

Алешкевич В.А.
Деденко Л.Г.
Караваев В.А.

Курс общей физики. Механика



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2011

УДК 531/534(075.8)

ББК 22.2я73

А 45

Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. **Курс общей физики. Механика** / Под ред. В.А. Алешкевича. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 472 с. — ISBN 978-5-9221-1271-0.

Учебник представляет собой первую часть серии «Университетский курс общей физики», предназначенную для студентов физических специальностей вузов. Отличительная его особенность — многоуровневая концепция изложения важнейших экспериментальных фактов и основ теории физических явлений с учетом современных научных достижений. Учебник включает следующие основные разделы: кинематика и динамика, основы релятивистской механики, механика твердого тела, механика сплошных сред, колебания и волны.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Физика».

Рецензенты:

кафедра общей и молекулярной физики Уральского государственного университета
(зав. кафедрой проф. С.Ф. Борисов);

проф. А.В. Аганов (зав. кафедрой общей физики Казанского государственного университета)

© ФИЗМАТЛИТ, 2011

© В.А. Алешкевич, Л.Г. Деденко, В.А. Караваев,
2011

ISBN 978-5-9221-1271-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник является первым изданием серии «Университетский курс общей физики» и предназначен для студентов физических специальностей вузов. Курс охватывает четыре раздела: «Механика», «Молекулярная физика», «Электричество и магнетизм» и «Оптика». Он соответствует новым учебным программам, разработанным на физическом факультете Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, и отражает современные тенденции и технологии физического образования.

Учебник представлен в виде 24 тематических лекций. Лекции по каждой теме начинаются, как правило, с демонстрации основных экспериментальных фактов, которые затем анализируются и обобщаются в виде физических законов и соотношений. Такой «экспериментальный» подход к изложению материала закрепляется при выполнении лабораторных работ, цель которых — привить студентам навыки самостоятельной постановки и решения физических проблем, проведения экспериментальных исследований, компьютерного моделирования, а также обучить их методам интерпретации и анализа экспериментальных данных. Более глубокое понимание сути основных физических явлений и закономерностей достигается на семинарских занятиях и в процессе самостоятельной работы.

Каждая лекция содержит материал базового (первого) уровня, соответствующий программе курса и излагаемый почти в полном объеме в аудитории. Студенты, которые легко усваивают базовый материал, имеют возможность получить дополнительные знания, расширяющие их взгляд на многообразие механических явлений, протекающих на Земле, в Мировом океане и атмосфере. В связи с этим каждая лекция содержит материал второго уровня, изложение которого проводится с использованием простейших моделей и детальным объяснением физического смысла ряда математических понятий и операций. Это несомненно облегчит студенту знакомство со многими явлениями и способами их математического описания при дальнейшем изучении курса теоретической физики.

Все лекции сгруппированы в 5 разделов: кинематика и динамика (лекции 1 — 6); основы релятивистской механики (лекции 7—10); механика твердого тела (лекции 11 —14); механика сплошных сред (лекции 15—18), колебания и волны (лекции 19 — 24). Изданию книги предшествовали учебные пособия, которые прошли успешную апробацию в ряде классических университетов и других вузах России.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность академику РАН, проф. О.В.Руденко, проф. В.П.Митрофанову, проф. К.В.Показееву, проф. В.И.Балакшию и доц. Е. В. Ворониной за помощь, оказанную при обсуждении отдельных тем, входящих в область их профессиональных интересов, а также признательны проф. В.П.Кандидову, доц. С.С.Чеснокову и доц. С.А.Шленову за предоставленные результаты численного моделирования изображения главного здания МГУ с учетом атмосферных турбулентных искажений.

Издание данной книги было бы невозможно без участия Е.А.Вешняковой, М.П.Виноградова, Ю.А.Кокшарова, А.В.Селиверстова, М.В.Семенова, Б.В.Трубицина и А.А.Якуты.

Авторы с особой теплотой вспоминают ушедшего из жизни проф. Л.В. Левшина, сыгравшего большую роль в создании этой книги.

Авторы также признательны декану физического факультета Казанского государственного университета, зав. кафедрой общей физики проф. А. В. Аганову, декану физического факультета Уральского государственного университета, зав. кафедрой физики низких температур проф. А. Н. Бабушкину и зав. кафедрой общей и молекулярной физики Уральского государственного университета проф. С.Ф.Борисову за полезные замечания.

РАЗДЕЛ 1

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 1

Задача механики. Механика (от греч. μηχανή — машина, конструкция) — наука, изучающая перемещения тел или их частей относительно друг друга. Задача механики — экспериментальное исследование различных движений, обобщение полученных данных в виде законов, на основании которых можно предсказать характер движения в каждом конкретном случае.

Движение всех материальных тел происходит в пространстве и во времени. Кроме того, все тела имеют свои собственные размеры и структуру и занимают определенное место в пространстве. С течением времени и размеры, и структура, и взаимное расположение тел могут изменяться. Ясно, что для экспериментального изучения движений надо уметь определять размеры тел, пространственные координаты и время.

Для обобщения полученных данных в виде тех или иных закономерностей необходимо иметь представление как о свойствах пространства и времени, так и о характеристиках самих тел. Принципиально важным при этом является умение строить определенную физическую модель явления. Поэтому прежде чем перейти к рассмотрению основных законов механики и методов решения конкретных задач кинематики и динамики, мы кратко познакомимся, во-первых, с модельным характером основных представлений механики, во-вторых, — с современными представлениями о важнейших свойствах пространства и времени и, в-третьих, — с процедурой измерения основных механических величин (длины, времени, массы).

Модельный характер физических представлений. В реальном мире связи между явлениями и предметами столь многообразны, что охватить их все невозможно. Естественно, мы выделяем лишь те особенности, которые кажутся нам наиболее существенными, и отбрасываем все второстепенное. Так создается модель, которая есть лишь более или менее точное отображение реальности. Отбросить все несущественное — важнейший элемент физического исследования. К сожалению, не существует рецепта, следуя которому можно было бы выделить в исследуемом явлении главное и отбросить все второстепенное. Здесь должны сказать свое слово опыт и физическая интуиция исследователя.

Предположим, что мы хотим описать полет артиллерийского снаряда. Зная начальную скорость и считая поле тяжести однородным, можно рассчитать траекторию снаряда. Эта траектория будет, однако, отличаться от реальной. Различие можно уменьшить, если уточнить модель: учесть сопротивление воздуха, ветер, неоднородность поля тяжести и вращение Земли (при большой дальности полета), вращение снаряда и т.д. В итоге можно выявить те

факторы, которые будут оказывать наибольшее влияние на рассматриваемое движение, и добиться того, что расчеты по принятой модели дадут более хорошее совпадение с результатами реальной стрельбы.

Таким образом, учет наиболее существенных факторов и отбрасывание всего несущественного сводится к идеализации реальной ситуации и созданию определенной физической модели. При этом используется целый ряд абстракций (абстрактных понятий), связанных с идеализацией тех или иных объектов или процессов. Примерами абстракций, встречающихся в механике, являются: материальная точка, прямолинейное равномерное движение, абсолютно твердое тело, абсолютно упругий удар, гармонические колебания, несжимаемая и невязкая жидкость и др.

Для описания одного и того же объекта в разных ситуациях могут быть использованы разные абстрактные понятия. Например, Землю можно считать материальной точкой в Солнечной системе, но по отношению к искусственному спутнику ее в первом приближении следует рассматривать как однородный массивный шар. В следующем приближении необходимо учесть реальную форму Земли и неравномерное распределение массы по ее объему. При изучении различий в ускорении свободного падения на полюсе и на экваторе существенными оказываются приплюснутость Земли с полюсов и ее вращение вокруг оси.

Все модели, создаваемые с использованием различных абстракций, имеют принципиально приближенный характер и справедливы лишь для той группы явлений, для которой они созданы. Механика Ньютона, о которой пойдет речь ниже, — это классическая нерелятивистская механика, она изучает достаточно медленные движения тел с достаточно большими массами. Классические представления о движении неприменимы к явлениям микромира — там необходимо использовать квантово-механические подходы. Для объектов, движущихся со скоростями, сравнимыми со скоростью света (например, элементарных частиц в ускорителе), также должен быть использован иной — релятивистский подход, основанный на теории относительности. При этом механика Ньютона является предельным случаем релятивистской и квантовой механики.

Используя те или иные абстрактные понятия, не следует забывать о критериях их применимости. Подобный критерий должен быть сформулирован так: если некоторая величина $a \ll A$, то можно использовать модель с $a = 0$ (пример: пренебрежение массой нити по сравнению с массой груза во многих механических системах). Подобный количественный критерий не всегда удается сразу и легко сформулировать, но он всегда существует. Например, при построении моделей механических систем важнейшей абстракцией является понятие материальной точки — тела, в геометрическом смысле эквивалентного математической точке, но обладающего массой. При этом размеры a тела должны быть много меньше характерного расстояния A , на котором рассматривается его движение. В модели абсолютно твердого тела деформация a , возникающая при тех или иных взаимодействиях, должна быть много меньше характерного размера тела A .

Ясно, что модель того или иного явления должна адекватно отражать свойства, обнаруживаемые в опыте. Соответствие той или иной модели реальной ситуации может быть установлено только на основе экспериментов. В истории

развития науки известно много примеров, когда представления (модели), сыгравшие определенную роль в накоплении физических знаний, в конце концов были отброшены как не соответствующие действительности. Так, в XIX в. господствовала теория мирового эфира — некоторой субстанции, заполняющей все окружающее нас пространство. При этом распространение света рассматривалось с чисто механистических позиций как волновой процесс в этом эфире. В рамках этих представлений были, в частности, получены фундаментальные уравнения Максвелла. С последующим развитием физики концепция эфира была поколеблена. Из опытов Брэдли по абберрации света звезд следовало, что эфир, если он есть, должен быть неподвижен, а из опытов Майкельсона — Морли — что он должен увлекаться движущимися телами (см. лекцию 7). Современная физика эфир отвергает, хотя попытки обнаружения «эфирного ветра» продолжают и поныне.

Пространство и геометрия. Геометрия, к которой мы привыкли и которую изучаем в школе, по своему происхождению является опытной наукой. Она отражает свойства реальных материальных тел, оперируя, правда, с идеализированными образами (абстрактными понятиями), такими, как точка, прямая линия, поверхность, объем и т. п. Эта геометрия базируется на ряде аксиом, сформулированных Евклидом (III век до н. э.), и поэтому называется евклидовой геометрией. В рамках этой геометрии, в частности, сумма углов треугольника равна 180° , отношение длины окружности к ее диаметру равно π , справедлива теорема Пифагора и т. д. Пространство, в котором справедливы аксиомы этой геометрии, также получило название евклидова. Евклидово пространство безгранично, однородно и изотропно (см. ниже), имеет три измерения. Именно такое пространство было взято И. Ньютоном в 1687 г. в качестве модели абсолютного пространства в его механистической картине мира.

По Ньютону, «абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным. Относительное есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению его относительно некоторых тел и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное».

Совсем иной точки зрения придерживался Э. Мах. По Маху (1883), «об абсолютном пространстве и абсолютном движении никто ничего сказать не может; это чисто абстрактные вещи, которые на опыте обнаружены быть не могут. Все наши основные принципы механики представляют собою ... данные опыта об относительных положениях и движениях тел. Не следует и невозможно принимать их без проверки в областях, в которых их в настоящее время признают правильными. Никто не вправе расширять сферы действия этих основных принципов за пределы опыта. Такое расширение даже бессмысленно, ибо никто не сумел бы найти ему применение».

Следует отметить, что пространство, о котором говорили Ньютон и Мах, по своей сути является плоским, т. е. не обладающим какой-либо кривизной. Современная физика в рамках общей теории относительности (ОТО) А. Эйнштейна допускает искривление пространства. Согласно ОТО, следует говорить об искривлении четырехмерного пространства-времени, пространственная часть которого есть его «сечение» в некоторый момент времени. Геометрия такого

искривленного пространства перестает быть евклидовой. Одним из создателей неевклидовой геометрии по праву считается русский математик Н. И. Лобачевский, работа которого «О началах геометрии» была опубликована в 1829 г. Кроме Лобачевского разработкой неевклидовой геометрии занимались также К. Гаусс и Я. Бояи. В последующем большой вклад в создание новых геометрий внес Б. Риман, работы которого составили математический фундамент ОТО.

Наиболее простой иллюстрацией искривленного пространства в двумерном случае является поверхность шара (рис. 1.1). Аналогом прямых линий — линий кратчайшего расстояния между любыми двумя точками — являются дуги больших кругов (дуги AB , AC и BC). Меридиональные дуги AB и AC (A — полюс шара) пересекают экватор (дуга BC) под прямым углом. Ясно, что для треугольника ABC не выполняется теорема Пифагора, а сумма внутренних углов больше 180° .

Отклонения от евклидовости в рассмотренном примере связаны, очевидно, с тем, что поверхность шара имеет некоторую кривизну. На определенном этапе развития физики, естественно, возник вопрос: насколько точно евклидова геометрия отражает свойства окружающего нас пространства и не обладает ли это пространство кривизной? Гаусс предложил ответить на этот вопрос, измеряя сумму внутренних углов большого треугольника, образованного вершинами трех гор (метод триангуляции, рис. 1.2). Такие измерения были выполнены в 1821—1823 гг. Для точного измерения углов треугольника ABC , образованного вершинами гор Брокен, Хохехаген и Инзельберг в Германии, были использованы геодезические приборы. Сумма углов с погрешностью до $1''$ составила 180° . На основании этих опытов Гаусс пришел к выводу, что в пределах точности этих измерений окружающее нас пространство является плоским.

Отметим, что использование в методе триангуляции световых лучей было вполне естественным и по существу не имело никаких альтернатив. Тем не менее само определение понятия «прямая линия» представляет собой некоторую проблему. Было бы наивно говорить, что прямая — это линия, проведенная по линейке: надо ведь еще проверить, не искривлена ли сама линейка. Здесь следует заметить, что человек с древних времен пользовался световыми лучами как идеально прямыми линиями. Действительно, ведь для того чтобы проверить, не кривая ли линейка, мы подносим ее к глазам и смотрим вдоль ребра. Если бы свет распространялся не по прямой, а по искривленной

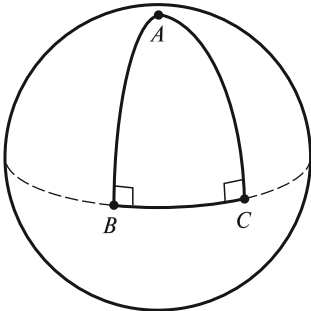


Рис. 1.1

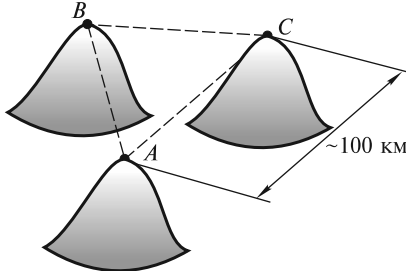


Рис. 1.2

линии, то все линейки, изготовленные с помощью такого оптического контроля, были бы тоже искривлены, но мы бы этого не заметили. Отметим, что первые научные представления о зрительных лучах — прямых линиях — содержались еще у Платона и Евклида.

Из примера с геометрией на поверхности шара ясно, что отклонения от евклидовости будут все более значительными и заметными по мере увеличения размеров рассматриваемого треугольника. В этой связи для того, чтобы повысить точность в ответе на вопрос о евклидовости нашего физического пространства, необходимо применять метод триангуляции к треугольникам как можно с большей базой — например, таким,

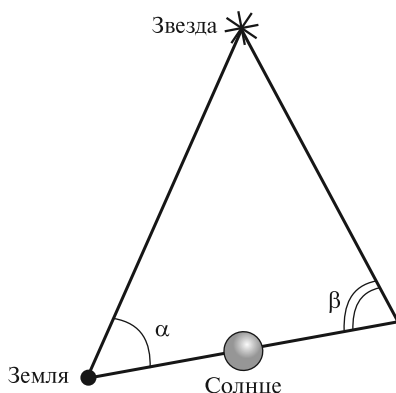


Рис. 1.3

которые образованы Землей, другими планетами и звездами. Так, в методе К. Шварцшильда измеряемый треугольник образован диаметром земной орбиты и двумя отрезками, соединяющими противоположные концы этого диаметра с удаленной звездой (рис. 1.3). Наблюдения за удаленной звездой и соответствующие измерения углов α и β проводят с интервалом в 6 месяцев, когда Земля находится в противоположных точках своей орбиты. Если пространство является плоским, то сумма углов $\alpha + \beta$ всегда меньше 180° . В настоящее время не существует данных, согласно которым эта сумма была бы больше 180° .

Современные представления о евклидовости пространства в целом базируются на наблюдениях удаленных объектов, измерениях флуктуаций так называемого реликтового микроволнового излучения и выводах из теорий Большого Взрыва и расширяющейся Вселенной.

В 1922 г. российский ученый А. А. Фридман на основе ОТО предложил теорию однородной и изотропной расширяющейся Вселенной. Согласно Фридману, если средняя плотность ρ вещества во Вселенной меньше некоторого критического значения ρ_k , то Вселенная будет расширяться вечно. При $\rho > \rho_k$ расширение должно смениться сжатием. Если $\rho = \rho_k$, то темп расширения будет все время замедляться. После запуска в 1995 г. на орбиту американского телескопа «Hubble» для наблюдения стали доступны чрезвычайно удаленные и слабые галактики. Исследования, проведенные как с помощью этого телескопа, так и других наземных телескопов, привели к значению плотности ρ , соответствующему критической плотности ρ_k Фридмана.

Интересно отметить, что вклад в ρ видимого вещества, из которого состоят звезды и пылевые облака, составляет лишь около 3%. Около 30% составляет так называемая «темная материя», природа которой неизвестна. Остальной вклад (около 67%) вносит так называемая «темная энергия», или энергия вакуума, впервые упоминавшаяся Эйнштейном.

Концепция расширяющейся Вселенной была подтверждена наблюдениями американского астронома Э. Хаббла, который установил, что галактики и их скопления удаляются друг от друга, причем со скоростью, пропорциональной

расстоянию между ними. Вследствие эффекта Доплера наблюдается красное смещение спектральных линий, характеризуемое параметром $z = (\lambda_{\text{набл}} - \lambda_0)/\lambda_0$, где $\lambda_{\text{набл}}$ — наблюдаемое значение длины волны в спектре излучения удаляющегося атома, а λ_0 — длина волны для неподвижного атома. Было установлено, что параметр z возрастает по мере увеличения расстояния до галактик. Это явление и было истолковано как возрастание скорости v удаляющейся галактики с увеличением расстояния r до нее: $v = Hr$, где H — постоянная Хаббла. После запуска на орбиту телескопа «Hubble» были зафиксированы объекты с параметром $z \approx 4 \div 5$. Этим значениям z соответствуют расстояния 12—14 млрд световых лет. Отметим, что такой же величиной оценивается в настоящее время и возраст Вселенной.

С теорией расширяющейся Вселенной перекликается и теория Большого Взрыва, впервые предложенная Г. Гамовым в 1948 г. Согласно этой теории, был момент, когда все вещество Вселенной находилось в сверхплотном состоянии, которое было неустойчивым. Вследствие этого размеры Вселенной с течением времени стали увеличиваться экспоненциально (начальный инфляционный этап расширения), и за очень короткое время Вселенная «раздулась» до очень больших размеров. Этот начальный этап расширения Вселенной описывается инфляционной теорией, предложенной А. Гуттом, А. Линде, А. Альбрехтом и П. Штейнхардом в 80-е годы XX в. В 1953 г. Гамов предсказал существование так называемого реликтового излучения — электромагнитного излучения, находившегося в равновесии с нагретым до очень высокой температуры веществом на раннем этапе эволюции Вселенной. Впоследствии это излучение отделилось от вещества и «остыло» до температуры ~ 10 К. Когда в 1965 г. А. Пензиасом и Р. Вильсоном было открыто некоторое изотропное излучение, имевшее температуру около 3 К, оно сразу было отождествлено с предсказанным Гамовым излучением, и теория Большого Взрыва получила всеобщее признание. Исследования реликтового излучения и его флуктуаций на небесной сфере, выполненные на спутнике «COBE» и аэростатах в Антарктиде (эксперимент «Бумеранг»), показали, что пространство плоское. В настоящее время есть основания полагать, что пространство можно считать плоским вплоть до расстояний $\sim 10^{26}$ м, близких к предполагаемым размерам Вселенной.

Отметим, что пространство является плоским лишь в среднем. В непосредственной близости от отдельных небесных тел оно, согласно ОТО, может искривляться. Искривление плоского пространства вблизи тяготеющих масс весьма мало. Тем не менее существуют экспериментальные подтверждения этого факта. Одно из них связано с наблюдениями положения звезд, видимых вблизи края Солнца во время солнечного затмения. Для луча, касающегося поверхности Солнца, угол отклонения очень мал и составляет $1,75''$. Если бы этого отклонения не было, то увидеть звезду, находящуюся «за Солнцем», было бы невозможно. Ясно, что вблизи Земли эффект искривления светового луча ничтожно мал. Это связано с различиями в полях тяготения (ускорение свободного падения на Солнце $g_C \approx 275$ м/с², а на Земле $g_3 \approx 9,8$ м/с²) и временах прохождения света вблизи поверхностей Солнца и Земли.

Второе подтверждение связано с длительными наблюдениями за орбитой ближайшей к Солнцу планеты Меркурий. Вращение перигелия орбиты Меркурия можно объяснить только на основе ОТО с учетом искривления простран-

ства под действием гравитационного поля Солнца. Отметим, что ОТО вообще в явном виде не учитывает сил гравитационного взаимодействия. Согласно этой теории, гравитация сводится к искривлению пространства в окрестности тяготеющих масс.

На малых расстояниях (порядка размеров атомного ядра) пространство также остается евклидовым. Об этом свидетельствуют результаты многочисленных экспериментов с атомами и элементарными частицами. Отметим, что на самых малых, так называемых планковских расстояниях ($\sim 10^{-35}$ м) можно ожидать существенных отклонений пространства от евклидовости (флуктуаций пространства-времени).

Время. Все механические явления протекают не только в пространстве, но и во времени. Для измерения времени используют часы. Обычно это тело или система тел, в которых совершается какой-либо периодический процесс. Примеры таких процессов хорошо известны: колебания маятника, вращение Земли вокруг собственной оси, колебания электромагнитного поля в волне, испускаемой при переходе электрона с одного энергетического уровня на другой, и т. д. Взяв за основу один из таких процессов, можно сконструировать эталонные часы и соответствующий эталон времени (см. ниже). Предполагается, что эталонные часы идут заведомо равномерно, так что по ним можно градуировать все остальные часы. Наибольшей точностью хода обладают так называемые атомные часы, построенные на атомном эталоне времени. Эти часы включают в себя кварцевый генератор, стабилизация частоты которого осуществляется с помощью микроволнового квантового генератора (мазера). Близкое к монохроматическому излучение лазера, в свою очередь, обусловлено когерентным испусканием электромагнитных волн отдельными атомами цезия. Погрешность хода атомных часов составляет около 1 с за несколько тысяч лет.

Исторически, с глубокой древности и до наших дней, измерение времени основывалось на вращении Земли и ее обращении вокруг Солнца, что позволило ввести такие единицы времени, как сутки и год (см. далее). Вместе с тем, вследствие некоторой неравномерности вращения Земли, продолжительность солнечных суток оказывается переменной. Поэтому в астрономии было введено понятие равномерного, или ньютоновского, или эфемеридного времени. Согласно Ньютону, время t течет равномерно. На основании второго закона Ньютона можно рассчитать орбиты и видимые координаты (эфемериды) небесных тел для любого момента времени t , которое выступает в роли независимой переменной. Таким образом, по положениям небесных тел можно определять и время.

С 1960 г. координаты Солнца, планет, Луны, а также спутников планет приводятся в Астрономических ежегодниках в системе эфемеридного времени t_3 , которое совпадает с ньютоновским равномерным временем t . Разность Δt между эфемеридным временем t_3 и всемирным временем $t_в$ (среднее солнечное время для Гринвичского меридиана, см. ниже) может быть определена только для прошедших моментов времени из сравнения наблюдаемых и вычисленных координат небесных тел. В 1900 г. эта разность была близка к нулю, однако в 1978 г. ее величина достигла 47 с (эфемеридное время «ушло» вперед). Погрешность в измерениях координат небесных тел приводит к неточности в определении эфемеридного времени, равной примерно $5 \cdot 10^{-3}$ с за один год.

В геологии, археологии и других науках время иногда определяется на основе закона распада долгоживущих радиоактивных нуклидов. В ядерной физике и физике высоких энергий для измерения времени может быть использован распад нестабильных частиц. Процессы распада радиоактивных нуклидов или нестабильных частиц не зависят от каких-либо внешних факторов. Вероятность распада dP за малый промежуток времени dt определяется отношением этого промежутка к постоянной времени распада τ : $dP = dt/\tau$. Эта вероятность приводит, как нетрудно показать (см. лекцию 8), к закону распада

$$N(t) = N(0) \exp(-t/\tau), \quad (1.1)$$

где $N(0)$ и $N(t)$ — числа атомов радиоактивных нуклидов или частиц в моменты времени $t = 0$ и t соответственно. Зная $N(0)$ и $N(t)$, можно определить и время

$$t = \tau \ln[N(0)/N(t)]. \quad (1.2)$$

Синхронизация часов. Для того чтобы правильно описывать механическое движение, необходимо использовать часы, неподвижные относительно выбранного тела отсчета (тела, с которым связана система координат), причем в каждой точке пространства для фиксации положения материальной точки в принципе должны быть свои собственные часы. Все такие часы должны иметь одно и то же начало отсчета времени и обладать одинаковым темпом хода, т. е. должны быть синхронизованы между собой.

Процедура синхронизации необходима для того, чтобы можно было пользоваться временем, единым для всей пространственно-временной системы отсчета. На первый взгляд, такая процедура никаких затруднений не вызывает. Казалось бы, что все часы можно собрать в одном месте (некоторой точке A), поставить стрелки на одно и то же деление, запустить все часы одновременно и «расставить» их в нужных точках системы отсчета. Однако такой способ был бы возможен лишь тогда, когда показания часов, перенесенных в некоторую точку B , не зависели бы от способа их переноса из A в B . При больших скоростях переноса (порядка скорости света) темп хода часов будет зависеть от скорости их перемещения в пространстве (см. лекцию 8).

В принципе часы можно синхронизовать с помощью световых сигналов. Процедура синхронизации при этом такова: в некоторый момент t_A , измеренный по часам в точке A , посылается световой сигнал в точку B . В момент прихода сигнала в точку B находящиеся там часы надо выставить так, чтобы они показывали время $t_B = t_A + l_{AB}/c$, где l_{AB} — расстояние между точками A и B , c — скорость света. Универсальность такого способа синхронизации связана с тем, что, согласно одному из постулатов Эйнштейна, скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета (ИСО).

Что касается одинаковости темпа хода часов в разных точках пространства, то ее также можно проверить с помощью световых сигналов. Для этого надо из одной точки пространства (A) через одинаковые промежутки времени (по часам, расположенным в этой точке), посылать сигналы в другую точку (B). Если в точку B сигналы будут приходить через такие же промежутки времени (по часам, расположенным в точке B), то можно сказать, что темп хода часов в точках A и B одинаков. Эксперименты, поставленные в 1960 г. Р. Паундом и

Г.Ребкой, а позднее и другими исследователями, позволили сделать вывод, что темп хода часов незначительно меняется под действием поля тяготения. Оказалось, что атомные часы, поднятые над поверхностью Земли, идут несколько быстрее. Этот эффект весьма мал: для точек, различающихся по высоте на $h \approx 10$ м, относительное изменение темпа хода часов составляет около 10^{-15} . Ясно, что обнаружение такого малого эффекта требует высокой точности эксперимента.

Изменение темпа хода часов в гравитационном поле согласуется с выводами ОТО. В 70-е годы XX в. были осуществлены эксперименты, в ходе которых атомные часы долгое время находились на самолетах. После полетов их показания сравнивались с показаниями таких же часов, оставшихся на земле (кроме того, за сдвигом «самолетных» часов следили с земли телеметрически). Оказалось, что «летающие» часы уходили вперед на величину $\Delta T = (gh/c^2)T$, где T — продолжительность полета на высоте h . Аналогичные опыты проводились и с применением ракеты, поднимавшейся на высоту $h \approx 10\,000$ км. Для интерпретации наблюдаемых эффектов следует предположить, что разность энергий двух атомных уровней возрастает по мере увеличения расстояния между атомом и Землей (энергетические уровни «раздвигаются»). Это обстоятельство оказывается весьма существенным при объяснении так называемого гравитационного красного смещения (см. лекцию 6).

Необратимость времени. Существенной особенностью времени является его необратимость, однонаправленность (иногда употребляют термин «стрела времени»). Эта особенность связана с вполне определенной направленностью самопроизвольно протекающих процессов. Нагретые тела с течением времени охлаждаются, но холодные сами собой не становятся горячее. Подпрыгивающий мяч в конце концов останавливается, но покоящийся сам по себе никогда не начинает подпрыгивать, и т.д. Согласно одному из положений термодинамики, изолированная система с течением времени стремится к равновесному состоянию.

Поясним сказанное на простом примере. Представим себе идеальный газ, удерживаемый в одной половине сосуда при помощи перегородки П (рис. 1.4, а). Быстро уберем перегородку (рис. 1.4, б). Ясно, что такая изолированная система, находясь в крайне неоднородном состоянии, с течением времени будет стремиться к состоянию с практически равномерным распределением молекул по объему (рис. 1.4, в). В статистической физике, имеющей дело с системами, состоящими из очень большого числа частиц, вводят понятие вероятности того или иного состояния системы. В данном случае можно сказать, что вероятность неоднородного состояния, изображенного на рис. 1.4, б, будет минимальной, а состояния с равномерным распределением молекул по объему (рис. 1.4, в) — максимальной.

Рассмотренный пример показывает, что если в изолированной системе происходят какие-либо изменения, то в целом они происходят в весьма

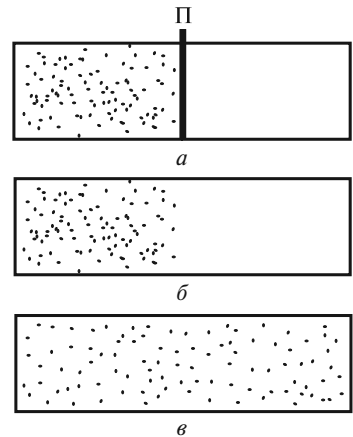


Рис. 1.4

определенном направлении, от менее вероятного состояния к более вероятному, хотя не исключаются и флуктуации. Отсюда можно заключить, что все такие системы ведут себя как не обратимые во времени. В повседневной жизни мы окружены системами, которые не находятся в состоянии равновесия (иначе прекратилась бы сама жизнь). Поэтому понятно, что время имеет вполне определенное направление, позволяющее отличить прошлое от будущего.

Физические величины и их измерение. В эксперименте мы, с одной стороны, устанавливаем различия между теми или иными объектами, а с другой, — сравниваем разные объекты на базе их общности. Общим признаком может быть протяженность объектов, наличие у них инертных свойств и т. д. Но одного лишь качественного сравнения мало. Поэтому вводят понятие физической величины. Эта величина должна иметь определенное численное значение и единицу измерений, характеризующую данный признак. Для определения значения физической величины необходима шкала (масштаб), к которой надо «прикладывать» измеряемый объект, осуществляя таким образом процедуру измерения. На практике для физической величины l выбирают определенный эталон l_0 , т. е. объект (или процесс) с определенным количеством данного признака. Тогда измеряемая величина l будет равна

$$l = n l_0, \quad (1.3)$$

где n — число, показывающее, сколько раз эталонная величина «укладывается» в измеряемой. Каждая эталонная величина имеет свою размерность и соответствующее название. Например, в качестве эталона длины можно использовать 1 метр, времени — 1 секунду, массы — 1 килограмм и т. д.

В механике, не говоря уже о всей физике, существует огромное количество физических величин. Однако вследствие различных связей между ними нет необходимости вводить большое число эталонов. На XI Генеральной конференции по мерам и весам в 1960 г. было принято решение о введении Международной системы единиц (СИ), которая построена на основе семи величин, представляющих все разделы физики. Это длина, время, масса, сила тока, термодинамическая температура, количество вещества, сила света. Все остальные величины являются производными, т. е. могут быть выражены через основные величины системы. В соответствии с этим основными единицами СИ являются: метр (м) — единица длины; секунда (с) — единица времени; килограмм (кг) — единица массы; ампер (А) — единица силы тока; кельвин (К) — единица термодинамической температуры; моль (моль) — единица количества вещества; кандела (кд) — единица силы света. Системные единицы плоского (радиан) и телесного (стерадиан) углов выделены в отдельную группу так называемых дополнительных единиц СИ.

Международная система единиц СИ является универсальной в том смысле, что семь ее основных величин позволяют получить единицы для любых величин, используемых во всех областях науки и техники.

Наравне с единицами СИ допущены к применению некоторые внесистемные единицы, удобные для использования во многих областях науки, техники и в быту. Примерами внесистемных единиц являются:

– единицы, характеризующие отношение одних и тех же физических величин: процент, промилле, бел, децибел;

- единицы, находящиеся в определенном десятичном отношении к единицам СИ: тонна, центнер, гектар, литр;
- кратные с единицами СИ, но не десятичные единицы: минута, час, сутки, километр в час и др.;
- единицы, применяемые в навигации: морская миля, узел;
- единицы длины, применяемые в астрономии: астрономическая единица длины, световой год, парсек;
- единицы давления: миллиметр ртутного столба, техническая атмосфера, бар.

Эталоны основных механических величин. К этим величинам относятся: длина, время, масса.

Длина. Единицей длины в СИ является метр. Интересно проследить за эволюцией эталонного метра на протяжении последних 300 лет. Х. Гюйгенс, который занимался часовыми механизмами, предложил в качестве легко воспроизводимой единицы длины использовать длину маятника, период колебаний которого равняется 2 с. Впервые название метр встречается, по-видимому, в книге Т. Буратини «Универсальная мера» (1675), где, как и Гюйгенс, автор предложил принять в качестве единичной длину двухсекундного маятника. Ясно, что это было очень грубое определение метра, так как оно зависело от значения ускорения свободного падения, различного в разных точках земной поверхности.

В 1791 г. комиссия Национального собрания Франции, куда входили, в частности, П. Лаплас и Ж. Лагранж, предложила принять за один метр одну десятимиллионную часть четверти длины земного меридиана. Это решение было принято по результатам экспедиции, в которой участвовал секретарь Парижской академии наук эпохи Французской революции Д. Араго. Участники экспедиции в течение нескольких лет (с 1792 по 1799 г.) проводили астрономические измерения для определения длины участка меридиана между Дюнкерком и Барселоной (около 1000 км). В итоге был изготовлен платиновый эталон — стержень длиной 1 м, а впоследствии — платино-иридиевый эталон со специальной формой поперечного сечения и штрихами вблизи концов; расстояние между штрихами было принято за 1 м. Ширина штрихов, нанесенных на прототипе метра и устанавливающих его длину, составляла около 10 мкм. При «тиражировании» эталона неизбежно допускалась абсолютная погрешность не менее 0,1 мкм, или относительная погрешность около 10^{-7} .

Впоследствии возникла идея отказаться от «вещественного» эталона и связать метр с какой-нибудь более точно воспроизводимой мерой, например, с длиной волны излучения атома. Ясно, что следовало выбрать излучение такого элемента, в спектре которого имелась бы наиболее узкая линия, ширина которой отличалась бы наибольшей стабильностью. На XI Генеральной конференции по мерам и весам в 1960 г. (XI ГКМВ, 1960) было принято считать, что метр равен 1 650 763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86. Техника интерференционных измерений позволяет прокалибровать с помощью такого эталона любую «вещественную» линейку. Относительная точность воспроизведения метра с помощью криптонового эталона составляла уже $3 \cdot 10^{-8}$. Однако и ее удалось повысить до 10^{-10} после того, как скорость света в вакууме была постулирована равной

точно 299 792 458 м/с, а единица длины — метр — была определена как длина пути, проходимого в вакууме светом за $1/299\,792\,458$ секунды (XVII ГКМВ, 1983).

Время. Единицей времени в СИ является секунда. Первоначально ее определяли как соответствующую долю солнечных суток.

Для данной точки наблюдения истинные солнечные сутки определяются как промежуток времени между двумя последовательными прохождениями плоскости земного меридиана центром видимого диска Солнца. Оказывается, что продолжительность этих суток в разное время года неодинакова. Например, в середине сентября они на 50 с короче, чем в середине декабря. Причина данных изменений заключается главным образом в том, что Солнце движется по эклиптике, наклоненной под углом $23^{\circ}27'$ к небесному экватору, и к тому же это движение неравномерно. Так, угловая скорость видимого движения Солнца возрастает примерно на 2 % относительно среднего значения, когда Земля находится на минимальном расстоянии от Солнца, и убывает на 2 %, когда Земля наиболее удалена от Солнца. Практически более удобными оказались так называемые средние солнечные сутки, продолжительность которых равна среднему значению истинных суток за год. Соответственно за одну секунду изначально был принят интервал времени, равный $1/86\,400$ средних солнечных суток. Местное среднее солнечное время для Гринвичского (нулевого) меридиана получило название *всемирного времени* t_v .

Более крупная единица времени, связанная с обращением Земли вокруг Солнца, *тропический год*, определяется как продолжительность 365,2422 средних солнечных суток. В юлианском календаре (старый стиль), разработанном александрийским астрономом Созигеном и введенном Юлием Цезарем в 46 г. до н. э., продолжительность календарного года считается равной 365 средним солнечным суткам или 366 суткам, если текущее число лет делится на 4 без остатка (високосный год).

Григорианский календарь (новый стиль), разработанный итальянским математиком Лилио, был введен Папой Римским Григорием XIII в 1582 г. Новшеством было предложение не считать високосными, начиная с 300 г., последние годы тех столетий, у которых число сотен не делится без остатка на 4. В результате накопилась разница в 10 сут, поэтому день 5 октября 1582 г. было предложено считать днем 15 октября. В настоящее время разница между юлианским и григорианским календарями достигла 13 сут, а в 2100 г. она станет равной 14 сут. Если счет времени юлианскими годами дает расхождение примерно в одни сутки за 128 лет по сравнению с тропическими годами, то счет по григорианскому календарю дает такое же расхождение лишь за 3300 лет.

Многочисленными исследованиями было установлено, что средние солнечные сутки также не являются в достаточной степени постоянными. Их продолжительность увеличивается на протяжении столетий, т. е. Земля вращается все медленнее. Этот эффект в основном обусловлен тормозящим действием лунных и солнечных приливов. В итоге продолжительность суток увеличивается на 0,0016 с в столетие, т. е. приблизительно на $5 \cdot 10^{-8}$ с в день. Эти изменения были, в частности, открыты при сопоставлении места и времени наступления солнечных затмений, рассчитанных при постоянной угловой скорости вращения Земли, и фактически зарегистрированных. Так, солнечное затмение 1185 г.,

которое наблюдал князь Игорь перед походом на половцев, при $\omega = \text{const}$ должно было наступить примерно на 1 ч 20 мин позже и проходить в полосе шириной около 200 км в Черном море (южнее Крыма). В этом случае князь Игорь вообще бы не наблюдал этого затмения.

В 1960 г. секунду связали с тропическим годом, т.е. интервалом времени между двумя последовательными прохождением Солнца через точку весеннего равноденствия. Условились считать, что секунда — это $1/31\,556\,925,9747$ тропического 1900 г. Относительная погрешность измерения секунды при таком определении составляла около 10^{-7} . В последующем в целях повышения относительной точности воспроизведения секунды было решено обратиться к атомному эталону частоты. Принято считать, что секунда равна $9\,192\,631\,770$ периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями атома цезия-133 (XIII ГКМВ, 1967). Относительная точность воспроизведения секунды с помощью цезиевого эталона частоты составляет около 10^{-11} .

Масса. Единицей массы в СИ является килограмм, равный массе международного эталона килограмма (III ГКМВ, 1901). Этот эталон находится в Международном бюро мер и весов в Севре, под Парижем. Это цилиндр из сплава платины (90 %) и иридия (10 %) диаметром 39 мм и такой же высоты. Считается, что этот эталон обеспечивает относительную точность его воспроизведения около 10^{-8} .

В атомной физике массы атомов принято характеризовать не их абсолютными значениями (в кг), а относительными безразмерными величинами, называемыми относительными атомными массами A_r . При этом за единицу атомной массы (атомная единица массы, а.е.м.) принимается масса $1/12$ массы изотопа углерода ^{12}C : $1 \text{ а.е.м.} \approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

В 1971 г. XIV Генеральная конференция по мерам и весам ввела в СИ единицу количества вещества, о которой уже говорилось выше, — моль. Один моль любого вещества содержит, по определению, одинаковое число структурных элементов (число Авогадро N_A). Это число атомов, содержащихся в 0,012 кг изотопа углерода ^{12}C . Наилучшее в настоящее время определение числа Авогадро дает

$$N_A = (6,0220921 \pm 0,0000062) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \quad (1.4)$$

Если в будущем удастся повысить точность определения числа Авогадро, то на основании этого значения можно будет ввести новый эталон массы, погрешность воспроизведения которого будет меньше, чем достигнутая в настоящее время.

ЛЕКЦИЯ 2

Задача кинематики. Материальная точка. Кинематика — это раздел механики, посвященный описанию движения тел без учета причин, вызывающих это движение. В механике Ньютона, о которой пойдет речь в ближайших лекциях, пространственные и временные координаты, необходимые для описания движения тела, рассматриваются независимо друг от друга; пространство является трехмерным и евклидовым, а время — абсолютным, т. е. протекающим одинаково во всех точках пространства. Результат измерения времени не зависит от движения часов в этом пространстве. Естественно, такой подход отражает реальные свойства пространства и времени лишь приближенно, однако это приближение дает вполне достаточную для практики точность при решении задач механики Ньютона, т. е. при рассмотрении движений со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Данная лекция посвящена кинематике так называемой *материальной точки*. Дело в том, что всякое тело можно разбить на большое число частиц достаточно малых размеров, характер связи между которыми определяет свойства самого тела. Каждую такую частицу и называют материальной точкой. Изучив движение каждой материальной точки, в принципе можно получить представление о движении системы точек в целом.

В общем случае материальная точка — это тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с характерными расстояниями, на которых рассматривается движение тела. Например, любую планету Солнечной системы можно считать материальной точкой при изучении ее движения вокруг Солнца. Искусственный спутник Земли можно принять за материальную точку при изучении его движения по орбите и т. д. В геометрическом смысле материальная точка эквивалентна математической точке, т. е. считается, что она не обладает внутренней структурой, формой и размерами. Поскольку в кинематике понятие массы не используется, то в данной лекции материальную точку будем называть просто точкой. Задача кинематики точки заключается в том, чтобы полностью описать движение точки, т. е. определить ее положение, скорость, ускорение и другие характеристики движения в любой момент времени.

Тело отсчета. Система координат. Система отсчета. Положение точки может быть определено только по отношению к каким-либо протяженным телам — телам отсчета. С телом отсчета неподвижно связывают некоторую систему координат и определяют положение точки в выбранной системе координат. Тело отсчета, система координат и часы, необходимые для регистрации положения точки в различные моменты времени, составляют систему отсчета.

В механике Ньютона можно пользоваться либо одними часами, сопровождающими движущееся тело, либо совокупностью часов, «расставленных» достаточно часто и неподвижных относительно тела отсчета. В последнем случае все часы должны иметь одинаковую скорость хода и, кроме того, быть синхро-

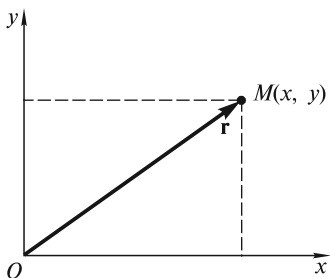


Рис. 2.1

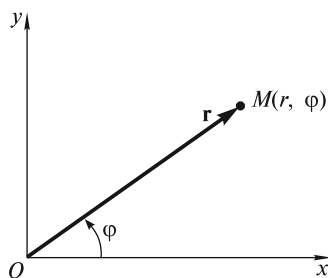


Рис. 2.2

низованы (например, по процедуре, описанной в лекции 1), чтобы можно было пользоваться временем, единым для всей пространственно-временной системы отсчета. Показания неподвижных и движущихся часов считаются одинаковыми. На самом деле эти показания будут различными, однако, эти различия становятся заметными только при движении со скоростями, сравнимыми со скоростью света.

Что касается системы координат, то ее выбор диктуется соображениями удобства и простоты описания движения.

На плоскости (при плоском движении точки) наиболее употребительными являются прямоугольная декартова и полярная системы координат (рис. 2.1, 2.2).

Двумя числами, характеризующими положение некоторой точки M в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости, являются проекции радиуса-вектора \mathbf{r} этой точки на расположенные под прямым углом оси абсцисс Ox и ординат Oy (рис. 2.1). Естественно, эти проекции могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от положения рассматриваемой точки.

Полярными координатами являются: r — длина радиуса-вектора \mathbf{r} точки M (расстояние до точки от начала координат) и φ — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси Ox до радиуса-вектора \mathbf{r} (рис. 2.2). Декартовы координаты связаны с полярными следующими соотношениями:

$$x = r \cos \varphi; \quad (2.1)$$

$$y = r \sin \varphi. \quad (2.2)$$

В случае трехмерного движения чаще всего используют прямоугольную декартову, цилиндрическую и сферическую системы координат.

При использовании прямоугольной декартовой системы координат (рис. 2.3) появляется дополнительная координата z — проекция радиуса-вектора \mathbf{r} точки M на ось Oz (эту ось называют осью аппликат). Общепринятой является так называемая «правовинтовая» система координат, определяемая по

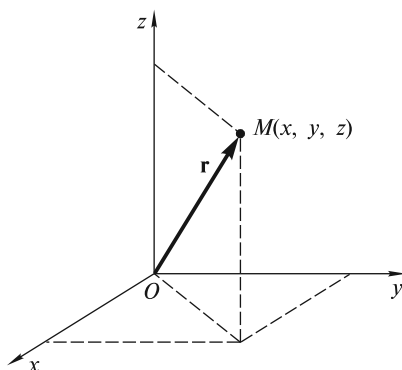


Рис. 2.3

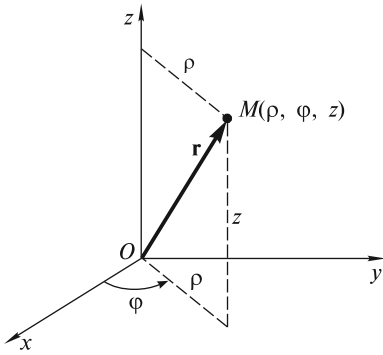


Рис. 2.4

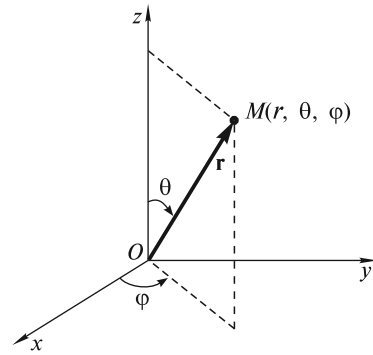


Рис. 2.5

правилу правого винта (буравчика). Если ручку такого буравчика поворачивать в плоскости Oxy кратчайшим путем от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy , то поступательное движение буравчика будет происходить в положительном направлении оси Oz .

В цилиндрической системе координатами точки M являются (рис. 2.4): ρ — расстояние от начала координат до проекции точки на плоскость Oxy ; φ — угол между положительным направлением оси Ox и проекцией радиуса-вектора \mathbf{r} на плоскость Oxy (эти координаты соответствуют r и φ в полярной системе на плоскости) и z — проекция радиуса-вектора на ось Oz (та же, что и в декартовой системе координат). Цилиндрические координаты связаны с декартовыми соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad (2.3)$$

$$y = \rho \sin \varphi; \quad (2.4)$$

$$z = z. \quad (2.5)$$

При описании движения в сферической системе используют координаты r , θ и φ (рис. 2.5). В данном случае r — это расстояние до рассматриваемой точки от начала координат (модуль радиуса-вектора \mathbf{r} точки), θ — угол, отсчитываемый от положительного направления оси Oz до радиуса-вектора \mathbf{r} , и φ — угол между положительным направлением оси Ox и проекцией радиуса-вектора \mathbf{r} на плоскость Oxy (тот же, что и в цилиндрической системе координат). Сферические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad (2.6)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad (2.7)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2.8)$$

Существуют и другие системы координат: в виде параллелей и меридианов на поверхности сферы, косоугольные на плоскости и в пространстве и т.д. Введение системы координат позволяет приписать любой точке пространства определенный «адрес» в виде двух (в двумерном случае) или трех (в трехмер-

ном случае) чисел. Зачастую эти числа для удобства обозначают одной и той же буквой, но с различными индексами, например, q_1, q_2, q_3 .

Траектория. Точки пространства, в которых находится движущаяся точка в последовательные моменты времени, образуют некоторую непрерывную кривую, которую называют *траекторией*. Поскольку покой и движение точки относительны, то и вид траектории точки зависит от той системы отсчета, к которой отнесено движение. Известно, например, что небольшое тело, брошенное вертикально вверх в прямолинейно и равномерно движущемся вагоне поезда, в разных системах отсчета будет двигаться по разным траекториям: относительно вагона — прямолинейно, а относительно полотна железной дороги — по параболе. Точка на ободе автомобильного колеса в разных системах отсчета также движется по разным траекториям: относительно кузова автомобиля — по окружности, а относительно дороги — по сложной кривой, называемой *циклоидой* (см. рис. 2.39), и т. д.

Способы задания движения точки. Описать движение точки — значит задать способ, позволяющий определить ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Известны три основных способа описания движения точки.

1. **Естественный способ** (рис. 2.6). В этом случае задают:

- траекторию движения точки M относительно выбранной системы координат;
- начало отсчета — некоторую точку O на траектории движения;
- положительное направление отсчета координаты s вдоль траектории (например, так, как показано на рис. 2.6);
- закон движения точки M вдоль траектории $s = f(t)$.

Функция $f(t)$, в свою очередь, должна быть: а) однозначной, так как движущаяся точка в один и тот же момент времени не может находиться в разных точках пространства; б) непрерывной, поскольку движение предполагается непрерывным и каждому малому изменению Δt соответствует малое изменение Δs ; в) дифференцируемой, т. е. должна иметь, по крайней мере, первую производную, которая однозначно определяет скорость движения.

Закон движения $s = f(t)$ может быть задан не только аналитически, но и графически, с помощью *графика движения*. График движения не следует смешивать с траекторией движения. Так, на рис. 2.7, а изображена траектория точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой s_0 относительно начала координат O . Это отрезок прямой, вдоль которого происходят рассматриваемые колебания. Закон движения в данном случае — это гармоническая функция $s(t) = s_0 \sin \omega t$, а график движения — синусоида (рис. 2.7, б).

2. **Координатный способ.** В этом случае закон движения — это зависимость выбранных координат движущейся точки от времени:

$$q_1 = q_1(t); q_2 = q_2(t); q_3 = q_3(t), \quad (2.9)$$

где q_1, q_2, q_3 — координаты движущейся точки. Это могут быть x, y, z в декартовой, ρ, φ, z в цилиндрической, r, θ, φ в сферической системе координат и т. д. Как и в предыдущем случае, все

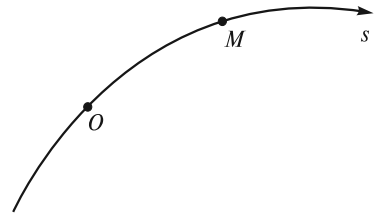


Рис. 2.6

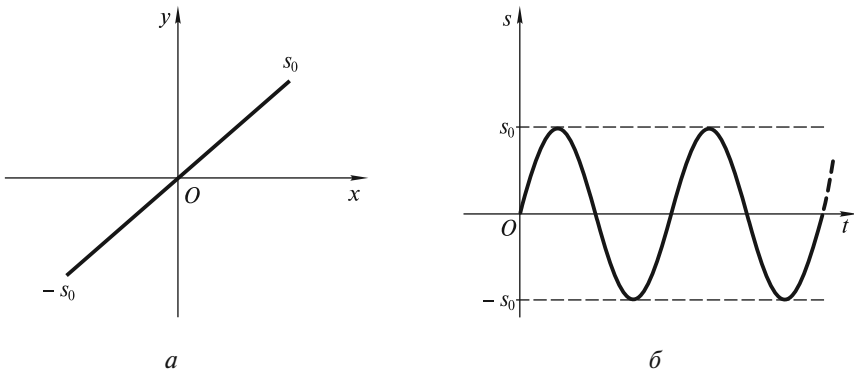


Рис. 2.7

функции $q_i(t)$ должны быть однозначными, непрерывными и дифференцируемыми.

Равенства (2.9) являются также уравнениями траектории в параметрическом виде, причем роль параметра играет время t . Проиллюстрируем сказанное на примере декартовой системы координат, где закон движения (2.9) принимает вид

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t). \quad (2.10)$$

Исключая из (2.10) параметр t , получим одну из трех возможных систем уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= 0; \\ \psi(y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= 0; \\ \chi(x, z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \psi(y, z) &= 0; \\ \chi(x, z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Каждая из этих систем определяет траекторию движения точки. Эта траектория есть линия пересечения двух цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны соответствующим осям координат [см. пример на рис. 2.8 для случая (2.11)].

При движении точки в плоскости дело обстоит несколько проще. В качестве примера рассмотрим линейку AB , концы которой скользят по двум взаимно перпендикулярным направляющим — осям Ox и Oy (рис. 2.9). Линейка движется так, что угол φ (угол ABO) монотонно уменьшается по закону $\varphi = \varphi(t)$. Определим траекторию точки M , если $AM = a$, $MB = b$. Легко видеть, что

$$x(t) = a \cos \varphi(t); \quad (2.14)$$

$$y(t) = b \sin \varphi(t). \quad (2.15)$$

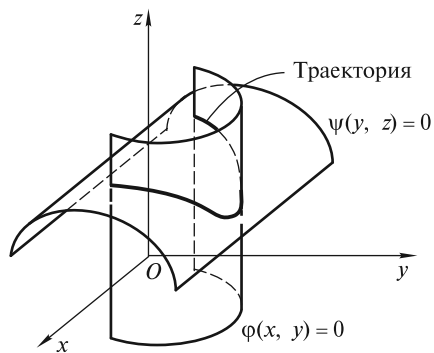


Рис. 2.8

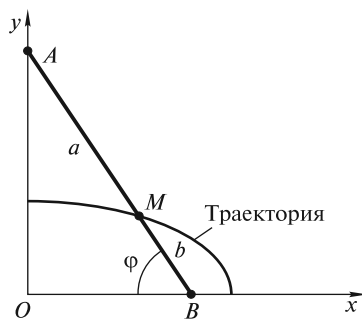


Рис. 2.9

Для определения траектории точки M представим закон движения (2.14) — (2.15) в виде

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos \varphi(t); \\ \frac{y}{b} &= \sin \varphi(t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Возводя эти равенства в квадрат и складывая их, получим уравнение эллипса с полуосями a и b (рис. 2.9)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.17)$$

3. Векторный способ. В этом случае положение точки задается с помощью радиуса-вектора \mathbf{r} , проведенного в эту точку из начала отсчета (рис. 2.10). В векторной форме закон движения представляется в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (2.18)$$

Если $\mathbf{r} = \text{const}$, то точка относительно данной системы отсчета покоится. При движении точки ее радиус-вектор меняется — в общем случае и по величине, и по направлению. При этом точка M [конец радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$] движется по траектории, которая называется *годографом вектора \mathbf{r}* .

Преимущество векторного способа задания движения точки в виде (2.18) состоит в том, что он позволяет в наглядной и компактной форме ввести такие векторные характеристики движения, как перемещение, скорость, ускорение. Однако при решении конкретных задач, связанных с вычислениями, переходят к координатному способу описания движения. При этом оперируют с проекциями радиуса-вектора \mathbf{r} на координатные оси. Так, в случае декартовой системы координат

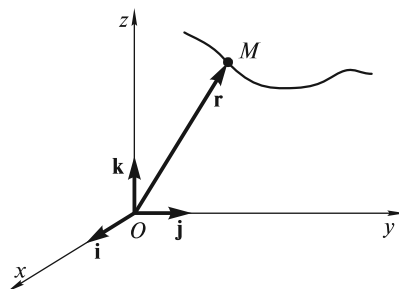


Рис. 2.10

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (2.19)$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ на оси Ox , Oy и Oz в момент времени t ; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные векторы (орты) вдоль соответствующих координатных осей (см. рис. 2.10).

В дальнейшем при определении характеристик движения мы будем использовать как векторную, так и координатную форму записи. Если известна траектория движения, бывает удобно воспользоваться естественным способом описания движения.

Перемещение. При движении точка M изменяет свое положение в пространстве. Изменение положения точки, произошедшее за время Δt , характеризуется вектором *перемещения* $\Delta\mathbf{r}$ (рис. 2.11):

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}. \quad (2.20)$$

Очевидно, что $|\Delta\mathbf{r}| < |\Delta s|$, где $|\Delta s|$ — смещение рассматриваемой точки вдоль криволинейной траектории. Однако при $\Delta t \rightarrow 0$ разница между $|\Delta\mathbf{r}|$ и $|\Delta s|$ уменьшается, т.е. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{|\Delta s|} = 1$. При прямолинейном движении $|\Delta\mathbf{r}| = |\Delta s|$.

Скорость. Величину, равную отношению перемещения точки $\Delta\mathbf{r}$ к соответствующему интервалу времени Δt , называют *средней скоростью* точки за промежутки времени $(t, t + \Delta t)$:

$$\mathbf{v}_{\text{cp}}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k}. \quad (2.21)$$

Очевидно, средняя скорость точки есть вектор, направленный по хорде в сторону движения (рис. 2.12). *Скорость* точки в данный момент времени t определяется как предел, к которому стремится средняя скорость \mathbf{v}_{cp} при $\Delta t \rightarrow 0$. Это векторная величина, равная первой производной от радиуса-вектора точки по времени

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \quad (2.22)$$

где v_x , v_y , v_z — проекции скорости точки на оси прямоугольной декартовой системы координат

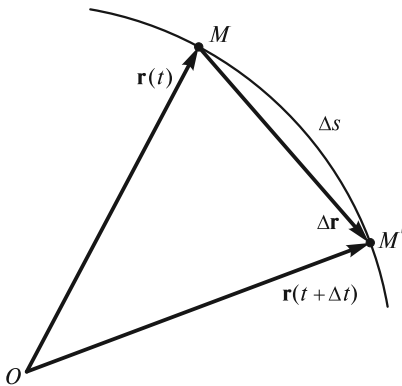


Рис. 2.11

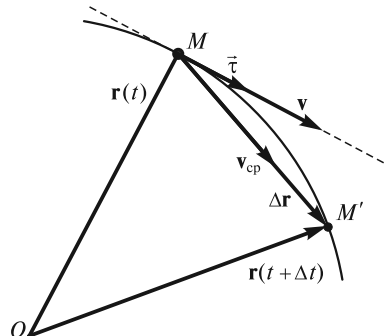


Рис. 2.12

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (2.23)$$

Точка над координатой обозначает дифференцирование по времени. По общей формуле, выражающей модуль вектора через его проекции, для абсолютной величины скорости получим

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (2.24)$$

В пределе, при $\Delta t \rightarrow 0$, направление вектора $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ будет совпадать с направлением касательной к траектории, поэтому вектор скорости $\mathbf{v}(t)$ в любой момент времени направлен по касательной к траектории точки (см. рис. 2.12).

Заметим, что в случае плоской кривой определение касательной затруднений не вызывает. В общем случае направление касательной MT к кривой в данной точке M определяется предельным положением секущей MM' при стремлении точки M' к точке M (рис. 2.13).

Выражение для \mathbf{v} можно записать в виде

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} = v \bar{\tau}^*, \quad (2.25)$$

где $\frac{ds}{dt} = v$ — алгебраическая величина скорости \mathbf{v} ; $\bar{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ — единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону положительного направления отсчета координаты s (см. рис. 2.12).

Зная начальное положение точки и зависимость скорости от времени, можно определить координату s точки на траектории в произвольный момент времени t :

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t) dt, \quad (2.26)$$

где $s(0)$ — координата точки в момент $t=0$. При этом длина пути l , пройденного точкой вдоль траектории за это же время t , будет определяться по формуле

$$l(t) = \int_0^t |v(t)| dt. \quad (2.27)$$

В отличие от (2.26), под знаком интеграла здесь стоит не алгебраическая величина скорости, а ее модуль, поэтому $l(t) \geq |s(t) - s(0)|$.

Заметим, что при $v = v_0 = \text{const}$ формулы (2.26) и (2.27) упрощаются:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + v_0 t; \\ l(t) &= |v_0| \cdot t. \end{aligned} \quad (2.28)$$

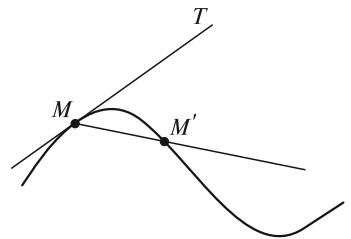


Рис. 2.13

* Здесь и далее векторные величины, обозначенные греческими буквами, отмечены стрелкой.

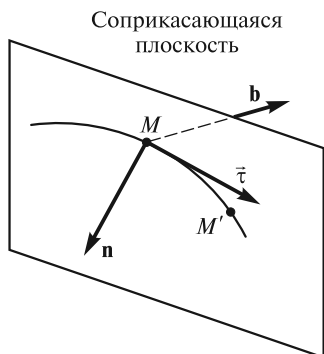


Рис. 2.14

Ускорение. Для определения ускорения точки нам понадобятся некоторые дополнительные сведения из геометрии.

Проведем плоскость, в которой лежат вектор \vec{t} (или касательная к траектории в точке M) и точка M' (рис. 2.14). При стремлении точки M' к точке M при $\Delta t \rightarrow 0$ эта плоскость определяет так называемую *соприкасающуюся плоскость*. В случае плоской кривой соприкасающейся плоскостью, очевидно, является плоскость, в которой лежит сама кривая. Перпендикуляр к касательной в точке M , лежащий в соприкасающейся плоскости, называют *главной нормалью* к кривой в точке M . Главная нормаль характеризуется единичным вектором \mathbf{n} , направленным в сторону вогнутости кривой (рис. 2.14). Перпендикуляр к соприкасающейся плоскости называют *бинормалью* (единичный вектор \mathbf{b}). Три взаимно перпендикулярных единичных вектора \vec{t} , \mathbf{n} и \mathbf{b} являются оортами *естественной системы координат*, сопровождающей движение точки по траектории.

Соприкасающуюся плоскость к кривой в точке M можно определить несколько иначе (рис. 2.15). Возьмем две точки: M' справа от точки M и M'' слева от нее. Проведем плоскость через точку M и секущую $M'M''$. При приближении точек M' и M'' к точке M эта плоскость и займет положение соприкасающейся плоскости.

Определим далее радиус кривизны траектории в точке M . Возьмем две близкие точки M и M' и проведем касательные MT и $M'T'$ (рис. 2.16). Проведем, кроме того, $MT'' \parallel M'T'$. Угол $\Delta\theta$ между MT и MT'' (или, что то же самое, между касательными MT и $M'T'$) называют *углом смежности*, соответствующим дуге MM' . *Кривизной* траектории в данной точке M называется величина

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}. \quad (2.29)$$

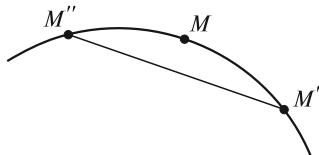


Рис. 2.15

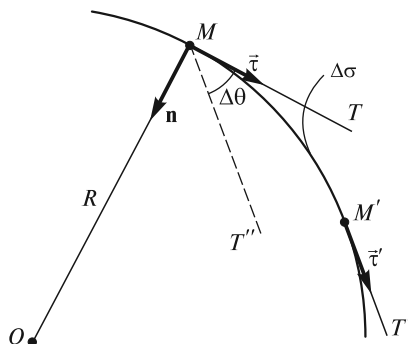


Рис. 2.16

Заметим, что в формуле (2.29) $\Delta\theta$ имеет тот же знак, что и Δs . Это означает, что при $\Delta s > 0$ вектор $\vec{\tau}$ поворачивается в сторону центра кривизны (точка O), и $\Delta\theta > 0$. При $\Delta s < 0$ вектор $\vec{\tau}$ поворачивается в противоположную сторону, и $\Delta\theta < 0$.

Величина, обратная кривизне k , называется *радиусом кривизны* траектории в данной точке

$$R = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\theta}. \quad (2.30)$$

Откладывая от точки M вдоль главной нормали отрезок R , получим точку O — *центр кривизны* траектории в точке M (рис. 2.16).

З а м е ч а н и е 1. Радиус кривизны в точке M можно определить иначе. Если через три точки M, M_1, M_2 любой кривой провести окружность, то в пределе, при приближении точек M_1 и M_2 к точке M , она будет лежать в соприкасающейся плоскости (рис. 2.17). Эту предельную окружность называют *соприкасающимся кругом*, или *кругом кривизны*, а ее радиус и есть радиус кривизны в точке M .

З а м е ч а н и е 2. В случае плоской траектории центр кривизны O — это предельное положение точки O' пересечения лежащих в плоскости этой кривой перпендикуляров к касательным в точках M и M' при стремлении точки M' к точке M (рис. 2.18).

З а м е ч а н и е 3. Если плоская кривая задана аналитически в виде зависимости $y = f(x)$, то радиус кривизны можно вычислить по формуле

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|}. \quad (2.31)$$

Например, для вершины параболы $y = Cx^2$ формула (2.31) дает $R = \frac{1}{2|C|}$.

Перейдем теперь к рассмотрению ускорения точки M . Пусть эта точка, двигаясь по своей траектории, в момент времени t имеет скорость $\mathbf{v}(t)$, а в момент $t + \Delta t$ имеет скорость $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ (рис. 2.19, а). Приращение скорости за промежуток времени Δt есть вектор $\Delta\mathbf{v}$ (рис. 2.19, б). Разделив $\Delta\mathbf{v}$ на Δt , получим векторную величину

$$\mathbf{a}_{\text{cp}}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}, \quad (2.32)$$

которую называют *средним ускорением* точки за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$.

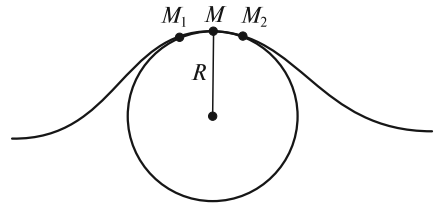


Рис. 2.17

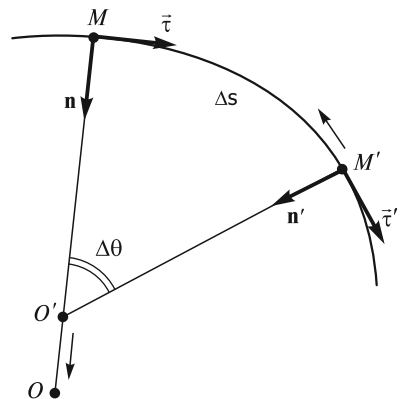


Рис. 2.18

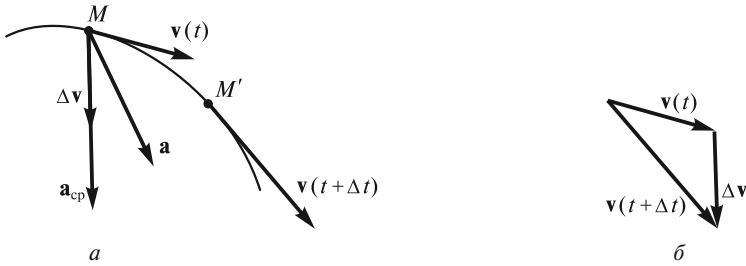


Рис. 2.19

Ускорение \mathbf{a} точки в момент времени t определяется как предел, к которому стремится среднее ускорение при $\Delta t \rightarrow 0$. Это есть векторная величина, равная первой производной от вектора скорости, или второй производной от радиуса-вектора точки по времени

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (2.33)$$

где a_x , a_y , a_z — проекции ускорения точки на оси прямоугольной декартовой системы координат

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}. \quad (2.34)$$

Две точки над координатой обозначают двойное дифференцирование по времени. Абсолютная величина ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (2.35)$$

Очевидно, что вектор \mathbf{a} расположен по ту же сторону от касательной к траектории в точке M , что и вектор \mathbf{a}_{cp} , вычисленный за относительно небольшой промежуток времени Δt , т.е. он направлен в сторону вогнутости траектории (рис. 2.19, a).

Зная зависимость $\mathbf{a}(t)$, можно решить обратную задачу кинематики: определить значение скорости $\mathbf{v}(t)$ и положение $\mathbf{r}(t)$ точки в произвольный момент времени t

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt; \quad (2.36)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt, \quad (2.37)$$

где $\mathbf{v}(0)$ и $\mathbf{r}(0)$ — скорость и радиус-вектор точки в момент времени $t = 0$.

Вычисления по формулам (2.36) и (2.37) проводятся в координатном виде, с использованием зависимостей $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ и $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ и значений $v_x(0)$, $v_y(0)$, $v_z(0)$ и $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$.

Нормальное и тангенциальное ускорения. Если продифференцировать вектор скорости [см. (2.25)] по времени, то для ускорения \mathbf{a} получим следующее выражение:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\bar{\tau}) = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (2.38)$$

Первое слагаемое есть вектор $\frac{dv}{dt}\bar{\tau}$, направленный по касательной к траектории. Он представляет собой тангенциальную составляющую ускорения точки и связан с изменением величины скорости. Найдем значение второго слагаемого.

При $\Delta t \rightarrow 0$ направление вектора $\Delta\bar{\tau} = \bar{\tau}(t + \Delta t) - \bar{\tau}(t)$ будет приближаться к направлению нормали \mathbf{n} к траектории в точке M (рис. 2.20). По абсолютной величине

$$|\Delta\bar{\tau}| \approx |\bar{\tau}| \cdot |\Delta\theta| = |\Delta\theta|, \quad (2.39)$$

а сам вектор

$$\Delta\bar{\tau} \approx \Delta\theta \mathbf{n}. \quad (2.40)$$

Отсюда находим, что

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} \mathbf{n} = \frac{1}{R} v \mathbf{n}, \quad (2.41)$$

где $R = \frac{ds}{d\theta}$ — радиус кривизны траектории в точке M .

Таким образом, вторая составляющая ускорения \mathbf{a} в формуле (2.38) равна

$$v \frac{d\bar{\tau}}{dt} = v \frac{v}{R} \mathbf{n} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \quad (2.42)$$

Эта составляющая направлена по нормали \mathbf{n} к центру кривизны траектории и связана с изменением вектора скорости \mathbf{v} по направлению.

Окончательно для вектора ускорения \mathbf{a} получаем

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n} = a_\tau\bar{\tau} + a_n\mathbf{n}, \quad (2.43)$$

где a_τ и a_n — проекции ускорения \mathbf{a} на направления касательной и нормали к траектории соответственно.

Иногда $a_\tau\bar{\tau}$ называют *тангенциальным ускорением* \mathbf{a}_τ , $a_n\mathbf{n}$ — *нормальным ускорением* \mathbf{a}_n точки (рис. 2.21). Отметим, что вектор ускорения \mathbf{a} лежит в соприкасающейся плоскости, и поэтому он не имеет составляющей вдоль бинормали \mathbf{b} . Так как $\mathbf{a}_\tau \perp \mathbf{a}_n$, то модуль полного ускорения будет равен

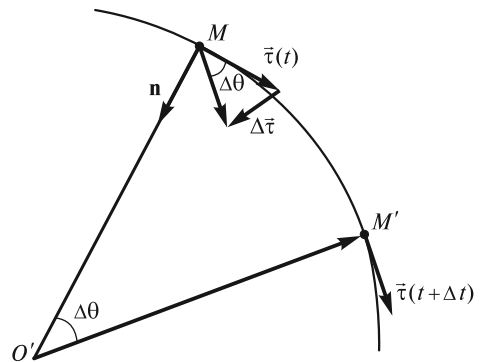


Рис. 2.20

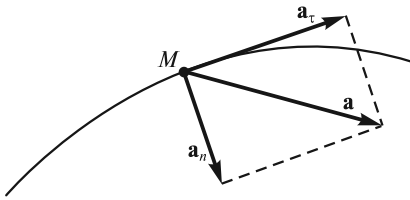


Рис. 2.21

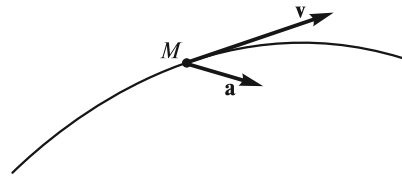


Рис. 2.22

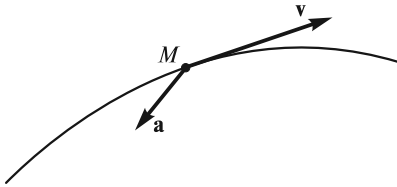


Рис. 2.23

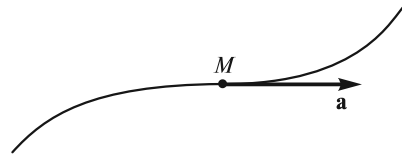


Рис. 2.24

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (2.44)$$

Скорость будет возрастать по величине, когда угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{a} острый (рис. 2.22), и уменьшаться, когда этот угол тупой (рис. 2.23).

Если при криволинейном движении $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ (скорость постоянна или достигает экстремума), то ускорение точки \mathbf{a} будет направлено по нормали \mathbf{n} :

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n$. Аналогично, если $a_n = \frac{v^2}{R} = 0$, то вектор \mathbf{a} будет направлен по касательной

к траектории. Такой случай может иметь место либо когда скорость точки обращается в нуль (изменение направления движения на противоположное), либо в точке перегиба траектории (рис. 2.24). Если же в течение некоторого промежутка времени $\mathbf{a} = 0$ (и $a_t = 0$, и $a_n = 0$), то точка в это время движется относительно выбранной системы отсчета равномерно и прямолинейно.

■ **Пример 1.** Если пренебречь силой сопротивления воздуха, то тело, брошенное под углом α к горизонту в однородном поле силы тяжести, летит, как известно, по параболе (рис. 2.25). Полное ускорение в точках A , B и C траектории равно ускорению свободного падения \mathbf{g} . На восходящем участке траектории OB движение замедленное (угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{g} тупой), на участке BD движение ускоренное (угол между векторами \mathbf{v} и \mathbf{g} острый). В точке B $\mathbf{a}_n = \mathbf{g}$, тангенциальное ускорение отсутствует. Зная значения \mathbf{v} и \mathbf{a}_n ,

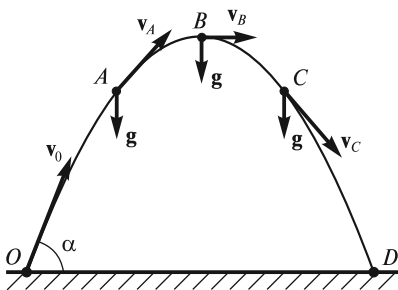


Рис. 2.25

можно вычислить радиус кривизны $R = \frac{v^2}{a_n}$ в

любой точке траектории. Так, в наивысшей точке B (см. рис. 2.25) R достигает минимального значения $R_B = \frac{v_B^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$.

■ **Пример 2.** Математический маятник, изображенный на рис. 2.26, отклонен на угол α_0 от положения равновесия и отпущен без начальной скорости. В крайних точках 1 и 5 траектории $v = 0$, поэтому $a_n = 0$, и полное ускорение направлено по касательной к траектории. В точке 3 скорость достигает максимального значения $v = v_{\max}$, поэтому $a_t = 0$ и полное ускорение направлено по нормали к траектории, к точке подвеса O . В промежуточных точках 2 и 4 угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{v} может быть как острым, так и тупым.

