую сторону. Согласно данному определению

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \quad (6)$$

т. е. можно в этом случае сказать, что **косинус острого угла A равен отношению проекции AC какого-нибудь отрезка AB одной из сторон угла на другую его сторону к этому отрезку AB .**

Таким подходом мы воспользуемся и для определения косинуса прямого и тупого углов.

Если угол A прямой, то проекцией любого отрезка одной его стороны на другую сторону будет точка — вершина угла (рис. 71, б). Длина ее равна нулю, и поэтому **косинус прямого угла полагается равным нулю.** Итак, по определению

$$\cos 90^\circ = 0. \quad (7)$$

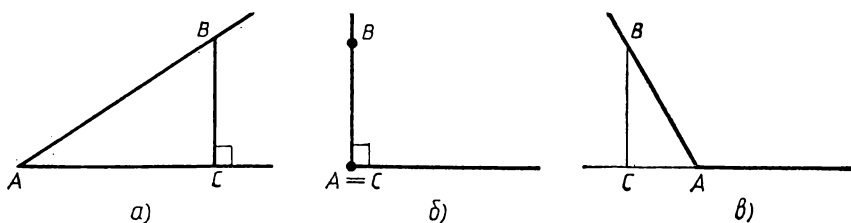


Рис. 71

Наконец, пусть угол A тупой (в частности, развернутый). Тогда проекция AC отрезка AB лежит на продолжении его стороны AB за точку A (рис. 71, в).

В этом случае косинус угла A тоже определяется как отношение AC к AB , но для тупого угла A это отношение берется со знаком «минус», т. е. косинус тупого угла отрицателен.

Итак, для тупого угла A

$$\cos A = -\frac{AC}{AB}, \quad (8)$$

т. е. косинус тупого угла A равен отношению проекции AC какого-нибудь отрезка AB одной из сторон угла на продолжение другой его стороны к отрезку AB , взятому со знаком «минус». В частности, для развернутого угла $AC = AB$ и потому из формулы (8) следует, что

$$\cos 180^\circ = -1.$$

Объединяя вместе все рассмотренные случаи, приходим к такому определению косинуса любого угла.

Если дан угол A , взят отрезок AB на одной стороне угла и AC — проекция отрезка AB на другую сторону угла (или ее продолжение, рис. 71), то

$$\cos A = \begin{cases} +\frac{AC}{AB}, & \text{когда } \hat{A} \leq 90^\circ; \\ -\frac{AC}{AB}, & \text{когда } \hat{A} > 90^\circ. \end{cases}$$

Данное определение позволяет сразу установить зависимость для косинусов смежных углов (вспомните, что синусы смежных углов равны).

Рассмотрим два смежных угла с общей вершиной A . Острый из них обозначим A , а тупой A_1 (рис. 72). Тогда по определению

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \quad \text{и} \quad \cos A_1 = -\frac{AC}{AB},$$

т. е. косинусы смежных углов равны по модулю, но противоположны по знаку. Это свойство можно выразить таким равенством:

$$\cos (180^\circ - \hat{A}) = -\cos \hat{A}. \quad (9)$$

Например,

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

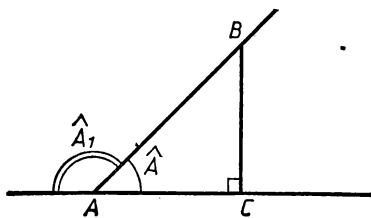


Рис. 72

$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Покажем, что и равенство (5), связывающее синус и косинус, имеет место в общем случае, а не только для острых углов. Действительно, для любого угла A (рис. 71)

$$\sin^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \text{ и } \cos^2 A = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2. \quad (10)$$

Так как треугольник ABC прямоугольный, то по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Поэтому

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = 1. \quad (11)$$

Наконец, сделаем еще одно обобщение. Если угол понимать как угол между отрезками, имеющими общий конец, то в случае, когда один из отрезков содержится в другом, естественно считать, что угол между ними равен нулю. Тогда для нулевого угла определения синуса и косинуса приведут к таким результатам: $\sin 0^\circ = 0$ и $\cos 0^\circ = 1$.

Объясните это самостоятельно. Очевидно, равенство (5) выполняется и для 0° .

19.3. Свойства косинуса и его график

Косинус, как и синус, является функцией угла, или, точнее, функцией величины угла. Отметим некоторые свойства этой функции.

- 1) Косинус любого угла не больше единицы и не меньше -1 , т. е.
- $$-1 \leq \cos A \leq 1.$$

При этом если $\cos A = -1$, то $\hat{A} = 180^\circ$ и если $\cos A = 1$, то $\hat{A} = 0^\circ$.

- 2) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

Эти два свойства уже были установлены в п. 19.2.

- 3) С возрастанием угла от 0° до 180° косинус убывает от 1 до -1 . Это значит, что если $\alpha > \beta$, то $\cos \alpha < \cos \beta$.

Доказательство. Сначала рассмотрим, как изменяется косинус, когда угол возрастает от 0° до 90° . В этом случае, если установлено в п. 19.1,

$$\cos \hat{A} = \sin(90^\circ - \hat{A}),$$

Когда \hat{A} возрастает от 0° до 90° , дополнительный угол $90^\circ - \hat{A}$ убывает от 90° до 0° . Как доказано в п. 16.6, синус такого угла при этом будет убывать от 1 до 0 (свойство 2). А значит, при возрастании угла от 0° до 90° косинус его убывает от 1 до 0.

Когда же величина угла A меняется от 90° до 180° , то величина смежного с ним угла, равная $180^\circ - \hat{A}$, изменяется от 90° до 0° и $\cos(180^\circ - \hat{A})$ в этом случае возрастает от 0 до 1. А так как

$$\cos \hat{A} = -\cos(180^\circ - A),$$

то, значит, $\cos A$ при изменении \hat{A} от 90° до 180° уменьшается от 0 до -1 . Свойство 3 полностью доказано.

4) *Значение косинуса определяет угол, т. е. из равенства $\cos A = \cos B$ следует, что $\hat{A} = \hat{B}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это свойство следует из свойства 3. Действительно, если $\hat{A} \neq \hat{B}$, то либо $\hat{A} > \hat{B}$, и тогда $\cos A < \cos B$, либо $\hat{A} < \hat{B}$, и тогда $\cos A > \cos B$. В обоих случаях допущение, что $\hat{A} \neq \hat{B}$, приводит к противоречию. Следовательно,

$$\hat{A} = \hat{B}.$$

В этом свойстве важное преимущество косинуса перед синусом. Значение синуса не определяет угол однозначно: если $\sin A = \sin B$, то возможно, что $\hat{A} \neq \hat{B}$, но $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B}$. Значение же косинуса вполне определяет угол.

Для того чтобы находить по углу значение косинуса и по значению косинуса — угол, можно воспользоваться полуокружностью. Описываем полуокружность радиусом 1 и размечаем на ней углы, как на транспортире. Тогда проекция радиуса на ограничивающий полуокружность диаметр, взятая с нужным знаком, даст значение косинуса (заметьте, что длина перпендикуляра дает значение синуса, рис. 73).



Рис. 73

Обратно, найдя по данному косинусу соответствующий отрезок диаметра, отложенный от центра, проводим перпендикуляр в его конце и находим угол. Изменяя угол, поворачивая радиус, можно проследить за изменением косинуса. В особой таблице для косинуса нет необходимости, если уже составлена таблица значений синуса, потому что для углов до 90°

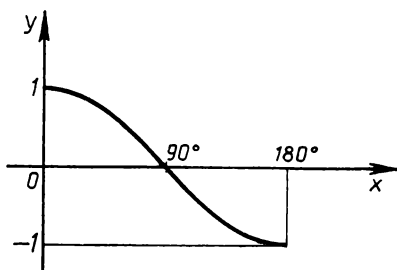


Рис. 74

$$\cos \hat{A} = \sin (90^\circ - \hat{A}),$$

а косинус для углов $\hat{A} > 90^\circ$ можно находить из равенства

$$\cos \hat{A} = -\cos (180^\circ - \hat{A}).$$

Как и для синуса, приведем график косинуса (рис. 74). При этом напомним, что

$$\begin{aligned} \cos 0^\circ &= 1, \quad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos 60^\circ &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}, \\ \cos 135^\circ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos 180^\circ &= -1. \end{aligned}$$

Задачи к § 19

Основные задачи

1. Две прямые пересекаются. На одной из них отложены равные отрезки. Из их концов на другую прямую проведены перпендикуляры. Докажите, что на другой прямой получились равные отрезки.

2. Вернитесь к задаче 1, § 17. Решите ее, используя косинус.

3. Вернитесь к задаче 2, § 17. Решите ее, используя косинус.

4. Для углов, отмеченных на рисунках 53 и 57, а, выберите прямоугольные треугольники, в которых они лежат. Укажите прилежащие им катеты. Запишите косинусы отмеченных углов,

Выразите с их помощью гипотенузы и прилежащие к этим углам катеты.

5. Как вычислить косинусы отмеченных на рисунке 56 углов?

6. Нарисуйте тупой угол и вычислите его косинус.

7. Как вычислить косинусы отмеченных на рисунке 57 углов?

8. Заполните пустые места в таблице на странице 35, используя косинус.

9. Как найти площадь равнобедренного треугольника, используя синус или косинус, если известны: а) основание и угол при вершине; б) боковая сторона и угол при вершине; в) высота и угол при вершине; г) высота и угол при основании?

10. Даны две перпендикулярные прямые. Отрезок длиной d имеет концы на этих прямых и составляет с одной из них острый угол φ . Найдите его проекции на эти прямые.

§ 20. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

В этом параграфе мы докажем последнюю из трех основных теорем о соотношениях между сторонами и углами треугольника. Для прямоугольного треугольника это соотношение даст просто теорему Пифагора. Поэтому его естественно назвать обобщенной теоремой Пифагора или сокращенно ОТП.

20.1. Обобщенная теорема Пифагора

Теорема (ОТП). *Во всяком треугольнике любая из его сторон выражается через две другие его стороны a , b и угол C между ними по формуле*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC . Для его угла C есть три возможности: 1) угол C прямой; 2) угол C острый; 3) угол C тупой. Рассмотрим эти три случая.

1) Если угол C прямой, то $\cos C = 0$ и формула (1) становится в этом случае теоремой Пифагора для прямоугольного треугольника. Именно поэтому доказываемая теорема называется обобщенной теоремой Пифагора.

2) Пусть угол C острый. В треугольнике ABC есть еще хотя бы один острый угол. Пусть это будет угол B (рис. 75). Тогда ос-

нование H высоты $AH = h$, опущенной из вершины A , лежит внутри стороны $BC = a$. Отрезок $CH = b'$ будет катетом в прямоугольном треугольнике ACH с гипотенузой $AC = b$ и прилежащим острым углом C . Поэтому

$$b' = b \cos C. \quad (2)$$

Рис. 75

По теореме Пифагора находим c^2 из другого прямоугольного треугольника ABH с катетами $AH = h$ и $BH = a - b'$. Получаем:

$$c^2 = h^2 + (a - b')^2. \quad (3)$$

Но из треугольника ACH

$$h^2 = b^2 - b'^2.$$

Подставляя это выражение для h^2 в равенство (3) и заменяя b' по формуле (2), приходим к доказываемому равенству (1):

$$c^2 = b^2 - b'^2 + a^2 - 2ab' + b'^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

3) Пусть угол C тупой. Снова проведем высоту $AH = h$ из вершины A . Теперь ее основание — точка H — лежит на продолжении стороны $BC = a$ за точку C (рис. 76). Снова обозначаем отрезок CH через b' . Тогда отношение $\frac{b'}{b}$ будет косинусом угла, смежного с углом C , т. е. $\frac{b'}{b} = \cos(180^\circ - \hat{C})$. А так как $\cos C = -\cos(180^\circ - \hat{C})$, то

$$\cos C = -\frac{b'}{b} \quad (4)$$

и

$$b' = -b \cos C. \quad (5)$$

Теперь, как и в предыдущем случае, выражаем c^2 из треугольника ABH :

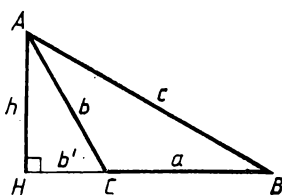
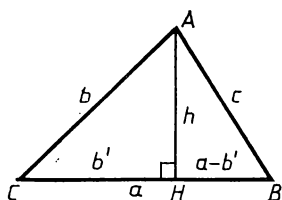
$$c^2 = h^2 + (a + b')^2 \quad (6)$$

и h^2 из треугольника ACH :

$$h^2 = b^2 - b'^2. \quad (7)$$

Из (5), (6) и (7) получаем окончательно:

Рис. 76



$$c^2 = b^2 - b'^2 + a^2 + 2ab' + b'^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Теорема доказана полностью.

З а м е ч а н и е. Обратите внимание на то, что формула (1) получается одна и та же для острого и тупого угла C , хотя промежуточные формулы (3) и (6) с проекцией b' разные: в одной стоит $-2ab'$, а в другой $+2ab'$. Общая формула (1) получилась из них благодаря удачному определению знака косинуса тупого угла.

Доказанную теорему называют еще «теоремой косинусов». Но это название, хотя и удобное своей краткостью, неудачно. По существу же данная теорема является обобщением теоремы Пифагора (а теорема Пифагора — частный случай этой теоремы). Мы ее так и будем называть — ОТП — обобщенная теорема Пифагора.

20.2. Приложение обобщенной теоремы Пифагора к решению треугольников

Из нескольких возможных случаев решения треугольников мы с помощью теоремы синусов рассмотрели один, когда заданы два угла и сторона. Ясно, что три угла не определяют треугольник: например, у двух равносторонних треугольников со сторонами a и b , $a \neq b$, все углы равны по 60° , хотя треугольники не равны. Поэтому остается еще два возможных случая, когда заданы три стороны и когда заданы две стороны и угол. В этих случаях применима ОТП. Итак, рассмотрим такие две задачи.

З а д а ч а 1. *Даны три стороны треугольника. Найти его углы.*

Р е ш е н и е. Пусть заданы стороны a, b, c треугольника ABC . Тогда из ОТП получаем, что

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad (8)$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad (9)$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (10)$$

И так как значение косинуса определяет угол, то из этих равенств угол находится однозначно.

З а д а ч а 2. *Даны две стороны и угол треугольника. Найти его третью сторону и остальные два угла.*

Р е ш е н и е. Возможны два случая этой задачи.

С л у ч а й 1. Даны две стороны a и b и угол \hat{C} между ними. Тогда по ОТП находится третья сторона c :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

и по этой же теореме из равенств (8)—(10) находятся два других угла.

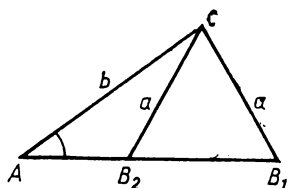


Рис. 77

С л у ч а й 2. Даны две стороны a и b и угол, противолежащий одной из этих сторон, например угол A . В этом случае ОТП применять сложно и, пользуясь теоремой синусов, находим

$$\sin B = \frac{b}{a} \sin A. \quad (11)$$

Но равенство (11), вообще говоря, определяет два различных угла B (смежных друг другу). Поэтому задача может иметь два решения (рис. 77).

После того как найдены два угла A и B , находим третий угол C :

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$$

и сторону c :

$$c = \frac{\sin C}{\sin A} a.$$

20.3. Практические применения ОТП

Рассмотрим некоторые практические задачи, в которых применяется ОТП.

З а д а ч а 1. Найти расстояние между двумя недоступными предметами при наблюдении из данной точки, располагая дальномером.

Р е ш е н и е. Пусть предметы расположены в точках A , B , а мы находимся в некоторой точке C (рис. 78). Измеряя расстояния дальномером, находим $CA = b$, $CB = a$. Измеряем угол C между CA и CB . Тогда расстояние $AB = c$ можно найти из формулы (1).

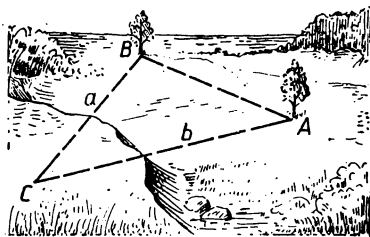


Рис. 78

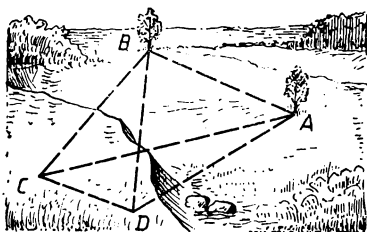


Рис. 79

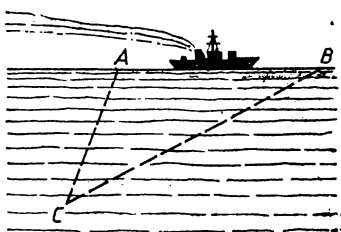


Рис. 80

Задача 2. Найти расстояние между двумя недоступными предметами, когда нет дальномера.

Решение. Пусть предметы расположены в точках A, B и видны из точек C, D (рис. 79). Измеряя CD и нужные углы, находим расстояния CA, CB , как в задаче отыскания расстояния до недоступного предмета (задача 1, п. 18.3). Измеряем также угол между CA и CB . После этого находим AB , применяя ОТП — формулу (1) — к треугольнику ABC .

Задача 3. Определить скорость и направление движения удаленного предмета (например, корабля; рис. 80). Предполагается, что мы можем измерять расстояние до предмета либо дальномером, либо средствами радиолокации, либо, если их нет, то как в задаче 2.

Решение. Пусть предмет переместился за время t из точки A в точку B так, что если скорость его движения равна v , то $AB = vt$. Пусть расстояние от места наблюдения C будет $CA = b$, $CB = a$. Измеряем также угол C между CA и CB . Тогда по ОТП — по формуле (1) —

$$(vt)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (12)$$

Отсюда находим скорость v .

Направление движения можно определить углом A между CA и AB . Угол A противолежит стороне a ; поэтому, полагая $AB = c$, получим согласно ОТП $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Отсюда $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$

причем $c = AB = vt$ находим из формулы (12).

Задача 4. Определить угол, не имея прибора для измерения углов.

Решение. Пусть из точки C исходят два отрезка, между которыми надо найти угол (рис. 81). Отложим на этих отрезках равные

отрезки $CA = CB = a$. Получаем равнобедренный треугольник; в нем $b = a$. Измеряем его основание c — расстояние между точками A , B . Из формулы (10), поскольку $a = b$, находим:

$$\cos C = \frac{2a^2 - c^2}{2a^2} = 1 - \frac{c^2}{2a^2}. \quad (13)$$

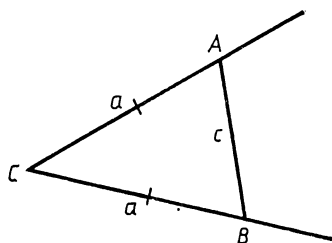


Рис. 81

Во многих задачах нужно знать не сами углы, а их синусы или косинусы. Если мы нашли $\cos C$, то находим синус: $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$. (Выведите формулу для $\sin C$ из (10).)

Задачи к § 20

Основные задачи

1. Возьмите квадрат большей стороны треугольника и сумму квадратов двух его меньших сторон. Сравнив эти две величины между собой, можно установить вид треугольника по его углам. Как?

2. Длины всех сторон треугольника умножили на одно и то же положительное число. Могут ли полученные числа быть длинами сторон какого-либо треугольника? Можно ли, зная вид (по углам) данного треугольника, установить вид нового треугольника?

3. В треугольнике известны все стороны. Как вычислить длину отрезка: а) соединяющего его вершину с данной точкой внутри противоположной стороны; б) соединяющего две данные точки внутри его сторон? Решив задачу а), получите выражение для медианы и биссектрисы угла треугольника. Решив задачу б), получите выражение для средней линии треугольника.

4. Докажите, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Докажите обратное утверждение.

5. Напишите обобщенную теорему Пифагора для стороны a треугольника ABC . Выразите из полученной формулы:

а) $\cos A$; б) $b^2 + c^2$; в) b^2 ; г) $b \cdot c$; д) b ; е) c .

6. Две стороны треугольника равны 4 и 5. а) Пользуясь ОТП, запишите выражение для третьей его стороны. б) На основании ОТП установите, в каких границах лежит его третья сторона. А как это сделать без ОТП?

7. Выберите три числа так, чтобы они могли быть длинами сторон треугольника. Вычислите углы этого треугольника.

8. Стороны треугольника равны 4, 5, 6. а) Определите его вид (по углам). б) Вычислите его наибольшую медиану. в) Вычислите его наименьшую биссектрису. г) Какого вида будет треугольник, составленный из его средних линий?

9. В равнобедренном треугольнике известны длины всех сторон. Из вершин основания проведены к противоположным сторонам: а) медиана; б) биссектрисы; в) высоты. Как найти расстояния между их концами? Выберите сами числовые данные и получите результат. Составьте и решите сами такую же задачу для любого треугольника.

10. Известны три стороны треугольника. Как найти проекцию одной из них на другую? Выберите сами числовые данные и получите результат.

11. В круге радиуса R проведены через одну точку окружности две хорды длины d . Как узнать, какой угол они составляют между собой?

§ 21. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

21.1. Тангенс и котангенс

Начнем с одной практической задачи: как измерить высоту столба, вышки или мачты по длине их тени (рис. 82)? Будем, кроме того, предполагать, что мы умеем измерять углы, в частности можем найти угол, под которым виден измеряемый предмет из конца его тени (рис. 83).

С точки зрения геометрии мы получили такую задачу: найти катет $BC = a$ прямоугольного треугольника, зная его катет $AC = b$ и угол A . Мы уже решали подобные задачи о прямоугольных треугольниках. Вспомним, что

$$\frac{BC}{AB} = \sin A \text{ и } \frac{AC}{AB} = \cos A.$$

Поэтому

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\cos A},$$

т. е.,

$$BC = AC \cdot \frac{\sin A}{\cos A}. \quad (1)$$



Рис. 82

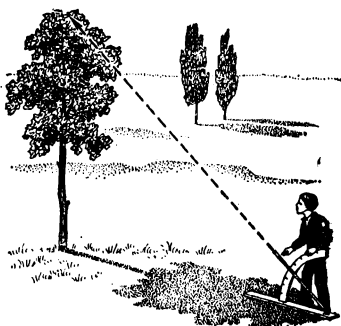


Рис. 83

В равенство (1) входит отношение двух функций угла A — синуса и косинуса. Оно или обратное ему отношение появляются очень часто при решении самых разнообразных задач, и поэтому их рассматривают как еще две функции угла — **тангенс** и **котангенс**.

Тангенсом угла называется отношение синуса угла к его косинусу. Тангенс обозначается символом tg , так что по определению

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}.$$

Для угла $\hat{A} = 90^\circ$ тангенс не определен, так как $\cos 90^\circ = 0$ и отношение $\frac{\sin A}{\cos A}$ при $\hat{A} = 90^\circ$ теряет смысл.

Котангенсом угла называется отношение косинуса к синусу. Котангенс обозначается символом ctg , так что

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

Котангенс определен для всех углов A , кроме $\hat{A} = 0^\circ$ и $\hat{A} = 180^\circ$. Котангенс и тангенс связаны равенством

$$\operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$$

при всех \hat{A} , кроме $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{A} = 0^\circ$ и $\hat{A} = 180^\circ$.

В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $a = BC$ и $b = AC$ (рис. 84)

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A, \quad \text{и}$$

потому

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

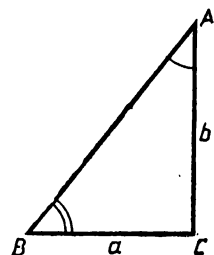


Рис. 84

В частности, равенство (1), дающее решение рассмотренной нами задачи о нахождении высоты предмета по его тени, теперь запишется так: $a = b \operatorname{tg} A$.

Итак, тангенс угла в прямоугольном треугольнике есть отношение противолежащего катета к прилежащему, а котангенс, наоборот, — прилежащего к противолежащему. Так как для острых углов

$$\sin \hat{A} = \cos (90^\circ - \hat{A}) \quad \text{и} \quad \cos \hat{A} = \sin (90^\circ - \hat{A}),$$

то

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \operatorname{ctg} (90^\circ - \hat{A}) \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \hat{A} = \operatorname{tg} (90^\circ - \hat{A}) \quad \text{при} \quad \hat{A} < 90^\circ.$$

В заключение выпишем формулы, связывающие стороны прямоугольного треугольника и функции одного из острых углов:

$$\begin{aligned} a &= c \sin A, & b &= c \cos A, \\ a &= b \operatorname{tg} A, & b &= a \operatorname{ctg} A. \end{aligned}$$

21.2. Общее понятие о тригонометрии

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются **тригонометрическими функциями**.

Тригонометрией называется раздел геометрии, в котором геометрические фигуры, прежде всего треугольники, изучаются с помощью тригонометрических функций, а также исследуются и сами эти функции. Все, чем мы занимались, начиная с того, как ввели понятие о синусе, относилось к тригонометрии. Главную задачу тригонометрии составляет решение треугольников. Мы им уже занимались в пп. 17.1, 18.2, 20.2.

Решение треугольников состоит в определении всех сторон и углов треугольника по заданным углам и сторонам или по каким-либо другим «элементам» (площадь, медианы и т. п.). При этом имеются в виду численные значения длин сторон и мер углов, так же как численные значения других «элементов». Задача состоит, стало быть, в том, чтобы выразить одни величины через другие и тем самым указать способ вычисления одних величин через другие. Так, например, катет a прямоугольного треугольника с данным углом A и гипотенузой c можно найти из формулы $a = c \sin A$.

Тригонометрия — «измерение треугольников» — развивалась прежде всего в связи с потребностями астрономии, географии, на-

вигации. Поэтому ее зачатки были уже в Древнем Вавилоне, где астрономия получила значительное развитие. В знаменитом труде греческого ученого Птолемея «Альмагест» (II в. н. э.), где изложена античная геоцентрическая система мира, содержатся элементы не только тригонометрии на плоскости, но и сферической тригонометрии. В Древней Греции вместо синуса угла рассматривали длину хорды, соответствующей удвоенному углу между радиусами единичной окружности (рис. 85), что по существу то же самое, так как синус равен половине такой хорды. Первые тригонометрические таблицы хорд были составлены Гиппархом во II в. до н. э. Синус и косинус появляются в астрономических сочинениях индийских ученых в IV—V вв., а тангенс и котангенс — в трудах арабских ученых IX—X вв. В частности, тангенс появился в связи с задачей определения высоты Солнца по длине тени, решение которой необходимо при изготовлении солнечных часов.

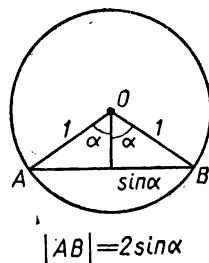


Рис. 85

Выделение тригонометрии в специальный раздел теоретической математики связано с именем выдающегося персидского ученого Насирэддина Туси (1201—1274), а в Европе первое изложение тригонометрии было дано в XV в. немецким математиком Региомontanом (1436—1476). Современный вид тригонометрия получила в работах крупнейшего математика XVIII в. Л. Эйлера (1707—1783).

Обобщенная теорема Пифагора доказана (без употребления понятия косинуса, а с заменой его проекцией одной из сторон треугольника на другую сторону) уже в «Началах» Евклида.

Теорема синусов была получена выдающимся среднеазиатским ученым Бируни в XI в.

21.3. Тригонометрические формулы

Мы уже получили ряд тригонометрических формул. Напомним их.

1. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.
2. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.
3. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
4. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ (для $\alpha \leq 90^\circ$).
5. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ (для $\alpha \leq 90^\circ$).
6. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
7. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Задачи к § 21

Основные задачи

1. Докажите, что:

а) $\operatorname{tg} \varphi \geq \sin \varphi$, $\varphi < 90^\circ$; б) $\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi = 1$, $\varphi \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$.

2. Докажите, используя тангенс, что квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведенной на гипотенузу, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.

3. Запишите тангенсы углов, отмеченных на рисунках 53 и 57, а. Запишите с их помощью противолежащие этим углам катеты; прилежащие к этим углам катеты. Прodelайте такую же работу с котангенсами этих углов.

4. Как вычислить тангенсы и котангенсы углов, отмеченных на рисунке 56, г?

5. Нарисуйте тупой угол и вычислите его тангенс и котангенс.

6. Какие вы сделаете построения на рисунке 56, а, б, в, д, чтобы найти тангенс и котангенс отмеченных углов?

7. Вычислите тангенс и котангенс таких углов: 30° , 45° , 60° , 120° , 135° , 150° .

8. Докажите, что: а) $\operatorname{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$; б) $\operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$.

9. Заполните пустые места в таблице на странице 35, используя тангенс.

10. Как найти: а) углы треугольника, зная его высоту на некоторую сторону и проекции на эту сторону двух других сторон; б) угол между диагоналями прямоугольника, если известны его стороны; в) углы равнобедренного треугольника, если известны его площадь и основание? Выберите сами числовые данные и вычислите искомый угол.

11. Во сколько раз одна диагональ ромба может быть больше другой его диагонали?

12. При каких значениях углов: а) $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \varphi$; б) $\operatorname{tg} \varphi > \operatorname{ctg} \varphi$; в) $\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{ctg} \varphi$? Рассмотрите отдельно случай, когда угол острый и тупой.

13. Как найти: а) подъем лестницы; б) среднюю крутизну склона?



Рис. 86

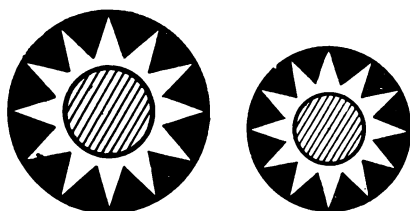


Рис. 87

§ 22. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Вообще, одна фигура называется **подобной** другой, если все ее линейные размеры в одно и то же число раз больше или меньше, чем соответствующие размеры другой фигуры. Например, при увеличении фотографии получается подобная ей фотография (рис. 86). Можно сказать также, что подобные фигуры имеют одинаковую форму, но различные размеры (рис. 87).

В этом параграфе мы рассмотрим простейший случай подобия фигур — подобные треугольники. Любые подобные фигуры будут рассмотрены в курсе VIII класса.

22.1. Определение подобия треугольников

Два треугольника называются **подобными**, если все стороны одного из них в одно и то же число раз длиннее (или короче) сторон другого, т. е. **треугольники подобны, если их соответственные стороны пропорциональны**. Подробнее: два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 88) со сторонами $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $a_1 = B_1C_1$, $b_1 = A_1C_1$, $c_1 = A_1B_1$ подобны, если можно сопоставить их стороны так, что отношения соответствующих сторон равны, т. е.

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}. \quad (1)$$

Если эти отношения обозначить через k , то получим, что

$$a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc. \quad (2)$$

Число $k > 0$ называется **коэффициентом подобия**. Говорят, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k . Подобие треугольников обозначают так:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC.$$

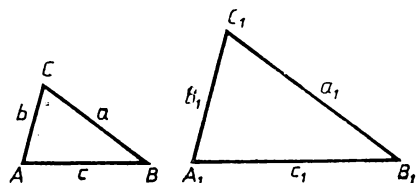


Рис. 88

Если треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k , то треугольник ABC также подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, причем в этом случае коэффициент подобия равен $\frac{1}{k}$, так как из равенств (2) следуют равенства

$$a = \frac{1}{k}a_1, \quad b = \frac{1}{k}b_1, \quad c = \frac{1}{k}c_1. \quad (3)$$

Если $k = 1$, то треугольники равны, т. е. *равенство — частный случай подобия*.

22.2. Равенство углов подобных треугольников

Т е о р е м а (об углах подобных треугольников). *У подобных треугольников соответственные углы равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия k . Тогда выполнены равенства

$$a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad c_1 = kc. \quad (4)$$

Докажем, например, что углы C и C_1 равны. По ОТП

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (5)$$

и

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \cos C_1. \quad (6)$$

Подставив в (6) выражение для a_1, b_1, c_1 из (4), получим:

$$k^2c^2 = k^2a^2 + k^2b^2 - 2k^2ab \cos C_1. \quad (7)$$

Сократив в (7) обе части равенства на k^2 , получим.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C_1. \quad (8)$$

Поэтому и $\cos C$, и $\cos C_1$ из (5) и (8) выражаются одинаково через a, b, c , т. е.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{и} \quad \cos C_1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (9)$$

Поэтому $\cos C = \cos C_1$. Из равенства косинусов следует равенство углов, т. е. $\hat{C} = \hat{C}_1$.

Точно так же доказывается, что $\hat{A} = \hat{A}_1$ и $\hat{B} = \hat{B}_1$. ■

22.3. Признаки подобия треугольников

Теорема, обратная теореме о равенстве углов подобных треугольников, является одним из двух признаков подобия треугольников.

Т е о р е м а (*первый признак подобия треугольников*). *Если у двух треугольников углы соответственно равны, то треугольники подобны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны соответственно углы: $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$, $\hat{C} = \hat{C}_1$.

По теореме синусов $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, т. е.

$$\sin A = pa, \quad \sin B = pb, \quad \sin C = pc, \quad (10)$$

где p — некоторое число.

Точно так же, применив теорему синусов к треугольнику $A_1B_1C_1$, получим, что

$$\sin A_1 = qa_1, \quad \sin B_1 = qb_1, \quad \sin C_1 = qc_1. \quad (11)$$

Из равенства углов следует равенство их синусов. Поэтому

$$\sin A = \sin A_1, \quad \sin B = \sin B_1, \quad \sin C = \sin C_1, \quad \text{т. е.}$$

$$pa = qa_1, \quad pb = qb_1, \quad pc = qc_1. \quad (12)$$

Из равенств (12) вытекает, что $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$,

т. е. треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. Теорема доказана.

Сумма углов треугольника равна 180° . Поэтому если даны два угла треугольника, то третий его угол уже определен. Следовательно, доказанную теорему можно выразить так.

Т е о р е м а (*вторая формулировка первого признака подобия треугольников*). *Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Т е о р е м а (*второй признак подобия треугольников*). *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

$$a_1 = ka, \quad b_1 = kb, \quad \hat{C}_1 = \hat{C}.$$

По обобщенной теореме Пифагора

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \cos C_1, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\text{А так как } a_1 = ka, \quad b_1 = kb \text{ и } \cos C_1 = \cos C,$$

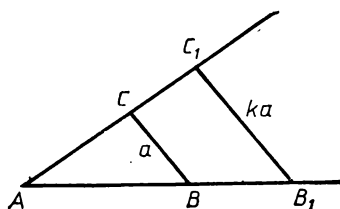


Рис. 89

то

$$\begin{aligned} c_1^2 &= k^2 a^2 + k^2 b^2 - 2k a k b \cos C = \\ &= k^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos C) = k^2 c^2. \end{aligned}$$

Так как $c_1^2 = k^2 c^2$, то $c_1 = kc$ и, стало быть, все стороны треугольников ABC и AB_1C_1 пропорциональны. Эти треугольники подобны. ■

С л е д с т в и е. Для всякого

треугольника существует подобный ему треугольник с любым коэффициентом подобия.

Доказательство. Пусть даны треугольник ABC и число $k > 0$. Возьмем на лучах AB и AC такие точки B_1 и C_1 , что $AB_1 = kAB$, $AC_1 = kAC$ (рис. 89). Тогда по предыдущей теореме треугольник AB_1C_1 будет подобен данному с коэффициентом подобия k . ■

22.4. Приложения теорем о подобии треугольников

1. Признаки подобия прямоугольных треугольников

Следствиями признаков подобия треугольников являются такие признаки подобия прямоугольных треугольников.

1) *Прямоугольные треугольники, имеющие равные острые углы, подобны.*

2) *Прямоугольные треугольники подобны, если их катеты пропорциональны.*

3) *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.*

2. Соответственные отрезки подобных треугольников

Соответственные отрезки в подобных треугольниках относятся как соответственные стороны, т. е. их отношение равно коэффициенту подобия. Такими отрезками служат высоты, медианы, биссектрисы и т. п.

Докажем это утверждение для высот подобных треугольников. Для других отрезков доказательства проведите самостоятельно.

Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия k . Проведем в этих треугольниках высоты AD и A_1D_1 (рис. 90). Так как в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы B и B_1 равны, то углы при вершинах B и B_1 равны и в прямоугольных треугольниках ABD и $A_1B_1D_1$. Поэтому треугольник $A_1B_1D_1$ подо-

бен треугольнику ABD (по равенству острых углов) и

$$\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{A_1B_1}{AB} = k,$$

что и требовалось доказать.

3. Площади подобных треугольников

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия k . Тогда, как доказано, отношение их соответственных высот A_1D_1 и AD также равно k . Поэтому $A_1D_1 = kAD$ и $B_1C_1 = kBC$. Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2}B_1C_1 \cdot A_1D_1}{\frac{1}{2}BC \cdot AD} = \frac{kBC \cdot kAD}{BC \cdot AD} = k^2,$$

что и требовалось доказать.

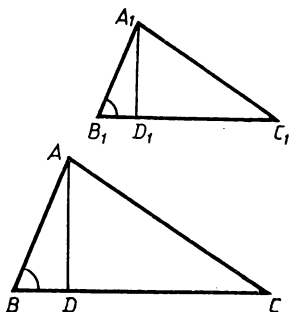


Рис. 90

22.5. Практические применения подобия треугольников

1. Делительный циркуль

Делительный циркуль — это прибор для построения долей данного отрезка. Он состоит из двух одинаковых стержней — ножек с заостренными концами — и винта, входящего в прорезы, сделанные в ножках (рис. 91). Передвигая винт по прорезям, можно изменять отношение «плеч» — частей, на которые разделены ножки. По краям прорезей отмечены деления с указанием отношения плеч. Установив одни острия в концах данного отрезка AB , передвигают винт так, чтобы на обеих ножках отметилась нужная доля $k = \frac{m}{n}$. Тогда другие острия окажутся концами отрезка $A_1B_1 = kAB$. Остается только отложить этот отрезок там, где нужно.

Докажите сами, что получается отрезок, равный kAB .