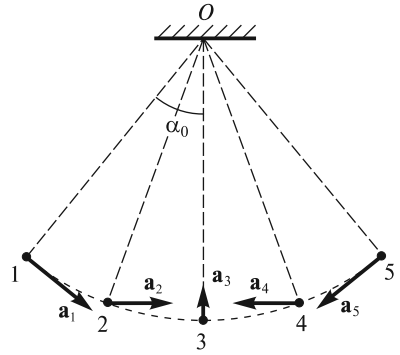


Рис. 2.26

Движение по окружности. При движении по окружности $ds = R d\varphi$ (рис. 2.27), поэтому $v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$. Величину $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ называют *угловой скоростью* вращательного движения точки. Таким образом,

$$v = \omega R. \quad (2.45)$$

Вектор \mathbf{v} направлен по касательной к окружности, перпендикулярно к радиусу $R = OM$ (рис. 2.27).

Информация о круговом движении точки будет более полной, если известно положение плоскости, в которой происходит движение. Для этого обычно задают вектор элементарного углового перемещения $\overline{d\varphi}$, перпендикулярный к этой плоскости (рис. 2.28). Направление вектора $\overline{d\varphi}$ выбирается так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца вектора $\overline{d\varphi}$, видел круговое движение точки, совершаемое против часовой стрелки (по правилу правого винта).

Из рис. 2.28 видно, что элементарное перемещение $d\mathbf{R}$ равно

$$d\mathbf{R} = \overline{d\varphi} \times \mathbf{R}. \quad (2.46)$$

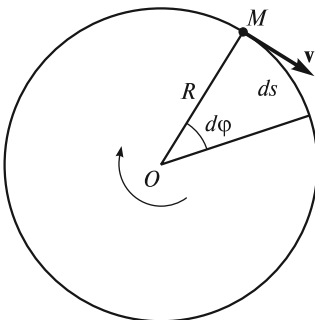


Рис. 2.27

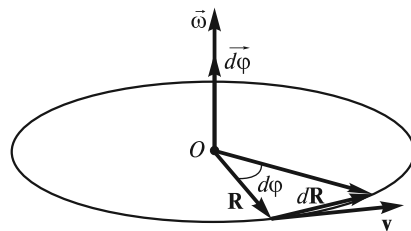


Рис. 2.28

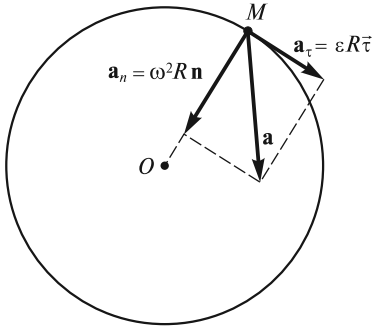


Рис. 2.29

Таким образом, для скорости \mathbf{v} получим

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{R} = \bar{\omega} \times \mathbf{R}, \quad (2.47)$$

где $\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$ — вектор угловой скорости точки.

Формула (2.46) известна как формула Эйлера. Очевидно, вектор $\bar{\omega}$ направлен так же, как и $\frac{d\varphi}{dt}$ (рис. 2.28).

Дифференцируя (2.45) по времени, получим величину тангенциального ускорения (рис. 2.29)

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R, \quad (2.48)$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ — угловое ускорение вращательного движения точки.

Угловое ускорение точки, совершающей круговое движение, можно изобразить в виде вектора $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$, направленного вдоль оси кругового движения.

При этом направление $\bar{\varepsilon}$ совпадает с направлением $\bar{\omega}$, когда величина угловой скорости возрастает, и противоположно $\bar{\omega}$, когда величина $\bar{\omega}$ убывает.

Для нормального ускорения точки при круговом движении получим (рис. 2.29)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \quad (2.49)$$

Эту величину называют *центростремительным ускорением*, поскольку вектор \mathbf{a}_n направлен к центру окружности. Модуль ускорения точки при движении по окружности

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.50)$$

Если $v = \text{const}$, то $a_\tau = 0$ и ускорение точки будет только центростремительным.

Скорость и ускорение точки в полярных координатах. В полярных координатах на плоскости закон движения точки задается в виде

$$\begin{aligned} r &= r(t); \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Введем подвижные единичные векторы $\mathbf{e}_r(t)$ и $\mathbf{e}_\varphi(t)$, направленные в сторону увеличения координат r и φ (рис. 2.30). Это векторы, постоянные по величине ($|\mathbf{e}_r| = |\mathbf{e}_\varphi| = 1$), но переменные по направлению, так как они «привязаны» к движущейся точке M .

Радиус-вектор точки M можно записать в виде

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(t). \quad (2.52)$$

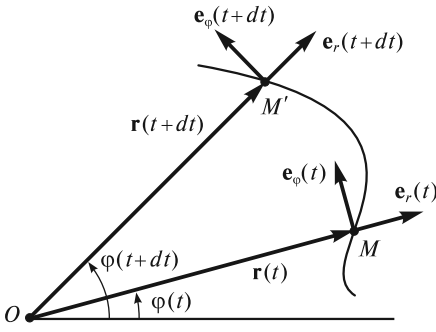


Рис. 2.30

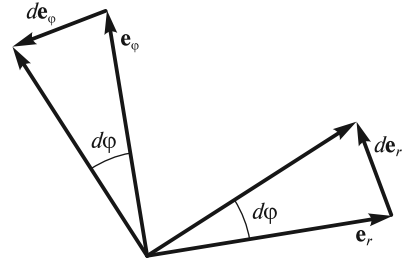


Рис. 2.31

Скорость точки M

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt}. \quad (2.53)$$

Таким образом, для определения $\mathbf{v}(t)$ необходимо знать производную $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$ (а для определения ускорения, как мы увидим ниже, еще и $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$).

Для вычисления $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$ и $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$ обратимся к рис. 2.30, где изображены положения ортов \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_ϕ в моменты времени t и $t + dt$, и рис. 2.31, где в увеличенном виде показаны соответствующие приращения $d\mathbf{e}_r$ и $d\mathbf{e}_\phi$.

Как видно из рис. 2.31,

$$|d\mathbf{e}_r| = |\mathbf{e}_r| \cdot d\phi = d\phi, \quad (2.54)$$

а сам вектор $d\mathbf{e}_r$ направлен по \mathbf{e}_ϕ .

Аналогично

$$|d\mathbf{e}_\phi| = |\mathbf{e}_\phi| \cdot d\phi = d\phi, \quad (2.55)$$

а сам вектор $d\mathbf{e}_\phi$ направлен против \mathbf{e}_r . Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi; \quad \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_r. \quad (2.56)$$

Возвращаясь к (2.53), определим теперь скорость точки в полярных координатах:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi. \quad (2.57)$$

Первое слагаемое называется *радиальной* $\mathbf{v}_{\text{рад}}$, а второе — *трансверсальной* (поперечной) $\mathbf{v}_{\text{тр}}$ составляющей скорости (рис. 2.32). Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_{\text{рад}}^2 + v_{\text{тр}}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}. \quad (2.58)$$

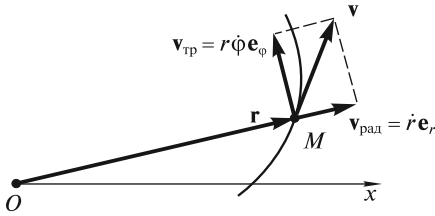


Рис. 2.32

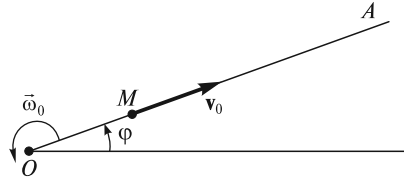


Рис. 2.33

Ускорение в полярных координатах находим дифференцированием (2.57) с учетом (2.56):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi} \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \\ &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + r\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\mathbf{e}_r) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Первое слагаемое в последней строке (2.59) $(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r$ представляет собой *радиальное* ускорение, направленное вдоль радиуса-вектора. Это ускорение состоит из \ddot{r} — ускорения точки вследствие ее движения по радиусу-вектору, и $r\dot{\varphi}^2$ — центростремительного ускорения, связанного с поворотом радиуса-вектора. Второе слагаемое $(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi$ — это *трансверсальное*, или поперечное ускорение. Оно состоит из $r\ddot{\varphi}$, связанного с ускоренным вращением радиуса-вектора, и $2\dot{r}\dot{\varphi}$ — *поворотного*, или *кориолисова* ускорения, возникающего при движении точки вдоль поворачивающегося радиуса-вектора. Его смысл будет объяснен в лекции 6.

■ **Пример 1.** Точка M движется с постоянной скоростью v_0 вдоль прямой OA , которая, в свою очередь, поворачивается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг начала координат O в плоскости рис. 2.33; в момент времени $t=0$ точка находилась в начале координат. В полярных координатах закон движения точки имеет вид

$$r = v_0 t; \quad (2.60)$$

$$\varphi = \omega_0 t. \quad (2.61)$$

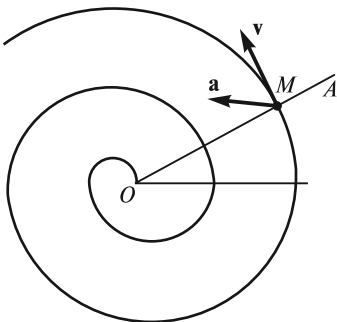


Рис. 2.34

Исключая t , находим уравнение траектории

$$r = \frac{v_0}{\omega_0} \varphi. \quad (2.62)$$

Это так называемая архимедова спираль, «раскручивающаяся» вокруг начала отсчета (рис. 2.34). Скорость точки с течением времени возрастает по закону

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2} = v_0 \sqrt{1 + \omega_0^2 t^2}. \quad (2.63)$$

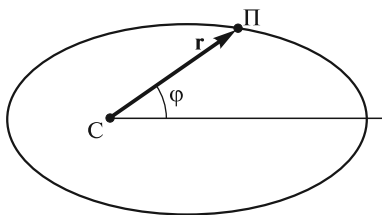


Рис. 2.35

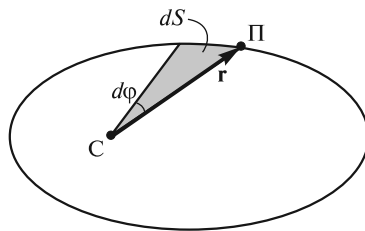


Рис. 2.36

Ускорение a также увеличивается:

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2} = \sqrt{v_0^2\omega_0^4 t^2 + 4v_0^2\omega_0^2} = v_0\omega_0\sqrt{4 + \omega_0^2 t^2}. \quad (2.64)$$

■ **Пример 2.** Согласно законам Кеплера, планета П движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце С (рис. 2.35), причем за равные промежутки времени радиус-вектор планеты «заметает» равные площади.

Площадь dS , «заметаемая» радиусом-вектором планеты за время dt , определяет секторную скорость σ

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2, \quad (2.65)$$

где учтено, что $dS = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi$ (рис. 2.36). Поскольку $\sigma = \text{const}$, то орбитальная скорость v' планеты в наиболее удаленной от Солнца точке орбиты (афелии) должна быть меньше скорости v'' в наиболее близкой к Солнцу точке (перигелии). Действительно, при равенстве площадей секторов, изображенных на рис. 2.37, участок MM' траектории короче участка MM'' , но поскольку эти участки проходятся за одно и то же время, то $v' < v''$.

В заключение данного раздела приведем без вывода выражения для скорости и ускорения точки в цилиндрических и сферических координатах.

Для скорости в цилиндрических координатах будем иметь

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + z \mathbf{e}_z, \quad (2.66)$$

где \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z — единичные векторы, соответствующие цилиндрическим координатам ρ , φ , z . В данном случае $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\rho(t)$, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(t)$, $\mathbf{e}_z = \text{const}$.

В сферических координатах

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.67)$$

где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_φ — единичные векторы, соответствующие сферическим координатам r , θ , φ . Все эти орты при произвольном движении точки изменяются со временем

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(t); \quad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta(t); \quad \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(t). \quad (2.68)$$

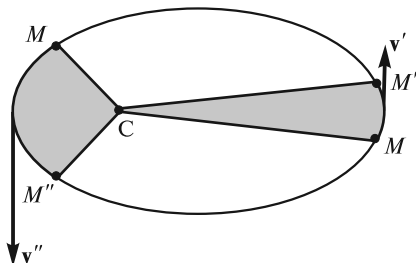


Рис. 2.37

Выражения для ускорений имеют вид
в цилиндрических координатах

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + \ddot{z}\mathbf{e}_z; \quad (2.69)$$

в сферических координатах

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta)\mathbf{e}_\theta + (r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta)\mathbf{e}_\varphi. \quad (2.70)$$

Теорема о сложении скоростей. Если известно движение точки относительно некоторой системы K_1 и движение системы K_1 относительно некоторой другой системы K (условно будем считать ее неподвижной), то можно определить движение точки и по отношению к этой системе K . Такой системой, в частности, может быть система, связанная с наблюдателем. Движение точки по отношению к подвижной системе K_1 называют *относительным*, а по отношению к неподвижной системе K — *абсолютным*. Движение любой точки системы K_1 по отношению к системе K называют *переносным*.

Пусть за время Δt некоторая точка M сместилась относительно тела отсчета, с которым связана подвижная система K_1 , из положения A в положение B (рис. 2.38). Одновременно система K_1 за время Δt переместится (по отношению к системе K) в новое положение K'_1 , при этом исходное A и конечное B положения рассматриваемой нами движущейся точки M переместятся на позиции соответственно A' и B' .

Относительной скоростью точки, определяемой в системе K_1 , называется величина

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{AB}}{\Delta t}. \quad (2.71)$$

Перемещение начального положения точки M задается вектором \mathbf{AA}' . Это перемещение определяет *переносную скорость* точки M

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{AA}'}{\Delta t}. \quad (2.72)$$

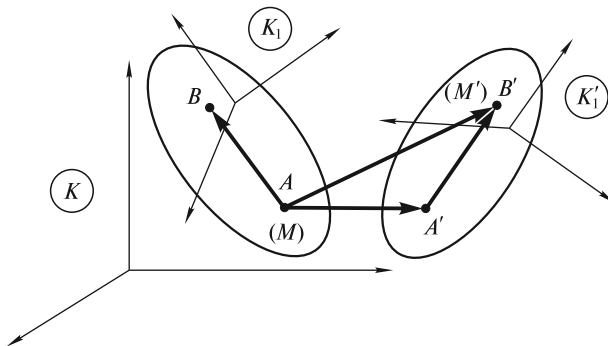


Рис. 2.38

Очевидно, что переносная скорость точки M в момент времени t — это скорость той точки системы K_1 , с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M . По отношению к основной системе K точка M совершит за время Δt перемещение \mathbf{AB}' . Величину

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{AB}'}{\Delta t} \quad (2.73)$$

называют *абсолютной скоростью* точки M .

Из рис. 2.38 видно, что

$$\mathbf{AB}' = \mathbf{A'B}' + \mathbf{AA}'. \quad (2.74)$$

Разделим обе части этого равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A'B}'}{\Delta t} = \mathbf{v}_{\text{отн}}, \quad (2.75)$$

в итоге получим следующее соотношение между скоростями

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}}. \quad (2.76)$$

Таким образом, скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей.

■ **Пример 1.** Используя соотношение (2.76), можно получить выражение (2.57) для скорости точки в полярных координатах. Действительно, движение точки M вдоль радиуса (см. рис. 2.32) можно рассматривать как относительное со скоростью $v_{\text{отн}} = \dot{r}$. Переносная скорость будет равна скорости той точки радиуса-вектора, где в данный момент находится точка M : $v_{\text{пер}} = r\dot{\varphi}$.

В результате получим

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} \equiv \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad (2.77)$$

что совпадает с (2.57).

■ **Пример 2.** Движение точки на ободе катящегося колеса (абсолютное движение) можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного со скоростью v_0 оси колеса (переносное движение) и вращательного вокруг этой оси (относительное движение). При отсутствии проскальзывания колеса в точке B модули векторов скорости поступательного движения v_0 и линейной скорости $v_{\text{лин}}$ вращательного движения равны друг другу (рис. 2.39).

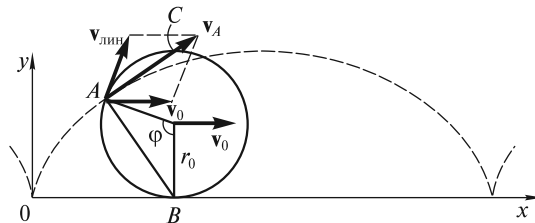


Рис. 2.39

Из простых геометрических соображений следует, что вектор полной скорости \mathbf{v}_A произвольной точки A на ободе колеса направлен вдоль прямой, которая перпендикулярна хорде AB и проходит через верхнюю точку катящегося колеса (рис. 2.39).

Траекторией движения точки A является известная кривая — простая циклоида, уравнение которой в параметрической форме (параметр — время t) имеет следующий вид (см. рис. 2.39):

$$\begin{aligned} x &= r_0\varphi - r_0 \sin \varphi = r_0 \left(\frac{v_0}{r_0} t - \sin \frac{v_0}{r_0} t \right); \\ y &= r_0 - r_0 \cos \varphi = r_0 \left(1 - \cos \frac{v_0}{r_0} t \right). \end{aligned} \tag{2.78}$$

Скорость точки в вершине циклоиды равна $2v_0$, ускорение этой точки, с одной стороны, равно $\frac{(2v_0)^2}{R}$ (R — радиус кривизны), а с другой, — связано только с вращательным (относительным) движением по окружности радиуса r_0 , т. е. равно $\frac{v_0^2}{r_0}$. Отсюда для радиуса кривизны в вершине циклоиды получаем $R = 4r_0$. Используя (2.27), можно также показать, что длина пути любой точки на ободе колеса между двумя последовательными касаниями дороги (длина арки циклоиды) равна $8r_0$.

Простая циклоида, о которой говорилось выше, обладает рядом замечательных свойств:

1. Маленький тяжелый шарик, скользящий без трения по «циклоидальному» желобку (рис. 2.40), будет двигаться таутохронно, т. е. период его колебательных движений в желобке не будет зависеть от размаха колебаний. Другими словами, из какой бы точки циклоиды ни стартовал такой шарик (A , B , C и т. д.), время одного его полного колебания будет одним и тем же, равным $4\pi\sqrt{\frac{r_0}{g}}$ (r_0 — радиус «производящего» циклоиду круга).

В связи с этим циклоиду называют *таутохроной*.

2. Циклоидальный желобок, проложенный из A в O , обладает еще одним замечательным свойством: двигаясь по нему без трения, маленький тяжелый шарик достигнет точки O в максимально короткое время, т. е. из всех желоб-

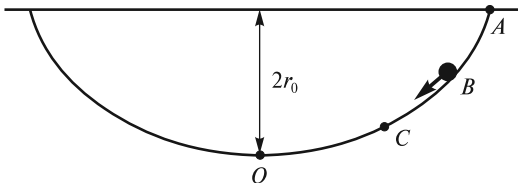


Рис. 2.40

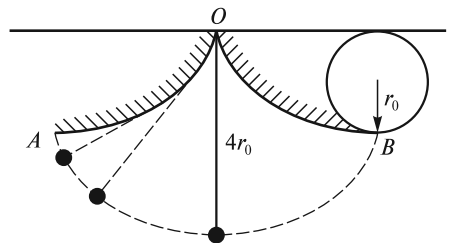


Рис. 2.41

ков, проложенных в поле силы тяжести из A в O , включая и прямолинейный, «циклоидальный» желобок будет самым быстрым. Кривая, обладающая таким свойством, называется *брахистохроной*, т.е. «кривой кратчайшего времени».

3. Известно, что период колебаний математического маятника зависит от амплитуды. Особенно сильно этот эффект проявляется при больших амплитудах. Шаблон AOB , состоящий из двух полуарок циклоиды и ограничивающий движение математического маятника (рис. 2.41), позволяет реализовать колебательную систему с периодом, не зависящим от размаха колебаний (таутохронный маятник). Постоянство периода достигается за счет уменьшения длины маятника при «наматывании» нити на шаблон. Если длина нити равна учетверенному радиусу r_0 круга, «производящего» циклоиду, то траекторией движения груза будет тоже циклоида, причем с такими же параметрами, как и у циклоиды шаблона.

ЛЕКЦИЯ 3

В кинематике движение тех или иных тел рассматривалось вне связи с причинами, вызывающими это движение. Задача динамики заключается в том, чтобы установить взаимосвязь между движением тела и теми причинами, которые вызвали или изменили это движение, т.е. силами.

Инерциальные системы отсчета. Первый закон Ньютона. Напомним, что при описании движений в кинематике никакой принципиальной разницы между различными системами отсчета нет, и выбор той или иной системы диктуется лишь удобством ее использования. Иное дело в динамике — здесь обнаруживается существенное различие между разными системами отсчета и преимущества одного класса систем по сравнению с другими. На это указывает хотя бы то обстоятельство, что ускорение тела при переходе от одной системы отсчета к другой может либо измениться, либо остаться неизменным в зависимости от того, как эти системы движутся относительно друг друга.

Рассмотрим ускорение некоторого тела (материальной точки) относительно произвольной системы отсчета. Какова же причина этого ускорения? Опыт показывает, что ускорение возникает либо вследствие взаимодействия рассматриваемого тела с другими телами, либо за счет свойств самой системы отсчета (в одной системе тело может двигаться равномерно и прямолинейно, а в другой, движущейся относительно первой с ускорением, то же тело будет двигаться ускоренно).

Рассматривая окружающие нас тела в системе отсчета, связанной с неподвижной относительно Земли лабораторией (далее — лабораторная система отсчета), мы приходим к выводу, что их движение вызывается или изменяется в результате взаимодействия с другими телами. Обратимся к примерам. Биллиардный шар начинает двигаться после удара по нему кием (рис. 3.1). Снаряд, выпущенный из орудия под некоторым углом к горизонту, летит по искривленной траектории за счет притяжения к Земле (рис. 3.2). Стальной шар, катящийся по горизонтальной поверхности, искривляет свою траекторию вблизи неподвижного постоянного магнита (рис. 3.3, вид сверху) и т.д. Во всех этих случаях изменяется вектор скорости тела. Таким образом, причиной ускорения тел здесь является их взаимодействие с другими телами.

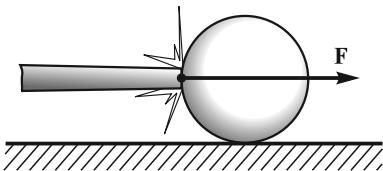


Рис. 3.1

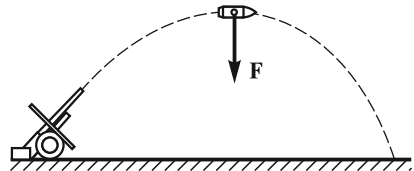


Рис. 3.2

В других случаях дело обстоит иначе. Наблюдая ускоренное движение скользящих по полу предметов в останавливающемся вагоне поезда (в системе отсчета, связанной с вагоном), или отклонение сидений подвесной карусели (в системе отсчета, связанной с вращающейся каруселью), мы, очевидно, не можем указать тел, взаимодействие с которыми приводит к этим эффектам.

Возникает вопрос: существуют ли такие системы отсчета, в которых ускорение материального тела обусловлено только его взаимодействием с другими телами? В таких системах отсчета свободное тело, не подверженное действию других тел, будет двигаться прямолинейно и равномерно, или, как говорят, по инерции. Утвердительный ответ на поставленный вопрос заключается в I законе Ньютона, или законе инерции: да, такие системы отсчета (они называются *инерциальными*) существуют. В формулировке самого Ньютона (перевод акад. А. Н. Крылова) закон инерции звучит так: «Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние».

Существование инерциальных систем отсчета (ИСО) подтверждается опытом. Вместе с тем для строгой экспериментальной проверки I закона Ньютона, очевидно, следовало бы изучать движение свободных тел, т.е. тел, не подверженных внешним воздействиям. Однако абсолютно свободных тел, вообще говоря, не существует. Свободное тело — это такая же физическая абстракция, как и материальная точка. Можно избавиться от взаимодействий, возникающих при непосредственном соприкосновении тел, но как избавиться от сил, например, гравитационного притяжения? Фактически при установлении инерциальности рассматриваемой системы отсчета следует ответить на вопрос: всегда ли ускоренное движение тела в данной системе отсчета можно объяснить его взаимодействием с окружающими телами или нет? Естественно, ответ на этот вопрос может быть дан лишь с определенной степенью точности. Классическая механика по сути постулирует, что *существуют такие системы отсчета (инерциальные системы отсчета), в которых все свободные тела либо сохраняют состояние покоя, либо движутся равномерно и прямолинейно*.

Примером ИСО при рассмотрении движений в рамках Солнечной системы является *гелиоцентрическая*, или коперникова система отсчета, связанная с Солнцем и неподвижными звездами. В системе отсчета Птолемея, связанной с Землей, которая считалась в то время неподвижной, движения планет выглядели достаточно сложно, поэтому ученым долгое время и не удалось установить общие законы движения планет. В гелиоцентрической системе начало координат расположено в центре Солнца, а три взаимно перпендикулярные оси направлены на три звезды, положение которых в силу их огромной удаленности практически не изменяется со временем. В этой системе отсчета характер движения планет Солнечной системы значительно упростился,

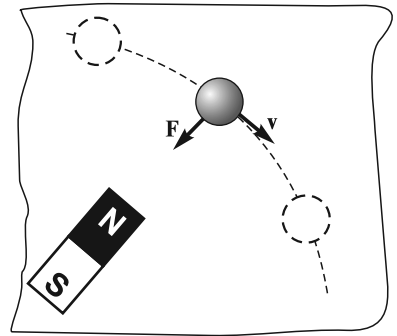


Рис. 3.3

и Кеплеру удалось сформулировать наиболее общие законы их движения (законы Кеплера).

Вместе с тем, изучая движение тел в земных условиях, мы часто пользуемся лабораторной системой отсчета, связанной с поверхностью Земли; рассматривать, как движутся эти тела относительно Солнца и звезд, практически было бы затруднительно. Однако такое рассмотрение, как правило, и не нужно — вращение Земли вокруг своей оси (в первую очередь) и ее движение по эллиптической орбите вокруг Солнца практически не влияют на движение многих рассматриваемых тел, и в большинстве «лабораторных» экспериментов систему отсчета, связанную с Землей, можно с достаточной степенью точности считать инерциальной. В особенности это относится к таким движениям, которые происходят в течение не очень длительного времени и на сравнительно коротких расстояниях вблизи поверхности Земли. Вместе с тем, когда возникает необходимость, например, определить характер движения воздуха в циклонах и антициклонах или рассчитать полет баллистической ракеты, то обнаруживается, что систему отсчета «Земля» считать инерциальной нельзя.

Одним из опытов, в которых проявляется неинерциальность системы отсчета, связанной с земной поверхностью, является опыт с маятником Фуко. Л.Фуко поставил этот опыт в 1851 г. в Париже. Рассмотрим мысленно эксперимент с подобным маятником, расположенным, для простоты рассуждений, на Северном полюсе Земли (рис. 3.4).

Маятник шарнирно закреплен в точке подвеса; на груз действуют силы натяжения нити \mathbf{N} и притяжения Земли \mathbf{P} . Есть еще сопротивление воздуха, но оно вызывает лишь медленное уменьшение амплитуды колебаний.

В гелиоцентрической системе отсчета, связанной с неподвижными звездами, плоскость качаний сохраняет свою ориентацию в пространстве неизменной. Вместе с тем ясно, что в системе отсчета, неподвижной относительно Земли, эта плоскость будет поворачиваться в направлении, обратном направлению вращения Земли вокруг своей оси со скоростью ω_n , равной скорости вращения Земли: $\omega_n = \omega_3 = 2\pi$ рад/сут. С точки зрения земного наблюдателя подобный поворот плоскости качаний маятника нельзя соотнести с действием каких-либо реальных тел, а это и значит, что система отсчета, связанная с вращающейся Землей, в данном случае не может считаться инерциальной.

Заметим, что на широтах $\varphi \neq 90^\circ$ плоскость качания маятника не может сохранять постоянную ориентацию относительно звезд и в некоторой степени, зависящей от широты, участвует во вращении Земли. Однако поворот плоскости качаний относительно поверхности Земли все равно остается, его угловая скорость $\omega_n \approx \omega_3 \cdot \sin \varphi$. На экваторе ($\varphi = 0$) плоскость качания относительно Земли вообще не поворачивается.

Реальный маятник, сооруженный Фуко в Парижском Пантеоне, имеет длину 67 м. Такая большая длина обеспечивает наглядность эффекта поворота плоскости качания маятника за небольшое время наблюдения.

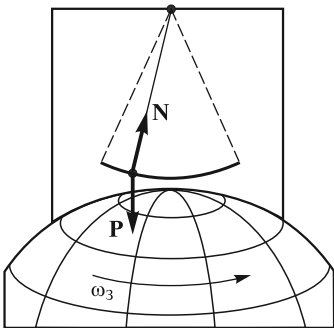


Рис. 3.4

Следует отметить, что инерциальность гелиоцентрической (коперниковой) системы отсчета, подтверждаемая многочисленными экспериментами, в свою очередь, также имеет приближенный характер. Эта инерциальность, очевидно, справедлива для явлений в масштабе нашей планетной системы или в масштабе любой другой системы, размеры которой малы по сравнению с расстояниями до трех звезд, принятых в системе Коперника в качестве опорных. При рассмотрении движений всей галактики или нескольких галактик построение инерциальной системы отсчета затруднительно в связи с проблемой выбора опорных астрономических объектов, расстояния между которыми велики по сравнению с размерами той области пространства, где совершается движение рассматриваемых тел.

В последнее время стала представлять интерес система отсчета, связанная с так называемым *реликтовым излучением*, открытым в 1965 г. (см. лекцию 1). Система отсчета, в которой реликтовое излучение изотропно (его интенсивность по всем направлениям одна и та же), считается покоящейся. Эта система отсчета по своему значению эквивалентна системе, связанной со сферой неподвижных звезд. Именно по отношению к реликтовому излучению наша и многие другие галактики движутся со скоростью около 400 км/с по направлению к некоторой точке на небесной сфере — большому аттрактору.

В заключение подчеркнем, что никакой выделенной, или преимущественной ИСО не существует. Если известна одна ИСО, то можно построить и бесчисленное множество других ИСО. Действительно, если в данной системе отсчета (скажем, гелиоцентрической) ускорение тела равно нулю, то оно будет равно нулю и в любой другой системе отсчета, движущейся относительно данной системы равномерно и прямолинейно. Этот вывод следует из формулы сложения скоростей (2.76), рассмотренной в лекции 2.

Локально инерциальная система отсчета. Как было отмечено выше, непосредственную проверку первого закона Ньютона путем наблюдения за движением уединенного тела осуществить трудно. Можно устранить воздействия, возникающие при соприкосновении тел, но ведь существуют еще взаимодействия без непосредственного контакта, например, электромагнитные и гравитационные. Казалось бы, наибольшую трудность в этом плане представляет собой гравитационное притяжение тел. Однако оказывается, что именно это воздействие можно «устранить». Дело в том, что всем телам, независимо от их массы, плотности и состава одно и то же гравитационное поле сообщает в точности одинаковое ускорение (вспомним известный опыт, в котором металлический шарик, пробка и перо, падающие с одной и той же высоты в цилиндрическом сосуде, из которого откачан воздух, достигают дна сосуда одновременно).

Гравитационное поле достаточно удаленных тел Вселенной в малых областях пространства можно считать практически однородным. Если ввести систему отсчета, свободно падающую в однородном гравитационном поле, то на явлениях, происходящих в такой системе, наличие этого поля никак не скажется. Известно, например, что в кабине космического корабля, свободно движущегося в космическом пространстве, космонавты не чувствуют поля тяготения (находятся в состоянии невесомости). Другими словами, в системе отсчета, свободно падающей в однородном гравитационном поле, описание

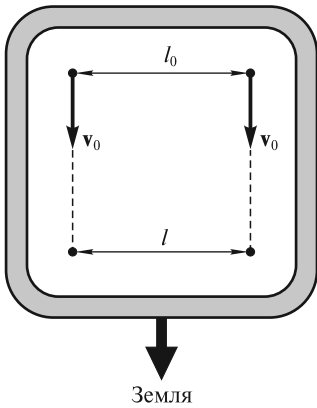


Рис. 3.5

движения тел можно вести, как в инерциальной. При этом среди внешних сил, естественно, не следует учитывать внешнее однородное гравитационное поле.

В этой связи уместно упомянуть об ошибке, которую допустил Ж. Верн в своем романе «Вокруг Луны», описывая свободный полет с Земли на Луну десятитонного полого снаряда, в котором находилось несколько человек и животные. Согласно Ж. Верну, после того, как снаряд вылетел из пушки, пассажиры могли ходить по дну, расположенному ближе к Земле. Затем они чувствовали, что их прижимает к полу все меньше и меньше, потом могли свободно парить (Земля и Луна притягивали их с одинаковой силой), а затем, приблизившись к Луне, они снова смогли ходить, но уже по той стороне

своего корабля, которая была обращена к Луне. На самом же деле пассажиры должны были испытывать невесомость в течение всего полета!

Подчеркнем, что системы отсчета, связанные с телами, свободно движущимися в гравитационном поле, можно считать инерциальными только в ограниченной области пространства и для движений, совершающихся в течение небольших промежутков времени. В противном случае неизбежно присутствующая неоднородность гравитационного поля может оказаться существенной. Она скажется на характере относительных движений, совершающихся в разных частях такой системы отсчета, и ее «инерциальность» нарушится.

Сказанное можно пояснить на следующем примере. Представим, что гипотетический космический аппарат падает «по вертикали» в гравитационном поле Земли с очень большой высоты. Рассмотрим две материальные точки, расположенные на одной «горизонтالي» на расстоянии l_0 друг от друга у «потолка» этого аппарата (рис. 3.5). Сообщим им одинаковые начальные скорости v_0 относительно аппарата, направленные вниз. Если l_0 велико, то наличие неоднородности гравитационного поля приведет к тому, что расстояние между точками начнет постепенно уменьшаться (l станет меньше l_0). Этого сближения не удастся избежать и в том случае, если l_0 сделать небольшим; правда, тогда это случится в течение большего промежутка времени или для его обнаружения придется использовать более точные методы измерения расстояний.

Именно поэтому рассмотренные выше системы отсчета и получили название *локально инерциальных*.

Преобразования Галилея. Как было отмечено выше, существует бесчисленное множество ИСО, движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно. Возникает задача преобразования координат точки и времени (координат события) при переходе от одной ИСО к другой. Для ее решения рассмотрим две равноправные ИСО K и K' с соответствующими декартовыми системами координат (рис. 3.6). Система координат K — условно неподвижная, система K' движется в положительном направлении оси Ox с постоянной скоростью V , как показано на рисунке. В начальный момент времени $t=0$ начала обеих систем совпадали.

Пусть положение движущейся точки M в момент времени t в системе K характеризуется радиусом-вектором \mathbf{r} . Начало координат системы K' за время t сдвинется на расстояние OO' , причем $OO' = \mathbf{V}t$. В системе K' положение точки M задается радиусом-вектором \mathbf{r}' , а часы этой системы будут показывать время $t' = t$, так как в нерелятивистской кинематике время считается абсолютным. Связь между векторами \mathbf{r} , \mathbf{r}' и OO' приводит к соотношению $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$. Записывая его в проекциях на координатные оси, для преобразований координат и времени окончательно получим

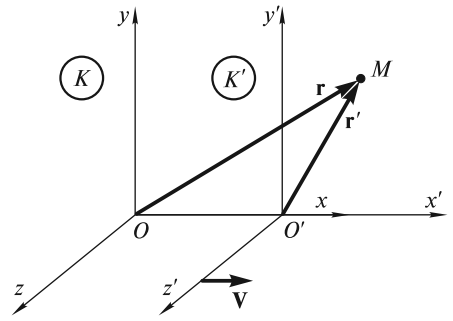


Рис. 3.6

$$x' = x - Vt; \quad (3.1)$$

$$y' = y; \quad (3.2)$$

$$z' = z; \quad (3.3)$$

$$t' = t. \quad (3.4)$$

Решая (3.1)—(3.4) относительно нештрихованных величин, получим обратные преобразования

$$x = x' + Vt'; \quad (3.5)$$

$$y = y'; \quad (3.6)$$

$$z = z'; \quad (3.7)$$

$$t = t'. \quad (3.8)$$

Заметим, что соотношения (3.5)—(3.8) можно получить иначе. Неподвижной системой можно считать K' , тогда система K будет двигаться в отрицательном направлении оси $O'x'$. В этом случае для перехода от K' к K надо в (3.1)—(3.4) переменные со штрихом заменить на переменные без штриха, и наоборот, а скорость \mathbf{V} в (3.1) заменить на $-\mathbf{V}$. В итоге получаются преобразования (3.5)—(3.8).

Инвариантами относительно преобразований координат при переходе от одной системы отсчета к другой называются такие физические величины, которые не изменяют при этом своих значений.

Одним из инвариантов относительно преобразований Галилея является длина. Для измерения длины некоторого предмета (стержня) в данной системе отсчета необходимо зафиксировать координаты его концов. В системе, где стержень покоится, эти координаты можно фиксировать в разные моменты времени, а в системе, где стержень движется, — обязательно в один и тот же момент времени по часам этой системы.

Рассмотрим стержень, который покоится в системе K' и имеет длину

$$l' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}. \quad (3.9)$$

В системе K стержень движется, и его длина будет равна

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (3.10)$$

где (x_2, y_2, z_2) и (x_1, y_1, z_1) — координаты концов стержня, зафиксированные в некоторый момент времени t_0 по часам неподвижной системы K .

Используя преобразования (3.5) — (3.8), получим

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{[(x'_2 + Vt_0) - (x'_1 + Vt_0)]^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = l', \end{aligned} \quad (3.11)$$

т. е. длина стержня в обеих системах отсчета одинакова.

Инвариантен и интервал времени — это легко доказывается с учетом преобразования (3.4):

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t'. \quad (3.12)$$

Отсюда ясно, что абсолютный характер носит и утверждение об одновременности двух событий ($\Delta t = \Delta t' = 0$).

Что касается скорости точки, то при переходе от одной ИСО к другой она изменяется, т. е. не является инвариантом. Формулу преобразования компонент скорости v_x и v'_x вдоль осей Ox и $O'x'$ соответственно легко получить, дифференцируя соотношение (3.1) по времени:

$$v'_x = v_x - V. \quad (3.13)$$

Для других компонент скорости аналогичным образом имеем

$$v'_y = v_y; \quad (3.14)$$

$$v'_z = v_z. \quad (3.15)$$

Заметим, что преобразование (3.13) можно получить из закона сложения скоростей $\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}}$ [см. (2.76)]. Применительно к рассматриваемому случаю $v_{\text{отн}} \equiv v'_x$, $v_{\text{пер}} \equiv V$, $v_{\text{абс}} \equiv v_x$.

Дифференцируя (3.13) — (3.15) по времени, получим

$$a'_x = a_x; \quad (3.16)$$

$$a'_y = a_y; \quad (3.17)$$

$$a'_z = a_z, \quad (3.18)$$

т. е. ускорение инвариантно относительно преобразований Галилея.

Принцип относительности Галилея. Согласно Галилею, инерциальные системы отсчета полностью равноправны: *все механические явления в различных ИСО подчиняются одним и тем же физическим законам.* Смысл сказанного можно пояснить следующим образом. Представим, что мы находимся в некоторой системе K' , движущейся относительно неподвижной (условно неподвижной)

инерциальной системы K прямолинейно и равномерно. Оградим себя от внешнего пространства воображаемыми непроницаемыми перегородками. Тогда никакие механические опыты не позволят нам определить, движется система K' относительно системы K или же покоится. Сам Галилей приводил в этой связи пример с каютой корабля, расположенной под палубой и не имеющей окон. В такой каюте все явления (плавание рыб в аквариуме, полет насекомых, падение капель и т.д.) будут происходить совершенно одинаково вне зависимости от того, покоится корабль или движется равномерно и прямолинейно.

В дальнейшем выяснилось, что принцип относительности справедлив и для всех других явлений: электромагнитных, оптических и т.д. Тем не менее этот принцип остается постулатом, поскольку все эксперименты по его проверке могут быть выполнены лишь с конечной точностью.

Заметим, что с математической точки зрения принцип относительности означает, что формальное выражение того или иного физического закона во всех ИСО должно быть одним и тем же. Другими словами, если в одной системе (K) закон выражается уравнением $A = B$ (A и B — комбинации физических величин), то при переходе к другой системе (K' ; $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$) должно выполняться равенство $A' = B'$.

Сила. Масса. Второй закон Ньютона. Понятия силы и массы являются одними из наиболее важных не только в механике, но и в физике вообще. Вместе с тем, эти понятия являются, пожалуй, одними из наиболее сложных и трудноопределимых. В литературе, начиная от «Математических начал натуральной философии» Ньютона и кончая современными курсами физики, можно встретить различные определения силы и массы.

Согласно Ньютону, «приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения». В некоторых современных курсах сила определяется чисто формально, через II закон Ньютона, как произведение массы материальной точки на ее ускорение. Иногда сила как таковая вообще исключается из рассмотрения. Так, в общей теории относительности Эйнштейна гравитационное взаимодействие сводится к искривлению пространства.

Если говорить о массе, то, согласно Ньютону, «количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и ее объему». Это определение, как отмечал Мах, содержит логический круг: масса выражается через плотность и объем, а плотность, в свою очередь, есть масса единицы объема. Ньютон использовал понятие массы при определении импульса тела, изменение которого вызывается внешними силами. Тем самым масса характеризует инертные свойства тел. С другой стороны, она же характеризует способность гравитационного притяжения тел, поскольку Ньютон использовал ее в законе всемирного тяготения.

В данном курсе лекций при определении силы и массы мы будем исходить из следующих представлений. Силу будем рассматривать как меру взаимодействия тел. При этом предполагается, что в ИСО всегда можно указать источник силы, а для решения конкретных физических задач — определить закон действия силы. Для всех рассматриваемых сил справедлив *принцип суперпозиции*, или независимого действия: действие каждой силы не зависит от присутствия

или отсутствия других сил. Как следует из опыта, силы подчиняются правилу векторного сложения.

Массу будем рассматривать как меру количества вещества (материи), содержащегося в теле. Масса характеризует инертность тел. Она определяет их гравитационное притяжение. Масса аддитивна, т.е. масса тела равна сумме масс его частей. Масса тела не зависит от его движения.

Заметим, что в релятивистской механике некоторые перечисленные выше свойства утрачивают свою силу (см. лекцию 10).

Для измерения сил в принципе можно воспользоваться пружинным динамометром, который необходимо прокалибровать. За условную единицу силы можно принять величину F_0 силы, создаваемой некоторой стандартной пружиной при ее удлинении на определенную величину $\Delta l = l - l_0$ (рис. 3.7). Имея набор стандартных пружин, можно создать усилия величиной $2F_0, 3F_0, \dots$ и, таким образом, проградуировать пружину динамометра.

Например, на тело Т (рис. 3.8) с одной стороны действуют две растянутые пружины, создающие силы F_0 . С другой стороны действует пружина динамометра Д с неизвестной силой F . Если тело остается в покое, то можно утверждать, что $F_0 + F_0 = F$, т.е. $F = 2F_0$. Аналогично, с помощью трех, четырех и более стандартных пружин можно создать усилия величиной $3F_0, 4F_0$ и т.д. и таким образом реализовать калибровку пружины динамометра.

Используя калиброванную пружину, можно в принципе измерить любую действующую на данное тело силу и проверить правило векторного сложения сил. Сказанное иллюстрируют рис. 3.9 и 3.10.

Независимо измеряя силу F и ускорение a , можно изучить движение различных тел под действием тех или иных сил и установить существующую между F и a взаимосвязь. Пример таких опытов показан на рис. 3.11. Тело Т, «составленное» из одного или нескольких одинаковых брусков, находится на скамье С с воздушной подушкой, позволяющей устранить силу трения скольжения между телом и скамьей. Тело движется под действием грузов, уложенных на платформу П. Сила, действующая на тело, измеряется динамометром Д.

Этот и другие подобные опыты позволяют сделать следующие выводы:

1. При неизменном внешнем воздействии тело движется равноускоренно, т.е. если $F = \text{const}$, то и $a = \text{const}$.

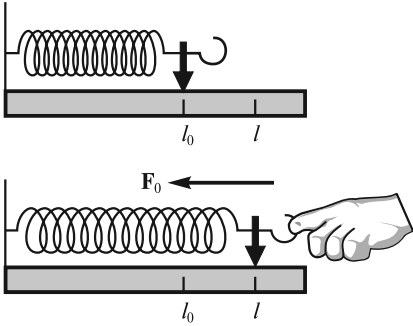


Рис. 3.7

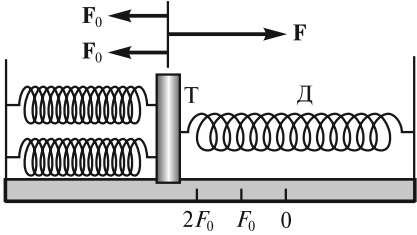


Рис. 3.8

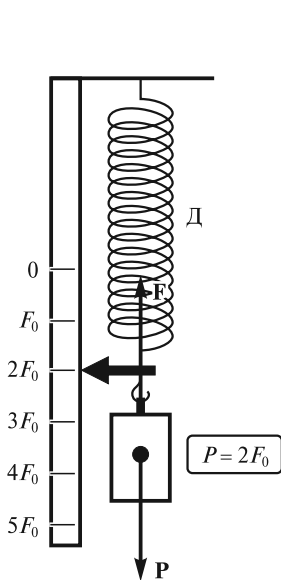


Рис. 3.9

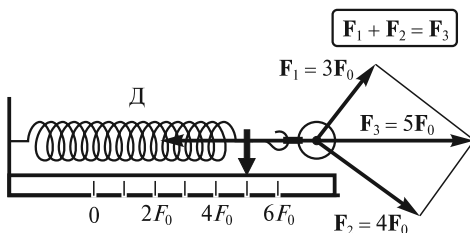


Рис. 3.10

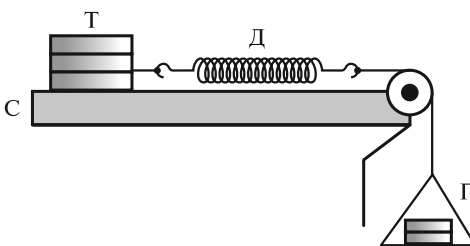


Рис. 3.11

2. Направления возникающих ускорений совпадают с направлениями действующих сил: $\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{F}$.

3. Ускорения тел пропорциональны действующим силам: $a \sim F$. В этом, в частности, можно убедиться, измеряя ускорения тела Т (рис. 3.11) при разном количестве грузов на опускающейся платформе.

4. Ускорение тела зависит от его инертности — неподатливости к изменению скорости под действием приложенной силы. Чем больше брусков, из которых «составлено» тело (чем больше его инертность), тем меньшее ускорение приобретает тело под действием фиксированной силы.

5. Отношение F/a пропорционально числу брусков N , из которых «составлено» тело: $F/a \sim N$. Если все бруски одинаковы, а масса каждого из них равна m_0 , то масса N брусков $m = Nm_0$ и, таким образом, $F/a = km$, где $k = \text{const}$ — коэффициент пропорциональности.

За единицу силы принимается такая сила, которая массе 1 кг (об эталоне массы говорилось в лекции 1) сообщает ускорение 1 м/с². Эта сила равна 1 Н = 1 кг · м/с². В этом случае коэффициент $k = 1$.

В результате будем иметь:

$$\frac{F}{a} = m = \text{const}. \quad (3.19)$$

Массу произвольного тела можно определить, сравнивая ускорение a , сообщаемое ему некоторой силой, с ускорением a_0 , сообщаемым той же силой телу с единичной массой $m_0 = 1$ кг:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{a_0}{a}; \quad m = m_0 \frac{a_0}{a}. \quad (3.20)$$

Соотношение (3.19), записанное в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (3.21)$$

$\left(\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)$ является математическим выражением II закона Ньютона. Физический смысл этого закона заключен в следующих утверждениях: 1) направления ускорения тела и действующей на это тело силы совпадают; 2) ускорение пропорционально силе; 3) ускорение обратно пропорционально массе тела.

З а м е ч а н и е 1. При формулировке II закона Ньютон ввел понятие «количества движения» тела как произведения массы тела на его скорость. В авторской редакции (перевод акад. А. Н. Крылова) этот закон звучит так: «Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по той прямой, по которой эта сила действует». В современных обозначениях это соответствует уравнению

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}, \quad (3.22)$$

которое легко получается из (3.21) с учетом $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. К этой ньютоновской формулировке мы еще вернемся в релятивистской механике. В классической же механике для большей наглядности изложения мы будем оперировать со II законом Ньютона в форме (3.21).

З а м е ч а н и е 2. Если масса m и ускорение \mathbf{a} инвариантны относительно преобразований Галилея, то сила $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ также инвариантна. Это следует еще и из того, что все силы, рассматриваемые в механике, являются функциями только инвариантных величин: разностей координат и разностей скоростей взаимодействующих материальных точек. Таким образом, уравнение (3.21) справедливо в любой ИСО. Это полностью соответствует принципу относительности Галилея.

З а м е ч а н и е 3. Если тело свободно (на него не действуют никакие силы), то $\mathbf{F} = 0$, откуда следует $\mathbf{a} = 0$ и $\mathbf{v} = \text{const}$. Создается впечатление, что I закон Ньютона является простым следствием II закона при $\mathbf{F} = 0$. На самом деле уравнение $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ имеет смысл только тогда, когда указана система отсчета (инерциальная система отсчета), в которой оно справедливо. Выделить эту систему позволяет I закон Ньютона. Его суть как раз и заключается в том, что он постулирует существование такой системы отсчета, в которой свободная материальная точка движется без ускорения. Именно в инерциальной системе отсчета движение всякой материальной точки подчиняется уравнению $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Уравнение (3.21) называют *уравнением движения* материальной точки. Оно позволяет решить две основные задачи динамики материальной точки — *прямую* и *обратную*.

Прямая задача. Найти закон движения точки, если известны ее масса и действующая на нее сила \mathbf{F} (или силы \mathbf{F}_i). Зная начальное положение и начальную скорость точки, можно определить ее положение в последующий момент времени, а зная ускорение, кроме того можно определить и скорость точки в

этот момент времени. Эту процедуру шаг за шагом можно распространить на сколь угодно длительный промежуток времени, т. е. полностью определить движение точки. В этом проявляется детерминизм уравнения движения Ньютона (3.21). С одной стороны, оно позволяет, исходя из начальных условий и известных законов действия сил, предсказать будущее материальной точки (или, в общем случае, системы материальных точек). С другой стороны, будучи инвариантно относительно замены $t \rightarrow -t$, оно позволяет также полностью восстановить ее прошлое.

Обратная задача. Найти действующую на точку силу \mathbf{F} , если известны масса m и закон движения точки $\mathbf{r}(t)$: $\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$. Именно таким образом, по известному закону движения планеты Уран, французский астроном У. Лаверье сделал вывод о некоторой дополнительной неизвестной силе, действующей на планету. Источником этой силы была планета Нептун, открытая позднее в точном соответствии с предсказаниями Лаверье.

Заметим, что при решении конкретных задач выбирают подходящую систему координат и записывают уравнения движения для проекций входящих в (3.21) векторных величин. Так, в проекциях на оси декартовой системы координат получаем три дифференциальных уравнения

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (3.23)$$

где F_x, F_y, F_z — проекции вектора \mathbf{F} на оси Ox, Oy и Oz .

Проецируя обе части (3.21) на направления касательной и нормали к траектории и используя полученные в лекции 2 выражения для тангенциального и нормального ускорений, будем иметь

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau; \quad m \frac{v^2}{R} = F_n, \quad (3.24)$$

где F_τ и F_n — проекции вектора \mathbf{F} на направления $\bar{\tau}$ и \mathbf{n} . Векторы $F_\tau \bar{\tau} = \mathbf{F}_\tau$ и $F_n \mathbf{n} = \mathbf{F}_n$ называют *тангенциальной* и *нормальной* составляющими силы \mathbf{F} (рис. 3.12). Уравнениями (3.24) удобно пользоваться в том случае, когда известна траектория движущейся точки.

Третий закон Ньютона. Опыт показывает, что когда одно тело действует на другое, то это другое тело, в свою очередь, действует на первое. Если два человека встанут на тележки и начнут вытягивать веревку, за концы которой они держатся, то кто бы это ни делал, оба будут двигаться навстречу друг другу.

Рассмотрим опыт с двумя тележками на горизонтальной плоскости, имеющими разные массы m_1 и m_2 (рис. 3.13). Пусть тележки соединены нитью, удерживающей пружинные буферы тележек в деформированном состоянии. После пережигания нити тележки приходят в движение, причем оказывается, что скорости тележек обратно пропорциональны их массам, так что имеет место соотношение:

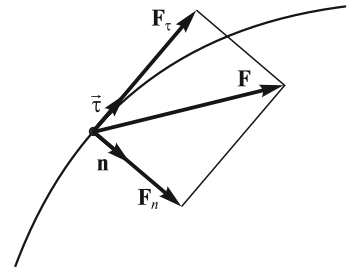


Рис. 3.12

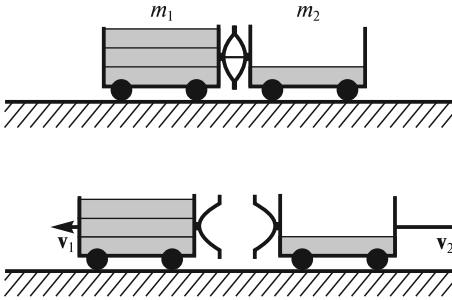


Рис. 3.13

тележек во время действия упругой силы; Δt — время действия этой силы, одно и то же для обеих тележек.

Из (3.26) и (3.27) следует, что

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2, \quad (3.28)$$

или

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}. \quad (3.29)$$

где $\mathbf{F}_{21} = m_1 \mathbf{a}_1$ — сила, действующая на первую тележку со стороны второй; $\mathbf{F}_{12} = m_2 \mathbf{a}_2$ — сила, действующая на вторую тележку со стороны первой.

Соотношение (3.29) является математическим выражением III закона Ньютона, который кратко называют «законом равенства действия и противодействия». В формулировке самого Ньютона, «действию всегда есть равное и противоположно направленное противодействие, иначе — силы взаимодействия двух тел друг на друга равны по величине и направлены в противоположные стороны». Физический смысл этого закона заключен в следующих утверждениях: 1) силы возникают парами и имеют одинаковую природу; они приложены к разным телам; 2) эти силы равны по величине; 3) они действуют вдоль одной прямой в противоположных направлениях.

Заметим, что согласно III закону Ньютона, обе силы должны быть равны по величине в любой момент времени независимо от движения взаимодействующих тел. Другими словами, если в системе из двух взаимодействующих тел изменить положение одного из тел, то это изменение мгновенно скажется на другом теле, как бы далеко оно ни находилось. На самом деле скорость распространения взаимодействий конечна; она не может превзойти скорость света в вакууме. Поэтому III закон Ньютона имеет определенные пределы применимости. Однако в классической механике, при малых скоростях взаимодействующих тел, он выполняется с большой точностью.

Силы в механике. Для того чтобы решать уравнение движения (3.21), необходимо знать законы действующих на тело сил. Фундаментальные силы, имеющие отношение к механике, — это гравитационные и электромагнитные. Нас будут интересовать законы действия этих сил в простейшем случае, когда взаимодействующие частицы покоятся или движутся с нерелятивистскими скоростями.

Гравитационная сила. В соответствии с законом всемирного тяготения сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками пропорциональна произведению масс m_1 и m_2 точек, обратно пропорциональна квад-

$$\frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (3.25)$$

или

$$m_1 \mathbf{v}_1 = -m_2 \mathbf{v}_2, \quad (3.26)$$

где \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 — скорости, приобретаемые тележками после того, как буферы перестанут соприкасаться. Эти скорости можно представить в виде

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \Delta t; \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 \Delta t, \quad (3.27)$$

где \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 — средние ускорения тележек во время действия упругой силы; Δt — время действия этой силы, одно и то же для обеих тележек.

рату расстояния r_{12} между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей эти точки

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (3.30)$$

где \mathbf{F}_{12} — сила, с которой масса m_1 действует на массу m_2 ; \mathbf{F}_{21} — сила, с которой масса m_2 действует на массу m_1 (эти силы равны по величине, но противоположны по направлению); \mathbf{r}_{12} — радиус-вектор, проведенный от точки 1 к точке 2; $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ — гравитационная постоянная.

В случае макроскопических тел произвольной формы сила, действующая на каждое из них, на основании принципа суперпозиции равна векторной сумме сил, действующих на каждую из элементарных масс, составляющих это тело, со стороны всех таких масс, составляющих другое тело. В частном случае макроскопических тел со сферически симметричным распределением массы (например, для двух однородных шаров) сила взаимодействия определяется так же, как и для материальных точек, т.е. по формуле (3.30), в которой r_{12} — расстояние между центрами таких шаров.

Массы m_1 и m_2 , фигурирующие в (3.30), в литературе иногда называют гравитационными, в отличие от инертной массы, введенной нами ранее и входящей во II закон Ньютона (3.21). Можно, однако, экспериментально показать, что эти массы пропорциональны друг другу. Действительно, если тело находится у поверхности Земли, то на него действует сила гравитационного притяжения

$$F = G \frac{m_{\Gamma} M_{\Gamma}}{R_3^2}, \quad (3.31)$$

где m_{Γ} — гравитационная масса тела; M_{Γ} — гравитационная масса Земли; R_3 — радиус Земли.

Под действием этой силы тело приобретает ускорение (ускорение свободного падения)

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{m_{\Gamma} M_{\Gamma}}{R_3^2 m} = A \frac{m_{\Gamma}}{m}, \quad (3.32)$$

где $A = G \frac{M_{\Gamma}}{R_3^2}$ — величина постоянная; m — инертная масса тела.

Из опыта известно, что ускорение g для всех тел у поверхности Земли одинаково, поэтому $\frac{m_{\Gamma}}{m} = \text{const}$, т.е. $m_{\Gamma} \sim m$. Соответствующим выбором G эти массы можно сделать равными друг другу, т.е.

$$m_{\Gamma} = m. \quad (3.33)$$

В настоящее время понятие «гравитационная масса» по существу имеет чисто исторический характер, и мы его употреблять не будем.

Заметим, что если некоторая система отсчета движется относительно другой инерциальной системы отсчета с постоянным ускорением \mathbf{a} , то явления в ней в пределах ограниченного времени и в ограниченной области пространства происходят так, как если бы имелось поле тяготения с ускорением

свободного падения $\mathbf{g}' = -\mathbf{a}$. Причем это касается не только механических, но и вообще всех физических явлений. В этом состоит *принцип эквивалентности* Эйнштейна.

Кулоновская сила. В соответствии с законом Кулона, два неподвижных точечных электрических заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют с силой

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (3.34)$$

где \mathbf{F}_{12} — сила, с которой заряд q_1 действует на заряд q_2 ; \mathbf{F}_{21} — сила, с которой заряд q_2 действует на заряд q_1 ; \mathbf{r}_{12} — радиус-вектор, проведенный от заряда 1 к заряду 2; $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

В зависимости от знаков зарядов силы \mathbf{F}_{12} и \mathbf{F}_{21} могут быть силами как притяжения, так и отталкивания.

Если заряды движутся, то ситуация несколько усложняется. В этом случае появляется еще магнитная сила, зависящая от движения зарядов. Однако при малых скоростях ($v \ll c$) магнитная сила составляет ничтожную часть от электрической, так что с достаточной степенью точности можно пользоваться законом (3.34).

При решении задач о движении заряженных частиц в электромагнитном поле вводят векторные характеристики этого поля: напряженность электрического поля \mathbf{E} и магнитную индукцию \mathbf{B} . При этом электрическую силу, действующую на заряд, можно записать в виде $\mathbf{F}_э = q\mathbf{E}$, а магнитную силу в виде $\mathbf{F}_м = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, где q — величина заряда, \mathbf{v} — его скорость.

Гравитационное и электромагнитное взаимодействия по существу лежат в основе всех механических явлений. Однако во многих случаях исходить непосредственно из законов (3.30) и (3.34) оказывается чрезвычайно сложно, а подчас и невозможно. Поэтому при рассмотрении разных видов взаимодействий макроскопических тел вводят другие, приближенные законы действия сил, полученные в результате обобщения опытных данных, а сами эти силы называют уже не гравитационными или электромагнитными, а силами тяжести, упругости, трения и т.д.

Рассмотрим эти основные виды сил, вводимые при описании механических явлений.

Сила тяжести. Эта сила является силой гравитационного взаимодействия (3.30). При этом оперируют с ускорением свободного падения \mathbf{g} :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}. \quad (3.35)$$

Если тело находится у поверхности Земли, то можно записать:

$$mg = G \frac{mM_3}{R_3^2}, \quad (3.36)$$

где M_3 — масса Земли; R_3 — ее радиус, откуда $g = G \frac{M_3}{R_3^2} \approx 9,8$ м/с².

С увеличением высоты ускорение свободного падения уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли. При подъеме на 3 км

над уровнем моря g убывает примерно на 0,001 своей величины. На высоте $h = 100$ км оно составляет

$$g(h) = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2} \approx \frac{GM_3}{R_3^2} \left(1 - \frac{2h}{R_3} \right) \approx 9,5 \text{ м/с}^2,$$

т. е. убывает всего на 3 %. Поэтому при рассмотрении движений, происходящих вблизи поверхности Земли, можно считать $g \approx \text{const}$.

При взвешивании тел, а также в некоторых случаях их движения вместе с опорой возникает понятие *веса*. Так, при взвешивании вес — это сила, с которой взвешиваемое тело действует на чашку весов. Предположим, что тело находится на горизонтальной подставке (опоре) и движется вместе с ней в вертикальном направлении. В этом случае вес тела — это сила, с которой оно действует на подставку (опору), удерживающую его от свободного падения. Если некоторое тело находится на полу лифта, а лифт движется вертикально вверх с ускорением a , то вес тела будет равен $m(g + a)$. Если лифт движется вниз с ускорением $a < g$, то вес тела составит $m(g - a)$.

Силами, имеющими электромагнитную природу, являются упругая сила и сила трения.

Упругая сила возникает, например, при малых деформациях растяжения или сжатия пружины. Как установил Р. Гук,

$$F = -k\Delta l, \quad (3.37)$$

где Δl — малая упругая деформация; k — коэффициент жесткости, зависящий от свойств пружины.

Отметим, что при параллельном соединении пружин с коэффициентами жесткости k_1, k_2, \dots, k_N суммарная «жесткость» системы

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_N. \quad (3.38)$$

При последовательном соединении складываются величины, обратные коэффициентам жесткости,

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_N}. \quad (3.39)$$

Сила реакции связи. Во многих задачах механики встречаются ситуации, когда перемещению тела в пространстве препятствуют какие-либо другие соприкасающиеся с ним тела. В этом случае говорят, что перемещение тела в пространстве ограничено *связью*. Таких примеров множество: груз на столе или наклонной плоскости, маятник на подвесе, лестница, прислоненная к стене, и т. д.

Под действием заданных приложенных сил рассматриваемое тело будет деформировать тело, ограничивающее его движение (деформируясь при этом само), и действовать на это тело с некоторой силой. По III закону Ньютона ограничивающее тело будет действовать на рассматриваемое с равной, но противоположно направленной силой, называемой *силой реакции связи*.

Некоторые примеры сил реакции связи представлены на рис. 3.14 (другие действующие на тела силы на рисунке не показаны). На рис. 3.14, а связь осуществлена с помощью гибкой нерастяжимой нити, которая удерживает тело

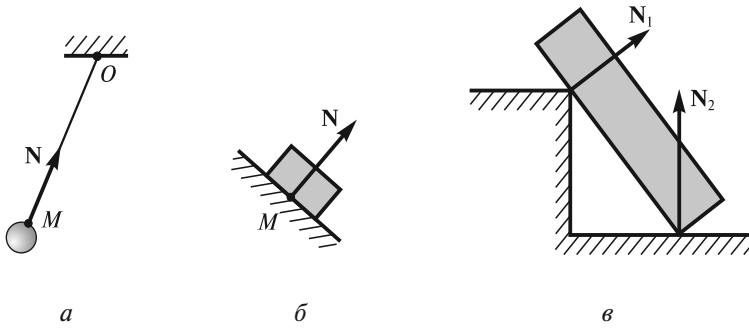


Рис. 3.14

M на одном и том же расстоянии от точки подвеса O . Сила реакции N направлена вдоль нити к точке O . На рис. 3.14, б поверхность, на которую опирается тело M , — гладкая (трением можно пренебречь). В этом случае сила реакции N направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел. Такие связи, при которых сила реакции всегда нормальна к перемещению тела, называются *идеальными*. Если макроскопическое тело опирается на гладкую опору, то сила реакции направлена по нормали к поверхности, участвующей в соприкосновении (рис. 3.14, в).

Сила трения. Рассмотрим важнейшие разновидности сил трения и некоторые явления, связанные с их действием.

Сила трения покоя. Опыт показывает, что с помощью небольшой силы сдвинуть массивное тело, лежащее на ровной горизонтальной поверхности, не удастся. Это связано с тем, что при этом возникает сила трения покоя $F_{\text{тр}}$, уравновешивающая приложенную к телу силу F (рис. 3.15). Величина $F_{\text{тр}}$, однако, не может превзойти некоторого предельного значения F_0 (максимальная сила трения покоя). Когда горизонтально приложенная сила F превысит по величине F_0 , тело сдвинется.

Можно видоизменить опыт. Рассмотрим систему из двух расположенных на гладкой горизонтальной поверхности брусков (рис. 3.16). Пусть оба бруска движутся как единое целое под действием некоторой силы F , приложенной к нижнему бруску. В этом случае на верхний брусок будет действовать сила $F_{\text{тр}}$ (сила трения покоя), препятствующая относительно скольжению брусков и направленная в ту же сторону, что и сила F . Именно эта сила обеспечивает движение верхнего бруска с ускорением $a = \frac{F}{m_1 + m_2}$. Она равна $F_{\text{тр}} = m_1 a = m_1 \frac{F}{m_1 + m_2}$. Если увеличивать силу F , то $F_{\text{тр}}$ также будет возрастать до вели-

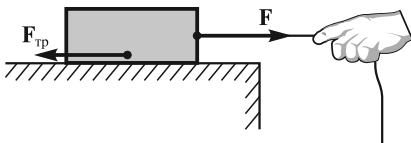


Рис. 3.15

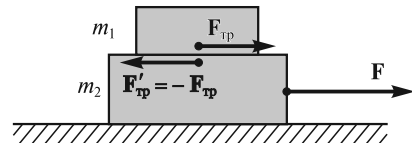


Рис. 3.16

чины F_0 , а затем начнется относительное скольжение брусков. Эти опыты показывают, что сила трения покоя направлена в сторону, противоположную тому относительному перемещению тела, которое наблюдалось бы в отсутствие трения.

Причина силы трения — не заметные на глаз неровности (выступы, впадины) на поверхностях соприкасающихся тел (рис. 3.17). При попытке сдвинуть одно тело относительно другого различные выступы «цепляются» друг за друга, в результате чего возникает результирующая сила (сила трения покоя), уравнивающая приложенную силу. Одновременно с этим неровности деформируются, причем в зависимости от возникающих локальных давлений эти деформации могут иметь как упругий, так и неупругий характер. Интересно, что суммарная площадь непосредственного контакта взаимодействующих таким образом тел, как правило, составляет ничтожную долю общей площади их видимого соприкосновения. Действительно, представим себе, что на стальную плиту опускается стальной куб с ребром 10 см. Допустим, что деформации, возникающие в местах непосредственного контакта («пятна» контакта), соответствуют пределу упругости $\sigma_y \approx 10^9 \text{ Н/м}^2$ (см. лекцию 15). Это предельное напряжение сжатия, при котором металл еще не «течет», а остаточные деформации после снятия нагрузки не возникают. В этом случае можно записать

$$Mg = \sigma_y \Delta S, \quad (3.40)$$

где M — масса куба; ΔS — суммарная площадь «пятен» контакта куба с плитой, равная

$$\Delta S = \frac{Mg}{\sigma_y} \approx 10^{-7} \text{ м}^2. \quad (3.41)$$

Учитывая, что площадь грани куба $S = 10^{-2} \text{ м}^2$, получим $\Delta S/S \approx 10^{-5} \ll 1$. Специальные измерения показывают, что площадь отдельно взятого «пятна» в рассмотренном случае составляет около 10^{-10} м^2 (круг с диаметром около 10 мкм). Таким образом, общее число n «пятен» оказывается достаточно большим: $n \approx 10^{-7}/10^{-10} = 1000$.

Площадь ΔS непосредственного контакта двух тел, неподвижных относительно друг друга, с течением времени может несколько увеличиваться. Считается, что это происходит за счет постепенного развития пластических деформаций, эффектов «холодного сваривания» (образования своего рода мостиков из атомов вблизи точек контакта) и по другим причинам, связанным с чистотой поверхностей. Увеличение суммарной площади «пятен» контакта со временем приводит к возрастанию максимальной силы трения покоя.

Заметим, что во многих механических явлениях сила трения покоя играет принципиальную роль. Достаточно сказать, что без этой силы были бы невозможны многие относительные движения тел, в частности, перемещения транспортных средств и человека. Во многих случаях сила трения участвует

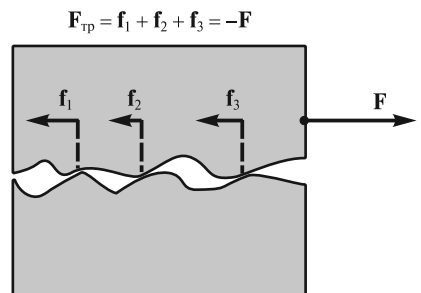


Рис. 3.17

Таблица 3.1

Трущиеся поверхности	Коэффициент трения скольжения
Сталь по льду	0,014
Сталь по стали	0,15—0,18
Дерево по чугуну	0,25—0,5
Дерево по дереву: поперек волокон	0,34
вдоль волокон	0,48
Резина по чугуну	0,5—0,8
Целлофан по резине	0,95

во вращательных движениях макроскопических тел (скатывание цилиндра с наклонной плоскости без проскальзывания, передача вращения от одного механизма к другому посредством ременного привода и т.д.). Более полно эти явления будут рассмотрены в лекциях по механике твердого тела.

Сила трения скольжения. Эта сила возникает при скольжении одного тела по поверхности другого и направлена против относительной скорости тела. Эта сила в первом приближении не зависит от видимой площади

соприкосновения тел и равна (закон Амонтона — Кулона)

$$F_{\text{тр}} = F_0 = \mu N, \quad (3.42)$$

где μ — коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей; N — сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу.

Ориентировочные значения коэффициентов трения скольжения для различных пар несмазанных трущихся поверхностей приведены в табл. 3.1.

На рис. 3.18 сплошными линиями схематично изображена получаемая из эксперимента зависимость силы трения от скорости относительного движения тел. При $v = 0$ сила $F_{\text{тр}}$ принимает любое значение от $-\mu N$ до $+\mu N$ (сила трения покоя). При малых скоростях относительного движения выполняется закон (3.42), при увеличении скорости абсолютное значение силы трения слегка уменьшается, а затем опять увеличивается.

При рассмотрении многих явлений с участием силы трения можно пользоваться упрощенной моделью, согласно которой сила трения скольжения не зависит от скорости (рис. 3.18, штриховые линии). Вместе с тем существует ряд эффектов, в которых эта зависимость играет определяющую роль. Достаточно назвать всем известный факт, что сдвинуть тяжелый предмет с места труднее, чем двигать его далее с постоянной, относительно небольшой скоростью.

С зависимостью силы сухого трения от скорости связан особый режим движения тел — «движение скачками». Обратимся к опыту (рис. 3.19). Пусть брусок Б находится на ровной горизонтальной поверхности. Прикрепим к бруску один конец пружины П, а другой ее конец будем двигать с некоторой постоянной скоростью $v_{\text{п}}$. Опыт показывает, что при не слишком больших скоростях $v_{\text{п}}$ и не слишком больших коэффициентах жесткости k пружины брусок будет двигаться не плавно, а скач-

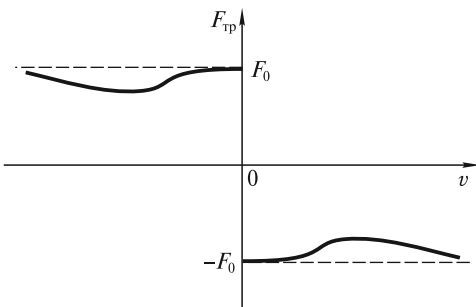


Рис. 3.18

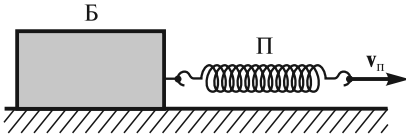


Рис. 3.19

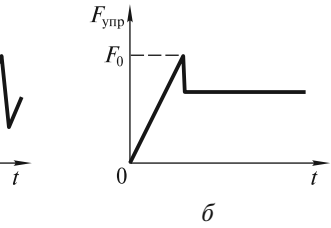
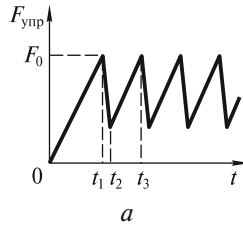


Рис. 3.20

ками, периодически останавливаясь. Зависимость силы упругости пружины от времени будет при этом иметь вид, изображенный на рис. 3.20, *а*. В начальный момент времени $t=0$ брусок покоится, а пружина не деформирована. С течением времени пружина растягивается, сила упругости растет. По достижении значения F_0 (момент времени t_1) брусок приходит в движение. За счет того, что действующая на него сила трения скольжения уменьшается, он быстро ускоряется, а затем, когда пружина сократится, — замедляется и останавливается (момент t_2). Далее пружина удлиняется, и когда сила упругости вновь достигает значения F_0 (момент t_3), брусок опять приходит в движение и т.д. Если увеличивать скорость v_n свободного конца пружины, то, начиная с некоторого значения этой скорости, движение бруска станет плавным (рис. 3.20, *б*). Область значений v_n и k , при которых наблюдается движение скачками, показана на рис. 3.21. Для объяснения смены режимов движения в зависимости от коэффициента жесткости пружины необходимо принять во внимание эффект постепенного увеличения максимальной силы трения покоя во время остановок бруска.

Явление застоя. Наличие трения покоя приводит к тому, что для приведения тела в движение нужны конечные силы. Сказанное иллюстрирует рис. 3.22, *а*. При наличии сухого трения брусок, «зажатый» между двумя одинаковыми пружинами, будет находиться в равновесии не только в центральной точке O , но и в любой точке в пределах области AB , которая называется *областью (зоной) застоя*. Если отклонение бруска выходит за пределы этой области, то он придет в движение, совершит несколько колебаний, и остановится в некоторой точке в пределах области застоя (см. рис. 3.22, *б* и лекцию 19).

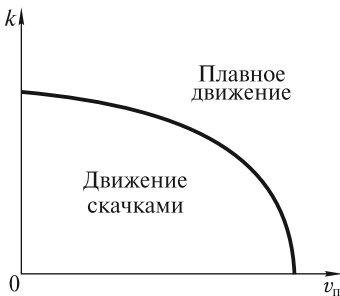


Рис. 3.21

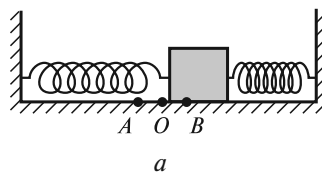
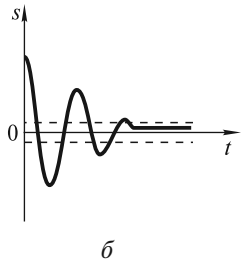


Рис. 3.22



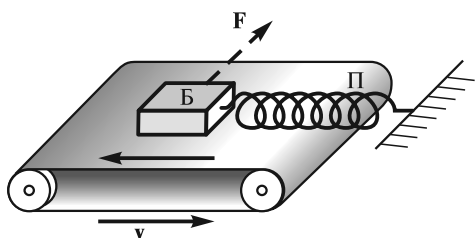


Рис. 3.23

Явление застоя, очевидно, ограничивает чувствительность стрелочных измерительных приборов. Если в оси вращения стрелки имеется сухое трение, то она уже не будет точно указывать на то деление шкалы, которое соответствует измеряемой величине.

Явление заноса. В некоторых специальных случаях сила трения скольжения тела по определенным направлениям

может принимать значения, намного меньшие, чем μN . Известно, например, что застрявший в стене гвоздь легче выдернуть, если при этом поворачивать его из стороны в сторону. Автомобиль, буксующий на ровной обледеневшей дороге, можно легко сдвинуть поперек дороги сравнительно небольшим боковым усилием, и т. д.

Для объяснения этих эффектов рассмотрим брусок Б, находящийся на ленте транспортера, которая движется с относительно большой скоростью v (рис. 3.23). Брусок удерживается от движения вместе с лентой пружиной П; относительно ленты он имеет скорость v , направленную вправо. В горизонтальном направлении на брусок действуют две равные, но противоположно направленные силы: сила трения $F_{тр} = \mu N$ (N — сила нормального давления) и сила упругости $F_{упр}$ со стороны пружины (рис. 3.24, а, вид сверху).

Допустим, что на брусок действует «поперечная» сила F (см. рис. 3.23), и за счет этого он приобретает скорость u в поперечном направлении. Тогда полная скорость бруска относительно ленты будет равна уже v_1 , и сила трения $F_{тр1}$ будет направлена против v_1 (рис. 3.24, б), при этом $|F_{тр1}| = |F_{тр}|$ (в предположении, что сила трения скольжения не зависит от скорости). Составляющая $F'_{тр1}$ силы трения $F_{тр1}$ в поперечном направлении окажется равной

$$F'_{тр1} = F_{тр1} \sin \alpha = \mu N \frac{u}{v_1} = \mu N \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (3.43)$$

Таким образом, для поперечного направления движения бруска сила трения покоя отсутствует, как в случае вязкого трения (см. ниже). Это значит, что брусок можно сдвинуть в этом направлении сколь угодно малой силой. Заметим, что если бы лента транспортера не двигалась, то для бокового перемещения бруска потребовалась бы сила (3.42).

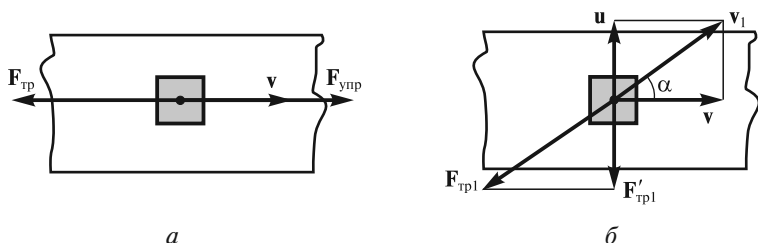


Рис. 3.24

Рассмотренный пример поясняет явление бокового заноса автомобиля при торможении «юзом», соскальзывание приводных ремней с валов механизмов при резком изменении скорости вращения и т. д.

Трение качения. Опыт показывает, что если цилиндр катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания, то он в конце концов остановится. Это связано с возникновением еще одного вида трения — *трения качения*. Трение качения возникает в результате несимметричной деформации соприкасающихся тел: цилиндра и плоскости. Это происходит как вследствие неупругих деформаций этих тел, так и упругих деформаций, при которых часть плоскости позади цилиндра «не успевает» восстановить свою форму. При этом сила \mathbf{F} реакции опоры оказывается неперпендикулярной, а уровень поверхности за цилиндром — чуть ниже, чем уровень поверхности перед ним (рис. 3.25). В результате возникает момент силы реакции, замедляющий вращение, а также направленная горизонтально сила \mathbf{F}_τ (аналог силы трения покоя), замедляющая поступательное движение цилиндра.

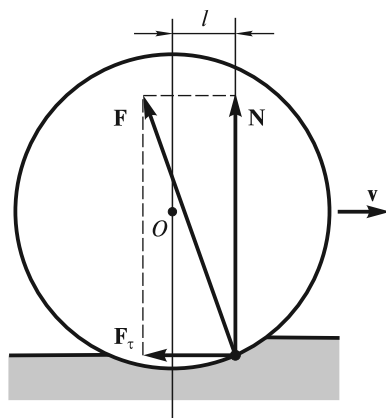


Рис. 3.25

Момент нормальной составляющей \mathbf{N} силы реакции опоры относительно оси цилиндра обычно называют *моментом силы трения качения*

$$M_{\text{тк}} = lN, \quad (3.44)$$

где l — плечо силы N относительно точки O — зависит от пары трущихся поверхностей и не зависит от радиуса цилиндра R . Эту величину, имеющую размерность длины, обычно называют *коэффициентом трения качения*. Для жестких тел величина l составляет несколько микрометров.

Если к оси цилиндра приложить горизонтальную силу, равную по величине F_τ , то цилиндр будет катиться равномерно. В этом случае сумма моментов сил относительно оси цилиндра должна равняться нулю, откуда следует, что

$$F_\tau \approx \frac{lN}{R}. \quad (3.45)$$

Это находится в согласии с тем фактом, что цилиндр большего радиуса катить легче, чем меньшего (при условии равенства их масс).

Вязкое трение. При относительном движении тел, соприкасающихся смазанными поверхностями, так же, как и при движении тела в вязкой среде, возникает *сила вязкого трения*. Эта сила существует лишь при относительном движении тел. Это, например, означает, что тело, плавающее на поверхности жидкости, может прийти в движение под действием сколь угодно малой горизонтально направленной силы.

Сила вязкого трения существенно зависит от скорости тела. При малых скоростях сила $F_{\text{тр}}$ растет пропорционально первой степени скорости:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -k_1 \mathbf{v}. \quad (3.46)$$

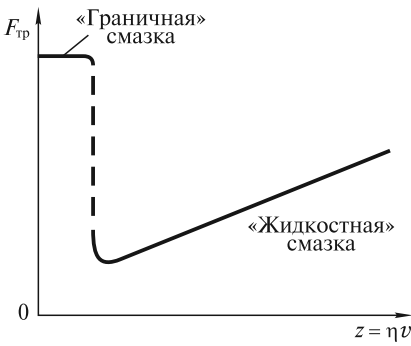


Рис. 3.26

По мере увеличения скорости эта зависимость переходит в квадратичную:

$$F_{тр} = -k_2 v^2 \frac{v}{v}. \quad (3.47)$$

Коэффициенты k_1 и k_2 , а также область скоростей, в которой осуществляется переход от закона (3.46) к закону (3.47), существенно зависят от формы и размеров тела, состояния его поверхности и свойств среды (вязкости, плотности). Более подробно вопрос о силе сопротивления при движении тела в вязкой среде будет рассмотрен в лекции 18.

Смазка значительно уменьшает силу трения между двумя трущимися поверхностями. Если смазка жидкая, а ее слой достаточно толстый (на практике $\sim 0,01$ мм), то основную роль играют силы вязкого трения, возникающие между движущимися слоями смазки. Слой жидкости, примыкающий к движущемуся телу, как бы прилипает к нему и движется вместе с ним, а слой, примыкающий к подложке, остается неподвижным. Чем больше перепад скорости от слоя к слою, тем больше сила трения. В данном случае (режим «жидкостной» смазки) эта сила возрастает с увеличением вязкости жидкости и скорости относительного движения тел. Сказанное иллюстрирует рис. 3.26, где схематично показана зависимость силы трения от параметра $z = \eta v$, где η — коэффициент вязкости, v — скорость относительного движения трущихся тел. Казалось бы, для улучшения качества смазки необходимо использовать жидкость с меньшим коэффициентом вязкости. Однако это не совсем так: известно, например, что масло является лучшей смазкой, чем вода. Объясняется это во многом тем, что при малых относительных скоростях движения трущихся тел недостаточно вязкая жидкость эффективно выталкивается из промежутка между соприкасающимися поверхностями и трение резко увеличивается. Когда слой жидкости становится очень тонким (несколько мономолекулярных слоев), смазка переходит из разряда «жидкостной» в разряд так называемой «граничной». Сила трения при этом возрастает в десятки и сотни раз, а определяющую роль начинают играть силы взаимодействия между молекулами твердых тел и жидкости.

ЛЕКЦИЯ 4

При решении многих задач механики приходится иметь дело не с одним телом (материальной точкой), а с целой совокупностью тел (материальных точек). Примерами таких систем могут служить взаимодействующие между собой заряженные частицы, Солнце и планеты и т.д. С течением времени положения и скорости материальных точек изменяются — говорят: изменяется состояние системы. Зная начальные условия и законы действующих на материальные точки сил, можно определить состояние системы в любой момент времени. В этом проявляется детерминистический характер II закона Ньютона — об этом говорилось в лекции 3. Однако зачастую детальное рассмотрение поведения системы бывает либо затруднительным, либо не нужным с практической точки зрения. Действительно, имеется большая группа задач, которые не требуют знания всех деталей движения — необходимо определить лишь конечное состояние системы после многочисленных взаимодействий составляющих ее частиц. Например, при соударении бильярдных шаров не важно знать, как меняются скорости шаров во время удара — важно найти их скорости после удара.

В этой связи возникает вопрос: существуют ли какие-нибудь общие принципы, которые позволили бы, не вдаваясь в детали поведения системы, связать ее конечное и начальное состояния? Естественно, эти принципы должны находиться в согласии с законами Ньютона. Оказывается, что такие принципы есть — это законы сохранения. Однако для их рассмотрения нам потребуются новые понятия: количество движения (импульс) и момент количества движения (момент импульса), работа и энергия. Законы сохранения импульса, момента импульса и энергии относятся к числу фундаментальных законов физики. Они выходят далеко за рамки механики и представляют собой универсальные законы природы, связанные с фундаментальными свойствами пространства и времени — однородностью и изотропностью. В двух ближайших лекциях мы последовательно рассмотрим все три упомянутые выше закона сохранения. При этом будем придерживаться следующей схемы изложения:

- введем новое понятие (импульс, момент импульса, энергия);
- получим закон изменения соответствующей величины, основываясь на законах Ньютона;
- сформулируем закон сохранения этой величины с учетом свойств конкретных систем;
- рассмотрим следствия из закона сохранения и некоторые примеры;
- обсудим связь законов сохранения со свойствами пространства и времени.

Количество движения (импульс) материальной точки. Импульс силы. Определим количество движения, или импульс материальной точки как произведение массы точки на ее скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (4.1)$$

Записывая уравнение движения (3.21) точки в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (4.2)$$

внося постоянную массу m под знак производной и учитывая (4.1), получим уравнение

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (4.3)$$

т. е. производная импульса материальной точки по времени равна действующей на эту точку силе.

В механике Ньютона уравнения (4.2) и (4.3) различаются чисто формально. В релятивистской динамике импульс определяется иначе, чем (4.1) (см. лекцию 10), в качестве уравнения движения точки используется (4.3), а уравнение (4.2) становится несправедливым.

Интегрируя (4.3), можно определить приращение количества движения точки за конечный промежуток времени $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t) dt. \quad (4.4)$$

В случае постоянной силы (4.4) упрощается

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t. \quad (4.5)$$

Выражения, стоящие в правых частях (4.4) и (4.5), называются *импульсом силы* за промежуток времени Δt . Эти уравнения означают, что приращение количества движения тела за некоторый промежуток времени равно импульсу равнодействующей всех сил, действующих на это тело.

Таким образом, количество движения, приобретаемое телом, зависит не только от величины силы, но и от продолжительности ее действия. Это утверждение можно проиллюстрировать большим числом эффектных опытов: выдергиванием полоски бумаги из-под колбы с водой, ломанием резким ударом деревянной рейки, опирающейся на бумажные кольца, и т. п.

Один из таких опытов представлен на рис. 4.1. Тяжелый шар подвешен на нити, снизу к нему прикреплена такая же нить. Если медленно тянуть за нижнюю нить, то рвется верхняя. Это происходит потому, что в результате незначительного смещения тела вниз деформация верхней нити достигает предельно допустимого значения. При этом непосредственно перед разрывом разность сил натяжения $T_1 - T_2$ уравнивает вес груза и, таким образом, $T_1 > T_2$. Если же быстро дернуть за нижнюю нить, то рвется именно она, а верхняя остается целой. В этом случае шар «не успевает» сколько-нибудь сдвинуться за время рывка, верхняя нить практически не испытывает дополнительного растяжения и поэтому остается целой.

Импульс системы материальных точек. Изменение импульса под действием внешних сил. Импульс системы определяется как векторная сумма импульсов составляющих ее частиц:

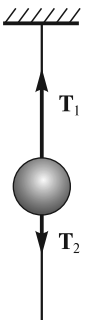


Рис. 4.1

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i. \quad (4.6)$$

Продифференцировав (4.6) по времени и учитывая (4.3), получим

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathcal{F}_i, \quad (4.7)$$

где \mathcal{F}_i — результирующая сила, действующая на i -ю частицу.

Силы, входящие в \mathcal{F}_i , могут быть разделены на внешние и внутренние. Внешние силы \mathbf{F}_i — это результат действия всех тел, не входящих в рассматриваемую систему, а внутренние силы $\mathbf{f}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{f}_{ki}$ — результат действия на i -ю частицу всех других частиц, входящих в рассматриваемую систему. Таким образом, (4.7) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{F}_i + \sum_{k \neq i} \mathbf{f}_{ki} \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \mathbf{f}_{ki}. \quad (4.8)$$

В соответствии с III законом Ньютона силы взаимодействия между частицами системы равны по величине и противоположны по направлению: $\mathbf{f}_{ki} = -\mathbf{f}_{ik}$. Отсюда следует, что двойная сумма в правой части (4.8), представляющая собой сумму всех внутренних сил, равна нулю. Это означает, что внутренние силы не могут изменить импульс системы. В результате из (4.8) получаем закон изменения импульса системы материальных точек

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \quad (4.9)$$

где \mathbf{F} — результирующая всех внешних сил, действующих на частицы системы.

Таким образом, *производная по времени импульса системы частиц равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на частицы системы*. По виду уравнение (4.9) совпадает с уравнением (4.3) для материальной точки. Надо только помнить, что в случае системы частиц ее импульс распределен между всеми частями рассматриваемой системы.

Как и в случае одной частицы, из (4.9) следует, что

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t) dt, \quad (4.10)$$

т.е. приращение импульса системы за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ равно импульсу результирующей всех внешних сил за тот же промежуток времени.

Заметим, что изменение импульса системы точек, определяемое уравнением (4.10), не зависит от того, к какой конкретно частице системы приложена внешняя сила.

Ниже будет показано (см. лекцию 6), что уравнениями (4.3), (4.4), (4.9) и (4.10) можно пользоваться не только в инерциальных, но и в неинерциальных системах отсчета. В этом случае необходимо учесть действие сил инерции.

Закон сохранения импульса. Если в (4.9) положить $\mathbf{F} = 0$, то $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$, и $\mathbf{P} = \text{const}$. Система, для которой сумма внешних сил равна нулю, называется *замкнутой*. Отсюда вытекает закон сохранения импульса для замкнутой системы материальных точек:

$$\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{const}, \quad (4.11)$$

т. е. *суммарный импульс замкнутой системы частиц остается постоянным*. Что касается импульсов отдельных частиц системы, то они, естественно, могут изменяться. Однако эти изменения происходят так, что приращение импульса одной части системы равно убыли импульса другой ее части.

Иногда вводят понятие *изолированной системы*. Некоторые авторы отождествляют понятия замкнутой и изолированной систем, а некоторые проводят между ними следующее различие: замкнутая система — это та, для которой сумма внешних сил равна нулю, а изолированная — это та, на которую внешние силы вообще не действуют.

В некоторых случаях система может быть в целом незамкнутой, но проекция результирующей внешней силы на выделенное направление в течение рассматриваемого промежутка времени может оказаться равной нулю. В этом случае говорят, что система замкнута в данном направлении, и рассматривают сохранение проекции импульса на данное направление. Если, например, $F_x = 0$, то и $P_x = \text{const}$. Например, при движении системы в однородном поле тяжести в отсутствие других сил сохраняется проекция импульса на любое горизонтальное направление.

■ **Пример 1.** Платформа с орудием движется без трения по горизонтальной поверхности с некоторой постоянной скоростью v_1 (рис. 4.2). В некоторый момент времени был произведен выстрел в сторону движения платформы, причем скорость снаряда относительно платформы равна u (рис. 4.3). Зная массу m снаряда и массу M платформы с орудием без снаряда, можно определить скорость v_2 платформы после выстрела. Действительно, записывая закон сохранения импульса в системе отсчета, связанной с горизонтальной поверхностью, получим

$$(M + m)v_1 = m(v_2 + u) + Mv_2, \quad (4.12)$$

откуда

$$v_2 = v_1 - \frac{m}{M + m}u. \quad (4.13)$$

Чем больше масса платформы, тем на меньшую величину изменяется ее скорость в результате выстрела.

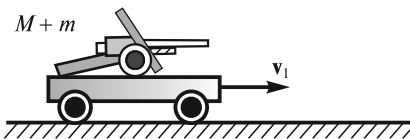


Рис. 4.2

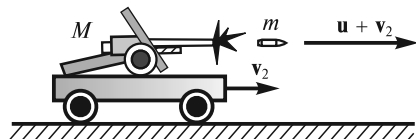


Рис. 4.3

Отметим, что тот же результат можно получить в другой ИСО — например, в системе, движущейся со скоростью v_1 (скорость платформы до выстрела). В этой системе начальный импульс равен нулю, а конечный складывается из импульса $m(v_2 - v_1 + u)$ снаряда и импульса $M(v_2 - v_1)$ платформы с орудием. Таким образом,

$$0 = m(v_2 - v_1 + u) + M(v_2 - v_1), \quad (4.14)$$

откуда для скорости v_2 платформы получается результат (4.13). Данный пример показывает, что если импульс сохраняется в одной ИСО, то он сохраняется и в любой другой ИСО. Это утверждение находится в полном соответствии с принципом относительности Галилея.

Заметим, что в рассмотренном выше примере закон, описывающий силу давления пороховых газов, и время действия этой силы неизвестны, поэтому решить эту задачу с помощью законов Ньютона было бы нельзя.

■ **Пример 2.** Частица с импульсом \mathbf{p} распадается на две более мелкие частицы, разлетающиеся под некоторым углом друг к другу (рис. 4.4, а). Зная импульс p_1 одной из образовавшихся частиц и угол φ ее отклонения от исходного направления, можно определить импульс p_2 второй частицы (рис. 4.4, б):

$$p_2 = \sqrt{p^2 + p_1^2 - 2pp_1 \cos \varphi} \quad (4.15)$$

и угол θ разлета частиц:

$$\sin \theta = \frac{p \sin \varphi}{p_2}. \quad (4.16)$$

Существует еще одна ситуация, при которой закон сохранения импульса можно, в определенном приближении, применять для незамкнутой системы. Это случай, когда начальное и конечное состояния отделены малым промежутком времени (выстрел, взрыв, удар), а внутренние силы значительно больше внешних. При этом импульс внешней силы (например, силы тяжести, реакции опоры или трения) не может заметно изменить импульс системы тел за рассматриваемый промежуток времени, и им можно пренебречь. Такая ситуация, например, имеет место в задаче о разрыве летящего снаряда, когда приравниваются импульс снаряда непосредственно перед разрывом и суммарный импульс осколков сразу же после разрыва: импульс внешних сил (тяжести, сопротивления воздуха) незначителен ввиду малости времени разрыва.

Центр масс. Теорема о движении центра масс. Импульс (4.6) системы материальных точек, как легко показать, равен импульсу одной материальной точки с массой, равной суммарной массе частиц и движущейся со скоростью *центра масс* системы. Радиус-вектор \mathbf{r}_c , задающий положение центра масс, выражается через радиусы-векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ материальных точек следующим образом:

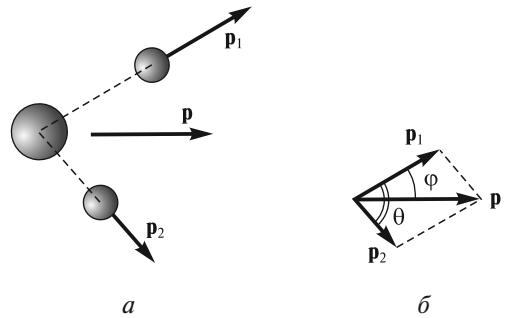


Рис. 4.4

$$\mathbf{r}_{\text{ц}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (4.17)$$

где M — масса системы.

Действительно, если продифференцировать выражение (4.17) по времени и умножить на M , то будем иметь

$$M \dot{\mathbf{r}}_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (4.18)$$

т. е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{\text{ц}}. \quad (4.19)$$

Подставляя (4.19) в (4.9), получим уравнение движения центра масс

$$M \frac{d\mathbf{v}_{\text{ц}}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (4.20)$$

Согласно этому уравнению, центр масс системы движется так, как двигалась бы материальная точка с массой M под действием приложенных к ней всех внешних сил. Этот результат обычно называют *теоремой о движении центра масс*. Существенно, что ускорение центра масс не зависит от того, к каким конкретно точкам системы приложены внешние силы.

■ **Пример 1.** Когда спортсмен прыгает с вышки в воду, то его движение в общем случае имеет весьма сложный характер. Вместе с тем, если пренебречь сопротивлением воздуха, то можно утверждать, что центр масс спортсмена движется по параболе — так же, как движется материальная точка под действием постоянной силы тяжести.

Из (4.20) следует, что если $\mathbf{F} = 0$, то и $\frac{d\mathbf{v}_{\text{ц}}}{dt} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{v}_{\text{ц}} = \text{const}$. Это означает, что центр масс замкнутой системы материальных точек либо покоится, либо движется прямолинейно и равномерно.

■ **Пример 2.** Тонкий стержень, опирающийся на абсолютно гладкую горизонтальную поверхность, падает под действием силы тяжести так, что его центр масс все время остается на одной и той же вертикали (рис. 4.5). В этом случае система замкнута в горизонтальном направлении и, поскольку трение отсутствует, то нет сил, которые смогли бы сместить центр масс стержня влево или вправо.

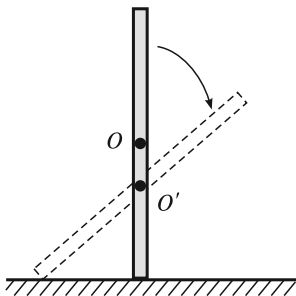


Рис. 4.5

Система центра масс. В тех случаях, когда требуется определить характер относительного движения частиц системы, удобно пользоваться так называемой *системой центра масс* (СЦМ). Это система отсчета, жестко связанная с центром масс и движущаяся поступательно по отношению к инерциальным системам отсчета. Особенностью СЦМ является то, что полный импульс

системы частиц в ней всегда равен нулю — это следует непосредственно из (4.19), поскольку в СЦМ $\mathbf{v}_{ц} = 0$. В случае замкнутой системы частиц СЦМ является инерциальной, в общем случае — неинерциальной.

■ **Пример.** Два одинаковых шара с массами m скреплены пружиной с жесткостью k и помещены на гладкую горизонтальную плоскость (рис. 4.6, вид сверху). Одному из шаров толчком сообщили скорость v_0 вдоль оси пружины. Спрашивается, каков будет характер движения каждого из шаров после толчка?

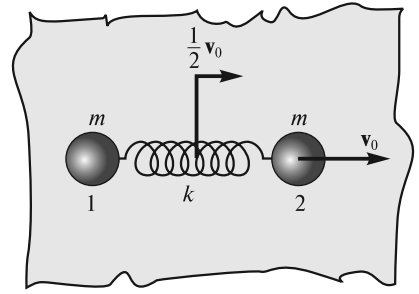


Рис. 4.6

Задача легко решается в СЦМ, которая в данном случае является инерциальной и скорость которой равна

$$v_{ц} = \frac{m \cdot 0 + mv_0}{m + m} = \frac{v_0}{2}. \quad (4.21)$$

Начальная скорость шара 1 в СЦМ после толчка равна $-\frac{v_0}{2}$, скорость шара 2 равна $\frac{v_0}{2}$. Скорости шаров будут изменяться по закону

$$v'_2 = \frac{v_0}{2} \cos \omega t; \quad (4.22)$$

$$v'_1 = -\frac{v_0}{2} \cos \omega t, \quad (4.23)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ — частота колебаний каждого из шаров.

Переходя в лабораторную систему отсчета, получим

$$v_2 = \frac{v_0}{2} + v'_2 = \frac{v_0}{2} (1 + \cos \omega t); \quad (4.24)$$

$$v_1 = \frac{v_0}{2} + v'_1 = \frac{v_0}{2} (1 - \cos \omega t). \quad (4.25)$$

Закон движения при необходимости можно найти интегрированием скоростей (4.24) и (4.25).

Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Масса тела при его движении может изменяться. Примером такого тела является ракета, схематично изображенная на рис. 4.7. Ракета состоит из полезной нагрузки П, баков с окислителем О и топливом Т, двигателя Д и корпуса К с элементами конструкции, скрепляющими все части. Наибольшее распространение получили ракеты, в которых используется жидкое топливо (горючее) и жидкий окислитель. Двигателей может быть несколько. В качестве горючего используются керосин, этиловый спирт, жидкий водород, гидразин, гептил и другие вещества, а в качестве окислителя — жидкий кислород, азотная кислота, перекись водорода (гидроксид), жидкий фтор и его соединения и др. Основная

цель комбинирования различных видов топлива и окислителя, кроме соображений, связанных с безопасностью, токсичностью и стоимостью, — получение максимального значения скорости u истечения газов сгоревшего топлива из сопла двигателя. Ниже будет показано, что величина u определяет вместе с другими параметрами ракеты ее конечную скорость.

Скорость u истечения газов определяется скоростью теплового движения молекул, которая, как известно из школьного курса молекулярной физики, $\sim \sqrt{\frac{T}{m}}$, где T — температура, m — масса молекул газа. Температура в камере сгорания двигателя составляет 4000—5000 К, поэтому скорость u не превышает 4—5 км/с. В случае, когда используется керосин, $u \approx 2,6$ км/с, а при сгорании водорода в кислороде $u \approx 4,2$ км/с. Использование жидкого фтора в комбинации с водородом и литием дает рекордное значение $u \approx 5$ км/с.

Однако эти скорости истечения, как будет показано ниже, недостаточны для сообщения полезной нагрузке хотя бы первой космической скорости. Поэтому К.Э. Циолковским была предложена идея составной (многоступенчатой) ракеты (рис. 4.8), или, по его терминологии, «ракетного поезда». Когда работают двигатели 1-й ступени, 2-я и 3-я рассматриваются как полезная нагрузка. После сгорания топлива в 1-й ступени ее двигатели, опустевшие баки и элементы конструкции отбрасываются и включаются двигатели 2-й ступени и т.д. Наиболее часто используются ракеты из трех ступеней.

Рассмотрим теперь движение ракеты. Масса ракеты на активном участке полета, когда работают двигатели, уменьшается за счет выброса газов, образовавшихся при сгорании топлива. Естественно, II закон Ньютона в форме (3.21), где масса считается постоянной, уже не может дать правильного описания движения ракеты. Однако, прежде чем найти соответствующий вид уравнения движения в общем случае, выявим основные особенности такого

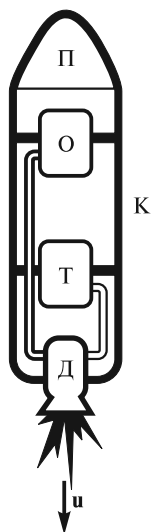


Рис. 4.7

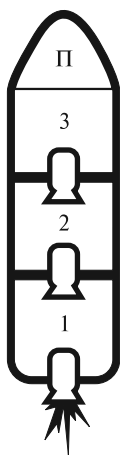


Рис. 4.8

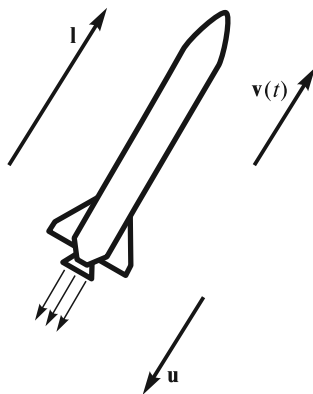


Рис. 4.9

движения. Для начала будем пренебрегать внешними силами. Ниже будет показано, что при движении ракеты эти силы играют роль только небольших поправок.

На рис. 4.9 схематично показана ракета, движущаяся в некоторой ИСО по прямой, задаваемой вектором \mathbf{l} . Пусть в момент времени t скорость ракеты равна $v(t)$, а ее масса в тот же момент времени равна $M(t)$. Предположим, что скорость u газов относительно ракеты не меняется со временем. Это предположение разумно, так как эта скорость в основном определяется температурой в камере сгорания топлива, которая почти постоянна. К моменту времени $t + dt$ масса ракеты уменьшится и станет равной $M + dM$ ($dM < 0$). Очевидно, величина $-dM$ равна массе газов, выброшенных из ракеты за время dt . Скорость ракеты увеличится на величину dv и станет равной $v + dv$. На основании закона сохранения импульса (баланса импульса вдоль прямой, по которой движется ракета), для моментов времени t и $t + dt$ имеем

$$Mv = (M + dM)(v + dv) + (-dM)(v - u). \quad (4.26)$$

Из (4.26), пренебрегая величиной второго порядка малости $dM dv$, получаем соотношение:

$$Mdv + udM = 0. \quad (4.27)$$

После деления на dt его можно записать в виде

$$M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt}. \quad (4.28)$$

Это и есть уравнение движения ракеты в отсутствие внешних сил. Назовем расходом топлива величину

$$\mu = -\frac{dM}{dt}. \quad (4.29)$$

Очевидно, что $\mu > 0$. Эта величина определяет массу сгоревшего топлива, которое выбрасывается из ракеты за единицу времени. Определим также *реактивную силу*, или *силу тяги ракеты*, как

$$\mathbf{F}_T = -\mu \mathbf{u}. \quad (4.30)$$

Из (4.30) ясно, что сила тяги направлена противоположно скорости истечения газов.

■ **Пример.** Стартовая масса американской ракеты «Сатурн-5», с помощью которой космонавты впервые высадились на Луну, была равна $M \approx 3 \cdot 10^6$ кг. Определим минимальный расход топлива, необходимый для того, чтобы ракета могла оторваться от стартового стола при скорости истечения $u \approx 2600$ м/с.

Очевидно, имеем равенство $Mg = \mu u$, из которого находим $\mu = \frac{Mg}{u} \approx \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 10}{2,6 \cdot 10^3} \approx 1,2 \cdot 10^4$ кг/с. Итак, при указанной скорости истечения каждую секунду необходимо сжигать свыше 10 т топлива, чтобы ракета могла только-только оторваться от поверхности Земли.

С учетом определения (4.30) уравнение (4.28) движения ракеты в векторном виде можно записать в виде:

$$M(t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_T. \quad (4.31)$$

До сих пор мы не рассматривали какие-либо внешние силы. Теперь допустим, что на ракету или, в более общем случае, на некоторое тело действуют внешние силы \mathbf{F} (силы тяготения, сопротивления воздуха и т.д.). Так как в этом случае рассматривать это тело как изолированную систему нельзя, то необходимо учитывать изменение его импульса под действием внешних сил. Кроме того, если рассматривать общий случай, то надо учесть возможность присоединения к телу некоторой дополнительной массы $dM_{\text{п}}$ ($dM_{\text{п}} > 0$) за время dt с относительной скоростью \mathbf{w} . Если обозначить выбрасываемую за время dt массу как $dM_{\text{в}}$, то, очевидно, для изменения dM массы тела имеем соотношение:

$$dM = dM_{\text{в}} + dM_{\text{п}}. \quad (4.32)$$

Определим расход массы аналогично (4.29):

$$\mu = -\frac{dM_{\text{в}}}{dt}, \quad (4.33)$$

а присоединение массы в единицу времени — как

$$\mu_{\text{п}} = \frac{dM_{\text{п}}}{dt}. \quad (4.34)$$

Очевидно, при таком определении обе величины μ и $\mu_{\text{п}}$ положительны.

Учтем также, что скорость \mathbf{u} может иметь произвольное направление и что изменение импульса под действием внешних сил равно $\mathbf{F}dt$. В результате вместо баланса импульсов (4.27) получим следующее соотношение:

$$M d\mathbf{v} = -\mathbf{u}dM_{\text{в}} + \mathbf{w}dM_{\text{п}} + \mathbf{F}dt. \quad (4.35)$$

Если обе части равенства (4.35) поделить на dt и учесть определения (4.30), (4.33) и (4.34), то получим уравнение движения тела с переменной массой, известное как *уравнение Мещерского*:

$$M(t) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_T + \mathbf{w}\mu_{\text{п}} + \mathbf{F}, \quad (4.36)$$

где $M(t) = M_0 - \int_0^t \mu dt + \int_0^t \mu_{\text{п}} dt$ — переменная масса тела в момент времени t (M_0 — начальная масса); $\mathbf{v}(t)$ — скорость тела.

Это уравнение можно использовать для расчета движения ракет, реактивных самолетов, платформ, на которые насыпается (или из которых высыпается) груз, и т.д. Однако в общем случае решить уравнение Мещерского довольно сложно. Для этого приходится использовать численные методы.

Формула Циолковского. Рассмотрим частный случай прямолинейного движения ракеты, когда внешними силами можно пренебречь. Перепишем (4.27) в виде

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dv}{u}. \quad (4.37)$$

Если считать, что $u = \text{const}$, масса ракеты за время ускорения изменяется от M_0 (начальная масса) до M_k (масса в конце ускорения), а скорость возрастает от v_0 (начальная скорость) до v_k (скорость в конце ускорения), то можно записать:

$$\int_{M_0}^{M_k} \frac{dM}{M} = -\int_{v_0}^{v_k} \frac{dv}{u}. \quad (4.38)$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\ln \frac{M_k}{M_0} = -\frac{v_k - v_0}{u}, \quad (4.39)$$

или в принятой (стандартной) форме записи

$$v_k = v_0 - u \ln \frac{M_k}{M_0}. \quad (4.40)$$

Соотношение (4.40) — это знаменитая *формула Циолковского*, которая позволяет оценить конечную скорость ракеты. Например, если $\frac{M_k}{M_0} \approx 0,3$, $u \approx 4$ км/с, $v_0 = 0$, то из (4.40) находим $v_k \approx 4$ км/с.

По техническим причинам существенно уменьшить отношение $\frac{M_k}{M_0}$ нельзя.

Например, у немецких ракет ФАУ-2 (середина 40-х годов прошлого века) это отношение было равно 0,3, а для уже упоминавшейся ракеты «Сатурн-5» (конец 60-х годов) — 0,27 (после окончания работы двигателей первой ступени). Увеличить скорость истечения газов u , как было рассмотрено выше, тоже проблематично: температура сгорания определяется видом топлива, и она не может быть очень большой. Поэтому ясно, что с помощью одноступенчатой ракеты нельзя запустить спутник. Как уже было сказано, выход был найден К.Э. Циолковским, предложившим «ракетные поезда» — по-современному, многоступенчатые ракеты.

Пусть ракета состоит из n ступеней. Обозначим для каждой ступени отношение масс как $\alpha_i = \frac{M_{ki}}{M_{0i}}$, где $1 \leq i \leq n$, M_{0i} — масса всех ступеней, начиная с i -й (включая топливо), M_{ki} — та же масса за вычетом массы топлива i -й ступени. Пусть u_i — скорость истечения газов в каждой ступени. Тогда формула (4.40) обобщается следующим образом:

$$v_k = v_0 - \sum_{i=1}^n u_i \ln \alpha_i. \quad (4.41)$$

Если все $\alpha_i = \alpha = \text{const}$ и $u_i = u = \text{const}$, то из (4.41) имеем

$$v_k = v_0 - nu \ln \alpha. \quad (4.42)$$

Из (4.42) ясно, что при уже рассмотренных параметрах $u \approx 4$ км/с, $\alpha \approx 0,3$, $v_0 = 0$ и при $n = 3$ (три ступени) возможен запуск искусственного спутника, так как в этом случае $v_k \approx 12$ км/с. Рассчитанная таким образом скорость называется *характеристической*. Реальная скорость будет меньше из-за действия сил тяготения, сопротивления воздуха и некоторых других причин.

Первый искусственный спутник Земли был запущен в СССР 4 октября 1957 г. с помощью ракеты «Спутник» (рис. 4.10, в разрезе). Конструктором этой ракеты был С. П. Королев, а двигателей к ней — В. П. Глушко. 12 апреля 1961 г. с помощью ракеты «Восток» тех же конструкторов впервые был запущен на орбиту космический корабль «Восток» (рис. 4.11) с космонавтом Ю. А. Гагариным. Масса корабля «Восток» составляла 4,73 т, длина (без антенн) — 4,4 м, максимальный диаметр — 2,43 м.

Рассмотрим теперь полет конкретной многоступенчатой ракеты с учетом потерь скорости из-за различных факторов. Термин «потери скорости» оправдан, поскольку все поправки к формуле Циолковского, возникающие при точном решении уравнения Мещерского (4.36), оказываются относительно малыми. Расчет проведем для уже упоминавшейся выше трехступенчатой ракеты «Сатурн-5». Стартовая масса этой ракеты была равна $M_{01} = 2,95 \cdot 10^6$ кг. Для пяти двигателей первой ступени использовались керосин и жидкий кислород. Общая масса топлива и окислителя первой ступени составляла $M_{\tau 1} = 2,15 \cdot 10^6$ кг. Скорость истечения продуктов горения изменялась с высотой от 2,6 до 3,0 км/с. Сила тяги всех пяти двигателей на старте составляла $F_{\tau} = 3,385 \cdot 10^7$ Н. Каждую секунду из ракеты выбрасывалось около 13 т продуктов горения. В отсутствие тяжести ракета получила бы ускорение $a_c \approx 11,47$ м/с², поэтому в поле тяготения результирующее движение вверх начиналось с очень маленьким ускорением $a = a_c - a_g = 11,47 - 9,80 = 1,67$ м/с². Однако в конце работы двигателей первой ступени из-за значительного уменьшения массы ускорение уже было равно $a_k = \frac{F_{\tau}}{M_{01} - M_{\tau 1}} - g \sin \gamma \approx 36,5$ м/с² (γ — угол наклона траектории к поверхности Земли), и космонавты испытывали примерно четырехкратную перегрузку.

Формула Циолковского для первой ступени [первый член суммы (4.41)] приводит к следующей оценке характеристической скорости:

$$v_{k1} = -u_1 \ln \frac{M_{01} - M_{\tau 1}}{M_{01}} = -2,8 \cdot \ln \frac{0,80}{2,95} \approx 3,65 \text{ км/с}, \quad (4.43)$$

где $u_1 = (2,6 + 3,0)/2 = 2,8$ км/с — средняя скорость истечения.

Во второй ступени использовалось 5 двигателей, работающих на жидком водороде и кислороде. Скорость истечения в этом случае была равна $u_2 = 4,17$ км/с, масса двух последних ступеней вместе с полезной нагрузкой $M_{02} = 6,59 \cdot 10^5$ кг, а масса топлива (горючего и окислителя) второй ступени $M_{\tau 2} = 4,44 \cdot 10^5$ кг. Таким образом, второй член суммы (4.41) дает следующий вклад:

$$v_{k2} = -u_2 \ln \frac{M_{02} - M_{\tau 2}}{M_{02}} = -4,17 \cdot \ln \frac{2,15}{6,59} \approx 4,67 \text{ км/с}. \quad (4.44)$$

Масса третьей ступени ракеты вместе с полезной нагрузкой была равна $M_{03} = 1,74 \cdot 10^5$ кг. Один двигатель этой ступени, работающий также на жидком водороде и кислороде, включался только на 1/3 возможного времени работы. Этого было достаточно для вывода полезной нагрузки на орбиту спутника. Оставшийся ресурс топлива использовался в дальнейшем для вывода космического корабля «Аполлон» на траекторию полета к Луне. Таким образом, из общего количества топлива $1,07 \cdot 10^5$ кг исполь-

зовалось только $M_{т3} = 3,6 \cdot 10^4$ кг. Поэтому вклад третьего слагаемого суммы (4.41) равен

$$v_{к3} = -u_2 \ln \frac{M_{03} - M_{т3}}{M_{03}} = -4,17 \cdot \ln \frac{1,38}{1,74} \approx 0,97 \text{ км/с.} \quad (4.45)$$

Итак, расчет по формуле Циолковского (4.41) приводит к следующей оценке скорости ракеты:

$$v_к = v_{к1} + v_{к2} + v_{к3} = 3,65 + 4,67 + 0,97 = 9,29 \text{ км/с.} \quad (4.46)$$

Так как космический корабль выводился на наклонную орбиту в восточном направлении, к величине (4.46) надо добавить проекцию скорости вращательного движения Земли, которая для места старта ракеты составляла $v_0 = 0,37$ км/с. Таким образом,

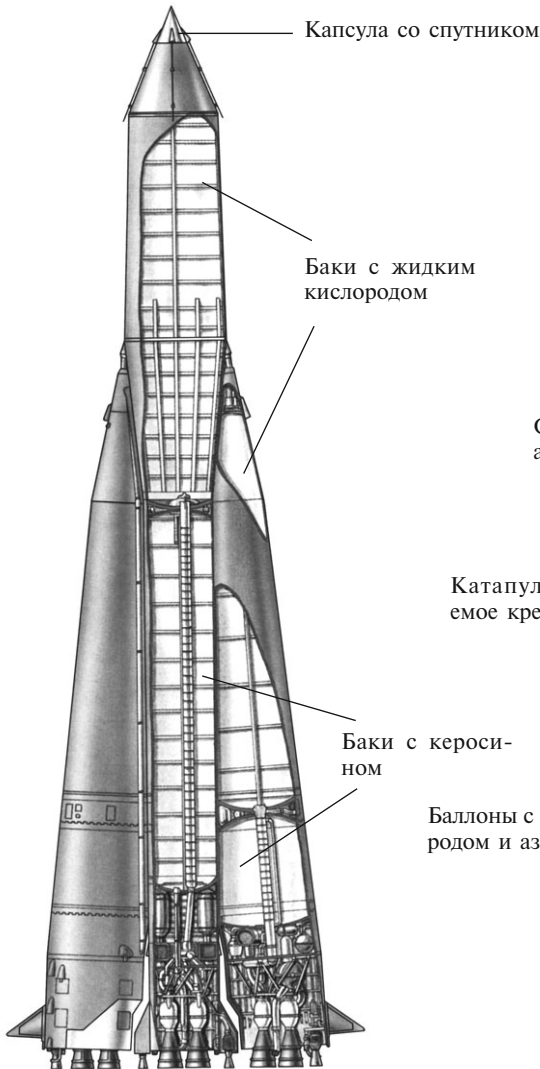


Рис. 4.10

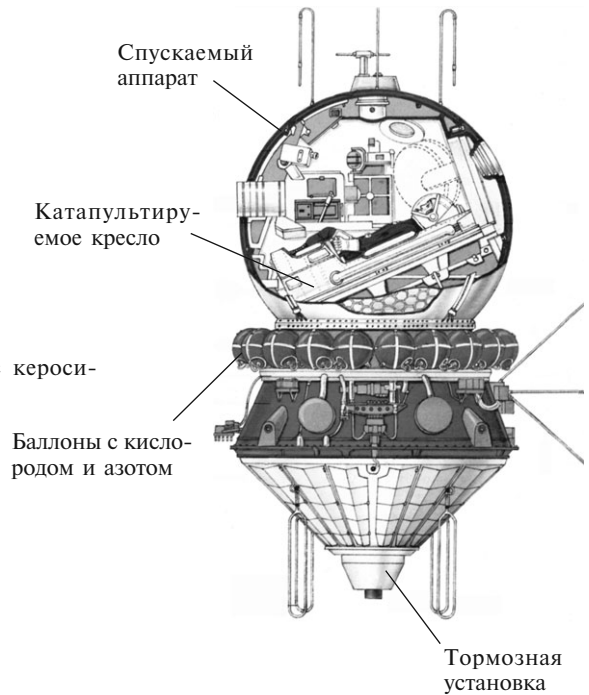


Рис. 4.11

полная расчетная характеристическая скорость оказывается равной 9,66 км/с. Если учесть потери скорости (их оценка составляет $v_n = 1,91$ км/с, см. ниже), то получим величину, равную 7,75 км/с, что в пределах погрешности оценок совпадает с фактически достигнутой скоростью космического корабля 7,79 км/с.

Потери скорости, о которых говорилось выше, возникают вследствие трех основных причин. Прежде всего необходимо учесть, что при старте с поверхности Земли на ракету действуют силы земного притяжения и аэродинамического сопротивления воздуха при движении в плотных слоях атмосферы. Кроме того, для реализации заданной наклонной траектории вектор силы тяги двигателей должен быть направлен не вдоль вектора скорости ракеты, а под небольшим углом к нему. Так как в этом случае для разгона ракеты используется не вся сила тяги, это приводит к дополнительным потерям скорости.

Потери скорости в гравитационном поле Земли обусловлены тем, что ракета все время свободно «падает», и за время $t_0 \approx 150$ с работы двигателей первой ступени она приобретает вертикальную компоненту скорости, направленную к Земле и равную

$$v_{r1} = -gt_0 \approx -9,8 \cdot 10^{-3} \cdot 150 \approx -1,5 \text{ км/с.} \quad (4.47)$$

Однако это только верхняя, завышенная оценка потерь скорости, пригодная в случае движения по вертикали. Дело в том, что ракета только стартует в вертикальном направлении, чтобы быстрее преодолеть плотные слои атмосферы, а затем движется по наклонной траектории. Траектория определяется из условия вывода на орбиту полезного груза с максимально возможной массой. Решение этой задачи оптимизации определяет закон изменения угла наклона γ траектории по отношению к поверхности Земли:

$$\gamma(t) = 90^\circ \cdot \exp(-t/\tau), \quad (4.48)$$

где $\tau \approx 170$ с.

Для такой траектории потери скорости из-за сил гравитации определяются как

$$v_{r1} = \int_0^{t_0} g \sin \gamma(t) dt. \quad (4.49)$$

Оценка интеграла (4.49) численными методами дает $v_{r1} \approx -1,22$ км/с, что по модулю меньше, чем оценка (4.47). Гравитационные потери для второй и третьей ступени ракеты, оцененные по формуле (4.49), дают соответственно $v_{r2} \approx -0,34$ км/с и $v_{r3} \approx -0,12$ км/с. Таким образом, суммарные потери из-за сил гравитации равны $v_r = v_{r1} + v_{r2} + v_{r3} \approx -1,68$ км/с, что совпадает со значением, опубликованным в литературе. Так как величина g уменьшается с высотой, то эти потери будут еще меньше.

Оценим теперь потери скорости из-за сил аэродинамического сопротивления воздуха. Сила сопротивления (см. лекцию 18) равна $F_c = C_x S \rho v^2 / 2$, где коэффициент $C_x \approx 0,5$, $S \approx 100 \text{ м}^2$ — площадь поперечного сечения ракеты. Скорость v ракеты все время увеличивается, а плотность воздуха ρ уменьшается. Поэтому сила F_c достигает максимального значения, а затем падает, так как на больших высотах плотность воздуха становится незначительной. В изотермической атмосфере плотность ρ убывает с высотой h по закону $\rho = \rho_0 \exp(-h/h_0)$, где $\rho_0 \approx 1,3 \text{ кг/м}^3$ — плотность у поверхности Земли, а $h_0 \approx 8 \text{ км}$ — так называемая приведенная высота изотермической атмосферы. Запишем уравнение Мещерского (4.36) для начального вертикального участка траектории:

$$M(t) \frac{dv}{dt} = F_T - M(t)g + F_c. \quad (4.50)$$

Поскольку сила сопротивления F_c мала, будем решать уравнение (4.50) методом последовательных приближений: сначала найдем решение без учета силы F_c , а затем,

используя это решение, оценим поправку к скорости, возникающую из-за сил аэродинамического сопротивления. Считая силу тяги F_T , расход топлива μ и ускорение свободного падения g постоянными величинами, находим из (4.50) ускорение ракеты:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F_T}{M(t)} - g, \quad (4.51)$$

где переменная масса $M(t)$ убывает со временем по закону:

$$M(t) = M_0 - \mu t. \quad (4.52)$$

Интегрирование ускорения (4.51) позволяет рассчитать скорость:

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = -\frac{F_T}{\mu} \ln \left(1 - \frac{\mu}{M_0} t \right) - gt. \quad (4.53)$$

Интеграл от скорости $v(t)$ определяет высоту подъема h :

$$h(t) = \int_0^t v(t) dt = -\frac{F_T M_0}{\mu^2} \left[\left(1 - \frac{\mu t}{M_0} \right) \ln \left(1 - \frac{\mu t}{M_0} \right) + \frac{\mu t}{M_0} \right] - \frac{gt^2}{2}. \quad (4.54)$$

С учетом (4.53) и (4.54) можно определить зависимость силы сопротивления от времени:

$$F_c(t) = \frac{1}{2} C_x S \rho_0 \exp \left(-\frac{h(t)}{h_0} \right) v^2(t). \quad (4.55)$$

Потери скорости из-за силы аэродинамического сопротивления можно приближенно оценить следующим образом:

$$v_c \approx \frac{F_c}{M_0 g} v_T, \quad (4.56)$$

где F_c — характерное значение силы сопротивления.

Оценим верхний предел v_c , подставляя в (4.56) максимальное значение F_c . Для этого определим экстремум выражения (4.55). Условие экстремума приводит к уравнению относительно θ :

$$\theta = -\beta \sqrt{\frac{\alpha}{1-\theta} - 1} - \alpha \ln(1-\theta), \quad (4.57)$$

где $\theta = \frac{\mu}{M_0} t$; $\alpha = \frac{F_T}{M_0 g}$; $\beta = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \frac{\mu}{M_0}$.

При значениях параметров $M_0 = 2,95 \cdot 10^6$ кг, $\mu = 1,3 \cdot 10^4$ кг/с, $F_T = 3,385 \cdot 10^7$ Н из уравнения (4.57) следует, что $\theta \approx 0,36$, а $t \approx 81$ с. За это время ракета достигает скорости $v(t) \approx 361$ м/с, поднимаясь на высоту $h(t) \approx 11$ км, где плотность воздуха равна $\rho(h) \approx 0,3$ кг/м³. Максимальная сила сопротивления на этой высоте $F_c \approx 0,036 M_0 g$, поэтому потери скорости составляют $v_c \approx 0,036 v_T \approx -0,06$ км/с. Видно, что это действительно малая величина, и следовательно, приближенный метод ее получения вполне оправдан. Расчетное значение $v_c \approx -0,06$ км/с в пределах погрешности вычислений совпадает с опубликованным в литературе значением $-0,05$ км/с. Что касается потерь скорости, связанных с отклонением вектора тяги от направления вектора скорости, то, согласно литературным данным, они составляют $v_{и} \approx -0,17$ км/с.

На рис. 4.12 и 4.13 приведены зависимости скорости и тангенциального ускорения ракеты при ее движении по траектории с углом наклона к поверхности Земли,

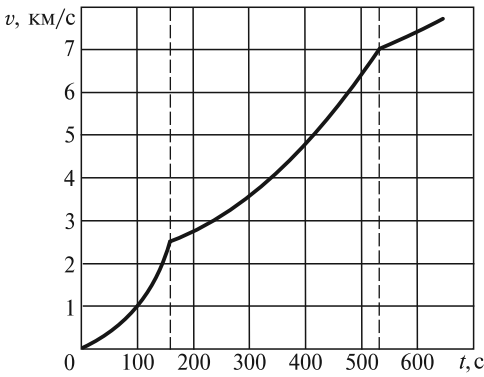


Рис. 4.12

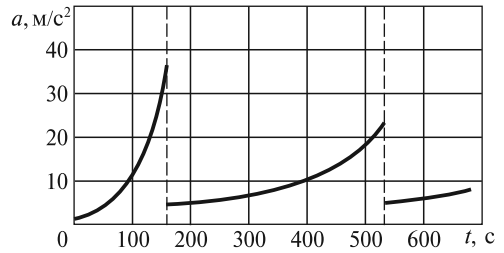


Рис. 4.13

определяемым формулой (4.48). Вертикальными штриховыми линиями обозначены моменты отделения первой и второй ступеней. Следует отметить, что высота орбиты составляет $h \approx 200$ км, а расстояние от места старта до точки вывода на орбиту равно $s \approx 2700$ км.

Кратко опишем дальнейший полет третьей ступени ракеты «Сатурн-5» вместе с космическим кораблем «Аполлон». В подходящий момент повторно включается двигатель 3-й ступени, который сообщает космическому кораблю «Аполлон» дополнительную характеристическую скорость $v_g \approx 3,04$ км/с и выводит его на траекторию полета к Луне (рис. 4.14). Траектория выбирается такой, чтобы всегда существовала возможность вернуться после облета Луны на Землю, практически не используя двигатели. Этот выбор страшит космонавтов в случае какой-либо аварии. Когда в 1970 г. во время полета космического корабля «Аполлон-13» на расстоянии $\sim 300\,000$ км от Земли произошел взрыв кислородного бака, который вывел из строя все двигатели служебного отсека, космонавты сумели облететь Луну и вернуться на Землю, используя для ориентации и коррекции траектории двигатели лунного отсека (см. ниже). Следует отметить, что космический корабль входит в сферу притяжения Луны со скоростью $v \approx 0,6$ км/с, в то время как Луна движется по своей орбите с большей скоростью $v_L \approx 1$ км/с. Поскольку корабль «догнать» Луну не может, траекторию выбирают такой, чтобы Луна приближалась к кораблю (см. рис. 4.14).

Космический корабль «Аполлон» состоял из трех отсеков: командного, возвращаемого на Землю, служебного, двигателя которого использовались как для вывода на орбиту вокруг Луны лунного корабля, так и для последующего возвращения с орбиты на траекторию движения к Земле, и, наконец, лунного, который, в свою очередь, состоял из посадочной и взлетной ступеней. Два первых отсека назывались основным блоком. Начальная масса космического корабля «Аполлон-11» составляла $43,9 \cdot 10^3$ кг. Так как корабль входил в сферу притяжения Луны с отличной от нуля скоростью, двигался он вокруг Луны по гиперболической траектории (см. лекцию 5), а его скорость вблизи поверхности Луны составляла примерно 2,5 км/с (вторая космическая скорость для Луны).

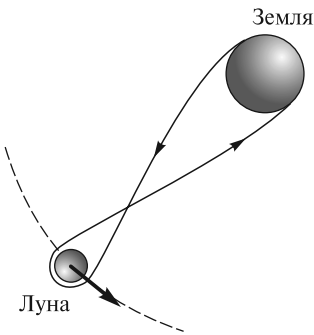


Рис. 4.14

В ближайшей к Луне точке траектории над ее обратной стороной с помощью двигателей служебного отсека скорость корабля относительно Луны уменьшалась до 1,7 км/с (первая космическая скорость для Луны) и корабль пере-

ходил на эллиптическую орбиту вокруг Луны. При этом сжигалось примерно $10,3 \cdot 10^3$ кг топлива. Затем корабль переходил на круговую орбиту с высотой около 111 км. С этой круговой орбиты отделившийся от основного блока лунный корабль двигался вначале по эллиптической орбите с минимальной высотой ≈ 15 км, а затем совершал мягкую посадку. Отметим, что впервые предложения о выводе космических кораблей на орбиты вокруг небесных тел перед посадкой на них были высказаны известным русским ученым Ю. В. Кондратюком в 1919 г.

Масса лунного корабля была равна примерно $15,1 \cdot 10^3$ кг (включая массу топлива посадочной ступени около $8,2 \cdot 10^3$ кг). При этих значениях массы и при скорости истечения около 3 км/с характеристическая скорость, определяемая по формуле Циолковского, получается равной примерно 2,4 км/с, что вполне достаточно как для погашения до нуля орбитальной скорости около 1,7 км/с, так и для различных маневров (например, выбора места прилунения и коррекции траектории).

Часть лунного корабля — взлетная ступень — имела массу около $4,7 \cdot 10^3$ кг (в том числе $\approx 2,4 \cdot 10^3$ кг топлива). При той же скорости истечения 3 км/с эти параметры обеспечивали характеристическую скорость около 2 км/с, что было достаточно для вывода взлетной ступени на орбиту вокруг Луны и последующих маневров. После стыковки с основным блоком, масса которого уже уменьшилась примерно до $18,6 \cdot 10^3$ кг (в том числе около $8,2 \cdot 10^3$ кг топлива), последний переводился на траекторию полета к Земле, для чего надо было увеличить скорость относительно Луны на ≈ 1 км/с. Для той же скорости истечения, которая использовалась выше, характеристическая скорость основного блока на этом этапе равнялась примерно 1,7 км/с, что вполне достаточно как для маневров, так и для выхода на траекторию полета к Земле. Вблизи Земли, когда скорость возрастала до ≈ 11 км/с, отделялся командный отсек с космонавтами (масса отсека около $5,5 \cdot 10^3$ кг) и тормозился в атмосфере Земли. Полет завершился приводнением в Тихом океане, причем на последнем этапе для погашения скорости использовались парашюты. Масса приводняемого аппарата составляла примерно 1/500 часть от стартовой массы ракеты.

Таким образом, формула Циолковского позволяет оценить важнейшие параметры полета даже в случае такой очень сложной экспедиции, как с Земли на Луну, и обратно.

Момент количества движения (импульса) материальной точки. Момент количества движения (момент импульса) частицы с массой m относительно точки O определяется как векторное произведение радиуса-вектора \mathbf{r} частицы на ее импульс \mathbf{p} (рис. 4.15):

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (4.58)$$

Вектор \mathbf{L} перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{r} и \mathbf{p} , а его направление зависит от взаимной ориентации \mathbf{r} и \mathbf{p} и определяется по правилу правого буравчика: если векторы \mathbf{r} и \mathbf{p} привести к одному началу и ручку буравчика поворачивать кратчайшим путем от \mathbf{r} к \mathbf{p} , то поступательное движение буравчика укажет направление вектора \mathbf{L} . Модуль вектора \mathbf{L} равен

$$L = rp \sin \alpha, \quad (4.59)$$

где α — угол между \mathbf{r} и \mathbf{p} .

Уравнение моментов. Для того чтобы выяснить, какая физическая величина ответственна за изменение вектора \mathbf{L} , продифференцируем (4.58) по времени:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (4.60)$$

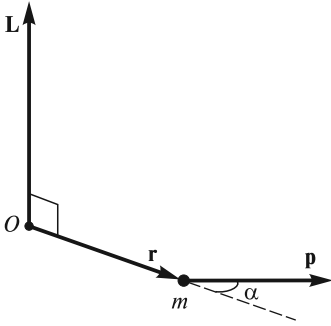


Рис. 4.15

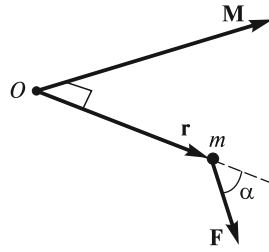


Рис. 4.16

Первое слагаемое в правой части (4.60) равно нулю, так как векторы $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ и \mathbf{p} параллельны. Учитывая, что, согласно II закону Ньютона, $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$, получаем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (4.61)$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ — момент силы \mathbf{F} относительно точки O (рис. 4.16). Направление и величина вектора \mathbf{M} определяются аналогично тому, как это делается для вектора \mathbf{L} .

Уравнение (4.61) представляет собой *уравнение моментов*: производная по времени от момента импульса \mathbf{L} частицы относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета равна моменту \mathbf{M} силы \mathbf{F} относительно той же точки O .

Если система неинерциальная, то момент \mathbf{M} , помимо момента сил взаимодействия данной материальной точки с другими телами, должен включать в себя также момент сил инерции.

■ **Пример 1.** Уравнение моментов (4.61) удобно использовать при исследовании вращательных движений. Рассмотрим, к примеру, как с его помощью можно получить уравнение колебаний математического маятника (рис. 4.17).

Положим, что маятник выведен из вертикального положения равновесия и предоставлен самому себе. Он будет качаться, вращаясь то в одну, то в другую сторону вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку O . Положение качающегося маятника можно задать с помощью угла α , образованного нитью OA с вертикалью. Момент импульса маятника относительно точки O и моменты действующих на него сил направлены вдоль оси качаний (ось Oz). В проекции на эту ось уравнение моментов будет иметь вид

$$\frac{dL_z}{dt} = (\mathbf{M}_{mg})_z + (\mathbf{M}_T)_z, \quad (4.62)$$

где $L_z = mvl$ — проекция момента импульса маятника ($l = OA$ — длина нити); $(\mathbf{M}_{mg})_z = -mgl \sin \alpha$ — проекция момента силы тяжести; $(\mathbf{M}_T)_z = 0$.

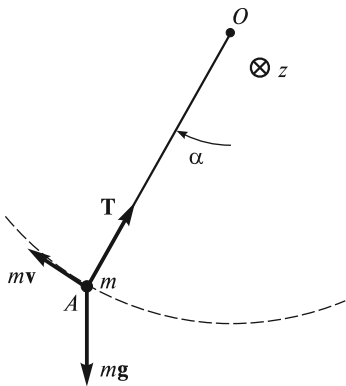


Рис. 4.17

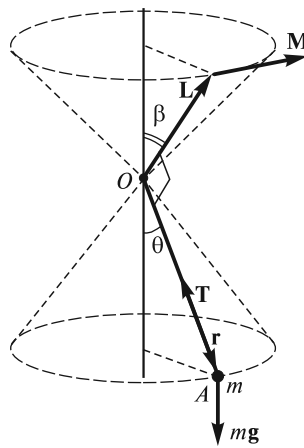


Рис. 4.18

Учитывая, что $v = l\dot{\alpha}$, окончательно получаем уравнение:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0. \quad (4.63)$$

Проинтегрировав это уравнение, т. е. определив зависимость угла α от времени, можно найти закон движения маятника. В общем случае решение уравнения (4.63) сложно и требует применения специальных эллиптических функций. Если колебания малы, то можно положить приблизительно $\sin \alpha \approx \alpha$, и тогда (4.63) принимает вид

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0. \quad (4.64)$$

Это известное уравнение гармонических колебаний, детальный анализ которого будет дан в последующих лекциях.

■ **Пример 2.** Небольшое тело массой m , подвешенное на легкой невесомой нити OA , вращается вокруг вертикальной оси так, что угол θ между осью и нитью остается постоянным (рис. 4.18). При этом вектор \mathbf{L} момента импульса тела относительно точки O «движется» по конической поверхности с углом полураствора $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$. Изменение вектора \mathbf{L} по направлению обусловлено наличием момента силы тяжести $\mathbf{r} \times m\mathbf{g}$ относительно точки O ; момент силы \mathbf{T} натяжения нити относительно точки O равен нулю.

Интегрируя (4.61), можно определить приращение момента импульса частицы за конечный промежуток времени $\Delta t = t - t_0$:

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{M} dt. \quad (4.65)$$

Величину, стоящую в правой части, называют *импульсом момента силы* за промежуток времени Δt . Таким образом, приращение момента импульса мате-

риальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу момента силы за это же время.

Из уравнения моментов (4.61) следует, что если $\mathbf{M} = 0$, то $\mathbf{L} = \text{const}$. Таким образом, *если относительно некоторой точки O момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю, то момент импульса частицы относительно этой точки остается неизменным.*

■ **Пример 3.** Шайба A , скользящая по гладкой горизонтальной поверхности, испытывает абсолютно упругое соударение с гладкой вертикальной стенкой (рис. 4.19, вид сверху). Изменение $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ импульса шайбы вызвано силой реакции \mathbf{R} со стороны стенки, действующей во время удара. Момент этой силы относительно любой точки, лежащей на линии OC , равен нулю, а значит относительно любой из этих точек момент импульса шайбы до удара будет равен моменту импульса после удара.

Особый интерес в связи с сохранением \mathbf{L} при $\mathbf{M} = 0$ представляет движение материальной точки в *центральной* силовом поле. Центральным называется такое силовое поле, в котором линия действия силы проходит через одну и ту же точку (силовой центр, или полюс), а величина силы зависит только от расстояния рассматриваемой частицы до полюса. Хорошо известными примерами таких полей являются гравитационное поле однородного массивного тела шарообразной формы и электростатическое поле точечного заряда. Очевидно, что момент импульса частицы, движущейся в центральном силовом поле, остается неизменным относительно полюса, поскольку момент силы, действующей на частицу, относительно полюса равен нулю. Отсюда, в частности, следует, что траектория частицы в поле центральных сил есть плоская кривая.

Введем вектор

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dt, \quad (4.66)$$

направленный перпендикулярно плоскости, в которой лежит траектория частицы (рис. 4.20). Величина этого вектора, очевидно, равна площади, «заметаемой» радиусом-вектором частицы за время dt . В этом случае получаем

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = 2m \frac{d\mathbf{S}}{dt}. \quad (4.67)$$

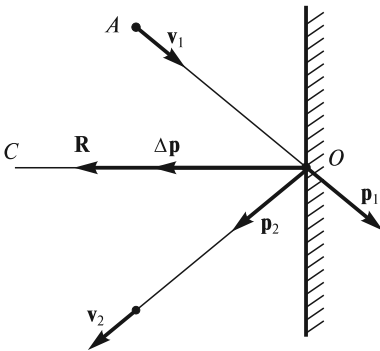


Рис. 4.19

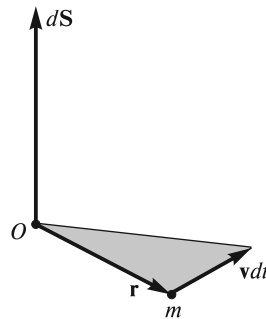


Рис. 4.20

Величина $\frac{dS}{dt}$ — секторная скорость, о которой уже говорилось в лекции 2. Она определяет площадь, «заметаемую» радиусом-вектором частицы в единицу времени. Если $\mathbf{L} = \text{const}$ (центральное силовое поле), то и $\frac{dS}{dt} = \text{const}$. Это означает, что радиус-вектор частицы, движущейся в центральном силовом поле, за равные времена «заметает» равные по величине площади. Применительно к планетам, движущимся в гравитационном поле Солнца, это утверждение составляет содержание второго закона Кеплера.

Момент импульса и момент силы относительно оси. Моментом импульса относительно оси называют проекцию на эту ось вектора \mathbf{L} , определенного относительно произвольной точки O , принадлежащей данной оси. Аналогично вводят понятие момента силы относительно оси. Можно показать, что момент импульса и момент силы относительно оси не зависят от выбора точки O на этой оси. Действительно, скорость \mathbf{v} точки в каждый момент времени можно разложить на три взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 4.21, а), одна из которых ($v_z \mathbf{k}$) направлена вдоль рассматриваемой оси (в данном случае оси Oz), другая ($v_n \mathbf{n}$) — вдоль радиуса окружности, плоскость которой перпендикулярна оси Oz , а третья ($v_\tau \bar{\tau}$) — по касательной к этой окружности:

$$\mathbf{v} = v_z \mathbf{k} + v_n \mathbf{n} + v_\tau \bar{\tau}. \quad (4.68)$$

Для момента импульса \mathbf{L} материальной точки относительно начала O получим

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times mv_z \mathbf{k} + \mathbf{r} \times mv_n \mathbf{n} + \mathbf{r} \times mv_\tau \bar{\tau}. \quad (4.69)$$

Первая и вторая составляющие \mathbf{L} в выражении (4.69) перпендикулярны оси Oz , поэтому проекция \mathbf{L} на ось Oz будет определяться только третьей составляющей:

$$L_z = (\mathbf{r} \times mv_\tau \bar{\tau})_z = rmv_\tau \sin \theta = \rho mv_\tau, \quad (4.70)$$

где $\rho = r \sin \theta$ — кратчайшее расстояние массы m до оси Oz .

Аналогично $M_z = \rho F_\tau$, где F_τ — проекция силы, действующей на данную частицу, на направление касательной к рассмотренной выше окружности (рис. 4.21, б). Записав уравнение (4.61) в проекциях на ось Oz , получим

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (4.71)$$

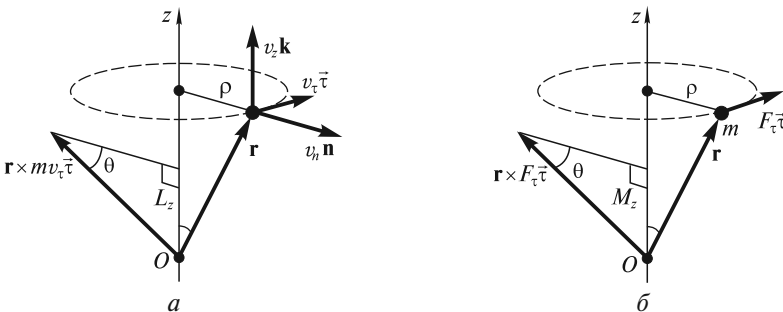


Рис. 4.21

т. е. производная по времени момента импульса частицы относительно оси Oz равна моменту силы относительно этой оси. Если $M_z = 0$, то $L_z = \text{const}$. При этом сам вектор \mathbf{L} может изменяться. Так, в случае, изображенном на рис. 4.18, проекция момента силы тяжести mg на вертикальную ось равна нулю, поэтому проекция вектора \mathbf{L} частицы на эту ось сохраняется.

Момент импульса системы материальных точек. Момент импульса системы определяется как векторная сумма моментов импульсов составляющих ее частиц:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \dots + \mathbf{L}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i, \quad (4.72)$$

где все \mathbf{L}_i определены относительно одной и той же точки O заданной системы отсчета.

Продифференцировав (4.72) по времени и учтя (4.61), получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i, \quad (4.73)$$

где \mathcal{M}_i — суммарный момент всех сил, действующих на i -ю частицу, относительно рассматриваемой точки O .

Далее, по аналогии с выводом закона изменения импульса системы частиц, представим \mathcal{M}_i в виде суммы моментов внешних \mathbf{M}_i и внутренних $\bar{\mu}_i$ сил:

$$\mathcal{M}_i = \mathbf{M}_i + \bar{\mu}_i = \mathbf{M}_i + \sum_{k \neq i} \bar{\mu}_{ki}. \quad (4.74)$$

Здесь момент $\sum_{k \neq i} \bar{\mu}_{ki}$ — результат действия на i -ю частицу всех других частиц, входящих в данную систему. Подставляя (4.74) в (4.73), будем иметь

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i} \bar{\mu}_{ki}. \quad (4.75)$$

По III закону Ньютона внутренние силы взаимодействия между частицами системы попарно равны друг другу по величине и направлены вдоль одной и той же прямой в противоположные стороны, т. е. имеют одно и то же плечо ρ относительно любой точки O (рис. 4.22). В соответствии с этим двойная сумма в (4.75), представляющая собой суммарный момент всех внутренних сил, равна нулю. Таким образом, приходим к выводу, что момент импульса системы материальных точек может измениться только под действием момента внешних сил:

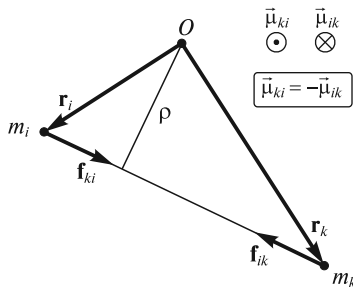


Рис. 4.22

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \mathbf{M}. \quad (4.76)$$

Здесь \mathbf{M} — суммарный момент всех внешних сил, действующих на частицы системы. Еще раз подчеркнем, что и \mathbf{L} , и \mathbf{M} определены относительно одной и той же точки O заданной системы отсчета.

Заметим, что уравнение (4.76) справедливо не только в инерциальной, но и в неинерциальной системе отсчета. В последнем случае в выражение для \mathbf{M} необходимо включить момент сил инерции (см. лекцию 6).

Закон сохранения момента импульса. Если относительно некоторой точки заданной системы отсчета суммарный момент внешних сил $\mathbf{M} = 0$, то $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$

и $\mathbf{L} = \text{const}$, т.е. момент импульса системы частиц относительно этой точки со временем не меняется. Если система частиц изолирована, то ее суммарный момент импульса сохраняется относительно любой точки рассматриваемой ИСО.

З а м е ч а н и е 1. Если система замкнута, т.е. все внешние силы уравновешены, то это еще не значит, что будет $\mathbf{L} = \text{const}$, так как в этом случае может быть $\mathbf{M} \neq 0$ (например, в случае действия пары сил, не лежащих на одной прямой, рис. 4.23).

З а м е ч а н и е 2. Часто встречаются случаи, когда система частиц не замкнута (ее импульс изменяется со временем), и тем не менее существуют точки, относительно которых $\mathbf{M} = 0$, и, следовательно, $\mathbf{L} = \text{const}$. Примером может служить система, находящаяся в поле центральных сил, о которых говорилось выше. В этом случае момент импульса системы относительно силового центра (полюса) остается неизменным.

З а м е ч а н и е 3. У незамкнутых систем может сохраняться не сам вектор \mathbf{L} , а его проекция на некоторую неподвижную ось Oz . Так будет в том случае, когда проекция вектора \mathbf{M} на эту ось равна нулю. Действительно, записывая уравнение (4.76) в проекциях на ось Oz , получим

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (4.77)$$

Отсюда и следует, что если $M_z = 0$, то $L_z = \text{const}$.

■ **Пример 1.** Система, включающая в себя планеты Солнечной системы, является незамкнутой. Ее импульс изменяется под действием сил тяготения со стороны Солнца. Вместе с тем суммарный момент импульса системы планет относительно центра Солнца остается неизменным, так как гравитационное поле, создаваемое Солнцем, — центральное. Интересно отметить, что орбиты всех планет Солнечной системы лежат приблизительно в одной плоскости, так что их орбитальные моменты импульса складываются алгебраически. При этом все 9 планет движутся вокруг Солнца в одном и том же направлении, в связи с чем суммарный момент импульса планет Солнечной системы отличен от нуля. Момент импульса самого Солнца направлен в ту же сторону, а его величина составляет около 2% от момента импульса планет.

■ **Пример 2.** Два массивных шара массой m каждый насажены на легкий горизонтальный стержень, который может вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 4.24). Шары могут скользить вдоль стержня без трения. Вначале стержень раскручивают с угловой скоростью ω_1 , шары удерживают вблизи оси с помощью нитей (расстояние r_1). Затем нити пережигают, и шары разлетаются к

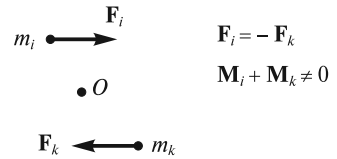


Рис. 4.23

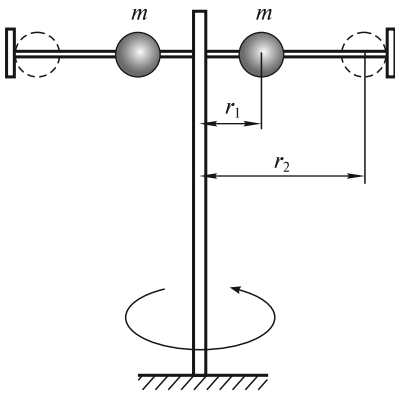


Рис. 4.24

концам стержня (расстояние r_2). Угловую скорость ω_2 можно найти из условия постоянства момента импульса (считая, что масса всей установки сосредоточена в шарах):

$$2mr_1(\omega_1 r_1) = 2mr_2(\omega_2 r_2); \quad (4.78)$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (4.79)$$

Так как $r_2 > r_1$, то угловая скорость вращения, очевидно, уменьшается. Отмеченный эффект изменения угловой скорости при изменении распределения массы относительно оси вращения имеет общий характер и хорошо известен; его, например, широко используют в своих выступлениях фигуристы и гимнасты.

широко известен; его, например, широко используют в своих выступлениях фигуристы и гимнасты.

ЛЕКЦИЯ 5

Данная лекция посвящена закону сохранения механической энергии. В связи с этим нам необходимо ввести и обсудить важнейшее в механике понятие *работы силы*.

Работа силы. Допустим, что частица массой m под действием силы \mathbf{F} совершает перемещение по некоторой траектории 1—2 (рис. 5.1). Действие силы на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$ характеризуют элементарной работой δA , которая определяется как скалярное произведение силы \mathbf{F} на перемещение $d\mathbf{r}$:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = F dr \cos \alpha. \quad (5.1)$$

Суммируя (5.1) по всем элементарным участкам при перемещении от точки 1 к точке 2, найдем работу силы на всем пути:

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (5.2)$$

Отметим, что эта величина может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В общем случае работа A_{12} зависит не только от характеристик сил, но и от вида траектории, по которой движется частица. Именно поэтому в выражении (5.1) для обозначения элементарной работы использован символ δA , а не дифференциал dA .

Единицей работы в СИ является джоуль. Джоуль равен работе, совершаемой силой 1 Н на пути в 1 м при условии, что направления силы и перемещения совпадают.