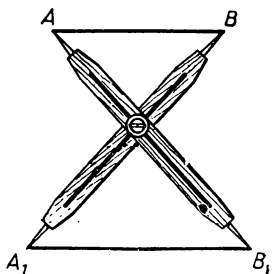


Рис. 91

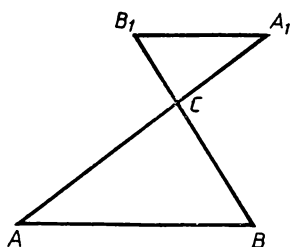
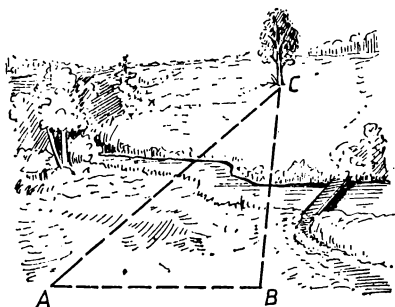
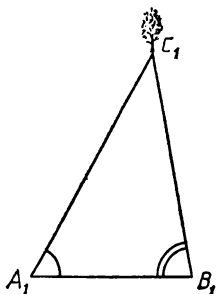


Рис. 92



а)



б)

Рис. 93

Если точка C в центре винта, то имеем треугольники ABC и A_1B_1C . Стороны треугольника A_1B_1C служат продолжениями сторон AC и BC , как на рисунке 92.

2. Графическое решение задач

Подобие треугольников имеет громадное практическое значение для изображения предметов, для моделирования и для графического решения задач. Графическое решение—это решение посредством чертежа. Рассмотрим простой пример. Мы уже решали задачу: определить расстояние до недоступного предмета. Решение было получено с помощью теоремы синусов. Теперь дадим ее графическое решение. Уточним условия.

Задача. Найти расстояние от пункта A до предмета C , если C виден из A , но недоступен (рис. 93).

Решение. Выбираем пункт B , из которого также видим предмет C (рис. 93, а). Измеряем расстояние AB и углы \hat{A} и \hat{B} между AB и линиями AC , BC (линии визирования из A и B на предмет C).

Делаем чертеж (рис. 93, б).

Проводим отрезок A_1B_1 и от его

концов откладываем в одну сторону углы, равные \hat{A} и \hat{B} . Получаем треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC . Значит, стороны этих треугольников пропорциональны:

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Расстояние AB измерено. Отрезки A_1C_1 и A_1B_1 можно измерить на чертеже в любой единице, так как от ее выбора их отношение никак не зависит. Поэтому из написанной формулы находим расстояние AC . Задача решена.

З а м е ч а н и е. Можно не измерять углы A и B , а поступить следующим образом. Прикрепить кнопками лист бумаги на горизонтальной дощечке, начертив на нем отрезок A_1B_1 . Перенеся дощечку в пункт A , ориентировать отрезок A_1B_1 на пункт

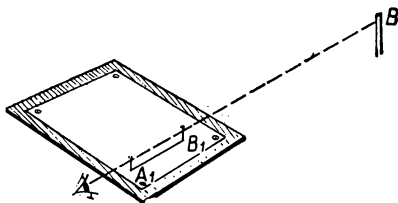


Рис. 94

В. Это можно сделать следующим образом. Воткнуть булавки в точки A_1 и B_1 и повернуть дощечку так, чтобы при взгляде вдоль A_1B_1 булавки совпали друг с другом и с предметом B (рис. 94). Потом так же фиксируем направление на предмет C , втыкая булавку на линии AC . Так отметим угол A . Потом таким же путем отмечаем угол B и получаем треугольник $A_1B_1C_1$.

Другие задачи, решенные раньше с помощью теоремы синусов и ОТП, можно решать аналогично. Рассмотрите сами такие их решения.

Задачи к § 22

Основные задачи

1. Нарисуйте отрезок AB . а) Пусть на нем взята точка C так, что $AC : CB = 3 : 2$. Чему равны отношения $AC : AB$ и $BC : AB$? б) Пусть на AB взята точка C так, что $AC : AB = 5 : 11$. Чему равны отношения $BC : AB$ и $BC : AC$? в) Пусть на AB точка C взята так, что $AC : AB = \lambda$. Чему равны отношения $BC : AB$ и $AC : BC$?

Ответьте на те же вопросы, если точка C берется на луче AB , на прямой AB .

2. а) Вспомните определение равных треугольников. Замените в этом определении равенство треугольников на их подобие, а равенство отрезков на их пропорциональность. Будет ли полученное утверждение верным? б) Вспомните признаки равенства треугольников. В их формулировках замените равенство треугольников на их подобие, а равенство отрезков на их пропорциональность. Будут ли полученные утверждения верными?

3. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

4. В треугольнике проведена средняя линия. Докажите, что она отсекает от него треугольник, подобный данному.

5. На луче с вершиной O отложили последовательно отрезки $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4$ и т. д. Из точек A_1, A_2, A_3 и т. д. в одну сторону провели перпендикуляры A_1B_1, A_2B_2 и т. д. так, что они пропорциональны соответственным отрезкам данной прямой, т. е.

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} = \dots$$

Как, по-вашему, расположены точки B_1, B_2, B_3, \dots ? Как вы это докажете?

6. Из точки O выходят три луча: a, b, c . Их продолжениями за точку O являются соответственно лучи a_1, b_1, c_1 . На лучах a, b, c взяты точки A, B, C (соответственно). На лучах a_1, b_1, c_1 взяты точки A_1, B_1, C_1 (соответственно). При этом $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC}$. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC .

Задачи к п. 22.1

Задачи на пропорциональные отрезки

7. а) Нарисуйте три отрезка с длинами 3, 4 и 6. Для того чтобы получить пропорциональные отрезки, нужен четвертый отрезок. Какой может быть длина этого четвертого отрезка? Нарисуйте тот из них, который имеет наибольшую длину. б) Нарисуйте сами два произвольных отрезка. Нарисуйте еще два так, чтобы все четыре отрезка оказались пропорциональными. (Рисовать пропорциональные отрезки можно по-всякому, но интереснее рисовать их катетами прямоугольных треугольников с общим острым углом. Тогда можно будет установить закономерность в их расположении.)

8. Отрезки a_1, b_1 пропорциональны отрезкам a, b . Пусть $a_1 = ka, b_1 = kb$. Какие пропорции можно составить из этих равенств?

9. Отрезки a, b пропорциональны отрезкам c, d . При этом $a = kc, b = kd$. Докажите, что: а) $\frac{a+b}{c+d} = k$; б) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; в) $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$. Как обобщить эти равенства, если число пропорциональных отрезков станет больше?

10. Нарисуйте отрезок AB . Пусть точка C делит его в отношении 3 : 2, а точка D — в отношении 2 : 3, считая от A . Докажите, что $AC = BD, AD = BC$. Составьте и решите такую же задачу в общем случае.

11. Нарисуйте прямоугольный треугольник, а в нем проведите

перпендикуляр на гипотенузу. Укажите на этом рисунке пропорциональные отрезки.

12. Нарисуйте острый угол. На одной из его сторон взяты отрезки AB и BC . Из точек A , B , C проведены перпендикуляры на другую сторону угла. Укажите на этом рисунке пропорциональные отрезки.

13. Нарисуйте острый угол. Отметьте точку на одной из его сторон. Из нее опустите перпендикуляр на другую сторону, а из полученной точки опустите перпендикуляр на первую сторону. Повторите эту операцию. Укажите пропорциональные отрезки на этом рисунке.

14. а) Федя рисует треугольник и любую его сторону моментально делит на части, пропорциональные двум другим его сторонам. Как? б) Вася в свою очередь рисует прямоугольный треугольник и гипотенузу моментально делит на части, пропорциональные квадратам его катетов. Как?

15. Докажите, что две стороны треугольника и две высоты, проведенные к ним, являются пропорциональными отрезками.

16. Могут ли стороны четырехугольника быть пропорциональными отрезками?

Задачи на определение подобных треугольников

17. Нарисуйте $\triangle ABC$. а) На лучах AB и AC постройте точки B_1 и C_1 такие, что $AB_1 = 2AB$, $AC_1 = 2AC$. Докажите, что $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$. б) Объясните, почему $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$. С каким коэффициентом подобия? в) Как, действуя указанным способом, получить треугольник, подобный треугольнику ABC , с другим коэффициентом подобия?

Докажите, что все треугольники, полученные таким способом, подобны.

18. Нарисуйте треугольник. Постройте треугольник, ему подобный. Постройте треугольник, равный второму треугольнику. Объясните, почему первый и третий треугольники подобны.

19. Нарисуйте треугольник. а) Отметьте произвольно точку и постройте треугольник, подобный данному, у которого одна из вершин лежит в данной точке. б) Нарисуйте любую прямую и постройте треугольник, подобный данному, у которого одна из сторон лежит на этой прямой. в) Нарисуйте любой отрезок. Сможете ли вы

построить треугольник, подобный данному, стороной которого является этот отрезок?

20. Нарисуйте равносторонний треугольник. Постройте треугольник, подобный ему. Объясните, почему он будет равносторонним. Решите аналогичную задачу про равнобедренный треугольник.

21. Нарисуйте треугольник. Проведите в нем средние линии. Сколько треугольников, подобных данному, есть на рисунке?

22. Объясните, почему подобны все равносторонние треугольники. Подобны ли любые два равнобедренных треугольника?

23. Пусть $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ (вершине A соответствует вершина A_1 , вершине B — вершина B_1 , вершине C — вершина C_1). а) Укажите в них соответственные стороны. б) Запишите отношения соответственных сторон. в) Запишите все пропорции, составленные из четырех сторон этих треугольников, в которых есть сторона AB ; сторона B_1C_1 .

24. Из точки A выходит три отрезка AB , AC , AD . Точки B_1 , C_1 , D_1 соответственно их середины. Объясните, почему $B_1C_1 : BC = C_1D_1 : CD = B_1D_1 : BD$.

25. Нарисуйте треугольник. Постройте второй треугольник, подобный данному, с коэффициентом подобия 3. Постройте третий треугольник, подобный второму, с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

Объясните, почему третий треугольник подобен первому. С каким коэффициентом подобия? Укажите их соответственные вершины и стороны.

26. Даны три треугольника. Второй подобен первому с коэффициентом подобия k_1 , третий подобен первому с коэффициентом подобия k_2 . Объясните, почему подобны второй и третий треугольники. С каким коэффициентом подобия?

Задачи к п. 22.2

27. Нарисуйте треугольник. Постройте треугольник, подобный ему. Укажите равные углы этих треугольников.

28. Нарисуйте треугольник. Проведите в нем средние линии. Возьмите любую пару подобных треугольников. Укажите их равные углы.

29. $\triangle PQR \sim \triangle KLM$, $\hat{K} = 30^\circ$, $\hat{L} = 40^\circ$. Можете ли вы установить, чему равен угол \hat{R} ?

30. Каким по виду будет треугольник, подобный данному, если данный треугольник: а) прямоугольный; б) остроугольный; в) тупоугольный?

31. Нарисуйте треугольник ABC . Прямая, пересекающая его стороны, отсекает от него треугольник ADM , подобный данному. Какие равенства углов вы можете записать из этого рисунка?

32. Верно ли утверждение: «Два угла равны, если, взяв пропорциональные отрезки на их сторонах, мы получим пропорциональные им поперечины?»

Задачи к п. 22.3

Задачи к первому признаку подобия треугольников

33. Нарисуйте отрезок AB . Через его внутреннюю точку проходит переменная прямая x . Докажите, что отношение $|Ax| : |Bx|$ является постоянным.

34. Чертежный угольник есть у вас и у вашего соседа. Подобны ли эти фигуры?

35. Нарисуйте треугольник. Отметьте точку на одной из его сторон. Проведите через нее прямую, отсекающую от данного треугольника подобный ему треугольник. Сколько вы провели таких прямых?

36. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). С центром в точке A проведите дугу окружности радиусом AC . Пусть она пересекает луч CB в точке D . а) Докажите, что треугольник ACD подобен треугольнику ABC . б) Этот полученный треугольник будет больше или меньше данного? в) Пусть в данном треугольнике будут известны CD и DB . Сможете ли вы найти AC ?

37. Перпендикулярно стороне AB треугольника ABC через вершину A провели прямую, через B провели прямую, перпендикулярную BC , через C — прямую, перпендикулярную CA . Докажите, что эти прямые ограничивают треугольник, подобный данному. (Значит, подобный треугольник можно построить угольником.)

38. Внутри угла AOB провели луч с вершиной в точке O . По нему от вершины O движется точка X . Докажите, что отношение

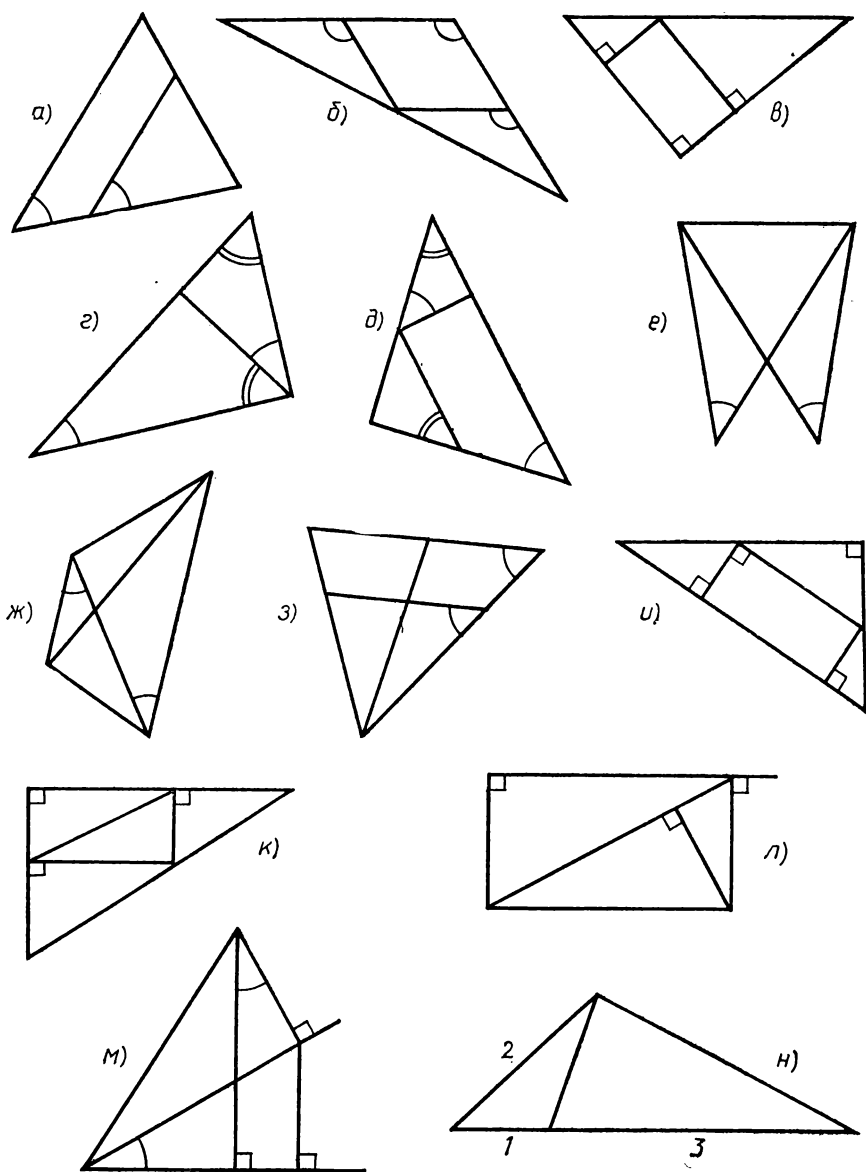


Рис. 95

расстояний от нее до сторон угла постоянно. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

39. Укажите пары подобных треугольников на рисунке 95.

40. Найдите, чему равен неизвестный отрезок на рисунке 96.

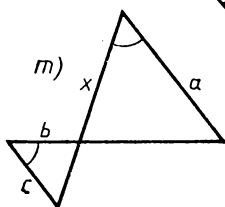


Рис. 96

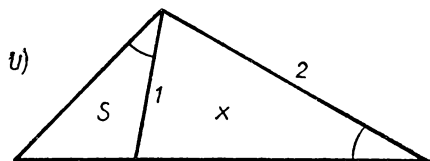
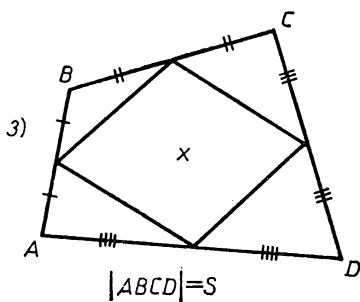
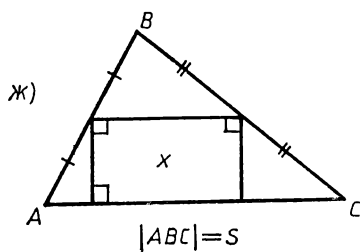
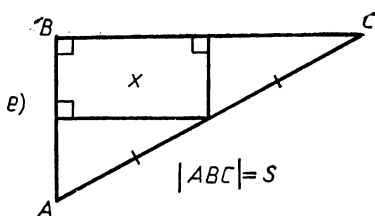
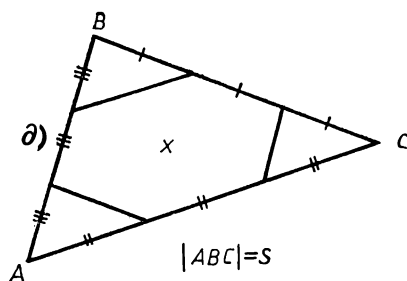
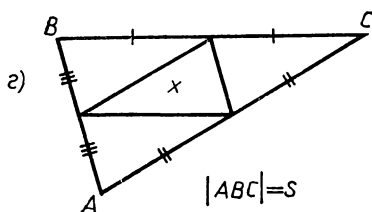
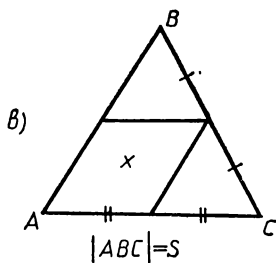
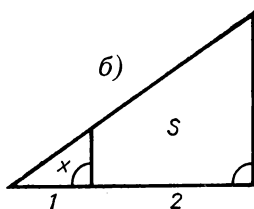
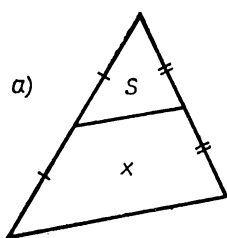


Рис. 97

41. Сравните площадь данной фигуры и искомую площадь на рисунке 97.

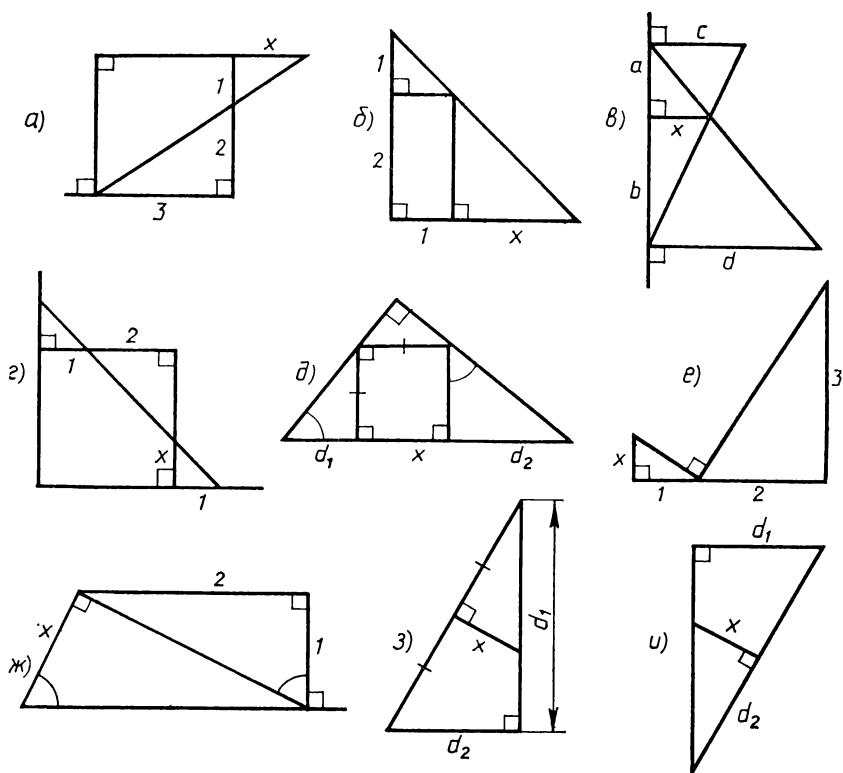


Рис. 98

42. Из точки A на стороне треугольника проведите перпендикуляры к двум другим его сторонам. Основания этих перпендикуляров B и C соедините отрезком. Может ли треугольник ABC быть подобным данному?

43. Чему равна длина неизвестного отрезка на рисунке 98?

44. Как найти длины неизвестных отрезков на рисунке 99?

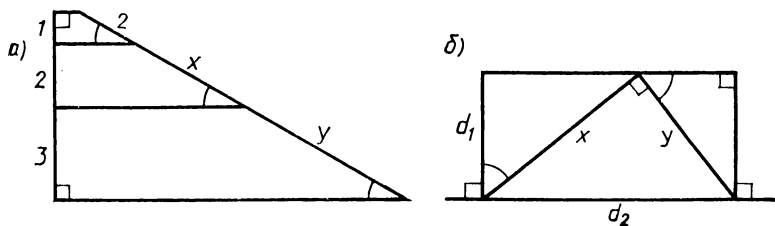


Рис. 99

Задачи на второй признак подобия треугольников и по всем теоремам

45. Вычислите неизвестную длину отрезка на рисунке 100.

46. В треугольнике ABC $|AC| = 3, |AB| = 4$. На стороне AC отложили точку K такую, что $|AK| = 2$. Теперь на стороне AB мы хотим отложить такую точку M , чтобы треугольник AKM был подобен треугольнику ABC . На каком расстоянии от A будет находиться такая точка M ?

47. Сформулируйте и докажите признаки подобия равнобедренных треугольников.

48. В треугольнике ABC провели высоты AK и CM на его стороны. Докажите, что треугольник BKM подобен треугольнику ABC .

49. Плечи рычага равны 1 и 3 м. С его помощью требуется поднять груз, укрепленный в конце, на 2 м над землей. На какой высоте над землей следует укрепить опору рычага?

50. В прямоугольном треугольнике с острым углом 60° провели биссектрису этого угла. Какие треугольники на рисунке получились подобными?

51. а) Прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC , разбила его на два подобных треугольника ABD и ACD . Запишите возможные равенства углов в этих треугольниках. б) Прямая, проведенная через вершину K треугольника KPM , отсекла от него треугольник KPT , подобный KPM . Запишите возможные равенства углов.

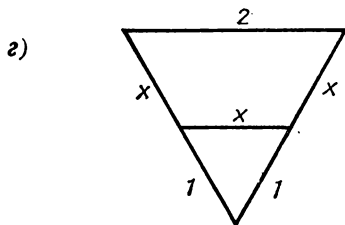
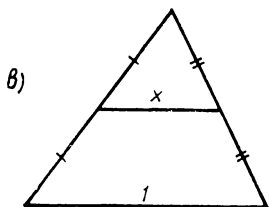
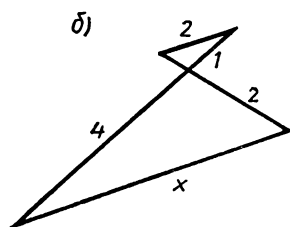
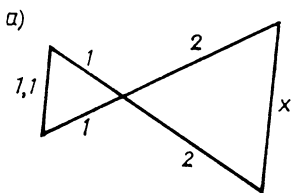


Рис. 100

ВЫВОДЫ

Важнейшими теоремами о треугольниках, доказанными в этой главе, являются теорема Пифагора (§ 14), теорема синусов (§ 18) и обобщенная теорема Пифагора (§ 20). Все остальные результаты этой главы опираются на три главные теоремы.

1. Первой из этих трех теорем была доказана **теорема Пифагора**: *в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов* (рис. 19).

Основными следствиями этой теоремы были теорема о наклонных и проекциях (п.15.1) и неравенство треугольника (п.15.3).

2. Двум другим основным теоремам — теореме синусов и обобщенной теореме Пифагора (кратко обозначаемой ОТП) — предшествовало введение новых важных понятий — синуса угла (§ 16) и косинуса угла (§ 19).

Синусом угла называется отношение перпендикуляра, опущенного из точки одной стороны угла на другую его сторону или ее продолжение, к наклонной, лежащей на первой стороне (рис. 42, 43, 44).

Косинусом угла называется отношение проекции отрезка, лежащего на одной стороне угла, на другую его сторону или ее продолжение, к самому отрезку, взятое со знаком «плюс», если угол острый, и со знаком «минус», если угол тупой (рис. 71).

Теорема Пифагора позволяет связать синус и косинус угла таким равенством:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Чаще всего рассматриваются синусы и косинусы острых углов прямоугольных треугольников.

Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, лежащего против этого угла, к гипотенузе (рис. 46).

Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе (рис. 70).

Часто кратко говорят так: *синус равен отношению противолежащего катета к гипотенузе, а косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.*

Синус прямого угла равен единице, а косинус прямого угла равен нулю.

3. В теореме синусов говорится о том, что **во всяком треугольнике синусы углов пропорциональны противолежащим сторонам**, т. е. для любого треугольника ABC имеет место равенство

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Обобщенная теорема Пифагора (или, как еще ее называют, теорема косинусов) формулируется так: **квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними**, т. е. для любого треугольника ABC справедливо равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

4. Эти две теоремы — теорема синусов и ОТП — позволяют «решить треугольник» во всех случаях, когда это возможно, т. е. по некоторым его элементам — сторонам и углам — найти остальные его элементы.

Теорема синусов позволяет решить эту задачу, если заданы два угла и сторона треугольника, а также когда заданы две стороны и угол, лежащий против одной из этих сторон (п.18. 2 и п.20.2).

Теорема косинусов дает решение в случаях, когда заданы три стороны или когда заданы две стороны и угол между ними (п. 20.2).

Более просто — только на основании определений синуса «решаются» прямоугольные треугольники (§ 17).

Отметим еще, что следствием теоремы синусов является второй признак равенства треугольников — по стороне и двум углам.

5. Теорема синусов и ОТП позволяют легко доказать и основные три теоремы о подобных треугольниках. Напомним, что **подобными называются треугольники, у которых соответственные стороны пропорциональны** (рис. 88), т. е. треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC , если

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}.$$

Это отношение называется **коэффициентом подобия**.

У подобных треугольников соответственные углы равны. Эта теорема вытекает из обобщенной теоремы Пифагора (п.22.2).

Утверждение, обратное этой теореме, дает первый признак подобия треугольников: **если в треугольниках углы соответ-**

ственно равны, то треугольники подобны. Этот признак вытекает из теоремы синусов (п.22.3).

Второй признак подобия треугольников вытекает из ОТП: **если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны** (п. 22.3).

Из теорем о подобии треугольников еще важно помнить, что **отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.**

6. Эту главу мы назвали «Геометрия треугольника». Несмотря на то что треугольник — простейшая после отрезка геометрическая фигура, он обладает многими интереснейшими свойствами. Именно поэтому говорят о геометрии треугольника. Среди теорем о треугольниках есть и такие, которые люди знают с древнейших времен (например, теорема Пифагора), а есть и открытые совсем недавно. Даже сейчас еще появляются новые работы и целые книги, в которых содержатся неизвестные ранее теоремы о свойствах треугольника. В дальнейшем и в теоретическом тексте, и среди задач нам встретится ряд теорем о треугольниках. Например, теоремы о так называемых замечательных точках треугольника. Оказывается, что *три медианы треугольника пересекаются в одной точке* (рис. 101), *три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке* (рис. 102), *три высоты треугольника пересекаются в одной точке* (рис. 103) и, наконец, *серединные перпендикуляры трех сторон треугольника пересекаются в одной точке* (рис. 104).

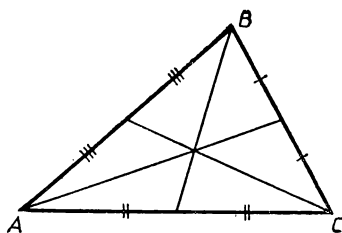


Рис. 101

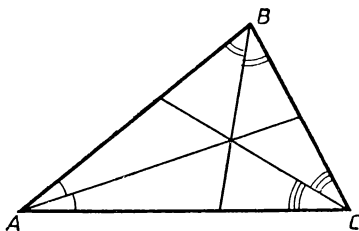


Рис. 102

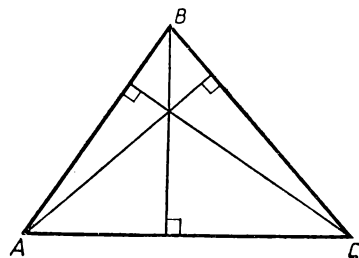


Рис. 103

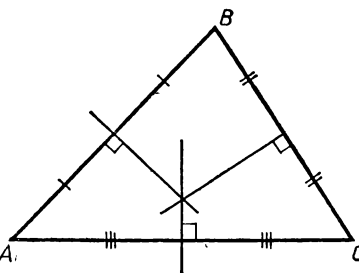


Рис. 104

Точка пересечения биссектрис треугольника равноудалена от всех его сторон. Это значит, что перпендикуляры, опущенные из этой точки на стороны треугольника, равны. Если провести окружность с центром в точке пересечения биссектрис треугольника радиусом, равным этому перпендикуляру, то такая окружность с каждой из сторон треугольника будет иметь ровно одну общую точку. Говорят, что эта окружность *касается сторон треугольника* и что она *вписана в треугольник*.

Точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника удалена от всех его вершин на одно и то же расстояние. Если провести окружность радиусом, равным этому расстоянию, и с центром в этой точке, то она пройдет через все вершины треугольника. Говорят, что такая окружность *описана вокруг треугольника*.

Но самые важные теоремы о свойствах треугольника уже доказаны в курсе VI класса и в этой главе.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

§ 23. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

23.1. Параллельность прямых, перпендикулярных данной прямой

Что такое параллельные прямые, вам известно с V класса. Напомним, что прямые называются **параллельными**, если они не пересекаются. (Определяют еще так: две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. Но то, что прямые лежат в одной плоскости, у нас подразумевается.) Параллельность прямых a и b обозначают так: $a \parallel b$. В V классе вы строили параллельные прямые (а точнее, отрезки, лежащие на параллельных прямых) с помощью угольника, проводя два перпендикуляра к одной прямой (рис. 105). Но тогда мы не могли доказать, что такие отрезки лежат на параллельных прямых (а вдруг эти отрезки пересеклись бы при продолжении где-нибудь далеко-далеко). Теперь же мы легко можем доказать их параллельность.

Теорема (о параллельности перпендикуляров). *Две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.*

Доказательство. Пусть прямые a и b перпендикулярны прямой c . Если бы a и b пересекались, то образовался бы треугольник, в котором два прямых угла (рис. 106). А такого тре-

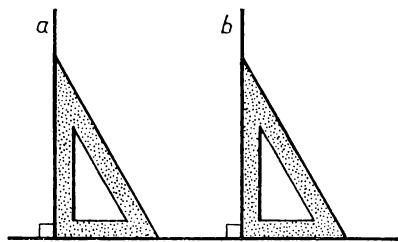


Рис. 105

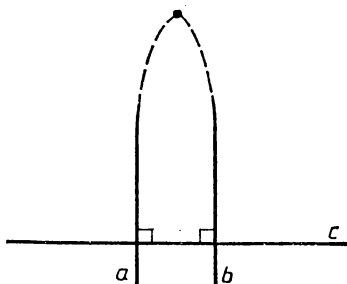


Рис. 106

угольника быть не может по теореме о сумме углов треугольника. Поэтому прямые a и b параллельны. Теорема доказана.

Эта теорема является самым простым признаком параллельности прямых.

23.2. Существование и единственность прямой, параллельной данной

Докажем основную теорему о параллельных прямых.

Теорема (о существовании и единственности параллельной).

Для каждой прямой через каждую не лежащую на ней точку проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство. Пусть заданы прямая a и не лежащая на ней точка A (рис. 107). Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую a . Через точку A проходит прямая b , перпендикулярная отрезку AB . Так как $a \perp AB$ и $b \perp AB$, то прямые a и b параллельны (по теореме о параллельности перпендикуляров). Итак, мы доказали существование прямой b , проходящей через точку A и параллельной прямой a .

Докажем единственность такой прямой. Для этого докажем, что любая прямая c , проходящая через точку A и отличная от прямой b , пересекает прямую a (рис. 108). Прямая c не перпендикулярна прямой AB , так как в точке A к прямой AB перпендикулярна прямая b . Поэтому один из лучей прямой c с началом в точке A образует с отрезком AB острый угол α . Обозначим этот луч через c_1 .

Отложим на луче c_1 отрезок $AC = \frac{AB}{\cos \alpha}$. Докажем, что прямые a и c пересекаются в точке C . Опустим из точки C перпендикуляр CD на прямую AB . В прямоугольном треугольнике ACD катет $AD = AC \cos \alpha$, т. е. $AD = AB$. Поэтому точки D и B совпадают. Следовательно, прямая BC перпендикулярна прямой AB и

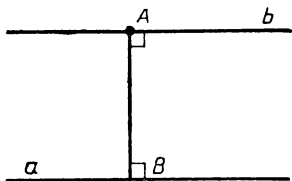


Рис. 107

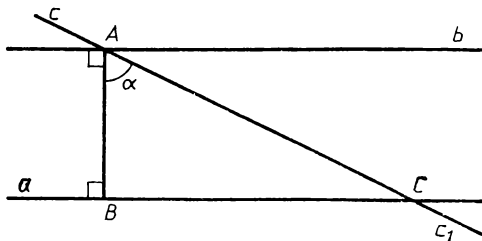


Рис. 108

проходит через точку B , т. е. прямая BC совпадает с прямой a . Итак, C — точка пересечения прямых a и c . Теорема полностью доказана. ■

Отметим два следствия доказанной теоремы.

Следствие 1. *Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.*

Доказательство. Если бы две прямые, параллельные какой-то прямой p , пересекались в некоторой точке A , то получалось бы, что через A проходят две прямые, параллельные p . Но это невозможно.

Следствие 2. *Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую из них.*

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны и прямая c пересекает a в точке A . Если бы c не пересекала b , то через точку A проходили бы две прямые a и c , параллельные прямой b , что невозможно. Итак, c пересекает b . ■

23.3. Признаки параллельности прямых

Если две прямые a и b пересечены третьей прямой c (секущей) в каких-то точках A и B , то образуется по четыре угла с вершинами в точках A и B (рис. 109). Углы, прилегающие к отрезку AB , называются **внутренними**. Те из них, которые лежат с одной стороны от AB , называются **односторонними**, а те, что лежат с разных сторон и имеют различные вершины, — **накрест лежащими**. Так что углы α и β — **внутренние односторонние**, а углы α и β_1 — **внутренние накрест лежащие**.

Кроме внутренних односторонних или накрест лежащих углов, говорят еще и о внешних односторонних или накрест лежащих углах. На рисунке 110 углы α и β — внешние односторонние, а углы α и β_1 — внешние накрест лежащие.

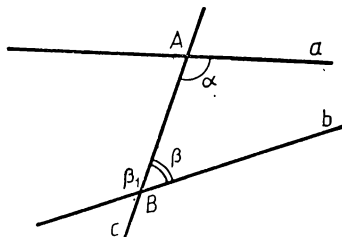


Рис. 109

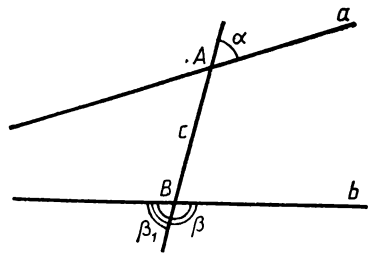


Рис. 110

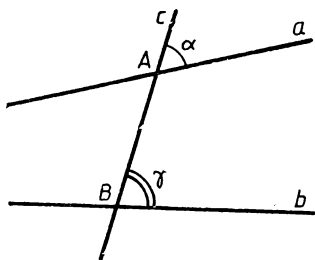


Рис. 111

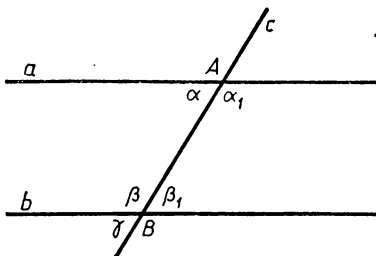


Рис. 112

Наконец, на рисунке 111 буквами α и γ обозначены углы, которые называются **соответственными** (всего получается четыре пары соответственных углов, укажите их).

Параллельные прямые распознают по углам, которые они образуют с пересекающей их прямой или с отрезком, соединяющим их точки. Об этом говорится в следующей теореме.

Теорема (признаки параллельности прямых). *Если при пересечении двух прямых третьей оказалось, что:*

- 1) *сумма внутренних односторонних углов равна 180° , или*
- 2) *внутренние накрест лежащие углы равны, или*
- 3) *соответственные углы равны,*

то прямые параллельны.

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть прямая c пересекает прямые a и b в точках A и B (рис. 112) и отрезок AB образует с прямыми a и b с одной стороны такие углы α и β , что $\alpha + \beta = 180^\circ$. Обозначим через α_1 и β_1 углы, смежные с углами α и β и прилежащие к отрезку AB . Так как сумма всех четырех углов α , β , α_1 , β_1 равна 360° и $\alpha + \beta = 180^\circ$, то сумма α_1 и β_1 также равна 180° : $\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$.

Прямые a и b не могут пересекаться: с какой бы стороны они ни пересекались, получился бы треугольник ABC , у которого углы при вершинах A и B дают в сумме 180° . Но у всякого треугольника сумма двух углов меньше 180° . Значит, прямые a и b не пересекаются, т. е. они параллельны. Первое утверждение теоремы доказано.