Очевидным свойством работы является ее аддитивность. Если $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$, то и $A = A_1 + A_2 + \dots$, где $A_1 = \int \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}$, $A_2 = \int \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}$, и т. д.

Мощность. Для того чтобы охарактеризовать «скорость», с которой совершается работа, вводят понятие *мощности*. Мощность — это работа, совершаемая силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{v}. \quad (5.3)$$

Отсюда видно, что мощность, как и работа, — величина скалярная.

Зная мощность некоторой силы, можно найти и работу, которую совершает эта сила за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$:

$$A = \int_t^{t+\Delta t} N dt. \quad (5.4)$$

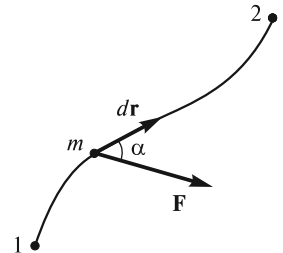


Рис. 5.1

Единицей мощности в СИ является ватт: 1 Вт = 1 Дж/с.

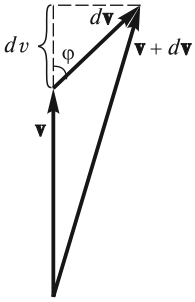


Рис. 5.2

Кинетическая энергия и ее изменение. Преобразуем выражение (5.1) для элементарной работы следующим образом:

$$\delta A = \mathbf{F} d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = m \mathbf{v} d\mathbf{v} = m \frac{d(v^2)}{2} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (5.5)$$

В преобразованиях (5.5) $d\mathbf{v}$ обозначает элементарное приращение вектора \mathbf{v} , которое может не совпадать по направлению с вектором \mathbf{v} (рис. 5.2). По определению скалярного произведения

$$\mathbf{v} d\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cdot |d\mathbf{v}| \cos \varphi = v dv, \quad (5.6)$$

где dv — элементарное приращение длины вектора \mathbf{v} . Отсюда получается, что

$$\mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{d(v^2)}{2}. \quad (5.7)$$

Такое соотношение справедливо не только для вектора \mathbf{v} , но и для любого другого вектора.

Из (5.5) следует, что работа силы \mathbf{F} (под \mathbf{F} можно понимать результирующую всех сил, действующих на рассматриваемую частицу) идет на приращение некоторой величины, которую называют *кинетической энергией*:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (5.8)$$

Полная работа на участке 1—2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1. \quad (5.9)$$

Иными словами, *приращение кинетической энергии частицы при некотором перемещении равно суммарной работе всех сил, действующих на нее при этом перемещении* (теорема об изменении кинетической энергии).

Консервативные и неконсервативные силы. Все силы, действующие на частицу, можно классифицировать по следующему важнейшему признаку: зависит или не зависит работа силы от формы пути, по которому движется частица при перемещении из точки 1 в точку 2. Если работа силы определяется только положением этих точек и не зависит от формы пути, то сила называется *консервативной*, если же зависит, — то *неконсервативной*.

Примерами неконсервативных сил являются: сила тяги ракеты; сила, действующая на заряженную частицу в вихревом электрическом поле; сила трения, направленная, как известно, против относительной скорости тела. Если сила трения не зависит от скорости (сухое трение), то ее работа, очевидно, прямо пропорциональна длине l траектории, по которой движется частица:

$$A_{\text{тр}} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{тр}} d\mathbf{r} = -F_{\text{тр}} l < 0. \quad (5.10)$$

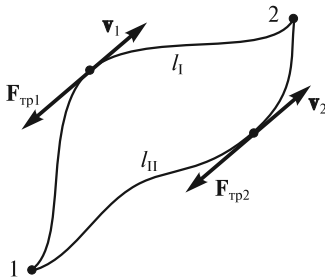


Рис. 5.3

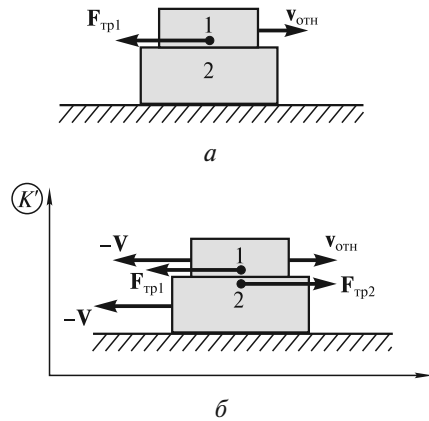


Рис. 5.4

Таким образом, работа силы сухого трения при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 (рис. 5.3) по разным путям будет различна. Очевидно, что $|A_{\text{трI}}| > |A_{\text{трII}}|$, так как $l_I > l_{II}$.

Заметим, что силу трения называют еще *диссипативной силой*. В зависимости от выбора системы отсчета работа такой силы может быть как положительной, так и отрицательной. Однако суммарная работа всех внутренних диссипативных сил, действующих на тела системы, всегда отрицательна: $A_d < 0$. Это неравенство является отличительной особенностью диссипативных сил.

В качестве примера рассмотрим тело 1, которое скользит по поверхности неподвижного тела 2 со скоростью $v_{\text{отн}}$ (рис. 5.4, а). Сила трения $F_{\text{тр1}}$ направлена против скорости $v_{\text{отн}}$ и, таким образом, совершает отрицательную работу. В системе отсчета K' , движущейся со скоростью V в направлении $v_{\text{отн}}$, тело 1 будет иметь скорость $v_{\text{отн}} - V$, а тело 2 — скорость $-V$ (рис. 5.4, б). Если $V > v_{\text{отн}}$, то работа δA_1 силы $F_{\text{тр1}}$ за время dt в этой системе отсчета окажется положительной: $\delta A_1 = F_{\text{тр1}}(V - v_{\text{отн}})dt > 0$. Работа δA_2 силы $F_{\text{тр2}}$, действующей на тело 2, будет отрицательной: $\delta A_2 = -F_{\text{тр2}}Vdt < 0$. Полная работа сил трения $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 = -F_{\text{тр1}}v_{\text{отн}}dt$, т.е. всегда отрицательна, независимо от скорости v выбранной системы отсчета.

Рассмотрим теперь примеры консервативных сил.

Работа упругой силы. В случае обычной пружины сила упругости при небольших растяжениях и сжатиях может быть представлена в виде

$$F = -kx \quad (5.11)$$

(закон Гука). Здесь k — коэффициент упругости, x — изменение длины пружины, а знак минус означает, что сила всегда направлена в сторону, противоположную смещению из положения равновесия, в котором пружина не деформирована.

Допустим, что рассматриваемое тело T находится на горизонтальной поверхности, прикреплено к свободному концу пружины Π и может совершать движение вдоль некоторой прямой (рис. 5.5). Положение тела будем характеризовать с помощью координаты x , соответствующей изменению длины пружины. При этом

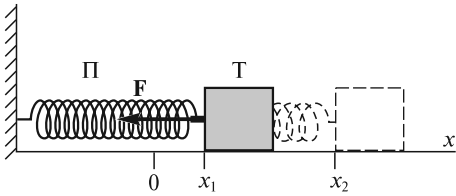


Рис. 5.5

начало координат, точка $x = 0$, соответствует положению правого конца недеформированной пружины. Если x_1 — начальное, а x_2 — конечное удлинение пружины, то для работы упругой силы будем иметь

$$A_{12} = \int_1^2 (-kx) dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (5.12)$$

Этот результат останется неизменным и в том случае, если тело из начального положения в конечное будет перемещаться по произвольной искривленной траектории.

Работа гравитационной силы. Пусть частица массой m_2 перемещается по некоторой траектории $1 \rightarrow 2$ в гравитационном поле, создаваемом неподвижной частицей массой m_1 (рис. 5.6). В соответствии с законом тяготения,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (5.13)$$

где G — гравитационная постоянная.

Выполняя интегрирование, для работы гравитационной силы получим

$$A_{12} = \int_1^2 \left(-Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) d\mathbf{r} = -Gm_1m_2 \int_1^2 \frac{d\mathbf{r}}{r^2} = \left(-G \frac{m_1m_2}{r_1} \right) - \left(-G \frac{m_1m_2}{r_2} \right). \quad (5.14)$$

Здесь учтено, что, по аналогии с (5.7), $\mathbf{r}d\mathbf{r} = r dr$, где dr — проекция $d\mathbf{r}$ на направление радиуса-вектора \mathbf{r} (изменение величины вектора \mathbf{r}).

В случае с телом, падающим на землю с небольшой высоты h (рис. 5.7), в (5.14) следует положить:

$$r_1 = R_3 + h, \quad r_2 = R_3, \quad m_1 = M_3, \quad m_2 = m,$$

где R_3 — радиус Земли; M_3 — масса Земли; m — масса рассматриваемого тела.

Работа, совершаемая при этом силой тяжести, будет равна

$$\begin{aligned} A_{12} &= \left(-G \frac{M_3m}{R_3 + h} \right) - \left(-G \frac{M_3m}{R_3} \right) = -GM_3m \left(\frac{1}{R_3 + h} - \frac{1}{R_3} \right) = \\ &= -GM_3m \frac{R_3 - (R_3 + h)}{R_3(R_3 + h)} \approx GM_3m \frac{h}{R_3^2}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

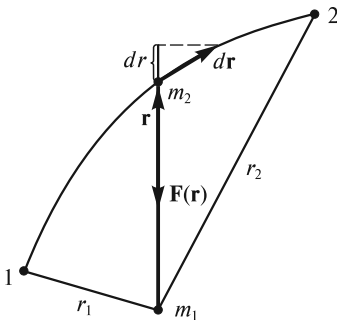


Рис. 5.6

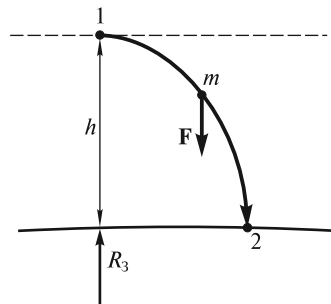


Рис. 5.7

где учтено, что $h \ll R_3$. Используя обозначение $g = GM_3/R_3^2$ (ускорение свободного падения у поверхности Земли), получим:

$$A_{12} = mgh. \quad (5.16)$$

При подъеме тела вверх на высоту h работа силы тяжести, естественно, будет отрицательной.

При использовании формулы (5.16) необходимо помнить о ее приближенном характере, связанном с тем, что ускорение свободного падения уменьшается с высотой h по закону

$$g(h) = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2} \quad (5.17)$$

(см. лекцию 4). Во многих практически важных случаях этим уменьшением пренебрегают. Снижению g на 1 % соответствует $h \approx 32$ км над поверхностью Земли.

Работа кулоновской силы. Пусть частица с зарядом q_2 движется в электрическом поле, создаваемом неподвижной частицей с зарядом q_1 (рис. 5.8). Силу кулоновского взаимодействия зарядов представим в виде:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (5.18)$$

В зависимости от знака зарядов эта сила может быть как силой отталкивания (этот случай изображен на рис. 5.8), так и силой притяжения. По аналогии с предыдущим, работа кулоновской силы при перемещении 1 \rightarrow 2 оказывается равной

$$A_{12} = \int_1^2 \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (5.19)$$

Таким образом, во всех рассмотренных случаях при движении под действием упругой, гравитационной и кулоновской сил работа, определяемая по формулам (5.12), (5.14), (5.16) и (5.19), не зависит от формы пути при перемещении между произвольными фиксированными точками 1 и 2. Это означает, что все эти силы действительно являются консервативными.

Отметим, что существуют два эквивалентных определения консервативных сил:

1) сила является консервативной, если ее работа не зависит от формы пути при перемещении частицы из одной точки пространства в другую и определяется только положением этих точек;

2) сила является консервативной, если ее работа на любом замкнутом пути равна нулю.

Для того чтобы убедиться в эквивалентности обоих определений, разобьем произвольный замкнутый контур (рис. 5.9) на две части: I и II. Работу на замкнутом пути можно представить в виде:

$$A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II}. \quad (5.20)$$

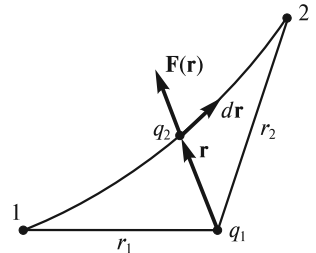


Рис. 5.8

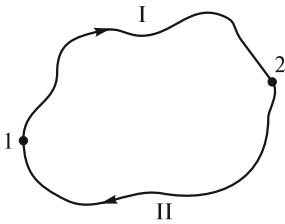


Рис. 5.9

Очевидно, что

$$(A_{21})_{II} = -(A_{12})_{II}, \quad (5.21)$$

поскольку при изменении направления движения направление перемещения $d\mathbf{r}$ меняется на противоположное. Таким образом, для работы A на замкнутом пути получаем выражение

$$A = (A_{12})_I - (A_{12})_{II}. \quad (5.22)$$

Если $(A_{12})_I = (A_{12})_{II}$ (справедливо первое определение консервативности), то $A = 0$, т.е. справедливо и второе определение. И наоборот, если $A = 0$ (справедливо второе определение консервативности), то из (5.22) следует, что $(A_{12})_I = (A_{12})_{II}$, т.е. справедливо и первое.

З а м е ч а н и е 1. При интегрировании по замкнутому контуру в математике используется символ \oint . Таким образом, для консервативных сил можно записать:

$$\oint dA = 0 \quad (5.23)$$

(интеграл от элементарной работы по замкнутому пути равен нулю). Здесь символ дифференциала dA (а не δA) использован потому, что работа консервативной силы не зависит от формы пути. Например, элементарное перемещение $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ можно осуществить различными способами, произвольно выбирая последовательность элементарных перемещений вдоль координатных осей, но при всех таких способах работа dA консервативной силы на перемещении $d\mathbf{r}$ будет оставаться неизменной.

З а м е ч а н и е 2. В физике известны силы, действующие на материальную точку в направлении, перпендикулярном ее скорости. Это, во-первых, сила, действующая на частицу в магнитном поле (магнитная составляющая силы Лоренца), и, во-вторых, кориолисова сила инерции, действующая в неинерциальных вращающихся системах отсчета (см. лекцию 6). Работа этих сил при перемещении по замкнутому контуру равна нулю. Вместе с тем, эти силы не являются консервативными, поскольку, в силу перпендикулярности \mathbf{F} и \mathbf{v} , их работа равна нулю на любом перемещении, независимо от положения начальной и конечной точек.

Поле сил. Это область пространства, в каждой точке которой на помещенную туда частицу действует сила. Возвращаясь к обсуждавшимся выше примерам, можно было бы сказать, что рассматриваемая частица находится в гравитационном (частный случай — однородное поле тяжести) или кулоновском поле.

Примеры с гравитационной (см. рис. 5.6) и кулоновской (см. рис. 5.8) силами можно обобщить, введя понятие центральных сил (см. лекцию 4). В поле центральных сил величина силы, действующей на частицу, зависит только от расстояния между частицей (точка M на рис. 5.10) и силовым центром (точка O на том же рисунке). Сила направлена вдоль прямой, на которой расположены частица и силовой центр:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5.24)$$

Оказывается, что все центральные силы, независимо от вида функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ в (5.24), являются консервативными. Доказать это утверждение можно так же, как это было сделано для гравитационной и кулоновской сил.

Отметим, что во всех рассмотренных выше примерах предполагалось, что ни величина, ни направление сил, действующих на частицу в данной точке поля, не зависят от времени, т. е. поле этих сил стационарно.

Стационарность поля является необходимым условием консервативности действующих в нем сил. Существуют и нестационарные поля, например, гравитационное поле движущихся планет или электрическое поле конденсатора, к обкладкам которого приложено переменное напряжение. В таких случаях работа сил по замкнутому контуру, вообще говоря, может быть отличной от нуля.

Потенциальная энергия частицы в поле. То обстоятельство, что работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положений частицы, позволяет ввести еще одну очень важную величину — *потенциальную энергию* $U(x, y, z)$ частицы в поле, которая является скалярной функцией ее координат. Изменение dU потенциальной энергии частицы в поле определяется как взятая с обратным знаком работа dA действующих на частицу консервативных сил при ее перемещении из одной точки этого поля в другую:

$$dU = -dA, \quad (5.25)$$

где dA — элементарная работа консервативных сил.

Работу на конечном перемещении можно представить в виде

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{r} = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2, \quad (5.26)$$

где U_1 и U_2 — значения потенциальной энергии в точках 1 и 2. Говорят так: работа сил поля на пути $1 \rightarrow 2$ равна убыли потенциальной энергии частицы в данном поле. Заметим, что частице, находящейся в произвольной точке поля, можно приписать любое наперед заданное значение потенциальной энергии. Это связано с тем, что работа сил поля определяет лишь разность потенциальных энергий, но не их абсолютные значения. Для того чтобы определить потенциальную энергию частицы в произвольной точке поля, необходимо задать значение U в какой-либо одной точке. Эту процедуру называют *нормировкой*, или *калибровкой*, потенциальной энергии. После того, как нормировка будет выполнена, значения $U(x, y, z)$ однозначно определяются через работу сил [формула (5.26)] при перемещении частицы из этой точки в точку с координатами x, y, z .

Из рассмотренных выше примеров [формулы (5.11), (5.14), (5.17) и (5.19)] видно, что потенциальная энергия частицы имеет следующий вид

1) для упругой силы

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (5.27)$$

[использована нормировка $U(0) = 0$];

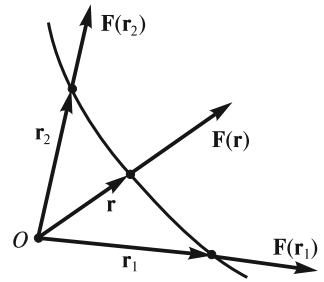


Рис. 5.10

2) в гравитационном поле

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (5.28)$$

[нормировка $U(\infty) = 0$];

3) в однородном поле тяжести

$$U(h) = mgh \quad (5.29)$$

[нормировка $U(0) = 0$];

4) в кулоновском поле

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \quad (5.30)$$

[нормировка $U(\infty) = 0$].

Обратим внимание, что в случаях 1 и 3 из соображений удобства нулевое значение потенциальной энергии приписано частице, находящейся в начале отсчета, а в случаях 2 и 4 — на бесконечности.

Если задана функция $U(r)$, то можно определить и поле сил $\mathbf{F}(r)$. Для этого воспользуемся выражением (5.25), представив его в виде

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = -dU. \quad (5.31)$$

Записывая скалярное произведение $\mathbf{F}d\mathbf{r}$ в декартовых координатах, получим:

$$(F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k})(dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = -dU. \quad (5.32)$$

Это соотношение можно записать в виде

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right). \quad (5.33)$$

Символы частной производной $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ означают, что функция $U(x, y, z)$ при дифференцировании должна рассматриваться как функция только того аргумента, по которому производится дифференцирование, остальные аргументы считаются при этом постоянными.

Сравнивая соответствующие слагаемые в левой и правой частях (5.33), имеем

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5.34)$$

Отсюда для вектора силы получаем выражение:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}\right). \quad (5.35)$$

Величину, стоящую в скобках, называют *градиентом* скалярной функции U и обозначают $\text{grad } U$, или ∇U , где ∇ («набла») — это дифференциальный вектор-

ный оператор, который в декартовых координатах имеет вид $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$. Таким образом, можно записать:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U = -\nabla U. \quad (5.36)$$

Смысл градиента станет яснее, если ввести понятие *эквипотенциальной поверхности* — поверхности, во всех точках которой потенциальная энергия U имеет одно и то же значение (рис. 5.11).

Проведем плоскость, касательную к эквипотенциальной поверхности, в некоторой точке O (след от такой плоскости изображен на рис. 5.11 штриховой линией). При смещении из точки O в плоскости на величину $d\mathbf{r}$ в любом направлении $dU = 0$. Согласно (5.31), это означает, что $\mathbf{F}d\mathbf{r} = 0$, т.е. вектор \mathbf{F} перпендикулярен плоскости, касательной к эквипотенциальной поверхности в данной точке. Вектор $\text{grad } U$ направлен противоположно вектору \mathbf{F} , в сторону «наиболее быстрого» возрастания функции $U(x, y, z)$.

Потенциальное поле сил. Поле сил, которое можно описать с помощью функции $U(x, y, z, t)$ такой, что $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$, обычно называют *потенциальным*. Если функция U зависит от времени, то поле будет нестационарным — сила в каждой точке будет зависеть от времени t . В случае стационарного поля $U = U(x, y, z)$. Ясно, что силы, действующие на частицу в стационарном потенциальном поле, являются консервативными.

Если потенциальное поле стационарно, то приращение функции U равно

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz. \quad (5.37)$$

Поскольку U является функцией только координат, то dU не может зависеть от формы пути, по которому происходит переход от точки пространства с координатами x, y, z к соседней точке с координатами $x + dx, y + dy, z + dz$. Такое приращение является полным дифференциалом, и его можно отождествлять с приращением потенциальной энергии частицы в силовом поле.

Полная механическая энергия частицы. Согласно (5.7), приращение кинетической энергии частицы равно работе всех действующих на нее сил. Если частица находится в некотором поле консервативных сил, то на нее действует сила \mathbf{F} со стороны этого поля. Другие силы (консервативные или неконсервативные), не имеющие отношения к данному полю, назовем *сторонними* $\mathbf{F}_{\text{стор}}$.

Для полной работы всех сил получим

$$A_{\text{полн}} = A + A_{\text{стор}}, \quad (5.38)$$

где A — работа сил рассматриваемого поля; $A_{\text{стор}}$ — работа всех сторонних сил.

Поскольку $A = U_1 - U_2$, то для приращения кинетической энергии частицы будем иметь

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{\text{стор}}. \quad (5.39)$$

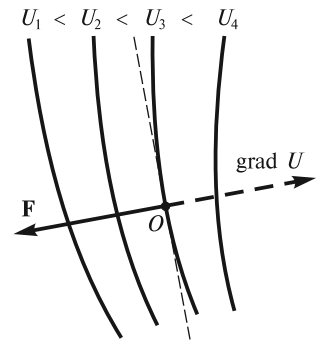


Рис. 5.11

Перепишем (5.39) в виде

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = A_{\text{стор}}. \quad (5.40)$$

Сумму кинетической T и потенциальной U энергий называют *полной механической энергией* частицы в поле:

$$E = T + U. \quad (5.41)$$

Таким образом, можно записать:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{стор}}, \quad (5.42)$$

т. е. приращение полной механической энергии частицы равно работе всех сторонних сил, действующих на частицу.

Если $A_{\text{стор}} = 0$, то

$$E = T + U = \text{const}. \quad (5.43)$$

Это означает, что *если сторонние силы не совершают работы или отсутствуют, то полная механическая энергия частицы в поле консервативных сил остается неизменной* (закон сохранения механической энергии частицы).

Движение в центральном силовом поле. В лекции 4 уже отмечалось, что траектория частицы в поле центральных сил есть плоская кривая. Это следует из условия сохранения момента импульса частицы относительно силового центра:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{const}. \quad (5.44)$$

Поскольку векторы \mathbf{L} и \mathbf{r} взаимно перпендикулярны, постоянство \mathbf{L} означает, что при движении частицы ее радиус-вектор \mathbf{r} все время остается в одной и той же плоскости.

Полное решение задачи о движении частицы в центральном поле проще всего получить, исходя из законов сохранения энергии и момента импульса, записанных в полярных координатах на плоскости (см. лекцию 2):

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \text{const}; \quad (5.45)$$

$$L = mr^2\dot{\phi} = \text{const}. \quad (5.46)$$

Выражая $\dot{\phi}$ из (5.46) и подставляя в (5.45), найдем значение \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}. \quad (5.47)$$

Разделяя переменные r и t и интегрируя, получим

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} + \text{const}. \quad (5.48)$$

Формула (5.48) в неявном виде определяет закон движения — зависимость от времени расстояния r между силовым центром и движущейся частицей.

Для того чтобы определить уравнение траектории $r = r(\varphi)$, запишем (5.46) в виде

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt, \quad (5.49)$$

подставим сюда dt из (5.47) и проинтегрируем. В итоге будем иметь

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} + \text{const.} \quad (5.50)$$

В общем виде задача решена.

Отметим некоторые особенности движения частицы в центральном силовом поле.

1. Из (5.46) видно, что $\dot{\varphi}$ никогда не меняет знака, т. е. угол φ всегда изменяется со временем монотонно.

2. Если положить $\dot{r} = 0$, то из формул (5.45) и (5.46) можно получить следующее соотношение:

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \quad (5.51)$$

Решая это уравнение относительно r , можно определить точки (или точку), в которых радиальная скорость \dot{r} обращается в нуль. Это, однако, не остановка частицы, как при одномерном движении, поскольку угловая скорость $\dot{\varphi}$ при $L \neq 0$ в нуль не обращается. Равенство $\dot{r} = 0$ соответствует «точкам поворота» r_{\max} и r_{\min} , в которых функция достигает либо максимального, либо минимального значения. Если область допустимых значений r ограничена условием $r \geq r_{\min}$, то движение частицы является инфинитным — она приходит из бесконечности и снова уходит на бесконечность. Если же $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, то движение финитно и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями с радиусами r_{\min} и r_{\max} .

3. Если движение финитно, то это еще не значит, что траектория является замкнутой кривой. Она может бесчисленное количество раз достигать r_{\min} и r_{\max} , заполняя все пространство между двумя граничными окружностями (рис. 5.12). Существует лишь два типа полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты. Это поля, в которых $U(r) \sim -1/r$ (например, гравитационное или кулоновское поле при взаимодействии разноименных зарядов) и $U \sim r^2$ (например, центральное поле упругих сил).

4. Если силы, действующие на частицу, являются силами притяжения, то при $L \neq 0$ это еще не означает, что частица «упадет» на силовой центр. «Падение» возможно лишь в том случае,

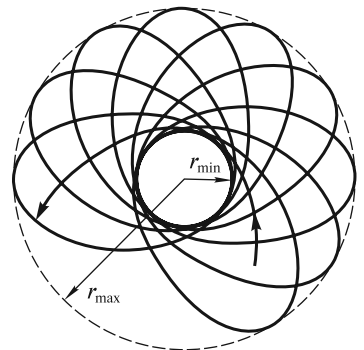


Рис. 5.12

если потенциальная энергия достаточно быстро убывает при $r \rightarrow 0$. Действительно, подставляя $\dot{\phi}$ из (5.46) в (5.45), получим

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r). \quad (5.52)$$

Поскольку $\dot{r}^2 > 0$, приходим к неравенству

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - \frac{L^2}{2mr^2} - U(r) > 0, \quad (5.53)$$

или

$$r^2 U(r) + \frac{L^2}{2m} < Er^2. \quad (5.54)$$

Отсюда следует, что r может принимать стремящиеся к нулю значения лишь при условии

$$r^2 U(r)|_{r \rightarrow 0} < -\frac{L^2}{2m}, \quad (5.55)$$

т. е. должно быть либо $U(r) \sim -\frac{\alpha}{r^2}$, причем $\alpha > \frac{L^2}{2m}$, либо $U(r) \sim -\frac{1}{r^n}$ при $n > 2$.

■ **Пример 1.** При движении в гравитационном поле $U(r) = -G \frac{Mm}{r}$ (m — масса движущейся частицы, M — масса тела, являющегося притягивающим силовым центром). Закон сохранения механической энергии имеет вид

$$E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{r} = \text{const}. \quad (5.56)$$

Подстановка функции $U(r)$ в (5.52) дает:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{Mm}{r} = \text{const}. \quad (5.57)$$

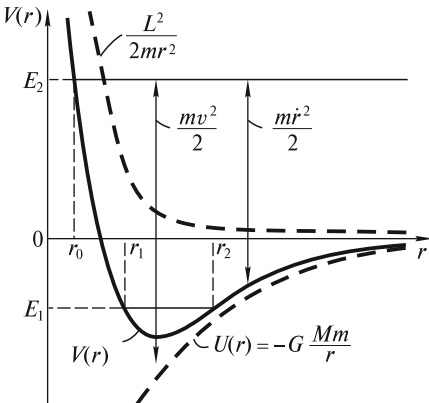


Рис. 5.13

Формально (5.57) можно рассматривать как выражение для энергии при одномерном — радиальном — движении частицы. При этом роль потенциальной энергии выполняет функция (рис. 5.13)

$$V(r) = -G \frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (5.58)$$

При $E < 0$ (значение E_1 на рис. 5.13) движение финитно: $r_1 \leq r \leq r_2$. При $E \geq 0$ движение инфинитно; при $E = 0$ частица на «бесконечности» имеет нулевую скорость [см. (5.56)], при $E > 0$ скорость частицы на бесконечности конечна. Так, обладая полной энергией E_2 , частица, двигаясь из ∞ ,

приближается к силовому центру на минимальное расстояние r_0 , где $V = E_2$. При этом «радиальная» компонента ее кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$ обращается в нуль, однако полная кинетическая энергия $T = \frac{mv^2}{2}$ достигает максимального значения.

Уравнение траектории получается с помощью общей формулы (5.50). Подставляя в нее $U(r) = -G \frac{Mm}{r}$ и производя интегрирование, получим

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{L}{r} - G \frac{Mm^2}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{G^2 M^2 m^4}{L^2}}} + \text{const.} \quad (5.59)$$

Выбирая начало отсчета угла φ так, чтобы $\text{const} = 0$, и вводя обозначения

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}, \quad (5.60)$$

будем иметь

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi. \quad (5.61)$$

Это уравнение так называемого конического сечения — линии, получаемой при сечении конуса некоторой плоскостью; p и e — параметр и эксцентриситет траектории. Из аналитической геометрии известно, что при $e < 1$ ($E < 0$) траекторией будет эллипс, и движение финитно. При $e = 1$ ($E = 0$) частица движется по параболе. При $e > 1$ ($E > 0$) траекторией является гипербола.

Вид траектории, конечно, определяется начальными условиями. Проиллюстрируем это на конкретном примере. Пусть O — притягивающий силовой центр, A — начальное положение частицы (рис. 5.14). Будем сообщать частице в точке A скорость v в направлении, перпендикулярном к линии AO . Если полная энергия частицы $E < 0$, то траекторией будет эллипс. При $v = 0$ он вырождается в прямую AO , проходящую через силовой центр. Если $v = v_0 = \sqrt{GM/r_0}$, то частица будет двигаться по окружности с радиусом $r_0 = AO$; в этом случае точки A и C равноудалены от притягивающего центра. При $v < v_0$ точка A (апоцентр) находится на большем удалении от силового центра, чем точка B (перигеум). При $v > v_0$, напротив, перигеумом будет точка A , а апоцентром — точка D . При $v = v_n = v_0 \sqrt{2}$ траекторией будет парабола [значение v_n можно получить из (5.56) при условии $E = 0$]. При $v > v_n$ она переходит в гиперболу.

Применительно к космическим полетам в поле Земли скорость $v_0 = \sqrt{GM/R_3} = \sqrt{gR_3} \approx 8$ км/с называется *первой космической скоростью* (R_3 — радиус Земли). При

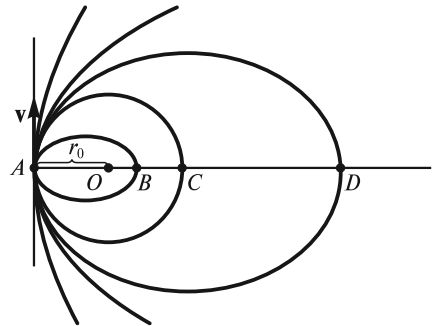


Рис. 5.14

этом запущенный в космос аппарат становится искусственным спутником Земли и движется по круговой орбите на высоте h (считается, что $h \ll R_3$). Скорость $v_{II} = \sqrt{2gR_3} \approx 11,2$ км/с называется *второй космической скоростью*. Это минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно не вернулось на Землю. Существует и *третья космическая скорость* — скорость относительно Земли, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы. Расчеты показывают, что минимальное значение третьей космической скорости составляет около 16,7 км/с.

■ **Пример 2.** Рассмотрим взаимодействие двух молекул некоторого газа. Одну из молекул будем считать условно неподвижной (ее центр находится в начале координат, рис. 5.15), а другую — движущейся. Потенциальная энергия этой другой молекулы достаточно хорошо описывается функцией

$$U(r) = 4\varphi_0 \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (5.62)$$

(потенциал Леннарда-Джонса), где r — расстояние между центрами молекул, φ_0 и σ — постоянные. Не вдаваясь в детали, отметим, что силы межмолекулярного взаимодействия имеют электромагнитную природу и обусловлены взаимодействием положительных и отрицательных зарядов нейтральных в целом молекул. При этом на относительно малых расстояниях преобладают короткодействующие силы отталкивания ($U_{\text{отт}} \sim \frac{1}{r^{12}}$), а на больших — силы притяжения ($U_{\text{прит}} \sim -\frac{1}{r^6}$). Это следует также и из графика $U(r)$, изображенного на рис. 5.15: на больших расстояниях $F = -\frac{\partial U}{\partial r} < 0$ (притяжение), а на малых $F = -\frac{\partial U}{\partial r} > 0$ (отталкивание).

Допустим, что рассматриваемая молекула обладает некоторым запасом энергии $E = T + U = \text{const}$. Тогда на очень больших расстояниях $U \approx 0$ и $E \approx T_1$. По мере сближения молекул силы притяжения совершают положительную работу, U уменьшается, T увеличивается ($T_2 > T_1$). После прохождения молекулой точки, в которой $U = U_{\text{min}}$, начинают преобладать силы отталкивания, U увеличивается, а T уменьшается ($T_3 < T_2$). При сближении молекул на расстояние d , которое можно принять за оценку диаметра молекул, $T = 0$ и $E = U$. «Налетающая» молекула останавливается, после чего начинает двигаться в обратном направлении и уходит на бесконечность. Это движение инфинитно, т.е. происходит в неограниченной области пространства.

Если бы общий запас энергии молекулы стал отрицательным ($E_1 < 0$),

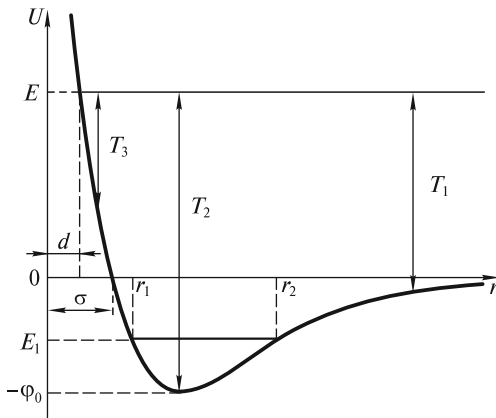


Рис. 5.15

то движение стало бы финитным — молекула совершала бы колебательное движение между двумя крайними точками, расположенными на расстояниях r_1 и r_2 от силового центра, находясь в области *потенциальной ямы*. Этот случай соответствует конденсации газа в жидкость.

Механическая энергия системы материальных точек.

Кинетическая энергия. Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий частиц, из которых эта система состоит. Согласно (5.9), приращение кинетической энергии i -й частицы системы равно работе всех действующих на нее сил:

$$\Delta T_i = A_i. \quad (5.63)$$

Складывая равенства (5.63), записанные для всех частиц, получим, что приращение кинетической энергии системы равно работе сил, действующих на все частицы:

$$\Delta T = A_\Sigma. \quad (5.64)$$

Следует отметить, что изменение кинетической энергии системы, в отличие от изменения ее импульса, происходит под действием не только внешних, но и внутренних сил. Причиной этого является то, что работа внутренних сил в нуль не обращается. Сказанное легко понять, если представить себе две взаимодействующие (например, притягивающиеся друг к другу) материальные точки. При сближении точек действующие на них силы совершают положительную работу, и кинетическая энергия системы изменится под действием одних только внутренних сил.

Ясно, что кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета, относительно которой рассматривается движение частиц. Наибольший интерес представляет связь между кинетическими энергиями в лабораторной системе K и в системе центра масс (СЦМ). Скорость i -й частицы в системе K можно представить в виде

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{v}_\text{ц}, \quad (5.65)$$

где \mathbf{u}_i — скорость i -й частицы в СЦМ; $\mathbf{v}_\text{ц}$ — скорость центра масс.

Тогда для полной кинетической энергии в системе K можно записать:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_\text{ц} + \mathbf{u}_i)^2. \quad (5.66)$$

Возводя сумму скоростей в квадрат, получим

$$T = \frac{v_\text{ц}^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i + \mathbf{v}_\text{ц} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{u}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i u_i^2 = \frac{m v_\text{ц}^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i u_i^2, \quad (5.67)$$

где $m = \sum_{i=1}^n m_i$ и учтено, что $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{u}_i = 0$ (суммарный импульс частиц в СЦМ равен нулю). Таким образом, окончательно будем иметь

$$T = \frac{m v_\text{ц}^2}{2} + T_0, \quad (5.68)$$

где $T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i u_i^2$ — суммарная кинетическая энергия частиц в СЦМ.

Это означает, что *кинетическая энергия системы складывается из энергии ее движения как единого целого со скоростью, равной скорости центра масс, и энергии движения частиц по отношению к СЦМ*. Это утверждение известно как теорема Кенига.

Из формулы (5.68), в частности, следует, что кинетическая энергия системы минимальна в СЦМ. Действительно, в СЦМ $v_{ц} = 0$, поэтому в (5.68) остается только T_0 .

■ **Пример.** Рассмотрим обруч массой m и радиусом R , катящийся без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v_0 . Полная кинетическая энергия обруча в лабораторной системе отсчета

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + T_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = mv_0^2. \quad (5.69)$$

Потенциальная энергия системы частиц. Рассмотрим систему, между частицами которой действуют одни лишь центральные силы. Работа всех этих сил может быть представлена как взятое с обратным знаком изменение потенциальной энергии системы — скалярной функции, зависящей от взаимного расположения частиц. Эту энергию можно назвать «собственной» потенциальной энергией, в отличие от «внешней» потенциальной энергии — энергии системы, находящейся во внешнем стационарном потенциальном поле сил.

Действительно, для двух частиц с номерами i и j , взаимодействующих с силами \mathbf{f}_{ij} и \mathbf{f}_{ji} ($\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$), будем иметь

$$dA_{ij} = \mathbf{f}_{ij}d\mathbf{r}_j + \mathbf{f}_{ji}d\mathbf{r}_i = \mathbf{f}_{ij}(d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) = \mathbf{f}_{ij}d\mathbf{r}_{ij}, \quad (5.70)$$

где dA_{ij} — алгебраическая сумма работ сил \mathbf{f}_{ij} и \mathbf{f}_{ji} после перемещения частиц соответственно на $d\mathbf{r}_j$ и $d\mathbf{r}_i$; $d\mathbf{r}_{ij}$ — перемещение j -й частицы относительно i -й (изменение вектора \mathbf{r}_{ij} , направленного от i -й частицы к j -й).

Сила \mathbf{f}_{ij} , действующая на j -ю частицу со стороны частицы с номером i , является центральной, а значит и консервативной. В связи с этим ее работа на перемещении $d\mathbf{r}_{ij}$ может быть представлена как убыль потенциальной энергии j -й частицы в поле i -й частицы, или как убыль потенциальной энергии взаимодействия двух частиц. Таким образом, можно записать

$$dA_{ij} = -dU_{ij}, \quad (5.71)$$

где dU_{ij} — функция, зависящая только от расстояния между частицами.

Обобщая (5.71) на всю систему частиц, получим

$$dA = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n dU_{ij} = -dU. \quad (5.72)$$

Множитель $1/2$ введен здесь для того, чтобы не учитывать взаимодействие одних и тех же частиц дважды. Для конечного изменения конфигурации системы будем иметь

$$A = -\Delta U, \quad (5.73)$$

т. е. *работа внутренних консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы*.

Закон сохранения механической энергии. Представим полную работу A_{Σ} всех сил, действующих на частицы системы, в виде суммы работ внутренних консервативных сил A , внутренних диссипативных сил A_d и внешних сил $A_{\text{внш}}$:

$$A_{\Sigma} = A + A_d + A_{\text{внш}}. \quad (5.74)$$

Тогда изменение кинетической энергии системы [формула (5.64)] примет вид

$$\Delta T = A + A_d + A_{\text{внш}}. \quad (5.75)$$

Учитывая (5.73), получим

$$\Delta T + \Delta U = A_d + A_{\text{внш}}, \quad (5.76)$$

или

$$\Delta E = A_d + A_{\text{внш}}, \quad (5.77)$$

где $E = T + U$ — полная механическая энергия системы, включающая в себя кинетическую энергию частиц и потенциальную энергию их взаимодействия.

Если $A_d + A_{\text{внш}} = 0$, то $\Delta E = 0$, и $E = \text{const}$.

В случае изолированной системы $A_{\text{внш}} = 0$, и

$$\Delta E = A_d. \quad (5.78)$$

Как было сказано в начале лекции, суммарная работа всех внутренних диссипативных сил меньше нуля:

$$A_d < 0. \quad (5.79)$$

Таким образом, в изолированной системе частиц, где действуют диссипативные силы, полная механическая энергия всегда убывает.

Если в изолированной системе частиц диссипативных сил нет, то из (5.78) следует

$$\Delta E = 0, \quad E = \text{const}. \quad (5.80)$$

В итоге можно сформулировать закон сохранения механической энергии: *в инерциальной системе отсчета полная механическая энергия изолированной системы частиц, в которой нет диссипативных сил, сохраняется.*

Столкновения. Применим законы сохранения энергии и импульса к исследованию распространенного и важного с практической точки зрения процесса столкновения двух частиц. При этом под столкновением будем понимать не только обычное соударение, но и любое взаимодействие частиц, описываемое с помощью центральных сил. Нас будут интересовать импульсы частиц до и после столкновения, т.е. на достаточно большом расстоянии между частицами, когда потенциальной энергией их взаимодействия можно пренебречь. Ограничимся случаем абсолютно упругого столкновения, в результате которого механическая энергия системы не меняется. Задача об абсолютно упругом лобовом столкновении хорошо известна из школьного курса механики, поэтому мы рассмотрим абсолютно упругое нелобовое столкновение. Наиболее просто этот процесс можно исследовать в системе центра масс (см. лекцию 4). В связи

с этим получим вначале некоторые соотношения для системы из двух частиц в СЦМ.

Пусть массы частиц равны m_1 и m_2 , а их скорости в лабораторной системе K — соответственно \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Тогда импульсы частиц \mathbf{p}_{01} и \mathbf{p}_{02} в СЦМ будут равны

$$\mathbf{p}_{01} = m_1 \mathbf{u}_1 = m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_u); \quad (5.81)$$

$$\mathbf{p}_{02} = m_2 \mathbf{u}_2 = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_u). \quad (5.82)$$

Известно, что

$$\mathbf{v}_u = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (5.83)$$

[см. соотношение (4.18)].

После подстановки (5.83) в (5.81) и (5.82) и простых преобразований будем иметь

$$\mathbf{p}_{01} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2); \quad \mathbf{p}_{02} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad (5.84)$$

Таким образом, импульсы обеих частиц в СЦМ одинаковы по модулю и противоположны по направлению:

$$\mathbf{p}_{01} = -\mathbf{p}_{02}. \quad (5.85)$$

Это вполне естественно, так как суммарный импульс частиц в СЦМ всегда равен нулю.

Суммарная кинетическая энергия обеих частиц в СЦМ равна

$$T_0 = T_{01} + T_{02} = \frac{p_{01}^2}{2m_1} + \frac{p_{02}^2}{2m_2} = \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} p_0^2, \quad (5.86)$$

где $p_0^2 = p_{01}^2 = p_{02}^2$.

Вернемся теперь к задаче о нелобовом абсолютно упругом столкновении двух частиц. Ограничимся случаем, когда одна из частиц (с массой m_2) до столкновения покоится. В СЦМ для импульсов частиц до столкновения имеет место соотношение (5.85). Так же связаны и импульсы частиц после столкновения:

$$\mathbf{p}'_{01} = -\mathbf{p}'_{02}. \quad (5.87)$$

Поскольку мы рассматриваем импульсы до и после взаимодействия на бесконечности, где $U=0$, то из сохранения кинетической энергии, определяемой формулой (5.86), следует, что

$$p_{01} = p_{02} = p'_{01} = p'_{02}, \quad (5.88)$$

т. е. в результате столкновения импульс каждой частицы по модулю не меняется. Однако направление разлета частиц уже не будет совпадать с направлением их первоначального движения (рис. 5.16). При этом угол φ_0 , определяющий изменение направления движения частиц в СЦМ, будет зависеть от

закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения в процессе столкновения.

Определим теперь импульс каждой частицы после столкновения в лабораторной системе K :

$$\mathbf{p}'_1 = m_1 \mathbf{v}'_1 = m_1(\mathbf{v}_{ц} + \mathbf{u}'_1) = m_1 \mathbf{v}_{ц} + \mathbf{p}'_{01}; \quad (5.89)$$

$$\mathbf{p}'_2 = m_2 \mathbf{v}'_2 = m_1(\mathbf{v}_{ц} + \mathbf{u}'_2) = m_2 \mathbf{v}_{ц} + \mathbf{p}'_{02}. \quad (5.90)$$

Сложив левые и правые части (5.89) и (5.90), с учетом (5.87), (5.83) и того, что $\mathbf{p}_2 = 0$, будем иметь

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{ц} = m_1 \mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_1, \quad (5.91)$$

как и должно быть в соответствии с законом сохранения импульса.

Разлет частиц после столкновения удобно анализировать с помощью векторной диаграммы (рис. 5.17). На этой диаграмме $\mathbf{AC} = \mathbf{p}_1$, $\mathbf{AB} = \mathbf{p}'_1$, $\mathbf{BC} = \mathbf{p}'_2$. Точка O делит отрезок AC в отношении $AO : OC = m_1 : m_2$. Более того, $OB = OC$, т.е. точки B и C лежат на одной окружности с центром в точке O . Действительно,

$$OC = m_2 v_{ц} = m_2 \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = p'_{01}; \quad (5.92)$$

последнее равенство следует из (5.84) и (5.88) с учетом $v_2 = 0$.

В зависимости от соотношения масс m_1 и m_2 точка A — начало вектора \mathbf{p}_1 — может находиться внутри данной окружности, на ней или снаружи (рис. 5.18, $a, б, в$). Во всех случаях угол φ_0 может принимать любое значение в интервале от 0 до π . Что касается угла рассеяния θ_1 налетающей частицы и угла θ разлета частиц, то они могут принимать следующие значения:

$$m_1 < m_2 \Rightarrow 0 < \theta_1 < \pi; \quad \theta > \frac{\pi}{2} \text{ (рис. 5.18, } a);$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}; \quad \theta = \frac{\pi}{2} \text{ (рис. 5.18, } б);$$

$$m_1 > m_2 \Rightarrow 0 < \theta_1 < (\theta_1)_{\max}; \quad \theta < \frac{\pi}{2} \text{ (рис. 5.18, } в).$$

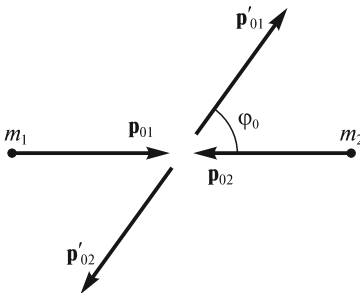


Рис. 5.16

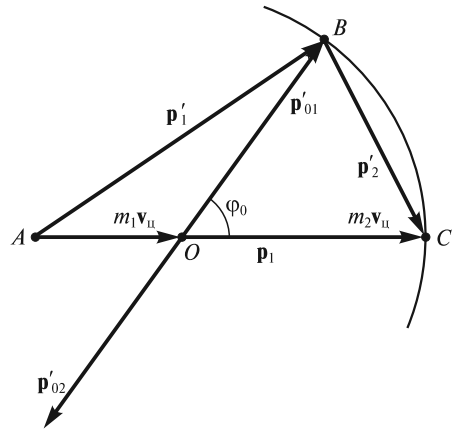


Рис. 5.17

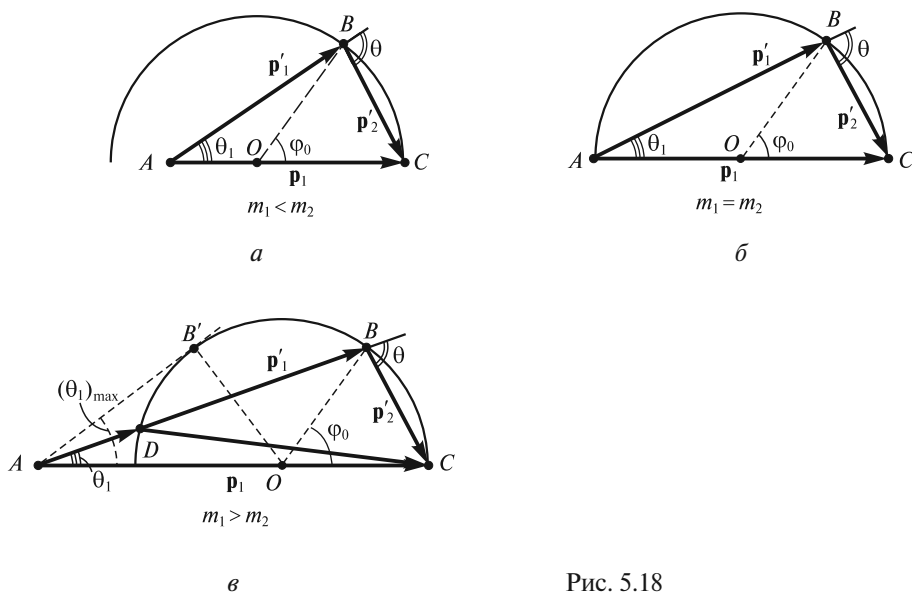


Рис. 5.18

Здесь $(\theta_1)_{\max}$ — некоторый предельный угол, соответствующий касательной AB' на рис. 5.18, в. Он определяется из условия

$$\sin(\theta_1)_{\max} = \frac{OB'}{AO} = \frac{OC}{AO} = \frac{m_2}{m_1} < 1. \quad (5.93)$$

Интересно отметить, что в случае $m_1 > m_2$ возможно рассеяние налетающей частицы под одним и тем же углом, но с двумя различными значениями импульса \mathbf{p}'_1 , которым соответствуют отрезки AB и AD . Тот или иной результат столкновения определяется значением прицельного параметра — расстояния b между прямой, вдоль которой направлен импульс налетающей частицы, и центром частицы, с которой происходит столкновение (рис. 5.19).

Задача двух тел (задача Кеплера). Выше при изучении движения частицы в гравитационном поле предполагалось, что масса тела, являющегося источником силы тяготения, много больше массы частицы. Именно поэтому силовой центр считался неподвижным. Однако такое приближение не всегда возможно. Например, в двойных звездах при сравнимых массах компонент ни одну из них нельзя считать покоящейся. В связи с этим возникает задача учета движения обоих взаимодействующих тел, которая называется задачей двух тел.

Пусть два тела (материальные точки) с массами m_1 и m_2 взаимодействуют между собой посредством сил тяготения. Система, образованная телами, предполагается изолированной. Уравнения движения тел в некоторой ИСО имеют вид

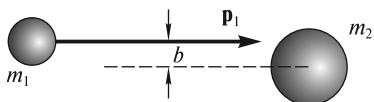


Рис. 5.19

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (5.94)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (5.95)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — вектор, соединяющий взаимодействующие тела и направленный от первого тела ко второму (рис. 5.20).

Разделим уравнения (5.94) и (5.95) соответственно на m_1 и m_2 и вычтем из второго первое. В итоге получим

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (5.96)$$

Обозначая $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (эта величина называется *приведенной массой*) и учитывая, что $\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}$, будем иметь

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (5.97)$$

Формально задача двух тел сведена к известной нам задаче о движении одного тела с массой μ в центральном силовом поле с неподвижным центром. Решив уравнение (5.97) и определив зависимость $\mathbf{r}(t)$, можно найти законы движения каждого из тел. Проще всего это сделать в системе центра масс. В этой системе

$$m_1 \mathbf{r}_{01} + m_2 \mathbf{r}_{02} = 0, \quad (5.98)$$

где \mathbf{r}_{01} и \mathbf{r}_{02} — искомые радиусы-векторы тел относительно центра масс (точка C на рис. 5.21). Учитывая, что

$$\mathbf{r}_{02} - \mathbf{r}_{01} = \mathbf{r} \quad (5.99)$$

(см. рис. 5.20 и 5.21) и решая систему уравнений (5.98) — (5.99), находим

$$\mathbf{r}_{01} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_{02} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (5.100)$$

Из этих формул видно, что оба тела движутся относительно центра масс по геометрически подобным траекториям (эллипсам, параболам или гиперболам), причем прямая, соединяющая тела, все время проходит через центр масс.

Пример эллиптического движения частиц для случая, когда $m_1 < m_2$, показан на рис. 5.22. Здесь C — центр масс системы и одновременно точка, в кото-

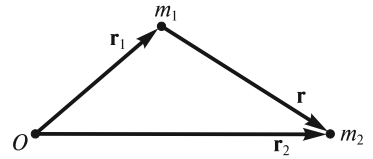


Рис. 5.20

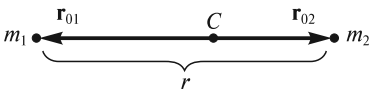


Рис. 5.21

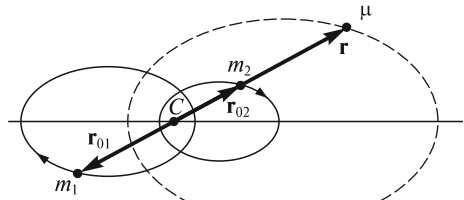


Рис. 5.22

рой находится начало радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{02} - \mathbf{r}_{01}$ [см. (5.99)]. Штриховая линия изображает эллипс, по которому двигалась бы частица с приведенной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Отметим, что задача трех и более взаимодействующих тел значительно сложнее. В общем случае она не имеет аналитического решения, однако может быть решена приближенно численными методами.

Законы сохранения и симметрия пространства и времени.

Закон сохранения импульса. Напомним, что при выводе закона сохранения импульса для замкнутой системы частиц мы исходили из II закона Ньютона и дополнительно предполагали, что между частицами системы действуют силы, равные по величине и противоположные по направлению. Как оказывается, это дополнительное предположение вытекает из важнейшего свойства пространства — его *однородности*. Под однородностью пространства обычно понимают эквивалентность всех его точек. Это означает, что если имеется изолированная система частиц, то при одинаковых начальных условиях (взаимном расположении и скоростях частиц) развитие событий в ней не будет зависеть от того, в какой области пространства эта система локализована. Иногда говорят так: если все точки системы сместить на произвольную, но одинаковую величину \mathbf{b} (произвести их трансляцию), то ни в состоянии системы, ни в ее внутренних движениях ничего не изменится.

Поясним сказанное выше на примере потенциальных сил. В этом случае потенциальная энергия системы (суммарная энергия взаимодействия частиц) должна быть инвариантной по отношению к указанной операции трансляции:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}, \dots, \mathbf{r}_n + \mathbf{b}). \quad (5.101)$$

Для известных нам взаимодействий (кулоновское, гравитационное) равенство (5.101) действительно выполняется, поскольку потенциальную энергию взаимодействия можно представить как функцию только разностей координат частиц:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_n, \dots, \mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n). \quad (5.102)$$

Исходя из (5.102), можно показать, что силы, действующие на произвольную частицу на «новом» и на «старом» месте, будут неизменными, и что силы взаимодействия между любой парой частиц равны по величине и направлены противоположно.

Сказанное выше иллюстрирует рис. 5.23, на котором изображена изолированная система из двух частиц 1 и 2, взаимодействующих с силами \mathbf{F}_{21} и \mathbf{F}_{12} . После переноса частиц на величину \mathbf{b} их потенциальная энергия не изменяется:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{b}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{b}). \quad (5.103)$$

Это связано с тем, что функция U зависит лишь от разностей координат частиц и не зависит от положения системы в пространстве. Например, в выражении $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ можно было

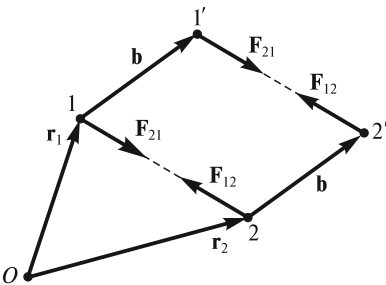


Рис. 5.23

бы перейти к новым переменным $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$ и $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Однородность пространства (эквивалентность всех его точек) приводит к тому, что в новых переменных функция U перестает зависеть от величины \mathbf{R} , определяющей расположение системы частиц в пространстве, и зависит лишь от $\Delta\mathbf{r}$:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2). \quad (5.104)$$

При этом для сил взаимодействия имеем

$$(F_{21})_x = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial(x_1 - x_2)} \cdot \frac{\partial(x_1 - x_2)}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial(x_1 - x_2)}; \quad (5.105)$$

$$(F_{12})_x = -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\partial U}{\partial(x_1 - x_2)} \cdot \frac{\partial(x_1 - x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial(x_1 - x_2)} = -(F_{21})_x, \quad (5.106)$$

и аналогично для проекций сил \mathbf{F}_{12} и \mathbf{F}_{21} на оси y и z .

Таким образом, действительно $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, т.е. для изолированной системы выполняется закон сохранения импульса.

Закон сохранения момента импульса. При формулировке закона сохранения момента импульса изолированной системы частиц мы использовали то обстоятельство, что векторная сумма моментов всех внутренних сил равна нулю:

$$\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 + \dots + \bar{\mu}_n = 0. \quad (5.107)$$

Оказывается, что равенство (5.107) следует из еще одного важнейшего свойства пространства — его *изотропности*. Под изотропностью обычно понимают эквивалентность всех направлений в пространстве. Это означает, что если имеется система частиц, то при одинаковых начальных условиях (взаимном расположении и скоростях частиц) развитие событий в ней не будет зависеть от поворота системы как целого относительно произвольной оси на произвольный угол.

Как и выше, покажем это на примере потенциальных сил. Пусть $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ — радиусы-векторы частиц в исходном положении системы, а $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_n$ — после поворота системы как целого на произвольный угол φ относительно произвольной оси. Равенство (5.107) следует из инвариантности потенциальной энергии системы по отношению к повороту:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = U(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \dots, \mathbf{r}'_n). \quad (5.108)$$

Для известных нам взаимодействий (кулоновское, гравитационное) это действительно так, поскольку U зависит только от расстояния между соответствующими частицами:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|, \dots, |\mathbf{r}_{n-1} - \mathbf{r}_n|). \quad (5.109)$$

Исходя из (5.109), можно показать, что как до поворота системы, так и после ее поворота силы взаимодействия между частицами не только равны по величине и противоположны по направлению, но и направлены вдоль линии, соединяющей взаимодействующие частицы.

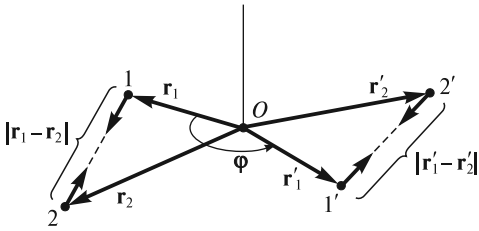


Рис. 5.24

Сказанное выше иллюстрирует рис. 5.24, на котором изображены две частицы, взаимодействующие с силами \mathbf{F}_{21} и \mathbf{F}_{12} , в исходном положении и после поворота на угол φ . В этом случае

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = U(|\Delta\mathbf{r}|) \quad (5.110)$$

(рис. 5.24). Здесь \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — радиусы-векторы частиц в исходном положении, \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 — после поворота системы на угол

φ вокруг оси, проходящей через точку O ; $|\Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|$.

Покажем теперь, что силы взаимодействия между частицами направлены вдоль одной прямой. Для упрощения вычислений введем вектор $\mathbf{l} = \Delta\mathbf{r} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$. Тогда

$$\begin{aligned} (F_{12})_x &= -\frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\partial U}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x_2} = \frac{\partial U}{\partial l} \frac{x_1 - x_2}{l} = \frac{\partial U}{\partial l} \cos \alpha; \\ (F_{12})_y &= -\frac{\partial U}{\partial y_2} = -\frac{\partial U}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial y_2} = \frac{\partial U}{\partial l} \frac{y_1 - y_2}{l} = \frac{\partial U}{\partial l} \cos \beta; \\ (F_{12})_z &= -\frac{\partial U}{\partial z_2} = -\frac{\partial U}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial z_2} = \frac{\partial U}{\partial l} \frac{z_1 - z_2}{l} = \frac{\partial U}{\partial l} \cos \gamma, \end{aligned} \quad (5.111)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, — направляющие косинусы вектора \mathbf{l} .

Аналогично, для силы \mathbf{F}_{21} можно получить выражения

$$\begin{aligned} (F_{21})_x &= -\frac{\partial U}{\partial l} \cos \alpha; \\ (F_{21})_y &= -\frac{\partial U}{\partial l} \cos \beta; \\ (F_{21})_z &= -\frac{\partial U}{\partial l} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Отсюда и следует, что силы взаимодействия направлены вдоль линии, соединяющей частицы, т. е. выполняется условие (5.107).

Закон сохранения механической энергии. Оказывается, что этот закон является следствием *однородности* времени. Однородность времени означает, что при одинаковых начальных условиях эволюция системы не будет зависеть от того, в какой момент времени эта эволюция начинается. Если все моменты времени эквивалентны, то потенциальная энергия изолированной системы не должна явно зависеть от времени: $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. Отсюда следует, что $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy +$

$\frac{\partial U}{\partial z} dz$ является полным дифференциалом, т. е. изменение $U_1 - U_2$, определяющее работу внутренних сил, не зависит от формы «пути» при переходе системы из состояния 1 в состояние 2, т. е. $A_{12} = U_1 - U_2$. Принимая во внимание, что, в свою очередь, $A_{12} = T_2 - T_1$ (T — кинетическая энергия системы), в результате получим: $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$ — уравнение, выражающее закон сохранения механической энергии для изолированной системы в отсутствие диссипативных сил.

ЛЕКЦИЯ 6

Неинерциальные системы отсчета. До сих пор все механические явления рассматривались только в инерциальных системах отсчета (ИСО), которые были определены выше (см. лекцию 3). Однако иногда более простым и привычным оказывается рассмотрение механических явлений в *неинерциальных системах отсчета* (НИСО).

Например, все воспринимают как должное такой простой факт, что каждое утро Солнце восходит на востоке и вечером заходит на западе. Видимое движение Солнца в Северном полушарии происходит по часовой стрелке (рис. 6.1, *а*), а в Южном — против часовой стрелки (в этом случае надо смотреть на север) (рис. 6.1, *б*). Аналогично, всем хорошо знакомы и суточные движения Луны, планет и звезд. Если сфотографировать с длительной экспозицией (в несколько часов) участок неба вблизи Полярной звезды (ПЗ), то на снимке каждая звезда оставит дугу — след вращения вокруг оси, проходящей вблизи Полярной звезды (рис. 6.2). Все эти явления наблюдаются с Земли, которая, как было показано выше, не является инерциальной системой отсчета. Полет спутников и ракет, морские и океанские течения, ветры и т. п. также естественно описывать относительно земной поверхности.

Хорошо известны примеры явлений, которые наблюдаются и в других НИСО. Когда космический корабль стартует с поверхности Земли или сходит с орбиты и тормозит в плотных слоях атмосферы, космонавты с огромной силой прижимаются к креслам, их движения сильно затруднены, все предметы становятся в несколько раз «тяжелее» и т. д. Похожие явления наблюдаются и в кабине самолета при выполнении летчиком крутых виражей, в центрифуге, на каруселях, в вагоне резко затормозившего поезда и др.

Описание механических движений в неинерциальных системах отсчета представляет собой весьма важную и интересную задачу. Эти системы определяются следующим образом. Пусть имеется некоторая лабораторная ИСО K_0 (рис. 6.3). Условимся считать ее неподвижной и будем называть абсолютной. Тогда любая система отсчета K , которая движется поступательно с ускорением \mathbf{a} относительно системы K_0 и(или) вращается относительно нее с угловой

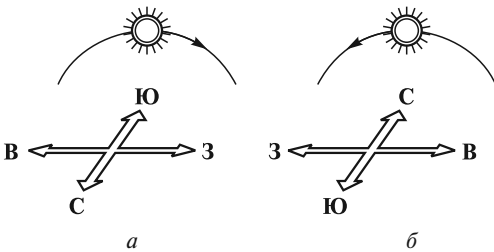


Рис. 6.1

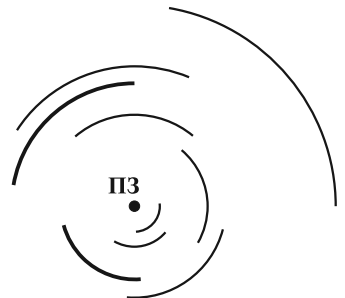


Рис. 6.2

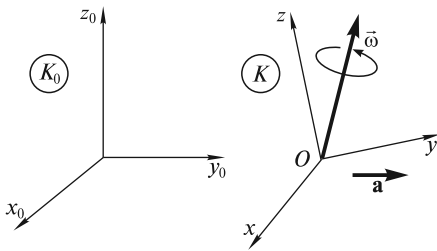


Рис. 6.3

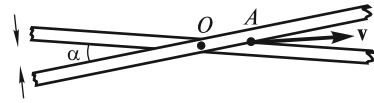


Рис. 6.4

скоростью $\vec{\omega}$, называется неинерциальной. В общем случае неинерциальная система отсчета K может двигаться с переменным ускорением и вращаться неравномерно.

В связи с введением НИСО в принципе может возникнуть ряд проблем. Если связать оси координат с каким-либо вращающимся телом отсчета, то легко обнаружить, что скорости тел, находящихся на достаточно большом удалении от начала координат, могут достигать необычно больших значений. В самом деле, если взять декартову систему координат, связанную с Землей, и мысленно продолжить ее оси хотя бы до ближайших звезд, то тут же обнаружится, что видимая скорость всех звезд много больше скорости света c . Например, скорость одной из самых ярких и близких к Земле звезды Вега в созвездии Лиры (расстояние $r = 2,5 \cdot 10^{17}$ м) окажется равной

$$v = \omega_0 r = 7,3 \cdot 10^{-5} \cdot 2,5 \cdot 10^{17} \approx 1,82 \cdot 10^{13} \text{ м/с}, \quad (6.1)$$

где $\omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость вращения Земли.

Это значение более чем в 60 000 раз превышает скорость света! На самом деле ясно, что звезды, которые находятся на чудовищно больших расстояниях от Земли, «стоят» на месте, а наблюдателю на вращающейся Земле лишь кажется, что они движутся со сверхсветовой скоростью. Огромные скорости, возникающие при формальном продолжении осей координат до весьма удаленных объектов, следует рассматривать как чисто геометрические. Другим примером такой скорости может служить скорость точки A , находящейся на пересечении двух линеек, вращающихся относительно точки O (рис. 6.4). С такими скоростями нельзя передавать какие-либо сигналы, осуществлять обмен энергией или импульсом.

В том случае, если оси координат НИСО связаны с достаточно протяженными и быстро вращающимися телами, когда $\omega l \lesssim c$ (l — характерный размер тела), возникает еще одна проблема. Оказывается, что в такой НИСО нет единого времени: темп хода всех часов различен, и поэтому их невозможно синхронизовать. Кроме того, длины одних и тех же отрезков, ориентированных в радиальном и трансверсальном направлениях, оказываются различными, отношение длины окружности к диаметру не равно π , геометрия становится неевклидовой. Следует, однако, отметить, что в подавляющем большинстве практически важных случаев отмеченные выше проблемы не возникают, поскольку размеры как самих тел отсчета, так и тех областей пространства, в которых происходят рассматриваемые в НИСО явления, конечны и невелики.

В дальнейшем будем считать, что все отрезки в абсолютной и движущейся системах отсчета имеют одну и ту же длину и что время в обеих этих системах течет одинаково.

Связь скоростей материальной точки в неподвижной и движущейся системах отсчета. Относительное, переносное и абсолютное движение. Рассмотрим движение материальной точки M относительно как инерциальной системы отсчета K_0 , так и движущейся относительно нее произвольным образом неинерциальной системы K (рис. 6.5). Пусть точка M движется относительно системы K по траектории $A'A''$ и в некоторый момент времени t находится в точке A . Для наглядности траектория $A'A''$ изображена на поверхности тела отсчета, с которым жестко связана система координат xuz . Закон движения точки M в системе K_0 определяется в виде $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, а в системе K имеет вид $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Положение начала отсчета системы K , точки O , относительно системы K_0 задается радиусом-вектором $\mathbf{R}_0(t)$. В итоге можно записать следующее соотношение между векторами \mathbf{R} , \mathbf{R}_0 и \mathbf{r} :

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{r}(t). \tag{6.2}$$

Связь между скоростями точки M в системах K_0 и K можно получить непосредственным дифференцированием по времени соотношения (6.2). Это будет сделано ниже. Но прежде, для большей наглядности, мы получим эту связь из простых геометрических соображений. Будем рассматривать частный случай, когда точка M движется в плоскости Oxy системы K , а сама система K вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг оси Oz (рис. 6.6; тело отсчета, с которым связана система xuz , изображено в виде диска).

Теперь обратим внимание, что движение материальной точки M по отношению к системе K_0 (оно называется абсолютным) можно представить в виде суперпозиции двух движений. С одной стороны, это движение по траектории $A'A''$ по отношению к системе K (оно называется относительным). С другой стороны, это движение вместе с телом отсчета системы K по отношению к K_0 (оно называется переносным и для разных точек тела отсчета различно). Переносное движение, в свою очередь, можно представить в виде суперпозиции поступательного движения, при котором все точки тела отсчета системы K движутся как некоторая произвольная выбранная точка (в данном случае —

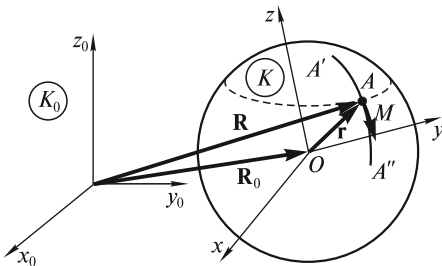


Рис. 6.5

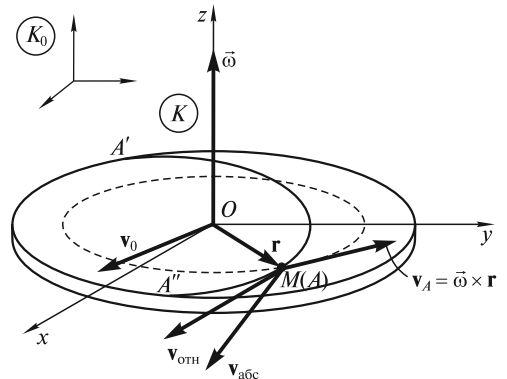


Рис. 6.6

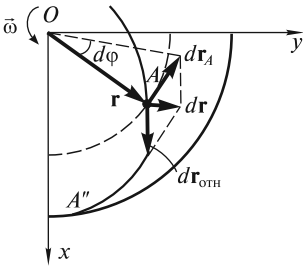


Рис. 6.7

начало отсчета системы K , точка O), и вращательного вокруг оси, проходящей через эту точку (в данном случае — вокруг оси Oz) (см. лекцию 11).

Векторы скоростей всех упомянутых выше движений в этом частном случае изображены на рис. 6.6: $\mathbf{v}_{\text{абс}}$ — скорость абсолютного движения точки M в системе K_0 ; $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ — скорость ее относительного движения по траектории $A'A''$ в системе K ; \mathbf{v}_0 — скорость той части переносного движения, которое связано с поступательным движением системы K ; $\mathbf{v}_A = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$ — скорость другой части переносного движения, связанного с вращением системы K с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Вектор \mathbf{v}_A направлен по касательной к окружности, плоскость которой ориентирована перпендикулярно вектору $\vec{\omega}$, в данном случае — по касательной к окружности, лежащей в плоскости Oxy (на рис. 6.6 эта окружность изображена штриховой линией).

Выражение для \mathbf{v}_A легко получить, обратившись к рис. 6.7. За время dt точка A перемещается относительно K_0 вследствие вращения системы K на величину $d\mathbf{r}_A = d\vec{\varphi} \times \mathbf{r}$, откуда после деления на dt получаем, что $\mathbf{v}_A = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$. При этом сама точка M смещается вдоль траектории на величину $d\mathbf{r}_{\text{отн}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} dt$. Если ввести $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{\text{отн}} + d\mathbf{r}_A$, то, очевидно, можно записать следующее соотношение:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{\text{отн}}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (6.3)$$

Полное изменение радиуса-вектора \mathbf{R} точки M , «видимое» из системы K_0 , составляет $d\mathbf{R} = d\mathbf{r} + d\mathbf{R}_0 = d\mathbf{r}_{\text{отн}} + d\mathbf{r}_A + d\mathbf{R}_0$, где $d\mathbf{R}_0$ — смещение начала координат системы K из-за поступательного движения системы K . При этом наблюдатель в системе K «видит» только изменение $d\mathbf{r}_{\text{отн}}$, связанное с движением точки M по траектории $A'A''$.

Учитывая сказанное выше о суперпозиции относительного и переносного движений материальной точки M , получаем следующее соотношение:

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_0 + \vec{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (6.4)$$

Последние два слагаемых в (6.4) составляют переносную скорость материальной точки M :

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_0 + \vec{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (6.5)$$

Таким образом, окончательно можно записать

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}}. \quad (6.6)$$

Исходя из изложенного выше, можно дать следующие определения:

1. Движение и связанные с ним скорость и ускорение материальной точки M относительно системы K называются *относительными*.
2. Движение и связанные с ним скорость и ускорение относительно системы K_0 такой неподвижной в системе K точки A , в которой в данный момент времени находится материальная точка M , называются *переносными*.

3. Движение и связанные с ним скорость и ускорение материальной точки M относительно системы K_0 называются *абсолютными*.

Теперь получим связь между скоростями точки M в системах K_0 и K путем непосредственного дифференцирования левой и правой частей соотношения (6.2). В результате будем иметь

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (6.7)$$

Ясно, что $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{абс}}$; $\frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{v}_0$.

Выражение для $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ можно получить, если воспользоваться разложением вектора $\mathbf{r}(t)$ по осям координат системы K . Если $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты системы K , то это разложение имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = r_x(t)\mathbf{i} + r_y(t)\mathbf{j} + r_z(t)\mathbf{k}. \quad (6.8)$$

Поскольку и точка M , и система K движутся, то от времени зависят не только проекции $r_x(t), r_y(t), r_z(t)$, но и орты $\mathbf{i}(t), \mathbf{j}(t), \mathbf{k}(t)$, которые могут изменять свое направление в пространстве. Поэтому, согласно правилам дифференцирования, получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dr_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dr_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dr_z}{dt} \mathbf{k} \right) + \left(r_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + r_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + r_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right). \quad (6.9)$$

Первые три члена в правой части (6.9), заключенные в скобки, естественно интерпретировать как производную вектора \mathbf{r} относительно системы K ,

т.е. как $\frac{d\mathbf{r}_{\text{отн}}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}}$ [см. (6.3)], поскольку дифференцируются только проекции вектора \mathbf{r} на оси этой системы, а орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ считаются постоянными. Наконец, покажем, что сумма последних трех слагаемых в скобках равна векторному произведению $\bar{\omega} \times \mathbf{r}$. В самом деле, при повороте системы xuz на угол $\bar{d\varphi}$ орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ этой системы получают приращения $d\mathbf{i}, d\mathbf{j}, d\mathbf{k}$. Для изменения, например, вектора \mathbf{i} за время dt будем иметь (рис. 6.8)

$$d\mathbf{i} = \bar{d\varphi} \times \mathbf{i}. \quad (6.10)$$

Если поделить обе части равенства (6.10) на dt , то получим

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \mathbf{i}. \quad (6.11)$$

Два других орта \mathbf{j} и \mathbf{k} изменяются аналогично. Таким образом, имеют место равенства, называемые *формулами Пуассона*:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \mathbf{i}; \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \mathbf{j}; \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \mathbf{k}. \quad (6.12)$$

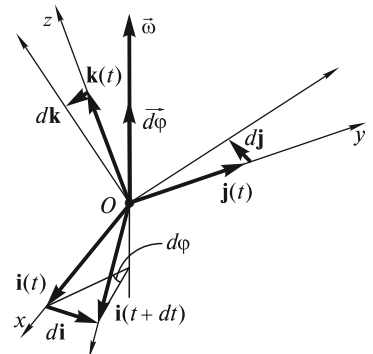


Рис. 6.8

Если в последние три члена правой части (6.9) подставить значения производных (6.12) и учесть разложение (6.8), то получим векторное произведение $\vec{\omega} \times \mathbf{r}$. Окончательно можно записать:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (6.13)$$

что совпадает с (6.3). Таким образом, из (6.7) следует (6.4).