Второе и третье утверждения теоремы вытекают из первого. Подробнее их доказательства проведите самостоятельно.

Первое, второе и третье утверждения теоремы назовем соответственно *первым, вторым и третьим признаком параллельности прямых*.

23.4. Углы при параллельных и секущей

Если прямые a и b параллельны, то углы, образующиеся при пересечении их третьей прямой c , либо равны, либо в сумме образуют 180° . А именно имеет место следующая теорема.

Теорема (об углах при параллельных и секущей). *Если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, то: 1) сумма внутренних односторонних углов равна 180° ; 2) внутренние накрест лежащие углы равны; 3) соответственные углы равны.*

Доказательство. Пусть параллельные прямые a и b пересекаются прямой c в точках A и B (рис. 113, а). Покажем, что соответственные углы α и β равны. Допустим, что это не так (рис. 113, б). Тогда через точку B проходит прямая d , образующая с прямой c угол γ , соответственный углу α и равный ему. Так как $\alpha \neq \beta$ и $\gamma = \alpha$, то прямые b и d различны. По третьему признаку параллельности прямых прямые a и d параллельны. Но тогда через точку B проходят две прямые, параллельные прямой a : прямые b и d . Это невозможно в силу единственности прямой, проходящей через данную точку и параллельную данной прямой. Итак, углы α и β равны.

Вертикальный углу β угол β_1 будет накрест лежащим с углом α . Поэтому углы α и β_1 также равны, так как $\alpha = \beta$ и $\beta = \beta_1$.

Наконец, угол α_1 , смежный с углами β и β_1 , будет вместе с углом α парой внутренних односторонних углов. Так как $\alpha_1 + \beta = 180^\circ$ и $\alpha = \beta$, то $\alpha + \alpha_1 = 180^\circ$. Все утверждения теоремы доказаны.

Каждое из утверждений доказанной теоремы является *обратным* к соответствующему утверждению теоремы о признаках параллельности прямых. Поэтому свойства углов, образованных при пересечении параллельных прямых и секущей, являются характерными свойствами параллельности.

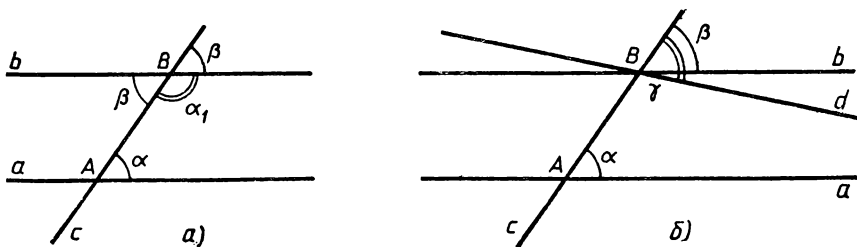


Рис. 113

23.5. Общие перпендикуляры параллельных прямых

Как мы уже доказали, прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны. Верно и обратное: прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, перпендикулярна и к другой из них (объясните почему).

Можно сказать и так: параллельные прямые — это те прямые, у которых есть общий перпендикуляр, т. е. отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный им обоим (рис. 114). Об этих перпендикулярах говорится в следующей теореме.

Теорема (об общих перпендикулярах). *Из каждой точки одной из параллельных прямых идет до другой из них их общий перпендикуляр. Все такие перпендикуляры равны друг другу и параллельны.*

Доказательство. Пусть a и b — две параллельные прямые (рис. 115). Из точки A прямой a опустим перпендикуляр AB на прямую b . Прямая AB перпендикулярна к прямой a (по теореме об углах при параллельных и секущей), т. е. отрезок AB — общий перпендикуляр параллельных прямых a и b .

Возьмем теперь на прямой a любую другую точку C , отличную от A . Отложим на прямой b отрезок BD , равный отрезку AC , в ту сторону от прямой AB , где лежит отрезок AC . По аксиоме прямоугольника полученный четырехугольник $ACDB$ — прямоугольник, по этой же аксиоме $AB = CD$, т. е. CD — общий перпендикуляр прямых a и b . Так как прямые, перпендикулярные к одной прямой, параллельны, то $AB \parallel CD$. Теорема доказана.

Длина перпендикуляра — это расстояние от точки до прямой. Поэтому, доказав теорему об общих перпендикулярах, мы установили, что *все точки одной из параллельных прямых равноудалены от другой прямой*. Иначе говоря: *параллельные прямые проходят на постоянном расстоянии друг от друга*¹. Можно также сказать,

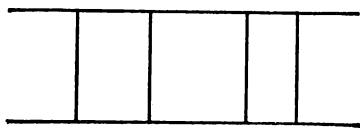


Рис. 114

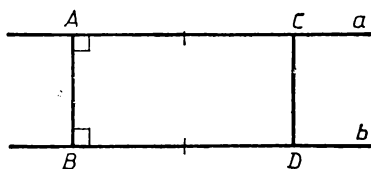


Рис. 115

¹ Слово «параллельная» в переводе с греческого означает «идущая рядом».

что параллельные прямые ограничивают полосу постоянной ширины.

Наглядную картину дают уходящие вдаль рельсы прямой железной дороги (рис. 116). Их общие перпендикуляры представлены, хотя и несколько грубо, шпалами. Параллельность укладываемых рельсов проверяют именно по постоянству расстояния, перемещая вдоль них соответствующий шаблон.

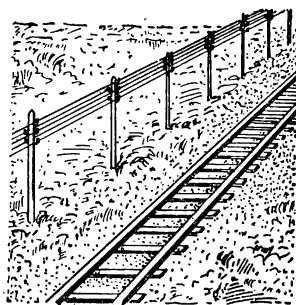


Рис. 116

23.6. Параллельные отрезки

Прямые во всем их бесконечном протяжении фактически встречаются в геометрии только в некоторых специальных вопросах. На практике же мы всегда имеем дело не с бесконечными прямыми, а с отрезками. Когда говорят «проведем прямую», то на самом деле проводят отрезок. Итак, мы будем иметь дело с параллельными отрезками.

По определению два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Это равносильно тому, что никакие продолжающие их отрезки не пересекаются. И чтобы проверить, параллельны они или нет, нет нужды продолжать отрезки до бесконечности. Это бессмысленно; никто так не проверяет, например, параллельность краев стола или параллельность рельсов: пользуются признаками параллельности.

Две прямые параллельны, если отрезок с концами на этих прямых образует с ними с одной стороны углы, в сумме равные 180° . Отрезки этих прямых обладают, очевидно, тем же свойством. Поэтому можно сказать: *параллельные отрезки — это такие отрезки, которые образуют с отрезком, соединяющим две их точки, углы, с одной стороны в сумме равные 180° .*

Частный случай того же признака параллельности прямых — это то, что они имеют общий перпендикуляр. Соответственно *отрезки параллельны, если они содержатся в отрезках, имеющих общий перпендикуляр.* А это равносильно тому, что они лежат на противоположных сторонах прямоугольника. Таким образом, можно сказать так: *параллельные отрезки — это такие отрезки, которые лежат на противоположных сторонах прямоугольника, или, что то же самое, на отрезках с общим перпендикуляром.*

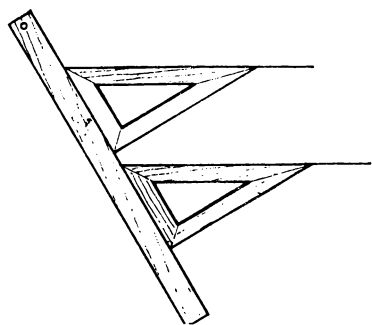


Рис. 117

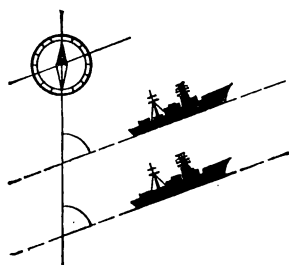


Рис. 118

Параллельность отрезков a и b обозначается так же, как прямых: $a \parallel b$.

Можно переформулировать все теоремы, доказанные в этом параграфе, заменив в их формулировках параллельные прямые параллельными отрезками. Например, имеет место такая теорема:

Теорема (о соответственных углах). *Два отрезка параллельны тогда и только тогда, когда при пересечении их с третьим отрезком образуются равные соответственные углы.*

На равенстве соответственных углов основано проведение параллельных отрезков с помощью линейки и угольника (рис. 117). Роль «секущей» играет край линейки. Соответственные углы — это угол передвинутного угольника.

По равенству соответственных углов определяют, например, параллельные движения. Например, курс — направление движения корабля — задают углом с направлением стрелки компаса (по меридиану на север). Если корабли должны держаться одного курса, то это значит, что соответственные углы между прямыми их движения и «секущей» — линией меридиана — должны быть равны (рис. 118).

Задачи к § 23

Основные задачи

1. Постройте две параллельные прямые a и b . Постройте прямые a_1 и b_1 так, что $a_1 \perp a$, $b_1 \perp b$. Докажите, что либо $a_1 \parallel b_1$, либо a_1 и b_1 совпадают.
2. а) Докажите, что параллельные отрезки с концами на двух параллельных прямых равны. б) Проверьте обратное утверждение. в) Как можно обобщить утверждение а)?

3. Дана прямая. Какую фигуру образуют все точки, удаленные от нее на данное расстояние?

4. Полосой называется часть плоскости, заключенная между параллельными прямыми (включая и эти прямые). Какую фигуру образуют все точки, равноудаленные от краев полосы, т. е. от параллельных прямых, ограничивающих полосу?

5. Докажите, что одноименные углы (оба острые или оба тупые) с соответственно параллельными сторонами равны. Будут ли верны обратные утверждения?

Задачи к пп. 23.1, 23.2

6. Объясните, почему параллельны противоположные стороны прямоугольника.

7. Объясните, почему никакие три точки окружности не лежат на одной прямой. Что отсюда следует?

8. Нарисуйте две параллельные прямые и возьмите точку вне их. Опустите на нее перпендикуляры на эти прямые. Почему они лежат на одной прямой?

9. Нарисуйте прямую a и отрезок b , ей параллельный. Постройте отрезок b_1 , симметричный отрезку b относительно прямой a . Докажите, что эти отрезки равны и параллельны.

10. Прямые a и b пересекаются. $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$. Как расположены прямые a_1 и b_1 ?

11. На сколько частей могут разделить плоскость 3 прямые, 4 прямые? На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость 5 прямых?

12. Как расположены прямые a и b , если известно, что каждая прямая, пересекающая a , пересекает и b ?

13. Нарисуйте прямую. Выберите на ней несколько точек. В одну сторону от данной прямой проведите к ней через эти точки перпендикуляры равной длины. На какой линии расположатся их концы, не лежащие на данной прямой? Сможете ли вы обобщить полученный результат?

14. В круге проводятся все хорды, параллельные между собой. Какую фигуру образуют их середины?

Задачи к п. 23.3

15. Нарисуйте отрезок. Постройте отрезок, симметричный данному относительно некоторой точки, не лежащей на отрезке. Как расположены данный и построенный отрезки?

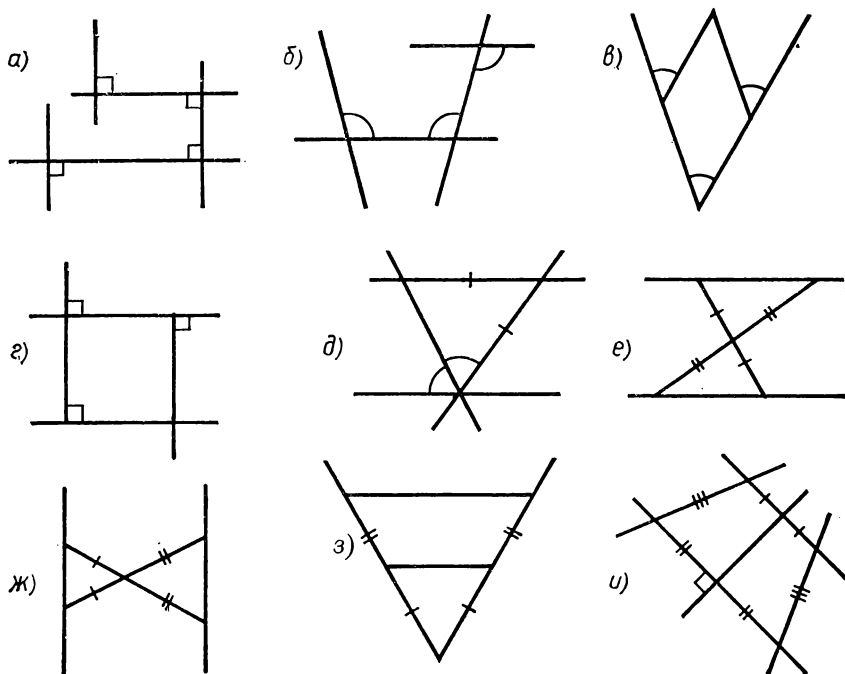


Рис. 119

16. Укажите параллельные прямые на рисунке 119.

17. Протиеположные стороны выпуклого четырехугольника равны. Объясните, почему в нем есть параллельные стороны.

18. Два равных треугольника ABC_1 и ABC_2 расположены с одной стороны от AB . Докажите, что $C_1C_2 \parallel AB$.

19. В четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$, $AC = BD$. Будет ли в нем пара параллельных сторон?

20. Нарисуйте прямой угол A_1CB_1 . На лучах CA_1 и CB_1 выберите точки A и B соответственно. Углы A_1AB и B_1BA разделены на три равные части каждым лучами, выходящими из точек A и B . Докажите, что два из них лежат на параллельных прямых.

21. В равнобедренном треугольнике проведен отрезок, соединяющий две точки на его равных сторонах. Эти точки являются концами: а) медиан; б) биссектрис; в) высот. Докажите, что такой отрезок параллелен основанию. Обобщите эту задачу.

22. На окружности поставлены по порядку точки A, B, C, D . При этом $AB = BC = CD$. Докажите, что $AD \parallel BC$. Среди условий есть лишнее. Какое?

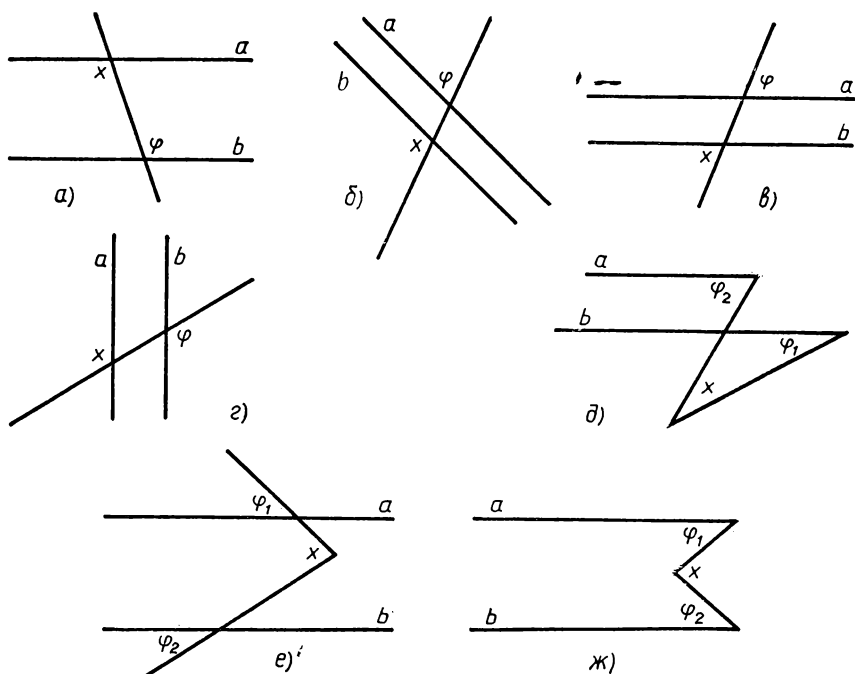


Рис. 120

Задачи к п. 23.4

23. Чему равна величина неизвестного угла на рисунке 120 (на всех рисунках $a \parallel b$)?

24. Две прямые пересечены третьей, не перпендикулярной им. Сколько из образовавшихся углов будут тупыми?

25. Границы двух полос пересекаются. Для каждого образовавшегося угла укажите равный ему угол.

26. Нарисуйте угол, прямую и точку где угодно. А теперь постройте угол, равный данному, одна сторона которого лежит на данной прямой, а другая проходит через данную точку.

27. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с вершиной B . Нарисуйте биссектрису внешнего угла при вершине B . а) Докажите, что она параллельна AC . б) Проверьте обратное.

28. В круге проведены параллельные между собой диаметр AB и хорда CD . Докажите, что: а) хорды AC и BD видны из центра под равными углами; б) $AC = BD$.

Проверьте обратные утверждения. Как изменятся результаты, если вместо диаметра взять другую параллельную хорду?

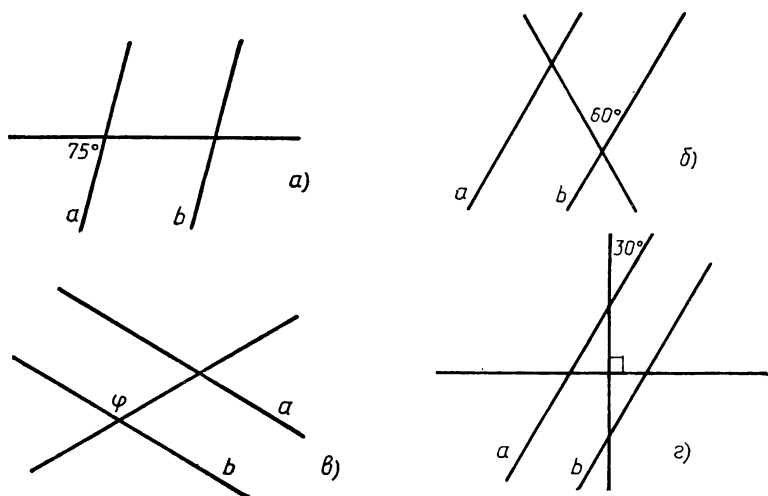


Рис. 121

29. Найдите остальные углы на рисунке 121, если $a \parallel b$.

30. Через концы одного диаметра окружности проведены две параллельные хорды. Докажите, что они равны. Проверьте обратное.

Задачи к п. 23.5

31. $|Xa| = |Ya| = |Za|$. Лежат ли точки X, Y, Z на одной прямой?

32. Нарисуйте прямую a . Какой фигурой является множество точек X таких, что: а) $|Xa| = 1$; б) $|Xa| \geq 1$; в) $|Xa| \leq 1$; г) $1 \leq |Xa| \leq 2$?

33. а) Постройте полосу шириной 2 см. Как построить полосу в два раза более широкую? В два раза более узкую?

б) Нарисуйте прямую. Постройте полосу, для которой она является средней линией (т. е. равноудалена от краев полосы).

34. Какая фигура может появиться в результате пересечения двух полос? Объединения двух полос? Нарисуйте все такие фигуры.

35. Ширина одной полосы равна d_1 , а другой полосы равна d_2 . В результате их объединения получилась третья полоса. Можете ли вы найти ее ширину? Если вы знаете ширину объединения этих полос, то сможете ли вы найти ширину их пересечения?

36. Точка A равноудалена от краев полосы. Через нее проводится отрезок, концы которого лежат на краях полосы. Докажите,

что этот отрезок делится точкой A пополам. Верно ли обратное утверждение?

37. Известны ширина полосы и расстояние от некоторой точки до одного из ее краев. Как найти расстояние от нее до другого края полосы? Составьте и решите обратную задачу.

38. $a \parallel b$. Как расположена по отношению к полосе с краями a и b точка X такая, что: а) $|Xa| + |Xb| = |ab|$; б) $|Xa| - |Xb| = |ab|$; в) $|Xb| = 2|Xa|$?

39. Равносторонний треугольник хотят накрыть полосой. Как найти наименьшую ширину такой полосы? А если треугольник будет равнобедренным? Разносторонним?

40. Две полосы шириной d_1 и d_2 пересекаются под углом φ . (Что, по-вашему, это означает?) Какая фигура получается в пересечении? Чему равна ее площадь?

41. Нарисуйте отрезок AB . Пусть по прямой $a \parallel AB$ движется точка X . Докажите, что $|XAB|$ постоянна.

42. Отметьте две точки. Проведите через них две параллельные прямые, ограничивающие полосу данной ширины.

43. Нарисуйте полосу, а внутри нее возьмите точку. Постройте отрезок, имеющий данную длину, проходящий через данную точку, концы которого лежат на краях полосы.

44. Нарисуйте два равных отрезка AB и CD . Найдите такую точку X , что $|XAB| = |XCD|$.

45. Два шоссе пересекаются (и не всегда под прямым углом). Милиционер-регулирующий стоит на пересечении их средних линий. а) Пусть ширина у этих шоссе одинакова. Докажите, что он будет стоять на равных расстояниях от краев этих шоссе. б) К краю какого шоссе он будет ближе, если их ширина различная?

46. Можно ли найти радиус круга с помощью линейки, длина которой меньше, чем радиус круга?

§ 24. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ТРАПЕЦИЯ

24.1. Определение и свойства параллелограмма

Параллелограмм можно определить равенством противоположных сторон. Но параллелограмм означает параллелосторонник, т. е. параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны (рис. 122).

Т е о р е м а (о свойствах параллелограмма). 1) *Противоположные стороны параллелограмма равны.* 2) *Противоположные*

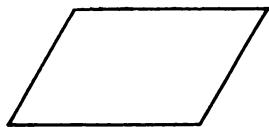


Рис. 122

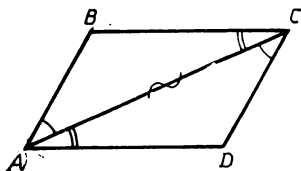


Рис. 123

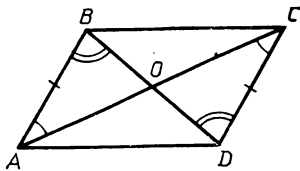


Рис. 124

углы параллелограмма равны. 3) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм (рис. 123). Проведем его диагональ AC . Так как отрезки AB и CD параллельны, то накрест лежащие углы BAC и ACD равны. Аналогично, так как $BC \parallel AD$, то $\angle BCA = \angle CAD$. У треугольников ABC и CDA сторона AC общая, а углы, прилегающие к этой стороне, соответственно равны. Следовательно, эти треугольники равны (по второму признаку равенства треугольников). А тогда $AB = CD$, $BC = DA$ и $\hat{B} = \hat{D}$. Мы доказали два первых свойства параллелограмма.

Проведем теперь и вторую диагональ BD параллелограмма $ABCD$ и обозначим через O точку пересечения диагоналей AC и BD (рис. 124). У треугольников AOB и COD равны стороны AB и CD , а также соответственно равны углы, прилегающие к этим сторонам (как накрест лежащие при параллельных AB и CD и секущих AC и BD). Следовательно, треугольники AOB и COD равны, а потому $AO = OC$ и $BO = OD$. Теорема доказана полностью.

24.2. Признаки параллелограмма

Теорема (о признаках параллелограмма). 1) *Четырехугольник является параллелограммом, если его противоположные стороны равны.* 2) *Четырехугольник является параллелограммом, если две его противоположные стороны равны и параллельны.* 3) *Четырехугольник является параллелограммом, если его диагонали точкой пересечения делятся пополам.*

Доказательство. 1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны: $AB = CD$ и $BC = AD$ (рис. 125). Проведем диагональ AC . Получим два равных треугольника ABC и CDA . Соответственные углы этих треугольников равны. Поэтому накрест лежащие углы, образованные отрезками AB и CD и секу-

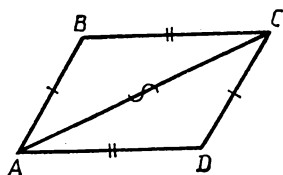


Рис. 125

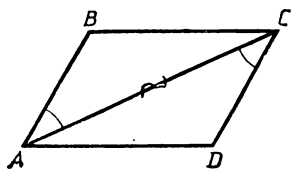


Рис. 126

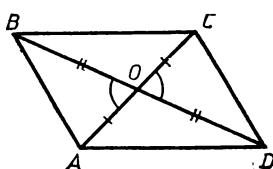


Рис. 127

щей AC , равны. Следовательно, $AB \parallel CD$. Аналогично доказывается, что $BC \parallel AD$. Поэтому $ABCD$ — параллелограмм.

2) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны: $AB = CD$ и $AB \parallel CD$ (рис. 126). Проведем диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA . В этих треугольниках равны стороны AB и CD , сторона AC общая, а углы BAC и ACD равны (как накрест лежащие при параллельных отрезках AB и CD и секущей AC). Поэтому треугольники ABC и CDA равны. Следовательно, и $\angle ACB = \angle CAD$, и потому $BC \parallel AD$. Итак, в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны параллельны, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

3) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD делятся пополам точкой их пересечения — точкой O (рис. 127). Тогда $AO = OC$ и $BO = OD$. Поэтому $\triangle ABO = \triangle CDO$ и $\triangle AOD = \triangle BOC$. Следовательно, $AB = CD$ и $AD = BC$. По первому признаку четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

24.3. Частные виды параллелограммов

Мы доказали в теореме о свойствах параллелограммов, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны. Рассмотрим теперь два частных вида параллелограммов, у которых равны все стороны или все углы (а не только противоположные). Если у параллелограмма все углы равны, то поскольку их сумма равна 360° , то каждый из них будет равен 90° (рис. 128).

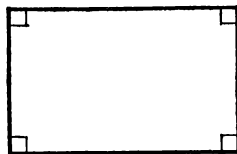


Рис. 128

В результате получим параллелограмм, все углы которого прямые, т. е. хорошо знакомый нам **прямоугольник**.

Итак, *прямоугольник — это параллелограмм, все углы которого равны 90° или, что то же самое, все углы которого равны.*

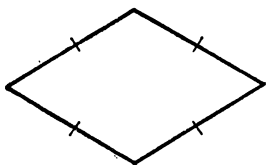


Рис. 129

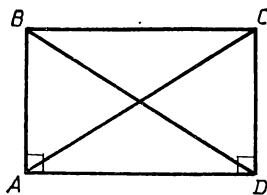


Рис. 130

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называют **ромбом** (рис. 129).

Прямоугольник и ромб — это частные виды параллелограмма. Но определить их можно и без упоминания об этом.

Действительно, четырехугольник, у которого все углы прямые, является параллелограммом, так как его противоположные стороны параллельны (как перпендикуляры к одной прямой). И четырехугольник, у которого все стороны равны, тоже будет параллелограмм (по первому признаку параллелограмма). Поэтому *можно определить прямоугольник как четырехугольник, у которого все углы прямые, а ромб как четырехугольник, у которого все стороны равны.*

Прямоугольник и ромб выделяются из параллелограммов также особыми свойствами их диагоналей. А именно справедливы следующие теоремы.

Теорема (о диагоналях прямоугольника). *Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.*

Доказательство. В этой теореме два утверждения.

1) *В прямоугольнике диагонали равны.* Для прямоугольника $ABCD$ (рис. 130) это утверждение вытекает, например, из равенства прямоугольных треугольников ABD и ACD (по двум катетам).

2) *Параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.* Действительно, если в параллелограмме $ABCD$ диагонали равны, то $\triangle ABD = \triangle ACD$ (по трем сторонам), т. е. $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$. ■

Теорема (о диагоналях ромба). **I.** *Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали взаимно перпендикулярны.*

II. *Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали являются биссектрисами его углов.*

Доказательство. Требуется доказать два утверждения.

1) *Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.* Действительно, если $ABCD$ — ромб (рис. 131), то треугольники ABO и ADO равны

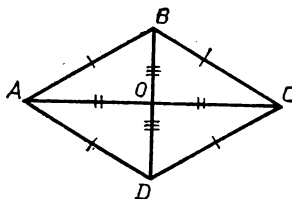


Рис. 131

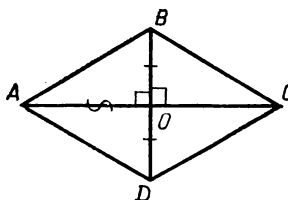


Рис. 132

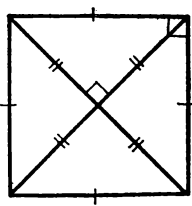


Рис. 133

(по трем сторонам). Поэтому их углы при вершине O равны 90° , т. е. $AC \perp BD$.

2) Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб. Действительно, если в параллелограмме $ABCD$ диагонали взаимно перпендикулярны (рис. 132), то прямоугольные треугольники ABO и ADO равны (по двум катетам). Поэтому $AB = AD$, т. е. $ABCD$ — ромб. Первая часть теоремы доказана. Вторую докажете самостоятельно.

Квадрат — это четырехугольник, который является прямоугольником и ромбом одновременно (рис. 133), т. е. у квадрата равны друг другу и все стороны, и все углы. Диагонали квадрата и равны, и взаимно перпендикулярны.

24.4. Применения теорем о параллелограммах

Доказанные характерные свойства параллелограмма и прямоугольника дают простые способы, пользуясь которыми можно проверять, параллельны ли края данного предмета или представляет ли собой данный четырехугольный предмет прямоугольник.

Если у предмета противоположные стороны равны, то он имеет форму параллелограмма, а если еще и диагонали равны, то форму прямоугольника. Так столяр на самом деле проверяет, например, получилась ли крышка стола прямоугольной, сравнивая стороны и диагонали с помощью бечевки.

Проверить параллельность двух отрезков, двух противоположных сторон какого-либо предмета можно так.

Пусть даны два отрезка a и b . Откладываем на них равные отрезки AB и DC (рис. 134). Точки B и C — это те, которые лежат с одной стороны от прямой AD , так что получается четырехугольник $ABCD$, причем $AB = DC$. Если при этом окажется, что $AD = BC$, то четырехугольник —

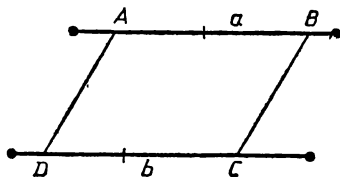


Рис. 134

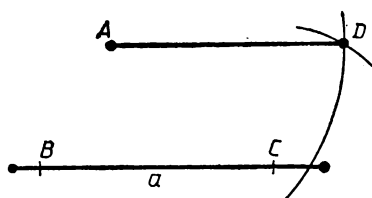


Рис. 135

параллелограмм (по теореме о признаках параллелограмма) и, значит, $AB \parallel DC$. Тем самым $a \parallel b$. Если же окажется, что $AD \neq BC$, то AB не параллельно DC (так как если бы было $AB \parallel DC$, то должно было бы быть $AD = BC$ по той же теореме).

Та же теорема дает способ построения отрезка, параллельного данному (не откладывая углов). Пусть даны отрезок a и точка A . Отложим на a какой-нибудь отрезок BC . Опишем вокруг A окружность радиусом BC , а вокруг C — окружность радиусом AB (рис. 135). В их пересечении будет такая точка D , что $AD \parallel a$ (если точка A не лежит на отрезке a или его продолжении). Это построение можно осуществить также и с помощью бечевки. Сделайте это построение самостоятельно. В частности, у двух окружностей две точки пересечения. Какая из них нужная нам точка D ?

24.5. Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого только две стороны параллельны (а другие две не параллельны в отличие от параллелограмма) (рис. 136).

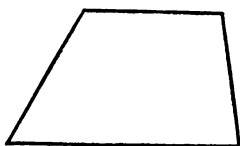


Рис. 136



Рис. 137

Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями**, а две другие — **боковыми сторонами**. Основания всегда не равны (так как если они равны, то по теореме о признаках параллелограмма трапеция оказалась бы параллелограммом). Трапеция, боковые стороны которой равны, называется **равнобедренной** (равнобокой или равнобочной, рис. 137).

24.6. Площади параллелограмма и трапеции

Высотой параллелограмма называют общий перпендикуляр его противоположных сторон или содержащих их прямых (поскольку стороны могут и не иметь общего перпендикуляра, рис. 138). **Высотой** называется также длина этого перпендикуляра. По теореме

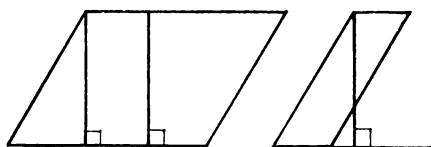


Рис. 138

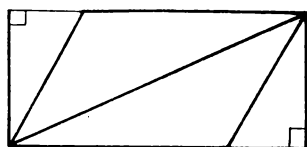


Рис. 139

об общих перпендикулярах параллельные прямые имеют общие перпендикуляры и все они равны. У параллелограмма две высоты соответственно парам противоположных сторон.

Теорема. *Площадь параллелограмма равняется произведению стороны на проведенную к ней высоту.*

Доказательство. Проведем диагональ параллелограмма (рис. 139). Она разделит его на два треугольника с равными основаниями и равными высотами h . Их площади поэтому равны $S_{\Delta} = \frac{1}{2} ah$. Площадь параллелограмма складывается из них, так что $S = 2 \frac{1}{2} ah = ah$. ■

Высотой трапеции называется общий перпендикуляр ее оснований, или прямых, содержащих основания (рис. 140). Высотой называется также длина этого перпендикуляра.

Теорема. *Площадь трапеции равняется произведению полусуммы оснований на высоту, т. е. если a, b — основания, h — высота, то $S = \frac{a+b}{2} h$.*

Доказательство. Проведя диагональ, получим два треугольника одной высоты h и с основаниями a, b . Их площади будут:

$$S_1 = \frac{1}{2} ah, \quad S_2 = \frac{1}{2} bh.$$

Площадь же трапеции

$$S = S_1 + S_2 = \frac{a+b}{2} h. \quad \blacksquare$$

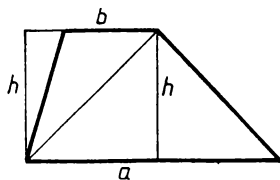


Рис. 140

Задачи к § 24

Основные задачи

1. Докажите следующие свойства параллелограмма: а) сумма соседних углов равна 180° ; б) диагональ образует с противополож-

ными сторонами равные углы; в) средняя линия проходит через центр симметрии параллелограмма, параллельна стороне и равна этой стороне. Какие из этих свойств параллелограмма являются его признаками?

2. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Выведите отсюда формулу для вычисления медианы в треугольнике через три его стороны.

3. Докажите такие признаки прямоугольника: а) если в параллелограмме есть прямой угол, то он прямоугольник; б) если два равных отрезка пересекаются в их общей середине, то их концы являются вершинами прямоугольника.

4. Докажите, что у равнобедренной трапеции диагонали равны.

5. В трапеции проведена средняя линия через середины боковых сторон. Докажите, что она параллельна основаниям и равна их полусумме. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение. Попытайтесь его доказать.

6. Дан выпуклый четырехугольник. Отметьте середины его сторон. Докажите, что они являются вершинами параллелограмма. Исследуйте вид полученного параллелограмма в зависимости от вида данного четырехугольника.

7. Запишите формулу площади параллелограмма, если известны его стороны и угол между ними.

Задачи к п. 24.1

8. Через центр O параллелограмма провели прямую. Она пересекает стороны параллелограмма в точках A и B . Докажите, что точка O — середина отрезка AB .

9. В параллелограмме провели диагональ. Докажите, что: а) расстояния от противоположных вершин до прямой, проходящей через эту диагональ, одинаковы; б) равны проекции противоположных сторон на эту прямую.

10. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ и обратно.

11. Докажите, что: а) биссектрисы соседних углов параллелограмма взаимно перпендикулярны; б) биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны или лежат на одной прямой.

12. К основным элементам параллелограмма отнесем его стороны, углы, диагонали, высоту. Как вычислить неизвестные основные элементы параллелограмма, если известны: а) две стороны и угол между ними; б) сторона, диагональ и угол против этой диагонали; в) две стороны и диагональ; г) две диагонали и угол между ними; д) две диагонали и угол параллелограмма; е) две стороны и высота; ж) сторона, диагональ и высота; з) две диагонали и высота? Выберите сами числовые данные и получите результат.

Задачи к п. 24.2

13. Будет ли параллелограммом четырехугольник, у которого: а) две стороны равны, а две другие параллельны; б) две пары равных сторон?

14. Представьте параллелограмм как: а) пересечение двух углов; б) пересечение двух полос; в) пересечение двух треугольников; г) сумму прямоугольника и двух треугольников; д) разность двух параллелограммов.

15. Нарисуйте три точки, не лежащие на одной прямой. Нарисуйте параллелограммы с вершинами в этих точках.

16. Постройте параллелограмм по: а) сторонам и диагонали; б) сторонам и углу; в) стороне и центру; г) диагонали и противоположной вершине; д) двум диагоналям и углу между ними.

17. Нарисуйте треугольник. Разделите его прямой на две части так, чтобы из них можно было составить параллелограмм.

18. На плоскости взяты две точки A и B . Точка X движется по плоскости. Пусть X_1 и X_2 — два ее положения. Проведены отрезки X_1A , X_1B , X_2A , X_2B . Возьмем их середины. Докажите, что четырехугольник с вершинами в этих точках — параллелограмм.

Задачи к п. 24.3

19. Докажите, что у ромба: а) высоты равны; б) центр одинаково удален от его сторон.

20. Известны сторона ромба и его острый угол. Как найти его: а) высоту; б) диагональ? Составьте обратные задачи и решите их. Выберите сами числовые данные и получите результат.

21. Известны сторона ромба и его острый угол. Как вычислить угол, под которым видны: а) его средняя линия из одной из вершин; б) его средняя линия из середины параллельной ей стороны;

в) его сторона из середины противоположной стороны? Выберите сами числовые данные и получите результат.

22. Дан ромб. Как найти радиус наименьшего круга, его содержащего?

23. Будет ли ромбом такой параллелограмм, у которого: а) все высоты равны; б) центр равноудален от сторон?

24. Постройте ромб по: а) стороне; б) диагоналям; в) одной из диагоналей и углу.

25. Нарисуйте равнобедренный треугольник. Можно ли нарисовать ромб с вершинами на его сторонах?