Заметим, что соотношение, аналогичное (6.13), можно записать для производных произвольного вектора \mathbf{b} в системах K и K_0 :

$$\left. \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right|_{K_0} = \left. \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right|_K + \vec{\omega} \times \mathbf{b}. \quad (6.14)$$

Здесь $\left. \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right|_{K_0}$ — производная вектора \mathbf{b} в неподвижной системе K_0 ; $\left. \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right|_K$ — его производная в движущейся системе K ; $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения системы K .

Простой пример, иллюстрирующий формулу сложения скоростей (6.6), — опыт с диском, вращающимся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, проходящей через центр диска (точку O) и перпендикулярной его плоскости (рис. 6.9). Вблизи диска по его диаметру расположена неподвижная планка CD , вдоль которой можно перемещать кусочек мела M , прижимая его к диску. Если кусочек мела только прикасается к вращающемуся диску и остается неподвижным относительно планки CD , то на диске остается след — окружность радиусом $r = OM$. Таким образом, кусочек мела M относительно диска будет вращаться по часовой стрелке с относительной скоростью

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = -\vec{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (6.15)$$

Поскольку переносная скорость равна

$$\mathbf{v}_{\text{пер}} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (6.16)$$

то соотношение (6.6) приводит к следующему результату:

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}} = -\vec{\omega} \times \mathbf{r} + \vec{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (6.17)$$

который очевиден, так как мел относительно неподвижной планки CD покоится.

Если мел, прижимая к диску, перемещать вдоль планки CD от точки O в направлении точки D с постоянной скоростью \mathbf{v} , то на диске останется след — кривая, называемая спиралью Архимеда (рис. 6.10). Относительная скорость направлена по касательной к траектории и равна

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = -\vec{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}. \quad (6.18)$$

Из (6.6) следует ожидаемый результат:

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}} = -\vec{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v} + \vec{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}. \quad (6.19)$$

Сложение ускорений. Для того, чтобы установить связь ускорений материальной точки в неподвижной и движущейся системах отсчета, необходимо

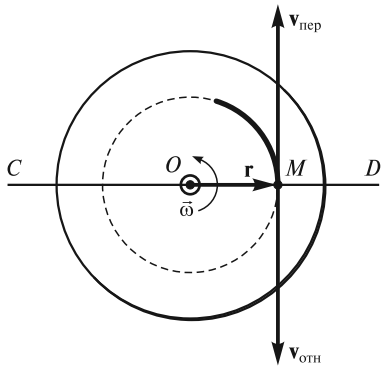


Рис. 6.9

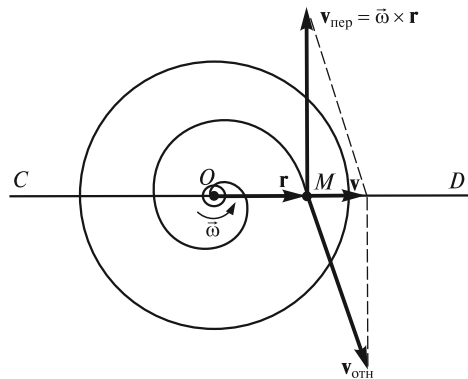


Рис. 6.10

найти элементарные приращения составляющих скорости $d\mathbf{v}_{\text{абс}}$, $d\mathbf{v}_{\text{отн}}$, $d\mathbf{v}_{\text{пер}}$ [см. (6.6)]. Вначале мы для наглядности получим эти приращения из геометрических соображений, а затем путем непосредственного дифференцирования левой и правой частей (6.6).

Допустим, что система K представляет собой вращающийся с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ диск, а материальная точка M движется вдоль радиуса этого диска с постоянной относительной скоростью $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ (рис. 6.11, а). За время dt точка M удалится от оси вращения на величину $v_{\text{отн}}dt$, а сама система K повернется относительно K_0 на угол $\bar{\omega}dt$. Таким образом, относительно системы K_0 за время dt приращение получит как переносная, так и относительная скорость точки M (рис. 6.11). Приращение переносной скорости, как следует из рис. 6.11, б, можно записать в виде

$$d\mathbf{v}_{\text{пер}} = (d\mathbf{v}_{\text{пер}})_{\perp} + (d\mathbf{v}_{\text{пер}})_{\parallel}. \quad (6.20)$$

Составляющая $(d\mathbf{v}_{\text{пер}})_{\perp}$ связана с изменением $\mathbf{v}_{\text{пер}}$ по направлению и направлена к центру диска. Ее величина, очевидно, равна $(dv_{\text{пер}})_{\perp} = v_{\text{пер}}\omega dt = (\omega r)\omega dt = \omega^2 r dt$ (рис. 6.11, б). В векторном виде будем иметь

$$(d\mathbf{v}_{\text{пер}})_{\perp} = -\bar{\omega}^2 \mathbf{r} dt. \quad (6.21)$$

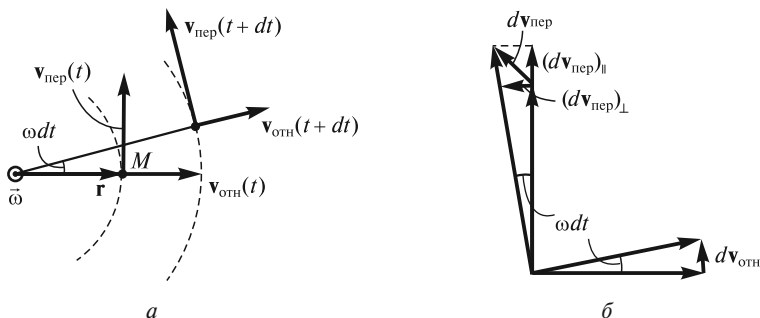


Рис. 6.11

Составляющая $(d\mathbf{v}_{\text{пер}})_{\parallel}$ связана с изменением $\mathbf{v}_{\text{пер}}$ по величине. Она перпендикулярна вектору $\mathbf{v}_{\text{отн}}(t)$, а ее величина равна $(dv_{\text{пер}})_{\parallel} = \omega(r + v_{\text{отн}}dt) - \omega r = \omega v_{\text{отн}}dt$. В векторном виде можно записать:

$$(d\mathbf{v}_{\text{пер}})_{\parallel} = (\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}})dt. \quad (6.22)$$

Приращение $d\mathbf{v}_{\text{отн}}$ связано с изменением направления $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. По величине оно равно $dv_{\text{отн}} = v_{\text{отн}}\omega dt$ (рис. 6.11, б). Вектор $d\mathbf{v}_{\text{отн}}$ направлен так же, как и $(d\mathbf{v}_{\text{пер}})_{\parallel}$. В результате получим

$$d\mathbf{v}_{\text{отн}} = (\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}})dt. \quad (6.23)$$

В итоге для данного частного случая движения системы K и точки M будем иметь

$$\begin{aligned} d\mathbf{v}_{\text{абс}} &= d\mathbf{v}_{\text{отн}} + d\mathbf{v}_{\text{пер}} = (\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}})dt - \omega^2 \mathbf{r}dt + (\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}})dt = \\ &= 2(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}})dt - \omega^2 \mathbf{r}dt. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Заметим, что если материальная точка M будет двигаться вдоль радиуса диска неравномерно (с ускорением $\mathbf{a}_{\text{отн}}$), то появится составляющая $d\mathbf{v}_{\text{отн}}$, направленная вдоль этого радиуса и равная $\mathbf{a}_{\text{отн}}dt$. В то же время если сам диск вращается неравномерно (с угловым ускорением $\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}}$), то надо учесть вклад в $(d\mathbf{v}_{\text{пер}})_{\parallel}$, равный, как нетрудно убедиться, $d\vec{\omega} \times \mathbf{r}$, где $d\vec{\omega}$ — изменение угловой скорости вращения системы K за время dt . Наконец, следует учесть, что диск (и связанная с ним система K) в более общем случае может совершать ускоренное поступательное движение относительно системы K_0 ; в итоге появится $d\mathbf{v}_0$ — вклад в $d\mathbf{v}_{\text{пер}}$, обусловленный изменением скорости поступательного движения системы K (ее начала координат, точки O).

Суммируя все вклады, получим

$$d\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}}dt + d\mathbf{v}_0 + d\vec{\omega} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}dt + 2(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}})dt. \quad (6.25)$$

После деления на dt получим искомое соотношение между ускорениями:

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} + 2(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}). \quad (6.26)$$

В качестве переносного ускорения естественно рассматривать следующее выражение:

$$\mathbf{a}_{\text{пер}} = \mathbf{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}, \quad (6.27)$$

так как эта сумма определяет ускорение такой неподвижной в системе K точки, в которой в данный момент времени находится материальная точка M . Действительно, первое слагаемое \mathbf{a}_0 определяет ускорение поступательного движения системы K , одинаковое для всех точек системы. Второе слагаемое $\dot{\vec{\omega}} \times \mathbf{r}$ связано с неравномерностью вращения и различно для разных точек системы. Последний член суммы $-\omega^2 \mathbf{r}$ — это центростремительное ускорение, которое также зависит от положения точки.

Наконец, последнее слагаемое в (6.26) получило название *кориолисова*, или *поворотного* ускорения,

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}). \quad (6.28)$$

Численный коэффициент 2 в (6.28) указывает на два одинаковых вклада в кориолисово ускорение, рассмотренных выше. Первый вклад связан с изменением переносной скорости по величине при относительном перемещении точки во вращающейся системе K . Второй вклад — это изменение относительной скорости по направлению при вращении этой системы.

Учитывая определения (6.27) и (6.28), связь ускорений точки в неподвижной и движущейся системах координат можно представить в виде

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{кор}}, \quad (6.29)$$

которое составляет содержание *теоремы Кориолиса* о сложении ускорений.

Теперь найдем соотношение (6.29) путем непосредственного дифференцирования скоростей в выражении (6.6). Дифференцируя левую часть, получим абсолютное ускорение, т. е. ускорение точки M в системе K_0 :

$$\frac{d\mathbf{v}_{\text{абс}}}{dt} = \mathbf{a}_{\text{абс}}. \quad (6.30)$$

Дифференцирование правой части (6.6) с учетом (6.5) дает

$$\frac{d\mathbf{v}_{\text{отн}}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\text{пер}}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{\text{отн}}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (6.31)$$

Учитывая, что при дифференцировании (относительно системы K_0) $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \bar{\omega} \times \mathbf{r}$ (см. преобразование скоростей), и в соответствии с замечанием

(6.14), $\frac{d\mathbf{v}_{\text{отн}}}{dt} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \bar{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}$ ($\mathbf{v}_{\text{отн}}$ и $\mathbf{a}_{\text{отн}}$ — скорость и ускорение относительно системы K), окончательно будем иметь

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \bar{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \mathbf{r} + \bar{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (6.32)$$

В итоге после раскрытия скобок и перегруппировки членов, с учетом определений (6.27) и (6.28), получим соотношение (6.29).

Заметим, что последнее слагаемое в (6.32) есть обобщение центростремительного ускорения $-\omega^2 \mathbf{r}$, рассмотренного выше, на случай, когда векторы $\bar{\omega}$ и \mathbf{r} не перпендикулярны друг другу. Как видно из рис. 6.12, $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r}_\perp$, где \mathbf{r}_\perp — вектор, перпендикулярный $\bar{\omega}$ и проведенный от оси вращения к точке M .

Хорошей иллюстрацией теоремы Кориолиса о сложении ускорений может служить рассмотренный выше опыт с вращающимся диском (рис. 6.13). Если кусочек мела M неподвижен относительно планки CD , то относительно диска он будет обладать центростремительным ускорением

$$\mathbf{a}_{\text{отн}} = -\omega^2 \mathbf{r}. \quad (6.33)$$

Переносное ускорение, очевидно, равно

$$\mathbf{a}_{\text{пер}} = -\omega^2 \mathbf{r}. \quad (6.34)$$

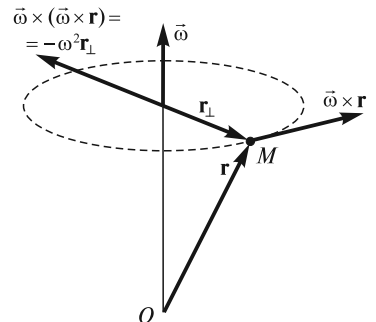


Рис. 6.12

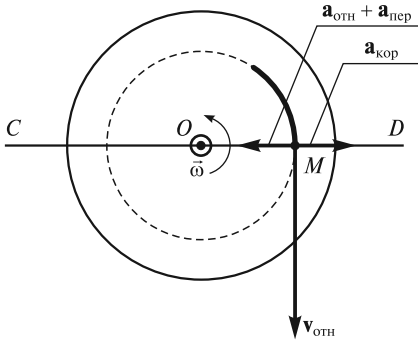


Рис. 6.13

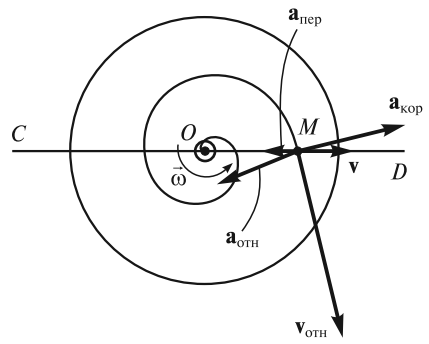


Рис. 6.14

Кроме того, кусочек мела, скорость которого относительно диска равна $\mathbf{v}_{\text{отн}}$, будет также обладать и кориолисовым ускорением, направленным по радиусу

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2(\vec{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}) = 2\omega^2 \mathbf{r}. \quad (6.35)$$

Сумма трех слагаемых (6.33), (6.34) и (6.35) дает очевидный результат (см. рис. 6.13):

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} = -\omega^2 \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} + 2\omega^2 \mathbf{r} = 0. \quad (6.36)$$

В случае, когда кусочек мела M движется с постоянной скоростью \mathbf{v}_0 вдоль планки CD , вектор $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ будет направлен по касательной к траектории, представляющей собой архимедову спираль (рис. 6.14). На этом же рисунке указаны векторы $\mathbf{a}_{\text{отн}}$, $\mathbf{a}_{\text{пер}}$, $\mathbf{a}_{\text{кор}}$. В результате их суммирования также получается, что $\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} = 0$. Этого и следовало ожидать, поскольку в лабораторной системе отсчета кусочек мела совершает равномерное прямолинейное движение.

Силы инерции. В начале лекции была поставлена задача описания механических явлений в НИСО. Теперь, после введения основных понятий и вывода необходимых формул, важнейшей из которых была теорема Кориолиса о сложении ускорений, эта задача может быть решена. Естественно начать с записи второго закона динамики для материальной точки в инерциальной системе отсчета K_0 . С учетом введенного выше обозначения ускорения $\mathbf{a}_{\text{абс}}$ в этой системе имеем

$$m\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{F}, \quad (6.37)$$

где \mathbf{F} — равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку со стороны других тел.

Будем исходить из того, что описание механических явлений в НИСО должно проводиться на основе закона, имеющего вид (6.37). Очевидно, что в случае неинерциальной системы отсчета K в левой части уравнения движения вместо абсолютного ускорения $\mathbf{a}_{\text{абс}}$ должно стоять относительное $\mathbf{a}_{\text{отн}}$. Поэтому естественно следующие преобразования. Подставим в левую часть (6.37) $\mathbf{a}_{\text{абс}}$ в виде (6.29):

$$m(\mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} + \mathbf{a}_{\text{пер}}) = \mathbf{F}. \quad (6.38)$$

Так как в левой части должно остаться только одно слагаемое с относительным ускорением $\mathbf{a}_{\text{отн}}$, то перенесем два остальных в правую часть:

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{пер}} - m\mathbf{a}_{\text{кор}}. \quad (6.39)$$

Чтобы аналогия (6.39) с (6.37) была более полной, назовем чисто формально два последних слагаемых в правой части (6.39) силами. Эти силы получили название *сил инерции*. В соответствии с этим соглашением различают *переносную силу инерции*

$$\mathbf{F}_{\text{пер}} = -m\mathbf{a}_{\text{пер}} \quad (6.40)$$

и *силу инерции Кориолиса*

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = -m\mathbf{a}_{\text{кор}}. \quad (6.41)$$

Поскольку переносное ускорение $\mathbf{a}_{\text{пер}}$ есть сумма трех членов [см. (6.27)], то вводят три типа переносных сил инерции. Первая обусловлена *ускоренным поступательным движением* системы отсчета K :

$$\mathbf{F}_{\text{п}} = -m\mathbf{a}_0. \quad (6.42)$$

Вторая сила связана с *неравномерностью вращения* этой системы:

$$\mathbf{F}_{\text{н}} = -m\dot{\bar{\omega}} \times \mathbf{r}, \quad (6.43)$$

а третья получила название *центробежной силы инерции*:

$$\mathbf{F}_{\text{цб}} = -m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) = m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp} \quad (6.44)$$

(вектор \mathbf{r}_{\perp} , направленный от оси вращения, был показан на рис. 6.12).

Для силы инерции Кориолиса, используя (6.28), имеем следующее выражение:

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = -2m(\bar{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}) = 2m(\mathbf{v}_{\text{отн}} \times \bar{\omega}). \quad (6.45)$$

С учетом (6.41)–(6.44) уравнение (6.39) принимает вид

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{п}} + \mathbf{F}_{\text{н}} + \mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{F}_{\text{кор}}. \quad (6.46)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение движения в НИСО. Очевидно, силы инерции, в отличие от обычных, «действуют» только в НИСО. В инерциальных системах отсчета никаких сил инерции нет. Но в НИСО действие сил инерции на материальную точку точно такое же, как и обычных сил. Однако есть и отличие. В случае сил инерции нет «источника» сил. Поэтому сам собой отпадает вопрос о применимости третьего закона Ньютона к силам инерции, поскольку нельзя указать пару взаимодействующих между собой тел.

Отметим, что Э. Мах в свое время высказал предположение, что источником сил инерции могла бы быть вся «система неподвижных звезд», относительно которой движется с ускорением (или вращается) неинерциальная система отсчета. Эта гипотеза получила название *принципа Маха*. Такой же точки зрения одно время придерживался и Эйнштейн, но впоследствии он от нее отказался. В настоящее время большинство физиков отвергают принцип Маха. При выводе уравнения (6.46) подчеркивалось, что силы инерции вводятся

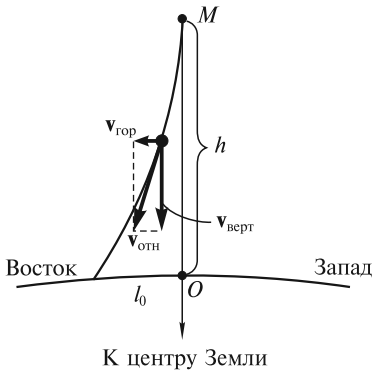


Рис. 6.15

формально, только с целью добиться аналогии с уравнением движения Ньютона (6.37).

Проявления сил инерции.

Отклонение падающих тел к востоку. Все тела, падающие на Землю с большой высоты, отклоняются относительно ее поверхности к востоку. Определим это отклонение в НИСО, связанной с вращающейся Землей. Для простоты будем рассматривать падение тела с высоты h на экваторе. Вследствие действующих сил тяготения и Кориолиса скорость тела $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ будет иметь две составляющие: вертикальную и горизонтальную (рис. 6.15). Отклонение к востоку обусловлено силой Кориолиса, связанной с наличием вертикальной

составляющей скорости. Это отклонение описывается уравнением:

$$m\mathbf{a}_{\text{гор}} = 2m\mathbf{v}_{\text{верт}} \times \vec{\omega}. \quad (6.47)$$

Приближенно можно считать, что $v_{\text{верт}} = gt$. Тогда

$$a_{\text{гор}} = 2g\omega t. \quad (6.48)$$

Уравнение (6.48) нетрудно проинтегрировать. Первый интеграл — это горизонтальная компонента скорости:

$$v_{\text{гор}} = \int_0^t a_{\text{гор}} dt = g\omega t^2, \quad (6.49)$$

а второй интеграл определяет искомое отклонение к востоку:

$$l_0 = \int_0^{\tau} v_{\text{гор}} dt = \frac{1}{3} g\omega \tau^3. \quad (6.50)$$

Если в (6.50) подставить время падения τ , выраженное через высоту h , то окончательно получим

$$l_0 = \frac{1}{3} g\omega \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6.51)$$

Численная оценка для $h = 100$ м дает $l_0 \approx 2,2$ см. Малое значение l_0 оправдывает применение приближенного метода.

Эту же задачу можно решить в ИСО, связанной с неподвижными звездами. В свое время Ньютон предложил Гуку найти отклонение падающих тел к востоку из опыта и тем самым экспериментально подтвердить вращение Земли. Он исходил из простого предположения об избытке линейной скорости v камня, находящегося на высоте h , по сравнению со скоростью v_0 точки земной поверхности. Для падения на экваторе можно записать (рис. 6.16):

$$\Delta v = v - v_0 = \omega(R_3 + h) - \omega R_3 = \omega h, \quad (6.52)$$

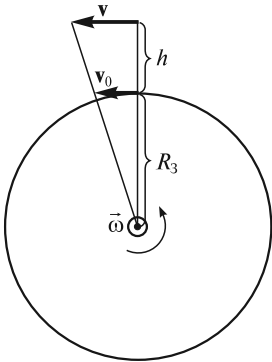


Рис. 6.16

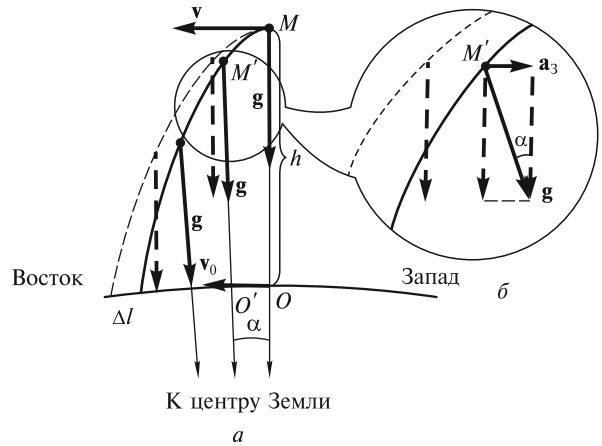


Рис. 6.17

где R_3 — радиус Земли. Так как время падения камня с высоты h равно $\tau = \sqrt{2h/g}$, то для отклонения к востоку Ньютон получил

$$l = \Delta v \cdot \tau = \omega h \sqrt{2h/g}. \quad (6.53)$$

В ответ на предложение Ньютона Гук провел соответствующие опыты. Он бросал камни с высоты 9 м и измерял их отклонение от вертикали, однако малая высота падения и невысокая точность эксперимента не позволили ему сделать правильный вывод. В своем ответе Ньютону Гук заметил, что камень должен отклоняться к востоку в меньшей степени, поскольку во время падения появляется составляющая a_3 ускорения свободного падения, направленная на запад (рис. 6.17). На этом рисунке штриховой линией показана траектория тела, соответствующая рассуждениям Ньютона. Если пренебречь незначительным изменением g с высотой, то эта траектория — обычная парабола. Истинная траектория тела, соответствующая рассуждениям Гука, представляет собой часть эллипса, в одном из фокусов которого находится центр Земли. Эта траектория изображена сплошной линией.

Определим уменьшение Δl отклонения тела к востоку, учитывая изменение g по направлению и по-прежнему пренебрегая его изменением по величине. На экваторе при перемещении вертикали из положения OM в $O'M'$ (рис. 6.17, а) составляющая a_3 ускорения свободного падения, направленная на запад, равна

$$a_3 \approx g\alpha \approx g\omega t \quad (6.54)$$

(рис. 6.17, б). Здесь ω — угловая скорость вращения Земли. Эта проекция, как указывал Гук, появляется вследствие несовпадения направлений к центру Земли в текущий момент времени (линия $O'M'$) и начальный момент (линия OM).

С ускорением (6.54) связаны скорость

$$v_3(t) = \int_0^t a_3 dt = \int_0^t g\omega t dt = \frac{1}{2} g\omega t^2 \quad (6.55)$$

и уменьшение отклонения на восток, равное

$$\Delta l = \int_0^{\tau} v_3 dt = \int_0^{\tau} \frac{1}{2} g \omega t^2 dt = \frac{1}{6} g \omega \tau^3. \quad (6.56)$$

Если для времени падения камня использовать оценку $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, то для величины Δl получим

$$\Delta l = \frac{1}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6.57)$$

Если из оценки Ньютона (6.53) вычесть поправку (6.57), то получим ответ

$$l_0 = l - \Delta l = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6.58)$$

Понятие вертикали. Обычно под вертикалью понимают направление нити отвеса. В модели сферически симметричной Земли на широте φ на тело отвеса в точке P , кроме силы тяжести mg , будет действовать центробежная сила инерции $F_{цб} = m\omega^2 R_3 \cos \varphi$, направленная перпендикулярно оси вращения Земли (рис. 6.18). Здесь ω — угловая скорость вращения, а R_3 — радиус Земли. Результирующая этих двух сил mg_φ несколько меньше силы mg и составляет с ней небольшой угол δ . Таким образом, вращение Земли приводит к небольшому уменьшению ускорения свободного падения и новому положению вертикали. В результате происходит уменьшение веса тела на относительную величину

$$\Delta = \frac{g - g_\varphi}{g}. \quad (6.59)$$

Максимальное уменьшение веса наблюдается на экваторе, где относительная величина этого уменьшения достигает значения

$$\Delta = \frac{\omega^2 R_3}{g} \approx 3,4 \cdot 10^{-3}, \quad (6.60)$$

т. е. около 0,3 %.

Отклонение нити отвеса от направления к центру Земли определяется углом δ , при этом

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{F_{ю}}{mg - F_{OP}}. \quad (6.61)$$

Здесь F_{OP} — вертикальная, а $F_{ю}$ — горизонтальная (направленная на юг) составляющие центробежной силы инерции. Учитывая, что $F_{OP} \ll mg$ и $F_{ю} \ll mg$, можно записать

$$\delta \approx \frac{F_{ю}}{mg} = \frac{\omega^2 R_3 \sin 2\varphi}{2g}. \quad (6.62)$$

Из (6.62) следует, что на полюсах и экваторе $\delta = 0$. Максимальное значение угла δ достигается на широте $\varphi = 45^\circ$. В этом случае $\delta_{\max} \approx 5,8'$.

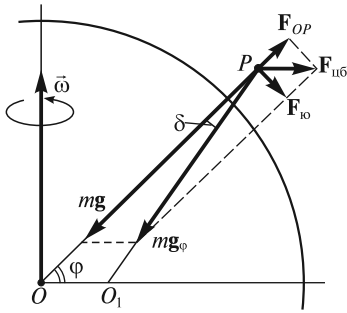


Рис. 6.18

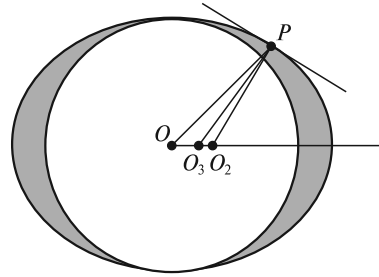


Рис. 6.19

На самом деле определение вертикали несколько сложнее, поскольку фактически фигура Земли — геоид, поверхность которого хорошо аппроксимируется поверхностью эллипсоида вращения. В России в качестве фигуры Земли принят эллипсоид Ф. Н. Красовского, у которого полярный радиус на 21,4 км меньше экваториального. В этом случае возможны три определения вертикали (рис. 6.19).

Во-первых, за вертикаль можно принять направление OP к центру эллипсоида. Во-вторых, вертикалью можно считать нормаль O_2P к поверхности эллипсоида вращения. Наконец, истинной вертикалью называется направление линии отвеса O_3P . Отклонение O_2P от O_3P порядка $3''$ и, как правило, во внимание не принимается. На полюсах и экваторе все эти три направления совпадают. На средних широтах максимальное значение угла OPO_3 достигает приблизительно $12'$, что примерно в два раза больше угла δ , определенного выше для сферически симметричной Земли. Увеличение отклонения можно объяснить тем, что ближайший к точке P слой Земли, выделенный на рис. 6.19 темным цветом, притягивает тела в этой точке значительно сильнее, чем удаленный.

Оценка несферичности Земли. Будем считать, что вещество Земли находится в гидростатическом равновесии под действием сил притяжения и центробежных сил инерции. В этом случае давления от полярного и экваториального столбов вещества в центре Земли должны быть равны (рис. 6.20):

$$p_{\text{п}} = p_{\text{э}}. \quad (6.63)$$

Для того чтобы рассчитать $p_{\text{п}}$, необходимо учесть изменение ускорения свободного падения $a(r)$ в зависимости от расстояния r до центра Земли:

$$a(r) = g \frac{r}{R_3}, \quad (6.64)$$

где $g = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R_3 G$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Здесь ρ_0 и R_3 — средняя плотность и радиус Земли, G — гравитационная постоянная.

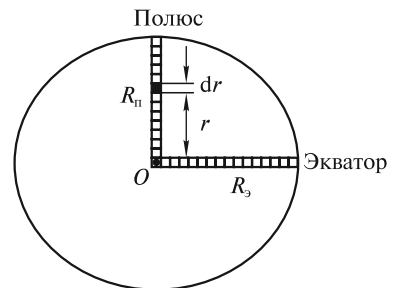


Рис. 6.20

Давление в основании столба земной породы, ориентированного на полюс, равно

$$p_{\pi} = \int_0^{R_{\pi}} \rho_0 a(r) dr = \int_0^{R_{\pi}} \rho_0 g \frac{r}{R_3} dr = \frac{1}{2} \rho_0 g \frac{R_{\pi}^2}{R_3}. \quad (6.65)$$

Для определения давления в основании столба, ориентированного на экватор, необходимо учесть еще и центробежные силы инерции:

$$p_{\varepsilon} = \int_0^{R_{\varepsilon}} [\rho_0 a(r) - \rho_0 \omega^2 r] dr = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{g}{R_3} - \omega^2 \right) R_{\varepsilon}^2. \quad (6.66)$$

Учитывая (6.63), получим

$$R_{\pi}^2 = \left(1 - \frac{R_3}{g} \omega^2 \right) R_{\varepsilon}^2, \quad (6.67)$$

откуда

$$\frac{R_{\pi}}{R_{\varepsilon}} = \sqrt{1 - \frac{R_3}{g} \omega^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\pi G \rho_0}}. \quad (6.68)$$

Представляя R_{π} как $R_{\varepsilon} - \Delta R$ и учитывая, что второе слагаемое под корнем мало по сравнению с единицей, для ΔR будем иметь

$$\Delta R = R_{\varepsilon} - R_{\pi} \approx \frac{3}{8} \frac{\omega^2}{\pi G \rho_0} R_{\varepsilon} \approx 11 \text{ км}, \quad (6.69)$$

где для средней плотности принято значение $\rho_0 = 5,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Оценка (6.69) примерно в два раза меньше фактического значения ΔR . Различие связано с тем, что при расчетах нельзя использовать модель однородной Земли. Следует отметить, что наибольший вклад в давление вносят внешние слои, плотность которых примерно в два раза меньше средней. Если использовать в формуле (6.69) плотность поверхностных слоев Земли, $\rho \approx 0,5\rho_0$, то получим $\Delta R \approx 20 \text{ км}$, что уже хорошо согласуется со значением ΔR для эллипсоида Красовского. Для более точного расчета необходимо учесть фактическое изменение плотности ρ с глубиной.

Видимое суточное движение Солнца. Используя уравнение движения (6.46), можно описать и видимое суточное движение Солнца, упомянутое в начале лекции. Путем прямых вычислений можно убедиться, что сила тяготения, действующая на Солнце со стороны Земли, на много порядков меньше действующей на него центробежной $\mathbf{F}_{\text{цб}}$ и кориолисовой $\mathbf{F}_{\text{кор}}$ сил инерции. В связи с этим силу тяготения в данном случае можно во внимание не принимать (рис. 6.21). Относительная (видимая) скорость Солнца равна

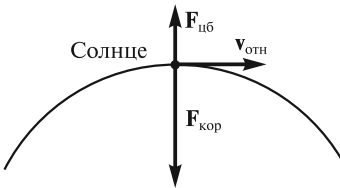


Рис. 6.21
 $\vec{\omega} \odot$ Земля

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = -\vec{\omega} \times \mathbf{R}, \quad (6.70)$$

где $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости Земли; R — расстояние от Земли до Солнца.

Сила инерции Кориолиса направлена к Земле и равна

$$F_{\text{кор}} = 2Mv_{\text{отн}}\omega, \quad (6.71)$$

а центробежная сила инерции направлена от Земли и равна

$$F_{\text{цб}} = M\omega^2 R, \quad (6.72)$$

где M — масса Солнца.

Результирующая этих двух сил инерции, центробежной и Кориолиса, направлена к Земле и равна

$$F = M\omega^2 R. \quad (6.73)$$

В системе отсчета, связанной с Землей, ее можно рассматривать как центростремительную силу, обеспечивающую видимое суточное движение Солнца по воображаемой окружности с радиусом R . Очевидно, те же самые рассуждения применимы и к видимому суточному движению звезд.

Некоторый формализм такого подхода становится очевидным, если оценить относительные скорости $v_{\text{отн}}$. Если для Солнца $v_{\text{отн}} \approx (1/30)c$, где c — скорость света, то в случае звезд $v_{\text{отн}} > c$. Например, для звезды Вега, как было отмечено ранее, $v_{\text{отн}} \sim 6 \cdot 10^4 c$! Ясно, что реальные движения тел со сверхсветовыми скоростями невозможны. В НИСО эти движения можно интерпретировать как происходящие под действием равнодействующих сил инерции, кориолисовой и центробежной. Фиктивность, условность сил инерции в данном случае особенно наглядна. Вместе с тем очевидна необходимость привлечения этих сил для объяснения видимого суточного движения небесных тел в системе отсчета, связанной с вращающейся Землей.

Движения масс воздуха в атмосфере и океанские течения. Следует отметить, что на поверхности Земли существуют целые районы, для которых в приземном слое атмосферы характерны те или иные господствующие направления ветров. Например, в Северном полушарии в области средних широт 30° — 60° массы воздуха движутся преимущественно на север. Силы инерции Кориолиса отклоняют эти массы к востоку, поэтому в этой области господствуют западные ветры (рис. 6.22). Потоки воздуха от широт $\varphi \approx 30^\circ$ в направлении на юг отклоняются силой инерции Кориолиса к западу, поэтому в области южных широт Северного полушария преобладают так называемые северо-восточные пассаты. В самых высоких широтах преобладают восточные ветры. Соответствующие потоки воздуха имеются и в Южном полушарии (рис. 6.22). В более высоких слоях атмосферы господствуют ветры других направлений.

Существенное влияние на погоду оказывают циклоны и антициклоны. В случае циклонического движения воздух из области высокого давления втекает в область пониженного давления.

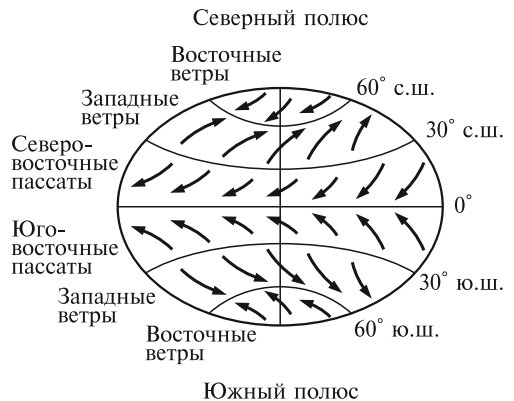


Рис. 6.22

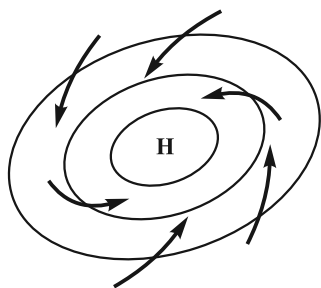


Рис. 6.23

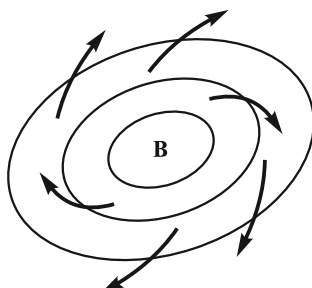


Рис. 6.24

При этом в Северном полушарии под действием сил инерции Кориолиса он отклоняется вправо по ходу движения, в Южном — влево. В результате в Северном полушарии циркуляция воздушных масс в циклоне происходит против часовой стрелки (рис. 6.23, Н — область низкого давления), а в Южном — по часовой. Гладкие кривые на рис. 6.23 соответствуют изобарам — линиям постоянного давления, а стрелками отмечено направление движения воздуха. Если бы не было сил инерции Кориолиса, то воздушные течения были бы перпендикулярны изобарам. Завихрения в сторону «ядра» циклона в данном случае обусловлены совместным действием нескольких сил: силы, связанной с перепадом давлений, центробежной и кориолисовой сил инерции, а также сил вязкого трения.

В случае антициклонического движения воздух вытекает из области высокого давления (В) и также отклоняется кориолисовой силой инерции. В результате возникает движение воздуха, направленное в Северном полушарии по часовой стрелке (рис. 6.24), а в Южном — против часовой стрелки.

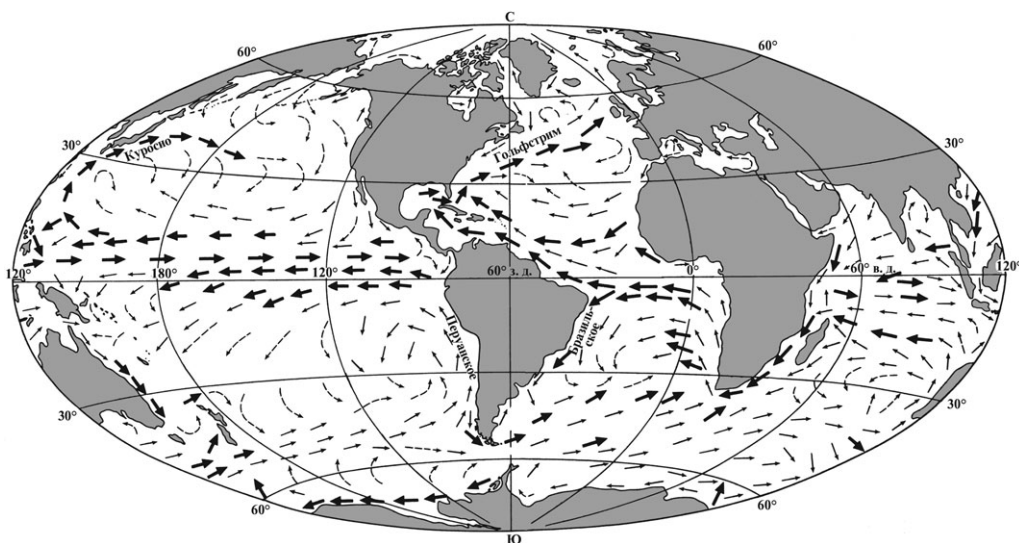


Рис. 6.25

Существуют также крупномасштабные движения воды в морях и океанах (течения). Большинство течений, за исключением приливных, обусловлены либо господствующими в данной местности ветрами, либо неравномерностью в распределении плотности воды, связанной с изменениями температуры и солености. Наиболее крупные океанские течения в Северном полушарии — это Гольфстрим в Атлантике и Куроисио в Тихом океане. Расход воды в этих течениях составляет $5 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^8 \text{ м}^3/\text{с}$. Вся эта огромная масса воды, текущая на север, под действием силы инерции Кориолиса отклоняется к востоку (рис. 6.25). В Южном полушарии Перуанское течение в том же северном направлении отклоняется к западу, а Бразильское течение, направленное на юг, отклоняется к востоку. Крупномасштабная циркуляция водных масс в Северном полушарии осуществляется преимущественно по часовой стрелке, а в Южном — против часовой стрелки.

Из других проявлений сил инерции Кориолиса отметим подмывание правых берегов крупных рек, текущих на север в Северном полушарии. В случае небольших быстрых извилистых речек определяющую роль играют центробежные силы инерции, в результате чего подмываются как левый, так и правый берега.

Принцип эквивалентности. Выше были введены силы инерции. Величины этих сил пропорциональны массе тел, на которые эти силы действуют. Напомним, что таким же универсальным свойством обладают и силы тяготения. Со времени опытов Галилея известно, что все тела, независимо от их массы и состава, приобретают в поле тяготения Земли одно и то же ускорение. Постоянство ускорения g с относительной погрешностью $\Delta g/g \sim 10^{-3}$ было известно Ньютону. В своих опытах Р. Этвеш также подтвердил это постоянство с относительной погрешностью $\sim 10^{-8}$. В опытах Р. Дикке, а затем В. Б. Брагинского и В. И. Панова эта погрешность была уменьшена соответственно до 10^{-11} и 10^{-12} . Планируется проведение еще более прецизионных экспериментов.

Эйнштейн, обратив внимание на то, что и силы инерции, и силы гравитации пропорциональны массе тел, предложил простой мысленный эксперимент. Пусть наблюдатель находится в закрытой со всех сторон кабине лифта. Если эта кабина покоится на Земле, то наблюдатель увидит обычные проявления силы тяготения: все тела будут падать с одинаковым ускорением. В другом случае, когда кабина движется с постоянным ускорением g , направленным в сторону потолка, в пространстве, где нет сил тяготения, наблюдатель также отметит, что ускорения всех падающих на пол кабины тел одинаковы. Поэтому по явлениям, происходящим в кабине, отличить эти два случая можно лишь тогда, когда кабина большая. Действительно, вследствие неоднородности поля тяготения можно заметить незначительное изменение расстояния между двумя падающими телами, а в поле сил инерции этого изменения не будет. Однако всегда можно выбрать такую локальную систему отсчета, в которой действие сил инерции и гравитации будет неразличимо. Это утверждение известно как знаменитый *принцип эквивалентности* Эйнштейна. На основе этого принципа Эйнштейн разработал общую теорию относительности (ОТО).

Проиллюстрируем применение принципа эквивалентности для объяснения одного из основных эффектов ОТО — красного смещения в гравитационном

поле. Пусть имеется установка, содержащая источник И фотонов с частотой ω и приемник П на высоте H , в котором эти фотоны могут поглощаться (рис. 6.26). Рассмотрим фотоны, летящие вверх в поле тяготения Земли, которое будем считать однородным. Эффект заключается в том, что частота, регистрируемая с помощью приемника П, меньше ω на величину $\Delta\omega$. В первом приближении имеет место равенство

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{gH}{c^2}, \quad (6.74)$$

где c — скорость света.

Рассмотрим этот эффект в системе отсчета лифта Л, который свободно падает относительно установки с ускорением g . В этом лифте поле тяготения отсутствует, и поэтому нет никаких причин, которые бы могли привести к изменению частоты фотона. Если в момент времени $t=0$ скорость лифта $v=0$ и в этот же момент времени излучается фотон с частотой ω , то в момент $t=H/c$ фотон достигнет приемника, который в системе отсчета, связанной с лифтом, будет иметь скорость

$$v = gt = \frac{gH}{c}, \quad (6.75)$$

направленную вверх. Таким образом, фотон будет догонять приемник. Но в этом случае должен проявиться эффект Доплера. В соответствии с этим эффектом, зарегистрированная в приемнике частота будет меньше ω на величину $\Delta\omega$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{v}{c}. \quad (6.76)$$

Если в эту формулу подставить значение скорости v из (6.75), то получим формулу (6.74), предсказанную в ОТО. Из рассмотренного ясно, что частота ω фотона не изменяется, а эффект возникает из-за движения приемника.

Рассмотрим теперь, с чем связано появление $\Delta\omega$ в гравитационном поле. Согласно ОТО, в статическом гравитационном поле частота ω фотона не изменяется с высотой подъема H . Следовательно, единственно возможным объяснением появления $\Delta\omega$ может быть различие в темпе хода часов, находящихся вблизи источника и вблизи приемника. Согласно ОТО, темп хода часов действительно увеличивается по мере их поднятия в гравитационном поле. Прямые эксперименты с прецизионными часами, одни из которых находились в самолете на некоторой высоте, а другие оставались на Земле, подтвердили этот эффект вначале с погрешностью $\sim 10\%$ (опыты Д. Хафеле и Р. Китинга), а затем с погрешностью $\sim 1\%$ (опыты С. Аллея и др.). Впоследствии изменение темпа хода часов в гравитационном поле было подтверждено с погрешностью $\sim 0,02\%$ (опыты Вессо и Левина с часами на ракете, которая поднималась на высоту $\sim 10^4$ км).

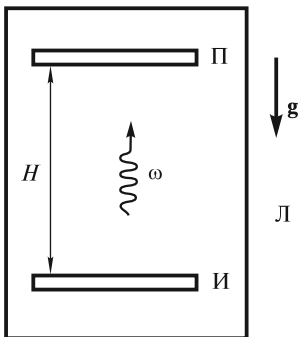


Рис. 6.26

В случае атомных часов при их подъеме в гравитационном поле возрастает расстояние между уровня-

ми энергии электрона в атоме, а в случае ядерных часов — расстояние между уровнями энергии ядра. При увеличении разности энергий между уровнями в атоме (ядре) повышается частота излучения и уменьшается период колебаний. Это означает, что такие атомные (ядерные) часы будут идти быстрее. Частота фотонов измеряется в одном случае относительно «быстрых» часов, расположенных наверху, а в другом — относительно «медленных» часов, расположенных внизу. В первом приближении и получается формула (6.74) для красного смещения $\Delta\omega$ частоты. Очевидно, $\Delta\omega$ есть просто разность частот, которая получается при измерениях с помощью часов с разным темпом хода.

В 1960 г. Паунд и Ребка с погрешностью $\sim 10\%$ (позднее Паунд и Снайдер уменьшили погрешность до $\sim 1\%$) подтвердили формулу (6.74). Они проводили опыты с гамма-лучами, которые испускаются ядрами изотопа железа ^{57}Fe . Фотоны поднимались вверх (в другой серии опытов двигались вниз) в башне высотой около 22 м. Наблюдаемое смещение частоты было очень мало:

$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 10^{-15}$. Высокая точность измерений была достигнута благодаря эффекту

Мессбауэра. Эффект состоит в том, что в процессе излучения фотона отдача воспринимается не одним излучающим атомом, а всем кристаллом. Так как масса кристалла велика, то скорость отдачи мала. Поэтому излучаются (и поглощаются) чрезвычайно монохроматические фотоны, что и позволило добиться высокой точности измерений.

РАЗДЕЛ 2

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

ЛЕКЦИЯ 7

Настоящая и три последующие лекции посвящены изложению релятивистской механики.

Трудности восприятия основных представлений о пространстве-времени, кинематики и динамики движений с околосветовыми скоростями, как представляется, связаны с отсутствием учебной экспериментальной базы и возможностей наблюдения за движениями с такими скоростями. Обычный повседневный опыт заставляет усомниться в достоверности релятивистских эффектов и даже вызывает их неприятие. Преодолеть этот психологический барьер можно, ознакомившись, во-первых, с историей становления специальной теории относительности, и, во-вторых, с большим объемом экспериментальных данных, полученных в опытах с релятивистскими частицами. Такие частицы имеются в естественных условиях (космические лучи) и могут быть получены на ускорителях.

Исходные положения механики Ньютона. Как известно, в механике Ньютона используются представления о трехмерном евклидовом пространстве и независимом времени. Положение материальной точки в пространстве определяется с помощью радиуса-вектора \mathbf{r} или его проекций на оси соответствующей системы координат. Изменение положения материальной точки определяется законом движения, т.е. зависимостями от времени t либо радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$, либо координат точки. Выбор этих координат никак не связан с определением времени t и полностью произволен.

В декартовой системе координат расстояние l_{12} между точками 1 и 2 определяется, согласно геометрии Евклида, хорошо известной формулой

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \text{inv.} \quad (7.1)$$

Величина l_{12} всегда положительна и одинакова во всех инерциальных системах отсчета, т.е. является инвариантом. Таким образом, длины всех отрезков (линеек) остаются постоянными при переходе из одной ИСО в другую. Промежутки времени между двумя событиями не зависят от координат и в разных ИСО остаются постоянными

$$t_{12} = t_2 - t_1 = \text{inv.} \quad (7.2)$$

Следствием таких представлений о пространстве и времени являются преобразования Галилея. Согласно этим преобразованиям, ускорение материальной точки одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Сила, которая

действует на одну материальную точку со стороны другой, также не изменяется при переходе из одной ИСО в другую, так как зависит только от инвариантных величин (расстояния между точками и, возможно, относительной скорости и времени). Поэтому и уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

Еще одним положением механики Ньютона является утверждение о бесконечно большой скорости распространения взаимодействий, их «мгновенности». Например, гравитационная сила, действующая на материальную точку 1, согласно закону всемирного тяготения Ньютона, зависит только от положения материальной точки 2. Изменение этого положения, независимо от расстояния между точками, мгновенно приводит к изменению силы, действующей на первую точку. Ньютон не допускал возможности распространения взаимодействий в «пустом» пространстве. Поэтому он, как и Гюйгенс, предполагал, что существует особая субстанция — эфир, которая заполняет все пространство между телами. Именно через этот эфир одно тело воздействует на другое. Для объяснения бесконечно большой скорости распространения взаимодействий эфир наделялся фантастическими упругими свойствами.

Ясно, что такие представления о самых фундаментальных сущностях — пространстве, времени, скорости распространения взаимодействий, эфире — могли возникнуть как результат обобщения текущего, повседневного и весьма ограниченного опыта деятельности человека за сравнительно короткий исторический период времени. Достижения физики в XX в. показали, что эти представления об абсолютном пространстве, абсолютном и независимом времени, мгновенности распространения взаимодействий являются приближенными, некоторой аппроксимацией реальных свойств пространства-времени, погрешность которой лежит за пределами возможностей эксперимента эпохи Ньютона. Современный уровень экспериментальных исследований позволяет подойти к решению этих фундаментальных вопросов не умозрительно, не в рамках какой-либо «красивой теории», а на основе надежно установленных фактов, количественного анализа результатов опыта.

Предельная скорость распространения взаимодействий. Исходя из результатов проведенных в XX веке экспериментов, совсем не трудно прийти к выводу о конечной величине скорости распространения взаимодействий. В самом деле, на всех ускорителях при увеличении энергии заряженных элементарных частиц их скорость стремится к некоторому пределу $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Никто не наблюдал частиц, скорости которых превышали бы этот предел. Например, в линейном ускорителе SLAC (США) электроны проходят в электрическом поле разность потенциалов $\Delta U = 2,3 \cdot 10^{10}$ В. Согласно классической механике Ньютона, скорость таких электронов в конце пути ускорения должна была бы составлять $v = 9,9 \cdot 10^{10}$ м/с, т. е. примерно в 300 раз превышать упомянутый предел! Фактическая же скорость электронов в конце пути ускорения на 0,075 м/с меньше предела c . В космических лучах встречаются частицы, предположительно протоны, с энергией $E \approx 5$ Дж. Оцениваемая косвенным образом скорость таких частиц также не превышает предела c , вопреки расчетному фантастическому значению $v = \sqrt{2E/m} \approx 2,4 \cdot 10^{14}$ м/с!

Отметим, что предельная скорость частиц c совпадает со скоростью света (потока фотонов) в вакууме. Последняя измерялась многократно, и в настоящее время принято ее точное значение $c = 299\,792\,458$ м/с (см. лекцию 1). В 1987 г. астрономы наблюдали вспышку света вследствие взрыва сверхновой звезды в соседней с нашей небольшой галактике Большое Магелланово Облако. Расстояние от этой галактики до нашей равно $R \approx 1,6 \cdot 10^{21}$ м. Очевидно, что от момента вспышки до ее регистрации на Земле прошло время $t \approx 5,4 \cdot 10^{12}$ с. За время $\Delta t \approx 10^4$ с до вспышки физики зарегистрировали поток нейтрино от этого взрыва, образование которых, согласно теории, предшествует вспышке примерно на то же самое время. Это наблюдение означает, что скорость c_ν нейтрино не отличается от скорости света c в пределах относительной погрешности $|c_\nu/c - 1| < 10^{-8}$.

Таким образом, все современные измерения подтверждают вывод о существовании предельной скорости частиц.

В современной физике фундаментальное взаимодействие интерпретируется как обмен соответствующими частицами. Например, сильное взаимодействие между кварками внутри нуклонов (протонов и нейтронов) возникает в результате обмена глюонами — переносчиками этих взаимодействий. Так называемые электрослабые взаимодействия — следствие обмена векторными бозонами. Если взаимодействия интерпретировать как обмен частицами, то из факта существования предельной скорости c частиц следует ограничение и на скорость распространения взаимодействий. Таким образом, совершенно естественно утверждение: *скорость распространения фундаментального взаимодействия, или, как говорят, скорость сигнала не превосходит предела $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.*

Поскольку инерциальные системы отсчета должны быть связаны с какими-либо физическими телами или частицами, то ясно, что ни одна из систем не может двигаться относительно любой другой со скоростью, превышающей этот предел c .

При создании теории относительности А. Эйнштейн использовал постулат о постоянстве скорости света: *скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета.* Эта скорость впервые была оценена в 1675 г. норвежским астрономом О. Ремером, который наблюдал за движением спутника Юпитера Ио, открытого Галилеем. Когда во время обращения вокруг Юпитера этот спутник заходит в его тень, т. е. оказывается над поверхностью планеты, противоположной по отношению к Земле, он становится невидимым с Земли (рис. 7.1). Период обращения Ио вокруг Юпитера равен $T = 42$ ч. Ремер заметил, что когда Земля из положения 1 между Солнцем и Юпитером примерно за пол-

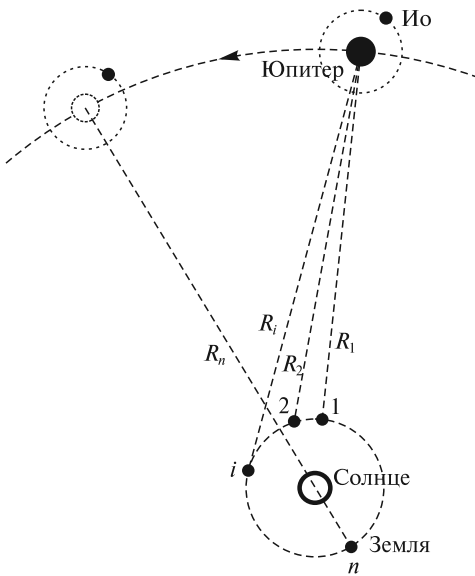


Рис. 7.1

года перемещается в точку n своей орбиты, относительно которой уже Солнце оказывается между Землей и Юпитером, времена наступления очередных затмений запаздывают по сравнению с ожидаемыми временами, оцененными для бесконечной скорости света. Максимальная задержка составляет $\Delta t_{\max} = 22$ мин. Эту задержку Ремер связал с временем прохождения светом диаметра земной орбиты ($2R$). В самом деле, когда Земля в своем годичном движении вокруг Солнца будет находиться в положении 1, ближайшем к Юпитеру, то момент затмения спутника Ио, наблюдаемого астрономами, будет запаздывать по отношению к самому событию на время $t_1 = R_1/c$, где R_1 — кратчайшее расстояние от Земли до Юпитера и c — скорость света. Через период $T = 42$ ч, когда Ио совершит полный оборот и начнется очередное затмение, Земля переместится в положение 2, и запаздывание будет равно $t_2 = R_2/c$. Так как $R_2 > R_1$, то это затмение будет наблюдаться не через 42 ч, а позднее, с запаздыванием $t_{21} = (t_2 - t_1) = (R_2 - R_1)/c$. Очевидно, очередным затмениям 3, ..., i будут соответствовать запаздывания $t_3 = R_3/c$, ..., $t_i = R_i/c$. Каждое последующее затмение i ($i > 1$) будет наблюдаться позднее ожидаемого момента времени $(i - 1)T$ на $\Delta t_{i1} = (R_i - R_1)/c$. Примерно через полгода, когда Юпитер переместится в положение, показанное на рисунке слева, а Земля — в положение n , момент наблюдения n -го затмения будет запаздывать относительно времени $(n - 1)T$ на

$$\Delta t_{n1} = (R_n - R_1)/c = 2R/c, \quad (7.3)$$

где R — радиус земной орбиты (именно эту величину $\Delta t_{n1} = \Delta t_{\max} = 22$ мин и измерил Ремер).

Поскольку астрономическая единица R — расстояние от Земли до Солнца — в то время не была точно известна и погрешность измерения Δt_{\max} составляла около 5 мин, то Ремер оценил скорость света как $c \approx 2,1 \cdot 10^8$ м/с. Такое большое значение по сравнению с типичными скоростями движения небесных тел привлекло к себе внимание. Распространение света связывалось с упругими колебаниями в уже упоминавшейся выше особой среде — эфире. При анализе движения реальных тел возник вопрос: увлекается ли эфир в эти движения частично или полностью, или не увлекается совсем? Для ответа на этот вопрос ставились многочисленные опыты; некоторые из них будут рассмотрены ниже.

Неудивительно, что Эйнштейн использовал постулат о постоянстве скорости света: ускорители заряженных частиц еще не были построены, космические лучи не открыты, а о мощном потоке таких частиц, как антинейтрино, летящих от Солнца к Земле со скоростью c , и не подозревали. Поток антинейтрино составляет около $6 \cdot 10^{14}$ частиц/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), что по сравнению с потоком фотонов солнечного света, равным $4 \cdot 10^{21}$ фотонов/($\text{м}^2 \cdot \text{с}$), примерно на 7 порядков меньше. Сказалось и то обстоятельство, что свет регистрируется сетчаткой человеческого глаза, а все остальные частицы невидимы. Между тем совершенно ясно, что свет, как поток фотонов, т.е. поток только одного типа частиц из сотен уже известных, не должен ставиться в привилегированное положение. Поэтому при изложении теории относительности точнее было бы говорить о предельной скорости распространения взаимодействий.

Принцип относительности. В XIX в. представления Ньютона о пространстве, времени и эфире не вызывали сомнений. Считалось, что преобразования Галилея описывают связь координат и времени наступления событий в любых двух

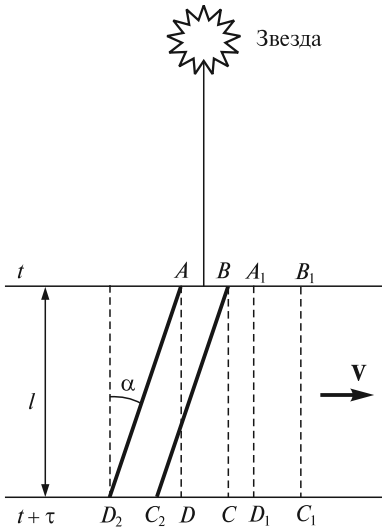


Рис. 7.2

$V = 30$ км/с (рис. 7.2). Если в некоторый момент времени t часть фронта плоской световой волны от звезды достигнет объектива AB трубы, которая занимает вертикальное положение $ABCD$, то спустя промежуток времени $\tau = l/c$, где l — длина трубы и c — скорость света относительно эфира, эта часть фронта окажется вблизи DC . Из-за движения Земли труба, однако, сместится на расстояние $\tau \cdot V$ и будет занимать положение $A_1B_1C_1D_1$. Так как новое положение окуляра D_1C_1 трубы в этом случае не будет совпадать с участком фронта волны вблизи DC , то наблюдатель не увидит звезды. Если же труба будет занимать положение ABC_2D_2 , т.е. будет ориентирована под углом α к направлению на звезду, где

$$\operatorname{tg} \alpha = V/c = 3 \cdot 10^4 / (3 \cdot 10^8) = 10^{-4}, \quad (7.4)$$

то в момент t часть фронта волны попадет на объектив AB , а в момент $t + \tau$ — на окуляр, который из начального положения D_2C_2 за время τ переместится в положение DC . Таким образом, для наблюдателя при его движении в эфире видимые положения звезд смещены относительно истинных на угол $\alpha \approx 20,5''$. Поскольку в течение полугода направление движения Земли изменяется на противоположное, то полное смещение и составляет указанную выше величину $2\alpha \approx 41''$. Следует отметить, что абберация света звезд явилась первым прямым экспериментальным доказательством орбитального движения Земли. Заметим, что если бы эфир двигался вместе с Землей («увлекался» Землей), то абберация света звезд не наблюдалась бы ($\alpha = 0$).

Концепция неподвижного эфира была поставлена под сомнение в 1851 г. экспериментами А. Физо, который, по предложению О. Френеля, проводил измерения скорости света в потоке воды. Результаты опыта согласовывались с гипотезой частичного увлечения эфира.

Ситуация с неподвижным и движущимся эфиром еще более обострилась в 1864 г., когда Дж. Максвелл, обобщая результаты экспериментов Ш. Кулона,

инерциальных системах отсчета. Законы механики Ньютона инвариантны относительно этих преобразований. Это и означает, что во всех ИСО описание механических явлений одинаково, т.е. с точки зрения классической механики все инерциальные системы эквивалентны. Это утверждение находится в полном соответствии с принципом относительности Галилея.

Эфир представлялся абсолютно неподвижным. Это следовало из наблюдений абберации света звезд. Такие наблюдения были впервые проведены Дж. Брэдли в 1725—1728 гг. Брэдли заметил, что видимые положения некоторых звезд в течение полугода изменяются примерно на $41''$. В рамках классической механики абберация объясняется следующим образом. Пусть направление на звезду перпендикулярно прямой, по которой в данный момент движется Земля относительно эфира со скоростью

А. Ампера, М. Фарадея и других исследователей, предложил уравнения, в которых напряженность электрического поля \mathbf{E} и магнитная индукция \mathbf{B} были связаны друг с другом. Все известные электромагнитные явления можно было интерпретировать на основе этих уравнений. Более того, были предсказаны новые явления. Из уравнений Максвелла следовало существование электромагнитных волн, которые в вакууме распространяются со скоростью

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}, \quad (7.5)$$

где ϵ_0 , μ_0 — соответственно электрическая и магнитная постоянные.

Эти электромагнитные волны были впоследствии открыты в экспериментах Г. Герца. Затем было показано, что свет — это тоже электромагнитная волна. Тем самым было установлено, что скорость света совпадает со скоростью электромагнитных волн (7.5). Несомненный успех уравнений Максвелла омрачился только одним досадным, как тогда казалось, обстоятельством: эти уравнения не были инвариантными относительно преобразований Галилея. В частности, скорость света c , согласно этим преобразованиям, должна была изменяться при переходе из одной ИСО в другую. Неинвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Галилея могла быть интерпретирована только в рамках следующих возможностей.

Во-первых, можно было предположить, что система уравнений Максвелла справедлива только для одной выделенной системы отсчета (например, для системы, связанной с неподвижным эфиром), а для других движущихся относительно эфира систем она должна быть изменена. В уравнения необходимо внести поправки таким образом, чтобы их новая форма стала бы инвариантной относительно преобразований Галилея. Герц ввел такие поправки, но эти изменения противоречили прямым экспериментальным данным: не было обнаружено новых электродинамических эффектов, которые бы соответствовали внесенным поправкам. Возможность согласования уравнений Максвелла с преобразованиями Галилея отпала.

Другой способ решения проблемы — это признание неприменимости принципа относительности Галилея к электродинамике. Иными словами, с помощью электромагнитных явлений возможно обнаружение движения одних ИСО относительно других, в том числе относительно выделенной неподвижной, абсолютной системы, которая связывалась с покоящимся эфиром. Появились надежды на обнаружение эфира из наблюдений за распространением в нем света. Если скорость света относительно эфира равна c , то относительно Земли, которая, как предполагалось, движется относительно эфира со скоростью $V \approx 3 \cdot 10^4$ м/с, она должна быть равна $c + V$, если свет распространяется в направлении, противоположном движению Земли (от звезд, расположенных «впереди»), и $c - V$, если в том же направлении (от звезд, расположенных «сзади»). Поэтому возникла идея определить скорость V Земли относительно эфира примерно таким же образом, как Ньютон пытался найти скорость ветра во время бури, измеряя дальность прыжков по ветру и против. Однако, в случае «эфирного ветра» существующая техника прямых измерений скорости не позволяла реализовать подобный эксперимент (так как $V/c \approx 10^{-4}$, то измерения скорости должны были бы проводиться с точностью до 5÷6 значащих цифр).

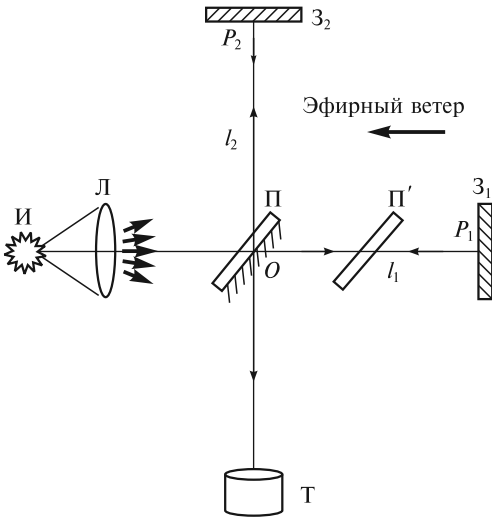


Рис. 7.3

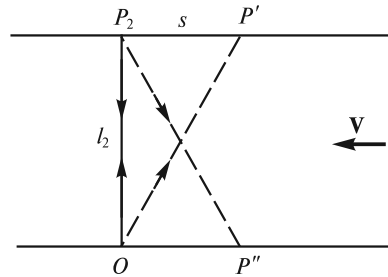


Рис. 7.4

А. Майкельсон сконструировал интерферометр и поставил опыт, в котором сравнивались скорости света в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Идею опыта кратко можно описать следующим образом (рис. 7.3). Свет от источника И падает на линзу Л и затем на полупрозрачную пластинку П, которая разделяет падающий на нее слегка расходящийся пучок света на два. Один из них проходит через эту пластинку в направлении зеркала Z_1 , отражается от него, а затем и от пластинки П, и идет по направлению к зрительной трубе Т. Другой пучок сначала отражается от посеребренной грани пластинки П и идет по направлению к зеркалу Z_2 , отражается от него, проходит через пластинку П и также распространяется к трубе Т, с помощью которой можно наблюдать интерференционную картину от этих пучков. Так как во втором случае свет проходит через пластину П трижды, то на пути первого пучка, распространяющегося в направлении зеркала Z_1 , ставится компенсационная пластинка П' для уравнивания длин оптических путей.

Интерферометр движется относительно эфира со скоростью V (вследствие орбитального движения Земли). Если $l_1 = OP_1$ — длина плеча интерферометра, ориентированного в направлении движения, то в системе отсчета, связанной с интерферометром, в соответствии с законом сложения скоростей Галилея, время t_1 прохождения света от точки O до точки P_1 и обратно равно

$$t_1 = l_1 \left(\frac{1}{c - V} + \frac{1}{c + V} \right) = \frac{2l_1}{c(1 - \beta^2)}, \quad (7.6)$$

где введено обозначение $\beta = V/c$. Таким образом, время t_1 зависит от скорости V эфирного ветра, дующего в направлении на источник И (справа налево).

Из-за эфирного ветра второй пучок света из точки O попадет в точку P_2 зеркала Z_2 в том случае, если он выйдет в направлении точки P' , отстоящей от P_2 на расстояние $s = P'P_2$ (рис. 7.4). Отраженный в направлении P_2P'' пучок

из-за сноса эфирным ветром вернется в точку O . Время t_2 прохождения света от точки O до точки P_2 и обратно, очевидно, определяется следующей формулой:

$$t_2 = \frac{2\sqrt{l_2^2 + s^2}}{c}, \quad (7.7)$$

где $l_2 = OP_2$.

Очевидно равенство

$$\frac{s}{V} = \frac{\sqrt{l_2^2 + s^2}}{c}, \quad (7.8)$$

из которого имеем

$$s = l_2 \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.9)$$

Подставляя (7.9) в (7.7), находим

$$t_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.10)$$

Оптическая разность хода двух пучков света будет равна

$$\Delta_1 = c(t_1 - t_2) = \left(\frac{2l_1}{1 - \beta^2} - \frac{2l_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - l_2 \right). \quad (7.11)$$

Если повернуть интерферометр на 90° , то новая разность хода между пучками, распространяющимися к зеркалам Z_1 и Z_2 , будет равна

$$\Delta_2 = \frac{2l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{2l_2}{1 - \beta^2} = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right), \quad (7.12)$$

так как эфирный ветер будет дуть уже вдоль плеча l_2 . В итоге при таком повороте разность хода изменится на величину

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{2(l_1 + l_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right). \quad (7.13)$$

В опытах, проведенных в 1881 г., длины плеч интерферометра были одинаковы: $l = l_1 = l_2 = 120$ см. Выражение (7.13) можно упростить, если ограничиться членами порядка β^2 при разложении функции $\Delta(\beta)$ в ряд Тейлора:

$$\Delta \approx 2\beta^2. \quad (7.14)$$

Поэтому при повороте интерферометра интерференционная картина должна сместиться на n полос, число которых равно

$$n = \frac{\Delta}{\lambda} \approx \frac{2l}{\lambda} \beta^2, \quad (7.15)$$

где λ — длина волны света.

Так как в упомянутых опытах $\lambda = 600$ нм, то при $\beta = 10^{-4}$ ожидаемое смещение должно составлять величину

$$n = \frac{2 \cdot 1,2}{6 \cdot 10^{-7}} \cdot 10^{-8} = 0,04. \quad (7.16)$$

Однако этого смещения с погрешностью $\Delta n = 0,01$ полосы обнаружено не было. В опытах Иооса, выполненных в 1930 г., длина l была примерно в 18 раз больше и поэтому ожидаемое смещение составляло уже $n = 0,75$ полосы. Но и в этом случае какого-либо смещения интерференционных полос с погрешностью $\Delta n = 0,001$ полосы не наблюдалось.

Таким образом, следовало признать, что $\beta = 0$ [см. (7.15)]. Это означало, что эфир, если он существует, полностью увлекается Землей при ее движении, и относительно эфира скорость интерферометра равна нулю. Однако такая интерпретация опытов Майкельсона, а в последующем опытов Майкельсона—Морли и других исследователей прямо противоречила наблюдаемой абберации света и опытам Физо.

Итак, движение относительно эфира, с которым связывали абсолютную систему отсчета, обнаружить не удалось. Опыты Майкельсона дали основание предполагать, что в любой инерциальной системе отсчета скорость света в вакууме одинакова в любых направлениях, т.е. изотропна. Однако оставался еще вопрос, одинаково ли численное значение скорости света c в различных ИСО. Ответ на этот вопрос был дан в 1932 г. в опытах Р. Кеннеди и Е. Торндайка, которые использовали интерферометр Майкельсона с разностью длин плеч $l_1 - l_2 = 16$ см. Для обеспечения постоянства всех расстояний интерферометр монтировался на кварцевой плите, температура которой поддерживалась постоянной с погрешностью $0,001^\circ\text{C}$. Для зеленого света от ртутной лампы (длина волны $\lambda = 546$ нм) запаздывание одного пучка относительно другого составляло N периодов, где

$$N = \frac{2(l_1 - l_2)}{\lambda} = 5,86 \cdot 10^5. \quad (7.17)$$

Опыт продолжался в течение нескольких месяцев. За полгода Земля изменяет направление своего движения на противоположное. Если в двух инерциальных системах, соответствующих началу и концу этого промежутка времени, изменилась бы скорость света c , то число N стало бы другим, так как $\lambda = cT$, где T — период световых колебаний. В этом случае произошло бы смещение интерференционной картины: например, если в одной системе отсчета в центре картины была бы яркая полоса, то при изменении запаздывания N на полпериода в центре была бы уже темная полоса. Кеннеди и Торндайк не обнаружили смещения интерференционной картины с погрешностью $\delta N = 0,003$ периода. Отсюда следует, что численное значение скорости света в этих двух системах отсчета остается постоянным с погрешностью [см. (7.17)]

$$\delta c = \frac{\delta N}{N} c = 2 \text{ м/с}. \quad (7.18)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что оптические явления протекают одинаково во всех ИСО. Другие опыты с электромагнитными волнами также

показали, что электромагнитные явления, как и механические, протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета, т.е. принцип относительности Галилея распространяется и на эти явления.

А. Пуанкаре в 1904 г. и А. Эйнштейн в 1905 г. распространили принцип относительности Галилея на все явления природы: *все законы природы во всех инерциальных системах отсчета одинаковы*. С математической точки зрения принцип относительности означает, что уравнения, выражающие законы физики, во всех ИСО должны иметь один и тот же вид.

Как было отмечено выше, уравнения Ньютона инвариантны, а уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея. Ясно, что необходимы другие преобразования координат и времени, отличные от преобразований Галилея. И уравнения Максвелла, и законы механики должны быть инвариантны относительно этих новых преобразований. Таким образом, фундаментальные представления классической механики о пространстве и времени должны быть пересмотрены.

Гипотеза о сокращении длин движущихся тел. Пересмотр привычных представлений о пространстве и времени начался не с последовательных, ясных и четких утверждений, а с экстравагантных идей, предложенных с единственной целью хоть как-то объяснить результаты опытов Майкельсона—Морли. Х.Лоренц и независимо от него Дж.Фитцджеральд предположили, что размеры всех тел в направлении движения относительно неподвижного эфира испытывают сокращение в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз. Если длина тела равна l_0 , то при движении относительно неподвижного эфира со скоростью V длина l этого тела в направлении движения становится равной

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (7.19)$$

Согласно гипотезе Лоренца, сначала плечо l_1 интерферометра Майкельсона, которое ориентировано вдоль направления движения Земли, испытывает сокращение (7.19), и разность хода (7.11) становится равной

$$\Delta_1 = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} (l_1 - l_2). \quad (7.20)$$

После поворота интерферометра на 90° сократится уже плечо l_2 , и разность хода (7.12) составит величину

$$\Delta_2 = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} (l_1 - l_2). \quad (7.21)$$

Таким образом, из (7.20) и (7.21) видно, что смещения интерференционной картины не будет, так как до и после поворота интерферометра разности хода Δ_1 и Δ_2 одинаковы.

Однако из формулы (7.20) видно, что если изменяется величина $\beta = \frac{V}{c}$, например, в случае длительных наблюдений, то интерференционная картина будет смещаться и без поворота интерферометра. Действительно, скорость

интерферометра есть сумма орбитальной скорости \mathbf{V}_3 Земли вокруг Солнца, скорости $\mathbf{V}_{\text{вр}}$, обусловленной суточным вращением точки земной поверхности, в которой расположен интерферометр, скорости \mathbf{V}_C Солнца и скорости $\mathbf{V}_Г$ галактики:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_{\text{вр}} + \mathbf{V}_C + \mathbf{V}_Г. \quad (7.22)$$

Скорости \mathbf{V}_C и $\mathbf{V}_Г$ в течение лабораторного эксперимента остаются практически постоянными. Напомним, что время обращения Солнца вокруг центра галактики равно примерно 250 млн лет. Возможные изменения скорости $\mathbf{V}_Г$ определяются еще бóльшими временными масштабами. Поэтому необходимо учитывать только изменения скоростей \mathbf{V}_3 и $\mathbf{V}_{\text{вр}}$. Из (7.20) и (7.21) ясно, что в случае $l_1 = l_2$ никакого смещения интерференционных полос не будет даже в случае длительных наблюдений. Иное дело, если l_1 и l_2 не равны друг другу. В этом случае при длительных наблюдениях должно быть смещение полос. Однако в длительных наблюдениях Кеннеди и Торндайка, использовавших интерферометр с неравными длинами плеч, никакого смещения полос обнаружено не было. Таким образом, с помощью гипотезы Лоренца наблюдаемую неподвижность интерференционной картины объяснить не удалось. Нужны были новые идеи.

Преобразования Лоренца. Лоренц попытался найти такие преобразования координат и времени, относительно которых уравнения Максвелла оставались бы инвариантными при переходе из одной ИСО в другую. Эти преобразования были получены им в 1904 г. Лоренц установил, что при переходе в систему отсчета K' , которая движется относительно системы K со скоростью V в направлении оси Ox (другие оси сонаправлены) (рис. 7.5), координаты и время какого-либо события изменяются в соответствии со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt); \\ y' &= y; \\ z' &= z; \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \end{aligned} \quad (7.23)$$

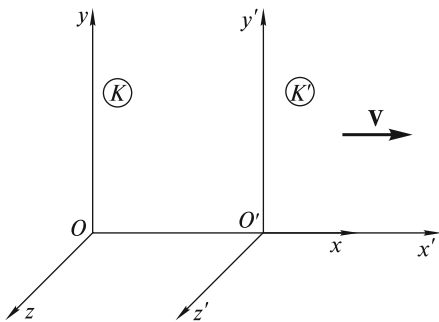


Рис. 7.5

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Позднее в 1905 г. А. Пуанкаре назвал эти преобразования *лоренцевскими* и показал их фундаментальный характер. Затем Эйнштейн в 1905 г. получил их на основе постулата о постоянстве скорости света и принципа относительности.

Получим преобразования (7.23), используя принцип относительности, постулат Эйнштейна о постоянстве скорости света и учитывая однородность и изотропность пространства и времени.

Установим в каждой из систем отсчета, изображенных на рис. 7.5, достаточное количество одинаковых синхронизованных часов с тем, чтобы в каждой точке пространства, где происходит некоторое событие, оказались бы часы, связанные с K и K' и фиксирующие времена t и t' наступления этого события. Особо отметим, что время t' может отличаться от t .

Пусть в начале координат двух систем в момент времени $t = t' = 0$, когда эти начала совпадали, произошла вспышка света. Из принципа относительности и постулата о постоянстве скорости света следует, что в обеих системах отсчета фронт световой волны — сферическая поверхность. Уравнения этой поверхности в лабораторной системе K и движущейся системе K' имеют вид

в системе K

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0; \quad (7.24)$$

в системе K'

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0. \quad (7.25)$$

Искомые преобразования должны соответствовать этим уравнениям. Например, если значения координат x' , y' , z' и времени t' выразить через x , y , z , t и подставить в уравнение (7.25), то последнее должно перейти в (7.24). Отметим, что преобразования Галилея не удовлетворяют этому требованию. В самом деле, подстановка преобразований $x' = x - Vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$ в (7.25) приводит к соотношению:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 - 2V(xt) + V^2t^2 = 0. \quad (7.26)$$

Два последних слагаемых в (7.26) — «лишние». Следовательно, преобразования Галилея необходимо изменить. При этом принципиально важно отказаться от преобразования $t' = t$ и ввести зависимость t' не только от времени t , но и от координаты x . Только в этом случае появятся добавочные члены, которые сократятся с «лишними».

Вначале рассмотрим возможную зависимость координаты x' от x , y , z , t . В силу однородности и изотропности пространства и однородности времени в самом общем случае эта зависимость должна быть линейной:

$$x' = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4t, \quad (7.27)$$

где a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 — некоторые постоянные.

Для остальных координат и времени зависимости аналогичны, но, конечно, с другими постоянными коэффициентами. В силу начальных условий (совпадение начал координат в момент времени $t = t' = 0$) свободный член $a_0 = 0$. Коэффициенты при переменных y и z также должны быть равны нулю: $a_2 = 0$, $a_3 = 0$. В самом деле, при сдвиге начала координат системы K в плоскости $Oy'z'$ координаты y и z какого-либо события изменятся, а координаты x' и x останутся прежними. Поэтому $a_2 = a_3 = 0$. В этом случае (7.27) можно привести к виду, похожему на преобразование Галилея.

Пусть некоторое событие состоит в том, что в лабораторной системе отсчета K фронт световой волны за время t достиг некоторой точки M с координатой x_M (рис. 7.6). В системе отсчета K' координата этого же события будет равна x'_M . Очевидно, что в лабораторной системе K начало отсчета системы K' за

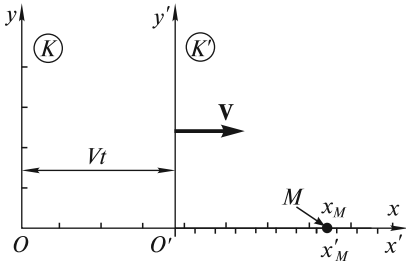


Рис. 7.6

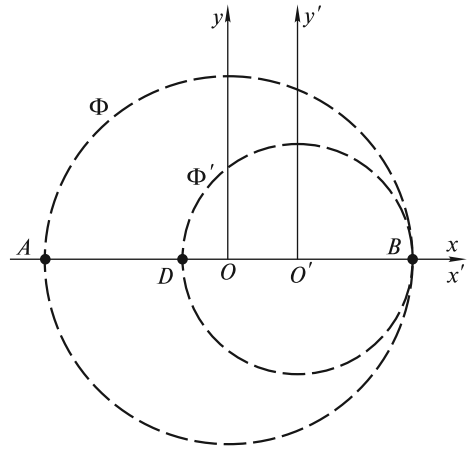


Рис. 7.7

время t переместилось на расстояние $OO' = Vt$. Поэтому в системе K рассматриваемое событие произойдет на расстоянии $(x_M - Vt)$ от точки O' . Величины x'_M и $(x_M - Vt)$ относятся к разным системам отсчета (K' и K соответственно), и их численные значения могут отличаться, что не принималось во внимание при выводе преобразований Галилея. В силу линейности (7.27) сопоставить эти величины можно единственным способом, используя некоторый масштабный множитель γ :

$$x' = \gamma(x - Vt). \tag{7.28}$$

Таким образом, в (7.27) отличные от нуля коэффициенты равны $a_1 = \gamma$ и $a_4 = -\gamma V$. Заметим, что масштабный множитель γ зависит от скорости V и при малых скоростях принимает значения, близкие к 1. Эту зависимость определим позднее.

Для координат y' и z' преобразования, очевидно, должны быть более простыми. Во-первых, в соответствии с приведенными выше аргументами, свободные члены и слагаемые с координатами, отличными от рассматриваемой, в искомые преобразования входить не должны. Во-вторых, не должно входить и время t . В самом деле, если какое-либо событие происходит в произвольный момент времени t на оси Ox ($y = z = 0$), то очевидно, что и $y' = z' = 0$. Поэтому можно сразу записать

$$y' = py; \tag{7.29}$$

$$z' = pz, \tag{7.30}$$

где p — некоторый масштабный множитель, подлежащий определению.

Что касается преобразования времени t' , то свободный член (в силу начальных условий) и слагаемые с координатами y и z (движение системы K' происходит вдоль направления, перпендикулярного плоскости $x = 0$), должны отсутствовать. Однако, как было отмечено выше, кроме времени t должно входить слагаемое с координатой x . Оно учитывает несинхронность часов в системе K

с точки зрения наблюдателя в системе K' . В самом деле, в упомянутом выше опыте со вспышкой света фронт световой волны Φ достигает равноудаленных точек A и B в системе K (рис. 7.7) в один и тот же момент времени $t_A = t_B$ (по часам системы K). Однако наблюдатель в системе K' отметит, что фронт световой волны Φ' приходит в эти точки в разные моменты времени t'_A и t'_B (по часам системы K'): сначала в точку B , а затем в точку A . Более того, с его точки зрения, в тот момент, когда фронт Φ' достигает точки B , лабораторные часы в точке A показывают меньшее время, чем лабораторные часы в точке B (лабораторные часы с точки зрения наблюдателя в системе K' идут несинхронно). Различие во времени в показаниях лабораторных часов совпадает со временем распространения световой волны из точки D в точку A . Только при наличии несинхронности хода лабораторных часов с точки зрения наблюдателя в системе K' возможно равенство $t_A = t_B$.

Итак, с точки зрения наблюдателя в системе K' лабораторные часы, расположенные в системе K в разных точках на оси Ox , вдоль которой происходит движение, показывают разное время. Различие в показаниях часов будет тем больше, чем дальше на оси Ox эти часы отстоят друг от друга. Темп хода всех лабораторных часов одинаков. Однако время в системах K и K' может идти с разной скоростью. С учетом вышесказанного преобразование для времени можно записать в виде

$$t' = g(t - nx). \quad (7.31)$$

Здесь коэффициент n учитывает несинхронность хода лабораторных часов, а различие в темпе хода часов обеих систем учтено с помощью коэффициента g .

Коэффициенты γ , p , g , n в преобразованиях (7.28)–(7.31) являются функциями скорости V . При $V = 0$ первые три должны принимать значение 1, а последний — обращаться в нуль. Как уже было отмечено выше, при подстановке преобразований (7.28)–(7.31) в (7.25) последнее должно переходить в (7.24). Проводя такую подстановку, получим

$$\begin{aligned} \gamma^2(x - Vt)^2 + p^2y^2 + p^2z^2 - c^2g^2(t - nx)^2 &= (\gamma^2 - c^2g^2n^2)x^2 + \\ + p^2y^2 + p^2z^2 - c^2(g^2 - \gamma^2V^2/c^2)t^2 - 2(\gamma^2V - c^2g^2n)xt &= 0. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Из требования соответствия (7.32) и (7.24) следуют уравнения для искомым коэффициентов:

$$\begin{aligned} \gamma^2 - c^2g^2n^2 &= 1; \\ p^2 &= 1; \\ g^2 - \gamma^2V^2/c^2 &= 1; \\ \gamma^2V - c^2g^2n &= 0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Из второго уравнения этой системы и предположения о сонаправленности осей координат находим значение коэффициента p :

$$p = 1. \quad (7.34)$$

Если выразить из последнего уравнения системы (7.33) значение

$$n = (V/c^2)(\gamma^2/g^2), \quad (7.35)$$

подставить его в первое и учесть третье уравнение, то получим

$$\gamma = g = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (7.36)$$

Масштабный множитель γ получил название *лоренцевского фактора*. Из (7.36) видно, что для $V=0$ значение $\gamma = 1$, а при $V \rightarrow c$ фактор $\gamma \rightarrow \infty$. Ясно также, что скорость V не может быть равной или превышать скорость света c , так как в этом случае либо знаменатель обращается в нуль, либо под корнем получается отрицательное число.

Подставляя найденные значения коэффициентов γ , p , g , n в (7.28)–(7.31), получим искомые преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt); \\ y' &= y; \\ z' &= z; \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Очевидно, что при малых скоростях ($V \ll c$) и небольших значениях координаты ($x \ll tc^2/V$) эти формулы переходят в преобразования Галилея. При релятивистских скоростях ($V \lesssim c$) преобразования Лоренца существенно отличаются от галилеевых и приводят к совершенно новым эффектам. Анализ этих эффектов будет дан в следующей лекции.

Если решить (7.37) относительно переменных x , y , z , t , то получим обратные преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt'); \\ y &= y'; \\ z &= z'; \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Заметим, что обратные преобразования можно получить также из прямых, воспользовавшись принципом относительности, согласно которому скорость системы K относительно системы K' равна $-V$. Поэтому, если в (7.37) изменить знак скорости V , убрать штрихи у переменных в левой части всех равенств системы и поставить их у переменных в правой части, то получим (7.38).

ЛЕКЦИЯ 8

Измерение времени при движении с околосветовыми скоростями. Как уже отмечалось, при движении с релятивистскими скоростями преобразования Лоренца принципиально отличаются от галилеевых. Прежде чем познакомиться с важнейшими следствиями преобразований Лоренца, обсудим проблему измерения времени с помощью часов, движущихся с околосветовыми скоростями. Во-первых, сложно найти часы, которые могли бы двигаться с очень большой скоростью, сравнимой с предельной. Во-вторых, такие часы пролетают типичное лабораторное расстояние $l \approx 1$ м за время $t = l/c \approx 3$ нс, поэтому они должны давать возможность измерять промежутки времени порядка 1 нс. В-третьих, при движении одних часов относительно других сравнивать показания движущихся и неподвижных часов можно лишь тогда, когда они находятся практически в одной и той же точке пространства.

Для измерений малых промежутков времени можно использовать явление распада нестабильных частиц (пионов, каонов, мюонов и др.). Такие частицы, движущиеся с большими скоростями, образуются в результате взаимодействий протонов с ядрами атомов мишени в экспериментах на ускорителях. Рассмотрим основные этапы генерации нестабильных частиц. Сначала необходимо ускорить протоны. Чтобы избежать столкновений с ядрами атомов воздуха, протоны ускоряются в вакуумной камере (остаточное давление около 10^{-9} торр) — трубе с поперечными размерами $r \approx 10$ см. Так как за время ускорения (цикл ускорения), равное примерно нескольким секундам, до скорости, практически не отличимой от световой, протоны пролетают огромные расстояния, то, очевидно, трубу необходимо сделать кольцевой. Радиус кольца достигает нескольких километров.

Чтобы протоны двигались по окружности, на них должно действовать магнитное поле, величина которого в процессе ускорения возрастает до нескольких тесла. Магниты (в последнее время с использованием устройств из сверхпроводящих сплавов, охлаждаемых до сверхнизких гелиевых температур), создающие магнитное поле, размещены по периметру кольца. В некоторых участках кольца расположены источники мощного высокочастотного электрического поля, которое и ускоряет протоны до энергий порядка 10^{12} эВ после многократного прохождения этих участков. Для этого протоны должны попадать на эти участки в фазе с высокочастотным электрическим полем. Условия, при которых протоны ускоряются, были сформулированы российским физиком В. И. Векслером. В соответствии с этими условиями протоны должны быть распределены по кольцу не равномерно, а сосредоточены в сгустках, продольный размер которых для различных ускорителей колеблется от нескольких метров до сантиметров, а поперечный равен нескольким микрометрам. Число протонов в сгустке может достигать многих миллиардов, а число сгустков в кольце изменяется от десятков до нескольких тысяч. С помощью специальных магнитов ускоренные протоны направляются на мишень (рис. 8.1). В результате взаимодействия только одного из протонов с каким-либо ядром атома мишени образуется большое число ($10 \div 100$

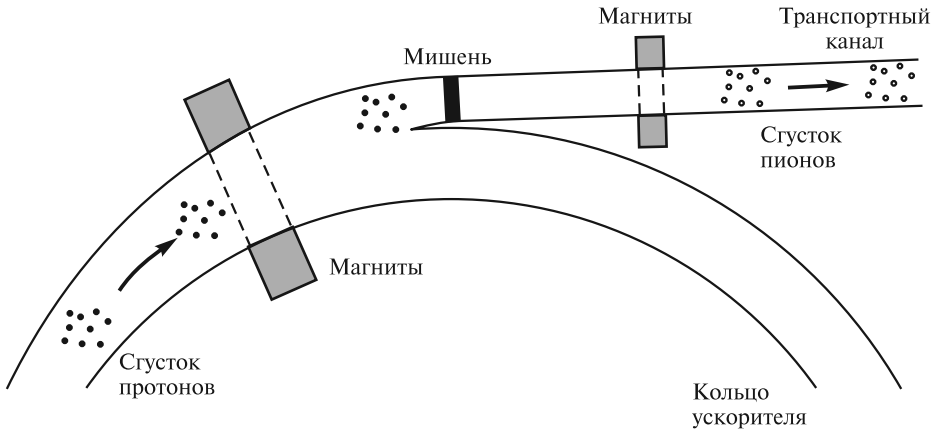


Рис. 8.1

на одно взаимодействие) нестабильных вторичных частиц (в основном пионов, каонов и т.д.). Эти вторичные частицы сепарируются магнитным полем по типу и по скорости и направляются по различным транспортным каналам, которые для нестабильных частиц в некоторых случаях называют также распадными. Так как протоны попадают на мишень сгустками, то и нестабильные частицы образуются сгустками. Эти сгустки летят в транспортном канале с постоянной скоростью. Такова в самых общих чертах схема формирования пучков (последовательности сгустков) различных нестабильных частиц.

Покажем, как явление распада можно использовать для измерений времени. Свяжем с движущимися частицами (сгустком частиц) систему отсчета K' . Эту систему отсчета будем называть *собственной*, а время t' в этой системе — *собственным временем*. Время в лабораторной системе отсчета K , в которой ускоритель и транспортные каналы неподвижны, обозначим через t . Вероятность dP распада одной частицы за время $dt' \ll \tau$ определяется отношением:

$$dP = dt'/\tau, \quad (8.1)$$

где постоянная τ — среднее собственное время жизни частицы (в системе, где она покоится). Эту постоянную можно измерить в различных экспериментах, а также вычислить на основе законов радиоактивного распада. Ее значение для различных нестабильных частиц колеблется в очень широких пределах (от 10^{-16} до 10^3 с). Если рассматривать сгусток из $N(t')$ нестабильных частиц, то изменение на dN этого числа за время dt' определяется произведением этого числа частиц на вероятность распада одной частицы:

$$dN = -N(t')dP = -N(t')dt'/\tau, \quad (8.2)$$

где знак минус означает, что число частиц уменьшается. Это уравнение легко проинтегрировать и определить среднее число $N(t')$ частиц в сгустке в любой момент времени t' :

$$N(t') = N(0)\exp(-t'/\tau), \quad (8.3)$$

где $N(0)$ — число частиц в сгустке в момент времени $t' = 0$.

Измерения величин $N(0)$ и $N(t')$ позволяют решить и обратную задачу — вычислить из (8.3) собственное время t' :

$$t' = \tau \ln[N(0)/N(t')]. \quad (8.4)$$

Чтобы флуктуации в случайных явлениях распада существенно не сказывались на точности измерений времени, необходимо рассматривать сгустки с большим числом N частиц.

Таким образом, если сформировать сгусток из известного числа частиц $N(0)$ и контролировать их количество $N(t')$, уменьшающееся вследствие распада, то соотношение (8.4) позволяет измерять собственное время t' в системе K' , т. е. сгусток нестабильных частиц может выполнять функцию часов, движущихся с околосветовой скоростью.

Замедление темпа хода движущихся часов. Очевидно, что в различные моменты времени показания одних движущихся часов можно сравнивать с показаниями разных неподвижных часов. Поэтому контролировать темп хода движущихся часов можно следующим образом. Пусть в лабораторной системе отсчета K имеется набор синхронизованных неподвижных часов, расположенных вдоль транспортного канала ускорителя на оси x на равных расстояниях $l_0 = \text{const}$ друг от друга и измеряющих время t в этой системе (рис. 8.2). Со сгустком частиц, который движется в этом канале с постоянной скоростью V , свяжем систему отсчета K' . Пусть оси координат обеих систем сонаправлены и начала координат совпадают в момент времени $t = t' = 0$. Когда сгусток будет пролетать мимо очередных неподвижных часов с номером i (назовем этот момент i -м событием), они будут показывать время:

$$t_i = L_i/V, \quad (8.5)$$

где $L_i = il_0$ и $i = 1, 2, 3, \dots$

В системе K' , связанной со сгустком, времена этих же событий равны t'_i . Очевидно, что для определения одного конкретного значения t'_i на основании (8.4) необходимы измерения чисел частиц $N(0)$ и $N(t'_i)$. Таким образом, зная показания лабораторных часов для определенных событий и измеряя числа частиц в двигающемся сгустке в соответствующие моменты времени, можно определить, отличается ли темп хода движущихся часов от темпа неподвижных.

Рассмотрим конкретный пример. В одном из многих экспериментов, проводившихся в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН) в Женеве, в транспортный канал длиной $L_0 = 100$ м направлялся пучок из $N(0) = 1,5 \cdot 10^7$ (по результатам измерений) положительно заряженных ультрарелятивистских пионов, у которых лоренцевский фактор был равен $\gamma = 857$. Скорость этих пионов с точностью до шестого знака совпадает с величиной c . Время пролета ими транспортного канала равно

$$t = L_0/c = 10^2/(3 \cdot 10^8) \approx \approx 3,33 \cdot 10^{-7} \text{ с}. \quad (8.6)$$

В транспортном канале пион может распасться на мюон и нейтрино. Поэтому по измерениям числа N_μ появившихся

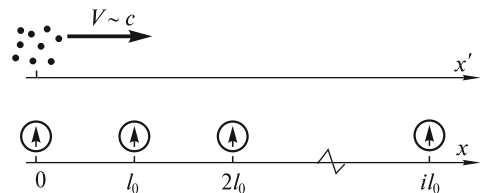


Рис. 8.2

ся мюонов можно определить число распавшихся пионов. Эти измерения показали, что в конце транспортного канала $N_{\mu} = 2,27 \cdot 10^5$. Следовательно, число пионов в конце канала равно $N(t') = N(0) - N_{\mu} = 1,477 \cdot 10^7$. Так как для пионов собственное время жизни $\tau = 2,56 \cdot 10^{-8}$ с, то оценка времени t' по формуле (8.4) составляет

$$t' = \tau \ln[N(0)/N(t')] = 3,90 \cdot 10^{-10} \text{ с.} \quad (8.7)$$

Из (8.6) и (8.7) для отношения t/t' , характеризующего замедление темпа хода движущихся часов, получаем значение

$$t/t' = 854, \quad (8.8)$$

что совпадает с величиной $\gamma = 857$ с погрешностью 0,35%. Таким образом, можно предположить, что

$$t/t' = \gamma, \quad (8.9)$$

или для интервалов времени

$$\Delta t/\Delta t' = \gamma. \quad (8.10)$$

Последнее соотношение часто записывают в виде

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t. \quad (8.11)$$

В огромном количестве экспериментов, которые проводились на ускорителях во многих странах мира, в частности, на крупнейших ускорителях в России (в Институте физики высоких энергий в Протвино), США (в Национальной ускорительной лаборатории им. Ферми в Чикаго) и Европейском центре ядерных исследований в Женеве, длина L_0 транспортного канала изменялась от нескольких метров до нескольких километров, а лоренцевский фактор γ — от единиц до нескольких тысяч. Эксперименты проводились с различными нестабильными частицами, собственное время жизни которых изменялось в очень широких пределах (от 10^{-16} до $2,2 \cdot 10^{-6}$ с). Во всех без исключения экспериментах не было обнаружено отклонений от зависимости (8.10). Фактически, формула (8.10) стала основой инженерных расчетов при проектировании транспортных каналов для любых нестабильных частиц. Отметим, что в наиболее точных, прецизионных опытах Ф. Комбли, Ф. Фарли и Е. Пикассо (ЦЕРН, 1970 г.), в которых изучался распад мюонов в кольцевом накопителе, относительная погрешность выполнения соотношения (8.10) составила $(0,9 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}$.

Исторически первыми опытами по проверке (8.10) были эксперименты, выполненные Б. Росси в США (1939—1941 гг.). В этих экспериментах исследовалось уменьшение числа мюонов (в то время они назывались мезотронами) при их распространении в атмосфере. В результате взаимодействия космических лучей с ядрами атомов на больших высотах в атмосфере рождаются пионы. Эти пионы довольно быстро распадаются на мюоны и нейтрино. У мюонов собственное время жизни относительно мало: $\tau \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$ с. Если бы время жизни мюонов t_{μ} , измеренное по лабораторным часам, равнялось бы собственному времени жизни, то по направлению к Земле они пролетели бы в среднем расстояние

$$\lambda_0 \approx ct_{\mu} = c\tau \approx 660 \text{ м.} \quad (8.12)$$

Пусть число мюонов в некоторой верхней точке атмосферы равно $N(0)$. Поскольку мюоны летят практически со скоростью света, то расстояние l , пройденное ими по направлению к Земле, к моменту времени t составит

$$l = ct. \quad (8.13)$$

Если бы не было замедления времени (т.е. выполнялось бы равенство $t' = t$), то из (8.3) с учетом (8.12) и (8.13) получилась бы следующая зависимость числа мюонов от расстояния l :

$$N(l) = N(0) \exp(-tc/\tau c) = N(0) \exp(-l/\lambda_0), \quad (8.14)$$

т.е. число мюонов уменьшалось бы в e раз на расстоянии $\lambda_0 = 660$ м. Если замедление имеет место [см. (8.9)], то вместо (8.14) находим

$$N(l) = N(0) \exp(-l/\gamma\lambda_0), \quad (8.15)$$

т.е. уменьшение в e раз происходит на расстоянии $\lambda = \gamma\lambda_0$, значительно большем (в γ раз), чем λ_0 . Измерения чисел мюонов проводились в Чикаго (на высоте 180 м над уровнем моря) и в горах Колорадо на высотах 1600, 3240 и 4300 м. Эти измерения показали уменьшение числа мюонов в e раз на расстоянии порядка нескольких километров. Из проведенной оценки энергии мюонов следовало, что величина лоренцевского фактора была равна $\gamma \approx 5$, и поэтому расстояние λ равно $\lambda = \gamma\lambda_0 \approx 3$ км, что согласуется с приведенными выше данными прямых измерений.

Современные исследования космических лучей показывают, что формула (8.10) имеет место и для очень больших значений лоренцевского фактора $\gamma \approx 10^{10} \div 10^{11}$. Во взаимодействиях первичных частиц космического излучения с ядрами атомов высоко в атмосфере, кроме заряженных пионов и других частиц, рождаются нейтральные пионы, собственное время жизни которых очень мало: $\tau \approx 0,8 \cdot 10^{-16}$ с. Поэтому эти нейтральные пионы практически мгновенно распадаются. Однако при очень высоких энергиях космических лучей лоренцевский фактор этих пионов может достигать упомянутых выше значений и расстояние λ , на котором их число уменьшается из-за распада в e раз, становится большим:

$$\lambda = \gamma\tau c \approx 2,4 \cdot 10^3 \text{ м}. \quad (8.16)$$

В этом случае нейтральные пионы успевают провзаимодействовать с ядрами атомов в атмосфере. Косвенные измерения показывают, что, действительно, в области сверхвысоких энергий нейтральные пионы не распадаются, а взаимодействуют с ядрами атомов, т.е. формула (8.10) выполняется и для значений $\gamma \sim 10^{10}$.

После появления прецизионных атомных часов появилась возможность проверки формулы (8.9) для замедления времени и при небольшой скорости V , например, при полетах на самолетах, когда $V \approx 10^3$ км/ч, $\beta = V/c \approx 10^{-6}$ и, соответственно, величина γ превышает значение 1 на очень малую величину $\sim 10^{-12}$. В опытах Д. Хафеле и Р. Китинга (1970 г.) и в опытах С. Аллея и др. (1980 г.) погрешность проверки формулы (8.9) составила соответственно 10 % и 1 %. В этих опытах прецизионные атомные часы устанавливались на самолетах, а затем их показания сравнивались с контрольными часами, которые

оставались на Земле. Например, в опытах Хафеле и Китинга часы отставали от земных на (59 ± 10) нс, если самолет летел на восток, опережали земные на (273 ± 70) нс, если самолет летел на запад. Теоретические оценки этих величин составляли (40 ± 23) нс и (275 ± 21) нс соответственно.

Таким образом, из совокупности всех имеющихся экспериментальных данных для интервала изменения лоренцевского фактора γ от 1 до 10^{11} можно сделать следующий вывод: *темп хода одних движущихся часов при сравнении с показаниями совокупности часов, расположенных в разных точках в неподвижной системе отсчета, замедляется в γ раз.* Такое замедление темпа хода движущихся часов получило название *лоренцевского*, поскольку формула (8.10) следует из преобразований Лоренца. В самом деле, движущимся в лабораторной системе часам соответствует фиксированное значение координаты $x'_i = \text{const}$ в системе, в которой они покоятся. Поэтому для двух разных моментов времени t_1 и t_2 в лабораторной системе на основании (7.38) имеем

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma[t'_1 + (V/c^2)x'_i]; \\ t_2 &= \gamma[t'_2 + (V/c^2)x'_i], \end{aligned} \quad (8.17)$$

где t'_1 и t'_2 — соответствующие моменты собственного времени. Вычитая из нижнего равенства верхнее и вводя обозначения $\Delta t = t_2 - t_1$ и $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, приходим к соотношению (8.10).

Сокращение продольных размеров движущихся тел. Как было отмечено выше, система отсчета, в которой тело покоится, называется собственной для этого тела. Длина тела (стержня, линейки), измеренная в этой системе, называется *собственной длиной*. Измерить длину покоящегося тела — не проблема. Например, пусть в лабораторной системе отсчета K имеется неподвижный стержень, расположенный вдоль оси Ox . Длина L_0 этого стержня определяется как разность координат его правого $x_{\text{п}}$ и левого $x_{\text{л}}$ концов:

$$L_0 = x_{\text{п}} - x_{\text{л}}. \quad (8.18)$$

При этом безразлично, в какие моменты времени t по часам лабораторной системы отсчета измеряются эти координаты.

Возможно и альтернативное определение длины, преимущества которого станут ясны ниже. Представим транспортный канал ускорителя длиной L_0 как некоторый стержень. Пусть в направлении от левого конца канала к правому движется с постоянной скоростью V сгусток частиц. Тогда, если в момент времени $t_{\text{л}}$ по часам лабораторной системы этот сгусток поравняется с левым концом стержня, а в момент $t_{\text{п}}$ — с правым, то собственная длина L_0 транспортного канала, который далее для краткости будем называть стержнем, будет равна расстоянию, которое пролетел сгусток:

$$L_0 = V(t_{\text{п}} - t_{\text{л}}). \quad (8.19)$$

При измерении длины L движущегося тела (стержня) необходимо принять, что координаты обоих его концов измеряются в один и тот же момент времени t по часам той системы, в которой эта длина определяется. Поэтому

$$L = x_{\text{п}}(t) - x_{\text{л}}(t). \quad (8.20)$$

Примером быстро движущегося стержня может служить транспортный канал ускорителя, который движется с околосветовой скоростью относительно системы отсчета, связанной со сгустком частиц. В этом случае его длина

$$L = x'_n(t') - x'_l(t') \quad (8.21)$$

определяется координатами x' , зафиксированными в один и тот же момент времени t' . Легко, однако, видеть, что определение длины по формуле (8.20) или (8.21) крайне сложно, поскольку у обоих концов движущегося стержня, длину которого предстоит измерить, следует заранее установить часы. Иное дело альтернативный метод [формула (8.19)], основанный на использовании закона движения. Если в системе отсчета K' (связанной со сгустком частиц) сначала, в момент времени t'_n со сгустком поравнялся левый конец стержня, а затем, в момент t'_n , — правый, то длина движущегося стержня будет равна

$$L = V(t'_n - t'_l). \quad (8.22)$$

При практическом использовании этой формулы для оценки времен t'_l и t'_n необходимы измерения чисел частиц в сгустке в те моменты, когда сгусток влетает в канал и вылетает из него.

Из сравнения (8.22) с (8.19) сразу ясно, что длина L движущегося тела отличается от собственной длины L_0 . Если обозначить разности времен как $\Delta t = t_n - t_l$ и $\Delta t' = t'_n - t'_l$, то с учетом замедления темпа хода движущихся часов следует соотношение между собственной длиной L_0 и длиной L движущегося тела:

$$L_0/L = \gamma. \quad (8.23)$$

Таким образом, приходим к следующему выводу: *продольные размеры движущихся тел сокращаются в γ раз.*

Например, в рассмотренном выше эксперименте в ЦЕРН собственное время движения сгустка пионов составляло $t' = 3,90 \cdot 10^{-10}$ с [см. (8.7)], и для длины L движущегося стержня (всего транспортного канала) получаем

$$L = Vt' \approx 11,7 \text{ см}, \quad (8.24)$$

что в 857 раз меньше L_0 .

Сокращение продольных размеров движущихся тел называется *лоренцевским*, так как оно также следует из преобразований Лоренца. В самом деле, пусть тело покоится в лабораторной системе отсчета. Согласно обратным преобразованиям Лоренца, для одного и того же момента времени t' в системе K' , относительно которой тело движется, имеем

$$x_1 = \gamma(x'_1 + Vt'); \quad (8.25)$$

$$x_2 = \gamma(x'_2 + Vt'). \quad (8.26)$$

Обозначим расстояния $L_0 = x_2 - x_1$ и $L = x'_2 - x'_1$. Из (8.25)—(8.26) следует, что $L_0/L = \gamma$, что совпадает с (8.23).

Поперечные размеры движущихся тел не меняются. Такой вывод можно сделать из экспериментов на ускорителях со встречными пучками. Представим себе, что два сгустка протонов летят навстречу друг другу. Определим

полное число столкновений протонов. При высоких энергиях кулоновским взаимодействием частиц можно пренебречь. Что касается ядерных сил, то они эффективны лишь на расстояниях, сравнимых с радиусом частиц, поэтому протоны в данном случае можно рассматривать как шары конечного радиуса. Очевидно, что два шара столкнутся только в том случае, когда расстояние между их центрами не превысит сумму радиусов. Эта сумма определяет так называемое сечение взаимодействия $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$, где r_1 и r_2 — радиусы шаров. Если шары летят по трубе, радиус которой равен R , и если они распределены внутри трубы случайным образом, то вероятность одного столкновения равна $P = (r_1 + r_2)^2 / R^2$. Ясно, что если в сгустках имеется по n протонов, то полное число взаимодействий будет равно

$$N = n^2(r_1 + r_2)^2 / R^2. \quad (8.27)$$

Если бы поперечные размеры частиц (радиусы r_1 и r_2) при движении изменялись, то полное число столкновений в эксперименте отличалось бы от оценки (8.27). Так как этого не происходит, то можно сделать вывод, что поперечные размеры движущихся тел не меняются. Это следует также из преобразований Лоренца для координат, оси которых перпендикулярны направлению движения. Таким образом, приходим к выводу: *поперечные размеры движущихся тел инвариантны.*

Нарушение синхронности хода совокупности движущихся часов. Как было отмечено при выводе преобразований Лоренца, наблюдатель в системе K' отметит несинхронность хода совокупности движущихся относительно него часов, расположенных в системе K .

Для количественной оценки этой несинхронности обратимся к примеру со сгустками частиц, которые движутся со скоростью V в транспортном канале ускорителя (см. рис. 8.2). Пусть имеются синхронизованные часы, расположенные на равных расстояниях l_0 друг от друга в этом канале, и пусть они показывают одинаковое время $t = 0$, когда первые часы-сгусток пролетают мимо часов, находящихся в начале координат. Можно условиться, что собственное время, показываемое этими часами, в этот момент также равно нулю: $t' = 0$. Очевидно, что когда часы-сгусток будут пролетать мимо лабораторных часов с номером i , последние будут показывать время t_i [см. (8.5)].

В системе K' , связанной со сгустками, расстояние между лабораторными часами из-за лоренцевского сокращения будет равно

$$l = \sqrt{1 - \beta^2} l_0. \quad (8.28)$$

Поэтому в системе K' это событие по часам-сгустку должно произойти в момент времени t'_i :

$$t'_i = \frac{il}{V} = \frac{il_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{V} = \frac{L_i \sqrt{1 - \beta^2}}{V}. \quad (8.29)$$

В системе K' часы с номером i движутся навстречу сгустку со скоростью V . С точки зрения наблюдателя в системе K' темп хода движущихся лабораторных часов должен замедлиться в γ раз. Поэтому этот наблюдатель может ожидать,

что по часам системы K рассматриваемое событие произойдет в момент времени

$$t_{i,ож} = t'_i/\gamma = L_i(1 - \beta^2)/V. \quad (8.30)$$

Разница между ожидаемым временем (8.30) и фактическим (8.5) может быть интерпретирована единственным образом: движущиеся в системе K' лабораторные часы с номерами 0 и i несинхронны. Разность δ_i в показаниях часов составляет

$$\delta_i = t_i - t_{i,ож} = L_i/V - L_i(1 - \beta^2)/V = L_i\beta^2/V. \quad (8.31)$$

С точки зрения наблюдателя в системе K' часы с номером i показывают более позднее время по сравнению с часами с номером 0. Эта разница в показаниях, согласно (8.31), тем больше, чем дальше часы отстоят друг от друга.

Иллюстрацией к описанным выше явлениям замедления темпа хода часов, движущихся относительно других часов, нарушения синхронности хода и сокращения расстояния между движущимися часами может служить рис. 8.3. На этом рисунке пронумерованные (цифрами в квадратах) лабораторные часы (отмечены кружками) установлены на расстоянии $l_0 \approx 30$ м друг от друга вдоль транспортного канала (оси Ox лабораторной системы K). По этому каналу движутся часы-сгустки (помечены овалами) с релятивистской скоростью, при которой $\gamma = 10$. В системе K' (собственной для сгустков) расстояние между ними также равно около 30 м. Относительно часов-сгустков лабораторные часы, как показано на рисунке, движутся со скоростью V справа налево. В момент времени $t' = 0$ (по часам-сгусткам) начала обеих систем координат совпадают (ситуация *а*). Лабораторные часы с номером 0, находящиеся в точке $x = 0$, также показывают время $t = 0$. Обращают на себя внимание два факта. Во-первых, в соответствии с (8.31), показания лабораторных часов различны (время указано внутри кружков и овалов в наносекундах, для большей наглядности показания всех часов округлены): часы с номером 2 спешат по сравнению с соседними часами на $\delta = 99$ нс, а те, в свою очередь, показывают время на 99 нс больше, чем часы с номером 0, и т.д. Во-вторых, в системе K' расстояние между лабораторными часами $\Delta x' \approx 3$ м, т.е. в 10 раз меньше, чем в системе K . Через время $\Delta t' \approx 10$ нс (ситуация *б*) против сгустка в точке $x' = 0$ окажутся часы с номером 1, показывающие время 100 нс. Разница в показаниях соседних лабораторных часов по-прежнему равна 99 нс, причем показания всех лабораторных часов увеличились на $\Delta t = 1$ нс. Через время $\Delta t' \approx 20$ нс против сгустка окажутся лабораторные часы с номером 2, показывающие время 200 нс (ситуация *в*), а $\Delta t = 2$ нс. Ситуация *г* реализуется по истечении $\Delta t' \approx 100$ нс, когда лабораторные часы с номером 0 окажутся уже рядом со следующим сгустком, и для них $\Delta t = 10$ нс.

Обсудим теперь вопрос о замедлении темпа хода каких-либо часов. Поскольку лабораторные часы и часы-сгустки находятся в относительном движении, то это замедление присуще часам обоих типов. Если проследить за показаниями одних и тех же лабораторных часов, например, с номером 1, сравнивая ситуации *а* и *б*, то за время $\Delta t' = 10$ нс (по часам-сгустку) их показания увеличились на $\Delta t = 100 - 99 = 1$ нс, что указывает на 10-кратное замедление их темпа хода по сравнению с часами-сгустками. С другой стороны, сравнивая

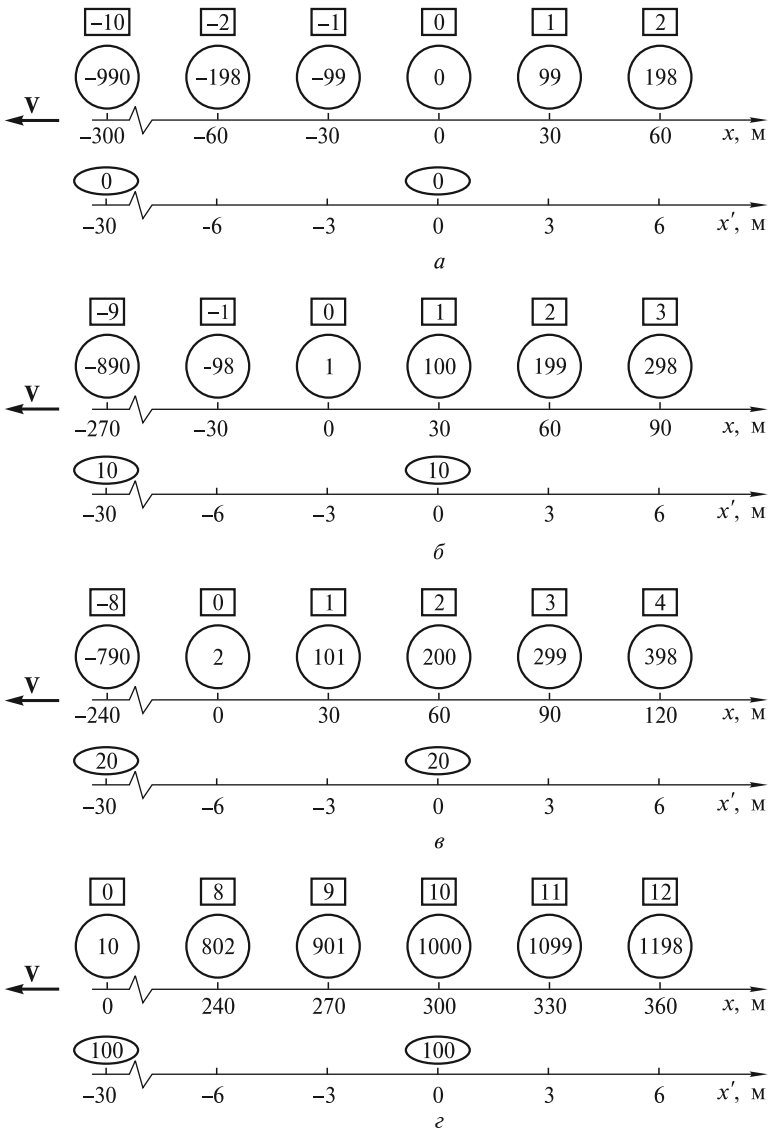


Рис. 8.3

показания одних и тех же часов-сгустка (находящихся в точке $x' = 0$) с показаниями разных лабораторных часов, оказавшихся рядом со сгустком, легко видеть, что в ситуации *б* время по часам-сгустку равно 10 нс, а по часам с номером 1 — 100 нс; в ситуации *в* часы-сгусток показывают 20 нс, а часы с номером 2 — 200 нс; в ситуации *г* часы-сгусток показывают время 100 нс, а лабораторные часы с номером 10 — время 1000 нс. Это свидетельствует о 10-кратном замедлении темпа хода часов-сгустка. Аналогичные рассуждения можно провести с использованием следующих часов-сгустка, расположенных в точке $x' \approx -30$ м. Сравнивая, например, ситуации *a* и *г*, приходим к

выводу, что когда пройдет 100 нс (по часам-сгустку), промежуток времени, измеренный с помощью разных, но находящихся вблизи сгустка лабораторных часов, будет равен $10 - (-990) = 1000$ нс. Полезно самостоятельно изобразить взаимное расположение и показания часов с позиции наблюдателя в лабораторной системе и провести анализ замедления темпа хода часов обоих типов.

Наконец, укажем также и на относительность одновременности: события, происходящие одновременно в одной системе отсчета, не будут одновременными в другой. Действительно, пусть в момент времени $t' = 20$ нс (ситуация θ) сгустки с координатами $x'_1 \approx -30$ м и $x'_2 = 0$ м «повредили» находящиеся поблизости лабораторные часы. Их стрелки «замерли» на отметках $t_1 = -790$ нс и $t_2 = 200$ нс. Следовательно, для экспериментатора, работающего на ускорителе, повреждения часов произошли последовательно с интервалом времени 990 нс.

Интервалы. Как было определено выше, если что-либо происходит в некоторой точке пространства в какой-либо момент времени, то говорят, что имеет место *событие*. Возникает вопрос: возможно ли установить какие-либо связи между различными событиями? Самые общие связи, которые могут быть, — это *причинно-следственные*. Одно событие может являться причиной другого, которое, в свою очередь, есть следствие первого. В этом случае имеет место некоторое воздействие со стороны первого события на второе. Это воздействие распространяется со скоростью, которая не превышает предельную. Поэтому события, связанные причинно-следственными отношениями, разделены некоторым промежутком времени, причем следствие наступает позже причины. Такая последовательность должна быть одинаковой во всех инерциальных системах отсчета. Определить, связаны ли два события причинно-следственными отношениями, в самом общем случае нельзя. Для установления таких отношений необходима дополнительная информация, наблюдения, эксперимент. Однако не трудно найти условия, позволяющие определить, допустимы ли такие отношения или они в принципе невозможны. Для этого рассмотрим понятие *интервала*. Пусть в произвольной точке 1 с координатами x_1, y_1, z_1 в момент времени t_1 происходит какое-либо событие, а в точке 2 с координатами x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2 — другое событие.

Введем понятие интервала ΔS между событием 1 и событием 2, определив его квадрат ΔS^2 следующим образом:

$$\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \quad (8.32)$$

где использованы обозначения $\Delta t = t_2 - t_1$; $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta z = z_2 - z_1$. Первое слагаемое в правой части (8.32) называется временной, а последние три — пространственной частью интервала. Отметим, что интервал между событиями — это аналог расстояния между точками, определенного в геометрии Евклида.

Интервалы между событиями, которые удовлетворяют условию

$$\Delta S^2 = 0, \quad (8.33)$$

получили название *светоподобных*, или *изотропных*. Это название интервала отражает тот факт, что вспышка света, произошедшая в точке 1 одновременно с первым событием, достигает точки 2 одновременно со вторым событием

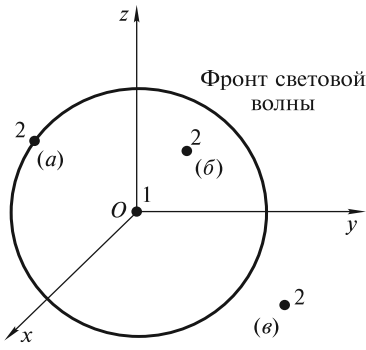


Рис. 8.4

(рис. 8.4, ситуация *a*). Если временная часть интервала превышает его пространственную часть, то

$$\Delta S^2 > 0, \quad (8.34)$$

а интервал называется *временеподобным*. В этом случае вспышка света достигает точки 2 раньше, чем наступает второе событие (рис. 8.4, ситуация *b*). Поскольку в обеих этих ситуациях сигнал успевает за время Δt прийти из точки 1 в точку 2, то ясно, что события 1 и 2 могут быть связаны причинно-следственными отношениями. Очевидно, что в этом случае событие 1 может рассматриваться как причина, а событие 2 — как следствие.

Если же вспышка света достигает точки 2 позже момента наступления второго события, то ясно, что событие 1 не может (не успевает) воздействовать на событие 2, а сами события 1 и 2 не могут быть связаны причинно-следственными отношениями (рис. 8.4, ситуация *v*). Значение квадрата интервала для таких событий отрицательно:

$$\Delta S^2 < 0. \quad (8.35)$$

Интервалы между такими событиями называются *пространственноподобными*.

Одним из важнейших свойств интервала является его *инвариантность*. Для доказательства инвариантности интервала, т.е. выполнения в произвольных инерциальных системах отсчета K и K' равенства

$$\Delta S^2 = \Delta S'^2, \quad (8.36)$$

воспользуемся преобразованиями Лоренца. Если в выражение для квадрата интервала в системе отсчета K' подставить значения координат x' , y' , z' и времени t' для двух произвольных событий 1 и 2, выразив их через x , y , z и t , то после преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta S'^2 &= c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = \\ &= c^2 \gamma^2 \left(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right)^2 - \gamma^2 (\Delta x - V \Delta t)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \\ &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta S^2, \end{aligned} \quad (8.37)$$

что и требовалось доказать.

Из инвариантности интервала можно получить ряд следствий. В случае времениподобного интервала возможен выбор системы отсчета K' , в которой пространственная часть интервала обращается в нуль. Ограничимся для простоты рассмотрением событий, которые происходят в точках, расположенных на оси Ox . Тогда для событий, связанных в системах K и K' времениподобным интервалом, имеем:

$$c^2 (\Delta t')^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0. \quad (8.38)$$

Из условия обращения в нуль пространственной части интервала в системе отсчета K' можно найти скорость этой системы относительно системы K . Используя преобразования Лоренца, получаем:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) = 0. \quad (8.39)$$

Таким образом, скорость V системы отсчета K' относительно системы K составляет:

$$V = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (8.40)$$

При такой скорости системы K' оба события происходят в одной и той же точке пространства. Поэтому интервал времени $\Delta t'$ между этими событиями можно измерить по одним и тем же часам. Очевидно, что этот временной интервал есть промежуток собственного времени. Из (8.38) видно, что квадрат времениподобного интервала равен произведению квадрата скорости света c^2 на квадрат собственного времени $(\Delta t')^2$. Поэтому промежуток собственного времени $\Delta t'$ можно выразить через этот интервал следующим образом:

$$\Delta t' = \Delta S / c. \quad (8.41)$$

Важно отметить, что промежуток собственного времени, как следует из (8.41), — инвариантная величина. Наконец, покажем, что порядок событий, связанных времениподобным интервалом, сохраняется во всех ИСО. В самом деле, если в системе K событие 1 произошло раньше события 2, то, согласно преобразованиям Лоренца, в системе отсчета K' промежуток времени между последним и первым событиями будет равен:

$$\Delta t' = \gamma[\Delta t - (V/c^2)\Delta x]. \quad (8.42)$$

Так как по условию $\Delta t > 0$, временная часть интервала $c\Delta t$ всегда больше пространственной Δx и $(V/c) < 1$, то $\Delta t' > 0$, что и требовалось показать.

В случае пространственноподобных интервалов возможен выбор системы отсчета K' , в которой временная часть интервала обращается в нуль. Действительно, если в системах K и K' два события связаны пространственноподобным интервалом (ограничимся, как и выше, рассмотрением событий, которые происходят в точках на оси Ox), то можем записать:

$$-(\Delta x')^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x^2 < 0. \quad (8.43)$$

Скорость V такой системы отсчета K' определяется из условия равенства нулю временной части интервала

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right) = 0 \quad (8.44)$$

и получается равной

$$V = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (8.45)$$

Поскольку в системе отсчета K' оба события происходят одновременно в двух точках, то расстояние между этими точками $\Delta l' = \Delta x'$ есть собственная длина, которую можно выразить через интервал следующим образом:

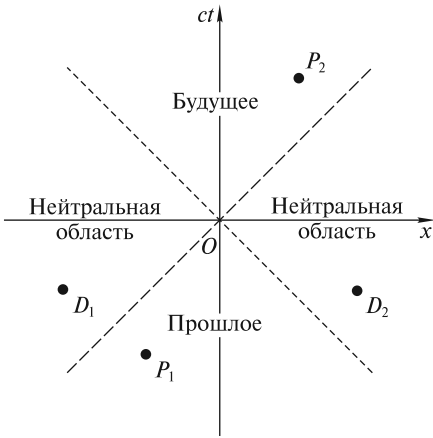


Рис. 8.5

рывать с использованием так называемой *плоскости Минковского* (рис. 8.5). Декартовыми координатами на этой плоскости являются переменные x и ct . Любое событие, которое происходит на оси Ox системы отсчета K , отображается как точка на плоскости Минковского.

Если в начале координат в момент времени $t=0$ произошла вспышка света, то координаты x волнового фронта определяются соотношением:

$$x = \pm ct. \quad (8.47)$$

На плоскости Минковского закон движения (8.47) отображается двумя биссектрисами углов между осями координат (штриховые линии). В случае двух пространственных координат (x и y) вместо линий получается конус, называемый *световым*. Для трех пространственных координат также вводят понятие «светового конуса», хотя его и нельзя изобразить графически. Для наблюдателя, расположенного в момент времени $t=0$ в начале координат (заметим, что за начало координат можно выбрать любую точку оси Ox), этот световой конус делит пространство Минковского на три части. Область внутри верхнего конуса имеет название «будущее», а область внутри нижнего — «прошлое». Оставшаяся часть — это «нейтральная» область. Очевидно, что любые события, отображаемые точками на поверхности светового конуса, связаны светоподобными интервалами.

События из области «будущее» P_2 или «прошлое» P_1 связаны с «нулевым» событием в точке O времениподобными интервалами. Произвольное событие P_1 из области «прошлое» произошло раньше «нулевого» и может быть причиной последнего, а любое событие P_2 из области «будущее» наступает позже «нулевого» и поэтому может быть его следствием. Таким образом, для наблюдателя в точке $x=0$ все события из нижнего конуса произошли в «прошлом», а из верхнего — наступят в «будущем».

Любые события из «нейтральной» области (точки D_1 и D_2 на рис. 8.5) связаны с событием в точке O пространственноподобными интервалами. Ясно, что между этими событиями и «нулевым» невозможны причинно-следственные отношения.

$$\Delta t' = \sqrt{-(\Delta S')^2}. \quad (8.46)$$

Если же система отсчета K' движется со скоростью $V > c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x}$, то, согласно (8.44), $\Delta t' < 0$. Следовательно, событие 2 наступает раньше события 1. В этом нет ничего удивительного, поскольку причинно-следственная связь между событиями отсутствует.

Пространство Минковского. Многообразие переменных x, y, z, ct , связанных интервалом (8.32), образует *пространство Минковского*. Причинно-следственные отношения между событиями в простейшем случае, когда эти события происходят в различных точках на оси Ox , удобно анализировать с использованием так называемой *плоскости Минковского* (рис. 8.5). Декартовыми координатами на этой плоскости являются переменные x и ct . Любое событие, которое происходит на оси Ox системы отсчета K , отображается как точка на плоскости Минковского.

Если в начале координат в момент времени $t=0$ произошла вспышка света, то координаты x волнового фронта определяются соотношением:

$$x = \pm ct. \quad (8.47)$$

На плоскости Минковского закон движения (8.47) отображается двумя биссектрисами углов между осями координат (штриховые линии). В случае двух пространственных координат (x и y) вместо линий получается конус, называемый *световым*. Для трех пространственных координат также вводят понятие «светового конуса», хотя его и нельзя изобразить графически. Для наблюдателя, расположенного в момент времени $t=0$ в начале координат (заметим, что за начало координат можно выбрать любую точку оси Ox), этот световой конус делит пространство Минковского на три части. Область внутри верхнего конуса имеет название «будущее», а область внутри нижнего — «прошлое». Оставшаяся часть — это «нейтральная» область. Очевидно, что любые события, отображаемые точками на поверхности светового конуса, связаны светоподобными интервалами.

События из области «будущее» P_2 или «прошлое» P_1 связаны с «нулевым» событием в точке O времениподобными интервалами. Произвольное событие P_1 из области «прошлое» произошло раньше «нулевого» и может быть причиной последнего, а любое событие P_2 из области «будущее» наступает позже «нулевого» и поэтому может быть его следствием. Таким образом, для наблюдателя в точке $x=0$ все события из нижнего конуса произошли в «прошлом», а из верхнего — наступят в «будущем».

Любые события из «нейтральной» области (точки D_1 и D_2 на рис. 8.5) связаны с событием в точке O пространственноподобными интервалами. Ясно, что между этими событиями и «нулевым» невозможны причинно-следственные отношения.

Координатная ось Ox и все возможные прямые, параллельные ей (например, линия a_1a_2), — это так называемые *линии одновременности* в системе отсчета K (рис. 8.6). Любые два события, принадлежащие этим линиям (например, события M_1 и M_2 на прямой a_1a_2), одновременны, т.е. происходят в один и тот же момент времени t_0 по часам системы K , но в различных точках пространства x_1 и x_2 . Ясно, что эти события связаны пространственноподобным интервалом и поэтому между ними невозможны причинно-следственные отношения.

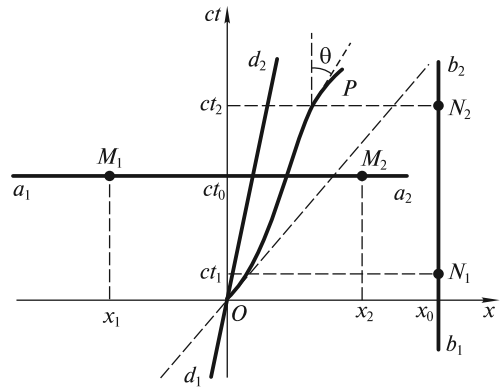


Рис. 8.6

На оси ординат ($x = 0$) и всех возможных прямых $x = \text{const}$, параллельных ей (например, линии b_1b_2), отображены события, которые происходят в одной и той же точке пространства, но в разные моменты времени. Любые два события, которые отображаются точками, принадлежащими этим линиям, характеризуются одним и тем же значением координаты, но разными значениями времени (например, события N_1 и N_2 на прямой b_1b_2 произошли в одной и той же точке с координатой x_0 , но в разные моменты времени t_1 и t_2). Ясно, что эти события связаны времениподобным интервалом и между ними возможны причинно-следственные отношения. Очевидно, событие, которое произошло раньше, может быть причиной, а наступившее позже — следствием.

На плоскости Минковского можно отображать не только события, но и движения частиц. Например, покоящиеся в различных точках x частицы отображаются прямыми $x = \text{const}$. Эти прямые называются *мировыми линиями покоящихся частиц*. Движение частицы с постоянной скоростью V отображается на этой плоскости прямой, угол наклона которой к оси ct не превышает 45° . Такие прямые называются *мировыми линиями движущихся частиц*. Например, если частица в момент времени $t = 0$ находилась в начале координат, то ее мировая линия d_1d_2 расположена в областях «прошлое» и «будущее». Уравнение этой прямой определяется следующим выражением:

$$ct = x/\beta, \quad (8.48)$$

где $\beta = V/c$.

Если скорость V частицы переменна, то ее мировая линия отображается некоторой кривой OP , уравнение которой имеет вид

$$ct = f(x). \quad (8.49)$$

Касательная к этой кривой в любой точке образует с осью ординат угол θ , тангенс которого

$$\text{tg } \theta = \beta. \quad (8.50)$$

Так как $V \leq c$, то угол $\theta \leq 45^\circ$.

ЛЕКЦИЯ 9

Преобразования скоростей. Постулат о постоянстве скорости света находится в явном противоречии с интуитивными представлениями о сложении скоростей, направленных вдоль одной прямой, и, в частности, с преобразованиями скоростей Галилея. Рассмотрим один из экспериментов по проверке постулата о постоянстве скорости света, выполненный на ускорителе в ЦЕРН Т. Алвагером, Ф. Фарли, Д. Кжеллманом и И. Валлином в 1964 г.

Для ускорения протонов использовалось переменное электрическое поле с частотой $\nu = 9,53220 \pm 0,00005$ МГц. Чтобы протоны ускорялись, они должны попадать на участок ускорения в фазе с электрическим полем. Поэтому сгустки протонов в кольце ускорителя должны следовать друг за другом с той же частотой. При заданной длине кольца соседние сгустки протонов располагались на расстоянии $s = 31,45$ м (рис. 9.1). Длина l каждого сгустка была равна примерно 1 м. В результате взаимодействий ускоренных протонов с ядрами атомов мишени образуются различные вторичные частицы, в том числе и нейтральные пионы π^0 . Так как протоны попадали на мишень сгустками с частотой ν , то и нейтральные пионы рождались также сгустками с той же частотой.

После рождения нейтральные пионы летели со скоростью $V \sim c$ по касательной к окружности ускорителя в направлении детекторов D_1 и D_2 , отстоящих друг от друга на расстоянии, также равном $s = 31,45$ м, а все заряженные частицы с помощью магнитов отклонялись. Нейтральные пионы — нестабильные частицы со средним временем жизни $\tau = 0,83 \cdot 10^{-16}$ с — распадаются на два гамма-кванта на расстоянии $\lambda = \gamma V \tau \approx 1,1 \cdot 10^{-6}$ м ($\gamma \approx 45$), т.е. вблизи места своего рождения. В эксперименте отбирались такие гамма-кванты, которые летели в том же направлении, что и пионы, имевшие скорости $V > 0,99975 c$ (лоренцевский фактор $\gamma > 45$). Таким образом, от сгустков нейтральных пионов, которые летели со скоростью V в направлении оси Ox и следовали друг за другом с частотой ν , рождались следующие с той же частотой сгустки гамма-квантов, скорость которых относительно пионов равна скорости света. Если

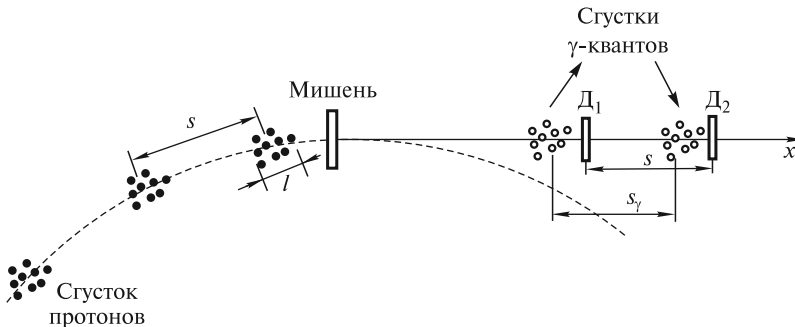


Рис. 9.1

преобразования Галилея верны, то скорость гамма-квантов относительно детекторов должна быть равной

$$v_\gamma = V + c. \quad (9.1)$$

В этом случае два соседних сгустка гамма-квантов будут находиться на расстоянии $s_\gamma = v_\gamma/v$ друг от друга. Они будут достигать детекторов не одновременно, а с интервалом времени

$$\Delta t = \frac{s_\gamma - s}{v_\gamma} = \frac{1}{v} - \frac{c}{v v_\gamma} = \frac{1}{v} \left(1 - \frac{c}{v_\gamma} \right) = \frac{1}{v} \delta, \quad (9.2)$$

где $\delta = 1 - \frac{c}{v_\gamma}$.

Эксперимент показал, что $\Delta t = -(0,005 \pm 0,013)$ нс, поэтому в пределах ошибки $\delta = -4,7 \cdot 10^{-5}$, а

$$v_\gamma = (2,9977 \pm 0,0004) \cdot 10^8 \text{ м/с} \quad (9.3)$$

и совпадает со скоростью света.

Таким образом, вместо формулы (9.1) необходимы новые законы преобразования скоростей. Их можно легко получить на основе преобразований Лоренца (7.37). Дифференциалы левых и правых частей этих преобразований имеют вид

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - Vdt); \\ dy' &= dy; \\ dz' &= dz; \\ dt' &= \gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Разделим левые и правые части первых трех равенств (9.4) соответственно на левую и правую части последнего и учтем кинематические определения проекций скоростей в системах отсчета K и K' :

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}; \quad (9.5)$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}; \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}; \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (9.6)$$

В результате получим искомые преобразования проекций скорости на координатные оси:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}; \quad v'_y = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2} v_y; \quad v'_z = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2} v_z. \quad (9.7)$$

Соотношения (9.7) известны как *лоренцевские преобразования проекций скорости*. В случае малых скоростей ($v \ll c$, $V \ll c$) они переходят в преобразования скоростей Галилея.

Разрешая (9.7) относительно v_x , v_y и v_z , можно получить обратные преобразования проекций скорости:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}; \quad v_y = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} v'_y; \quad v_z = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} v'_z. \quad (9.8)$$

Очевидно, что при $v \ll c$, $V \ll c$ эти соотношения переходят в обратные преобразования скоростей Галилея.

Применим найденные преобразования для определения скорости гамма-квантов в рассмотренном выше эксперименте. Так как нейтральные пионы летят со скоростью $V = 0,99975c$, а гамма-кванты — со скоростью света $v'_x = c$, то первая из формул (9.8) дает для этого случая:

$$v_\gamma = \frac{c + 0,99975c}{1 + \frac{c \cdot 0,99975c}{c^2}} = c, \quad (9.9)$$

что находится в полном соответствии с результатом измерений (9.3).

Релятивистские формулы преобразования скоростей (9.7) и (9.8) подтверждаются всеми без исключения экспериментами. Рассмотрим несколько важных примеров.

Ускорители на встречных пучках. Физический результат столкновения элементарных частиц зависит от величины их энергии в системе центра масс, в которой сумма релятивистских импульсов равна нулю (см. лекцию 10). Чем выше эта энергия, тем богаче спектр новых явлений.

Рассмотрим столкновение двух одинаковых частиц, летящих навстречу друг другу со скоростью v_0 , которой соответствует лоренцевский фактор γ_0 . В этом случае система центра масс покоится, а энергия каждой из частиц пропорциональна лоренцевскому фактору γ_0 (см. лекцию 10).

Столкновение этих же частиц можно рассматривать в системе отсчета, связанной с одной из частиц. При этом весь спектр явлений остается прежним, однако лоренцевский фактор γ , соответствующий относительной скорости v сближения частиц, будет значительно больше γ_0 .

В самом деле, полагая в (9.7) $v_x = v_0$, $V = -v_0$, для относительной скорости $v = v'_x$ получаем

$$v = \frac{2v_0}{1 + v_0^2/c^2}. \quad (9.10)$$

Релятивистский фактор γ будет равен

$$\gamma = 2\gamma_0^2 - 1. \quad (9.11)$$

Например, при $\gamma_0 = 10$ получим $\gamma \approx 200$, а при $\gamma_0 \approx 10^3$ фактор γ увеличивается уже в 2000 раз! Отсюда следует исключительно важный вывод: для того, чтобы получить тот же эффект, что и от соударения с неподвижной частицей (мишенью), гораздо выгоднее сталкивать частицы, летящие навстречу друг другу со скоростями, которым соответствуют сравнительно небольшие значения лоренцевского фактора γ_0 .

Такая идея реализована в ускорителях, в которых сталкиваются два встречных пучка частиц, движущихся с релятивистскими скоростями.

Например, для достижения $\gamma \approx 10^6$ размеры обычного ускорителя (с неподвижной мишенью) могут превысить радиус Земли, что делает невозможным его строительство. Что же касается ускорителей на встречных пучках, то их размеры (при заданной индукции магнитного поля) и, следовательно, стоимость будут в $\gamma/\gamma_0 \approx 2\gamma_0$ раз меньше. Еще одним преимуществом таких ускорителей является симметрия пространственного разлета вторичных частиц. Идея такого ускорителя была впервые высказана Г.А. Будкером, а один из первых ускорителей был построен под Новосибирском.

Струи частиц. При столкновении релятивистской частицы с неподвижной мишенью образуются новые частицы (вторичные), которые летят внутри узкого конуса, ось которого ориентирована вдоль вектора скорости первичной частицы, а угол раствора зависит от лоренцевского фактора γ (чем больше γ , тем меньше угол). Вторичные частицы образуют так называемые струи и при малом угле раствора конуса практически не детектируются, так как летят очень близко друг к другу. Отличить одну частицу от другой в этом случае становится трудно.

Столкновения частиц удобно рассматривать в системе центра масс (СЦМ), в которой вторичные частицы летят внутри конусов с бóльшим углом раствора, так как $\gamma_0 < \gamma$. Поэтому на ускорителях со встречными пучками существенно облегчена проблема детектирования и распознавания вторичных частиц.

Направления движения частиц, образующих струи, можно рассчитать, пользуясь законом сложения скоростей. Пусть в системе K' (системе центра масс) первичные частицы движутся навстречу друг другу вдоль оси $O'x'$ и после столкновения одна из вторичных частиц летит с некоторой скоростью v' под зенитным углом θ' к оси $O'x'$ (рис. 9.2, а). Проекции скорости этой вторичной частицы равны

$$v'_x = v' \cos \theta', \quad v'_y = v' \sin \theta'. \tag{9.12}$$

Система K' (СЦМ) движется относительно системы K , в которой одна из частиц неподвижна, с некоторой скоростью V . Проекции скорости вторичной частицы в системе K , в соответствии с законом сложения скоростей, окажутся равными

$$v_x = \frac{v' \cos \theta' + V}{1 + \frac{v'V \cos \theta'}{c^2}}; \quad v_y = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{v'V \cos \theta'}{c^2}} v' \sin \theta'. \tag{9.13}$$

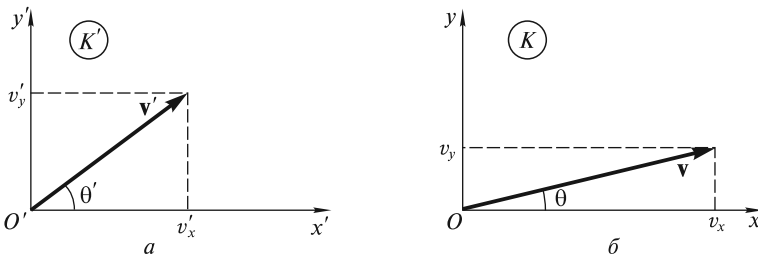


Рис. 9.2

Если эти проекции записать в виде

$$v_x = v \cos \theta; \quad v_y = v \sin \theta, \quad (9.14)$$

то для зенитного угла θ (см. рис. 9.2, б) получим

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{\gamma} \frac{v' \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}, \quad (9.15)$$

где $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$.

Отсюда видно, что в ультрарелятивистском случае, когда $\gamma \rightarrow \infty$, вне зависимости от величины θ' зенитный угол $\theta \rightarrow 0$. Таким образом, при больших значениях γ почти все вторичные частицы летят внутри очень узкого конуса.

Аберрация света звезд. Если звезда расположена под углом θ к оси Ox системы отсчета K , то в другой системе отсчета K' , движущейся вдоль этой оси со скоростью V , угол будет другим (рис 9.3). Проекции вектора скорости световой волны в системе K (рис 9.3, а) равны

$$\begin{aligned} v_x &= -c \cos \theta, \\ v_y &= -c \sin \theta. \end{aligned} \quad (9.16)$$

В системе K' , в соответствии с формулами преобразования проекций скорости, имеем

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{-c \cos \theta - V}{1 + \frac{V \cos \theta}{c}}; \\ v'_y &= \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V \cos \theta}{c}} c \sin \theta. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Попутно отметим, что $\sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = v' = c$. Так как, согласно рис. 9.3, б

$$\begin{aligned} v'_x &= -c \cos \theta', \\ v'_y &= -c \sin \theta', \end{aligned} \quad (9.18)$$

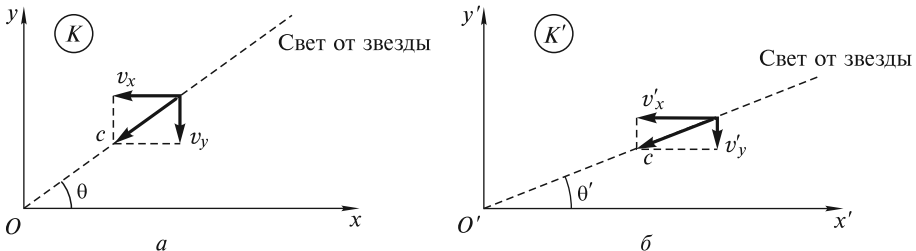


Рис. 9.3

то для искомого угла θ' можем записать

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(\frac{V}{c} + \cos \theta \right)}. \quad (9.19)$$

При ультрарелятивистских скоростях, когда $\gamma \rightarrow \infty$, вне зависимости от положения звезды, она будет казаться расположенной под очень малым углом к направлению движения системы отсчета K' .

Если ввести угол $\delta' = \pi/2 - \theta'$, который используется в астрономии для характеристики aberrаций света звезд, то из (9.19) для звезды, находящейся в зените ($\theta = \pi/2$), получим формулу

$$\sin \delta' = V/c, \quad (9.20)$$

которая при релятивистских скоростях существенно отличается от классической формулы

$$\operatorname{tg} \delta' = V/c. \quad (9.21)$$

Отметим, что рассматриваемое явление связано с изменением направления прихода световой волны, распространяющейся от далекой звезды. Рассмотрим, как ориентирован фронт волны в различных системах отсчета. Пусть для простоты в системе отсчета K звезда находится в зените ($\theta = \pi/2$). Тогда плоский фронт $a_1 a_2$ достигает точек O и P на оси Ox одновременно (рис. 9.4, *a*). Наблюдатель фиксирует (визуально или с помощью оптического прибора) положение звезды по направлению движения волны, перпендикулярному к ее фронту. В системе отсчета K' (рис. 9.4, *б*) свет в точку O' придет позже, чем в точку P' . Если длина отрезка $OP = L$, то, в соответствии с формулой преобразования времени (7.37), это запаздывание будет равно

$$\Delta t' = \gamma \frac{V}{c^2} L. \quad (9.22)$$

Наблюдатель в системе отсчета K' обнаружит, что нормаль к фронту волны наклонена под углом δ' к оси Oy' . За время $\Delta t'$ свет пройдет расстояние $M'O' =$

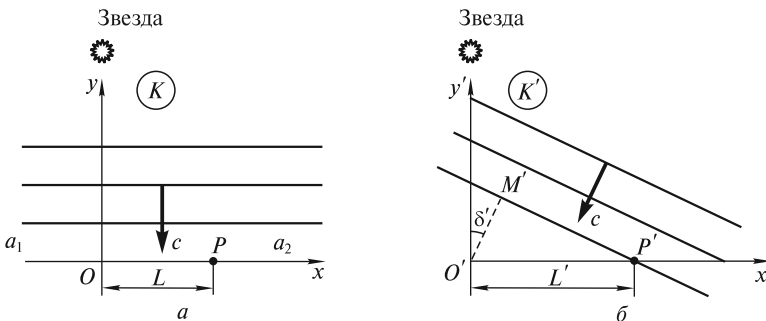


Рис. 9.4

$= c\Delta t'$. Расстояние между точкой O' и точкой P' в системе K' , согласно преобразованиям Лоренца для координат, равно $L' = \gamma L$. Отсюда

$$\sin \delta' = \frac{O'M'}{O'P'} = \frac{c\Delta t'}{L'} = \frac{V}{c}, \quad (9.23)$$

что совпадает с (9.20).

Преобразования ускорений. В случае преобразований Галилея при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой ускорение является инвариантной величиной. Очевидно, что при движении с релятивистской скоростью проекции ускорения a_x, a_y, a_z , которые определяются в лабораторной системе K как

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}, \quad (9.24)$$

не могут оставаться постоянными величинами в различных инерциальных системах отсчета, поскольку ни дифференциалы проекций скорости, ни дифференциал времени dt не являются инвариантами преобразований Лоренца.

Будем использовать две инерциальные системы отсчета K и K' , которые рассматривались выше при выводе преобразований Лоренца. По определению, компоненты ускорения в системе K' равны

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}; \quad a'_y = \frac{dv'_y}{dt'}; \quad a'_z = \frac{dv'_z}{dt'}, \quad (9.25)$$

а в системе K они определены выше соотношениями (9.24). Для получения формул, которые связывают проекции ускорения a_x, a_y, a_z в системе K и проекции a'_x, a'_y, a'_z в системе K' , найдем дифференциалы левых и правых частей равенств (9.8) (обратных преобразований для проекций скорости) и преобразования Лоренца для времени

$$\begin{aligned} dv_x &= \frac{dv'_x}{1 + v'_x V/c^2} - \frac{(V/c^2)(v'_x + V)dv'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^2} = \frac{dv'_x}{\gamma^2 (1 + v'_x V/c^2)^2}; \\ dv_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{dv'_y}{1 + v'_x V/c^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y V/c^2}{(1 + v'_x V/c^2)^2} dv'_x; \\ dv_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{dv'_z}{1 + v'_x V/c^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z V/c^2}{(1 + v'_x V/c^2)^2} dv'_x; \\ dt &= \gamma(dt' + Vdx'/c^2) = \gamma dt'(1 + v'_x V/c^2). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Если поделить левые и правые части первых трех равенств (9.26) соответственно на левую и правую части последнего, то получим следующие преобразования проекций ускорения:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{1}{\gamma^3} \frac{a'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^3}; \\
 a_y &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{a'_y}{(1 + v'_x V/c^2)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{v'_y (V/c^2) a'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^3}; \\
 a_z &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{a'_z}{(1 + v'_x V/c^2)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{v'_z (V/c^2) a'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^3}.
 \end{aligned} \tag{9.27}$$

Неинвариантность ускорения легко проиллюстрировать с помощью (9.27) на простом примере. Если частица в системе K' движется в направлении, перпендикулярном оси $O'x'$ равномерно и прямолинейно ($v'_y \neq 0$, $v'_z \neq 0$, $a'_y = 0$, $a'_z = 0$), а вдоль оси $O'x'$ — с ускорением a'_x , то в системе K она обладает отличными от нуля ускорениями a_y и a_z .

Сопутствующая система отсчета. Введем важное понятие *сопутствующей инерциальной системы отсчета* K'_c , движущейся вдоль оси Ox лабораторной системы K . Ее скорость V определяется условием обращения в нуль проекции скорости v'_x ($v'_x = 0$). В случае ускоренного движения частицы вдоль оси Ox скорость V соответствующей сопутствующей системы K'_c в разные моменты времени должна быть разной:

$$V = v_x, \tag{9.28}$$

так как скорость v_x переменна. Особо подчеркнем, что система K'_c является инерциальной системой отсчета и должна двигаться с постоянной скоростью $V = \text{const}$. Выполнение условия (9.28) возможно только для набора систем отсчета K'_c , движущихся с разными скоростями, и в каждый момент времени t необходимо использовать одну из систем, для которой в этот момент $V = v_x$.

С учетом $v'_x = 0$ проекции ускорения в системе K и системе K'_c , движущейся в данный момент времени со скоростью V , связаны более простыми соотношениями:

$$\begin{aligned}
 a_x &= a'_x / \gamma^3, \\
 a_y &= a'_y / \gamma^2 - v'_y (V/c^2) (a'_x / \gamma^2), \\
 a_z &= a'_z / \gamma^2 - v'_z (V/c^2) (a'_x / \gamma^2).
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

Напомним, что в формулах (9.29) скорость V системы отсчета K'_c определяется из условия (9.28).