26. Является ли прямоугольником параллелограмм, у которого: а) диагонали равны; б) центр равноудален от всех вершин?

27. Для прямоугольника составьте задачу, аналогичную задаче 22.

28. Точка лежит на средней линии квадрата. Известны расстояния от нее до вершин квадрата. Сможете ли вы найти сторону квадрата? А если точка лежит на продолжении средней линии? Сможете ли вы решить такую же задачу для прямоугольника? Для ромба?

29. Какими свойствами можно выделить квадрат из прямоугольников? Из ромбов?

30. Постройте квадрат, вершины которого лежат на сторонах: а) треугольника; б) ромба; в) квадрата.

31. Федя нарисовал квадрат. Пришел Вася и стер квадрат, оставил только две противоположные вершины. Как восстановить квадрат? Придумайте сами похожую задачу.

Задачи к п. 24.5

32. Докажите, что сумма углов трапеции: а) при боковых сторонах равна 180° ; б) при большем основании меньше 180° ; в) при меньшем основании больше 180° .

33. Параллельно основаниям трапеции проведена прямая, которая пересекает ее боковые стороны. Докажите, что она делит их на пропорциональные части. Затем проведите отрезок с концами на основаниях трапеции. Что можно доказать на этом рисунке?

34. Нарисуйте трапецию, а в ней диагонали. Докажите, что середины ее боковых сторон и диагоналей лежат на одной прямой.

35. Может ли: а) средняя линия трапеции, параллельная ее основаниям, проходить через точку пересечения ее диагоналей; б) диагональ трапеции делить ее на два равных треугольника?

36. Нарисуйте трапецию, а в ней среднюю линию, параллельную ее основаниям, и диагонали. Диагонали пересекают среднюю линию на три отрезка. а) Докажите, что два из них равны. б) Могут ли быть равны все три?

37. Пусть a и b — боковые стороны трапеции, d — разность ее оснований. Докажите, что $a + b > d$, $a + d > b$, $b + d > a$.

38. Нарисуйте трапецию, а в ней диагонали. а) Укажите на рисунке подобные треугольники. б) Как узнать, на какие части одна из диагоналей разделилась точкой пересечения диагоналей? в) Через точку пересечения диагоналей проведите высоту трапеции. В каком отношении она делится этой точкой? г) Чему равно отношение площадей треугольников, примыкающих к основаниям?

39. Нарисуйте равнобедренную трапецию. Докажите, что: а) ее ось симметрии перпендикулярна средней линии, проведенной через середины боковых сторон; б) у нее равны биссектрисы углов при одном основании; в) вершины каждого из оснований равноудалены от прямых, проходящих через боковые стороны трапеции.

40. Понадобилась доска толщиной 5 см, шириной нижнего края 22 см, шириной верхнего края 15 см. Каков диаметр бревна, из которого двумя параллельными распилами можно выпилить такую доску?

41. Под основными элементами трапеции мы будем понимать ее стороны, углы, диагонали и высоту. Как вычислить неизвестные основные элементы равнобедренной трапеции, если известны: а) все стороны; б) два основания и угол при одном из них; в) два основания и диагонали; г) два основания и угол между диагоналями? Выберите сами числовые данные и получите результат.

42. Как вычислить неизвестные основные элементы трапеции, если известны: а) все стороны; б) три стороны и высота; в) два основания и углы при одном из них; г) три стороны и угол; д) две боковые стороны и углы при них? Выберите сами числовые данные и получите результат.

Задачи к п. 24.6.

П л о щ а д ь п а р а л л е л о г р а м м а

43. Пусть одна из сторон параллелограмма равна a , высота, проведенная к этой стороне, равна h . Запишите формулу площади параллелограмма. а) Какие величины входят в эту формулу? б) Выразите из этой формулы сторону параллелограмма. в) Пусть одна

из величин в формуле постоянна. Какой зависимостью связаны между собой оставшиеся величины? г) Вам понадобилось увеличить площадь параллелограмма в несколько раз. Как вы будете действовать? д) Вам нужно построить параллелограмм, равновеликий данному и не равный ему. Как вы будете действовать?

44. Пусть a и b — стороны параллелограмма, h_a и h_b — высоты, проведенные к ним. Докажите, что: а) $ah_a = bh_b$; б) если высоты параллелограмма равны, то он является ромбом; в) большей стороне параллелограмма соответствует меньшая высота.

45. Две полосы шириной d_1 и d_2 дали в пересечении параллелограмм. В каких границах лежит его площадь?

46. Запишите формулу площади параллелограмма, зная две его стороны d_1 и d_2 и угол φ между ними. а) Из этой формулы выразите длины его сторон, синус угла между этими сторонами. б) Пусть стороны параллелограмма постоянны. Как изменяется его площадь с изменением величины угла между ними? в) Пусть постоянны стороны параллелограмма, а его площадь меняется. Как в этом случае меняется угол между сторонами параллелограмма? г) Пусть при неизменных сторонах угол между ними увеличился с 30° до 60° . Во сколько раз изменилась площадь? д) Пусть у двух равновеликих параллелограммов стороны соответственно равны. Докажите, что эти параллелограммы равны.

47. Как вычислить площадь параллелограмма, если известны: а) стороны и диагональ; б) сторона и диагонали; в) диагонали и угол между ними; г) две высоты из одной вершины и угол между ними? Выберите сами числовые данные и получите результат.

48. Как разделить параллелограмм: а) одной прямой на две равновеликие части; б) двумя прямыми на три равновеликие части?

П л о щ а д ь т р а п е ц и и

49. Пусть основания трапеции a и b ($a > b$), а высота трапеции h . Запишите формулу площади трапеции. а) Какие величины входят в эту формулу? б) Выразите из этой формулы высоту трапеции, большее основание трапеции, меньшее основание трапеции. в) Вам нужно уменьшить площадь трапеции в несколько раз. Как вы будете действовать? г) Как из этой формулы получить длину средней линии трапеции, параллельной ее основаниям?

50. Как вычислить площадь трапеции, если известны: а) все стороны; б) два основания и две диагонали; в) две боковые стороны и две диагонали; г) два основания и углы при одном из них;

д) две боковые стороны и высота? Выберите сами числовые данные и получите результат.

51. В равнобедренной трапеции длина боковой стороны 3, длина диагонали 4. Диагональ перпендикулярна боковой стороне. Вычислите площадь трапеции.

52. Нарисуйте отрезок AB . Пусть его длина равна d . Из его концов в одну сторону проведены два параллельных отрезка AA_1 и BB_1 . Известны расстояния d_1 и d_2 от точек A_1 и B_1 до (AB) . Найдите площадь четырехугольника AA_1B_1B .

§ 25. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

В этом параграфе мы докажем несколько теорем, связанных как с параллельностью, так и с подобием.

25.1. Средняя линия треугольника

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его *средней линией* (рис. 141). *Средняя линия отсекает от треугольника треугольник, подобный данному.* Это следует из второго признака подобия треугольников, так как у треугольников ABC и AMN угол A общий, а стороны AB, AC и AM, AN пропорциональны, так как

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, треугольник AMN подобен треугольнику ABC и коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$. Поэтому $MN = \frac{1}{2} AB$. Кроме того,

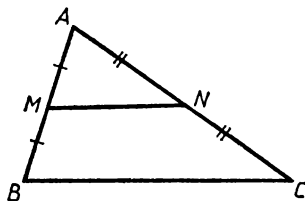


Рис. 141

так как в подобных треугольниках соответственные углы равны, то $\angle AMN = \angle B$. Поэтому $MN \parallel BC$. Итак, мы доказали, что *средняя линия треугольника параллельна соответствующей стороне и равна ее половине.*

25.2. Теорема об отрезках на сторонах угла, отсекаемых параллельными прямыми

Лемма (об отсеченном треугольнике). *Если прямая, параллельная основанию треугольника, пересекает две его стороны, то она отсекает треугольник, подобный исходному треугольнику. При этом стороны треугольника рассекаются на пропорциональные части.*

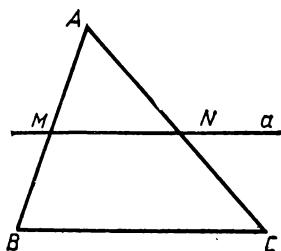


Рис. 142

Доказательство. Пусть прямая a , параллельная основанию BC треугольника ABC , отсекает от него треугольник AMN (рис. 142). Тогда углы этих треугольников соответственно равны: угол при вершине A у них общий, а углы, прилежащие к основаниям, равны как соответственные при параллельных a и BC и секущих AB и AC . Поэтому треугольники ABC и AMN подобны (по первому признаку подобия). Так как соответственные стороны подобных треугольников пропорциональны, то

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}. \quad (1)$$

Но $AB = AM + MB$ и $AC = AN + NC$. Подставляя эти суммы в (1) вместо AB и AC , получаем:

$$\frac{AM + MB}{AM} = \frac{AN + NC}{AN}.$$

Поэтому

$$1 + \frac{MB}{AM} = 1 + \frac{NC}{AN},$$

т. е.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}.$$

Лемма полностью доказана.

Теорема. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки.*

Доказательство. Пусть стороны угла O — лучи p и q — пересекают параллельные прямые a, b, c соответственно в точках A, A', B, B', C, C' (рис. 143). Требуется доказать, что отрезки AB и BC пропорциональны отрезкам $A'B'$ и $B'C'$, т. е.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}. \quad (2)$$

Применив лемму к треугольнику OBV' и прямой AA' , получим:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'},$$

т. е.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}. \quad (3)$$

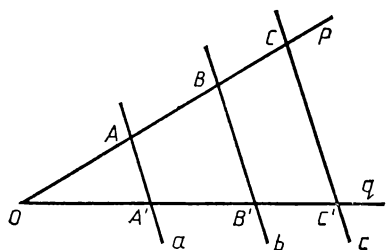


Рис. 143

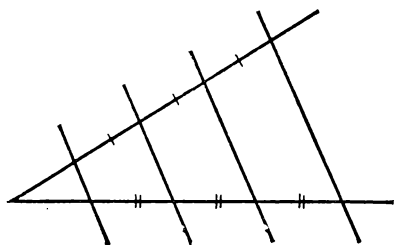


Рис. 144

Аналогично, еще раз применив лемму к треугольнику OCC' и прямой BB' , получим: $\frac{OB}{BC} = \frac{OB'}{B'C'}$, т. е.

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB}. \quad (4)$$

По той же лемме треугольники OAA' и OBB' подобны, т. е.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}. \quad (5)$$

Из равенств (3) — (5) следует (2). Теорема доказана.

Частным случаем доказанной теоремы является следующее утверждение, которое, как полагают, открыл знаменитый древнегреческий мыслитель Фалес Милетский (ок. 625 — ок. 547 до н. э.) и которое поэтому называют теоремой Фалеса.

Теорема Фалеса. *Если параллельные прямые пересекают стороны угла и на одной из сторон отсекают равные отрезки, то и на другой стороне угла они отсекают равные отрезки* (рис. 144).

Основную же теорему, доказанную в этом пункте, мы будем называть обобщенной теоремой Фалеса (сокращенно ОТФ).

25.3. Построение четвертого пропорционального отрезка и деление отрезка в данном отношении

З а д а ч а. Даны три отрезка a , b , c . Построить такой четвертый отрезок d , чтобы выполнялось равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Р е ш е н и е. Возьмем любой угол O и отложим на одной его стороне отрезки $OA = a$ и $AB = b$, а на другой — отрезок $OC = c$ (рис. 145). Соединим точки A и C и проведем через точку B прямую l , параллельную прямой AC . Прямая l пересечет другую сторону

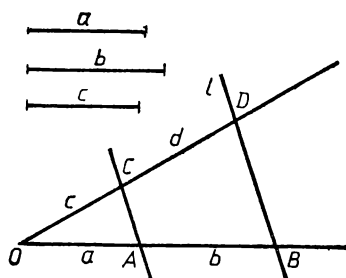


Рис. 145

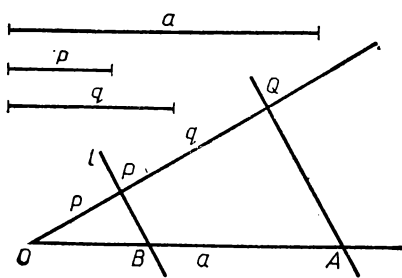


Рис. 146

угла O в точке D . По лемме об отсеченном треугольнике прямая AC пересекает стороны треугольника OBD на пропорциональные части, т. е.

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD}.$$

Так как $OA = a$, $AB = b$ и $OC = c$, то CD — это искомый отрезок d . Задача решена.

Задача. Разделить отрезок в данном отношении.

Решение. Условие этой задачи может быть задано двумя различными способами. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть дан отрезок a и его требуется разбить на отрезки, отношение которых равно отношению двух заданных отрезков p и q (рис. 146).

В этом случае поступаем так. На одной из сторон какого-либо угла O отложим отрезок $OA = a$. На другой стороне угла O отложим отрезки $OP = p$ и $PQ = q$. Через точку P проведем прямую $l \parallel QA$. Точка B , в которой прямая l пересечет отрезок OA , делит его в данном отношении $p : q$, так как по лемме $\frac{OB}{BA} = \frac{OP}{PQ}$, т. е.

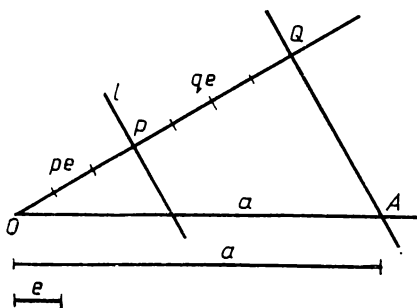


Рис. 147

$$\frac{OB}{BA} = \frac{p}{q}.$$

2) Отношение задается как отношение натуральных чисел p и q . Тогда на другой стороне угла O сначала откладывается p отрезков, равных некоторому отрезку e , т. е. строится отрезок $OP = pe$. А затем откладывается еще q таких отрезков,

т. е. строится отрезок $PQ = qe$ (рис. 147). Прямая $l \parallel AQ$ разобьет отрезок $OA = a$ на отрезки, отношение которых равно $p : q$. ■

Частным случаем этой задачи является задача о делении отрезка на n равных частей.

Задачи к § 25

Основные задачи

1. Нарисуйте угол AOB , отличный от развернутого. На луче OA отложите два равных отрезка: $OA_1 = A_1A_2$. На луче OB отложите два равных отрезка: $OB_1 = B_1B_2$. Объясните, почему $A_2B_2 \parallel A_1B_1$. Обобщите этот результат.

2. Пусть две параллельные прямые пересекаются третьими, проходящими через одну точку, не лежащую на данных параллельных прямых. Докажите, что на параллельных прямых получились пропорциональные отрезки.

3. Один конец отрезка лежит на данной прямой. Другой конец отрезка удален от нее на расстояние d . Чему равно расстояние до этой прямой от середины отрезка? От точки, делящей его в отношении $2 : 1$? От точки, делящей его в отношении $p : q$?

4. а) Один конец отрезка удален от данной прямой на расстояние d_1 , а другой — на расстояние d_2 . Отрезок находится с одной стороны от прямой. Ответьте на те же вопросы, что и в задаче 3. б) Как изменятся результаты, полученные в пункте а), если отрезок будет находиться по разные стороны от прямой?

5. Нарисуйте отрезок. Возьмите точку O , не лежащую на прямой, проходящей через этот отрезок. На отрезке возьмите любую точку X и на луче OX постройте точку Y такую, что $OY = 2 \cdot OX$. Пусть точка X пробегает весь данный отрезок. По какой линии будет двигаться точка Y ? Обобщите эту задачу.

Задачи к пп. 25.1, 25.2, 25.3

6. Нарисуйте треугольник. Через середину какой-либо его стороны проведите отрезок, параллельный его стороне. Объясните: а) почему он делит пополам еще одну сторону треугольника; б) почему он равен половине параллельной стороны.

7. Нарисуйте треугольник, а в нем среднюю линию. Объясните, почему она делит пополам одну медиану, а также биссектрису, вы-

соту. И вообще, какие отрезки в этом треугольнике она заведомо делит пополам? Может ли она делить пополам отрезок, выходящий из другой вершины треугольника с концом на стороне? Обобщите это утверждение.

8. Отрезок параллелен стороне треугольника, равен ее половине. Является ли он средней линией треугольника?

9. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, параллельная противоположной стороне. Докажите, что эти прямые ограничивают треугольник, подобный данному. Сравните его площадь с площадью данного.

10. Нарисуйте треугольник. Каждую его сторону разделите пополам. Через каждую точку деления проведите прямые, параллельные другим сторонам треугольника. Сколько треугольников будет на рисунке? Ответьте на тот же вопрос, если каждую сторону разделить на три равные части.

11. Нарисуйте равносторонний треугольник. Нарисуйте отрезок, концы которого лежат на его сторонах и который параллелен его стороне. Объясните, почему этот отрезок отсекает от данного треугольника равносторонний треугольник. Как будут обстоять дела, если сделать то же самое в равнобедренном треугольнике?

12. В треугольнике ABC провели на его стороны высоты AK и CL . Докажите, что: а) в общем случае KL и AC не являются параллельными отрезками (а в каком являются?); б) треугольники BKL и ABC подобны. в) Можете ли вы узнать, какую часть составляет $|BKL|$ от $|ABC|$ при заданном угле B ? г) Что изменится, если высоты будут проведены на продолжения сторон AB и BC ?

13. Равные стороны BC и BA равнобедренного треугольника ABC продлили за вершину B на равные отрезки BC_1 и BA_1 . Докажите, что $A_1C_1 \parallel AC$. Обобщите это утверждение.

14. Диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся на пропорциональные части. Будут ли в нем параллельные стороны?

15. В треугольнике ABC проведен отрезок KL ($K \in AB$, $L \in CB$). $KL \parallel AC$. Докажите, что $|BKC| = |BLA|$. Проверьте обратное утверждение.

16. Вычислите неизвестные длины отрезков (рис. 148).

17. Докажите, что медиана треугольника делит пополам каждый отрезок, параллельный той стороне, к которой она проведена. А как делятся такие отрезки биссектрисой треугольника?

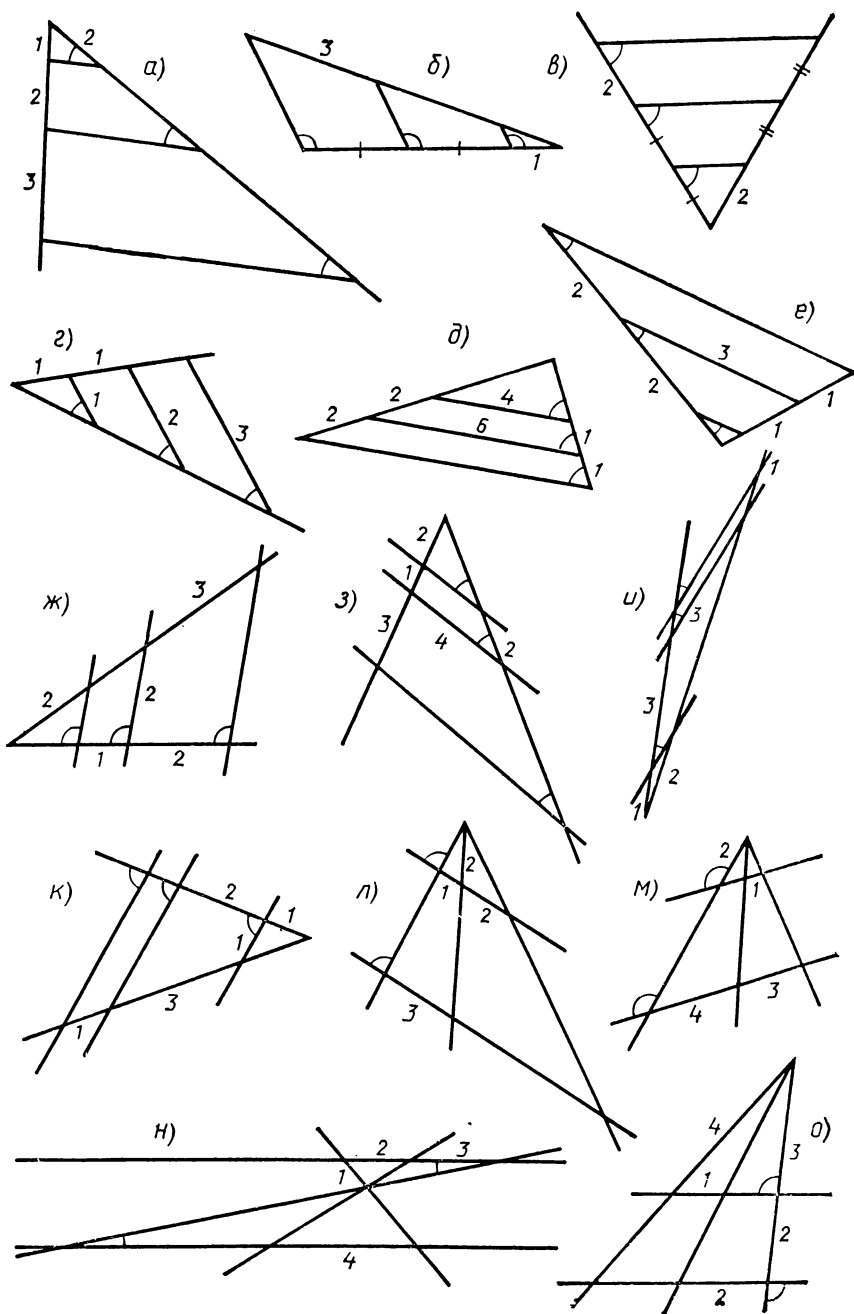


Рис. 148

18. Нарисуйте угол. Переменный отрезок с концами на сторонах угла движется параллельно самому себе. Какую фигуру образуют его середины? Точки, делящие его в одном отношении (считая от одной стороны угла)?

19. Нарисуйте две взаимно перпендикулярные прямые. Пусть отрезок упирается концами в эти прямые. Как найти расстояние до этих прямых от середины отрезка? От точки, делящей его в отношении $3 : 1$? От точки, делящей его в отношении $p : q$?

Задачи к п. 25.4

20. а) Через точку пересечения медиан треугольника проведите отрезок параллельно стороне до пересечения с другими его сторонами. Какую часть этот отрезок составляет от длины этой стороны? Проведите еще два таких же отрезка. Какой из них будет самым длинным? Самым коротким? Объясните, почему эти три отрезка могут быть сторонами треугольника.

21. Параллельно стороне треугольника проведен отрезок, концы которого лежат на других сторонах и длина каждого составляет $\frac{2}{3}$ от длины этой стороны. Проходит ли он через точку пересечения медиан треугольника?

22. а) Каждую медиану треугольника продлите за вершину треугольника на расстояние, равное этой медиане. Полученные точки соедините отрезками. Будет ли полученный треугольник подобен данному? б) Каждую медиану треугольника продолжите за сторону, к которой она проведена, на расстояние, равное длине этой медианы. Полученные точки соедините отрезками. Будет ли полученный треугольник подобен данному?

23. Через точку пересечения медиан треугольника провели прямую, параллельную его стороне. В каком отношении она делит высоту треугольника к этой же стороне? Пусть такая прямая делит высоту треугольника в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Проходит ли она через точку пересечения медиан? Обобщите полученные результаты.

24. Дан треугольник площадью S . а) Точку пересечения медиан соединили со всеми вершинами треугольника. На какие части по площади разделился треугольник? Есть ли в треугольнике еще точка с таким же свойством? б) Проведите все медианы. На какие части по площади разделился треугольник?

25. Дан треугольник площадью S . а) Через точку пересечения медиан треугольника проведите прямую, параллельную его стороне.

На какие части по площади разделился треугольник? Проведите еще одну такую же прямую. Ответьте на тот же вопрос. Наконец, проведите третью такую же прямую и ответьте на тот же вопрос. б) Через точку пересечения медиан треугольника проведите три отрезка так, чтобы треугольник разбился ими на три трапеции. Чему равны их площади?

26. Постройте равносторонний треугольник. Соедините отрезками середины его сторон. Постройте точку пересечения медиан данного и построенного треугольников. Что вы заметили? Как это доказать? Как это обобщить?

27. а) Однажды Федя построил треугольник, а в нем точку пересечения медиан. А Вася оставил от этого треугольника только две вершины и эту точку. Сможет ли Федя восстановить треугольник? б) Федя восстановил треугольник, о котором шла речь в задаче а), затем построил треугольник и точку пересечения его медиан. Он отметил середины двух его сторон. Потом он стер треугольник, оставил только две середины и точку пересечения его медиан. И предложил Васе восстановить треугольник. Сможет ли Вася это сделать?

ВЫВОДЫ

1. Прямые в плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Основная теорема о параллельных прямых (п. 23.2) утверждает, что через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной прямой (рис. 149).

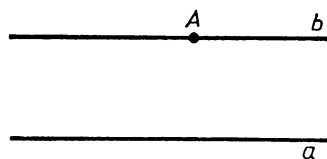


Рис. 149

2. Самые важные свойства параллельных прямых выражает теорема об углах, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой (п. 23.4). Согласно этой теореме, если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то соответственные углы равны, внутренние накрест лежащие углы равны, сумма внутренних односторонних углов равна 180° (рис. 150).

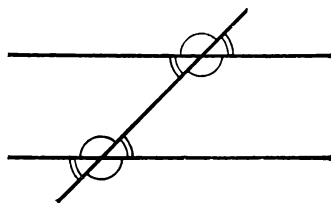


Рис. 150

3. Эти свойства параллельных прямых являются их характеристическими свойствами, т. е. обратные им утверждения дают следующие признаки параллельности прямых: две прямые параллельны, если при пересечении их третьей прямой выполняется одно из следующих условий: 1) соответственные углы равны; 2) внутренние накрест лежащие углы равны; 3) сумма внутренних односторонних углов равна 180° (п. 23.3).

4. Отметим еще, что параллельные прямые идут на постоянном расстоянии друг от друга, т. е. все точки одной из этих прямых равноудалены от другой прямой (п. 23.5).

5. В теории и задачах, как правило, рассматриваются не параллельные прямые, а параллельные отрезки. Параллельные отрезки — это отрезки, лежащие на параллельных прямых.

6. Параллельностью своих сторон характеризуются два вида четырехугольников: параллелограммы и трапеции (§ 24).

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны. Трапецией называется четырехугольник, у которого лишь две противоположные стороны параллельны. Эти стороны называются основаниями трапеции.

Из многочисленных свойств параллелограмма мы доказали три самых важных: 1) противоположные стороны параллелограмма равны; 2) противоположные углы параллелограмма равны; 3) диагонали параллелограмма точкой их пересечения делятся пополам (п. 24.1).

Эти свойства параллелограмма являются характеристическими свойствами, т. е. обратные им утверждения дают признаки параллелограмма. Например, четырехугольник — параллелограмм, если его противоположные стороны равны. Другой признак: четырехугольник — параллелограмм, если его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Нами доказан и такой признак параллелограмма: если две противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны, то четырехугольник — параллелограмм (п. 24.2).

7. Выделяются два частных вида параллелограмма: прямоугольник и ромб. Прямоугольник — это четырехугольник, у которого все углы прямые. А ромб — это четырехугольник, у которого все стороны равны. Прямоугольник и ромб являются параллелограммами.

Прямоугольник и ромб характеризуются свойствами своих диагоналей: прямоугольник — это параллелограмм, диагонали ко-

торого равны, а ромб — это параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

8. Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки одной стороны на противоположную сторону или ее продолжение. Высотой трапеции называется перпендикуляр, опущенный из точки одного основания трапеции на другое основание или ее продолжение.

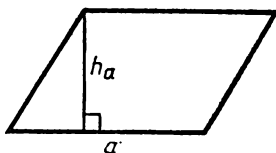


Рис. 151

Площадь параллелограмма равна произведению любой стороны на соответствующую высоту, т. е. $S = ah_a$ (рис. 151).

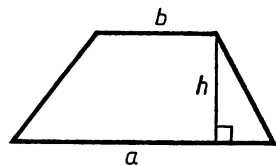


Рис. 152

Площадь трапеции равна половине произведения суммы ее оснований на высоту, т. е. $S = \frac{1}{2} (a + b) h$ (рис. 152).

9. Напомним теорему о том, что параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на них пропорциональные отрезки (п. 25.2). Частным случаем этой теоремы является теорема Фалеса: если параллельные прямые пересекают стороны угла и на одной из сторон отсекают равные отрезки, то и на другой стороне угла они отсекают равные отрезки (п. 25.2).

ВЕКТОРЫ

§ 26. ВЕКТОРЫ

26.1. Понятие вектора

Известные вам величины могут быть двух видов. Есть величины, которые вполне определяются своими численными значениями (при данных единицах измерения): например, длина, площадь, масса. Такие величины называются **скалярными величинами** или, короче, **скалярами**.

Но есть и такие величины, которые задаются не только своими численными значениями, но и направлениями: например, скорость, сила, давление. Так, часто недостаточно знать, что скорость поезда или автомобиля равна 50 км/ч, надо еще знать, в каком направлении идет этот поезд или автомобиль.

Величины, которые характеризуются не только численным значением, но и направлением, называются **векторными величинами** или, короче, **векторами**.

Численное значение вектора называется его **модулем** или **абсолютной величиной**.

Для обозначения векторов употребляются стрелки: \vec{a} , \vec{b} и т. п. Эти обозначения читаются так: «вектор a », «вектор b » и т. п. Для модулей векторов употребляется тот же знак, что и для модулей чисел: $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ и т. п.

Вектор изображают отрезком со стрелкой на конце, указывающей направление вектора (рис. 153). Длина отрезка изображает численное значение вектора (при данной единице измерения).

В геометрии рассматривают векторы, модули которых — это длины отрезков или расстояния между точками. Поэтому в геометрии модуль вектора называют также его длиной.

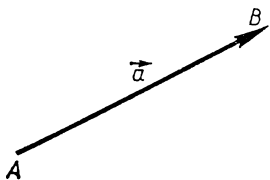


Рис. 153

26.2. Направленные отрезки

Простейший пример векторной величины представляет перемещение. Перемещение характеризуется расстоянием, на

которое оно происходит, и направлением. Если тело переместилось из точки A в точку B , то это перемещение естественно изобразить отрезком, направленным из точки A в точку B (рис. 154).

Так появляется понятие **направленного отрезка**, т. е. отрезка, у которого указан порядок концов: первый конец считается «началом», второй — «концом». Рисуют направленные отрезки всегда со стрелкой на конце. Обозначают направленный отрезок с началом A и концом B так: \overrightarrow{AB} .

Итак, **вектор** (векторную величину) — перемещение из точки A в точку B — мы изобразили направленным отрезком \overrightarrow{AB} . Направленными отрезками изображают и другие векторные величины: например, в физике — силу, скорость (рис. 155).

Векторами называют и сами направленные отрезки. Это не совсем точно: предмет и его изображение не одно и то же. Но в обычной речи, показывая, например, слона на фотографии, говорят: «Это слон» — и никто не говорит: «Это изображение слона». Так

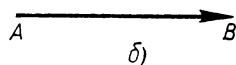
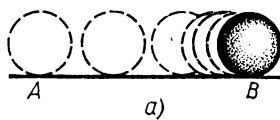


Рис. 154

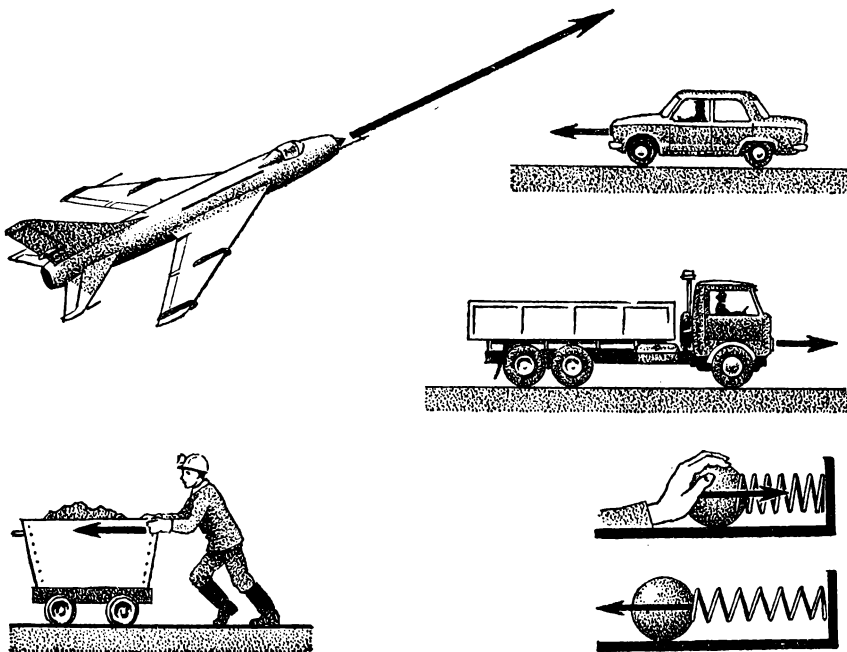


Рис. 155

и в геометрии с вектором: рисуя направленный отрезок, говорят, что это вектор, хотя это только изображение вектора.

Поэтому если направленный отрезок \overrightarrow{AB} изображает вектор \vec{a} , то пишем $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и про направленный отрезок \overrightarrow{AB} говорим: «Вектор \overrightarrow{AB} равен вектору \vec{a} ».

Мы будем говорить, что *направленный отрезок лежит на прямой* или *направленный отрезок перпендикулярен (параллелен) прямой* и т. п., если соответствующий ему отрезок лежит на прямой или перпендикулярен (параллелен) прямой и т. п. Точно так же мы говорим о длине направленного отрезка, имея в виду длину соответствующего ему отрезка.

Параллельность векторов прямым или друг другу определяется аналогично параллельности направленных отрезков. А именно говорят, что *вектор параллелен данной прямой*, если изображающие его направленные отрезки параллельны этой прямой или лежат на ней.

Два вектора называются параллельными, если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой.

Параллельность вектора \vec{v} прямой a обозначается так: $\vec{v} \parallel a$.

Параллельность векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Аналогично параллельности определяется *перпендикулярность двух векторов*, а также *перпендикулярность вектора прямой*.

Мы будем также употреблять выражение «вектор лежит на прямой», когда изображающий его отрезок лежит на прямой.

26.3. Одинаково направленные векторы

Понятно, какие векторы одинаково направлены, т. е. имеют

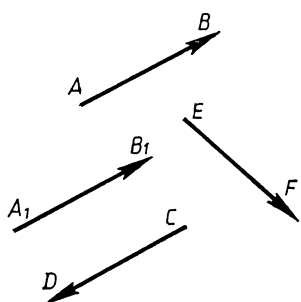


Рис. 156

одно и то же направление: они параллельны или лежат на одной прямой и направлены в одну сторону. Например, на рисунке 156 векторы \overrightarrow{AB} и $\overrightarrow{A_1B_1}$ одинаково направлены, а \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{EF} направлены не одинаково ни с \overrightarrow{AB} , ни друг с другом; \overrightarrow{CD} направлен противоположно \overrightarrow{AB} .

Точное определение можно дать такое. Два вектора называются **одинаково**

направленными, если оба они направлены от некоторой перпендикулярной им прямой, т. е. они лежат по одну сторону от этой прямой и концы их дальше от нее, чем начала (рис. 157). Такие векторы, поскольку они перпендикулярны одной прямой, параллельны или лежат на одной прямой. (Поэтому в определении нет необходимости упоминать об этом.) Об одинаково направленных векторах короче говорят, что они **сонаправлены**. Сонаправленность векторов \vec{a} и \vec{b} обозначают так: $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

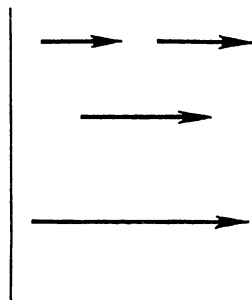


Рис. 157

Если вектор \vec{AB} лежит по одну сторону от прямой p , то сравнить, будет ли его конец дальше от нее, чем начало, можно и без измерения расстояний. Достаточно продолжить отрезок \vec{AB} за точку A : если продолжение пересечет прямую p , то, значит, точка A ближе к прямой p , чем B (рис. 158).

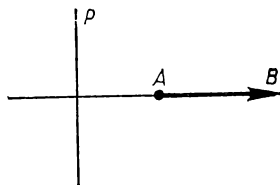


Рис. 158

Если векторы лежат на одной прямой, то нет необходимости проводить перпендикулярную им прямую; они будут сонаправлены, если на содержащей их прямой есть такая точка P , что все векторы лежат с одной стороны от нее и их концы дальше от P , чем начала (рис. 159).

Если векторы \vec{AB} и \vec{CD} параллельны или лежат на одной прямой, но не сонаправлены, то говорят, что они **направлены противоположно** (рис. 160) и пишут: $\vec{AB} \downarrow \vec{CD}$.

Теорема (о сонаправленных векторах). Два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены друг с другом.

Доказательство. Пусть векторы $\vec{A_1B_1}$ и $\vec{A_2B_2}$ сонаправлены с вектором \vec{AB} . Согласно определению это означает следующее. Векторы $\vec{A_1B_1}$ и \vec{AB} перпендикулярны некоторой прямой

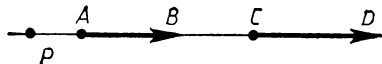


Рис. 159



Рис. 160

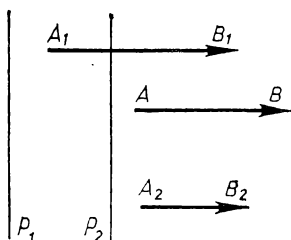


Рис. 161

p_1 , лежат с одной стороны от нее и их начала ближе к ней, чем концы (рис. 161). Эти же условия выполняются для векторов $\vec{A_2B_2}$ и \vec{AB} и некоторой прямой p_2 . Так как прямые p_1 и p_2 перпендикулярны одной прямой AB , то $p_1 \parallel p_2$.

Одна из этих прямых лежит дальше от \vec{AB} , чем другая. Пусть это будет, например, прямая p_1 . Все три вектора \vec{AB} , $\vec{A_1B_1}$, $\vec{A_2B_2}$ лежат по одну сторону от p_1 , и концы их лежат от нее дальше, чем начала. Поскольку $\vec{A_2B_2} \perp p_2$ и $p_2 \parallel p_1$, то $\vec{A_2B_2} \perp p_1$ (по свойству параллельных и секущей). Значит, оба вектора $\vec{A_1B_1}$ и $\vec{A_2B_2}$ направлены от прямой p_1 , т. е. они сонаправлены. ■

О сонаправленных векторах говорят, что у них одно и то же направление; \neq сонаправленных векторов направления разные.

З а м е ч а н и е. Говорить так имеет смысл благодаря доказанной теореме. В самом деле, допустим, что векторы $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ сонаправлены с \vec{a} . Тогда мы говорим, что у них то же направление, что у \vec{a} . Если бы при этом оказалось, что они не сонаправлены друг с другом, то получалось бы, что у них разные направления, а это было бы бессмысленно. Теорема о сонаправленных векторах исключает возникновение таких противоречий.

26.4. Равные векторы

Векторы называются равными, если их длины равны и они сонаправлены (рис. 162).

Как и в случае равенства чисел, величин и т. д., для равенства векторов выполняются следующие основные свойства.

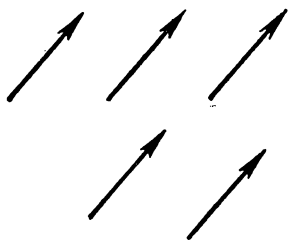


Рис. 162

1. Каждый вектор равен самому себе.
2. Если вектор \vec{a} равен вектору \vec{b} , то \vec{b} равен \vec{a} .
3. Два вектора, равные третьему вектору, равны.

Эти свойства выполняются для векторов, потому что выполняются для их длин и направлений. Например, два вектора,

равные третьему, равны, потому что у них длины равны и направление у них одно и то же, так как два вектора, сонаправленные с третьим, сонаправлены.

Если равные векторы \vec{AB} и \vec{CD} не лежат на одной прямой, то четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм. Это вытекает из третьего признака параллелограмма, так как из равенства векторов \vec{AB} и \vec{CD} следует, что отрезки AB и CD равны и параллельны, а также направлены в одну сторону.

Ясно, что верно и обратное: если $ABDC$ — параллелограмм, то $\vec{AB} = \vec{CD}$ (по свойствам параллелограмма).

Итак, равенство двух векторов, не лежащих на одной прямой, равносильно тому, что они служат соответственно направленными противоположными сторонами параллелограмма.

Рассмотрим теперь другую пару параллельных сторон параллелограмма $ABDC$ (рис. 163): AC и BD . Эти отрезки равны, параллельны, и если их направить от стороны AB к стороне CD , то снова получим пару равных векторов: \vec{AC} и \vec{BD} .

Следовательно, исходя из равенства векторов \vec{AB} и \vec{CD} , не лежащих на одной прямой, мы доказали равенство векторов \vec{AC} и \vec{BD} .

Оказывается, что это верно и тогда, когда векторы лежат на одной прямой, так что выполняется следующий признак равенства векторов.

Т е о р е м а (признак равенства векторов). Если $\vec{AB} = \vec{CD}$, то $\vec{AC} = \vec{BD}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны равные векторы: $\vec{AB} = \vec{CD}$. Если они не лежат на одной прямой, то, как уже показано, они служат противоположными сторонами параллелограмма и $\vec{AC} = \vec{BD}$.

Пусть теперь \vec{AB} и \vec{CD} лежат на одной прямой. Тогда они заключены в одном отрезке с концами в начале одного вектора и в конце другого (рис. 164). (Если бы концы такого отрезка оба были концами или оба были началами данных векторов, то векторы были бы направлены противо-

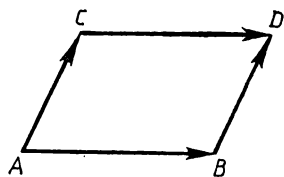


Рис. 163

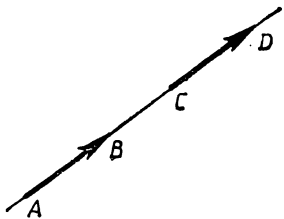


Рис. 164

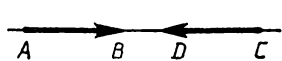


Рис. 165

положно, рис. 165.) Пусть, например, \vec{AB} и \vec{CD} заключены в отрезке \vec{AD} .

Тогда, так как $AB = CD$, то $BD = = AD - AB = AD - CD = AC$. Отрезки

AC и BD равны, т. е. векторы \vec{AC} и \vec{BD} равны по длине. Вектор \vec{AC} можно продолжить за конец C до точки D . А это означает, что векторы \vec{AC} и \vec{BD} одинаково направлены. Стало быть, они равны, что и требовалось доказать.

26.5. Откладывание вектора

Отложить от данной точки вектор, равный данному, — значит построить направленный отрезок с началом в этой точке, равный данному вектору. (На рисунке 166 от точки A отложен вектор \vec{AB} , равный вектору \vec{a} .)

Т е о р е м а (об откладывании вектора). *От любой данной точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны вектор $\vec{a} = \vec{AB}$ и точка C , от которой надо отложить вектор, равный \vec{a} . Возможны два случая.

1. Точка C лежит на прямой AB .
2. Точка C не лежит на прямой AB .

В первом случае вектор \vec{CD} , равный \vec{AB} , должен лежать на той же прямой. Возьмем на этой прямой точку P на луче, противоположном лучу AB , так, чтобы точка C лежала с той же стороны от нее, что и вектор \vec{AB} . Затем откладываем от C отрезок CD , равный AB , в ту же сторону от P (рис. 167). Вектор \vec{CD} равен \vec{AB} .

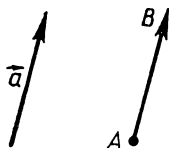


Рис. 166

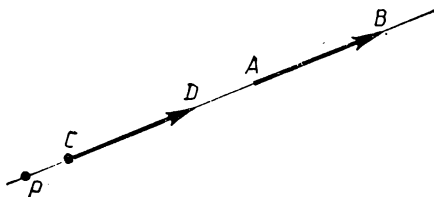


Рис. 167

Пусть теперь точка C не лежит на прямой AB . Тогда построим параллелограмм $ABDC$ (рис. 168). Получим вектор $\vec{CD} = \vec{AB}$.

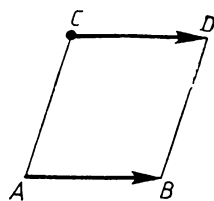


Рис. 168

То, что от данной точки можно отложить только один вектор, равный данному, очевидно: два равных вектора с общим началом совпадают, так как лежат на одной прямой с одной стороны от их общего начала и равны по длине (вспомните, что по аксиоме от данной точки на данной прямой в одну сторону можно отложить только один отрезок, равный данному). ■

26.6. Нулевой вектор

Для того чтобы определить сложение векторов во всех случаях (это будет сделано в следующем параграфе), нужно ввести еще **нулевой вектор** — такой вектор, модуль которого равен нулю. *Направления нулевой вектор не имеет.* Нулевой вектор короче называют также **нуль-вектором** и обозначают так: $\vec{0}$. Изображается нулевой вектор любой точкой, которая рассматривается как начало и конец этого вектора. Считается, что *нуль-вектор параллелен и перпендикулярен любой прямой (любому вектору).*

Если, как и прежде, считать, что вектор \vec{AB} изображает перемещение из точки A в точку B , то нуль-вектор изображает «перемещение» из точки A в ту же точку, т. е. стояние на месте (покой есть частный случай перемещения).

Введя нуль-вектор, мы не будем исключать, что произвольно взятый вектор \vec{AB} — это нуль-вектор, когда его начало A и конец B — это одна и та же точка.

Введение нуль-вектора не нарушает доказанной теоремы, что от каждой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один. Если данный вектор — это нуль-вектор и A — данная точка, то отложенный от нее нуль-вектор — это вектор \vec{AA} . После того как появился нуль-вектор, уже нельзя сказать, что каждый вектор изображается направленным отрезком (каждый, кроме нулевого).

Подчеркнем, что *сонаправленность определена только для ненулевых векторов и теорема о сонаправленных векторах верна лишь для ненулевых векторов.*

26.7. * Угол между векторами

Угол между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} определяется следующим образом. Их надо отложить от одной точки O (рис. 169): $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$, а затем найти величину угла между отрезками \vec{OA} и \vec{OB} . Эта величина и называется углом между векторами \vec{a} и \vec{b} и обозначается (\vec{a}, \vec{b}) .

Итак, углом между двумя ненулевыми векторами называется величина образуемого ими угла, когда они отложены от одной точки.

Если векторы сонаправлены, то угол между ними полагается равным нулю градусов, а если они направлены противоположно, то этот угол равен 180° .

Чтобы данное определение имело смысл, надо доказать, что угол между векторами не зависит от выбора той точки, от которой они откладываются. Докажем это.

Для сонаправленных (а также для противоположно направленных) векторов это вытекает из определения.

Рассмотрим общий случай, когда векторы \vec{a} и \vec{b} лежат на пересекающихся прямых. Отложим их от точки O (рис. 170): $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ и от точки O_1 : $\vec{O_1A_1} = \vec{a}$, $\vec{O_1B_1} = \vec{b}$. Прямые OA и O_1B_1 пересекаются в некоторой точке O_2 . Обозначим через α тот угол с вершиной в точке O_2 , который будет соответственным с углом AOB при параллельных прямых OB и O_1O_2 и секущей OO_2 . По теореме об углах при параллельных и секущей $\alpha = \widehat{AOB}$. Но тот же угол α будет соответственным и для угла $A_1O_1B_1$ при параллельных

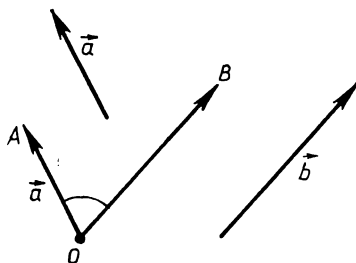


Рис. 169

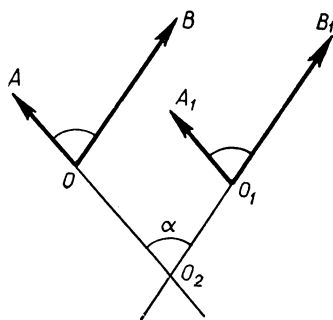


Рис. 170

прямых OO_2 и O_1A_1 и секущей O_1O_2 . Поэтому по той же теореме $\alpha = \widehat{A_1O_1B_1}$. Следовательно, $\widehat{AOB} = \widehat{A_1O_1B_1}$. Требуемое утверждение доказано.

Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то угол между ними не определяется.

Задачи к § 26

Основные задачи

1. От всех точек фигуры F откладывается один и тот же вектор. Какую фигуру F_1 образуют его концы, если F : а) отрезок; б) прямая; в) треугольник; г) параллелограмм; д) окружность?

Задачи к п. 26.4

2. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Объясните, откуда следует, что $\vec{AB} = \vec{DC}$. Назовите другие равные векторы, заданные сторонами параллелограмма. Пусть точка O — точка пересечения его диагоналей. Назовите вектор, равный \vec{BO} , \vec{AO} , \vec{DO} , \vec{CO} .

3. а) Нарисуйте векторы \vec{AB} и \vec{CD} , равные между собой и не лежащие на одной прямой. Докажите, что $\vec{BA} = \vec{DC}$ и $\vec{AC} = \vec{BD}$. Какие еще векторные равенства можно записать? б) Решите задачу а) для случая, когда векторы \vec{AB} и \vec{CD} лежат на одной прямой.

4. Пусть $\vec{AB} = \vec{BA}$. Что из этого следует?

Задачи к пп. 26.5, 26.7

5. Нарисуйте вектор длины 1. Нарисуйте другой вектор длины 1, который образует с данным угол 30° и начинается: а) в начале данного вектора; б) в конце данного вектора; в) в произвольной точке.

Прodelайте такую же работу для вектора длины 1, который образует с данным угол 140° .

6. Нарисуйте вектор. а) От его начала и конца отложите два равных вектора. Объясните, почему они будут образовывать с данным вектором равные углы. б) От его начала и конца отложите векторы равной длины, образующие с данным вектором один и тот же угол. Будут ли равны эти векторы?

7. Нарисуйте треугольник ABC . С помощью транспортира установите величины углов между \vec{AB} и \vec{AC} , \vec{AB} и \vec{BC} , \vec{BC} и \vec{AC} .

8. Вычислите углы между \vec{BC} и \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{AC} в треугольнике ABC , если: а) $AB = AC$, $\hat{A} = 60^\circ$; б) $AB = 2AC$, $\hat{A} = 60^\circ$; в) $AB = AC$, $\hat{A} = \varphi$.

9. Нарисуйте вектор \vec{a} . Пусть $\widehat{(\vec{b}, \vec{a})} = \varphi_1$, $\widehat{(\vec{c}, \vec{a})} = \varphi_2$. Вычислите $\widehat{(\vec{b}, \vec{c})}$, если: а) $\varphi_1 = \varphi_2 = 60^\circ$; б) $\varphi_1 = \varphi_2 = 100^\circ$; в) $\varphi_1 = 100^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$. Как решить задачу в общем случае?

10. а) Нарисуйте треугольник ABC такой, что $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CA}|$. Чему равен угол между каждой парой указанных векторов? б) Нарисуйте три единичных вектора \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 так, что углы между ними равны. Чему равен угол между ними?

11. Какой угол образуют между собой два вектора: а) сонаправленных; б) противоположно направленных; в) параллельных?

§ 27. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

27.1. Определение сложения

Если тело переместить из точки A в точку B , а потом в точку C , то его суммарное перемещение из A в C представляется вектором \vec{AC} (рис. 171). Так складываются векторы \vec{AB} и \vec{BC} :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}. \quad (1)$$

В рассмотренном случае конец первого вектора \vec{AB} является началом второго вектора \vec{BC} . В общем же случае векторы \vec{a} и \vec{b} складывают так.

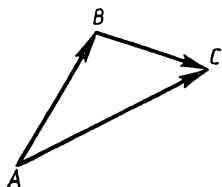


Рис. 171

Откладывают от какой-либо точки A вектор \vec{AB} , равный вектору \vec{a} , а потом от точки B вектор \vec{BC} , равный вектору \vec{b} (рис. 172). Тогда вектор \vec{AC} представляет сумму векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

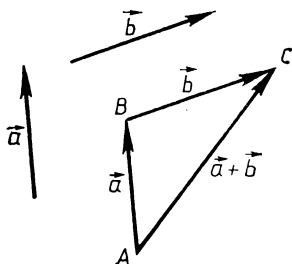


Рис. 172

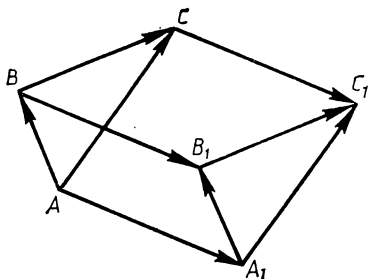


Рис. 173

Это правило получения суммы двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется *правилом треугольника*, потому что если векторы \vec{AB} и \vec{BC} не лежат на одной прямой, то их сумма представляет сторону треугольника ABC .

Итак, можно сформулировать определение: **суммой двух векторов называется вектор, построенный по правилу треугольника.**

В частности, если вектор \vec{AB} складывается с противоположным вектором \vec{BA} , то в сумме получается нуль-вектор: $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}$.

Здесь и видно, что если бы мы не ввели нуль-вектор, то нельзя было бы сказать, что для любых двух векторов определена их сумма.

Мы определили сумму данных векторов, отложенную от какой-либо данной точки A . А что будет, если взять другую точку? Оказывается, что сумма получится равная прежней. Именно, выполняется следующая теорема.

Т е о р е м а (о сумме векторов). Суммы равных векторов равны, т. е. если $\vec{a} = \vec{a}_1$, $\vec{b} = \vec{b}_1$ и построены суммы от каких-либо точек A и A_1 :

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{A_1C_1} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1,$$

то эти суммы равны: $\vec{AC} = \vec{A_1C_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отложив от точки A вектор $\vec{a} = \vec{AB}$ и от его конца B — вектор $\vec{b} = \vec{BC}$, получим (рис. 173):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

Точно так же, откладывая от точки A_1 вектор $\vec{a}_1 = \vec{A_1B_1}$ и от его конца B_1 вектор $\vec{b}_1 = \vec{B_1C_1}$, получим:

$$\vec{a}_1 + \vec{b}_1 = \vec{A_1B_1} + \vec{B_1C_1} = \vec{A_1C_1}.$$

Так как $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$, то по признаку равенства векторов $\vec{AA_1} = \vec{BB_1}$. Аналогично, из равенства $\vec{BC} = \vec{B_1C_1}$ следует равенство $\vec{BB_1} = \vec{CC_1}$. Поэтому $\vec{AA_1} = \vec{CC_1}$. Но из этого равенства по тому же признаку равенства векторов следует, что $\vec{AC} = \vec{A_1C_1}$. ■

27.2. Правило параллелограмма. Переместительный закон сложения

При сложении векторов по правилу треугольника векторы складываются в определенном порядке. Сумма $\vec{a} + \vec{b}$ получается так, что от данной точки откладывается сначала вектор, равный вектору \vec{a} . А что будет, если откладывать сначала вектор, равный вектору \vec{b} ? Оказывается, сумма получится та же самая, т. е. выполняется переместительный закон сложения, или, как еще говорят, сложение векторов коммутативно (что и значит по-русски — переместительно): *для любых векторов \vec{a}, \vec{b}*

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \quad (2)$$

Доказательство. Возможны два случая.

1) Векторы \vec{a} и \vec{b} непараллельны. Тогда построим их сумму по правилу треугольника: $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$ (рис. 174). Построим параллелограмм $ABCB_1$ со сторонами AB и BC . Противоположные его стороны, соответственно направленные, задают равные векторы. Поэтому $\vec{AB_1} = \vec{BC} = \vec{b}$ и $\vec{B_1C} = \vec{AB} = \vec{a}$.

Вместе с тем $\vec{AB_1} + \vec{B_1C} = \vec{AC}$.

Поэтому

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Доказав равенство (2) в первом случае, мы доказали «правило параллелограмма»: *если векторы не лежат на одной*

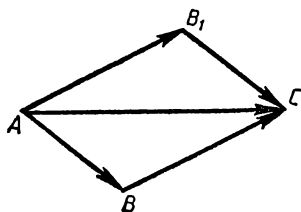


Рис. 174

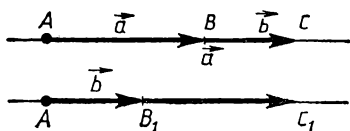


Рис. 175

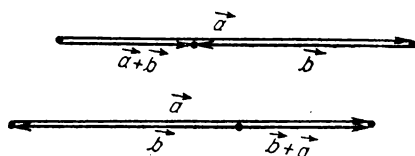


Рис. 176

прямой, то их сумма представляется диагональю построенного на них параллелограмма.

2) Остается рассмотреть случай, когда векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{BC}$ лежат на одной прямой. Нужно доказать, что и в этом случае, если $\vec{AB}_1 = \vec{BC}$ и $\vec{B}_1C_1 = \vec{AB}$, то $\vec{AC}_1 = \vec{AC}$, т. е. точки C и C₁ совпадают (рис. 175, на рисунке для ясности векторы нарисованы на разных прямых). Можно различать два случая: а) векторы \vec{AB} и \vec{BC} сонаправлены; б) они направлены противоположно. В первом случае доказательство получается из рассмотрения сложения отрезков (рис. 175), во втором — из вычитания (рис. 176). Подробное доказательство проведите самостоятельно.

З а м е ч а н и е. Правило треугольника естественно применяется при последовательных перемещениях: сначала \vec{AB} , потом \vec{BC} , в сумме получаем \vec{AC} . Правило же параллелограмма столь же естественно применяется, когда тело одновременно испытывает два перемещения, как, скажем, человек, идущий по палубе корабля. Одно перемещение — это перемещение его вместе с кораблем, другое — по палубе (рис. 177). В сумме же человек перемещается по диагонали параллелограмма, стороны которого — это перемещение корабля и перемещение по палубе. Совершенно так же перемещение лодки, пересекающей реку, складывается из ее перемещения поперек и по течению, т. е. вместе с водой (рис. 178).

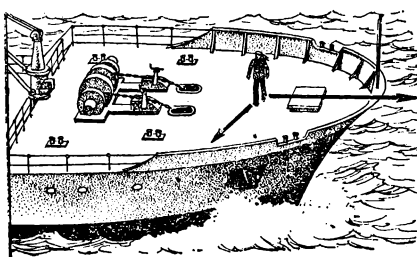


Рис. 177

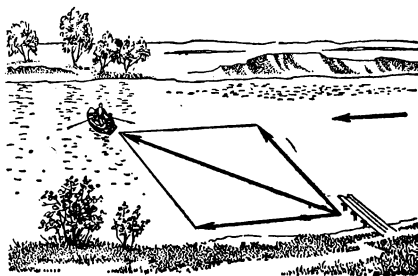


Рис. 178

27.3. Сочетательный закон сложения

Сочетательным законом, или ассоциативностью сложения, называется то его свойство, что слагаемые можно группировать, причем сумма не изменяется. Как для чисел, например: $(2 + 5) + 6 = 2 + (5 + 6)$, так и для любых векторов:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \quad (3)$$

Доказательство. Отложим от точки A вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, затем вектор $\vec{BC} = \vec{b}$, а потом вектор $\vec{CD} = \vec{c}$ (рис. 179). Тогда

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

и

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}.$$

Итак, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, что и требовалось доказать.

Пользуясь установленным законом для трех векторов, можно группировать слагаемые при любом их числе. Поэтому суммы векторов пишут, никак не объединяя слагаемые: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ или $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ и т. д.

Из сочетательного и переместительного законов следует, что в сумме любого числа векторов можно как угодно переставлять и группировать слагаемые.

27.4. Противоположный вектор. Вычитание

Вектор называется противоположным данному вектору, если у него длина та же, а направление противоположное (нуль-вектор считается противоположным самому себе).

Так, вектор \vec{BA} противоположен вектору \vec{AB} и всякий вектор, равный \vec{BA} , противоположен \vec{AB} (рис. 180). Вектор \vec{AB} в свою оче-

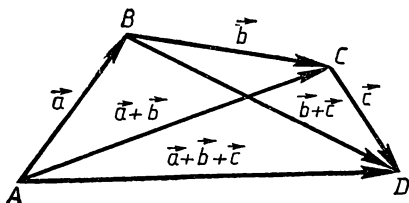


Рис. 179

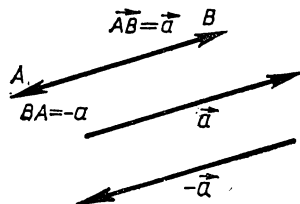


Рис. 180

редь противоположен \overrightarrow{BA} , так что эти векторы взаимно противоположны. В сумме

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}. \quad (4)$$

Если здесь векторы заменить равными, то, как доказано в теореме о сумме векторов, сумма будет равна той же самой, т. е. будет нуль-вектором. Итак, *сумма данного вектора и противоположного вектора равна нуль-вектору.*

Вектор, противоположный вектору \vec{a} , обозначается $-\vec{a}$ (читается: «минус \vec{a} »), так что

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}. \quad (5)$$

Вычитание векторов, как и вычитание чисел, — действие, обратное сложению. Поэтому **разность** $\vec{a} - \vec{b}$ **двух векторов** \vec{a} и \vec{b} — это такой вектор \vec{c} , что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Разность двух данных векторов \vec{a} и \vec{b} можно построить так. Отложив от какой-либо точки A данные векторы \vec{a} и \vec{b} , получим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ (рис. 181). Тогда вектор \overrightarrow{CB} и будет разностью $\vec{a} - \vec{b}$, поскольку

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

Поэтому можно написать:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}. \quad (6)$$

Вычитание векторов можно свести к сложению. А именно вычитание вектора равносильно прибавлению противоположного ему вектора, т. е.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \quad (7)$$

Действительно, вектор \overrightarrow{CB} в равенстве (6) можно получить по правилу треугольника:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}.$$

Но $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ — вектор, противоположный вектору $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Значит,

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CB} = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

что и утверждает равенство (7).

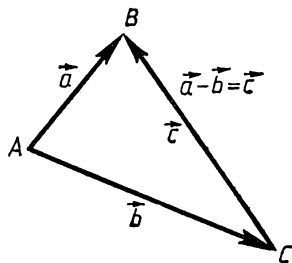


Рис. 181

Поскольку вычитание векторов сводится к сложению, то для него верен тот же основной вывод: *разности равных векторов равны, т. е. если $\vec{a} = \vec{a}_1$, $\vec{b} = \vec{b}_1$, то $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a}_1 - \vec{b}_1$.*

Определив вектор, противоположный данному вектору, и операцию вычитания векторов, мы можем теперь переносить вектор из одной части равенства в другую, изменяя его знак, т. е. заменяя на противоположный.

Действительно, допустим, что имеется равенство

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{p}.$$

На каком основании и как можно перенести, например, вектор \vec{b} в правую часть? Прибавим к обеим частям вектор $-\vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + (-\vec{b}) = \vec{p} + (-\vec{b}).$$

Переставляя и группируя слагаемые в левой части, получим:

$$\vec{a} + (\vec{b} - \vec{b}) + \vec{c} = \vec{p} - \vec{b}.$$

Так как $\vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$, то

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{p} - \vec{b}.$$

Вектор \vec{b} слева «исчез»; он «перенесен» направо: справа появился вектор $-\vec{b}$.

Итак, подводя итоги, можно сказать, что у операции сложения векторов те же свойства, что и у операции сложения чисел.

27.5. Разложение на составляющие

Самолет взлетел, его перемещение складывается из двух составляющих: по горизонтали и по вертикали (рис. 182). Допустим, пролетев по горизонтали 100 км, он набрал высоту 10 км. Горизонтальная составляющая его перемещения равна 100 км, вертикальная — 10 км. Это составляющие вектора, изображающего перемещение самолета. Сам этот вектор является их суммой.

Вообще, составляющими данного вектора называются векторы, дающие в сумме этот вектор. Он составляется из них как сумма из слагаемых. Вместе с тем говорят, что вектор разлагается на составляющие подобно тому, как, скажем, число может разлагаться на слагаемые.



Рис. 182

Теорема (о разложении вектора на составляющие). *Какие ни взять две пересекающиеся прямые, всякий вектор можно разложить на составляющие, параллельные этим прямым. При этом у равных векторов соответственные составляющие равны.*

Доказательство. Пусть даны две пересекающиеся прямые и вектор \overrightarrow{AB} . Проведем через его начало A прямые c и d , параллельные данным (рис. 183).

Допустим, вектор \overrightarrow{AB} не лежит ни в одной из этих прямых. Тогда проведем через его конец B параллельные им прямые. Вместе с самими прямыми c и d они ограничат параллелограмм с диагональю AB . Если \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} — векторы по его сторонам, то по правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.$$

Значит, векторы \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} и есть составляющие вектора \overrightarrow{AB} по прямым c и d и, значит, параллельные данным прямым. Если вектор \overrightarrow{AB} лежит в одной из прямых c и d , то он и есть своя составляющая вдоль этой прямой, а по другой прямой составляющая равна нулю.

Пусть теперь даны два равных вектора: $\vec{a} = \vec{b}$, и пусть \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , \vec{b}_1 и \vec{b}_2 — их составляющие, параллельные данным прямым, так что

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \quad \vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2.$$

Так как $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ и, следовательно, $\vec{a}_1 - \vec{b}_1 = \vec{b}_2 - \vec{a}_2$. Векторы \vec{a}_1 , \vec{b}_1 параллельны одной прямой, и, значит, их разность $\vec{a}_1 - \vec{b}_1$ ей параллельна. Точно так же разность $\vec{b}_2 - \vec{a}_2$ параллельна другой прямой. Но векторы могут быть одновременно параллельны пересекающимся прямым, только если они равны нулю. Таким образом,

$$\vec{a}_1 - \vec{b}_1 = \vec{0}, \quad \vec{b}_2 - \vec{a}_2 = \vec{0},$$

т. е. $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_2$. Итак, составляющие данных векторов равны, что и требовалось доказать.

Особо важный случай представляет разложение на составляю-

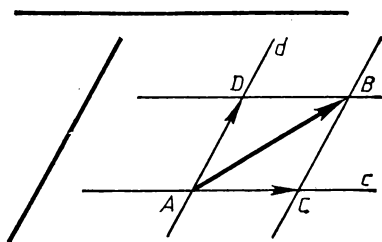


Рис. 183

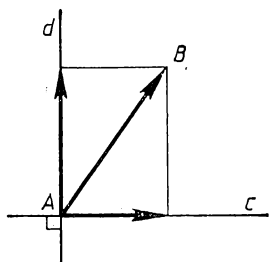


Рис. 184

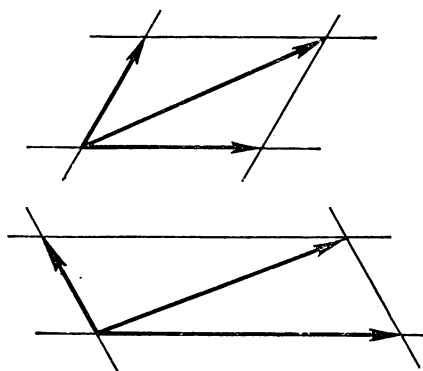


Рис. 185

шие по взаимно перпендикулярным прямым. Тогда параллелограмм с диагональю AB — прямоугольник и его стороны — это проекции отрезка AB на прямые c и d (рис. 184). Примером может служить разложение на горизонтальную и вертикальную составляющие. В этом случае нередко говорят об одной составляющей, подразумевая, что другая берется по перпендикулярному направлению (говорят: «вертикальная составляющая»).

Надо вместе с тем понимать, что составляющие определены только две вместе. Если оставить одну прямую, по которой берется составляющая, а другую изменить, то изменится и составляющая по первой прямой (рис. 185).

Задачи к § 27

Основные задачи

1. Докажите, что сумма любого числа векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ может быть построена так: от какой-то точки A_1 откладывается вектор $\vec{a}_1 = \vec{A_1A_2}$, от A_2 — вектор $\vec{A_2A_3} = \vec{a}_2$, от A_3 — вектор $\vec{A_3A_4}$, равный \vec{a}_3 , и т. д. Вектор $\vec{A_1A_{n+1}}$ и представит сумму. Коротко говоря, сумма векторов $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ представляется «замыкающей» — направленным отрезком $\vec{A_1A_{n+1}}$.

2. Докажите, что в каком бы порядке мы ни откладывали данные векторы, начиная от данной точки, конец последнего всегда будет в одной точке.

3. Докажите, что для любых двух векторов \vec{a}, \vec{b} выполняется:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

б) $|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

в) $|\vec{a} - \vec{b}| \geq |\vec{a}| - |\vec{b}|$.

Когда достигаются равенства?

4. Пусть A и B — данные точки. Докажите, что для любых точек X_1 и X_2 имеет место равенство: $\overrightarrow{X_1B} - \overrightarrow{X_1A} = \overrightarrow{X_2B} - \overrightarrow{X_2A}$.

5. Пусть сумма нескольких векторов равна $\vec{0}$. Докажите, что сумма всех составляющих этих векторов по любой прямой равна $\vec{0}$. Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

Задачи к п. 27.1

6. Пусть \vec{e}_1 и \vec{e}_2 — два единичных вектора. а) Нарисуйте их сумму и вычислите ее длину, если $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. б) Сделайте то же, когда векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 образуют угол 30° , 120° . в) Объясните, почему сумма этих векторов составляет равные углы с каждым из них. г) В каких границах лежит длина суммы этих векторов при изменении угла между ними?

7. Пусть \vec{e}_1 и \vec{e}_2 — два единичных вектора. При каком угле между ними: а) $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| = 2$; б) $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| = 1$; в) $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| = \frac{1}{2}$; г) $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| > 1$; д) $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| < 1$?

8. а) Пусть $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 45^\circ$. Вычислите длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$ и углы, которые он составляет с \vec{a} и \vec{b} . б) Пусть $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$. Вычислите угол, который составляют между собой векторы \vec{a} и \vec{b} , а также их сумма с каждым из них.

9. Может ли длина суммы векторов равняться длине каждого из них? Быть больше длины каждого из них? Быть меньше длины каждого из них?

10. Самолет пролетел 200 км на юго-запад, а затем 300 км на запад. Сделайте соответствующий рисунок, используя векторы. На каком расстоянии он оказался от начальной точки?

11. Нарисуйте сумму указанных векторов и найдите их длину: а) на рисунке 186, а: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$; б) на рисунке 186, б: $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{AL}$; в) на рисунке 186, в: $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{AB}$.

12. Нарисуйте треугольник ABC . Нарисуйте сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$. Чему равна длина такой суммы в равностороннем треугольнике со стороной 1?

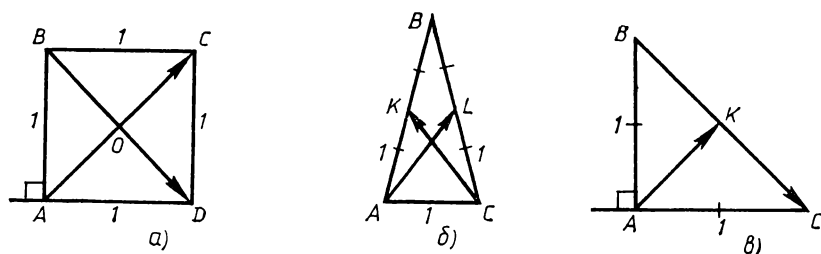


Рис. 186

13. Точки A, B, C, D — любые точки плоскости. Докажите, что $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AD} + \vec{DC}$. Составьте другие аналогичные равенства для векторов, начала и концы которых находятся в данных точках. Будет ли это верно для любых четырех точек пространства?

Задачи к п. 27.2

14. Из одной точки выходят два вектора известной длины. Известен также угол между ними. Как найти длину их суммы и углы, которые она образует с каждым из векторов? Выберите сами численные данные и произведите расчет.

15. При каком условии вектор $\vec{a} + \vec{b}$ идет по биссектрисе угла между \vec{a} и \vec{b} ?

16. Нарисуйте три прямые, пересекающиеся в одной точке. На одной из них от общей точки отложите некоторый вектор \vec{a} . На других двух прямых отложите от общей точки два таких вектора \vec{b} и \vec{c} , что: а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$; б) $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

17. Вертолет летел на север со скоростью v_1 . Вдруг поднялся западный ветер и начал дуть со скоростью v_2 . С какой скоростью полетит вертолет теперь, выдерживая по компасу прежний курс?

18. С одного берега реки на другой поплыл человек. Он все время плывет прямо на противоположный берег. Известны скорость пловца, скорость течения реки и ширина реки. Как узнать, на сколько его отнесет течением от первоначально намеченной точки, когда он окажется на другом берегу? Как узнать, сколько он проплыл? Выберите сами числовые данные и получите результат.

19. На берегах одной реки напротив друг другу стоят две деревни. Из первой во вторую отправился катер. Известны скорость ка-

тера в стоячей воде, скорость течения реки и ширина реки. Требуется узнать: а) под каким углом к берегу движется катер; б) какова его скорость в этой реке; в) какой путь проделает катер. Как это сделать? Выберите сами числовые данные и получите результат.

20. Скорость самолета относительно Земли 300 км/ч, скорость восточного ветра 30 км/ч, самолет летит на север. Каким курсом следует самолет? С какой скоростью он летит?

21. Известны ширина реки, скорость течения в ней, скорость лодки в стоячей воде. Лодка поплыла с одного берега на другой под углом φ к берегу. а) Какой путь пройдет лодка за время t ? б) За какое время она проплывет расстояние s ? в) В момент начала движения на другом берегу напротив лодки был отмечен ориентир. На каком расстоянии от него окажется лодка, причалив к другому берегу? В задаче рассмотрите два случая движения лодки.

Задачи к п. 27.3

22. Нарисуйте три любых вектора. Разными способами постройте их сумму. Проверьте, что получился один и тот же результат.

23. Из одной точки выходят три единичных вектора (рис. 187). Нарисуйте сумму этих векторов и вычислите ее длину.

24. Без рисунка найдите сумму векторов: а) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$; б) $\vec{PQ} + \vec{RS} + \vec{QR}$; в) $\vec{KL} + \vec{LM} + \vec{NK}$.

25. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, $(\vec{b}, \vec{c}) = 150^\circ$. Нарисуйте $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Чему равна его длина?

26. Две равные по величине силы взаимно перпендикулярны. Третья сила по величине в два раза больше каждой из двух и образует с ними равные тупые углы. Нарисуйте результирующую силу (равнодействующую). Сравните ее величину с величиной третьей силы.

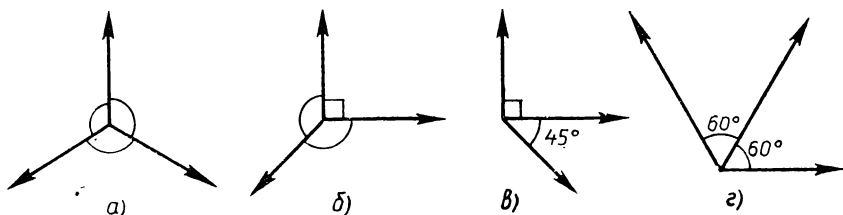


Рис. 187

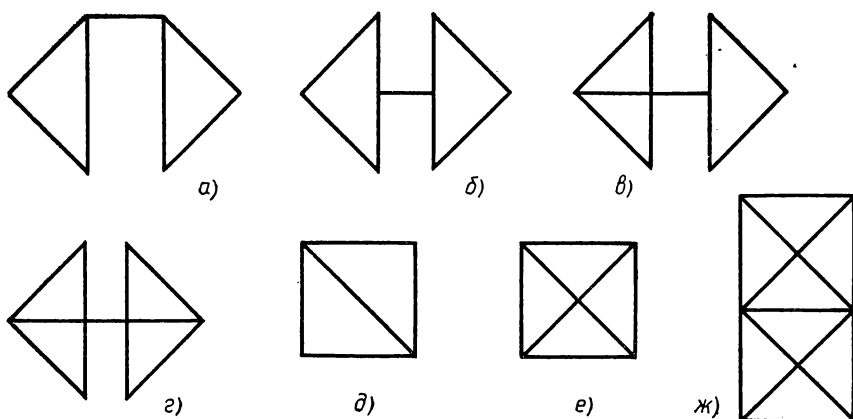


Рис. 188

27. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют с единичным вектором \vec{c} углы φ_1 и φ_2 .