Если в сопутствующей системе K'_c скорость и ускорение частицы направлены вдоль оси $O'x'$ ($v'_y = v'_z = 0$, $a'_y = a'_z = 0$), то в лабораторной системе отлична от нуля лишь проекция a_x :

$$a_x = a'_x / \gamma^3. \tag{9.30}$$

В качестве примера рассмотрим движение элементарной частицы в постоянном электрическом поле E , направленном вдоль оси Ox . Под действием этого поля скорость частицы в системе K возрастает, однако движение не будет равноускоренным. Действительно, в сопутствующей системе отсчета сила,

действующая на частицу с зарядом q , равна $f = qE$, так как напряженность поля вдоль оси Ox одинакова во всех ИСО. В этой системе ($v'_x = 0$) для определения ускорения можно воспользоваться классическим уравнением движения:

$$a'_x = a_0 = \frac{qE}{m} = \text{const}. \quad (9.31)$$

Возвращаясь к формуле (9.30), отмечаем, что с ростом γ ускорение $a_x \rightarrow 0$, хотя сила $f = \text{const}$. Из (9.30) при учете (9.31) легко получается зависимость от времени скорости v_x и закон движения $x(t)$ частицы. Действительно, перепишем (9.30) в виде

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a_0 \left[1 - \left(\frac{v_x}{c} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (9.32)$$

где учтено равенство (9.28). Разделяя переменные v_x и t , получим

$$\frac{dv_x}{\left[1 - (v_x/c)^2 \right]^{3/2}} = a_0 dt. \quad (9.33)$$

Если принять, что в момент времени $t = 0$ скорость $v_x = 0$, то интегрирование (9.33) приведет к соотношению:

$$\frac{v_x}{\sqrt{1 - (v_x/c)^2}} = a_0 t. \quad (9.34)$$

Выражая отсюда v_x , получим закон возрастания скорости v_x :

$$v_x = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + (a_0 t/c)^2}} = \frac{c t/t_0}{\sqrt{1 + (t/t_0)^2}}, \quad (9.35)$$

где $t_0 = c/a_0$ — характерный масштаб времени.

После подстановки (9.35) в (9.32) будем иметь

$$a_x = a_0 \frac{1}{\left[1 + (t/t_0)^2 \right]^{3/2}}. \quad (9.36)$$

Зависимости (9.35) и (9.36) изображены на рис. 9.5. Видно, что ускорение частицы монотонно уменьшается, а ее скорость асимптотически стремится к своему предельному значению, равному c . Отметим, что в механике Ньютона $a_x = a_0$, частица неограниченно увеличивала бы свою скорость и уже за время t_0 достигла бы скорости света. Практический интерес представляет время t_β , за которое частица разгоняется до заданной относительной скорости $\beta = v_x/c$. Из (9.35) оно получается равным

$$t_\beta = \beta \gamma t_0. \quad (9.37)$$

Поскольку $\beta \approx 1$, то время t_β в γ раз превышает характерное время t_0 . Например, в международном проекте TESLA предусматривается ускорение электронов до скорости, при которой ее лоренцевский фактор равен $\gamma = 10^6$ при $a_0 = 3 \cdot 10^{18}$ м/с². Поскольку для таких условий $t_0 \approx 10^{-10}$ с, то $t_\beta \approx 10^{-4}$ с.

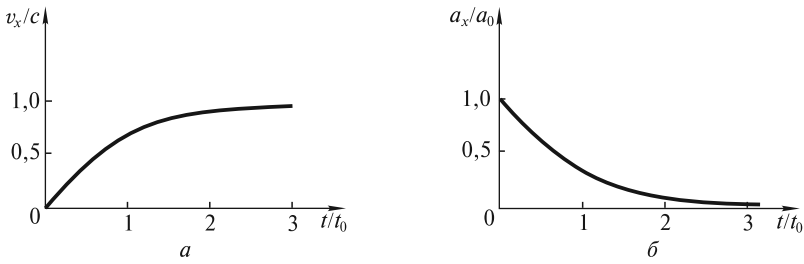


Рис. 9.5

Интегрируя (9.35), получим закон движения

$$x = \int_0^t v_x dt = \int_0^t \frac{c(t/t_0) dt}{\sqrt{1 + (t/t_0)^2}} = ct_0 \left(\sqrt{1 + (t/t_0)^2} - 1 \right), \quad (9.38)$$

где учтено, что $x = 0$ при $t = 0$. Нетрудно видеть, что при $t \ll t_0$

$$x(t) \approx \frac{ct^2}{2t_0} = \frac{a_0 t^2}{2}, \quad (9.39)$$

что совпадает с классическим законом равноускоренного движения. Однако при $t \gg t_0$ координата x нарастает со временем примерно линейно. Асимптотой закона движения является прямая (рис. 9.6), уравнение которой имеет вид

$$x = c(t - t_0). \quad (9.40)$$

За время t_β , как следует из (9.37) и (9.38), частица пролетает расстояние

$$x_\beta = ct_0(\gamma - 1). \quad (9.41)$$

В частности, за время $t \approx 10^{-4}$ с для достижения $\gamma = 10^6$ электрон пролетит расстояние $x_\beta \approx 30$ км. Естественно, что строительство линейного ускорителя такой длины требует огромных затрат, поэтому проект TESLA является международным.

Определим зависимость собственного времени τ (определенного по часам, связанным с частицей) от времени t , прошедшего в лабораторной системе отсчета. С учетом (9.35) эта зависимость получается в виде

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \beta^2} dt = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + (t/t_0)^2}} = \quad (9.42)$$

$$= t_0 \operatorname{arcsch}(t/t_0).$$

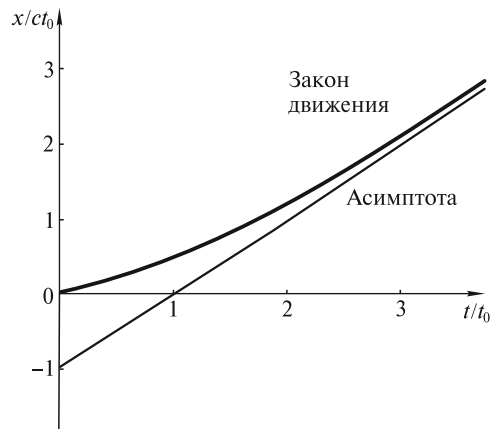


Рис. 9.6

При больших временах движения $t \gg t_0$

$$\tau \approx t_0 \ln(2t/t_0). \quad (9.43)$$

Здесь использовано известное представление обратной функции гиперболического синуса

$$\operatorname{arcsch}(\xi) = \ln(\xi + \sqrt{1 + \xi^2}).$$

Для электронов в рассмотренном выше процессе их ускорения при $t \approx 10^{-4}$ с величина $\tau \approx 1,45 \cdot 10^{-9}$ с, т.е. на 5 порядков меньше. Огромный эффект замедления времени позволяет, в принципе, ускорять и нестабильные частицы. Например, для мюонов, которые примерно в 200 раз тяжелее электронов, характерное время t_0 будет также в 200 раз больше: $t_0 \approx 200 \cdot 10^{-10}$ с = $2 \cdot 10^{-8}$ с. Для достижения $\gamma \approx 10^6$ за время ускорения $t_\beta \approx 2 \cdot 10^{-2}$ с мюоны пройдут путь $x_\beta \approx 6000$ км. Согласно (9.43), собственное время будет равно

$$\tau_\beta = t_0 \ln(2t_\beta/t_0) \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ с}, \quad (9.44)$$

т.е. на порядок меньше собственного времени жизни мюонов. Ускоритель в этом случае необходимо делать кольцевым.

Парадокс близнецов. Пусть имеются два брата-близнеца, один из которых совершил космический полет с Земли на далекую планету и возвратился обратно. С точки зрения брата-домоседа из-за лоренцевского сокращения времени, обусловленного движением ракеты, вернувшийся брат-космонавт будет моложе его. Однако, рассуждая подобным образом, брат-космонавт вправе ожидать замедления старения брата-домоседа, поскольку этот брат вначале «улетал» вместе с Землей, а затем вернулся к ракете. В этом и состоит парадокс близнецов, который возникает из-за неправильного применения принципа относительности. Действительно, брат-домосед находится в одной и той же ИСО, связанной с Землей. Напротив, система отсчета, связанная с ракетой, на участках разгона и торможения является неинерциальной (НИСО), а на участках равномерного движения к далекой планете и обратно к Земле необходимо говорить о двух различных ИСО, движущихся в противоположных направлениях со скоростью ракеты.

На рис. 9.7, а на плоскости Минковского изображена мировая линия ракеты (МЛР), летящей со скоростью $V \lesssim c$ к планете, удаленной от Земли на расстояние L_0 . На участках ускорения и торможения, которые по продолжительности могут быть малыми по сравнению с временем равномерного движения, мировая линия искривлена. Мировая линия Земли (МЛЗ) совпадает с осью ординат. Штриховой линией отмечена световая линия, совпадающая с биссектрисой прямого угла между осями координат.

Проведем простейший расчет продолжительности полета, воспользовавшись формулой Лоренца для преобразования времени:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right). \quad (9.45)$$

Будем пренебрегать временем (по земным часам), затраченным на разгон и торможение ракеты, и мировую линию ракеты изобразим в виде двух прямых

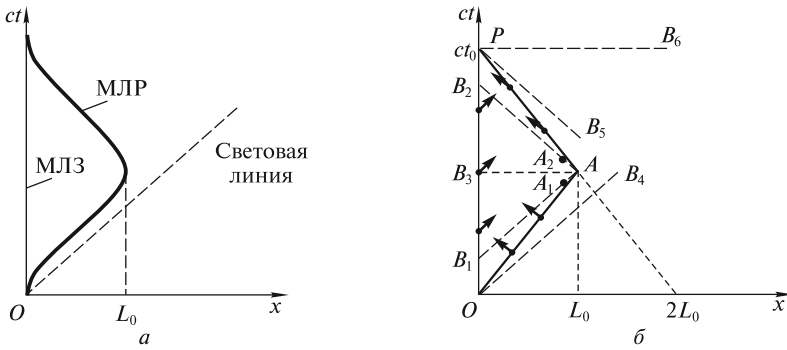


Рис. 9.7

OA и AP (рис. 9.7, б). Очевидно, продолжительность полета t_0 по земным часам будет составлять

$$t_0 = \frac{2L_0}{V}. \quad (9.46)$$

Часы на возвратившейся ракете покажут меньшее время:

$$t'_0 = \frac{t_0}{\gamma}. \quad (9.47)$$

Таким образом, брат-космонавт постареет меньше. Для него в этой уменьшенной величине времени нет ничего удивительного, так как из-за лоренцевского сокращения длины Земля за время t'_0 «пролетела» со скоростью V расстояние $2L' = 2L_0/\gamma$. Однако он может сделать неверный вывод относительно времени t_0 , если будет считать, что время \tilde{t}_0 на Земле, которое из-за ее движения замедлилось по сравнению с t'_0 в γ раз, есть полное время:

$$\tilde{t}_0 = \frac{t'_0}{\gamma} = \frac{t_0}{\gamma^2}. \quad (9.48)$$

Его ошибка состоит в том, что время \tilde{t}_0 есть только малая часть времени, прошедшего на Земле за время его полета. Когда космонавт подлетает к планете и находится в системе K'_1 , удаляющейся от Земли, линией одновременности будет AB_1 , а когда начнет возвращаться на Землю и будет находиться в системе K'_2 , приближающейся к Земле, — линия AB_2 . Время $\tilde{t}_0 = (OB_1 + B_2P)/c$. Таким образом, космонавт не учел промежутка времени B_1B_2/c . Для оценки этого промежутка времени воспользуемся формулой (9.45), в которой положим $t'_{A_1} = t'_0/2$. В этот момент времени ракета находится в точке A_1 , сколь угодно близкой к точке поворота A . В наших рассуждениях точка A_1 используется для того, чтобы отразить факт нахождения ракеты еще в системе отсчета K'_1 , удаляющейся от Земли. Тогда из (9.45) получается уравнение прямой B_1A_1 :

$$ct = \frac{ct'_0}{2\gamma} + \frac{Vx}{c}. \quad (9.49)$$

Все события, лежащие на этой прямой, происходят одновременно в момент времени $t' = t'_0/2$ (с точки зрения космонавта). Очевидно, что показания часов в ИСО, связанной с Землей, для этих событий будут разными. Например, для события B_1 земные часы покажут время

$$t_{B_1} = \frac{OB_1}{c} = \frac{t'_0}{2\gamma} = \frac{1}{2} \tilde{t}_0 = \frac{1}{2} \frac{t_0}{\gamma^2}, \quad (9.50)$$

которое получается из (9.49) при $x = 0$, а для события A_1 ($x \approx L_0$) земные часы покажут время $t_{A_1} = t_0/2$.

После пересадки в другую систему отсчета K'_2 по часам космонавта $t'_{A_2} \approx t'_{A_1}$. Одновременно с событием A_2 в этой системе будут происходить события, лежащие на штриховой прямой B_2A_2 . В ИСО, связанной с Землей, часы покажут для этих событий разное время. В частности, для события B_2 земное время равно

$$t_{B_2} = \frac{OB_2}{c}. \quad (9.51)$$

Для того чтобы подсчитать это время, получим уравнение для линии одновременности B_2A_2 .

Очевидно (из соображений симметрии) в момент времени $t = t' = 0$ начало отсчета системы K'_2 находилось на расстоянии $x = 2L_0$ от точки O (Земли). Поэтому в (9.45) вместо координаты x должна входить величина $x - 2L_0$. Напомним также, что скорость V системы K'_2 направлена к Земле. Поэтому вместо (9.45) следует записать

$$t' = \gamma \left[t + \frac{V}{c^2} (x - 2L_0) \right]. \quad (9.52)$$

Из (9.52) для линии одновременности B_2A_2 получим (опять принимаем $t' = t'_0/2 = t_0/2\gamma$):

$$ct = \frac{ct_0}{2\gamma^2} - \frac{V}{c} (x - 2L_0). \quad (9.53)$$

В частности, для события A_2 , бесконечно близкого к A ($x \approx L_0$), из (9.53) находим $t_{A_2} = t_0/2$, а для события B_2 ($x = 0$):

$$t_{B_2} = \frac{t_0}{2\gamma^2} + 2 \frac{V}{c^2} L_0 = t_0 - \frac{t_0}{2\gamma^2}. \quad (9.54)$$

Таким образом, для упомянутого выше времени B_1B_2/c получим

$$B_1B_2/c = t_{B_2} - t_{B_1} = t_0 - \frac{t_0}{\gamma^2}. \quad (9.55)$$

Если к (9.48) прибавить это время, то будем иметь

$$t = \frac{t_0}{\gamma^2} + t_0 - \frac{t_0}{\gamma^2} = t_0, \quad (9.56)$$

что, конечно, не вызовет никаких возражений со стороны землян.

Отметим особенности течения времени при стартах с Земли и планеты и двух посадках. При старте с Земли ракета ускоряется в течение малого промежутка времени $\delta t \ll t_0$, и к окончанию разгона ракеты для космонавта часы на Земле и планете в ИСО Земли будут рассинхронизованы (часы на планете покажут большее время) на величину

$$\Delta t = \frac{VL_0}{c^2} = \beta^2 \frac{t_0}{2}. \quad (9.57)$$

Поэтому при подлете к планете в момент времени $t_0/2$ (по часам на планете) часы на Земле покажут время

$$\frac{t_0}{2} - \Delta t = \frac{t_0}{2\gamma^2} = t_{B_1}. \quad (9.58)$$

За время разгона линия одновременности, вначале совпадающая с осью Ox , повернется и займет положение OB_4 (см. рис. 9.7, б), а за время полета переместится параллельно самой себе в положение B_1A . При посадке на планету за время $\delta t \ll t_0$ конец линии одновременности AB_1 (точка B_1) начнет перемещаться вверх (несинхронность уменьшится) и в момент остановки ракеты линия одновременности AB_3 будет параллельна оси Ox . Это означает, что часы на Земле и на планете будут показывать одинаковое время, равное $t_0/2$ (а часы космонавта — $t_0/2\gamma$).

При старте ракеты с планеты опять возникнет несинхронность, однако показания земных часов уже будут больше на величину (9.57), при этом за время старта δt линия одновременности переместится из положения AB_3 в положение AB_2 . За время полета к Земле эта линия переместится параллельно самой себе в положение PB_5 . При посадке на Землю за время δt линия одновременности повернется в положение PB_6 и станет опять параллельной оси абсцисс. Часы на Земле и планете зафиксируют одинаковое время полета, равное t_0 , а часы космонавта — t_0/γ .

Еще раз отметим, что оба близнеца (и на Земле, и на ракете) будут ощущать естественный (равномерный) темп хода времени.

Интересно проследить, как путешественник будет воспринимать радиосигналы, посылаемые с Земли через одинаковые промежутки времени по земным часам, и как на Земле будут восприниматься аналогичные сигналы с ракеты. На рис. 9.7, б, на котором посылаемые радиосигналы отмечены стрелками, видно, что на пути к планете путешественник регистрирует лишь небольшую долю всех посланных к нему сигналов, а на обратном пути — подавляющую их часть. На Земле сигналы с ракеты будут восприниматься через очень большие промежутки времени практически в течение всего времени путешествия, и только в очень небольшой заключительный этап — через малые.

ЛЕКЦИЯ 10

Релятивистские импульс и масса. В нерелятивистской механике закон сохранения импульса для замкнутой системы тел выводился на основе II и III законов Ньютона. При этом подчеркивалось, что этот закон является следствием фундаментального свойства пространства — его однородности. Поэтому можно предположить, что закон сохранения импульса должен иметь место и при релятивистских скоростях движения. И действительно, все эксперименты, которые проводились с частицами, движущимися с релятивистскими скоростями, показали неизбежность фундаментального закона сохранения импульса. Именно исходя из законов сохранения, которые якобы нарушались в некоторых процессах радиоактивного распада, В. Паули в 1930 г. предложил гипотезу о существовании новой элементарной частицы — нейтрино, которая была экспериментально обнаружена Ф. Райнесом и К. Коуэном более четверти века спустя.

Однако, если исходить из определения импульса, данного Ньютоном:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (10.1)$$

(m — масса материальной точки, \mathbf{v} — ее скорость), то можно показать, что при релятивистских скоростях движения закон сохранения импульса не выполняется. Покажем это для проекции импульса на координатную ось Oy . Рассмотрим нелобовое соударение двух одинаковых абсолютно гладких и упругих шаров с массами m и радиусами R , которые в системе K летят навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями $|v_1| = |v_2| = v_0$. Пусть шары летят вдоль линий, расположенных в плоскости Oxy на расстоянии d одна от другой и параллельных оси Ox (рис. 10.1). Очевидно, что до столкновения проекции импульсов на координатную ось Oy будут равны нулю. Чтобы произошло столк-

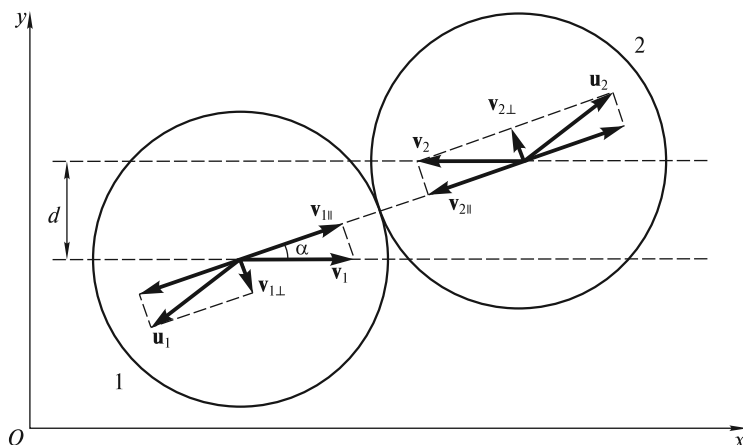


Рис. 10.1

новение, расстояние d между линиями, по которым движутся центры шаров (так называемый прицельный параметр) должно удовлетворять условию $d < 2R$.

Пусть α — угол между осью Ox и линией, соединяющей центры шаров в момент столкновения. Очевидно, что $\sin \alpha = d/2R$. В результате столкновения составляющие скоростей шаров $\mathbf{v}_{1\parallel}$ и $\mathbf{v}_{2\parallel}$ вдоль линии, соединяющей их центры, изменят направления на противоположные, а составляющие $\mathbf{v}_{1\perp}$ и $\mathbf{v}_{2\perp}$ вдоль перпендикулярного направления, очевидно, не изменятся. Поэтому векторы скоростей \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 шаров после удара окажутся повернутыми на угол $\delta = \pi - 2\alpha$ по часовой стрелке. После столкновения проекции скоростей шаров на оси Ox и Oy будут равны

$$u_{1x} = -v_0 \cos 2\alpha, \quad u_{1y} = -v_0 \sin 2\alpha; \quad (10.2)$$

$$u_{2x} = v_0 \cos 2\alpha, \quad u_{2y} = v_0 \sin 2\alpha. \quad (10.3)$$

Проекция импульса на ось Oy у каждого из шаров после столкновения равны по абсолютной величине (рис. 10.2, а), и их сумма равна нулю, как это было и до столкновения:

$$p_{1y} + p_{2y} = -mv_0 \sin 2\alpha + mv_0 \sin 2\alpha = 0. \quad (10.4)$$

Аналогично, если рассматривать нецентральное столкновение не шаров, а частиц, для которых взаимодействие на расстоянии определяется зависящей от координат и, следовательно, от времени силой \mathbf{F} , то изменяющаяся во времени проекция импульса на ось Oy каждой из частиц будет определяться соотношением:

$$p_y = \int_0^{\tau} F_y dt, \quad (10.5)$$

где τ — время взаимодействия; F_y — проекция силы на ось Oy .

Очевидно, проекция импульса другой частицы на ось Oy будет равна $-p_y$, а сумма этих двух проекций будет равна нулю.

Рассмотрим столкновение шаров в системе отсчета K' , которая движется с постоянной скоростью V в направлении оси Ox . В этой системе отсчета, согласно преобразованиям Лоренца, проекции скоростей на ось $O'y'$ до столкновения будут равны

$$v'_{1y} = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v_0 V/c^2} v_{1y}; \quad (10.6)$$

$$v'_{2y} = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v_0 V/c^2} v_{2y}. \quad (10.7)$$

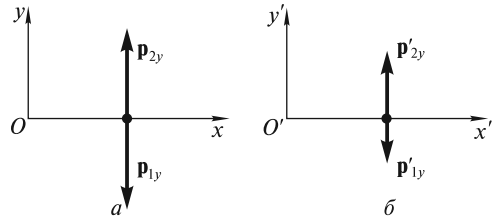


Рис. 10.2

Так как до столкновения в системе K проекции скоростей шаров на ось Oy были равны нулю ($v_{1y} = v_{2y} = 0$), то из (10.6) и (10.7) ясно, что в системе K' проекции v'_{1y} и v'_{2y} также будут равны нулю. Поэтому и в системе K' сумма проекций импульсов на ось $O'y'$ до столкновения будет равна нулю.

После столкновения проекции скоростей u'_1 и u'_2 на ось $O'y'$ с учетом преобразований Лоренца и выражений (10.2) и (10.3) будут равны

$$u'_{1y} = -\frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+v_0V \cos 2\alpha/c^2} v_0 \sin 2\alpha; \quad (10.8)$$

$$u'_{2y} = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-v_0V \cos 2\alpha/c^2} v_0 \sin 2\alpha. \quad (10.9)$$

Из (10.8) и (10.9) видно, что проекции скоростей \mathbf{u}'_1 и \mathbf{u}'_2 шаров на ось $O'y'$ по модулю не одинаковы: $|u'_{2y}| > |u'_{1y}|$. Поэтому в системе K' сумма проекций импульсов на эту ось после столкновения будет отлична от нуля (рис. 10.2, б).

Рассмотренный пример позволяет сделать следующий важный вывод: при переходе из одной ИСО в другую, которая движется с большой скоростью V , нарушается закон сохранения импульса, если импульс определен по формуле (10.1). Следовательно, при релятивистских скоростях движения импульс тела должен определяться по-другому.

Чтобы найти новое выражение для импульса, рассмотрим простую ситуацию, когда тело движется относительно системы K с постоянной скоростью \mathbf{v} и обладает импульсом \mathbf{p} . При переходе в систему отсчета K' изменятся, вообще говоря, все проекции вектора скорости, однако у импульса должна измениться только одна проекция p_x , а две другие, если потребовать выполнения закона сохранения импульса, должны остаться неизменными:

$$\begin{aligned} v'_x &\neq v_x; & v'_y &\neq v_y; & v'_z &\neq v_z; \\ p'_x &\neq p_x; & p'_y &= p_y; & p'_z &= p_z. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Чтобы удовлетворить условиям (10.10), определим импульс следующим образом:

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \quad (10.11)$$

где $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$ — перемещение $d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}$, отнесенное к интервалу собственного времени $d\tau = \sqrt{1-v^2/c^2} dt$ для этого перемещения.

Напомним, что интервал $d\tau$ определяется по часам, связанным с движущимся телом. Поскольку при переходе в систему отсчета K' , как следует из преобразований Лоренца, $dy' = dy$, $dz' = dz$, $dx' \neq dx$, а $d\tau$ не зависит от выбора системы отсчета, то (10.11) удовлетворяет условиям (10.10).

Таким образом, выражение для импульса быстро движущейся частицы (*релятивистского импульса*) запишется в виде

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}/dt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m\mathbf{v}. \quad (10.12)$$

Заметим, что масса m в (10.12) — та же величина, что и в формуле (10.1), и никакой новой «релятивистской» массы не вводится. Нет никаких оснований относить множитель γ к массе m и говорить о ее зависимости от скорости. Масса m является инвариантной величиной, сохраняющейся во всех инерциальных системах отсчета. О других свойствах массы m в релятивистской механике будет сказано ниже.

Нетрудно убедиться, что сумма компонент релятивистских импульсов шаров вдоль оси Oy в рассмотренном выше примере будет равна нулю во всех ИСО.

Релятивистское уравнение движения. Как показывает опыт, релятивистский импульс материальной точки (частицы) изменяется под действием внешней силы. *Релятивистским уравнением движения* называется уравнение

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}, \quad (10.13)$$

где \mathbf{p} — релятивистский импульс (10.12); \mathbf{F} — вектор обычной силы.

При малых скоростях $v \ll c$ релятивистский импульс переходит в обычный, и релятивистское уравнение (10.13) переходит в уравнение движения Ньютона. Хотя по форме записи эти два уравнения похожи, из релятивистского уравнения движения получаются совершенно новые следствия. В самом деле, после дифференцирования по времени t импульса (10.12) уравнение (10.13) принимает вид

$$\gamma m \mathbf{a} + \frac{\gamma^3 m v}{c^2} \mathbf{v} \frac{dv}{dt} = \mathbf{F}, \quad (10.14)$$

где $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$.

Из этого уравнения видно, что в общем случае векторы \mathbf{v} , \mathbf{a} и \mathbf{F} не совпадают по направлению (рис. 10.3, *a*), а величина ускорения \mathbf{a} зависит от угла α между вектором силы \mathbf{F} и вектором скорости \mathbf{v} .

В нерелятивистской механике, как известно, «инертная масса» определяется как отношение модуля силы к ускорению. Как видно из (10.14), в релятивистском случае это отношение не может определять какой-либо физической величины, так как, во-первых, \mathbf{F} и \mathbf{a} имеют разное направление, и, во-вторых, отношение F/a зависит от взаимного расположения векторов скорости \mathbf{v} и силы \mathbf{F} . В этой связи весьма искусственным, неубедительным и скорее неправильным представляется встречающееся иногда утверждение о том, что одна и та же частица, движущаяся со скоростью \mathbf{v} , имеет различные «инертные массы» только по той причине, что вектор силы \mathbf{F} , действующей на частицу, может быть направлен под разными углами к скорости. Если угол $\alpha = 0$ ($\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$, рис. 10.3, *b*), то говорят о «продольной» массе, а в случае $\alpha = \pi/2$ ($\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$, рис. 10.3, *в*) — о «поперечной» массе и т.д. Таким образом, определяется целое множество «масс». Ясно, что с понятием массы должна ассоциироваться более фундаментальная величина, чем неоднозначное отношение модуля силы F к модулю ускорения a . Поэтому в современной теории относительности понятия «инертная», «продольная» и «поперечная» массы не определяются и

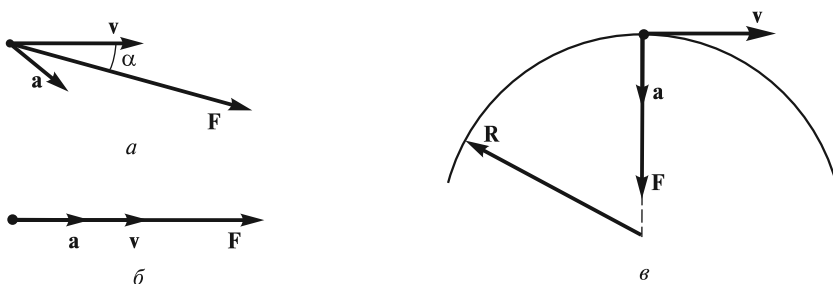


Рис. 10.3

не используются. Не приводя аргументов, отметим также, что в релятивистской механике нет понятия и «гравитационной» массы. Сила «притяжения» покоящимся массивным объектом какой-либо частицы в общей теории относительности Эйнштейна зависит не от массы частицы, а от ее релятивистской энергии E (см. ниже), и не только от расстояния до частицы, но и от направления ее движения.

Уравнение (10.14) используется для описания движения заряженных частиц в различных электрических и магнитных полях. В частности, при проектировании ускорителей, в которых заряженные частицы ускоряются до релятивистских скоростей, на основе этого уравнения рассчитываются различные параметры ускорителя, в том числе такие важнейшие, определяющие основную часть стоимости, как длина линейных ускорителей и радиус окружности для кольцевых ускорителей. В построенных ускорителях все заряженные частицы движутся по траекториям, рассчитанным на основе релятивистского уравнения движения.

В случае, когда частица движется с релятивистской скоростью v в направлении действующей силы \mathbf{F} (рис. 10.3, б), уравнение движения (10.14) сводится к уравнению

$$m\gamma^3 \mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (10.15)$$

Такое движение имеет место в линейных ускорителях, когда частица с зарядом q ускоряется в постоянном электрическом поле с напряженностью E_0 . Поскольку сила равна $\mathbf{F} = q\mathbf{E}_0$ и не зависит от скорости движения частицы, то уравнение (10.15) можно переписать в виде

$$\gamma^3 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a}_0, \quad (10.16)$$

где $\mathbf{a}_0 = q\mathbf{E}_0/m$.

Это уравнение полностью аналогично соотношению (9.32), в котором a_0 — постоянное ускорение в сопутствующей системе отсчета. Основные параметры такого ускоренного движения были рассчитаны в предыдущей лекции. Отметим лишь, что отношение $F/a = m\gamma^3$ по устаревшей терминологии иногда трактуют как «продольную» массу.

Другой пример — движение заряженной частицы в постоянном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} . Как известно, в этом случае на частицу будет действовать магнитная составляющая силы Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (10.17)$$

где q — заряд частицы; \mathbf{v} — вектор скорости.

Поскольку вектор силы \mathbf{F} перпендикулярен вектору скорости \mathbf{v} (рис. 10.3, в), то сила не совершает работы и величина скорости не меняется. Поэтому в левой части уравнения (10.14) надо положить $\frac{dv}{dt} = 0$, и тогда оно примет вид

$$\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (10.18)$$

Заметим, что в этом случае отношение $F/a = \gamma m$, являющееся, по устаревшей терминологии, «поперечной» массой, в γ^2 раз меньше «продольной» массы.

Ограничимся сначала случаем, когда вектор индукции постоянного магнитного поля \mathbf{B} перпендикулярен вектору скорости \mathbf{v} . Из (10.18) следует, что модуль ускорения будет равен

$$a = \frac{qvB}{m\gamma} \quad (10.19)$$

так как модуль скорости частицы не изменяется. Вектор ускорения \mathbf{a} перпендикулярен как вектору скорости \mathbf{v} , так и вектору индукции магнитного поля \mathbf{B} . Очевидно, движение с постоянным по величине ускорением, направленным перпендикулярно скорости, — это движение по окружности с центростремительным ускорением

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (10.20)$$

где R — радиус окружности.

Приравнивая выражения (10.19) и (10.20), можно найти радиус окружности:

$$a = \frac{\gamma m v}{qB} \quad (10.21)$$

Из формулы (10.21) видно, что в релятивистском случае, по сравнению с классическим, радиус орбиты возрастает в γ раз! Например, в настоящее время в ЦЕРН строится самый мощный ускоритель протонов на встречных пучках (лоренцевский фактор $\gamma_0 \approx 7 \cdot 10^3$ в каждом пучке). Для этого случая необходим подземный туннель с радиусом

$$R_0 = \frac{\gamma_0 m c^2 v}{q c^2 B} \approx 4,3 \cdot 10^3 \text{ м} = 4,3 \text{ км} \quad (10.22)$$

В (10.22) принято, что для протона $mc^2 = 0,94 \cdot 10^9$ эВ и индукция магнитного поля $B = 5,3$ Тл. Для создания такого большого поля необходимо использовать сверхпроводящие магниты (устройства из сверхпроводящих сплавов, которые охлаждаются до гелиевых температур ≈ 4 К). Следует также отметить, что в эквивалентном обычном ускорителе, когда ускоренные частицы сталкиваются с неподвижной мишенью, лоренцевский фактор должен был бы иметь огромное значение: $\gamma \approx 2\gamma_0^2 = 10^8$. Радиус такого ускорителя должен быть равен $R = 2\gamma_0 R_0 \approx 4,3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 10^3 = 6,2 \cdot 10^4$ км, т.е. почти в 10 раз превышать радиус Земли!

Отметим, что в космических лучах встречаются частицы (предположительно протоны), лоренцевский фактор которых $\gamma \approx 3 \cdot 10^{11}$. Если для магнитного поля в межгалактической среде принять $B \approx 10^{-13}$ Тл, то радиус кривизны траектории таких частиц будет равен $R \approx 10^{22}$ км. Такой радиус (≈ 300 Мпк) соответствует расстоянию до квазаров (≈ 500 Мпк) — одних из наиболее удаленных объектов на небесной сфере. Если источники частиц расположены ближе, то частицы будут двигаться прямолинейно, и направления их прихода на небесной сфере будут практически совпадать с направлениями на сами источники.

Если вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} не перпендикулярен вектору скорости \mathbf{v} частицы, а составляет с ним угол θ , то движение частицы можно представить в следующем виде. Во-первых, будет движение с постоянной скоростью $v_{\parallel} = v \cos \theta$ [v_{\parallel} — проекция скорости на направление магнитного поля (рис. 10.4)]. И во-вторых, частица будет двигаться по окружности со скоростью $v_{\perp} = v \sin \theta$ (v_{\perp} — проекция скорости на перпендикулярное направление). Ясно, что результатом будет движение частицы по винтовой линии с постоянным, так называемым питч-углом θ (угол между векторами скорости \mathbf{v} и индукции магнитного поля \mathbf{B}). Радиус этой винтовой линии равен [см. (10.21)]

$$R = \frac{\gamma m v_{\perp}}{qB} = \frac{\gamma m v \sin \theta}{qB}, \tag{10.23}$$

а шаг

$$h = v_{\parallel} T = v \cos \theta T. \tag{10.24}$$

Период T движения по окружности равен

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi \gamma m}{qB}. \tag{10.25}$$

Исследования космических лучей, проведенные в 1957 г. С. Н. Верновым в СССР и в 1958 г. Ван-Алленом в США, привели к открытию так называемых

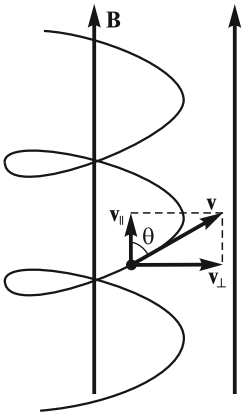


Рис. 10.4

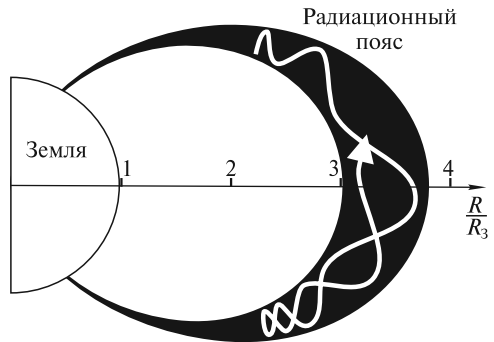


Рис. 10.5

радиационных поясов Земли. В этих поясах заряженные частицы (электроны или протоны) движутся по винтовым линиям вокруг силовых линий магнитного поля Земли от одного магнитного полюса к другому и обратно. Пример такого движения для одного из поясов показан на рис. 10.5 (R — расстояние от центра Земли, R_3 — ее радиус). Подобные радиационные пояса обнаружены и у других планет Солнечной системы, например у Юпитера и Меркурия.

Работа силы и энергия частицы. Для простоты рассмотрим случай, когда частица движется в направлении действия силы. Умножим обе части релятивистского уравнения движения (10.13) на скорость \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} \frac{d}{dt} (\gamma m \mathbf{v}) = \mathbf{v} \mathbf{F}. \quad (10.26)$$

Правая часть в (10.26) равна работе силы \mathbf{F} в единицу времени, или мощности этой силы. Поэтому левая часть должна определять скорость изменения энергии E частицы, т. е. величину $\frac{dE}{dt}$. Очевидно, что левую часть (10.26) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) &= \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{mv^2}{c^2 (\sqrt{1 - v^2/c^2})^3} v \frac{dv}{dt} = \\ &= \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dv}{dt} \left(1 + \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \right) = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{dE}{dt}, \end{aligned} \quad (10.27)$$

где учтено, что $\mathbf{v} d\mathbf{v} = v dv$.

Таким образом, энергию E частицы в релятивистском случае следует определить по формуле

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2. \quad (10.28)$$

Отсюда видно, что даже при скорости $v = 0$ частица обладает энергией

$$E_0 = mc^2. \quad (10.29)$$

Эта энергия пропорциональна массе частицы m и называется *энергией покоя*. Следует особо отметить, что в соотношении (10.29) проявляется совершенно новое свойство массы: *масса m тела определяет запасенную в нем энергию E_0* . В механике Ньютона масса таким свойством не обладает.

При малых скоростях v из (10.28) приближенно имеем

$$E \approx mc^2 + mv^2/2. \quad (10.30)$$

Правая часть (10.30) есть сумма энергии покоя E_0 и обычной кинетической энергии T . В релятивистском случае при произвольных скоростях v , по аналогии с (10.30), кинетическая энергия T определяется как разность релятивистской энергии E и энергии покоя E_0 :

$$T = E - E_0 = mc^2(\gamma - 1). \quad (10.31)$$

В ультрарелятивистском случае ($\gamma \gg 1$) энергия E много больше mc^2 и кинетическая энергия T практически не отличается от полной энергии E .

Из (10.12) и (10.28) можно исключить скорость v и получить следующее очень важное выражение, которое связывает энергию, импульс и массу:

$$E^2 - (pc)^2 = m^2c^4. \quad (10.32)$$

Это соотношение — одно из основных в релятивистской механике. Оно позволяет рассчитать массу релятивистской частицы, которую нельзя измерить непосредственно. Релятивистский импульс \mathbf{p} можно также выразить через энергию E и скорость \mathbf{v} :

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}E/c^2. \quad (10.33)$$

Формула (10.33) также широко используется. Из нее, в частности, следует очень важный вывод о массе частицы, движущейся со скоростью света. Если $v = c$, то, согласно (10.33), $p = E/c$. Подстановка этого выражения для импульса в (10.32) приводит к нулевой массе частицы: $m = 0$. Таким образом, *со скоростью света могут двигаться только частицы с нулевой массой*, например, фотоны.

В релятивистской механике используется единица измерения энергии, равная 1 эВ. Таковую энергию частица с зарядом электрона e приобретает в электрическом поле при перемещении между точками с разностью потенциалов $\Delta U = 1$ В. Соотношение со стандартной единицей измерения энергии 1 Дж определяется равенством, в котором заряд электрона выражен в единицах СИ:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}. \quad (10.34)$$

Обратная связь задается соотношением:

$$1 \text{ Дж} = 6,24 \cdot 10^{18} \text{ эВ}. \quad (10.35)$$

Как правило, в физике элементарных частиц используются приставки к эВ для обозначения более крупных единиц энергии: М — мега (10^6), Г — гига (10^9), Т — тера (10^{12}), П — пета (10^{15}) и Э — экса (10^{18}). Например, 1 ПэВ = 10^{15} эВ. Эти энергетические единицы используются для характеристики масс частиц (масса выражается через энергию покоя). Например, масса электрона в этих единицах $m_e c^2 = 0,511$ МэВ, а масса протона $m_p c^2 = 0,938$ ГэВ. Открыты частицы и более тяжелые. Например, масса так называемого Z^0 бозона очень велика: $m_{Z^0} c^2 = 91,2$ ГэВ. Масса одной из самых тяжелых открытых частиц равна примерно 200 ГэВ. В некоторых теориях предполагается существование гипотетических X -частиц с грандиозными массами: $m_X c^2 \approx 10^{24} \div 10^{28}$ эВ!

Энергия, импульс и масса системы свободных частиц. Рассмотрим систему свободных частиц. В релятивистской механике, как и в классической, энергия и импульс аддитивны. Энергия E системы из n частиц определяется как сумма энергий E_i всех частиц:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i. \quad (10.36)$$

Аналогично и импульс \mathbf{p} этой системы равен сумме импульсов \mathbf{p}_i частиц:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i. \quad (10.37)$$

В релятивистской механике для массы m системы свободных частиц, по аналогии с (10.32), с учетом (10.36) и (10.37) имеем следующее выражение:

$$m^2 = \left[E^2 - (pc)^2 \right] / c^4 = \left[\left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n cp_i \right)^2 \right] / c^4. \quad (10.38)$$

Отсюда видно, что *масса системы свободных частиц не равна сумме масс составляющих частиц*, т.е. свойство аддитивности для массы не выполняется. В качестве простейшего примера представим себе два протона (масса каждого равна m_p), которые летят навстречу друг другу с равными и противоположно направленными импульсами \mathbf{p} и одинаковыми энергиями E . Очевидно, для каждого из протонов выполняется соотношение (10.32). Для массы системы, в соответствии с (10.38), находим

$$m = 2E/c^2, \quad (10.39)$$

что радикально отличается от простой суммы масс протонов.

Из (10.38) также следует, что масса изолированной системы (в которой $\sum_{i=1}^n E_i = \text{const}$ и $\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{const}$) со временем не меняется. Более того, при переходе из одной ИСО в другую масса не изменяется, хотя импульс \mathbf{p} и энергия E системы могут измениться.

Связанные состояния системы взаимодействующих частиц. В релятивистской механике, как и в классической, можно рассматривать системы взаимодействующих частиц. Примерами таких систем могут служить некоторые составные частицы — адроны из кварков и глюонов, ядра атомов из нейтронов и протонов, атомы, молекулы и т.д. Взаимодействующие частицы внутри системы могут двигаться с релятивистской скоростью. Однако несмотря на это, из-за сильного взаимодействия между собой эти частицы не могут покинуть пределов системы.

Ограничимся рассмотрением только таких взаимодействий, которые позволяют ввести потенциальную энергию, и рассмотрим полную энергию системы частиц.

Определим энергию E_i отдельной частицы с номером i как сумму ее кинетической T_i и потенциальной U_i энергий:

$$E_i = T_i + U_i. \quad (10.40)$$

Как известно, если $E_i < 0$, то частица может двигаться только в пределах ограниченной области пространства. Таким образом, если энергии E_i всех частиц отрицательны, то образуется связанное состояние системы частиц: частицы не могут отойти друг от друга на бесконечное расстояние. В системе центра масс ансамбль частиц можно рассматривать как новую составную частицу с некоторой массой m и нулевым импульсом $p = 0$. Поскольку импульс, а следовательно, и скорость составной частицы равны нулю, то она обладает только энергией покоя E_0 :

$$E_0 = mc^2. \quad (10.41)$$

Из условия баланса энергии вытекает, что энергия E_0 составной частицы равна сумме энергий покоя E_{0i} и энергий E_i составляющих ее частиц:

$$E_0 = \sum_{i=1}^n (E_{0i} + E_i), \quad (10.42)$$

где n — полное число частиц в системе.

Энергии покоя E_{0i} частиц связаны с их массами m_i известным соотношением

$$E_{0i} = m_i c^2. \quad (10.43)$$

Так как, по условию образования составной частицы, все энергии E_i отрицательны, из (10.41)—(10.43) видно, что масса составной частицы меньше суммы масс составляющих ее частиц:

$$m < \sum_{i=1}^n m_i. \quad (10.44)$$

Таким образом, в случае взаимодействующих частиц, как и в случае свободных (см. выше), масса не обладает свойством аддитивности: *масса составной частицы меньше суммы масс составляющих ее частиц*. Уменьшение массы Δm (иногда его называют «дефектом массы») определяется соотношением

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_i - m. \quad (10.45)$$

В справочниках приводятся массы электрона, протона, нейтрона, а также массы ядер, атомов и молекул. Поэтому по формуле (10.45) можно рассчитать это уменьшение массы для различных составных частиц.

Из (10.42) совершенно ясно, что уменьшение массы составной частицы определяется силами взаимодействия между составляющими частицами. В случае очень слабых сил межмолекулярного взаимодействия (сил Ван-дер-Ваальса, которые значительно слабее кулоновских из-за почти полной компенсации электрических полей ядер полями окружающих их электронов), или даже для более значительных кулоновских сил, действующих между ядрами атомов и электронами, величина Δm ничтожно мала и на современном уровне экспериментальной техники измерена быть не может. Например, масса молекулы водорода H_2 на $2,4 \cdot 10^{-9}$ а. е. м. меньше суммы масс двух атомов водорода. В свою очередь, масса атома водорода на $1,46 \cdot 10^{-8}$ а. е. м. меньше суммы масс протона и электрона. Для сравнения укажем, что погрешность измерения масс атомов составляет величину около $(4 \div 6) \cdot 10^{-8}$ а. е. м. Поэтому приведенные выше оценки для Δm получены на основе известной энергии, выделяемой при синтезе молекул водорода, и энергии ионизации атома водорода. Полезным параметром, позволяющим судить о силе взаимодействий, является отношение $\Delta m/m$. Значения этого параметра равны соответственно $1,2 \cdot 10^{-9}$ при синтезе молекулы водорода и $1,4 \cdot 10^{-8}$ при образовании атома водорода.

Совсем иное дело — ядерные силы, действующие между нуклонами (протонами и нейтронами) внутри атомного ядра. Эти силы очень велики и при-

водят к наблюдаемым изменениям массы Δm . Например, в случае основного изотопа железа ^{56}Fe масса атома равна $m_a = 55,934939$ а.е.м. Если из этой величины вычесть массу 26 электронов и пренебречь энергией связи этих электронов в атоме, то для массы ядра получим значение $m_n = 55,920576$ а.е.м. Сумма масс 26 протонов и 30 нейтронов, составляющих ядро железа, равна

$\sum_{i=1}^n m_i = 56,4491448$ а.е.м. Таким образом, масса ядра железа ^{56}Fe на $\Delta m = 0,5285688$ а.е.м. (примерно на половину массы нуклона!) меньше суммы масс составляющих его 56 нуклонов. Величина $\Delta m/m$ в этом случае равна 0,00945, т.е. $\sim 1\%$!

Полезным оказывается понятие энергии связи $E_{\text{св}}$ ядра. Величина $E_{\text{св}}$ ядра равна минимальной энергии, которую необходимо затратить, чтобы преодолеть силы притяжения между нуклонами и разделить ядро на составляющие его нуклоны. Эта энергия определяется следующим образом:

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m(A, Z)]c^2 = \Delta mc^2, \quad (10.46)$$

где A — число нуклонов в ядре; Z — число протонов; m_p и m_n — массы протона и нейтрона; $m(A, Z)$ — масса ядра.

Определяют также энергию связи, приходящуюся на один нуклон, — удельную энергию связи $\epsilon(A)$ нуклона в ядре:

$$\epsilon_{\text{св}}(A) = E_{\text{св}}/A. \quad (10.47)$$

В случае уже рассмотренного выше ядра железа энергия связи равна $E_{\text{св}} = 492,362$ МэВ, а удельная энергия связи $\epsilon_{\text{св}}(A) = 8,79$ МэВ. Значения удельной энергии связи $\epsilon_{\text{св}}$ для некоторых изотопов приведены на рис. 10.6. Вначале эта энергия резко увеличивается от значения, равного 0 для водорода, до при-

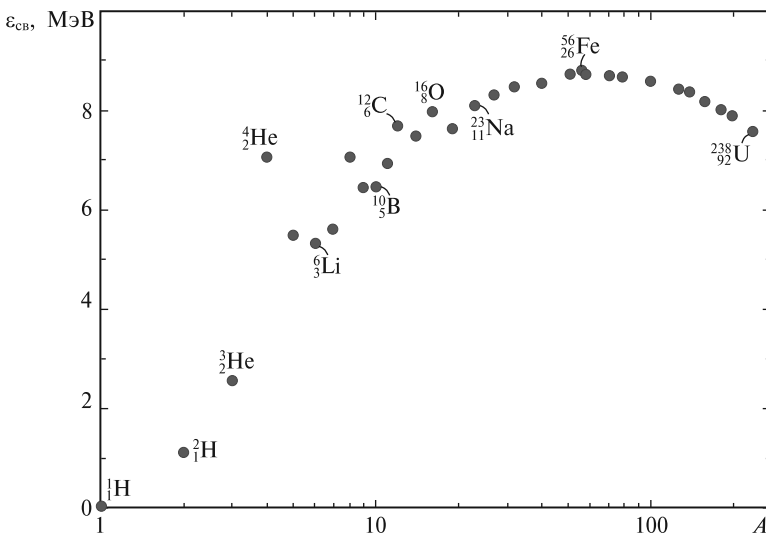


Рис. 10.6

мерно 8 МэВ для элементов с $A \approx 16$ (углерод, азот, кислород), затем это возрастание продолжается до максимального значения $\approx 8,8$ МэВ при $A \approx 60$ (железо, никель — химические элементы, расположенные примерно в конце первой трети таблицы элементов Д. И. Менделеева). После достижения максимума удельная энергия связи медленно убывает до $\sim 7,6$ МэВ для урана.

Ядерные силы превосходят кулоновские в 100—1000 раз (в зависимости от расстояния между протонами), но действуют только на малых расстояниях (порядка размеров ядра). Поэтому если затратить некоторую энергию на преодоление кулоновского отталкивания при сближении двух легких ядер, расположенных в начале таблицы элементов, до расстояния, на котором действуют уже ядерные силы, и «слить» их в более тяжелое ядро (реакция синтеза), то можно получить значительный выигрыш в энергии. Этот выигрыш примерно равен разности удельных энергий связи конечного и исходных ядер, умноженной на число нуклонов в конечном ядре, минус потери энергии на сближение ядер. Такие реакции называют термоядерными, поскольку они могут протекать только при очень высоких температурах, когда кинетические энергии вступающих в реакцию ядер велики (достаточны для преодоления кулоновского отталкивания).

Из рис. 10.6 ясно, что такие реакции синтеза с выделением энергии возможны только для элементов, расположенных до максимума кривой, т.е. до железа. Поэтому конечный этап термоядерной эволюции многих звезд — это железная звезда, когда все легкие элементы «выгорели». Опуская детали происхождения тяжелых ядер, заметим, что деление тяжелого ядра, расположенного в конце таблицы элементов, на более легкие осколки (реакция деления) также приводит к большому выделению энергии. В самом деле, энергия связи на нуклон у осколков больше, чем у исходного ядра. Поэтому разность удельных энергий связи исходного ядра и продуктов деления, умноженная на число всех нуклонов, и определяет энергетический выход реакции. Введенные понятия будут пояснены на примерах, рассмотренных ниже.

Взаимопревращения энергии покоя и кинетической энергии. Рассмотрим сначала превращение энергии покоя в кинетическую энергию. Как и выше, будем рассматривать различные взаимодействия, начиная с самых слабых, обусловленных межмолекулярными силами. В случае горения водорода — экологически наиболее чистого энергетического процесса будущего — выделяется энергия Q как теплота экзотермической (с выделением теплоты) реакции:



где $Q = \Delta mc^2$ — кинетическая энергия молекул водяного пара; Δm — разность масс веществ до и после реакции.

В химических справочниках можно найти, что $Q = 242$ кДж/моль $= 1,51 \cdot 10^{18}$ МэВ/моль (что соответствует уменьшению массы Δm , равному примерно $1,6 \times 10^{15}$ масс протона). Относительное уменьшение массы в этом случае, если считать, что массы протонов и нейтронов примерно одинаковы ($m_p \approx m_n$), равно

$$\Delta m/m \approx 1,6 \cdot 10^{15} m_p / (18 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} m_p) = 1,5 \cdot 10^{-10}. \quad (10.49)$$

При образовании атома водорода из протона и электрона относительное уменьшение массы значительно больше и составляет $\Delta m/m = 1,4 \cdot 10^{-8}$ (пример-

но на два порядка больше) и соответственно увеличивается энерговыделение (в пересчете на единицу массы).

Гораздо более значительное уменьшение массы и, следовательно, особенно большое энерговыделение имеет место в случае действия ядерных сил, например, в реакциях деления ядер тяжелых элементов и в реакциях синтеза ядер из более легких. Рассмотрим сначала реакцию деления ядер урана. Из справочников следует, что при делении одного ядра урана ^{235}U выделяется энергия $Q=205,2$ МэВ в виде кинетической энергии осколков деления — ядер, расположенных примерно в середине таблицы элементов. Такому большому энерговыделению соответствует значение параметра $\Delta m/m = 9,4 \cdot 10^{-4}$, что почти на семь порядков больше, чем в случае химических реакций.

Как хорошо известно, нуклоны в ядрах элементов, расположенных в Периодической системе элементов Д. И. Менделеева рядом с железом и никелем, упакованы плотнее, чем в ядре урана. Именно за счет «уплотнения» нуклонов в ядрах осколков урана сумма масс этих осколков меньше, чем масса его ядра. Это уменьшение массы и приводит к возникновению кинетической энергии осколков деления.

Выше причина энерговыделения пояснялась с помощью понятия удельной энергии связи $\epsilon_{\text{св}}(A)$. У осколков деления эта энергия примерно на 0,9 МэВ выше, чем у ядра урана. Если умножить это значение на 235 (число нуклонов в ядре урана), то и получится упомянутое выше значение Q .

Распад радиоактивных элементов в мантии Земли является постоянным источником ее внутренней теплоты. Среднее значение плотности потока теплоты из недр Земли к ее поверхности составляет величину $I \approx 5 \cdot 10^{-2}$ Вт/м². Температура пород в приземном слое возрастает в среднем на 0,1 К при увеличении глубины на 1 м. На глубине около 3 км она достигает примерно 400 К.

В реакциях синтеза ядер легких элементов, расположенных в таблице Менделеева до наиболее плотно упакованных ядер (железо, никель и др.), энергия покоя также переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. Основа всей жизни на Земле — солнечная энергия — высвобождается в основном в реакциях синтеза так называемого протон-протонного цикла, в которых участвуют главным образом ядра атомов водорода и гелия. В результате полного цикла этих реакций происходит синтез ядра гелия за счет слияния четырех протонов и двух электронов. Помимо ядра гелия образуются два электронных нейтрино ν_e , и выделяется энергия Q :



В этом случае относительное уменьшение массы, за счет которого выделяется кинетическая энергия $Q=26,734$ МэВ, равно $\Delta m/m = 0,712 \cdot 10^{-2}$, что примерно на порядок больше, чем в реакциях деления. Отметим, что для синтеза ядра гелия протоны должны сблизиться до малого расстояния, начиная с которого будут эффективно действовать ядерные силы притяжения. Для осуществления такого сближения необходимо совершить работу против сил кулоновского отталкивания между протонами. Поэтому протоны должны обладать достаточной кинетической энергией, что имеет место только в веществе, нагретом до очень высокой температуры. Реакции такого типа называют, как уже было сказано, термоядерными, т.е. протекающими при очень

высоких температурах. Отметим, что температура в центре Солнца, где, как предполагают, протекает реакция (10.50), составляет $T \approx 1,4 \cdot 10^7$ К. Известно значение так называемой солнечной постоянной — плотности потока солнечной энергии, достигающей земной атмосферы: $I_C = 1,353 \cdot 10^3$ Вт/м². С помощью этой постоянной и известного расстояния до Солнца определяется светимость Солнца $\Phi_C = 3,826 \cdot 10^{26}$ Вт — полная энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени, т. е. его мощность. Энерговыведение Q реакции (10.50) и светимости Φ_C позволяют определить число N актов синтеза в единицу времени:

$$N = \Phi_C / Q = 8,9447 \cdot 10^{37} \text{ с}^{-1}. \quad (10.51)$$

Каждую секунду примерно $4,3 \cdot 10^6$ т массы Солнца превращается в кинетическую энергию и далее — в энергию излучения — источник света и тепла на Земле и других планетах. Так как Солнце в основном состоит из водорода и его полная масса $M_C \approx 2 \cdot 10^{27}$ т, жителям Земли гарантирован «бесплатный» источник энергии еще в течение нескольких миллиардов лет.

Что касается нейтрино, то они уносят примерно 3 % энергии. На основании рассчитанного числа N реакций (10.51) и известного расстояния R от Земли до Солнца можно оценить плотность потока солнечных нейтрино на Земле

$$I_\nu = 2N / (4\pi R^2) = 6,36 \cdot 10^{14} \text{ нейтрино} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}, \quad (10.52)$$

о чем уже упоминалось выше (см. лекцию 7). В первых экспериментах измерялись потоки только электронных нейтрино. Полученные значения оказались примерно в 2 раза меньше оценки (10.52). Это породило так называемую загадку солнечных нейтрино: либо мы не все понимаем в процессах, происходящих на Солнце, либо недостаточно знаем о свойствах нейтрино. В настоящее время показано, что в соответствии с теорией Б. Понтекорво часть электронных нейтрино переходит в другие их виды, которые удалось зарегистрировать в последующих экспериментах.

Поскольку на Земле имеются огромные запасы воды, то очевидна крайняя заманчивость реализации реакции (10.50) (или подобных реакций термоядерного синтеза) в целях земной энергетики. Физики во многих странах мира пытаются найти способы осуществления этих реакций в различных установках. Например, в предложенных в России «токамаках» водородная плазма изолируется от стенок установки магнитным полем и нагревается током до очень высоких температур, при которых возможны реакции синтеза. Проводятся опыты на установках, в которых для нагрева вещества используется энергия излучения мощных лазеров, т. е. пытаются реализовать так называемый лазерный термоядерный синтез. Однако такие проекты еще весьма далеки от своего завершения.

Самый эффективный процесс превращения энергии покоя в кинетическую — это аннигиляция частиц и античастиц (электрона и позитрона, протона и антипротона и т. д.). В этом случае значение параметра $\Delta m / m \lesssim 1$. В космологических теориях предполагается, что сначала во Вселенной имелось равное количество вещества и антивещества. Затем в силу некоторых физических процессов в нестационарной Вселенной образовался небольшой избыток вещества, и все антивещество и соответствующая часть вещества проаннигилирова-

ли с образованием фотонов. В современной Вселенной остались только упомянутый выше небольшой избыток вещества и остывшие до температуры ~ 3 К фотоны — так называемое реликтовое микроволновое излучение. Тем не менее в настоящее время разрабатываются проекты и проводятся эксперименты с целью обнаружения во Вселенной антиматерии.

В заключение кратко рассмотрим процессы превращения кинетической энергии в энергию покоя. В этих процессах величина $\Delta m/m$ также зависит от силы взаимодействия. Например, в случае межмолекулярных сил это значение составляет около 10^{-10} . При нагревании тела его масса возрастает из-за увеличения кинетической энергии составляющих его частиц на $\Delta m = Q/c^2$, где Q — количество теплоты, сообщенной телу. Например, любитель горячего чая выпивает на $8 \cdot 10^{-10}$ г больше, чем выпивший стакан холодного ($\Delta m/m = 3,2 \cdot 10^{-12}$). Ясно, что все эндотермические химические реакции (идущие с поглощением теплоты) приводят к увеличению массы продуктов реакции по сравнению с массой реагентов. Во всех фазовых переходах, протекающих с поглощением теплоты (плавление, кипение, испарение), масса вещества конечной фазы больше, чем исходной. Очевидно, прямая проверка увеличения массы в таких процессах современной технике эксперимента недоступна.

Явное рождение вещества — частиц с различными массами — происходит в процессах взаимодействия релятивистских частиц в многочисленных экспериментах на ускорителях. Именно в таких экспериментах были открыты новые тяжелые частицы, о которых говорилось выше. При взаимодействии релятивистских ядер тяжелых элементов рождаются тысячи новых частиц с различными массами.

РАЗДЕЛ 3

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛЕКЦИЯ 11

Кинематика абсолютно твердого тела. Механика твердого тела, как и механика материальной точки, включает два основных раздела: кинематику и динамику.

Задача кинематики — описать движение твердого тела и, исходя из закона этого движения, определить положение, скорость и ускорение любой точки тела в любой момент времени. В общем случае это довольно сложная задача — в этом можно убедиться, покрутив в руках, например, книгу или ручку. Конечно, всякое тело можно разбить на физически малые объемы и попробовать применить к этим частям приемы, известные из кинематики точки. На первый взгляд, ситуация все равно остается сложной — не выписывать же законы движения для всех таких малых частей, пусть даже их будет и конечное число?

Облегчающее обстоятельство заключено в самих словах «твердое тело». Твердое — значит практически недеформируемое. Опыт показывает, что если на какой-либо достаточно твердый предмет подействовать силой и заставить его двигаться, то расстояния между любыми его точками останутся практически неизменными. Хотя, конечно, под действием приложенных сил в теле возникнут внутренние напряжения, причина которых — деформации отдельных его частей. Но если мы говорим о твердом теле, то эти деформации оказываются настолько малыми, что незаметны для глаза, и ими можно пренебречь. В итоге мы приходим к идеализированной модели *абсолютно твердого тела* (в дальнейшем — просто *твердого тела*), которое совершенно не способно деформироваться, хотя под действием внешних сил в нем могут возникать определенные внутренние напряжения.

Таким образом, твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, относительные положения которых остаются неизменными. Другими словами, все элементы такого тела неподвижны в системе координат, жестко связанной с телом. Именно это обстоятельство позволяет значительно упростить решение физических задач и конкретизировать многие общие понятия (импульс, момент импульса, энергия), введенные ранее для системы материальных точек.

Степени свободы. Углы Эйлера. *Число степеней свободы* — это число независимых величин, которые необходимо задать для того, чтобы однозначно определить положение тела в пространстве. В разных ситуациях число степеней свободы твердого тела может быть различным. Если однородный диск, не вращаясь, может скользить вдоль неподвижной в данной системе отсчета оси

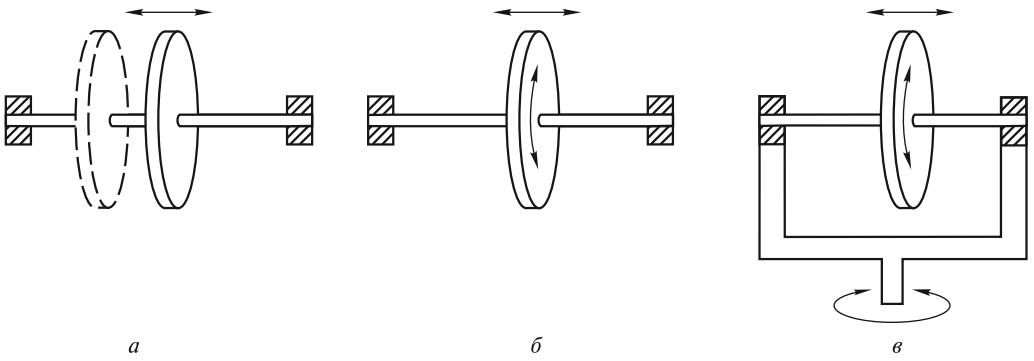


Рис. 11.1

(рис. 11.1, *a*), то в этом случае он, очевидно, обладает только одной степенью свободы — положение диска однозначно определяется, скажем, координатой x его центра, отсчитываемой вдоль оси. Но если диск может еще и вращаться (рис. 11.1, *б*), то у него появляется еще одна степень свободы — к координате x добавляется угол φ поворота диска вокруг оси. Если ось с диском закреплена в рамке, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси (рис. 11.1, *в*), то число степеней свободы становится равным трем — к величинам x и φ добавляется угол θ поворота рамки.

Коробка, которая может перемещаться по поверхности стола (рис. 11.2), также имеет три степени свободы — для однозначного определения ее положения можно задать, например, координаты (x, y) одной из ее вершин и угол φ между каким-либо ребром коробки и краем стола.

Каково же число степеней свободы твердого тела в самом общем случае?

Для того чтобы однозначно определить положение твердого тела в пространстве, надо задать координаты трех его точек, не лежащих на одной прямой. Одна материальная точка имеет три степени свободы (три декартовы координаты x, y, z). Две материальные точки, жестко связанные между собой, имеют $3 + 3 - 1 = 5$ степеней свободы. В этом случае координаты точек x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 не являются независимыми величинами, они связаны между собой уравнением

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \quad (11.1)$$

где l — расстояние между точками.

В общем случае для твердого тела получаем $3 + 3 + 3 - 3 = 6$ степеней свободы, поскольку имеются три уравнения связи, выражающие неизменность взаимного расположения трех точек.

Шесть величин, соответствующих шести степеням свободы твердого тела, можно задавать по-разному. В дальнейшем будут использоваться три различные декартовы системы координат:

1. Лабораторная система XYZ .

2. Система $x_0y_0z_0$, начало которой связано с некоторой точкой O твердого тела, а оси остаются параллельными

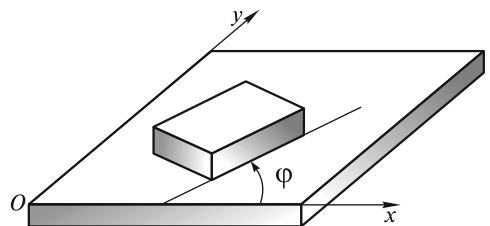


Рис. 11.2

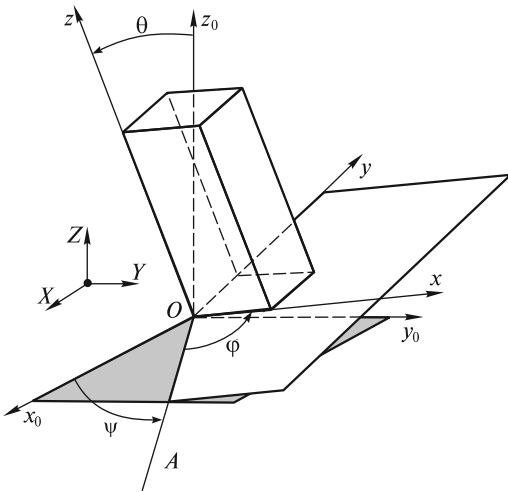


Рис. 11.3

го тела (прямоугольного параллелепипеда) лежит в плоскости Oxy . Обычно их называют так: φ — угол собственного вращения (характеризует поворот твердого тела вокруг оси z), ψ — угол прецессии (поворот вокруг z_0 с сохранением угла θ между осями z_0 и z), θ — угол нутации (отклонение тела от оси z_0).

Примеры с диском на оси и коробкой (см. рис. 11.1, 11.2) показывают, что сложное движение твердого тела может рассматриваться как суперпозиция достаточно простых движений: поступательного перемещения и поворота (вращения) вокруг оси. В дальнейшем, следуя принципу «от простого к сложному», мы рассмотрим 5 типов движения твердого тела, исчерпывающие все встречающиеся на практике случаи:

- поступательное движение;
- вращение вокруг неподвижной оси;
- плоское, или плоскопараллельное движение;
- движение твердого тела с одной неподвижной точкой (такое движение иногда называют сферическим);
- движение свободного, т.е. незакрепленного твердого тела.

Поступательное движение. Движение, при котором любой выделенный в теле отрезок остается параллельным самому себе, называется *поступательным*. Классическим примером является движение кабинок колеса обозрения (рис. 11.4). Здесь наглядно показано, что поступательное движение — совсем не обязательно прямолинейное. Очевидно, что число степеней свободы тела в этом случае равно трем, так как достаточно описать движение какой-нибудь одной точки тела (например, точки A на рис. 11.5). Траектории всех остальных точек (например, точки B на рис. 11.5) могут быть получены путем «параллельного» переноса.

Допустим, что закон движения точки A задан в виде

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_A(t). \quad (11.2)$$

осей лабораторной системы XYZ , т.е. система $x_0y_0z_0$ движется вместе с точкой O твердого тела относительно системы XYZ поступательно.

3. Система xuz , начало которой находится в той же точке O , что и начало системы $x_0y_0z_0$, а оси жестко связаны с твердым телом.

Тогда шести степеням свободы тела будут соответствовать три координаты точки O (в лабораторной системе XYZ) и три угла φ , ψ , θ , однозначно определяющие положение системы xuz относительно $x_0y_0z_0$. Эти углы называют *углами Эйлера*. Их смысл ясен из рис. 11.3, где OA — линия пересечения плоскостей Ox_0y_0 и Oxy , а нижнее основание твердого

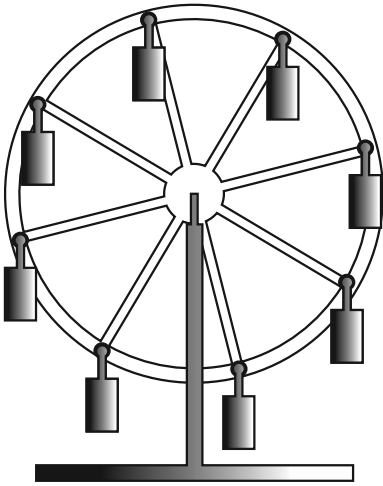


Рис. 11.4

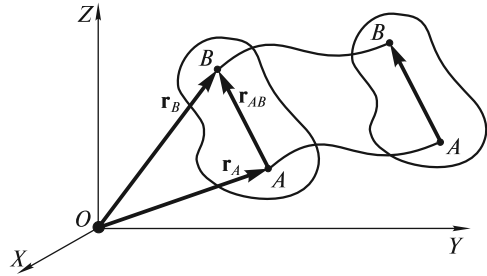


Рис. 11.5

Тогда закон движения точки B будет иметь вид

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_A + \mathbf{r}_{AB}, \quad (11.3)$$

где \mathbf{r}_{AB} — вектор, направленный от точки A к точке B .

Скорость точки A

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{R}_A}{dt}, \quad (11.4)$$

скорость точки B

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{R}_B}{dt} = \mathbf{v}_A, \quad (11.5)$$

так как \mathbf{r}_{AB} — вектор, постоянный по величине (абсолютно твердое тело) и направлению (поступательное движение).

Ускорения точек A и B также совпадают:

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \mathbf{a}_B. \quad (11.6)$$

Таким образом, поступательное движение твердого тела полностью определяется законом движения какой-либо его точки.

Вращение вокруг неподвижной оси. Если при движении твердого тела какие-либо две его точки все время остаются неподвижными, то через эти точки можно провести прямую, называемую *неподвижной осью вращения*. Такое движение мы наблюдаем ежедневно, открывая и закрывая дверь в комнату. Очевидно, что в этом случае тело обладает лишь одной степенью свободы, связанной с углом его поворота вокруг оси. Все точки тела движутся по окружностям, лежащим в плоскостях, которые перпендикулярны оси вращения; центры окружностей лежат на этой оси.

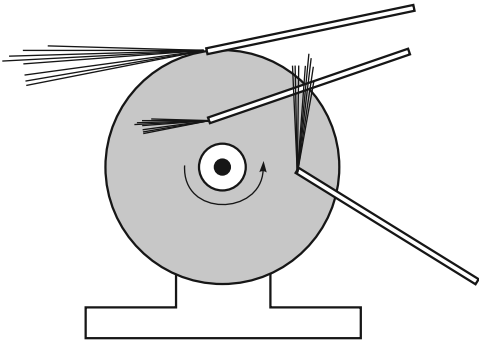


Рис. 11.6

Существенно, что линейные скорости точек, находящихся на разных расстояниях от оси вращения, разные. В этом можно убедиться, касаясь стальной проволокой вращающегося диска точила (рис. 11.6): чем дальше от оси, тем длиннее снопы искр — тем больше скорость соответствующей точки диска. Видно также, что искры летят по касательной к окружности, описываемой данной точкой диска.

Ясно, что угловое перемещение всех точек твердого тела за одно и то же время будет одинаковым. Общей кинематической характеристикой является *угловая скорость*

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (11.7)$$

где $\Delta\varphi$ — угол поворота тела за время Δt .

Аналогично тому, как это было сделано в лекции 2 для движения материальной точки по окружности, можно ввести вектор элементарного углового перемещения $\overline{d\varphi}$, направленный вдоль оси вращения в соответствии с правилом правого буравчика: если рукоятку буравчика поворачивать в направлении вращения тела, то поступательное перемещение буравчика даст направление $\overline{d\varphi}$. После деления $\overline{d\varphi}$ на интервал времени dt , за которое это угловое перемещение произошло, получим векторную величину

$$\vec{\omega} = \frac{\overline{d\varphi}}{dt}, \quad (11.8)$$

которая определяет, во-первых, модуль угловой скорости тела, во-вторых, — ориентацию оси вращения в пространстве, а в-третьих, — направление вращения тела. Следует подчеркнуть, что вектор $\vec{\omega}$ — скользящий вектор в том смысле, что его начало можно совместить с любой точкой, принадлежащей оси вращения.

Например, для Земли, вращающейся вокруг своей оси с запада на восток, вектор $\vec{\omega}$ имеет направление от южного полюса к северному. Угловая скорость

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

Для сравнения: угловая скорость орбитального движения Земли составляет

$$\omega_{\text{орб}} \approx \frac{\omega_3}{365} \approx 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}.$$

Заметим, что период орбитального движения не кратен продолжительности суток, что создает известные трудности в построении календаря (необходимо вводить високосные годы и др.).

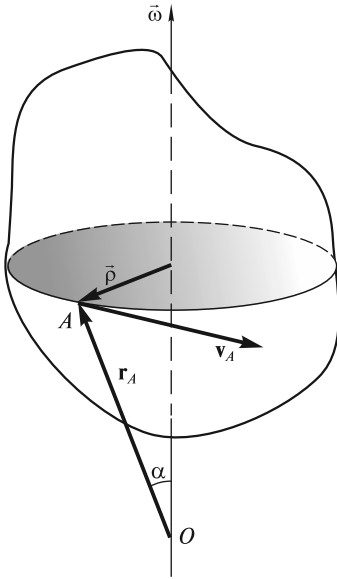


Рис. 11.7

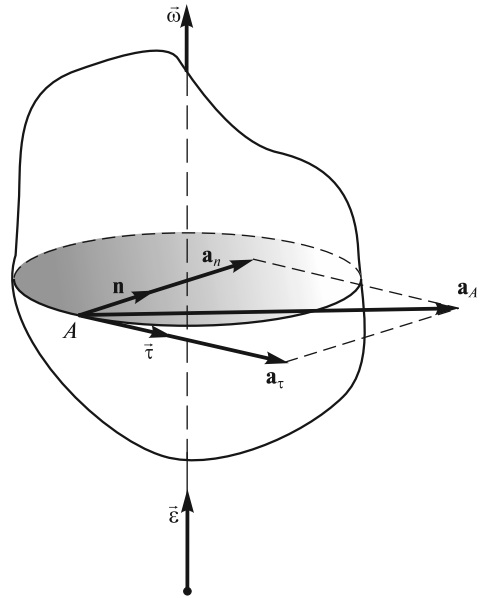


Рис. 11.8

Зная $\vec{\omega}$, можно определить линейную скорость любой точки твердого тела. Введем радиус-вектор \mathbf{r}_A некоторой точки A тела, поместив его начало в точку O на оси вращения (рис. 11.7). Вектор $\vec{\rho}$ проведен в точку A от оси вращения перпендикулярно к ней. Вектор скорости \mathbf{v}_A связан с векторами \mathbf{r}_A и $\vec{\omega}$ соотношением

$$\mathbf{v}_A = \vec{\omega} \times \mathbf{r}_A \quad (11.9)$$

(формула Эйлера). Скорость

$$v_A = \omega r_A \cdot \sin \alpha = \omega \rho. \quad (11.10)$$

Ясно, что точку O на оси вращения можно выбрать произвольно — значение $\rho = r_A \sin \alpha$ будет при этом одним и тем же.