При этом $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Можете ли вы найти \vec{a} , \vec{b} , $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$?

28. Нарисуйте три ненулевых вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , среди которых нет параллельных, так, что $\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c} \parallel \vec{a}$. Можете ли вы найти $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?

29. Перед вами фигуры, составленные из отрезков (рис. 188). Можно ли расставить на этих отрезках векторы так, чтобы в сумме получился $\vec{0}$? (На каждом из отрезков ставится только один вектор.)

30. Корабль держит курс (по компасу) на восток со скоростью v_1 . Дует северный ветер со скоростью v_2 , а течение сносит его на юго-запад со скоростью v_3 . $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 10 |\vec{v}_3|$. Каков истинный курс корабля?

31. Дайте векторное истолкование ситуации, описанной в басне И. А. Крылова про лебедя, рака и щуку.

Задачи к п. 27.4

32. Пусть \vec{e}_1 и \vec{e}_2 — два единичных вектора. а) Нарисуйте их разность и вычислите ее длину, если $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$. б) Сделайте то же, если $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \varphi$. в) В каких границах изменяется длина их разности? г) Какой угол составляет с векторами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 их разность в случаях а) и б)?

33. При каком угле между единичными векторами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 :
 а) $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| = 2$; б) $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| = 1$; в) $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| = \frac{1}{2}$; г) $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| > 1$; д) $|\vec{e}_1 - \vec{e}_2| < 1$?

34. Известны $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$. а) Пусть еще дан $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$. Как найти $|\vec{a} - \vec{b}|$, угол между $\vec{a} - \vec{b}$ и \vec{a} , $\vec{a} - \vec{b}$ и \vec{b} ? б) Пусть еще дано $|\vec{a} - \vec{b}|$. Как найти $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$, угол между $\vec{a} - \vec{b}$ и \vec{a} , $\vec{a} - \vec{b}$ и \vec{b} ? Выберите сами числовые данные и получите результат.

35. Вернитесь к рисунку 186. Нарисуйте разность указанных векторов и вычислите их длину.

36. Нарисуйте три любых вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Нарисуйте вектор \vec{x} такой, что: а) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{x}$; б) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{x}$; в) $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{x}$.

37. Пусть $\vec{A_1B_1} = \vec{AB}$, $\vec{A_1C_1} = \vec{AC}$. Из чего следует, что $\vec{B_1C_1} = \vec{BC}$?

38. Пусть $\vec{AB} = \vec{CD}$. Докажите, что для любой точки O верно равенство $\vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OD}$. Какие еще аналогичные равенства следуют из условия? Верно ли обратное? Будет ли это верно для точек пространства?

39. Нарисуйте иллюстрации к таким векторным равенствам:

а) $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$; б) $-(\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b}$;

в) $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b} = (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{a}$.

Докажите их.

Задачи к п. 27.5

40. Пусть две перпендикулярные прямые — горизонтальная и вертикальная — пересекаются в точке O . Рассмотрим вектор \vec{OA} единичной длины. Пусть он образует с горизонтальной прямой угол φ . Проследите, как изменяются длины его составляющих на эти прямые при угле φ , равном 30° , 45° , 60° , 90° , 120° , 135° , 150° . При каком угле эти длины равны? При каком угле длина горизонтальной составляющей больше длины вертикальной составляющей? А когда меньше? При каком угле она больше другой в два раза? Меньше другой в пять раз?

41. Нарисуйте треугольник ABC . Пусть точка K лежит на стороне AB . Нарисуйте составляющие вектора \vec{CK} по прямым \vec{CA} и \vec{CB} .

42. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Пусть точка K — середина стороны BC , точка M — середина стороны CD . Нарисуйте составляющие по прямым AB и AD векторов: а) \vec{AK} ; б) \vec{AM} ; в) \vec{DK} ; г) \vec{BM} ; д) \vec{KM} .

43. Нарисуйте равнобедренную трапецию $ABCD$. Нарисуйте составляющие по прямым CB и CD векторов: а) \vec{CA} ; б) \vec{CO} ; в) \vec{BA} ; г) \vec{DB} ; д) \vec{AO} . (Точка O — точка пересечения диагоналей трапеции.)

44. Нарисуйте два вектора \vec{a} и \vec{b} с общим началом. Пусть \vec{b} является составляющей вектора \vec{a} . Нарисуйте вторую его составляющую. Пусть теперь \vec{a} является составляющей вектора \vec{b} . Нарисуйте другую составляющую \vec{b} .

45. а) Может ли длина одной из составляющих вектора быть больше длины его самого? б) Может ли длина обеих составляющих вектора быть больше длины его самого? в) Пусть длина одной из составляющих вектора равна длине самого вектора. В каких границах лежит длина другой его составляющей?

46. Можно ли вектор длиной 10 разложить на составляющие длиной 1? А на составляющие длиной 100?

§ 28. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

28.1. Определение умножения вектора на число

Определив сложение любых векторов, мы теперь можем рассмотреть суммы вида $\vec{a} + \vec{a}$, $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ и т. д. Такие суммы, как в алгебре, естественно обозначить через $2\vec{a}$, $3\vec{a}$ и т. д. (рис. 189, а). Затем, используя лишь операцию сложения, можно было бы определить векторы $\frac{1}{2}\vec{a}$, $(-2)\vec{a}$ и т. п. (рис. 189, б). Например, вектор $(-2)\vec{a}$ определить так, чтобы выполнялось равенство $2\vec{a} + (-2)\vec{a} = \vec{0}$.

Уже эти простейшие примеры показывают, что удобно ввести операцию умножения вектора на число, и подсказывают, как дать соответствующее определение.

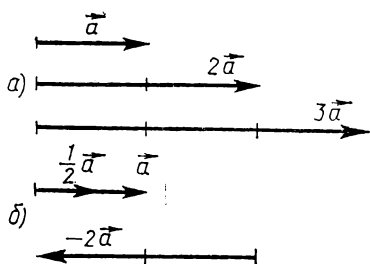


Рис. 189

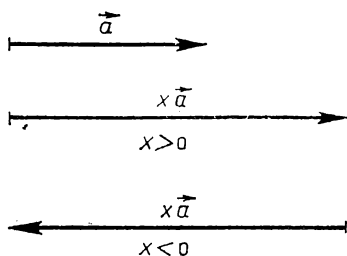


Рис. 190

Произведением вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ на число $x \neq 0$ называется такой вектор $x\vec{a}$, длина которого равна произведению длины вектора \vec{a} на модуль числа x , т. е.

$$|x\vec{a}| = |x| |\vec{a}|, \quad (1)$$

сонаправленный с вектором \vec{a} , если $x > 0$, и направленный противоположно вектору \vec{a} , если $x < 0$ (рис. 190). Если $x = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, то вектор $x\vec{a}$ нулевой (что согласуется с равенством (1)).

Заметим, что из этого определения непосредственно следует, что $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ и $(-1) \vec{a} = -\vec{a}$, т. е. при умножении вектора на -1 вектор «превращается» в противоположный ему вектор.

28.2. Признак параллельности векторов

Из определения умножения вектора на число вытекает простой, но важный признак параллельности векторов.

Т е о р е м а (признак параллельности векторов). Два вектора параллельны тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны два вектора \vec{a} и \vec{b} . Если один из них получается из другого умножением на число, например $\vec{a} = x\vec{b}$, то по определению действия умножения вектора на число векторы \vec{a} и \vec{b} параллельны.

Докажем теперь обратное утверждение: если векторы \vec{a} и \vec{b} параллельны, то один из них получается из другого умножением на число. (Напомним, что нулевой вектор считается параллельным любому вектору.)

Пусть из векторов \vec{a} и \vec{b} хотя бы один нулевой. Тогда этот нулевой вектор получается из другого вектора умножением на чи-

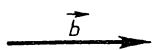
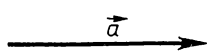


Рис. 191

сло нуль и в рассматриваемом случае утверждение доказано.

Поэтому рассмотрим случай, когда даны параллельные ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} . Тогда либо $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ и для этого случая (рис. 191)

$$\vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}, \quad (2)$$

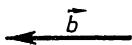
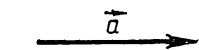


Рис. 192

либо $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ и для этого случая (рис. 192)

$$\vec{a} = - \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}. \quad (3)$$

Действительно, в первом случае вектор $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$ сонаправлен с вектором \vec{a} , так как $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} > 0$, а модуль этого вектора равен $|\vec{a}|$,

так как $\left| \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b} \right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} |\vec{b}| = |\vec{a}|$.

Поэтому вектор $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$ равен вектору \vec{a} , т. е. имеет место равенство (2).

Во втором случае вектор $-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}$ направлен противоположно \vec{b} , так как $-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} < 0$. Поэтому он сонаправлен с вектором \vec{a} . А его

модуль, как и в первом случае, равен $|\vec{a}|$. Поэтому имеет место равенство (3). Теорема полностью доказана.

Следствием этой теоремы является такое утверждение.

С л е д с т в и е (о векторах на прямой). Два вектора, отложенные от одной и той же точки, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.

З а м е ч а н и е. Параллельные векторы называют также коллинеарными. Поэтому доказанную теорему можно формулировать так: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.

28.3. Свойства умножения вектора на число

Умножение вектора на число обладает тремя свойствами, или, как говорят, для него выполняются три закона:

1. **Сочетательный закон:** для любого вектора \vec{a} и любых чисел x, y

$$x(y\vec{a}) = (xy)\vec{a}. \quad (4)$$

Доказательство. Если хотя бы одно число x, y равно нулю или вектор \vec{a} нулевой, то равенство (4) справедливо, так как в этом случае в нем и справа, и слева стоит нуль-вектор. Поэтому рассмотрим случай, когда $x \neq 0, y \neq 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Длины векторов $x(y\vec{a})$ и $(xy)\vec{a}$ равны, так как $|x(y\vec{a})| = |x| |y\vec{a}| = |x| |y| |\vec{a}|, |(xy)\vec{a}| = |xy| |\vec{a}| = |x| |y| |\vec{a}|$. Направления этих векторов тоже совпадают. Если $x > 0, y > 0$, то оба они сонаправлены с вектором \vec{a} (рис. 193). Если $x < 0, y < 0$, то

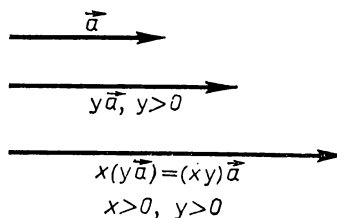


Рис. 193

$xy > 0$ и вектор $(xy)\vec{a}$ сонаправлен с \vec{a} . Вектор $x(y\vec{a})$ тоже сонаправлен с \vec{a} , так как $\vec{a} \uparrow\uparrow y\vec{a}$ и $x(y\vec{a}) \uparrow\uparrow y\vec{a}$, т. е. $x(y\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$ (рис. 194). Если же $x > 0, y < 0$, то $xy < 0$ и вектор $(xy)\vec{a}$ направлен противоположно вектору \vec{a} . Вектор $x(y\vec{a})$ направлен так же, поскольку при умножении вектора \vec{a} на y направление станет противоположным направлению вектора \vec{a} , а после умножения еще на x уже не изменится, т. е.

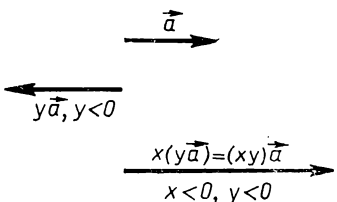


Рис. 194

$x(y\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$. Наконец, если $x < 0$ и $y > 0$, то вектор $y\vec{a}$ сонаправлен с вектором \vec{a} , а вектор $x(y\vec{a})$ имеет направление, противоположное направлению вектора \vec{a} , т. е. такое же, что и у вектора $(xy)\vec{a}$ (рис. 195). ■

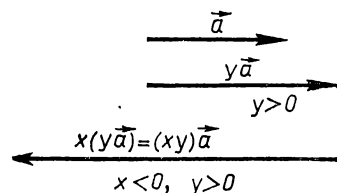


Рис. 195

2. Первый распределительный закон: для любых чисел x, y и любого вектора \vec{a}

$$(x + y) \vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}. \quad (5)$$

Доказательство. Если одно из чисел x, y равно нулю или $\vec{a} = \vec{0}$, то формула (5) очевидна.

Допустим поэтому, что $x \neq 0, y \neq 0, \vec{a} \neq \vec{0}$.

Если x и y одного знака, то векторы $x\vec{a}, y\vec{a}, (x + y)\vec{a}$ одинаково направлены. Длина же вектора $x\vec{a} + y\vec{a}$ равна сумме длин $x\vec{a}$ и $y\vec{a}$ (рис. 196), как и вектора $(x + y)\vec{a}$. Это легко вычислить, пользуясь тем, что если x и y одного знака, то $|x + y| = |x| + |y|$. Именно $|(x + y)\vec{a}| = |x + y| |\vec{a}| = (|x| + |y|) |\vec{a}| = |x| |\vec{a}| + |y| |\vec{a}|$.

Векторы $x\vec{a}$ и $y\vec{a}$ одинаково направлены, поэтому длины их складываются, так что

$$|x\vec{a} + y\vec{a}| = |x\vec{a}| + |y\vec{a}| = |x| |\vec{a}| + |y| |\vec{a}|.$$

Итак, поскольку длины векторов $(x + y)\vec{a}$ и $x\vec{a} + y\vec{a}$ равны, а направления у них одинаковы, то эти векторы равны. Равенство (5) доказано в случае, когда x и y одного знака.

Допустим теперь, что x и y разных знаков. Если при этом $x + y = 0$, т. е. $x = -y$, то $(x + y)\vec{a} = \vec{0}$ и $x\vec{a} + y\vec{a} = \vec{0}$, т. е. (5) справедливо. Поэтому допустим, что $x + y \neq 0$. Тогда число $x + y$ одного знака с одним из чисел $-x$ или $-y$. Допустим, что у $x + y$ тот же знак, что у $-y$. Тогда напомним такое равенство:

$$(x + y) \vec{a} = (x + y) \vec{a} - y\vec{a} + y\vec{a}. \quad (6)$$

Так как $x + y$ одного знака с $-y$, то, пользуясь уже доказанным, можем написать:

$$(x + y) \vec{a} - y\vec{a} = (x + y - y) \vec{a} = x\vec{a}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что $(x + y) \vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$. ■

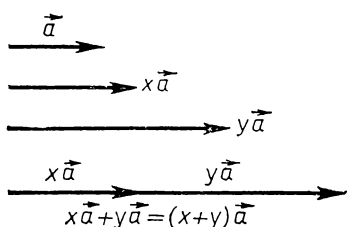


Рис. 196

3. Второй распределительный закон: для любого числа x и любых векторов \vec{a} , \vec{b}

$$x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}. \quad (8)$$

Доказательство. Если $x = 0$ или хотя бы один из

векторов \vec{a} и \vec{b} нулевой, то, очевидно, (8) выполняется. Допустим поэтому, что $x \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Может оказаться, что векторы \vec{a} и \vec{b} параллельны. Тогда по признаку параллельности один из них получается из другого умножением на число. Допустим, например, что $\vec{a} = y\vec{b}$. Тогда

$$\begin{aligned} x(\vec{a} + \vec{b}) &= x(y\vec{b} + \vec{b}) = x((y + 1)\vec{b}) = (x(y + 1))\vec{b} = \\ &= (xy + x)\vec{b} = (xy)\vec{b} + x\vec{b} = x(y\vec{b}) + x\vec{b} = x\vec{a} + x\vec{b}, \end{aligned}$$

т. е. равенство (8) установлено для параллельных векторов \vec{a} и \vec{b} .

Рассмотрим случай, когда \vec{a} и \vec{b} не параллельны. Построим сумму $\vec{a} + \vec{b}$ по правилу треугольника (рис. 197): $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Пусть $x > 0$. Отложим на лучах BA и BC от точки B отрезки

$$BA' = xBA, BC' = xBC. \quad (9)$$

Получим треугольник $A'BC'$, подобный треугольнику ABC (по второму признаку подобия треугольников). Поэтому

$$A'C' = xAC. \quad (10)$$

Переходя к векторам, т. е. беря направленные отрезки, получим из (9) и (10):

$$\overrightarrow{A'B} = x\overrightarrow{AB} = x\vec{a}, \overrightarrow{BC'} = x\overrightarrow{BC} = x\vec{b}.$$

А так как $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BC'}$, то получается, что

$$x\vec{a} + x\vec{b} = x(\vec{a} + \vec{b}).$$

Допустим теперь, что $x < 0$. Тогда $|x| > 0$ и по доказанному

$$|x|\vec{a} + |x|\vec{b} = |x|(\vec{a} + \vec{b}).$$

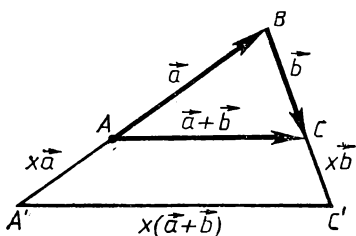


Рис. 197

Стоящие здесь векторы отличаются от $x\vec{a}$, $x\vec{b}$, $(\vec{a} + \vec{b})$ только знаками, т. е. у них противоположные направления. Поэтому и для них верно равенство

$$x\vec{a} + x\vec{b} = x(\vec{a} + \vec{b}).$$

Сделайте соответствующий рисунок для $x = -\frac{1}{2}$.

З а м е ч а н и е. Доказанные свойства умножения — распределительность и сочетательность — называют чаще *дистрибутивностью* и *ассоциативностью*.

Задачи к § 28

Основные задачи

1. Докажите, что: а) $x(\vec{a} - \vec{b}) = x\vec{a} - x\vec{b}$.
 - б) Если $\alpha_1\vec{a} = \alpha_2\vec{a}$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\alpha_1 = \alpha_2$.
 - в) Если $\alpha\vec{a} = \alpha\vec{b}$ и $\alpha \neq 0$, то $\vec{a} = \vec{b}$.
 - г) Если $\vec{a} = x\vec{b}$ и $x \neq 0$, то $\vec{b} = \frac{1}{x}\vec{a}$.
2. Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} — три вектора плоскости, среди которых нет параллельных. Докажите, что найдется такая пара чисел α и β , что $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Докажите, что такая пара единственная.
3. Докажите, что: а) параллельность прямых AB и CD равносильна выполнению равенства $\vec{AB} = x\vec{CD}$; б) принадлежность точки X прямой AB равносильна выполнению равенства $\vec{AX} = \lambda\vec{AB}$; в) принадлежность точки X отрезку \vec{AB} равносильна выполнению равенства $\vec{AX} = \lambda\vec{AB}$, где $0 \leq \lambda \leq 1$; г) точка K является серединой отрезка AB тогда и только тогда, когда $\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$, где O — любая точка.
4. Пусть O — данная точка, а F — некоторая фигура. От точки O отложите $\vec{OY} = -\vec{OX}$, где $X \in F$. Постройте несколько та-

ких точек Y . Какую фигуру образуют все такие точки, если F : а) отрезок; б) прямая; в) треугольник; г) параллелограмм; д) круг? Прodelайте такую же работу с вектором $\vec{OY} = k \vec{OX}$, где $k \neq 0$.

5. Пусть $\vec{OA}_1 = k \vec{OA}$, $\vec{OB}_1 = k \vec{OB}$. Докажите, что $(A_1B_1) \parallel (AB)$ или они совпадают.

Задачи к п. 28.1

6. Сравните длины векторов \vec{a} и $x\vec{a}$ в зависимости от числа x .

7. Нарисуйте два непараллельных вектора \vec{a} и \vec{b} . Постройте векторы: а) $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; в) $-2\vec{a} + 3\vec{b}$; г) $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; д) $-\frac{5}{6}\vec{a} + 1\frac{5}{6}\vec{b}$.

8. Пусть \vec{e}_1 и \vec{e}_2 — два единичных перпендикулярных вектора, $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. Вычислите $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$, угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.

9. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} такие, что $|\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} + 2\vec{b}|$. Можете ли вы найти угол между \vec{a} и \vec{b} ?

10. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} равны по длине и взаимно перпендикулярны. Вычислите угол между: а) $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ и $3\vec{a} - \vec{b}$.

11. Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. Известно, что $\vec{a} + x\vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$. Можете ли вы найти x ?

12. Пусть $\vec{a} = 2\vec{b}$. Выразите вектор \vec{b} из этого равенства.

13. Линейной комбинацией векторов \vec{a} и \vec{b} называется выражение $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Числа α и β называются коэффициентами линейной комбинации. а) Нарисуйте два любых непараллельных вектора \vec{a} и \vec{b} . Выберите произвольно коэффициенты линейной комбинации и постройте саму линейную комбинацию. б) Объясните, почему векторы \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{0}$ являются линейными комбинациями векторов \vec{a} и \vec{b} . в) Объясните, почему любой вектор плоскости является ли-

нейной комбинацией векторов \vec{a} и \vec{b} . г) Как расположена линейная комбинация векторов \vec{a} и \vec{b} относительно каждого из них, если векторы \vec{a} и \vec{b} параллельны?

Задачи к п. 28.2

14. Векторы \vec{a} и \vec{b} параллельны. Будут ли параллельны такие векторы:

- а) $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$; б) $-5\vec{a}$ и $\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$; г) $\vec{a} + \vec{b}$ и \vec{b} ;
д) $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и \vec{a} ; е) $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$; ж) $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ и $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$;
з) $\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$ и $\alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$?

15. Будут ли параллельны векторы \vec{a} и \vec{b} , если параллельны векторы:

- а) $-2\vec{a}$ и $\frac{1}{3}\vec{b}$; б) $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$; в) $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b}$; г) $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$;
д) $-3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ и $-2\vec{a}$; е) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ и $-3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$;
ж) $\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$ и $\alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$?

16. Векторы \vec{a} и \vec{b} не являются параллельными. Будут ли параллельны векторы, указанные в пп. а) — з) из задачи 14?

17. Пусть векторы $2\vec{a} - \vec{b}$ и $-\vec{a} + 3\vec{b}$ не являются параллельными. Будут ли параллельны векторы \vec{a} и \vec{b} ? Обобщите эту задачу.

18. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} не являются параллельными. Найдите числа x и y из равенства $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$. А если $\vec{a} \parallel \vec{b}$?

19. Сумма трех векторов равна $\vec{0}$. Докажите, что каждый из этих векторов параллелен сумме двух других. Дайте этому факту наглядную иллюстрацию. Проверьте обратное. Обобщите утверждение.

20. Один и тот же вектор параллелен как сумме, так и разности двух других векторов. Что отсюда следует?

21. Какой вывод можно сделать о расположении векторов \vec{a} и \vec{b} , если: а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; б) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$;
в) $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 2|\vec{a}| + 3|\vec{b}|$? Обобщите это наблюдение.

22. Точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Нашлась такая точка X , что $\vec{XA} + \vec{XC} = \vec{XB} + \vec{XD}$. Каким по виду является четырехугольник $ABCD$? Зависит ли этот результат от того, лежат данные точки в одной плоскости или нет?

23. Отрезок AB разделен точками C_1, C_2, \dots, C_n на $n + 1$ равные части. Выразите вектор $\vec{OC_i}$ как линейную комбинацию \vec{OA} и \vec{OB} .

Задачи к п. 28.3

24. Упростите выражения: а) $\vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$; б) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{a} - \vec{b}}{3}$.

25. Выразите один из векторов равенства через другие:

а) $2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{0}$; б) $3\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y} = \vec{0}$; в) $-2\vec{p} + 3\vec{q} - \frac{1}{4}\vec{r} = \vec{0}$.

26. Решите векторные уравнения: а) $2\vec{x} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$;

б) $3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{x} - \vec{b} = \vec{0}$. Выберите сами два вектора плоскости \vec{a} и \vec{b}

и постройте найденный вектор \vec{x} .

27. Пусть $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{y} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$. а) Запишите как ли-

нейную комбинацию векторов \vec{a} и \vec{b} векторы: $-2\vec{x}$; $\frac{1}{4}\vec{y}$; $3\vec{x} - 2\vec{y}$;

$-\vec{x} - \vec{y}$. б) Докажите, что любая линейная комбинация векторов \vec{x} и \vec{y} является в свою очередь и линейной комбинацией векторов \vec{a} и \vec{b} . в) Верно ли обратное?

28. Нарисуйте треугольник ABC . Пусть точка K — середина AC , точка L — середина AB , точка M — середина BC . 1) Представьте: а) \vec{AM} как линейную комбинацию векторов \vec{AB} и \vec{AC} ; б) \vec{BA} как линейную комбинацию векторов \vec{BK} и \vec{BC} ; в) \vec{BC} как линейную комбинацию векторов \vec{CL} и \vec{BK} . 2) Выберите на этом рисунке пару векторов, возьмите на нем же любой третий и запишите его как линейную комбинацию первых двух векторов.

29. Известно, что средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине. Дайте этому утверждению векторное доказательство. Попытайтесь дать такое же доказательство и более общему утверждению, которое сформулируете сами.

ВЫВОДЫ

В этой главе мы начали изучать новый вид величин — векторные величины, или, короче, **векторы**. Напомним, что *векторы* — это величины, которые характеризуются не только численным значением, но и направлением. Численное значение вектора называется его модулем.

Особый случай представляет **нулевой вектор** $\vec{0}$ — его модуль равен нулю, а направления он не имеет.

Ненулевые векторы изображаются направленными отрезками. Направленные отрезки обычно тоже называют векторами.

Первой из операций над векторами была рассмотрена **операция сложения векторов**. Сумма двух векторов определяется правилом треугольника или правилом параллелограмма.

Для сложения векторов выполняются те же свойства, что и для сложения чисел: 1) перестановочность (коммутативность), т. е. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; 2) сочетательность (ассоциативность), т. е. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; 3) сложение вектора с нулевым вектором не изменяет его, т. е. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; 4) для каждого вектора \vec{a} имеется противоположный ему вектор $-\vec{a}$, дающий в сумме с вектором \vec{a} нуль-вектор, т. е. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Операция вычитания векторов определяется как операция, обратная сложению векторов, т. е. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Наконец, вводится **операция умножения вектора на число**, которая каждому вектору \vec{a} и каждому числу x сопоставляет такой вектор $\vec{b} = x\vec{a}$, что $|\vec{b}| = |x| |\vec{a}|$, и, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \uparrow \vec{a}$, если $x > 0$, и $\vec{b} \downarrow \vec{a}$, если $x < 0$.

Основные свойства умножения вектора на число выражаются равенствами:

$$1) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; \quad 3) (x + y) \vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a};$$

$$2) x (y\vec{a}) = (xy) \vec{a}; \quad 4) x (\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}.$$

Введенные действия позволяют производить с векторами алгебраические операции.

ДОПОЛНЕНИЯ

I. Выражение высоты треугольника через его стороны. Формула Герона

(Дополнение к § 14)

Теорема Пифагора позволяет найти высоту треугольника, если известны длины его сторон. Покажем, как это сделать, решив такую задачу.

Задача. Найти высоту AD треугольника ABC , если известны его стороны: $AB = 5$ см, $AC = 11$ см и $BC = 12$ см (рис. 198).

Решение. Обозначим через x отрезок BD . Тогда $CD = 12 - x$. Так как $AD^2 = AB^2 - BD^2$ и $AD^2 = AC^2 - CD^2$, то $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$. Поэтому

$$5^2 - x^2 = 11^2 - (12 - x)^2,$$

т. е.

$$25 - x^2 = 121 - 144 + 24x - x^2. \quad (1)$$

Из уравнения (1) получаем, что $24x = 48$, т. е. $x = 2$.

Так как $BD = 2$, то $AD = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.

Если повторить решение этой задачи в общем виде для треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$, то можно получить такое выражение для квадрата высоты h_a :

$$4a^2h_a^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

Многочлен, стоящий в этом равенстве справа, равен произведению

$$(a + b + c)(a + b - c) \times \\ \times (a + c - b)(b + c - a)$$

(проверьте это умножением).

Обозначив периметр $a + b + c$ треугольника ABC через $2p$,

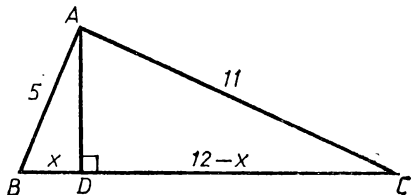


Рис. 198

получим $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$ и $b + c - a = 2p - 2a$. Поэтому

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1)$$

Так как площадь S треугольника ABC выражается формулой

$$S = \frac{1}{2} ah_a,$$

то, пользуясь формулой (1), получаем, что

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Эта формула была получена в I в. н. э. древнегреческим ученым Героном, и поэтому ее называют формулой Герона.

II. Теорема о пересечении лучей

(Д о п о л н е н и е к § 23)

Одним из следствий теоремы предыдущего пункта является следующее утверждение.

Т е о р е м а (о пересечении лучей). *Если лучи, исходящие из точек A и B по одну сторону от прямой AB , образуют с отрезком AB углы, в сумме меньшие 180° , то эти лучи пересекаются.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть луч p с началом в точке A образует с отрезком AB угол α , луч q с началом в точке B образует с отрезком AB угол β . Эти лучи лежат по одну сторону от прямой AB и $\alpha + \beta < 180^\circ$ (рис. 199). Прямые p и q , на которых лежат лучи p и q , пересекаются (в силу теоремы об углах при параллельных и секущей). Лучи, дополнительные к лучам p и q , пересекаться не могут (так как получился бы треугольник с суммой углов, большей 180°). Поэтому пересекаются лучи p и q . ■

Обратите внимание на эту теорему! Высказанное в ней утверждение сыграло в геометрии совершенно исключительную роль.

Об этом подробно мы расскажем позже. Здесь же лишь отметим, что это утверждение в «Началах» Евклида играло роль одной из аксиом.

Из теоремы о пересечении лучей вытекает, что всегда можно построить треугольник по сторо-

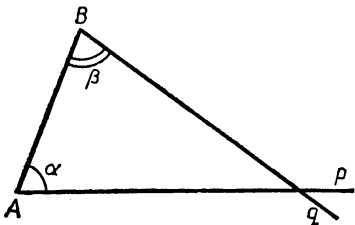


Рис. 199

не и прилежающим к ней двум углам, если сумма этих углов меньше 180° (ясно, что последнее условие необходимо, так как сумма двух углов любого треугольника всегда меньше 180°).

Действительно, пусть заданы отрезок c и два угла α и β , причем $\alpha + \beta < 180^\circ$ (рис. 200). Построим отрезок $AB = c$ и по одну сторону от него построим $\angle BAM = \alpha$ и $\angle ABN = \beta$. Тогда по теореме о пересечении лучей лучи AM и BN пересекутся в некоторой точке C . В треугольнике ABC сторона $AB = c$, $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Из второго признака равенства треугольников следует, что эта задача на построение имеет лишь одно решение.

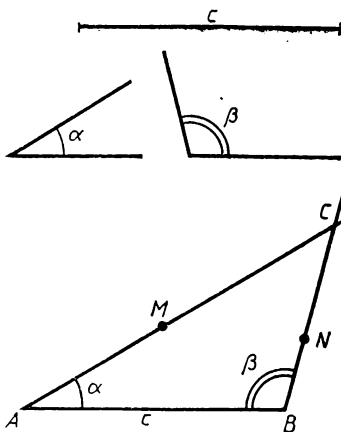


Рис. 200

III. Симметричность параллелограммов и трапеций

(Дополнение к § 24)

Из теоремы о точке пересечения диагоналей параллелограмма следует, что эта точка является *центром симметрии параллелограмма*. Действительно, если O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 201), то, поскольку $AO = OC$ и $BO = OD$, относительно O симметричны противоположные вершины и противоположные стороны параллелограмма, т. е. O — центр симметрии параллелограмма.

Среди четырехугольников только параллелограммы имеют центр симметрии, т. е. имеет место такое утверждение: *если четырехугольник имеет центр симметрии, то он является параллелограммом*. Докажите это самостоятельно.

Из этого утверждения следует, что у трапеции нет центра симметрии.

Решим теперь вопрос об осях симметрии параллелограмма и трапеции.

Ясно, что *две прямые, проходящие*

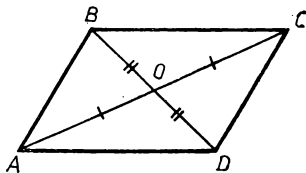


Рис. 201

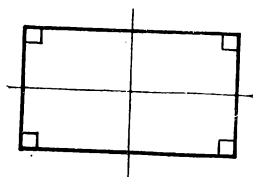


Рис. 202

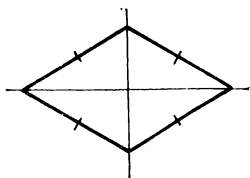


Рис. 203

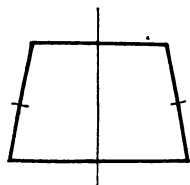


Рис. 204

через середины противоположных сторон прямоугольника, являющиеся его осями симметрии (рис. 202).

Также ясно, что прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии (рис. 203).

Никаких других параллелограммов, имеющих оси симметрии, нет.

Действительно, если у параллелограмма есть ось симметрии, то возможны два случая.

1) Относительно этой оси симметричны две соседние стороны параллелограмма. Тогда эти соседние стороны равны и параллелограмм является ромбом.

2) Относительно оси симметричны две противоположные стороны параллелограмма. Тогда две другие стороны перпендикулярны этой оси и мы получаем прямоугольник. Проведите подробное доказательство этого утверждения.

Трапеция имеет ось симметрии тогда и только тогда, когда она равнобедренная, причем осью симметрии в этом случае является прямая, проходящая через середины оснований трапеции (рис. 204).

IV. Точка пересечения медиан треугольника

(Дополнение к § 25)

Мы уже говорили, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке — центре тяжести треугольника. Сейчас мы докажем эту теорему.

Т е о р е м а (о точке пересечения медиан треугольника). *Медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка отсекает на каждой медиане одну треть, считая от соответствующей стороны* (рис. 205).

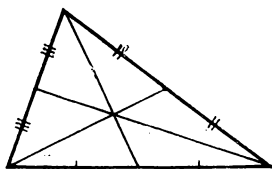


Рис. 205

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем в треугольнике ABC медианы AK и BL и среднюю линию KL (рис. 206). Пусть M — точка пересечения AK и BL . Так как $KL \parallel$

|| AB , то треугольники AMB и KLM подобны (по равенству соответствующих углов). Так как $KL = \frac{1}{2} AB$, то $MK = \frac{1}{2} AM$ и $ML = \frac{1}{2} MB$. Поэтому точка M отсекает от медиан AK и BL по одной трети.

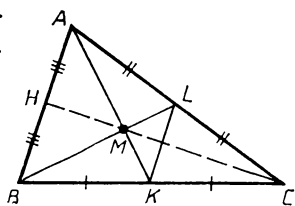


Рис. 206

Если теперь провести третью медиану CH , то, повторив для AK и CH проведенное выше рассуждение, получим, что AK и CH пересекаются в такой точке, которая отсекает от них по одной трети. Но одну треть от AK отсекает точка M . Следовательно, CH проходит через M и в точке M пересекаются все три медианы. Теорема доказана.

V. «Золотое сечение»

(Дополнение к § 25)

С задачами на построение пропорциональных отрезков и деление отрезка в данном отношении связана задача об одном специальном делении отрезка, которое часто называется «делением отрезка в крайнем и среднем отношении». Так называют выделение из данного отрезка a такой его большей части x , которая является средней пропорциональной между a и оставшейся меньшей частью $a - x$, т. е.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}. \quad (2)$$

Если под a понимать численное значение длины отрезка a , то решение уравнения (2) приводит к квадратному уравнению

$$x^2 + ax - a^2 = 0, \quad (3)$$

которое имеет два решения: одно положительное и одно отрицательное. Длине соответствует лишь положительное решение:

$$x = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \approx 0,62a. \quad (4)$$

Чтобы построить циркулем и линейкой такой отрезок x , запишем его так:

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}. \quad (5)$$

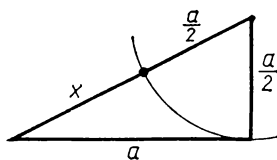


Рис. 207

Отрезок, соответствующий квадратному корню, — это гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и $\frac{a}{2}$ (рис. 207).

А сам отрезок получается вычитанием из этой гипотенузы отрезка $\frac{a}{2}$.

Решение этой задачи было выполнено еще в «Началах» Евклида, и издревле оно называлось «гармоническим делением» или «божественной пропорцией». Эти названия связаны с тем, что формы прямоугольников большинству людей кажутся наиболее гармоничными, приятными для глаза, естественными, если отношение их сторон равно $\frac{x}{a} \approx 0,62$. Поэтому именно такого формата чаще всего бывают книги, прямоугольные окна, киноэкраны, контуры храмов и т. д. Термин «золотое сечение» ввел Леонардо да Винчи. В эпоху Возрождения было создано много произведений архитектуры и искусства, в композиционную основу которых были положены принципы «золотого сечения».

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 14

1. а) Объясните, почему увеличивается гипотенуза прямоугольного треугольника при увеличении одного катета, когда другой не меняется. Объясните обратное. б) На сторонах прямого угла лежат концы двух отрезков. Концы одного из них ближе к вершине, чем концы другого. Какой из отрезков длиннее? Верно ли обратное?

2. а) Каждый катет прямоугольного треугольника увеличили в два раза. Что произошло с гипотенузой? А если каждый катет уменьшили в два раза? б) Гипотенузу хотят увеличить в два раза. Во сколько раз надо для этого увеличить катеты?

3. Лестницу длиной 6 м, упирающуюся одним концом в стену и отстоящую от нее другим концом на 3 м, пододвинули к ней на 1 м. На сколько ее верхний конец стал выше? На сколько ее надо отодвинуть, чтобы ее верхний конец стал ниже на 1 м?

4. Лестница стоит на полу в два раза ближе к одной стене, чем к другой. Приставленная к ближайшей стене, она упирается в потолок, а приставленная к более далекой стене, она упирается в середину стены. Длина лестницы 3 м. Чему равно расстояние между стенами комнаты, ее высота и расстояние между концами лестницы, прислоненными к стене?

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) известны все стороны. В нем провели высоту AD . Как вычислить $|BD|$? Выберите сами числовые данные и получите результат.

6. Пусть стороны равнобедренного треугольника известны. Как вычислить: а) длину медианы на боковую сторону; б) длину отрезка, соединяющего вершину треугольника с данной точкой на противоположной стороне?

Сможете ли вы решить такие же задачи для произвольного треугольника? Выберите сами числовые данные и получите результат.

7. Катеты прямоугольного треугольника 3 и 4. Из концов гипотенузы к ней проведены перпендикуляры до пересечения с продолжением катетов. Чему равны их длины?

8. $ABCD$ — прямоугольник. $|AB| = 3$, $|BC| = 4$. Из вершин B и D на диагональ AC провели перпендикуляры BB_1 и DD_1 . Вычислите $|B_1D_1|$. Может ли быть, что диагональ разделилась этими перпендикулярами на три равные части?

9. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами d_1 и d_2 перегнули по диагонали BD . Чему равно новое расстояние между вершинами A и C ? (В новом положении вся фигура находится в одной плоскости.)

10. а) Точка K движется по окружности радиуса 1. Обозначим расстояние от нее до одного из концов данного диаметра через x . Выразите через x расстояние от нее до другого конца того же диаметра. б) Из одной точки окружности проведены две перпендикулярные хорды длинами d_1 и d_2 . Можете ли вы найти радиус этой окружности?

11. Согласно теореме Пифагора площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах. Постройте на гипотенузе и катетах равносторонние треугольники и сравните тем же образом их площади.

12. Дан прямоугольник. Известно расстояние от некоторой точки плоскости до трех его вершин. Сможете ли вы найти расстояние от нее до четвертой вершины?

13. Отрезки AB и CD перпендикулярны. а) Докажите, что $|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$. б) Пусть точка D движется к точке B и в конце концов совпадает с B . Как в этом случае будет выглядеть доказанное в а) равенство? А если она совпадет с A ?

Сформулируйте и проверьте утверждение, обратное а).

14. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов меньше, чем полторы гипотенузы.

15. Придумайте способ для построения циркулем и линейкой отрезка, длина которого равна корню квадратному из любого заданного целого числа, например $\sqrt{11}$.

16. Будет ли прямоугольным треугольник со сторонами:
а) 4, 5, 6; б) $\frac{5}{7}$, $1\frac{5}{7}$, $1\frac{6}{7}$; в) d , $d + 1$, $d + 2$?

17. Бревно имеет диаметр у тонкого конца 450 мм. Из него нужно выпилить доски шириной 360 мм и толщиной 30 мм. Сколько получится досок? А сколько их будет, если взять доски шириной 270 мм?

18. Понадобилась доска шириной 20 см и толщиной 2 см. Какое можно взять бревно, чтобы из него можно было выпилить такую доску?

19. Эта задача взята из древнего китайского трактата «Математика в девяти книгах»: «Имеется водоем со стороной в один чжан. В центре его растет камыш, который выступает над водой на один чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснется его. Спрашивается, какова глубина водоема и какова длина камыша». (Чжан и чи — меры длины, 1 чжан = 10 чи.)

20. В тетраэдре $PABC$ $\widehat{PCB} = \widehat{PCA} = \widehat{BCA} = 90^\circ$. $|PC| = |BC| = |AC| = d$. Чему равна площадь поверхности этого тетраэдра (сумма площадей всех его граней)? Решите также эту задачу, если $\widehat{BCA} = 60^\circ; 120^\circ$.

21. В тетраэдре $PABC$ $\widehat{PCA} = \widehat{PCB} = \widehat{CAB} = \widehat{PAB} = 90^\circ$, $|AB| = |AC| = |PC| = 1$. Вычислите остальные его ребра.

22. Два равносторонних треугольника ABC и BCD имеют общую сторону, равную d . Точка K — середина BC , $\widehat{AKD} = 90^\circ$. Чему равно $|AD|$?

23. Ломаная линия идет через вершины куба, ребро которого равно 1. Три ее проекции изображены на рисунке 208. Какова длина такой ломаной?

§ 15

п. 15.2

1. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α из точки A . Докажите, что AB является перпендикуляром к любой прямой плоскости α , проходящей через точку B .

2. Точка A не лежит в плоскости α . Сколько перпендикуляров можно провести из точки A на плоскость α ?

3. а) Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α из точки A , BC и BD — два равных отрезка в плоскости α . Докажите, что $AC = AD$. Докажите обратное утверждение. б) Любой отрезок, соединяющий точку, не лежащую в плоскости, с точкой плоскости и отличный от перпендикуляра к этой плоскости, называется наклонной к этой плоскости. Сколько равных между собой наклонных

можно провести к данной плоскости из точки вне этой плоскости? Как располагаются на плоскости концы этих наклонных?

4. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α , AC и AD — наклонные к ней. Отрезки BC и BD называются проекциями этих наклонных. Докажите: а) что большей наклонной соответствует большая проекция; б) обратное утверждение.

5. Перпендикуляр к плоскости прямоугольника проходит через его центр. Докажите: что любая точка этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника. Проверьте обратное утверждение.

6. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника BCD , $\widehat{B} = 90^\circ$. Рассмотрим длины отрезков AB , BC , BD , AC , AD , CD . а) Пусть известны длины AB , BC , BD . Вычислите длины остальных отрезков. б) Пусть известны длины AB , BC , CD . Ответьте на тот же вопрос. в) Выберите сами любые три из данных шести величин и ответьте на тот же вопрос.

7. Пусть OA — перпендикуляр к плоскости равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Пусть K — середина BC . Докажите, что $OK \perp BC$. Вычислите $|OK|$, если: а) $\widehat{A} = 90^\circ$, $|AB| = |AC| = |OA| = 1$; б) $\widehat{A} = 120^\circ$, $|AB| = |AC| = |OA| = 2$.

8. Пусть AB — перпендикуляр на плоскость α из точки A , BC — его продолжение, точка X — некоторая точка плоскости α . а) Пусть $AB = BC$. Докажите, что $XA = XC$. Докажите обратное. б) Пусть $AB > BC$. Докажите, что $XA > XC$. Докажите обратное. в) Пусть известны длины XA , XB , XC . Как найти длину AC ?

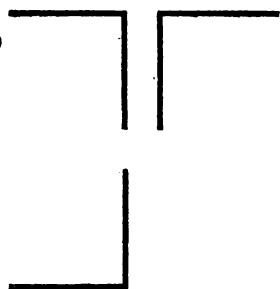
9. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ACD ($\widehat{CAD} = 90^\circ$). а) Пусть $AB = AC = AD$. Установите вид треугольника BCD . б) Пусть треугольник BCD равнобедренный. Что из этого следует? в) Может ли треугольник BCD быть прямоугольным?

§ 16

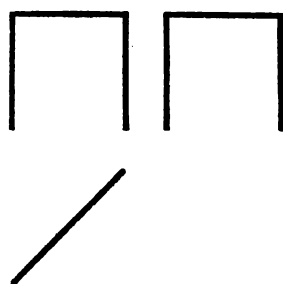
1. Нарисуйте треугольник и параллелограмм. Вычислите их углы.

2. Докажите, что синус одного из углов треугольника равен синусу суммы двух других его углов.

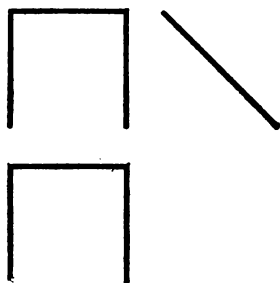
а)



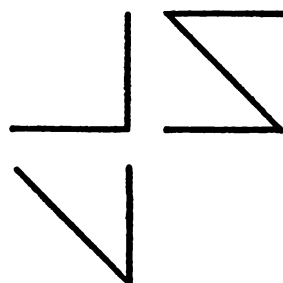
б)



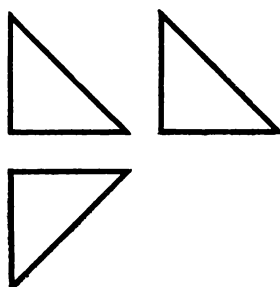
в)



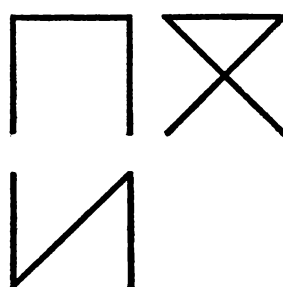
г)



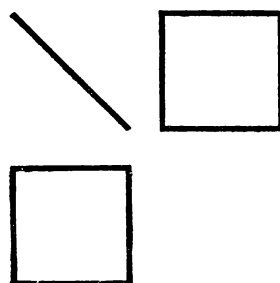
д)



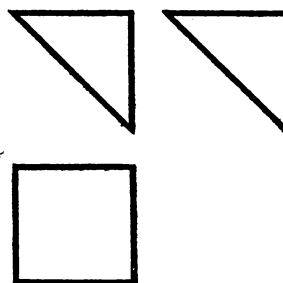
е)



ж)



з)



3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма синусов острых углов больше 1 и меньше 2. Можно ли сузить границы этой суммы? (См. дополнительную задачу 14 к § 14.)

4. Постройте угол, синус которого равен $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; 0,7.

5. а) Постройте прямоугольный треугольник, у которого синус одного из углов равен $\frac{2}{3}$; больше $\frac{1}{4}$; меньше 0,1. б) Сможете ли вы построить такой прямоугольный треугольник, у которого синус одного угла равен $\frac{1}{2}$, а синус другого угла равен $\frac{2}{3}$; синус одного угла равен $\frac{3}{5}$, а синус другого угла равен $\frac{4}{5}$?

6. Верно ли, что с увеличением угла в два раза его синус увеличивается во столько же раз? Верно ли, что с уменьшением синуса в три раза угол уменьшился во столько же раз?

7. Концы отрезка длиной d удалены от данной прямой на расстояния d_1 и d_2 . Как вы узнаете угол, под которым он наклонен к этой прямой?

8. Внутри прямого угла лежит отрезок. Известны расстояния от его концов до сторон угла. Как вычислить углы, которые образует прямая, проходящая через этот отрезок, со сторонами угла? Выберите сами числовые данные и получите результат.

9. Скорость течения реки известна и скорость катера тоже известна. Катер должен переплыть реку перпендикулярно берегам. Под каким углом к берегу следует его направить?

10. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника CBD ($\hat{B} = 90^\circ$). Вычислите углы, под которыми видны из вершин тетраэдра $ABCD$ ребра противоположных граней, если: а) $BA = BC = BD$; б) $|AB| = 1$, $|BC| = |BD| = 2$; в) $|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|BD| = 3$.

11. Пусть AB — перпендикуляр на плоскость прямоугольного треугольника CBD ($\hat{B} = 90^\circ$), $|AB| = 1$, AC и AD — наклонные к этой плоскости длины 2. Под каким углом видна из точки A сторона CD ? Что произойдет с этим углом, если точка A начнет двигаться по этому перпендикуляру к плоскости? От плоскости?

12. В правильном тетраэдре $PABC$ известно ребро. Как найти угол AKC , где точка K — середина ребра PB ?

13. В тетраэдре $PABC$ грани PBA и PBC — прямоугольные равнобедренные треугольники с прямым углом при вершине B ,

$|PB| = 1$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Вычислите углы в грани PAC . Для каких еще величин угла ABC вы можете решить задачу?

14. В тетраэдре $ABCD$ $AC = CB$, $AD = DB$. Пусть точка K — середина AB , а угол CKD прямой. Какие вы измерите ребра тетраэдра, чтобы вычислить углы в треугольнике CKD ?

15. Известны две стороны треугольника и угол между ними. Как найти биссектрису треугольника из вершины этого угла? Выберите сами числовые данные и получите результат.

16. Известны площадь треугольника и два его угла. Как найти его стороны? Выберите сами числовые данные и получите результат.

17. Треугольник ABC остроугольный. Треугольник $A_1B_1C_1$ таков, что AB больше A_1B_1 , BC больше B_1C_1 , AC больше A_1C_1 . Докажите, что площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$.

18. а) Из всех прямоугольников с данной диагональю найдите тот, который имеет наибольшую площадь. б) Из всех прямоугольников с данной площадью найдите тот, который имеет наименьшую диагональ.

19. В тетраэдре известны длины трех ребер, выходящих из одной вершины, и углы между этими ребрами. Как найти площадь его поверхности? Выберите сами числовые данные и получите результат.

20. В тетраэдре $PABC$ ребро PA перпендикулярно грани ABC , в которой $AB = AC$. Пусть известны PA , PB , \widehat{BAC} . Как вычислить площадь поверхности тетраэдра? Выберите сами числовые данные и получите результат.

Задачи на свойство биссектрисы треугольника

21. Стороны треугольника равны 2, 3, 4. На какие по длине отрезки биссектриса каждого угла делит противоположную сторону?

22. В каком отношении делят друг друга точкой пересечения биссектрисы равностороннего треугольника? Составьте и решите обратную задачу.

23. Пусть известны три стороны треугольника. Как узнать, в каком отношении делятся точкой пересечения его биссектрисы? Приведите пример.

24. Как вычислить биссектрису угла при основании в равнобедренном треугольнике, если известны его стороны? Приведите пример.

25. Пусть известны три стороны в треугольнике. Как вычислить какую-либо его биссектрису? Приведите пример.

26. В треугольнике ABC $AC > BC$. Из вершины C провели медиану CM , высоту CK и биссектрису CL . В каком порядке расположены точки K, L, M на стороне AB ?

§ 17

п. 17.1

1. В прямоугольном треугольнике рассматриваются такие величины: стороны, высота, проведенная к гипотенузе, проекции катетов на гипотенузу. Двум из этих величин дайте какие-либо числовые значения. Сможете ли вы вычислить остальные величины?

2. Известны катет и гипотенуза прямоугольного треугольника. а) Найдите медианы и биссектрисы этого треугольника. б) Как найти длину отрезка, перпендикулярного к гипотенузе в ее середине, до катета или его продолжения?

Проведите вычисления при выбранных вами данных.

3. Выразите диагонали ромба через его сторону и угол между сторонами.

4. Даны гипотенуза прямоугольного треугольника и его площадь. Найдите его катеты и периметр.

Проведите вычисления при выбранных вами данных.

5. Сможете ли вы найти по известной диагонали и стороне площадь: а) прямоугольника; б) ромба; в) параллелограмма?

В каком четырехугольнике можно найти площадь, зная длину одной диагонали? Двух диагоналей?

6. Из точки внутри угла опустили на его стороны перпендикуляры. Обозначим их длины d_1 и d_2 . Перпендикуляр длиной d_1 виден из вершины угла под углом φ_1 , перпендикуляр длиной d_2 виден из вершины угла под углом φ_2 . а) Докажите, что если $d_1 > d_2$, то $\varphi_1 > \varphi_2$. Составьте и проверьте обратное утверждение. б) Установите зависимость между этими величинами. в) Найдите длины отрезков, являющихся продолжениями этих перпендикуляров за данную точку до сторон угла.

7. Пожарная лестница, стоящая на машине, может быть выдвинута на 20 м, а ее крутизна может достигать 70° . Основание лест-

ницы находится на высоте 2 м. До какого этажа можно по ней добраться, если высота этажа 3 м?

8. В круглой пластинке надо просверлить пять одинаковых круглых отверстий на равных между собой расстояниях и на одном и том же расстоянии до ее центра. Как вы это сделаете? Обобщите задачу.

9. Пусть DB — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC .

а) Пусть $|AD| = 1$, $\widehat{DAB} = 30^\circ$, $\widehat{BDC} = 45^\circ$. Вычислите $|CD|$.

б) Пусть $|AB| = 2$, $\widehat{ADB} = 40^\circ$, $\widehat{BCD} = 60^\circ$. Вычислите $|BC|$.

в) Пусть $|AB| = |BC| = 1$, $|CD| = 2$. Вычислите \widehat{ADB} .

10. Пусть AC — перпендикуляр к плоскости треугольника BCD , $\widehat{C} = 90^\circ$, $|AC| = |BC| = 1$, $|CD| = 2$. Выберите какой-либо из острых углов в одной из граней тетраэдра $ABCD$. Найдите равный ему угол в других гранях тетраэдра. Какой из острых углов в гранях тетраэдра является наибольшим? Наименьшим?

11. Пусть PB — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC , $\widehat{C} = 90^\circ$.

а) $|AB| = 1$, $\widehat{PCB} = 20^\circ$, $\widehat{CAB} = 40^\circ$. Вычислите $|PC|$.

б) $|PC| = 1$, $\widehat{CPB} = 60^\circ$, $\widehat{APB} = 50^\circ$. Вычислите $|PA|$.

в) $|AC| = 1$, $|PA| = 2$, $|PB| = 1$. Вычислите \widehat{PCB} .

12. Пусть PB — перпендикуляр на плоскость треугольника ABC , $PB = AB = BC$, известны длины этих отрезков и угол ABC .

а) Как найти расстояние от P до AC ? б) Объясните, почему AC из точки P виден хуже, чем из точки B . в) Из какой точки отрезок AC виден лучше, чем из P , и хуже, чем из B ? (Отрезок виден лучше, если мы видим его под большим углом.)

п. 17.2

13. В треугольнике ABC провели две высоты AK и BL , и оказалось, что треугольники ABL и ABK равны. Будет ли данный треугольник равнобедренным?

14. Два равных прямоугольных треугольника составили так, что они имеют общую гипотенузу. Вершины прямых углов соединили отрезком. а) Укажите на рисунке равные треугольники. б) Найдите длину проведенного отрезка, если гипотенуза равна 1, а острый угол данного треугольника равен φ .

15. Нарисуйте прямоугольный треугольник. Можно ли получить три равных прямоугольных треугольника, являющихся частями данного, если: а) провести высоту на гипотенузу, а из основания ее перпендикуляр на один из катетов; б) середину одного из катетов соединить с противолежащей этому катету вершиной и из нее же провести перпендикуляр на гипотенузу; в) провести биссектрису одного из острых углов, а из точки ее пересечения с катетом опустить перпендикуляр на гипотенузу; г) провести перпендикуляр из середины гипотенузы к самой гипотенузе до пересечения с одним из катетов, а полученную точку пересечения соединить с вершиной треугольника?

Любой ли прямоугольный треугольник можно разделить на три равных прямоугольных треугольника?

16. Нарисуйте прямоугольный треугольник ABC ($\hat{C} = 90^\circ$). Через точку X его гипотенузы проводится перпендикуляр к ней, который встречает катет BC в точке K , а прямую AC в точке L . Можно ли найти такую точку X , что треугольники BKX и KLC будут равны?

17. В прямоугольном треугольнике провели биссектрисы острых углов и из точки их пересечения провели перпендикуляры на катеты. Пусть гипотенуза равна 1, а острый угол равен φ . На какие по площади части разделился исходный треугольник?

18. Составьте четыре равных прямоугольных треугольника так, чтобы четыре вершины их прямых углов были вершинами квадрата. Укажите на этом рисунке еще четыре вершины квадрата. Пусть известны катет и острый угол треугольника. Какова площадь этих квадратов?

19. Некоторые точки плоскости одинаково удалены от точки, взятой на перпендикуляре к этой плоскости. Докажите, что они будут одинаково удалены от любой точки этого перпендикуляра.

20. Перпендикуляр к плоскости виден из некоторых точек плоскости под равными углами. Что из этого следует?

21. Из некоторой точки перпендикуляра на плоскость провели к этой плоскости наклонные под одним и тем же углом к этому перпендикуляру. Что из этого следует?

22. В тетраэдре $PABC$ грань ABC — равносторонний треугольник. Пусть точка Q — точка пересечения его биссектрис и PQ — перпендикуляр к грани ABC . Докажите, что: а) ребра PA , PB и PC равны; б) грани PAB , PBC и PAC равны.

Как вычислить площадь поверхности тетраэдра, если известны AB и PQ ? Приведите пример.

23. В четырехугольной пирамиде $PABCD$ грань $ABCD$ — квадрат и все ее ребра равны. Пусть точка Q — точка пересечения диагоналей квадрата. Проведите PQ . Укажите все пары равных прямоугольных треугольников на этом рисунке.

24. В тетраэдре $PABC$ ребро PA перпендикулярно грани ABC , $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = \varphi$, $|BC| = d_1$, $|PA| = d_2$. Чему равна площадь поверхности тетраэдра? (Можно взять φ равным 30° , 45° .)

§ 18

1. В треугольнике известны сторона и два прилежащих к ней угла. Как в нем найти: а) биссектрисы; б) высоты?

2. В треугольнике ABC проведена медиана AK из вершины угла A . Докажите, что $AB : AC = \sin \widehat{KAC} : \sin \widehat{KAB}$. Какие следствия можно получить из этого?

3. 1) Дан прямоугольный равнобедренный треугольник. а) Прямой угол разделили лучами на три равных угла. Какой отрезок на гипотенузе оказался наибольшим? б) Гипотенузу разделили на три равных отрезка, а точки деления соединили с вершинами прямого угла. Против какого из этих отрезков получился больший угол? 2) Сформулируйте и решите аналогичную задачу для равнобедренного треугольника. 3) Обобщите задачу.

4. Докажите, что медиана треугольника ABC к стороне AC образует с большей его стороной ($AB > BC$) меньший угол.

5. Пусть PA — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC . Вычислите площадь поверхности тетраэдра $PABC$, если: а) $|PA| = |BC| = 1$, $\widehat{PCB} = 45^\circ$, $\widehat{PBC} = 60^\circ$; б) $|PC| = 2$, $|PB| = 3$, $|PA| = 1$, $\widehat{ACB} = 120^\circ$.

Составьте сами аналогичные задачи.

6. В тетраэдре $PABC$ $\widehat{APC} = \widehat{BPC}$, $\widehat{ACP} = \widehat{BCP}$. а) Сколько равнобедренных треугольников среди его граней? б) Пусть известны $|PC|$, \widehat{APC} , \widehat{ACP} . Сможете ли вы найти площадь поверхности тетраэдра?

1. Вертикальный отрезок длиной d повернулся вокруг своего конца на острый угол φ . На сколько сместился другой его конец по вертикали и по горизонтали? Как изменится результат, если угол φ будет прямым или тупым? Эту задачу легко понять, поглядев на часы. Придумайте сами похожую задачу.

2. Выясните, что больше: $\sin \varphi$ или $\cos \varphi$, если: а) $0^\circ < \varphi < 45^\circ$; б) $45^\circ < \varphi < 90^\circ$; в) $\varphi > 90^\circ$.

3. Пусть φ_1 и φ_2 два острых угла. Пусть известно, что $\cos \varphi_1 < \cos \varphi_2$. Докажите, что $\varphi_1 > \varphi_2$. Как изменится результат, если φ_1 и φ_2 — два тупых угла? Как изменится результат, если φ_1 — острый угол, а φ_2 — тупой?

4. Докажите, что в треугольнике ABC $\cos A + \cos(B + C) = 0$. Запишите другие аналогичные соотношения в этом треугольнике.

5. Постройте угол, косинус которого равен $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, 0,8.

6. Верно ли, что с изменением угла в несколько раз его косинус изменяется во столько же раз?

7. Из точки A на одной из сторон угла провели перпендикуляр AB на другую сторону, а из точки B провели перпендикуляр BC на первую сторону. Известны длины этих перпендикуляров. Можете ли вы найти сам угол и расстояние от A до вершины угла?

8. В равнобедренном треугольнике известны его высоты. Как найти его углы?

9. Ломаная ABC состоит из двух перпендикулярных отрезков: горизонтального отрезка AB длиной d_1 и вертикального отрезка BC длиной d_2 . Ломаную ABC повернули вокруг A на угол φ . Чему равно горизонтальное и вертикальное смещение точки C ? Чему равно расстояние от начального до конечного положения точки C ?

10. Известна сумма синусов углов прямоугольного треугольника. Как найти сумму косинусов этих углов?

11. Корабль плывет на восток с постоянной скоростью v . В некоторый момент времени пеленг на маяк равен φ_1 , а спустя время t он равен φ_2 . Через какое время маяк будет для этого корабля точно на севере? (Пеленг — это угол между направлением на север и направлением на маяк.)

12. Как, используя косинус, решить задачи 11, 12 из § 17 и задачи 1, 2, 4 из дополнительных задач к § 17?

13. К плоскости α проведен перпендикуляр. Из точки A этой

плоскости он виден лучше, чем из точки B этой плоскости. Что из этого следует?

14. Пусть из точки P данной плоскости перпендикуляр AB к этой плоскости виден лучше, чем из точки Q этой же плоскости. Пусть CB — другой перпендикуляр к этой же плоскости. Из какой точки он будет виден лучше: из P или из Q ?

15. Из точки A перпендикуляра к плоскости проводятся разные наклонные к этой плоскости. Докажите, что, чем длиннее наклонная, тем лучше видна из A ее проекция. Докажите обратное утверждение.

16. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости, а PQ — прямая на ней. Из какой точки прямой PQ этот перпендикуляр будет виден лучше всего?

17. Треугольник ABC равносторонний, BD — перпендикуляр к его плоскости. Пусть известны AB и угол, под которым виден из точки A перпендикуляр BD . Как вычислить площадь поверхности тетраэдра $ABCD$? Приведите пример.

18. В тетраэдре $ABCD$ грань ABC — равносторонний треугольник, ребро BD перпендикулярно грани ADC . Пусть известны AB и угол, под которым виден из точки B отрезок AD . Как вычислить площадь поверхности тетраэдра? Приведите пример.

19. В тетраэдре $PABC$ грани PAB и PAC — равные равнобедренные треугольники с общим основанием AB . Медиана PK грани PAB перпендикулярна грани ABC . Пусть известны AB и угол при основании в грани PAB . Как вычислить площадь поверхности тетраэдра? Приведите пример.

§ 20

1. Докажите, что большая медиана треугольника проводится к меньшей его стороне. Докажите аналогичное утверждение для меньшей медианы.

2. Ножки циркуля-измерителя, упираясь концами в отрезок длиной 1, образуют угол 30° . Какой угол они будут образовывать, упираясь в концы отрезка длиной 2? А длиной $\frac{1}{2}$?

3. Сторона BC равностороннего треугольника ABC разделена на три равные части. Какая из них видна из вершины A под большим углом?

4. У двух треугольников равны по две стороны и все углы. Равны ли эти треугольники?

5. В параллелограмме известны: а) стороны и угол между ними. Как найти диагонали? б) Стороны и угол между ними. Как найти длину отрезка с концами на сторонах параллелограмма? в) Стороны и одна из диагоналей. Как найти другую диагональ? г) Диагонали и угол между ними. Как найти стороны?

Выберите сами числовые данные и получите результат для каждой задачи.

6. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, точка K — середина BC . Длины его сторон известны. Требуется выяснить, под каким углом видна из точки K сторона AD . Выберите сами числовые данные и получите результат. Может ли быть, что из какой-то точки BC этот отрезок виден лучше?

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{D} > \hat{C}$. Докажите, что $BC > AD$.

8. Точка A удалена от прямой a на 1. По прямой a движется отрезок длиной 2. В каком положении он виден из A лучше всего? Можете ли вы решить задачу в общем виде и найти практическое ее истолкование?

9. Два круга радиусами R_1 и R_2 пересекаются по хорде длины d_1 . Расстояние между их центрами равно d_2 . Пусть три из этих величин известны. Можете ли вы найти оставшуюся?

10. Внутри угла O величиной φ взята точка K . Пусть KL и KM — перпендикуляры из нее на стороны угла. Их длины d_1 и d_2 . Найдите $|OK|$ и $|LM|$.

11. В выпуклом четырехугольнике известны две стороны, диагональ и углы, которые она образует с двумя сторонами. Хватит ли этих данных, чтобы найти остальные элементы четырехугольника?

12. Как, не выходя из своей квартиры, найти: а) расстояние до противоположного дома; б) его высоту?

13. Пусть BD — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC , $\hat{ABC} = 90^\circ$, $|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|BD| = 3$. а) Установите вид треугольника ACD . б) Вычислите площадь поверхности тетраэдра $ABCD$.

14. Пусть BD — перпендикуляр к плоскости треугольника ADC . Пусть известны $|BD|$, \hat{ABD} , \hat{CBD} и \hat{ABC} . Как вычислить

площадь поверхности тетраэдра $ABCD$? Выберите сами числовые данные и получите результат.

15. Пусть PB — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC , $AB = BC$, $|AC| = 1$, $\widehat{APC} = 150^\circ$, $|PB| = 1$. Вычислите \widehat{ABC} и площадь поверхности тетраэдра $PABC$.

16. Пусть PB — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\widehat{C} = 90^\circ$). Докажите, что $\widehat{ACP} = 90^\circ$. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

17. В правильном тетраэдре $PABC$ точка K — середина AC , точка L — середина PK , точка M — середина PB и $PQ \perp KB$. Ребро тетраэдра равно 2. а) Вычислите $|KL|$, $|LM|$, $|BL|$, $|PQ|$, $|MQ|$. б) Докажите, что $PQ \perp AQ$. в) Какой еще прямой перпендикулярна прямая PQ ?

§ 21

1. Сможете ли вы найти углы прямоугольного треугольника, у которого известны проекции катетов на гипотенузу?

2. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами d_1 и d_2 перегнули по диагонали AC . Отрезки AD и BC пересеклись в точке K . Сможете ли вы найти расстояние от точки K до прямой AC ?

3. Пусть AB и CD — два перпендикуляра к прямой BC с одной стороны от нее. $AB = d_1$, $CD = d_2$. Пусть K — точка пересечения прямых AC и BD . Найдите расстояния от K до прямой BC . Что интересно в полученном результате?

4. Как найти площадь равнобедренного треугольника, если известны его периметр и угол при основании? Выберите сами числовые данные и вычислите искомую величину.

5. Как найти: а) ширину реки, глядя на нее с вышки; б) высоту дерева, растущего на склоне горы; в) высоту горы, зная высоту растущего на ней дерева?

6. Вы идете по прямой дороге. Из двух ее мест, расстояние между которыми известно, вы видите гору под углом φ_1 , а посередине между ними вы видите гору под углом φ_2 . Найдите высоту горы.

7. Нарисуйте треугольник. Сможете ли вы вычислить его стороны, производя измерения за его пределами? При этом постарайтесь сделать меньшее число измерений.

8. а) В тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно грани BCD , $\widehat{CDB} = 90^\circ$, $|AB| = 1$, $|BD| = 2$, $|CD| = 3$. Вычислите углы во всех гранях этого тетраэдра.

б) В тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно грани BCD , $\widehat{CDB} = \widehat{CDA} = 90^\circ$. Сравните углы CAD и CBD .

9. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости треугольника BCD , $BC = BD$. Сравните углы CAD и CBD .

10. Ребро BD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно грани ABC , $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Пусть известны BD и все углы при вершине D . Как вычислить площадь поверхности тетраэдра? Приведите пример.

11. В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ квадрат, а ребро PB перпендикулярно грани $ABCD$. Пусть известны PB и все углы при вершине P . Как вычислить площадь поверхности пирамиды? Приведите пример.

12. В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ прямоугольник. Грань PCD является равнобедренным треугольником ($PD = PC$). Высота PK этой грани перпендикулярна основанию. Пусть известны PK и все углы при вершине P . Как вычислить площадь поверхности пирамиды? Приведите пример.

§ 22

п. 22.1

1. а) Используя понятие подобия, дайте другое толкование такой фразе: «Один треугольник во столько-то раз больше другого треугольника», если имеются в виду подобные треугольники. б) Из трех подобных треугольников второй в 10 раз больше первого. Третий треугольник в 4 раза больше первого. Во сколько раз он меньше второго? в) Есть ли такой треугольник, который во столько же раз меньше второго, во сколько раз он больше первого?

2. Нарисуйте треугольник. Пусть его надо покрыть подобными ему треугольниками, меньшими данного. Сколько вам понадобится треугольников?

3. Нарисуйте треугольную пирамиду $PABC$. Точка A_1 лежит внутри ребра PA , точка C_1 лежит внутри ребра PC , точка B_1 лежит внутри ребра PB . Нарисуйте треугольник PA_1C_1 , подобный треугольнику PAC , треугольник PC_1B_1 , подобный треугольнику PCB . Объясните, почему подобны треугольники PA_1B_1 и PAB , $A_1B_1C_1$ и ABC .

4. Нарисуйте куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Нарисуйте треугольник $BC_1 D$. Нарисуйте треугольник на поверхности куба, подобный указанному, так, чтобы его вершины лежали на ребрах: а) CB , CD , CC_1 ; б) AB , AD , AA_1 ; в) $B_1 B$, $B_1 A_1$, $B_1 C_1$.

5. Имеются два куска проволоки разной длины. Сгибая их, можно получить два подобных треугольника. Как это сделать?

п. 22.2

6. Нарисуйте треугольник. Постройте треугольник с площадью: а) в 4 раза меньшей; б) в 9 раз большей; в) в 2 раза большей.

7. Высота одного равностороннего треугольника в два раза больше высоты другого равностороннего треугольника. Сравните площади этих треугольников. Сформулируйте общий вывод для такой ситуации. Будет ли он верен для равнобедренных треугольников? А вот задача потруднее. У двух равнобедренных треугольников отношение высот одного равно отношению высот другого (речь, конечно, идет о неравных высотах каждого треугольника). Можно ли, зная, чему равно это отношение, найти отношение их площадей?

8. Периметр одного из подобных треугольников в два раза больше периметра другого из них. Сравните их площади.

9. В треугольной пирамиде $PABC$ на ребрах PA , PB , PC взяты середины A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Сравните площади треугольников $A_1 B_1 C_1$ и ABC . Обобщите задачу.

10. Площадь треугольного участка земли требуется разделить пополам прямой, перпендикулярной его наибольшей стороне. Как это сделать?

п. 22.3

11. Из точки K внутри угла A опустили перпендикуляры KL и KM на его стороны. Провели отрезки AK и LM . Укажите на этом рисунке подобные треугольники.

12. Дайте геометрическое истолкование таким формулам:

а) $a : b = c : d$; б) $pq = rs$; в) $x^2 = yz$; г) $m^2 = n$;
 д) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$; е) $ab=1$; ж) $x = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Задачи к главе III

1. Нарисуйте круг. Отметьте внутри него любую точку A . Пусть точка X движется по окружности. При каком ее положении отрезок XA является наибольшим? Наименьшим?

2. Нарисуйте выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите внутри него такую точку O , что $|OA| + |OB| + |OC| + |OD|$ имеет наименьшее значение.

3. а) Докажите, что длина любого отрезка, находящегося внутри треугольника, меньше какой-либо из его сторон. б) Докажите, что длина любого отрезка, находящегося внутри выпуклого четырехугольника, меньше либо его стороны, либо его диагонали. в) Нарисуйте тетраэдр. Где в нем находятся наиболее удаленные точки?

4. а) Из всех равнобедренных треугольников с данной боковой стороной найдите тот, который имеет наибольшую площадь. б) Из всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой найдите тот, который имеет наибольшую площадь. в) Из всех прямоугольных треугольников с данной высотой на гипотенузу найдите тот, который имеет наименьшую площадь.

5. Два равных прямоугольных треугольника с гипотенузой d и острым углом φ расположены так, что они имеют: а) общую гипотенузу; б) общий прямой угол. Чему равна площадь их объединения?

6. Пусть KA — перпендикуляр из точки K на прямую a . От точки A откладываются последовательно отрезки AA_1 , A_1A_2 длины d . а) Какой из них виден лучше из точки K ? б) Пусть известен угол, под которым виден из K отрезок AA_1 . Как найти угол, под которым виден из нее отрезок A_1A_2 ? в) Какой отрезок длины d на прямой a виден из точки K лучше всего?

7. На прямой a отложены последовательно два отрезка A_1A_2 и A_2A_3 длины d_1 и d_2 соответственно ($d_1 \neq d_2$). Можно ли на перпендикуляре к этой прямой через точку A_1 найти такую точку X , из которой данные отрезки были бы видны под одинаковыми углами? А если перпендикуляр проходит через точку A_2 ? А если он проходит через произвольную точку прямой a ?

8. Треугольник ABC лежит с одной стороны от прямой AD . а) Пусть известны все стороны треугольника. Что еще надо знать, чтобы вычислить длины проекций его сторон на прямую AD ? б) Пусть известны длины проекций всех его сторон на прямую AD .

Можно ли будет вычислить длины сторон треугольника? Если нет, то что еще надо знать?

Изменяются ли полученные ответы, если прямая AD будет пересекать треугольник?

9. На листе бумаги нарисуйте два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ так, что их стороны A_1B_1 и A_2B_2 лежат на одной прямой, а сами они с одной стороны от этой прямой. Потом перегните этот лист так, чтобы вершины C_1 и C_2 оказались по другую сторону от линии сгиба, нежели прямая A_1B_1 . Как вычислить расстояние C_1C_2 , находясь на той части листа, где этих точек нет?

10. Рассмотрим четыре функции угла φ : $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi$, $\operatorname{ctg} \varphi$. Пусть одна из них известна. Как вычислить остальные?

11. Докажите, что в треугольнике ABC :

а) $c = a \cos B + b \cos A$; б) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$;

в) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$, если $\hat{A} < 90^\circ$;

г) $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$, если $\hat{A} < 90^\circ$.

12. Внутри треугольника взяли точку и опустили из нее перпендикуляры на все его стороны. Получившиеся на сторонах треугольника отрезки обозначили последовательно: $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$.

а) Докажите, что $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$.

б) Докажите обратное. в) Какие следствия можно получить из б)?

13. Постройте прямоугольный треугольник по: а) катету и медиане на этот катет; б) катету и медиане к другому катету; в) катету и медиане на гипотенузу; г) катету и биссектрисе прямого угла; д) катету и высоте на гипотенузу; е) гипотенузе и высоте на гипотенузу; ж) высоте и медиане из вершины прямого угла; з) высоте и биссектрисе из вершины прямого угла.

14. Постройте равнобедренный треугольник по: а) боковой стороне и углу при основании; б) основанию и углу при вершине; в) основанию и высоте на боковую сторону; г) боковой стороне и высоте к ней; д) боковой стороне и медиане к ней; е) углу при основании и высоте к боковой стороне; ж) высоте на основание и углу при вершине; з) высоте и биссектрисе на боковую сторону.

15. Постройте треугольник по: а) двум сторонам и медиане к одной из них; б) двум сторонам и медиане к третьей стороне; в) двум сторонам и высоте к одной из них; г) двум сторонам и высоте на третью сторону; д) углу и высотам на стороны этого угла; е) стороне, углу при ней и высоте к ней; ж) стороне, углу при ней

и медиане к ней; з) стороне, медиане к этой стороне и высоте на другую сторону; и) стороне, медиане и высоте на эту сторону; к) стороне, медиане и высоте на другую сторону; л) стороне, высоте на вторую сторону и биссектрисе на третью сторону; м) углу, высоте и медиане на одну из его сторон; н) стороне, углу при ней и биссектрисе другого угла при ней.

16. Известно, что треугольник, образованный средними линиями данного треугольника, подобен ему. Существует ли еще треугольник, образованный отрезками с концами внутри сторон данного треугольника, подобный данному треугольнику?

17. В треугольнике будем проводить отрезки из вершин до противоположной стороны. Каждый из двух треугольников, полученных при таком разбиении, будем называть «частичным» треугольником. а) Как провести отрезок так, чтобы один из частичных треугольников был подобен данному? б) Можно ли провести отрезок так, чтобы оба «частичных» треугольника были подобны данному? в) Можно ли провести отрезок так, чтобы они были подобны между собой? г) В каком треугольнике оба «частичных» треугольника подобны между собой и данному треугольнику? д) Пусть два треугольника разбиты на «частичные» треугольники. Пусть исходные треугольники подобны и по одному «частичному» треугольнику подобны. Подобны ли другие «частичные» треугольники? е) Придумайте сами задачу про «частичные» треугольники.

18. Нарисуйте треугольник. Возьмите кусок проволоки. Можете ли вы согнуть ее так, чтобы получился треугольник, подобный данному?

19. Нарисуйте четырехугольник. Сможете ли вы узнать, какая сторона в нем наибольшая, если у вас под руками только транспортир без делений длины? А какая наименьшая?

20. На косогоре надо устроить насыпь для будущей дороги. Известны уклон поверхности земли на косогоре, угол откоса насыпи и ширина насыпи на ее горизонтальном участке. Как найти ширину насыпи вдоль косогора? Составьте аналогичную задачу про траншею на косогоре.

21. Сможете ли вы узнать ширину реки, хотя бы примерно, не имея никаких измерительных инструментов? (При этом вы можете измерять расстояния шагами, фиксировать какие-то углы тем, что под рукой.)

22. Вы находитесь в точке A местности и вам нужно вычислить расстояние до объекта X на местности. Объект X виден из точки A

и еще одной точки C . Из некоторой точки B видны точки A и C . Можно найти расстояния AB , BC . Можно ли по этим данным вычислить $|AX|$?

23. Канава поворачивает под прямым углом. Вам надо переправиться через нее. Ее ширина известна. Вы можете раздобыть две равные доски, длина которых также известна, причем она меньше ширины канавы. Сможете ли вы переправиться с их помощью через канаву?

24. Вы сидите на берегу реки и захотели узнать ее глубину, не заходя в нее. Предложите для этого какие-либо способы.

Задачи на фигурах в пространстве

25. В треугольной прямой призме $ABCA_1B_1C_1$ две грани ABC и $A_1B_1C_1$ — треугольники, ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 параллельны между собой и каждое из них перпендикулярно граням-треугольникам. а) Объясните, почему ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 равны между собой. б) Каким по виду четырехугольником является каждая ее четырехугольная грань? в) Объясните, почему равны ее треугольные грани, четырехугольные грани. г) Как найти площадь поверхности такой призмы? Чему она равна, если каждое ребро в треугольной грани равно d_1 , а ребро AA_1 равно d_2 ? д) Как вычислить площадь треугольника AB_1C ? Приведите пример.

26. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1B_1C_1D_1$ каждая грань является прямоугольником, каждое ребро перпендикулярно тем его граням, между которыми оно заключено, и все ребра, которые упираются в одни и те же грани, параллельны между собой. Известны три его ребра, выходящие из одной вершины. а) Как вычислить площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда? б) Пусть O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. § Докажите, что $OO_1 \parallel AA_1$. б) Как найти диагональ AC_1 ? Укажите и другие отрезки в этом параллелепипеде, равные AC_1 . г) Как найти угол, под которым видна диагональ AC_1 из вершины D ? Укажите и другие точки, из которых она видна под тем же углом. д) Как разбить этот параллелепипед на четыре треугольные прямые призмы? Какая из этих призм будет иметь большую площадь поверхности?

27. Куб — это прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны. а) Какие свойства куба отсюда вытекают? б) Как найти площадь поверхности куба?

28. Дан куб $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Пусть ребро куба равно 1. а) Вычислите площади A_1DC , AB_1C , AA_1C_1C . б) Под каким углом видно

ребро куба из вершин, на нем не лежащих? в) Пусть O — центр грани $ABCD$. Вычислите A_1O и угол, под которым виден A_1O из вершин куба. г) Пусть K — середина CD . Вычислите A_1K и угол, под которым он виден из вершин куба.

§ 23

1. Два треугольника равны. Две стороны одного из них соответственно параллельны двум сторонам другого. Будут ли параллельны их третьи стороны?

2. Нарисуйте угол A , его биссектрису AM , а на одной из его сторон отметьте точку K . Постройте окружность с центром в K радиусом KA . Пусть она пересекает биссектрису в точке B . Докажите, что KB параллельна стороне угла. Проверьте обратное.

3. Два угла имеют соответственно параллельные стороны. Будут ли параллельны их биссектрисы? Проверьте обратное.

4. Пусть BK — биссектриса в треугольнике ABC . Через точку K провели $KL \parallel BC$ и $KM \parallel AB$ (точки L и M лежат на сторонах AB и BC соответственно). а) Докажите, что в четырехугольнике $BMKL$ все стороны равны. б) Изменится ли результат, если параллельные прямые проводить из другой точки биссектрисы? Проверьте обратное.

5. Прямые a и b параллельны, $A \in a$, $B \in b$. Какую фигуру образуют середины всевозможных отрезков AB ?

6. Треугольник ABC пересекает переменная прямая, параллельная AC . Стороны AB и BC она пересекает в точках K и L соответственно. Найдется ли такая из этих прямых, что будет выполняться равенство $KL = AK + LC$? Сколько будет таких прямых?

7. Федя нарисовал угол на листе бумаги. Вася взял этот лист и оторвал ту его часть, где была вершина. Можно ли теперь установить величину того угла, вершина которого оторвана?

§ 24

п. 24.1

1. Вычислите основные элементы параллелограмма, если известно, что он составлен из двух прямоугольных треугольников: а) равнобедренных с гипотенузой 1; б) с меньшим катетом длиной 1 и острым углом 30° .

2. Может ли угол между диагоналями параллелограмма равняться острому углу параллелограмма?

3. В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрису угла A . Она разделила сторону BC на отрезки длиной 1 и 2. Вычислите периметр параллелограмма.

4. В параллелограмме $ABCD$ $|AB| = 1$. Биссектрисы углов A и D делят сторону BC на три равные части. Вычислите $|BC|$.

5. Точка X движется по диагонали AC параллелограмма $ABCD$ от A к C . Пусть $|XAB| = S_1$, $|XBC| = S_2$, $|XCD| = S_3$, $|XDA| = S_4$. При каком положении точки X :

а) $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$; б) $S_2 = S_3$, $S_1 = S_4$;

в) $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$; г) $S_2 = S_4$, $S_1 = S_3$;

д) равновелики ровно два треугольника?

6. Нарисуйте параллелограмм. Нарисуйте прямую, которая пересекает все стороны параллелограмма или их продолжения. Из вершин параллелограмма проведите перпендикуляры на эту прямую. Пусть d_1, d_2, d_3, d_4 — их длины. Сколько из них надо знать, чтобы найти остальные?

7. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ провели прямую, которая пересекает диагональ BD в точке K , сторону CD в точке L и продолжение стороны BC в точке M . Укажите на этом рисунке все пары подобных треугольников. Пусть известно, в каком отношении разделилась этой прямой диагональ BD . Как найти отношения отрезков на прямых CD , BC и на этой прямой? Выберите сами числовые данные и получите результат.

8. Пусть $ABCD$ — параллелограмм и M — любая точка. Докажите, что величина

$$(|MA|^2 + |MC|^2) - (|MB|^2 + |MD|^2)$$

не зависит от положения точки M . Чему она равна?

n. 24.2

9. На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и L . Пусть $AKCL$ — параллелограмм. Докажите, что $BKDL$ тоже параллелограмм.

10. На отрезке AD построили два параллелограмма $ABCD$ и $AEFD$. Докажите, что четырехугольник $BCFE$ тоже параллелограмм.

11. Нарисуйте два параллелограмма с общим центром. На этом рисунке укажите другие параллелограммы, вершины которых лежат в вершинах данных параллелограммов.

12. Каждая диагональ четырехугольника делит его площадь пополам. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

13. Федя нарисовал параллелограмм. Пришел Вася, отметил середины трех его сторон, а все остальное стер. Сможет ли Федя восстановить первоначальный параллелограмм?

14. В другой раз параллелограмм нарисовал Вася. А Федя стер его, оставив только одну вершину и середины двух сторон, которым эта вершина не принадлежит. Сможет ли Вася восстановить исходный параллелограмм?

15. Пусть a, b, c, d — длины сторон выпуклого четырехугольника, k, l — длины его средних линий. Известно, что $k + l = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$. Докажите, что этот четырехугольник — параллелограмм.

п. 24.3

16. 1) Постройте квадрат. На его сторонах во внешнюю сторону постройте равные равнобедренные треугольники, основанием которых является сторона-квадрата. Перед вами — развертка правильной четырехугольной пирамиды. Саму пирамиду можно получить, если скрепить между собой соседние стороны равнобедренных треугольников.

2) Нарисуйте правильную четырехугольную пирамиду. Назовем ее $PABCD$, где $ABCD$ — исходный квадрат. Пусть точка Q — его центр. Докажите, что: а) треугольник PAC равнобедренный; укажите равный ему треугольник, принадлежащий пирамиде; б) $PQ \perp AC$, $PQ \perp BD$; в) PQ перпендикулярен средней линии квадрата $ABCD$; г) PQ перпендикулярен любому отрезку квадрата, концы которого лежат на его сторонах, и проходящему через Q ; д) треугольник BXD , где точка X лежит на ребре PC , равнобедренный; нарисуйте его высоту; е) концы равных отрезков, отложенных от P на боковых ребрах пирамиды, являются вершинами квадрата.

3) Пусть сторона данного квадрата равна 2, а боковое ребро равно 3. Вычислите: а) $|PQ|$; б) углы треугольника BPD ; в) $|XQ|$, если X — середина PC ; г) площадь треугольника BXD из пункта 2; д) этой же задачи, когда $|PX| = 1$.

17. В трапеции $ABCD$ $|AB| = |BC| = |BD| = 1$, $|CD| = 2$. Вычислите $|AC|$.

18. Как вычислить неизвестные основные элементы равнобедренной трапеции, если известны: а) меньшее основание, диагональ и угол против диагонали; б) два основания, а кроме того, известно, что меньшее основание равно боковой стороне; в) диагональ и углы, которые она образует с основаниями и боковыми сторонами? Выберите сами числовые данные и получите результат.

19. Как вычислить неизвестные основные элементы трапеции, если известны: а) две боковые стороны, большее основание и угол между прямыми, на которых лежат боковые стороны; б) два основания и угол между прямыми, проходящими через боковые стороны; в) два основания, диагональ и ее угол с основанием; г) два основания, угол одной диагонали с основанием и угол между диагоналями? Выберите сами числовые данные и получите результат.

20. Пусть в трапеции $ABCD$ $AD > AB > BC > CD$. Можете ли вы установить, какая диагональ больше?

21. Нарисуйте трапецию $ABCD$, а в ней диагонали и отрезок KM , проходящий через точку P пересечения диагоналей, параллельный основаниям с концами на боковых сторонах трапеции (K лежит на AB , M лежит на CD). а) Укажите все пары подобных треугольников на этом рисунке. Запишите пропорции, полученные из этих треугольников, в которых есть сторона AD , сторона CD , отрезок BP , отрезок PM . б) Пусть основания трапеции известны. Чему равна длина KM ? в) Докажите, что в равнобедренной трапеции отрезок KM делит угол между диагоналями пополам. Будет ли такое свойство отрезка KM характерным для равнобедренной трапеции?

22. Углы при большем основании трапеции равны 20° и 70° . Основания трапеции равны 2 и 1. Вычислите среднюю линию оснований трапеции. Обобщите задачу.

23. Найдите зависимость между сторонами и диагоналями трапеции. Постарайтесь ее выразить в наиболее простой форме.

24. Докажите, что средняя линия оснований трапеции проходит через точку пересечения ее диагоналей.

Признаки трапеции

25. Как составить трапецию из: а) параллелограмма и треугольника; б) ромба и равнобедренного треугольника; в) квадрата и прямоугольного треугольника; г) двух трапеций; д) двух прямоугольных треугольников; е) равностороннего треугольника и прямоугольного треугольника; ж) двух равнобедренных треугольников; з) трех равносторонних треугольников; и) четырех прямоугольных треугольников; к) прямоугольника и двух прямоугольных треугольников?

Пусть известны все элементы одной из частей трапеции. В каком случае вы сможете найти все основные элементы трапеции?

26. Нарисуйте окружность. Внутри ее диаметра возьмите точку. Проведите через нее две хорды под одним углом к диаметру. Докажите, что концы этих хорд являются вершинами трапеции, причем равнобедренной.

27. Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) диагонали трапеции делят пополам углы при одном из ее оснований; б) ее диагонали равны.

28. Постройте трапецию: а) по четырем сторонам; б) по двум основаниям и углам при одном из них; в) по двум основаниям и двум диагоналям; г) так, чтобы боковые стороны трапеции лежали на перпендикулярных прямых; д) так, чтобы диагональ трапеции была перпендикулярна какой-либо ее стороне.

п. 24.6

29. Найдите неизвестную площадь на рисунке 209. (На рисунке 209, з площадь данного параллелограмма равна S .)

30. Нарисуйте выпуклый четырехугольник и его диагонали. Через его вершины параллельно его диагоналям проведите прямые. Проведенные прямые ограничат другой четырехугольник. Сравните площади исходного и полученного четырехугольников.

31. Докажите, что из всех параллелограммов с заданной площадью наименьший периметр имеет прямоугольник.

32. Дан ромб с острым углом 60° . Докажите, что его площадь составляет $\frac{2}{3}$ площади равностороннего треугольника, сторона которого равна большей диагонали ромба. Как изменится результат, если угол ромба будет отличен от 60° ? Как изменится результат, если вместо ромба взять параллелограмм?

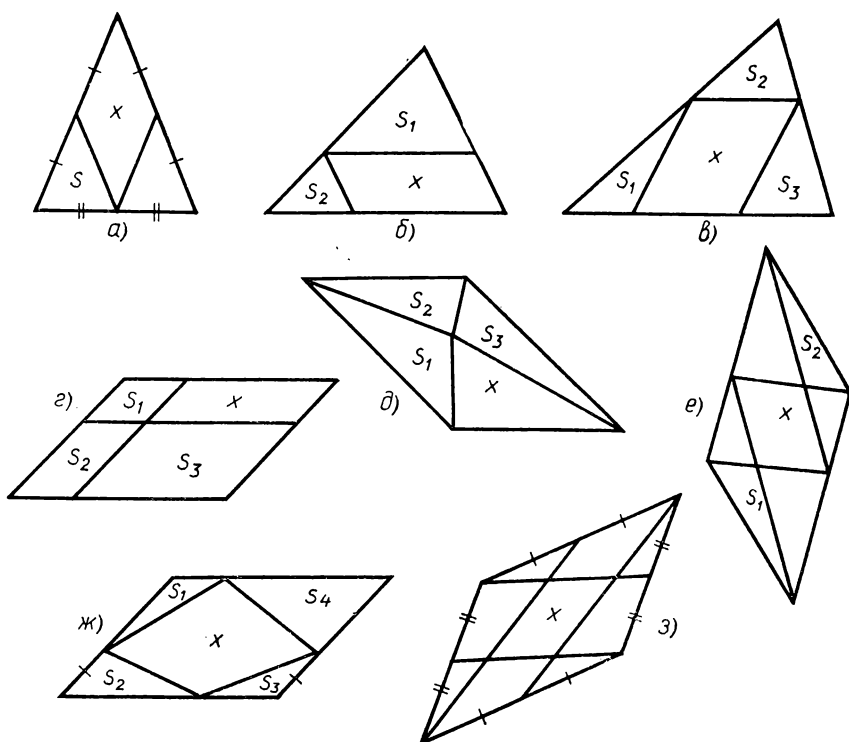


Рис. 209

33. На листе вашей тетради расставьте 16 точек в виде квадрата 4×4 на пересечении горизонтальных и вертикальных полос. Нарисуйте параллелограмм с вершинами в этих точках так, чтобы внутри него не было ни одной точки из тех, что вы расставили. Пусть длина стороны квадрата равна 1. Вычислите площадь нарисованного вами параллелограмма.

34. Как разделить трапецию на две равновеликие части, на три равновеликие части? Обобщите задачу.

35. Как найти площадь трапеции, если известны обе диагонали и высота? Сделайте конкретный расчет.

36. Нарисуйте два квадрата $ABCD$ и $BKLM$ так, что точка M лежит внутри BC , общих внутренних точек они не имеют и сторона меньшего квадрата равна половине стороны большего квадрата. Сравните площадь четырехугольника $DBLC$ с площадями данных квадратов.

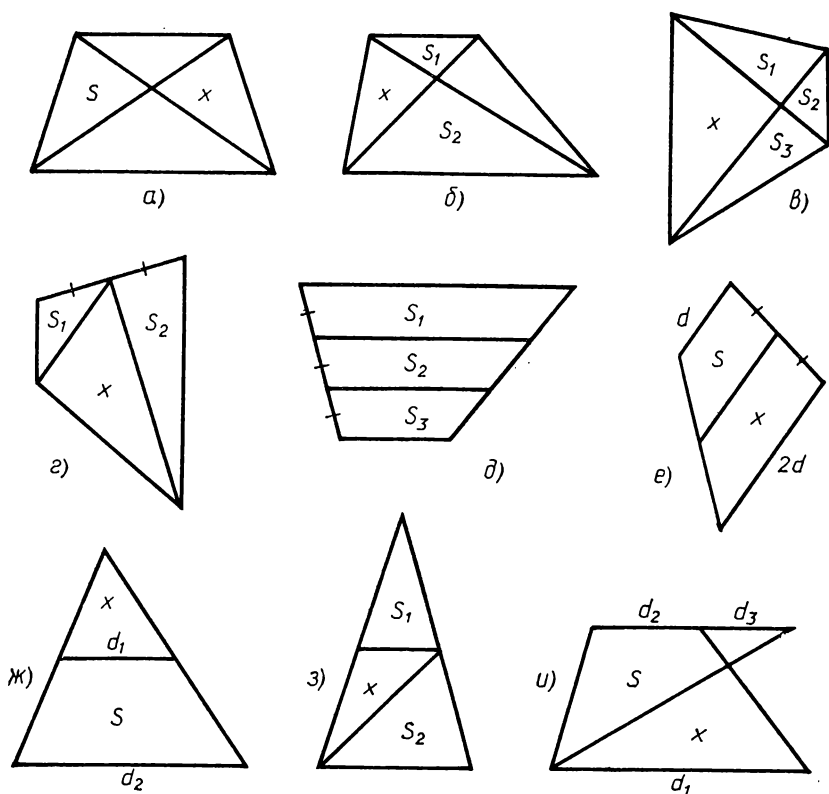


Рис. 210

37. Найдите неизвестную площадь на рисунке 210.

38. Можно ли вычислять площадь параллелограмма по формуле для площади трапеции? А площадь треугольника по формуле для площади трапеции?

39. Сечение канала имеет форму равнобедренной трапеции. Как найти его площадь, не входя в воду?

§ 25

nn. 25. 1—25.3

1. Нарисуйте три отрезка. Обозначьте их длины d_1 , d_2 , d_3 . Постройте четвертый отрезок, длина которого x удовлетворяет таким пропорциям: $d_1 : d_2 = d_3 : x$; $d_1 : d_2 = x : d_3$.

б) Нарисуйте треугольник. Постройте отрезок, который вместе с его сторонами составляет пропорцию.

2. Нарисуйте отрезок. Используя обобщенную теорему Фалеса:
а) разделите его пропорционально числам: 1 и 2; 1,2 и 3; 1 и $\sqrt{2}$;
 $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; б) разделите его так, чтобы одна часть составляла $\frac{2}{3}$ отрезка; в) разделите его так, чтобы одна часть была в 1,5 раза длиннее другой.

3. Нарисуйте отрезок. Пусть его длина равна 1. Нарисуйте еще один отрезок. Пусть его длина равна d . Постройте отрезок длиной: а) d^2 ; б) $\frac{1}{d}$; в) \sqrt{d} .

4. Нарисуйте треугольник. На любой его стороне отметьте точку. Проведите через нее прямую, делящую площадь треугольника пополам.

5. Два треугольника имеют равные основания и равные площади, причем их основания лежат на одной прямой. Эти треугольники пересекает прямая, параллельная их основаниям. Докажите, что отрезки этой прямой внутри данных треугольников равны. Проверьте обратное.

6. Из точки O выходят три луча: OA , OB , OC . На луче OA взяты точки A_1 и A_2 , на луче OB взяты точки B_1 и B_2 , на луче OC взяты точки C_1 и C_2 , причем $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$. Докажите, что $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Будет ли это верно для трех лучей пространства?

7. Нарисуйте треугольник. На одной его стороне отметьте точку. Проведите через нее прямые, параллельные другим сторонам треугольника. а) Укажите на полученном рисунке подобные треугольники. б) Сравните площади двух полученных треугольников с площадью оставшейся части. в) Можете ли вы узнать, при каком положении отмеченной точки площадь оставшейся части является наименьшей?

8. Через точку внутри треугольника провели три прямые, параллельные его сторонам. Известны площади трех образовавшихся при этом треугольников, ограниченных стороной данного треугольника и двумя проведенными прямыми. Можете ли вы найти площадь исходного треугольника?

9. Федя построил треугольник и отметил середины его сторон. Пришел Вася, стер треугольник, только середины оставил. Сможет ли Федя восстановить треугольник?

10. Нарисуйте отрезок. Сможете ли вы его удвоить с помощью только угольника?

11. Основание равнобедренного треугольника равно 2, а боковая сторона равна 3. Вычислите расстояние от точки пересечения медиан этого треугольника до: а) его сторон; б) его вершин. Вычислите угол между каждой парой его медиан.

12. Дан разносторонний треугольник. Пусть T — точка пересечения его медиан. Требуется узнать: а) к какой его вершине T находится ближе всего; б) к какой его стороне T находится ближе всего; в) какая сторона треугольника видна из T лучше всего.

Как вы будете действовать, зная только стороны треугольника?

13. Постройте треугольник по: а) двум сторонам и медиане к одной из них; б) двум сторонам и медиане к третьей стороне; в) стороне и двум медианам, одна из которых к данной стороне; г) стороне и двум медианам к другим сторонам; д) трем медианам.

14. В треугольнике ABC провели три средние линии. Треугольник, образованный ими, назовем $A_1B_1C_1$. а) Какую часть составляет $|A_1B_1C_1|$ от $|ABC|$? б) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ находится внутри треугольника ABC . в) Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают. г) Попробуйте придумать еще одно доказательство существования общей точки у трех медиан?

15. Нарисуйте треугольник, а в нем все медианы. Предполагая стороны треугольника известными, установите, в каких границах находится сумма медиан.

16. Пусть $PABC$ — правильный тетраэдр, точка Q — центр треугольника ABC . Докажите, что: а) PQ перпендикулярен медианам треугольника ABC ; б) PQ перпендикулярен отрезкам, проходящим через Q и параллельным сторонам треугольника; в) PQ пересекается с BB_1 , где B_1 — центр грани PAC . (Какой еще вывод можно сделать из этой задачи?)

Задачи к главе IV

1. На сколько частей могут разделить плоскость пять прямых?

2. В равнобедренном треугольнике известны стороны. Как найти расстояние между: а) концами двух высот, проведенных на боковые стороны; б) концами двух биссектрис, проведенных на боковые стороны; в) концами двух отрезков, соединяющих вершины основания с боковыми сторонами и проходящих через середину высоты к основанию?

Обобщите эту задачу.

3. Постройте треугольник по двум углам и проведенной из вершины третьего угла: а) медиане; б) высоте; в) биссектрисе.

4. а) Дан равносторонний треугольник. Внутри него располагаются квадраты, причем одна из сторон квадрата лежит на стороне треугольника. Из всех таких квадратов укажите тот, который имеет наибольшую площадь. б) Сможете ли вы решить такую же задачу, если будет дан равнобедренный прямоугольный треугольник? в) А если будет дан равнобедренный треугольник, у которого высота равна основанию?

5. Нарисуйте отрезок. Разделите его в отношении «золотого сечения».

6. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Пусть точка K — середина стороны AB . Проведите окружность с центром K радиусом KC . Точку ее пересечения с лучом AB обозначим L . Докажите, что точка B делит отрезок AL в отношении «золотого сечения».

7. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36° . Проведена биссектриса угла при основании. Докажите, что она делит боковую сторону в отношении «золотого сечения».

8. Нарисуйте отрезок AB . Пусть точка C делит его в отношении «золотого сечения». На отрезке AC отложите отрезок $CD = CB$. Докажите, что точка D делит AC в отношении «золотого сечения».

9. Прямоугольник назовем «золотым», если отношение его сторон равно отношению «золотого сечения». От «золотого» прямоугольника отрезали квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Докажите, что остался «золотой» прямоугольник.

10. Пусть $ABCD$ и A_1CD_1B — два «золотых» прямоугольника с разных сторон от прямой BC , $A_1 \in BC$. Соедините B и D_1 отрезком и нарисуйте прямоугольник $BKLD_1$, где точка K лежит на стороне AD . Докажите, что: а) $BKLD_1$ — «золотой» прямоугольник; б) площадь $BKLD_1$ равна сумме площадей данных прямоугольников.

11. Установите вид четырехугольника $KLMN$, если: а) точки K и M — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$, в точке L пересекаются CM и DK , в точке N пересекаются AK и BM ; б) K, L, M, N — точки пересечения биссектрис всех углов параллелограмма; в) K, L, M, N — центры квадратов, построенных во внешнюю сторону на всех сторонах параллелограмма; г) L и N — вершины двух равносторонних треугольников, построенных на сторонах AD и BC прямоугольника $ABCD$, в точке K пересекаются

AL и BN , в точке M пересекаются CN и DL ; д) K, L, M, N — точки пересечения отрезков, проведенных из вершин квадрата в середину следующей по порядку стороны; е) K, L, M, N — концы отрезков, являющихся продолжениями сторон квадрата на расстояние, равное стороне квадрата; при этом каждая вершина квадрата является концом только одного продолжения; ж) K, L, M, N — вершины равносторонних треугольников, построенных на сторонах квадрата во внешнюю сторону.

12. Каждая вершина параллелограмма соединена отрезком с серединой следующей в порядке обхода стороны. При этом внутри получается маленький параллелограмм. Какую часть составляет его площадь от площади данного?

13. На двух противоположных сторонах параллелограмма $ABCD$ берутся точки K и M так, что $KM \parallel AD$, а на других двух его сторонах берутся точки L и N . Какую часть составляет от площади параллелограмма площадь четырехугольника $KLMN$?

14. На двух противоположных сторонах параллелограмма $ABCD$ берутся точки K и M , в точке L пересекаются DK и CM , в точке N пересекаются AK и BM . Известны площади треугольников ABN и CLD . Можете ли вы найти площадь $KLMN$?

15. Можно ли на стороне трапеции найти такую точку, что площадь треугольника, вершинами которого являются данная точка и две вершины трапеции, равна половине площади трапеции?

16. Нарисуйте произвольный четырехугольник. Как найти его площадь, сделав как можно меньше измерений? Обобщите задачу.

17. а) Известен пеленг (азимут) направления от A к B . Как вычислить пеленг обратного направления? (Обратный пеленг, обратный азимут.) б) Известно расстояние от корабля до маяка и пеленг на маяк. Как узнать положение корабля на карте? в) Вам известны азимуты двух ориентиров на местности. Как отметить на карте ваше положение?

18. Вы стоите перед объектом, расстояние до которого требуется определить. Вытяните руку вперед, закройте один глаз и закройте вид на объект большим пальцем этой руки. Потом посмотрите на этот палец другим глазом. Вы увидели объект. Как можно использовать этот эффект для вычисления нужного расстояния?

19. Из листа бумаги в форме прямоугольника нужно сделать конверт. Сделайте соответствующие расчеты.

ОТВЕТЫ

§ 14

9. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{8}$; в) 7; г) $2\sqrt{d_2^2 - d_1^2}$. 10. $\sqrt{6}$, 8 или $\sqrt{50}$.
 12. а) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$; б) $\frac{1}{2}d \cdot \sqrt{\frac{3}{4}d^2}$; в) $\sqrt{8}$; г) $\frac{1}{2}d_2 \sqrt{d_1^2 - \frac{d_2^2}{4}}$.
 14. а) $\sqrt{2R^2 - \frac{1}{2}d^2}$; б) $\sqrt{2R^2 - \frac{1}{4}(d_1^2 + d_2^2)}$. 16. 1.

§ 15

9. а) $2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-1$; б) $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$. 10. $\sqrt{\frac{28}{3}}$. 12. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 б) $2\sqrt{2}$ и $\frac{4}{3}\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ и $\frac{5}{6}\sqrt{11}$; г) $d_1, d_2, \frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$; д) $\frac{15}{8}\sqrt{7}$,
 $\frac{5}{4}\sqrt{7}, \frac{3}{2}\sqrt{7}$. 13. а) 2; б) $\sqrt{7}$; в) $\sqrt{3}$; г) 2; д) 2.

§ 16

18. $3\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}$.

§ 18

7. а) $\sin 20^\circ : \sin 70^\circ : 1$; б) $\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$. 8. а) $\hat{C} = 70^\circ$, $b =$
 $= 10\sqrt{2} \sin 65^\circ$, $c = 10\sqrt{2} \sin 70^\circ$; б) $\hat{C} = 70^\circ$, $a = 2 \frac{\sin 10^\circ}{\sin 70^\circ}$, $b = \frac{2 \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ}$;
 в) $\hat{B} = 57^\circ$, $\hat{C} = 83^\circ$, $c \approx 49,5$.

§ 24

51. 7,68. 52. $\frac{1}{2}d(d_1 + d_2)$.

§ 26

8. а) 120 и 60° ; б) 150 и 90° ; в) $180^\circ - \varphi$ и φ . 9. а) 120° ; б) 160° ;
 в) 40° или 160° .

§ 27

7. а) 0° ; б) 120° ; г) меньше чем 120° ; д) больше чем 120° . 8. а) Длина
 вектора $\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$. 25. В одном из случаев $\approx 0,64$. 32. а) $\sqrt{2}$;
 б) $2(1 - \cos \varphi)$; в) от 0 до 2. 33. а) 180° ; б) 60° .

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиома откладывания отрезка 3
 — угла 3
 — отрезка 3
 — продолжения отрезка 3
 — прямоугольника 3
 Ассоциативность сложения векторов 130
- Боковая сторона трапеции 98
- Вектор (векторная величина) 116
 —, параллельный прямой 117
 —, перпендикулярный прямой 118
 Взаимно обратные утверждения 15
 Внешние углы 83
 Внутренние углы 83
 Высота параллелограмма 98
 — трапеции 99
 Вычитание векторов 131
- Геометрическое место точек 34
- Делительный циркуль 65
 Дополнительные углы 44
- «Золотое сечение» 155
- Квадрат 97
 Квадратный корень 10
 Коммутативность сложения векторов 128
 Косинус угла 46
 Котангенс угла 57
 Коэффициент подобия треугольников 61
- Множество точек, обладающих данным свойством 34
 Модуль (абсолютная величина) вектора 116
- Наклонная к прямой 14
 Накрест лежащие углы 83
 Направленный отрезок 117
 Неравенство треугольника 17
 Нулевой вектор 123
- Обобщенная теорема Пифагора 50
 — Фалеса 106
 Одинаково направленные векторы 118
 Односторонние углы 83
 Основания трапеции 98
 Откладывание вектора 122
 Отношение отрезков 20
- Параллелограмм 93
 Параллельные векторы 117
 — отрезки 87
 — прямые 81
 Перпендикуляр к плоскости 17
 Перпендикулярные векторы 118
 Площадь параллелограмма 99
 — трапеции 99
 Подобные треугольники 61
 — фигуры 61
 Правило параллелограмма 129
 — треугольника 127
 Признак параллельности векторов 141
 — равенства векторов 121
 — треугольников 4
 — треугольников (второй) 39
 Признаки параллелограмма 94
 — параллельности прямых 84
 — подобия треугольников 62
 — прямоугольных треугольников 64
 — равенства прямоугольных треугольников 31
 Проекция наклонной к прямой 14
 Произведение вектора на число 141
 Противоположно направленные векторы 119
 Противоположный вектор 130
 Прямоугольник 4, 96
- Равенство треугольников 4
 — углов между лучами 3
 Равнобедренная трапеция 98
 Равные векторы 120
 Разность векторов 131
 Расстояние от точки до фигуры 16
 Решение треугольников 30
 Ромб 96

- Свойства косинуса 47
- синуса 26
- умножения вектора на число 143
- Синус угла 23
- Синусы углов прямоугольного треугольника 25
- Скаляр (скалярная величина) 116
- Сложение векторов 126
- Сонаправленные векторы 119
- Соответственные углы 84
- Составляющие вектора 132
- Средняя линия треугольника 105
- Сумма векторов 127
- Тангенс угла 57
- Теорема косинусов 52
 - о биссектрисе угла 33
 - диагоналях прямоугольника 96
 - ромба 96
 - наклонных и проекциях 15
 - параллельности перпендикуляров 81
 - площади прямоугольника 5
 - треугольника 5
 - равнобедренном треугольнике 5
 - разложении вектора на составляющие 133
 - свойствах параллелограмма 93
- серединном перпендикуляре 32
- сонаправленных векторах 119
- соответственных углах 88
- сумме векторов 127
- углов треугольника 5
- существовании и единственности параллельной 82
- точке пересечения медиан треугольника 154
- об общих перпендикулярах 86
- откладывании вектора 122
- отношении перпендикуляра к наклонной 21
- углах подобных треугольников 62
- при параллельных и секущей 85
- равных треугольников 4
- Пифагора 7
- синусов 37
- Фалеса 107
- Трапеция 98
- Тригонометрические формулы 59
- Угол между векторами 124
- Характерное свойство фигуры 33

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3	Глава IV.	81
Глава III.	6	Параллельность	
Геометрия треугольника		§ 23. Параллельные прямые	—
§ 14. Теорема Пифагора	7	Задачи к § 23	88
Задачи к § 14	11	§ 24. Параллелограмм и трапеция	93
§ 15. Перпендикуляр и наклонная. Неравенство треугольника	14	Задачи к § 24	99
Задачи к § 15	18	§ 25. Параллельность и подобные треугольники	105
§ 16. Синус	20	Задачи к § 25	109
Задачи к § 16	27	Выводы	113
§ 17. Признаки равенства прямоугольных треугольников и их применение	30	Глава V.	116
Задачи к § 17	34	Векторы	
§ 18. Теорема синусов	37	§ 26. Векторы	—
Задачи к § 18	41	Задачи к § 26	125
§ 19. Косинус	44	§ 27. Сложение векторов	126
Задачи к § 19	49	Задачи к § 27	134
§ 20. Обобщенная теорема Пифагора	50	§ 28. Умножение вектора на число	140
Задачи к § 20	55	Задачи к § 28	146
§ 21. Тригонометрические функции	56	Выводы	150
Задачи к § 21	60	Дополнения	151
§ 22. Подобные треугольники	61	Дополнительные задачи	157
Задачи к § 22	67	Ответы	189
Выводы	77	Предметный указатель	190

Александр Данилович Александров,
Алексей Леснилович Вернер, Валерий Идельевич Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ. Пробный учебник для 7 класса

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*, Редактор *Н. И. Никитина*,
Мл. редакторы *Е. А. Сафронова*, *Л. Е. Козырева*,
Художник *Б. Л. Николаев*, Художественный редактор *Е. Н. Карасик*,
Технический редактор *Е. В. Богданова*,
Корректоры *Л. Г. Новожилова*, *Л. А. Ермолина*.

ИБ № 8782

Сдано в набор 12.12.84. Подписано к печати 03.04.85. Бумага типогр. № 2. Гарнитура литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 12. Уел. кр.-отт. 12,25. Уч.-изд. л. 10,27. Тираж 35500 экз. Заказ № 973. Цена 15 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41. Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавополиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

15 к.