Ускорение точки A

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_A + \vec{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \mathbf{r}_A + \vec{\omega} \times \mathbf{v}_A, \quad (11.11)$$

где $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ — угловое ускорение тела.

Это аксиальный вектор, направленный в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$, если угловая скорость возрастает, и противоположно $\vec{\omega}$, если эта величина убывает.

Таким образом, ускорение \mathbf{a}_A является суммой двух величин:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n, \quad (11.12)$$

(рис. 11.8), причем все три вектора \mathbf{a}_A , \mathbf{a}_τ и \mathbf{a}_n лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

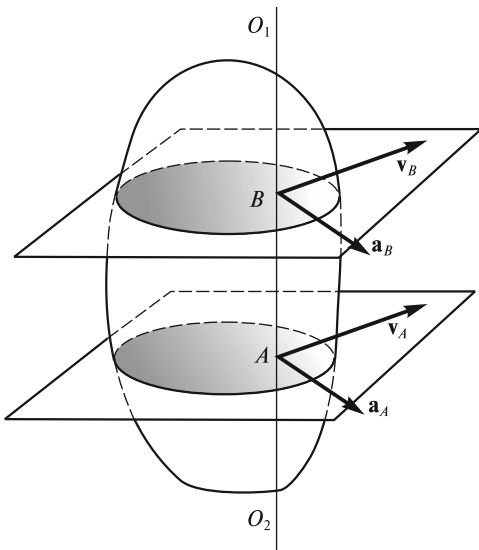


Рис. 11.9

Ускорение

$$\mathbf{a}_\tau = \vec{\epsilon} \times \mathbf{r}_A = \epsilon r \vec{\tau} \quad (11.13)$$

— это *тангенциальное ускорение* ($\vec{\tau}$ — единичный вектор в направлении \mathbf{v}_A);

$$\mathbf{a}_n = \vec{\omega} \times \mathbf{v}_A = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}_A) = \omega^2 r \mathbf{n} \quad (11.14)$$

— это *центростремительное ускорение* (\mathbf{n} — единичный вектор в направлении к оси вращения). Эти составляющие полного ускорения подробно обсуждались в лекции 2, когда рассматривалось вращательное движение материальной точки.

Плоское движение. Движение твердого тела, при котором траектории всех его точек лежат в параллельных плоскостях, называют *плоским*. Если провести некоторую прямую O_1O_2 , жестко связанную с телом и перпендикулярную этим плоскостям (рис. 11.9), то все точки этой прямой будут двигаться по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями и ускорениями; сама прямая будет, естественно, сохранять свою ориентацию в пространстве. Таким образом, при плоском или, как его иногда называют, плоскопараллельном движении твердого тела достаточно рассмотреть движение одного сечения тела.

Обратимся к классическому примеру плоского движения — качению цилиндра по плоскости без проскальзывания. Рассматривая одно из сечений цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси, мы приходим к известной задаче о катящемся колесе (рис. 11.10). Центр колеса движется прямолинейно, траектории других точек представляют собой кривые, называемые *циклоидами* (см. лекцию 2). При отсутствии проскальзывания мгновенная скорость самой нижней точки колеса (точки M) равна нулю. Это позволяет рассматривать качение колеса как суперпозицию двух движений: поступательного со скоростью оси v_0 и вращательного с угловой скоростью $\omega = v_0/R$, где R — радиус колеса. Ясно, что в этом случае $v_M = v_0 - \omega R = 0$.

Теперь используем этот прием при произвольном плоском движении. Выделим отрезок AB в рассматриваемом сечении твердого тела (рис. 11.11). Перевод сечения из положения 1 в положение 2 можно рассматривать как суперпози-

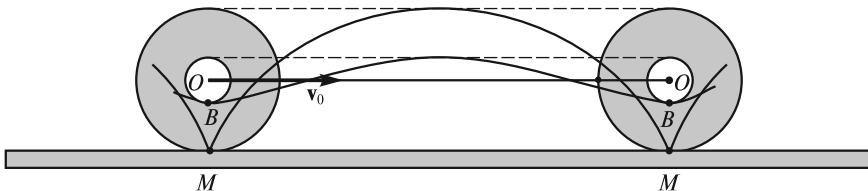


Рис. 11.10

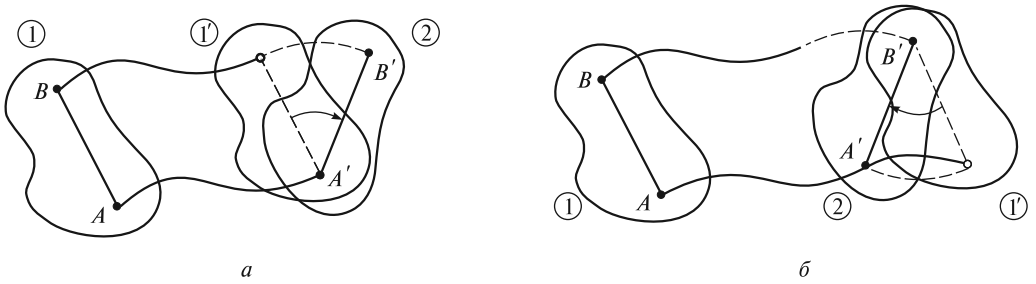


Рис. 11.11

цию двух движений: поступательного из 1 в 1' и вращательного из 1' в 2 вокруг точки A' , называемой *полосом* (рис. 11.11, *a*). В качестве полюса можно выбрать любую точку, лежащую в плоскости сечения (даже вне тела). На рис. 11.11, *б* в качестве полюса выбрана точка B . Существенно, что длина пути при поступательном перемещении изменилась (в данном случае увеличилась), но угол поворота остался прежним!

Приближая конечное положение тела к начальному (сокращая рассматриваемый промежуток времени), приходим к выводу: плоское движение твердого тела в любой момент времени можно представить как суперпозицию поступательного движения со скоростью некоторой точки, выбранной в качестве полюса, и вращения вокруг оси, проходящей через полюс. В реальной ситуации оба эти движения, естественно, происходят одновременно. Существенно, что разложение на поступательное и вращательное движения оказывается неоднозначным, причем в зависимости от выбора полюса скорость поступательного движения будет изменяться, а угловая скорость вращения останется неизменной.

В соответствии со сказанным скорость \mathbf{v}_A любой точки A тела (рис. 11.12) является векторной суммой скорости \mathbf{v}_0 какой-либо другой точки O , принятой за полюс, и скорости $\bar{\omega} \times \mathbf{r}$ вращательного движения вокруг этого полюса (вектор $\bar{\omega}$ направлен «за чертеж»). Система координат XYZ на рис. 11.12 — неподвижная (лабораторная); начало системы $x_0y_0z_0$ помещено в некоторую точку O тела (полюс), а сама система $x_0y_0z_0$ движется относительно XYZ поступательно, причем так, что оси Oy_0 и Oz_0 остаются в плоскости рисунка; рассматриваемая точка A тела также движется в плоскости рисунка.

Радиус-вектор точки A в системе XYZ

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}. \quad (11.15)$$

Скорость точки A

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{R}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \bar{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (11.16)$$

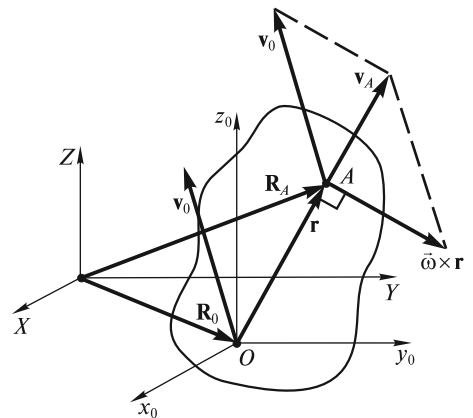


Рис. 11.12

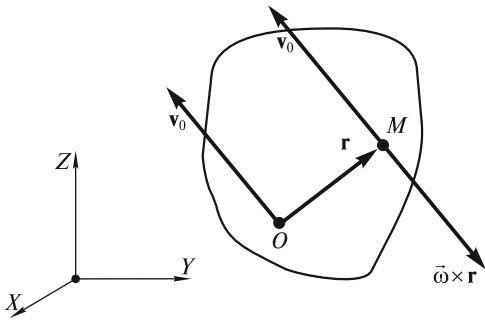


Рис. 11.13

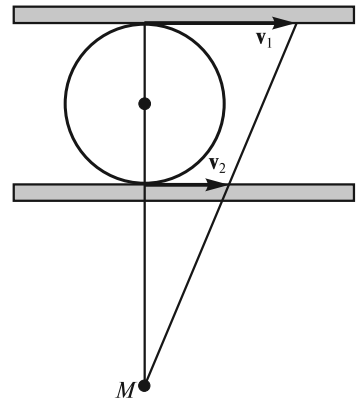


Рис. 11.14

Из (11.16) можно сделать вывод, что в любой момент времени должна существовать такая точка M , скорость которой в лабораторной системе XYZ равна нулю. Ее положение определяется из условия:

$$\mathbf{v}_0 = -\bar{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11.17)$$

(рис. 11.13). Заметим, что эта точка не обязательно должна принадлежать телу, т.е. может находиться и вне его. Таким образом, плоское движение твердого тела в любой заданный момент времени можно представить как чистое вращение вокруг оси, проходящей через точку M — такая ось называется *мгновенной осью вращения*. В частности, для колеса, катящегося по плоскости без проскальзывания (см. рис. 11.10), мгновенная ось вращения проходит через точку M соприкосновения колеса с плоскостью.

Существенно, что в разные моменты времени мгновенная ось вращения проходит через разные точки твердого тела и через разные точки лабораторной системы XYZ , сохраняя, конечно, свою ориентацию в пространстве.

Для того, чтобы определить положение мгновенной оси вращения, необходимо знать скорости каких-либо двух точек тела. Так, на рис. 11.14 показано положение мгновенной оси вращения (точка M) для цилиндра, зажато между двумя параллельными рейками, которые движутся в одну и ту же сторону с разными скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 .

В ситуации, изображенной на рис. 11.15, стержень AB касается точки D и движется в плоскости чертежа так, что его конец B все время находится на полуокружности DEF . Мгновенная ось вращения стержня проходит через точку M , находящуюся на верхней полуокружности DMF . При движении стержня точка M перемещается по дуге этой полуокружности.

В случае, показанном на рис. 11.16, стержень, опирающийся одним из своих концов на гладкую горизонтальную плоскость, начинает падать из вертикального положения. Центр масс стержня опускается, оставаясь на одной и той же вертикали. Мгновенная ось вращения (точка M) перемещается по дуге окружности радиуса $l/2$ (l — длина стержня).

Зная угловую скорость ω и положение мгновенной оси вращения, можно определить скорость любой точки тела при его плоском движении. При каче-

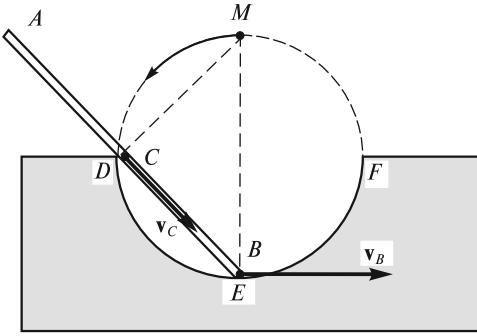


Рис. 11.15

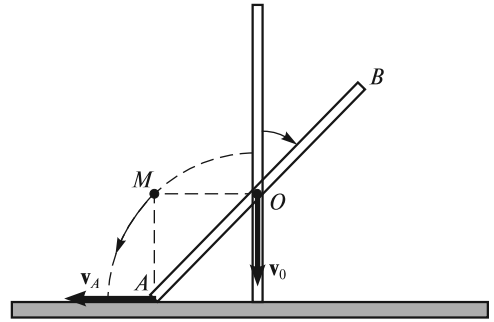


Рис. 11.16

нии колеса по плоскости со скоростью v_0 без проскальзывания (рис. 11.17), скорость точки B

$$v_B = \omega \cdot MB = \frac{v_0}{R} \cdot MB; \quad (11.18)$$

вектор \mathbf{v}_B перпендикулярен отрезку MB , соединяющему точку B с точкой M , через которую проходит мгновенная ось вращения. Естественно, \mathbf{v}_B можно представить и как векторную сумму двух скоростей: \mathbf{v}_0 — скорости поступательного движения оси колеса и \mathbf{v}'_0 — скорости вращательного движения вокруг этой оси, причем $|\mathbf{v}_0| = |\mathbf{v}'_0|$.

Рис. 11.18 иллюстрирует распределение скоростей точек на вертикальном диаметре колеса железнодорожного вагона. Мгновенная ось вращения проходит через точку M соприкосновения колеса с рельсом. Видно, что линейная скорость точки на краю реборды направлена в сторону, противоположную движению вагона.

Найдем теперь ускорения точек тела при плоском движении. Дифференцируя выражение (11.16) по времени, для ускорения точки A получим:

$$\mathbf{a}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n. \quad (11.19)$$

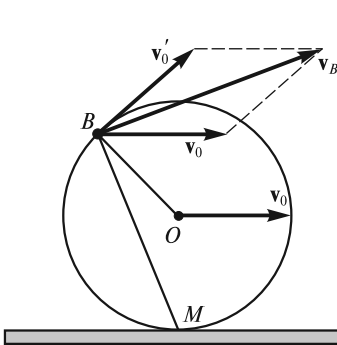


Рис. 11.17

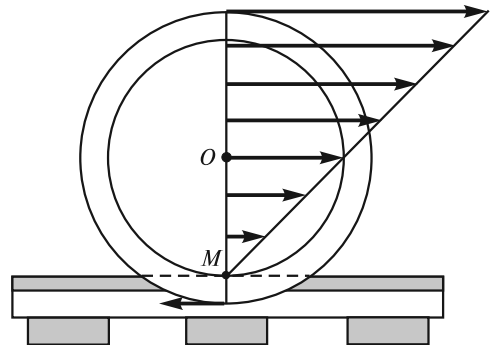


Рис. 11.18

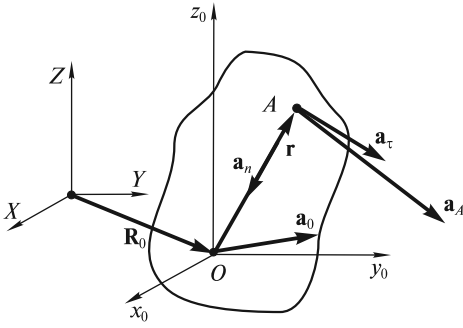


Рис. 11.19

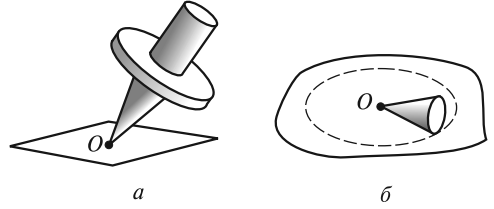


Рис. 11.20

Это ускорение складывается из трех величин (рис. 11.19): ускорения \mathbf{a}_0 точки O , принятой за полюс, тангенциального ускорения

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} = \bar{\epsilon} \times \mathbf{r} \quad (11.20)$$

и нормального ускорения

$$\mathbf{a}_n = \bar{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) = \bar{\omega}(\bar{\omega}\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\bar{\omega}\bar{\omega}) = -\omega^2 \mathbf{r} \quad (11.21)$$

(скалярное произведение $\bar{\omega}\mathbf{r}$ равно нулю, так как $\bar{\omega} \perp \mathbf{r}$).

Таким образом, ускорение любой точки A тела при плоском движении равно векторной сумме ускорения точки, принятой за полюс, и ускорения точки A , возникающего вследствие ее вращения вокруг этого полюса. Отсюда, в частности, следует, что ускорение любой точки колеса, катящегося по плоскости без проскальзывания с постоянной скоростью v_0 , направлено к центру колеса и равно v_0^2/r , где r — расстояние точки до оси колеса. В этом примере в качестве полюса удобно выбрать центр колеса O , тогда $a_0 = a_\tau = 0$, и остается только $a_n = v_0^2/r$.

Заметим, что, кроме рассмотренной выше мгновенной оси вращения, можно ввести мгновенную ось, ускорения всех точек которой в данный момент времени равны нулю. При этом следует иметь в виду, что эта ось, вообще говоря, не совпадает с мгновенной осью вращения. Так, в примере с колесом, катящимся по плоскости с постоянной скоростью, она проходит через центр колеса.

Движение твердого тела с одной неподвижной точкой. Примеры такого движения показаны на рис. 11.20: волчок с шарнирно закрепленным острием (а); конус, катящийся по плоскости без проскальзывания (б). В этом случае тело имеет три степени свободы — начало систем $x_0y_0z_0$ и xyz , введенных в начале лекции, можно совместить с точкой закрепления, а для описания движения тела использовать три угла Эйлера:

$$\varphi = \varphi(t); \quad \psi = \psi(t); \quad \theta = \theta(t). \quad (11.22)$$

Для твердого тела с одной неподвижной точкой справедлива *теорема Эйлера*: твердое тело, закрепленное в одной точке, может быть переведено из одного положения в любое другое одним поворотом на некоторый угол вокруг неподвижной оси, проходящей через точку закрепления. Из теоремы Эй-

лера следует, что движение закрепленного в точке твердого тела в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку закрепления. Естественно, что положение этой оси как в пространстве, так и относительно самого тела с течением времени в общем случае меняется.

Геометрическое место положений мгновенной оси вращения относительно системы $x_0y_0z_0$ — это сложная коническая поверхность с вершиной в точке закрепления. В теоретической механике ее называют *неподвижным аксоидом*. Геометрическое место положений мгновенной оси вращения относительно подвижной системы xyz , жестко связанной с твердым телом, — это тоже коническая поверхность — *подвижный аксоид*. Например, в случае конуса AO_1 , катящегося по поверхности другого конуса AO_2 без проскальзывания (рис. 11.21; точка A подвижного конуса шарнирно закреплена), неподвижный аксоид совпадает с поверхностью неподвижного конуса AO_2 , а подвижный аксоид — с поверхностью подвижного конуса AO_1 .

Скорость произвольной точки твердого тела можно рассчитать как линейную скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси:

$$\mathbf{v} = \bar{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (11.23)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки относительно начала системы $x_0y_0z_0$, совмещенного с точкой закрепления. Следует только иметь в виду, что, в отличие от случая вращательного движения вокруг неподвижной оси, «плечо» вектора \mathbf{v} (расстояние от рассматриваемой точки до мгновенной оси вращения) является функцией времени.

Ускорение произвольной точки твердого тела

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (11.24)$$

состоит из двух частей: ускорения, обусловленного неравномерностью вращения (изменением $\bar{\omega}$ по величине и направлению)

$$\mathbf{a}_{\text{вп}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} = \bar{\epsilon} \times \mathbf{r}, \quad (11.25)$$

и центростремительного (нормального) ускорения

$$\mathbf{a}_n = \bar{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}) = -\omega^2 \bar{\rho}, \quad (11.26)$$

где $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$ — радиус-вектор, проведенный от мгновенной оси вращения в рассматриваемую точку.

Следует помнить, что угловое ускорение $\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ связано с изменением угловой скорости не только по величине, но и по направлению, так что векторы $\mathbf{a}_{\text{вп}}$ и \mathbf{a}_n не перпендикулярны друг другу.

Проекция вектора мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ на оси системы xyz , жестко связанной с твердым телом, мож-

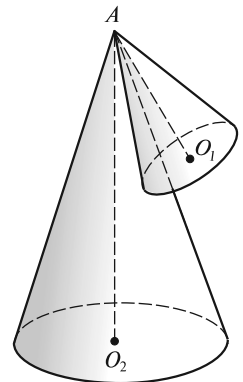


Рис. 11.21

но выразить через углы Эйлера φ, ψ, θ (см. рис. 11.3) и их производные по времени $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$. Действительно, вектор $\vec{\omega}$ можно представить в виде суммы трех составляющих:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z + \dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0} + \dot{\theta} \mathbf{e}_{OA}, \quad (11.27)$$

где \mathbf{e}_z и \mathbf{e}_{z_0} — единичные векторы вдоль осей Oz и Oz_0 соответственно, \mathbf{e}_{OA} — единичный вектор вдоль линии узлов OA (на рис. 11.3 эти орты не показаны).

Определим проекции векторов $\dot{\varphi} \mathbf{e}_z, \dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0}, \dot{\theta} \mathbf{e}_{OA}$, входящих в (11.27), на оси системы xuz (см. рис. 11.3):

$$(\dot{\varphi} \mathbf{e}_z)_x = 0; \quad (\dot{\varphi} \mathbf{e}_z)_y = 0; \quad (\dot{\varphi} \mathbf{e}_z)_z = \dot{\varphi}; \quad (11.28)$$

$$(\dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0})_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi; \quad (\dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0})_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi; \quad (\dot{\psi} \mathbf{e}_{z_0})_z = \dot{\psi} \cos \theta; \quad (11.29)$$

$$(\dot{\theta} \mathbf{e}_{OA})_x = \dot{\theta} \cos \varphi; \quad (\dot{\theta} \mathbf{e}_{OA})_y = -\dot{\theta} \sin \varphi; \quad (\dot{\theta} \mathbf{e}_{OA})_z = 0. \quad (11.30)$$

Из (11.27) — (11.30) получим:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \quad (11.31)$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \quad (11.32)$$

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \quad (11.33)$$

Уравнения (11.31) — (11.33) называются *кинематическими уравнениями Эйлера*. Они, в частности, позволяют определить величину и направление вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$, если закон движения тела задан в виде (11.22).

В ряде случаев движение тела с закрепленной точкой удобно представить как суперпозицию двух вращений вокруг пересекающихся осей. В случае, изображенном на рис. 11.22, вершина конуса шарнирно закреплена в точке O ; ось конуса горизонтальна, а его основание катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости S . Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль мгновенной оси вращения OM (скорости точек O и M равны нулю). При движении конуса мгновенная ось вращения изменяет свое положение, описывая некоторую коническую поверхность с вершиной в точке O . «Абсолютное» вращение конуса вокруг мгновенной оси OM с угловой скоростью $\vec{\omega}$ можно представить в виде суммы

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \quad (11.34)$$

где $\vec{\omega}_1$ — угловая скорость «относительного» вращения вокруг собственной оси симметрии конуса; $\vec{\omega}_2$ — угловая скорость «переносного» вращения самой оси симметрии вокруг вертикали.

Если задана скорость ω_2 , то

$$\omega_1 = \omega_2 \operatorname{ctg} \alpha = \omega_1 \frac{h}{R};$$

$$\omega = \frac{\omega_2}{\sin \alpha} = \omega_2 \frac{\sqrt{R^2 + h^2}}{R},$$

где α — угол полураствора конуса; R — радиус основания конуса; h — его высота.

Заметим, что движение тела, представляющее собой одновременное вра-

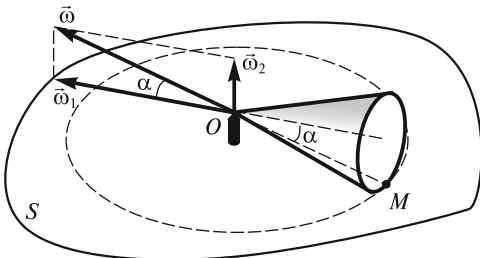


Рис. 11.22

шение вокруг нескольких осей с угловыми скоростями $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \dots$, может быть сведено к вращению вокруг одной оси с угловой скоростью

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \dots \quad (11.35)$$

только в том случае, когда *все оси вращения пересекаются в одной точке*.

Движение свободного твердого тела. Свободное твердое тело может совершать любые перемещения относительно лабораторной системы XYZ . В этом, самом общем случае, оно имеет 6 степеней свободы. Учитывая теорему Эйлера (см. выше), движение свободного твердого тела можно представить в виде суперпозиции поступательного движения, при котором все точки движутся как произвольно выбранный полюс (начало системы $x_0y_0z_0$), и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через этот полюс. Этому представлению соответствуют шесть независимых координат: три декартовы координаты X, Y, Z точки, принятой за полюс, и три угла Эйлера φ, ψ, θ (см. рис. 11.3).

Положение произвольной точки A тела в лабораторной системе XYZ определяется радиусом-вектором \mathbf{R}_A :

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}, \quad (11.36)$$

где \mathbf{R}_0 — радиус-вектор точки O , принятой за полюс; \mathbf{r} — радиус-вектор точки A относительно полюса.

Скорость точки A

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_0 + \bar{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (11.37)$$

где \mathbf{v}_0 — скорость полюса; $\bar{\omega} \times \mathbf{r}$ — линейная скорость вращательного движения вокруг оси, проходящей через полюс.

Ускорение точки A

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (11.38)$$

где \mathbf{a}_0 — ускорение полюса; $\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$ — ускорение, обусловленное изменением вектора мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}$ по величине и направлению; $\bar{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — центростремительное ускорение [см. формулу (11.26)].

Принимая за полюс различные точки свободного твердого тела (или даже точки вне его), можно получить бесконечно большое число разложений его движения на поступательное и вращательное. Как и в случае плоского движения, кинематические характеристики переносного поступательного движения $\mathbf{v}_0, \mathbf{a}_0$ будут зависеть от выбора полюса. Кинематические же характеристики относительного вращательного движения $\bar{\omega}, \frac{d\bar{\omega}}{dt}$ от выбора полюса не зависят.

Заметим, что произвольное движение твердого тела невозможно свести к вращению вокруг мгновенной оси. Однако можно показать, что в этом случае существует так называемая *мгновенная ось винтового перемещения* твердого тела. Произвольное движение твердого тела в любой момент времени можно представить в виде суперпозиции вращательного движения вокруг некоторой оси и поступательного перемещения вдоль этой же оси. Естественно, в общем случае с течением времени положение мгновенной оси винтового перемещения в пространстве и относительно тела изменяется.

ЛЕКЦИЯ 12

Динамика абсолютно твердого тела. Задача динамики абсолютно твердого тела — установить взаимосвязь между движением тела и действующими на него силами. Как следует из предыдущего рассмотрения, произвольное движение твердого тела можно свести к поступательному и вращательному. При поступательном движении траектории всех точек тела одинаковы, поэтому, как и в механике точки, в этом случае могут быть использованы такие понятия, как масса, импульс, сила. Однако при изучении вращательного движения тела этих понятий оказывается недостаточно.

Рассмотрим два цилиндра одинаковой массы и одинаковых размеров, причем один цилиндр, изготовленный из легкого материала, пусть будет сплошным, а другой, сделанный из тяжелого материала, — полым. Опыт показывает, что при соскальзывании с достаточно гладкой наклонной плоскости цилиндры не вращаются и ведут себя совершенно одинаково (рис. 12.1, *а*); в частности, они одновременно достигают основания этой наклонной плоскости. Иное дело, если плоскость шероховатая и цилиндры скатываются, вращаясь вокруг своей оси (рис. 12.1, *б*), — в этом случае быстрее скатывается сплошной цилиндр. Следовательно, при вращательном движении существенно распределение массы относительно оси вращения.

Об этом же свидетельствуют и другие опыты: чем дальше от оси вращения сосредоточена масса тела, тем труднее его раскрутить при воздействии постоянной силой, имеющей одно и то же плечо (рис. 12.2, *а*, *б*). Для раскручивания стержней с грузами до угловой скорости ω_0 в случае, показанном на рис. 12.2, *б*, требуется большее время Δt_{12} , чем в случае рис. 12.2, *а* ($\Delta t_{12} = t_0$). С помощью этих же опытов можно показать, что при вращательном движении тела определяющую роль играет не сама сила, а ее момент: если перебросить нить на шкив большего радиуса, то раскрутить эти тела будет легче ($\Delta t_{12} < t_0$, рис. 12.2, *в*). Поэтому для описания вращательного движения тела необходимо ввести новые физические величины: момент инерции, момент импульса, момент силы.

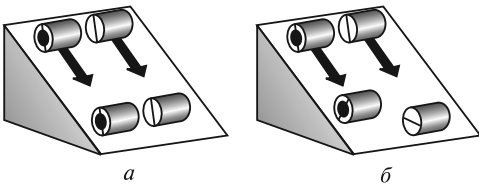


Рис. 12.1

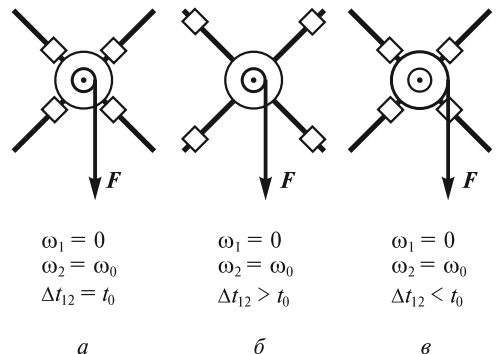


Рис. 12.2

Момент импульса. Тензор инерции. Понятие *момента импульса* относительно точки — одно из важнейших в динамике вращательного движения твердого тела. Эта величина определяется так же, как и для системы материальных точек:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{p}_i = \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \quad (12.1)$$

где $\Delta \mathbf{p}_i = \Delta m_i \mathbf{v}_i$ — импульс частицы тела в лабораторной системе XYZ ; \mathbf{r}_i — радиус-вектор этой частицы, начало которого находится в той точке, относительно которой вычисляется момент импульса тела.

С учетом постоянства расстояний между точками абсолютно твердого тела вектор момента импульса \mathbf{L} можно связать с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$.

Рассмотрим две одинаковые точечные массы m , укрепленные на концах невесомого стержня AB (рис. 12.3). Стержень вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно ему. В этом случае

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 = 2mr^2\vec{\omega}. \quad (12.2)$$

Здесь учтено, что $r_1 = r_2 = r$, а $v_1 = v_2 = \omega r$.

Существенно, что здесь вектор \mathbf{L} направлен так же, как и вектор $\vec{\omega}$. К сожалению, так бывает не всегда. В этом можно убедиться на примере, показанном на рис. 12.4. Невесомый стержень AB с двумя массами m на концах жестко закреплен в точке O под некоторым углом α к вертикальной оси и расположен в плоскости Oyz . При вращении стержня с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вектор \mathbf{L} , определенный в соответствии с (12.1), будет составлять с осью вращения угол $\pi/2 - \alpha$. Система xyz , введенная в начале лекции 11, жестко

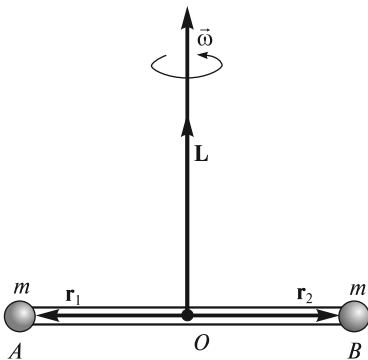


Рис. 12.3

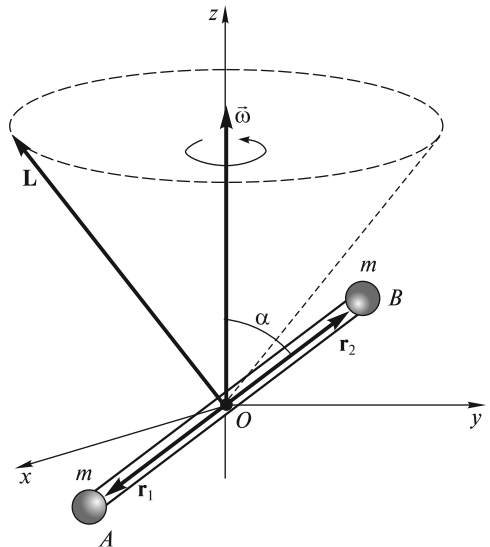


Рис. 12.4

связана со стержнем и поворачивается вместе с ним. При этом вектор \mathbf{L} остается в плоскости Oyz , а в лабораторной системе движется по конической поверхности с углом полураствора $\pi/2 - \alpha$.

Получим выражение для \mathbf{L} в случае твердого тела произвольной формы, закрепленного в некоторой точке O .

Пусть \mathbf{r}_i — радиус-вектор элементарной массы Δm_i твердого тела, а $\bar{\omega}$ — угловая скорость. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times (\bar{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta m_i [\bar{\omega} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \bar{\omega})] = \\ &= \sum_i \Delta m_i [\bar{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \bar{\omega})]. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Векторы \mathbf{r}_i , $\bar{\omega}$ и \mathbf{L} можно проектировать как на оси лабораторной системы XYZ , так и на оси системы xyz , жестко связанной с твердым телом (поскольку точка O неподвижна, начала обеих систем можно совместить). Преимущество системы xyz заключается в том, что в ней проекции \mathbf{r}_i являются постоянными величинами (в системе XYZ они зависят от времени), и выражения для компонент \mathbf{L} имеют более простой вид.

Итак, в системе xyz

$$\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}; \quad \bar{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}. \quad (12.4)$$

Тогда, преобразуя (12.3), можно записать:

$$\mathbf{L} = \sum_i \Delta m_i [\bar{\omega} r_i^2 - \mathbf{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)]. \quad (12.5)$$

Выражения для проекций момента импульса на оси системы xyz запишем в виде

$$L_x = \sum_i \Delta m_i (r_i^2 - x_i^2) \omega_x + \sum_i (-\Delta m_i x_i y_i) \omega_y + \sum_i (-\Delta m_i x_i z_i) \omega_z; \quad (12.6)$$

$$L_y = \sum_i (-\Delta m_i y_i x_i) \omega_x + \sum_i \Delta m_i (r_i^2 - y_i^2) \omega_y + \sum_i (-\Delta m_i y_i z_i) \omega_z; \quad (12.7)$$

$$L_z = \sum_i (-\Delta m_i z_i x_i) \omega_x + \sum_i (-\Delta m_i z_i y_i) \omega_y + \sum_i \Delta m_i (r_i^2 - z_i^2) \omega_z, \quad (12.8)$$

или

$$L_x = J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z; \quad (12.9)$$

$$L_y = J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z; \quad (12.10)$$

$$L_z = J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z, \quad (12.11)$$

где J_{kl} — 9 компонент тензора инерции \hat{J} твердого тела относительно точки O :

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (12.12)$$

Диагональные элементы тензора J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} называются *осевыми моментами инерции*, недиагональные элементы J_{xy} , J_{yx} , J_{xz} , J_{zx} , J_{yz} , J_{zy} — *центробежными моментами инерции*. Обратим внимание, что $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{yz} = J_{zy}$. Такой тензор называют *симметричным*.

Если координатам x , y и z присвоить номера 1, 2 и 3 соответственно, то (12.9)—(12.11) можно представить в виде

$$L_k = \sum_{l=1}^3 J_{kl} \omega_l; \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (12.13)$$

В символическом виде можно записать так:

$$\mathbf{L} = \hat{J} \vec{\omega}. \quad (12.14)$$

Девять величин J_{kl} (из них шесть независимых) определяют однозначную связь между \mathbf{L} и $\vec{\omega}$, причем оказывается, что \mathbf{L} в общем случае не совпадает по направлению с $\vec{\omega}$ (рис. 12.5).

Итак, мы столкнулись с новым типом величин, имеющим важное значение в физике, — *тензором*. Если для задания скалярной величины необходимо одно число (значение скалярной величины), векторной — три числа (три проекции вектора на оси декартовой системы координат), то для задания тензора необходимы в общем случае 9 чисел. На языке математики тензор — это многокомпонентная величина, характеризующаяся определенным поведением при преобразованиях системы координат (в данном случае компоненты тензора инерции преобразуются как произведения соответствующих координат).

Необходимость введения тензорных величин обусловлена различного рода анизотропией свойств физических макроскопических объектов. Тензор связывает две векторные величины, которые пропорциональны друг другу по модулю, но в силу анизотропии свойств объекта не совпадают по направлению. В случае \mathbf{L} и $\vec{\omega}$ решающую роль играет «анизотропия» формы тела (отсутствие определенной симметрии относительно осей xyz). В других случаях это может быть анизотропия, например, электрических или магнитных свойств вещества. Так, векторы поляризации вещества \mathbf{P} и напряженности электрического поля \mathbf{E} связаны тензором поляризуемости $\hat{\alpha}$: $\mathbf{P} = \epsilon_0 \hat{\alpha} \mathbf{E}$ (ϵ_0 — электрическая постоянная). Это означает, что в силу анизотропии электрических свойств вещество поляризуется «не по полю», т. е. «не по

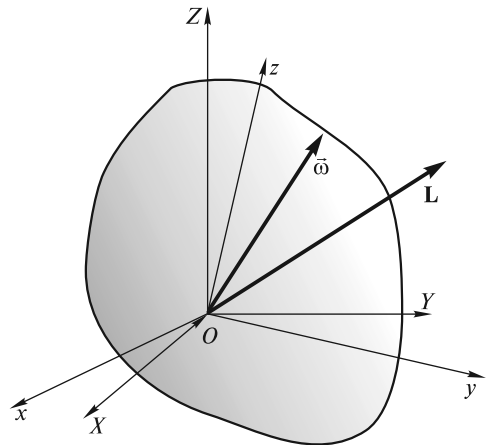


Рис. 12.5

полю» смещаются положительные и отрицательные заряды в молекулах вещества. Примерами других, в общем случае тензорных величин являются диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость вещества. Важную роль в механике играют тензоры деформаций и напряжений. Эти и другие тензорные величины рассматриваются в соответствующих разделах курса общей физики.

Заметим, что если бы векторы \mathbf{r}_i , $\vec{\omega}$ и \mathbf{L} в выражении (12.3) проектировать на оси лабораторной системы XYZ , то компоненты тензора J_{kl} оказались бы зависящими от времени. Такой подход в принципе возможен; он, в частности, используется в Берклеевском курсе физики.

Главные оси инерции. Возникает вопрос: возможен ли для произвольного твердого тела случай, когда векторы \mathbf{L} и $\vec{\omega}$ совпадают? Оказывается, что для всякого тела и любой точки O имеются по крайней мере три взаимно перпендикулярных направления вектора $\vec{\omega}$ (или, другими словами, три взаимно перпендикулярных оси вращения), для которых направления \mathbf{L} и $\vec{\omega}$ совпадают. Такие оси называются *главными осями инерции* тела.

Если оси Ox , Oy и Oz совместить с главными осями инерции тела, то тензор инерции будет иметь вид

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (12.15)$$

Величины $J_{xx} \equiv J_x$, $J_{yy} \equiv J_y$, $J_{zz} \equiv J_z$ в этом случае называют *главными моментами инерции* тела. При этом

$$L_x = J_x \omega_x; \quad L_y = J_y \omega_y; \quad L_z = J_z \omega_z, \quad (12.16)$$

т. е., действительно, если вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль одной из главных осей инерции тела, то вектор \mathbf{L} будет направлен точно так же (рис. 12.6).

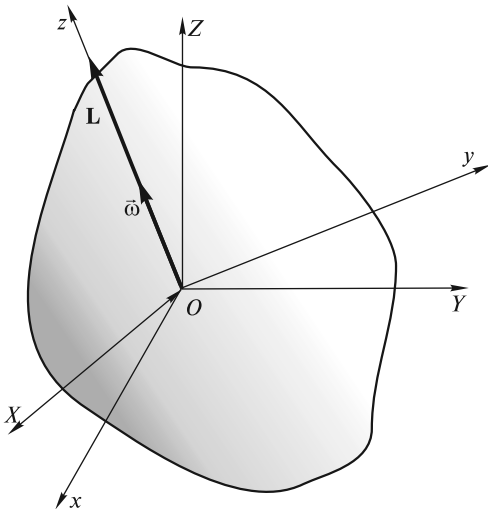


Рис. 12.6

Расположение главных осей инерции в теле и значения соответствующих главных моментов инерции зависят от выбора точки O . Если O совпадает с центром масс, то главные оси называются *главными центральными осями* тела. Если главные оси инерции известны, то значения главных моментов инерции можно вычислить, исходя из распределения массы тела. Например:

$$\begin{aligned} J_x &= \sum_i \Delta m_i (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) = \\ &= \sum_i \Delta m_i \rho_i^2, \end{aligned} \quad (12.17)$$

где ρ_i — расстояние от элементарной массы Δm_i до главной оси Ox .

Как же определить главные оси инерции для выбранной точки O твер-

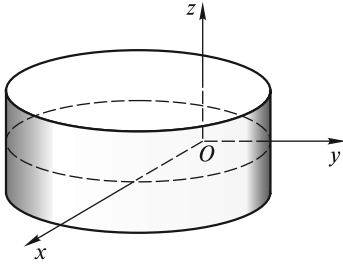


Рис. 12.7

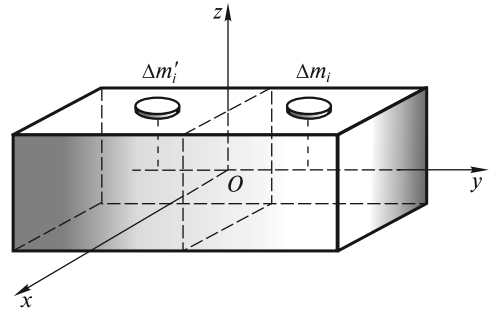


Рис. 12.8

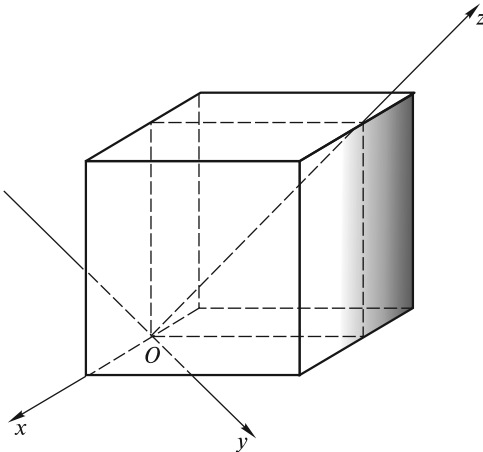


Рис. 12.9

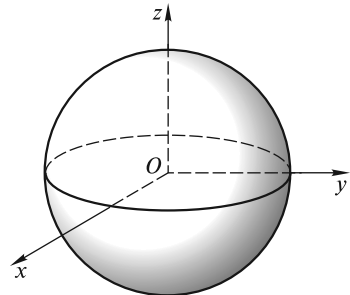


Рис. 12.10

дого тела? Если система xyz выбрана произвольно, то в общем случае оси Ox , Oy и Oz не совпадают с главными осями инерции. Такого совпадения можно добиться путем некоторого поворота исходной системы координат относительно твердого тела. В новых координатах матрица J_{kl} становится диагональной.

Во многих случаях главные оси инерции удастся легко определить из соображений симметрии. На рис. 12.7—12.10 оси координат совмещены с главными осями инерции для различных точек тел, обладающих определенной симметрией: цилиндра (рис. 12.7), прямоугольного параллелепипеда (рис. 12.8), куба (рис. 12.9) и шара (рис. 12.10). Во всех этих случаях $J_{xy} = J_{xz} = J_{yx} = J_{yz} = J_{zx} = J_{zy} = 0$. Например, в случае прямоугольного параллелепипеда (рис. 12.8)

$J_{xy} = -\sum_i \Delta m_i x_i y_i = 0$, так как для всякой массы Δm_i с данными значениями x_i , y_i , z_i найдется симметрично расположенная масса $\Delta m'_i$ с теми же значениями x_i и z_i , но с противоположным значением y_i .

В заключение этого раздела рассмотрим пример нахождения главных осей инерции для плоской прямоугольной пластинки со сторонами a и b и массой m (рис. 12.11).

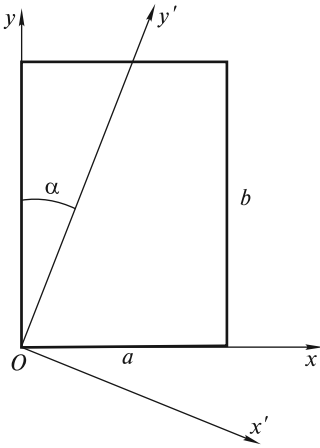


Рис. 12.11

Ясно, что одна из главных осей инерции для точки O (ось Oz) перпендикулярна плоскости пластинки; на рис. 12.11 она не показана. Оси Ox и Oy , направленные вдоль сторон пластинки, не совпадают с главными осями. Действительно, в этом случае

$$J_{xx} = \int y^2 dm = \frac{m}{ab} \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy = m \frac{b^2}{3}; \quad (12.18)$$

$$J_{yy} = \int x^2 dm = \frac{m}{ab} \int_0^b dy \int_0^a x^2 dx = m \frac{a^2}{3}; \quad (12.19)$$

$$J_{xy} = -\int xy dm = -\frac{m}{ab} \int_0^a x dx \int_0^b y dy = -m \frac{ab}{4} < 0. \quad (12.20)$$

Допустим, что оси Ox' и Oy' , повернутые на угол α относительно осей Ox и Oy , совпадают с главными осями инерции для точки O . Соответствующее преобразование координат имеет вид

$$x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha; \quad (12.21)$$

$$y = -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \quad (12.22)$$

Тогда

$$J_{xx} = \int y^2 dm = \int (-x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 dm = J_{y'} \sin^2 \alpha + J_{x'} \cos^2 \alpha. \quad (12.23)$$

Здесь учтено, что для главных осей $\int x'y' dm = 0$.

Аналогично

$$J_{yy} = \int x^2 dm = \int (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)^2 dm = J_{y'} \cos^2 \alpha + J_{x'} \sin^2 \alpha. \quad (12.24)$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= -\int xy dm = -\int (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)(-x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) dm = \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2\alpha (J_{x'} - J_{y'}). \end{aligned} \quad (12.25)$$

Подставляя в (12.23)–(12.25) значения J_{xx} , J_{yy} и J_{xy} из (12.18)–(12.20), получим систему трех уравнений для нахождения $J_{x'}$, $J_{y'}$ и α :

$$J_{y'} \sin^2 \alpha + J_{x'} \cos^2 \alpha = m \frac{b^2}{3}; \quad (12.26)$$

$$J_{y'} \cos^2 \alpha + J_{x'} \sin^2 \alpha = m \frac{a^2}{3}; \quad (12.27)$$

$$(J_{x'} - J_{y'}) \sin 2\alpha = m \frac{ab}{2}. \quad (12.28)$$

Из этой системы, в частности, можно получить, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{2} \frac{ab}{b^2 - a^2}. \quad (12.29)$$

Для сравнения: если α_0 — угол между осью Oy и диагональю прямоугольной пластинки, то

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2ab}{b^2 - a^2}, \quad (12.30)$$

т. е. $\alpha < \alpha_0$. Это означает, что главная ось инерции Oy' не проходит через центр пластинки. И только в случае квадратной пластинки, когда $a = b$, $\alpha = \pi/4$, главная ось инерции будет направлена по диагонали квадрата. Этот пример наглядно показывает, что если главные оси инерции нецентральные, то ни одна из них в принципе может и не проходить через центр масс тела.

Момент импульса твердого тела относительно оси. Момент инерции относительно оси. В тех случаях, когда твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, вводят величины *момента импульса* и *момента инерции относительно оси*. Момент импульса L_{\parallel} относительно оси — это проекция на данную ось момента импульса \mathbf{L} , определенного относительно некоторой точки O , принадлежащей оси, причем выбор точки O на оси значения не имеет.

Действительно, при вычислении L_{\parallel} существенно лишь плечо импульса $\Delta \mathbf{p}_i = \Delta m_i \mathbf{v}_i$ относительно оси вращения $O'O''$ (рис. 12.12), т. е. кратчайшее расстояние ρ_i от элемента с массой Δm_i до оси:

$$(\mathbf{L}_i)_{\parallel} = \Delta m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)_{\parallel} = \Delta m_i \rho_i v_i = (\Delta m_i \rho_i^2) \omega. \quad (12.31)$$

Здесь учтено, что скорость массы Δm_i при вращательном движении $\mathbf{v}_i = \omega \mathbf{r}_i$; $\mathbf{v}_i \perp \bar{\rho}_i$.

Рассмотрим эту ситуацию более подробно. Пусть оси Ox , Oy , Oz на рис. 12.12 — главные оси инерции для точки O , $O'O''$ — неподвижная в лабораторной системе ось вращения, жестко связанная с телом. Вектор угловой скорости $\bar{\omega}$, направленный вдоль $O'O''$, можно разложить по осям системы координат xuz :

$$\bar{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\} = \{\omega \cos \alpha, \omega \cos \beta, \omega \cos \gamma\}, \quad (12.32)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы оси $O'O''$. Вектор \mathbf{L} не совпадает с $\bar{\omega}$ и при вращении тела описывает коническую поверхность, симметричную относительно $O'O''$. Вектор \mathbf{L} также можно разложить по осям системы xuz : $\mathbf{L} = \{L_x, L_y, L_z\}$, причем

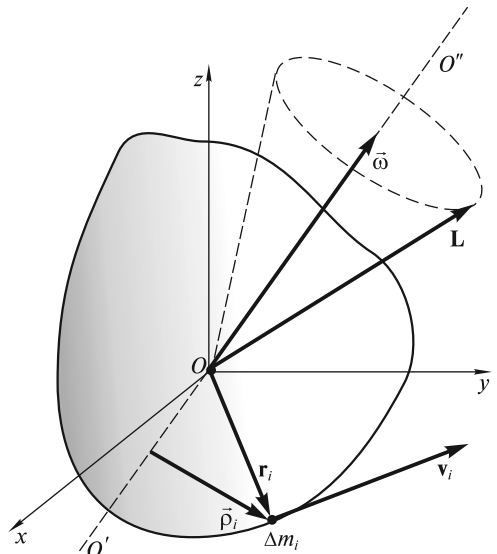


Рис. 12.12

$$L_x = J_x \omega_x; \quad L_y = J_y \omega_y; \quad L_z = J_z \omega_z, \quad (12.33)$$

где J_x, J_y, J_z — главные моменты инерции.

Проекция вектора \mathbf{L} на ось вращения, или, что то же самое, момент импульса относительно оси

$$\begin{aligned} L_{\parallel} &= \frac{\mathbf{L}\vec{\omega}}{\omega} = \frac{L_x \omega_x + L_y \omega_y + L_z \omega_z}{\omega} = \frac{J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2}{\omega^2} \omega = \\ &= (J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma) \omega = J \omega, \end{aligned} \quad (12.34)$$

где

$$J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \quad (12.35)$$

— момент инерции относительно оси. Последняя формула позволяет рассчитать момент инерции твердого тела относительно произвольной оси в том случае, если известны главные моменты инерции J_x, J_y, J_z и ориентация оси вращения относительно главных осей инерции (углы α, β, γ). Во многих случаях такое вычисление оказывается значительно проще, чем прямой расчет по формуле

$$J = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \quad (12.36)$$

[см. (12.31)].

Отметим, что, в соответствии с данным выше определением, L_{\parallel} — величина скалярная (проекция вектора \mathbf{L} на ось вращения). Вместе с тем можно говорить и о векторе \mathbf{L}_{\parallel} , рассматривая его как составляющую вектора \mathbf{L} вдоль оси:

$$\mathbf{L}_{\parallel} = \sum_i \bar{\rho}_i \times \Delta \mathbf{p}_i \quad (12.37)$$

(вектор $\bar{\rho}_i$ изображен на рис. 12.12, $\Delta \mathbf{p}_i = \Delta m_i \mathbf{v}_i$).

Эллипсоид инерции. Формула (12.35) для момента инерции относительно оси допускает наглядную геометрическую интерпретацию.

Представим, что через точку O начала координат системы xyz мы проводим прямые во всевозможных направлениях и на них откладываем отрезки длиной $R = k/\sqrt{J}$ (рис. 12.13), где k — постоянная величина, имеющая размерность $\text{кг}^{1/2} \cdot \text{м}^2$. Геометрическим местом концов этих отрезков будет некоторая поверхность. Получим уравнение этой поверхности.

Пусть оси Ox, Oy, Oz на рис. 12.13 — главные оси инерции. Проекции вектора \mathbf{R} на оси координат составляют

$$R_x \equiv x = R \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{J}} \cos \alpha; \quad (12.38)$$

$$R_y \equiv y = R \cos \beta = \frac{k}{\sqrt{J}} \cos \beta; \quad (12.39)$$

$$R_z \equiv z = R \cos \gamma = \frac{k}{\sqrt{J}} \cos \gamma, \quad (12.40)$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x\sqrt{J}}{k}; \quad \cos \beta = \frac{y\sqrt{J}}{k}; \\ \cos \gamma &= \frac{z\sqrt{J}}{k}. \end{aligned} \quad (12.41)$$

Подставляя (12.41) в (12.35), получим

$$J = J_x \frac{x^2 J}{k^2} + J_y \frac{y^2 J}{k^2} + J_z \frac{z^2 J}{k^2}, \quad (12.42)$$

или

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = k^2. \quad (12.43)$$

Это, как известно, уравнение эллипсоида, который в данном случае называют *эллипсоидом инерции*.

Центр эллипсоида инерции, как следует из его уравнения, находится в начале координат системы xyz (точка O). Постоянная k определяет масштаб построения и может быть выбрана произвольно; изменяя k , мы будем получать подобные эллипсоиды. Главные оси эллипсоида инерции являются главными осями инерции тела для точки O .

Положение эллипсоида инерции относительно тела зависит от выбора точки O . В частности, если эта точка совпадает с центром масс тела, то эллипсоид называется *центральный*.

Рассматривая вращательное движение твердого тела, в ряде случаев можно абстрагироваться от формы тела и иметь дело с эллипсоидом инерции. Для куба и шара, например, центральные эллипсоиды инерции вырождаются в сферу, поэтому эти тела с точки зрения многих задач механики оказываются эквивалентными.

В качестве примера рассмотрим сплошной однородный куб с ребром a и массой m . Эллипсоид инерции для центра одной из граней куба (точка O) показан на рис. 12.14. Полуоси OA , OB , OC лежат на главных осях инерции для точки O , причем $OA = OB$ лежат в плоскости боковой грани, а $OC \approx 1,6 OA$ — перпендикулярна боковой грани. Отметим, что эллипсоид инерции для центра куба вырождается в сферу с радиусом, равным OC .

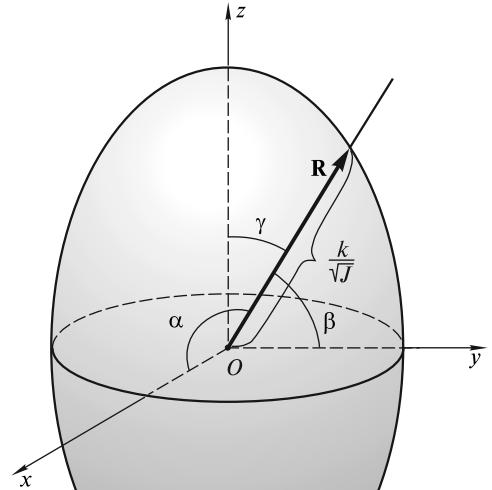


Рис. 12.13

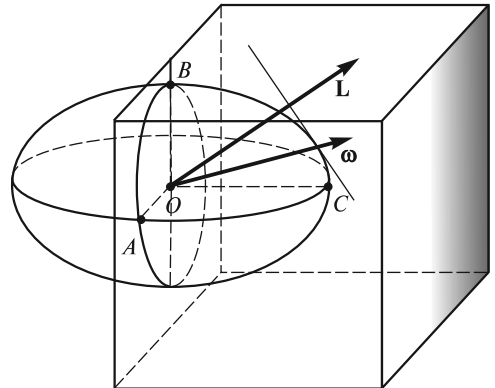


Рис. 12.14

Введение эллипсоида инерции позволяет с помощью достаточно простого графического построения установить связь между угловой скоростью $\vec{\omega}$ и моментом импульса \mathbf{L} относительно точки O , принадлежащей оси вращения. Речь идет о так называемом *построении Пуансо*: необходимо построить эллипсоид инерции с центром в точке O и через точку его пересечения с осью вращения (вектором угловой скорости $\vec{\omega}$) провести плоскость, касательную к эллипсоиду. Перпендикуляр, опущенный из центра эллипсоида инерции на касательную плоскость, и определит направление вектора момента импульса \mathbf{L} . Пример подобного построения представлен на рис. 12.14.

Вычисление моментов инерции. Прямой расчет момента инерции тела относительно оси сводится к вычислению интеграла

$$J = \int \rho^2 dm, \quad (12.44)$$

где ρ — расстояние элементарной массы dm до оси вращения. При этом, естественно, необходимо учитывать симметрию системы.

Вычислим, например, момент инерции однородного шара (в сферических координатах r, θ, φ , рис. 12.15) относительно произвольной оси, проходящей через его центр (в данном случае относительно оси Oz). Рассмотрим элементарную массу

$$dm = \frac{m}{V} dV = \frac{m}{V} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi, \quad (12.45)$$

где m — масса шара; V — его объем.

Поскольку

$$\rho = r \sin \theta, \quad (12.46)$$

то

$$dJ = \rho^2 dm = \frac{m}{V} r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\varphi. \quad (12.47)$$

Окончательно получим:

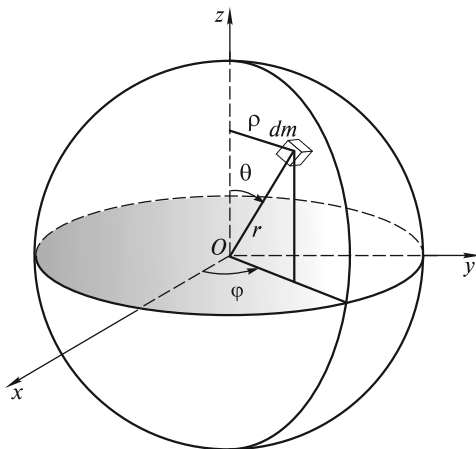


Рис. 12.15

$$\begin{aligned} J &= \frac{m}{V} \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{m}{V} \frac{R^5}{5} 2\pi \frac{4}{3} = \frac{2}{5} mR^2. \end{aligned} \quad (12.48)$$

Если считать, что наша Земля — однородный шар, то ее момент инерции относительно центральной оси будет равен

$$\begin{aligned} J_3 &= 0,4 M_3 R_3^2 \approx \\ &\approx 0,4 \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \text{ кг} (6,4 \cdot 10^6 \text{ м})^2 \approx \\ &\approx 10^{38} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

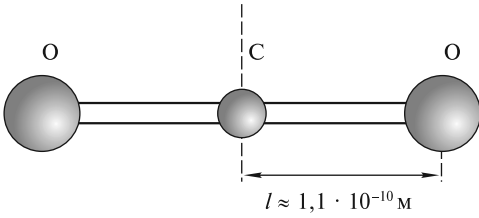


Рис. 12.16

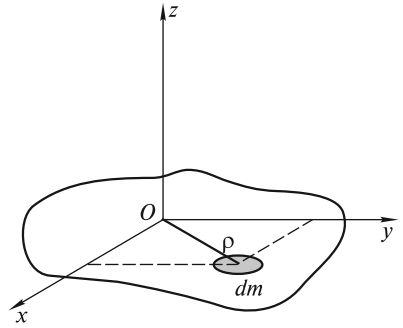


Рис. 12.17

Фактически из-за неоднородности и несферичности Земли отношение J/MR^2 составляет не 0,4, а 0,33. Заметим, что для других планет Солнечной системы это отношение также меньше 0,4 и изменяется от 0,20 для Юпитера до 0,39 для Плутона. Луна — практически однородный шар, для нее $J/MR^2 \approx 0,395$.

Для сравнения рассчитаем момент инерции молекулы CO_2 относительно оси, проходящей через атом углерода перпендикулярно линии, вдоль которой расположены все три атома (рис. 12.16). Основная масса атомов сосредоточена в их ядрах; размеры ядер ($\sim 10^{-15}$ м) значительно меньше межъядерного расстояния ($\sim 10^{-10}$ м), поэтому атомы кислорода можно считать материальными точками, а моментом инерции атома углерода можно пренебречь. При этих условиях $J_{\text{CO}_2} = 2 \frac{\mu_{\text{O}_2}}{2N_A} l^2$, где μ_{O_2} — молярная масса кислорода, N_A — число Авогадро, l — межъядерное расстояние (рис. 12.16). Подставляя численные значения этих величин, получим

$$J_{\text{CO}_2} = \frac{32 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{6 \cdot 10^{23}} \cdot (1,1 \cdot 10^{-10} \text{ м})^2 \approx 10^{-45} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

В случае *плоской фигуры* моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей, две из которых лежат в плоскости фигуры, оказываются связанными между собой простым соотношением. Из рис. 12.17 следует, что

$$dJ_z = \rho^2 dm = (x^2 + y^2) dm = dJ_y + dJ_x, \quad (12.49)$$

откуда

$$J_z = J_x + J_y. \quad (12.50)$$

Это соотношение позволяет, например, легко вычислить момент инерции тонкого диска массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через центр диска и лежащей в его плоскости (любая такая ось будет главной): $J = mR^2/4$, поскольку момент инерции диска относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости диска, $J_0 = mR^2/2$, а $J = J_0/2$.

Теорема Гюйгенса — Штейнера. Эта теорема связывает моменты инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс тела.

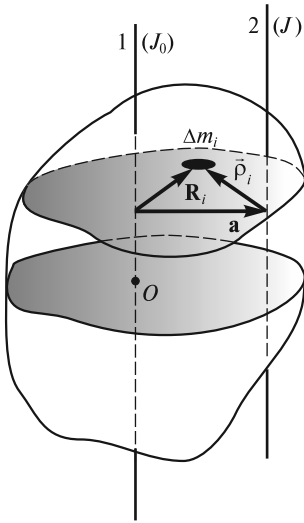


Рис. 12.18

Ось 1 на рис. 12.18 проходит через центр масс O , ось 2 параллельна ей; расстояние между осями равно a . Векторы \mathbf{R}_i и $\bar{\rho}_i$ перпендикулярны осям 1 и 2. Они проведены от осей в ту точку, где расположена масса Δm_i .

Момент инерции тела относительно оси 2

$$J = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 = \sum_i \Delta m_i (\mathbf{R}_i - \mathbf{a})^2 = \sum_i \Delta m_i R_i^2 + \sum_i \Delta m_i a^2 - 2\mathbf{a} \sum_i \Delta m_i \mathbf{R}_i. \quad (12.51)$$

Последняя сумма равна нулю, поскольку ось 1 проходит через центр масс, и

$$J = J_0 + ma^2. \quad (12.52)$$

Если, например, ось вращения касается поверхности шара, то можно, не проводя громоздких вычислений, записать:

$$J = J_0 + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2. \quad (12.53)$$

Момент импульса относительно движущегося центра масс. До сих пор, рассматривая момент импульса твердого тела, мы определяли его относительно некоторой неподвижной в лабораторной системе XYZ точки (например, точки закрепления тела). Во многих задачах динамики такое определение оказывается неудобным. Например, решая задачу о диске, скатывающемся с наклонной плоскости, логично рассматривать момент импульса диска относительно его центра масс, а не относительно точки, принадлежащей наклонной плоскости.

Рассмотрим, как будут связаны моменты импульса тела относительно некоторой неподвижной точки O' и относительно центра масс тела O , движущегося произвольным образом (рис. 12.19).

Пусть \mathbf{r}'_i и \mathbf{r}_i — радиусы-векторы элементарной массы Δm_i тела относительно точек O' и O , \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из O' в O . Эти векторы связаны между собой соотношением

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i. \quad (12.54)$$

Момент импульса тела относительно точки O' [см. формулу (12.1)]

$$\mathbf{L}_{O'} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \Delta m_i \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \sum_i \left[(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i) \times \Delta m_i \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \right]. \quad (12.55)$$

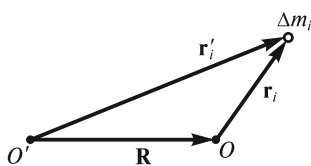


Рис. 12.19

Воспользуемся очевидными равенствами:

$$\sum_i \Delta m_i = m, \quad (12.56)$$

где m — масса всего тела;

$$\sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (12.57)$$

и

$$\sum_i \Delta m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = 0, \quad (12.58)$$

поскольку точка O совпадает с центром масс тела. С учетом (12.56)—(12.58) из (12.55) получим

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{R} \times m \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{p} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i, \quad (12.59)$$

где $\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ — импульс рассматриваемого тела в лабораторной системе XYZ ; \mathbf{v}_i — скорость i -й массы относительно центра масс.

Если момент импульса тела относительно его центра масс («относительный» момент импульса) определить как

$$\mathbf{L}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \times \Delta m_i \mathbf{v}_i, \quad (12.60)$$

то из (12.59) следует искомое соотношение

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{p}. \quad (12.61)$$

Еще раз подчеркнем, что при определении момента импульса тела относительно его центра масс (величина \mathbf{L}_O) следует учитывать относительные скорости всех точек тела, т. е. скорости точек тела относительно центра масс, считая его как бы неподвижным.

Заметим, что соотношение (12.61) позволяет также связать моменты импульса относительно двух параллельных осей, одна из которых неподвижна, а другая проходит через центр масс движущегося тела.

Обратимся к примерам.

1. Момент импульса цилиндра, скатывающегося без проскальзывания с наклонной плоскости, относительно его оси равен $J_0\omega$ (J_0 — момент инерции цилиндра относительно его оси, ω — мгновенная угловая скорость вращения цилиндра). Момент импульса того же цилиндра относительно мгновенной оси

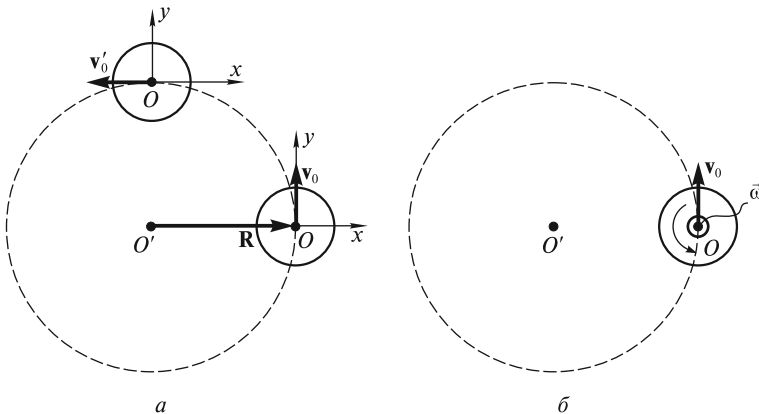


Рис. 12.20

вращения, проходящей через точку касания цилиндра и плоскости, будет равен $J_0\omega + Rmv_0 = J_0\omega + Rm(\omega R) = (J_0 + mR^2)\omega = J\omega$, где J — момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси вращения, R — радиус цилиндра.

2. Если шару массой m сообщить скорость v_0 , обеспечивающую движение по круговой орбите вокруг гравитационного силового центра O' , то он будет двигаться поступательно ($L_O = 0$), а его момент импульса относительно O' $L_{O'} = mv_0R$ (рис. 12.20, *a*). Если при этом шар будет вращаться вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , как показано на рис. 12.20, *б*, то постоянный относительно точки O' момент импульса шара будет равен $L_{O'} = L_O + mv_0R = J_0\omega + mv_0R$.

Отметим, что момент импульса любой из планет Солнечной системы, связанный с ее собственным вращением, значительно меньше орбитального момента. Орбиты всех планет лежат приблизительно в одной плоскости, и все 9 планет движутся вокруг Солнца в одном и том же направлении. Таким образом, суммарный момент импульса планет Солнечной системы отличен от нуля.

ЛЕКЦИЯ 13

Уравнения динамики твердого тела. В общем случае абсолютно твердое тело имеет 6 степеней свободы, и для описания его движения необходимы 6 независимых скалярных уравнений или 2 независимых векторных уравнения.

Вспомним, что твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек и, следовательно, к нему применимы те уравнения динамики, которые справедливы для системы точек в целом. Обратимся к опытам.

Возьмем резиновую палку, утяжеленную на одном из концов и имеющую лампочку в центре масс (рис. 13.1). Зажжем лампочку и бросим палку из одного конца аудитории в другой, сообщив ей произвольное вращение, — траекторией лампочки будет парабола — кривая, по которой полетело бы небольшое тело, брошенное под углом к горизонту.

Стержень, опирающийся одним из концов на гладкую горизонтальную плоскость (см. рис. 11.16), падает так, что его центр масс остается на одной и той же вертикали, поскольку нет сил, которые сдвинули бы центр масс стержня в горизонтальном направлении.

Опыт, который был представлен на рис. 12.2, *а, в*, свидетельствует о том, что для изменения момента импульса тела существенную роль играет не просто сила, а ее момент относительно оси вращения.

Тело, подвешенное в точке, не совпадающей с его центром масс (физический маятник), совершает колебательное движение (рис. 13.2, *а*) — есть момент силы тяжести относительно точки подвеса, возвращающий отклоненный маятник в положение равновесия. Но тот же маятник, подвешенный в центре масс, находится в положении безразличного равновесия (рис. 13.2, *б*).

Роль момента силы наглядно проявляется в опытах с «попкорной» и «непопкорной» катушками (рис. 13.3). Плоское движение этих катушек можно представить как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку соприкосновения катушки с плоскостью. В зависимости от направления момента

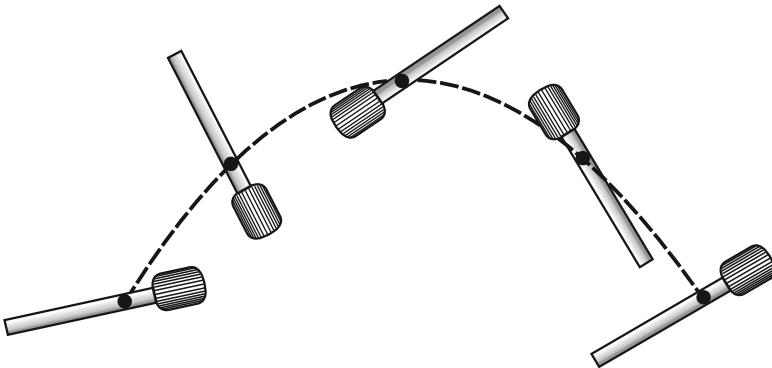


Рис. 13.1

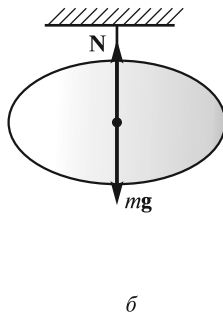
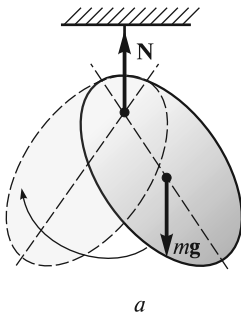


Рис. 13.2

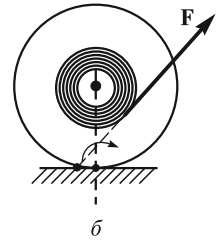
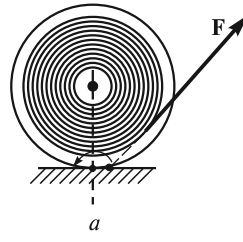


Рис. 13.3

силы \mathbf{F} относительно мгновенной оси катушка либо откатывается (рис. 13.3, *a*), либо накатывается на нитку (рис. 13.3, *б*). Держа нить достаточно близко к горизонтальной плоскости, можно принудить к послушанию самую «непослушную» катушку.

Все эти опыты вполне согласуются с известными законами динамики, сформулированными для системы материальных точек: законом движения центра масс и законом изменения момента импульса системы под действием момента внешних сил. Таким образом, в качестве двух векторных уравнений движения твердого тела можно использовать:

уравнение движения центра масс

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \sum \mathbf{F}, \quad (13.1)$$

где \mathbf{v}_0 — скорость центра масс тела; $\sum \mathbf{F}$ — сумма всех внешних сил, приложенных к телу;

уравнение моментов

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}, \quad (13.2)$$

где \mathbf{L} — момент импульса твердого тела относительно некоторой точки; $\sum \mathbf{M}$ — суммарный момент внешних сил относительно той же самой точки.

К уравнениям (13.1) и (13.2), являющимся уравнениями динамики твердого тела, необходимо дать следующие комментарии.

1. Внутренние силы, как и в случае произвольной системы материальных точек, не влияют на движение центра масс и не могут изменить момент импульса тела.

2. Точку приложения внешней силы можно произвольно переносить вдоль линии, по которой действует сила. Это следует из того, что в модели абсолютно твердого тела локальные деформации, возникающие в области приложения силы, в расчет не принимаются. Указанный перенос не повлияет и на момент силы относительно какой бы то ни было точки, так как плечо силы при этом не изменится.

3. Векторы \mathbf{L} и \mathbf{M} в уравнении (13.2), как правило, рассматриваются относительно некоторой неподвижной в лабораторной системе XYZ точки. Во мно-

гих задачах \mathbf{L} и \mathbf{M} удобно рассматривать относительно движущегося центра масс тела. В этом случае уравнение моментов имеет вид, формально совпадающий с (13.2). В самом деле, момент импульса тела \mathbf{L}_O относительно движущегося центра масс O связан с моментом импульса $\mathbf{L}_{O'}$ относительно неподвижной точки соотношением, полученным в конце лекции 12 [см. (12.61)]:

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_{O'} - \mathbf{R} \times \mathbf{p}, \quad (13.3)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, направленный от O' к O ; \mathbf{p} — полный импульс тела. Аналогичное соотношение может быть получено и для моментов силы:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} - \mathbf{R} \times \mathbf{F}, \quad (13.4)$$

где \mathbf{F} — векторная сумма всех сил, действующих на тело.

Поскольку точка O' неподвижна, то справедливо уравнение моментов (13.2):

$$\frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} = \mathbf{M}_{O'}. \quad (13.5)$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} - \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \mathbf{p} = \left(\frac{d\mathbf{L}_{O'}}{dt} - \mathbf{R} \times \mathbf{F} \right) - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}. \quad (13.6)$$

Здесь учтено, что $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$.

Величина $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ есть скорость точки O в лабораторной системе XYZ . Учитывая (13.4), получим

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O - \mathbf{v}_0 \times \mathbf{p}. \quad (13.7)$$

Поскольку движущаяся точка O — это центр масс тела, то $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_0$ (m — масса тела), $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{p} = 0$ и $\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O$, т.е. уравнение моментов относительно движущегося центра масс имеет такой же вид, что и относительно неподвижной точки. Существенно отметить, что в этом случае, как было показано в конце лекции 12, скорости всех точек тела при определении \mathbf{L}_O следует брать относительно центра масс тела.

Ранее было отмечено, что произвольное движение твердого тела можно разложить на поступательное (вместе с системой $x_0y_0z_0$, начало которой находится в некоторой точке — полюсе, жестко связанной с телом) и вращательное (вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс). С точки зрения кинематики выбор полюса особого значения не имеет, с точки же зрения динамики полюс, как теперь понятно, удобно поместить в центр масс. Именно в этом случае уравнение моментов (13.2) может быть записано относительно центра масс (или оси, проходящей через центр масс) как относительно неподвижного начала (или неподвижной оси).

4. Если $\sum \mathbf{F}$ не зависит от угловой скорости тела, а $\sum \mathbf{M}$ — от скорости центра масс, то уравнения (13.1) и (13.2) можно рассматривать независимо

друг от друга. В этом случае уравнение (13.1) соответствует задаче из механики точки, а уравнение (13.2) — задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки или неподвижной оси. Пример ситуации, когда уравнения (13.1) и (13.2) нельзя рассматривать независимо, — движение вращающегося твердого тела в вязкой среде.

Далее в этой лекции мы рассмотрим уравнения динамики для трех частных случаев движения твердого тела: вращения вокруг неподвижной оси, плоского движения и, наконец, движения твердого тела, имеющего ось симметрии и закрепленного в центре масс.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. В этом случае движение тела описывается с помощью уравнения

$$\frac{dL_{\parallel}}{dt} = M_{\parallel},$$

где L_{\parallel} — момент импульса тела относительно оси вращения, т.е. проекция на ось момента импульса, определенного относительно некоторой точки, принадлежащей оси (см. лекцию 12); M_{\parallel} — момент внешних сил относительно оси вращения, т.е. проекция на ось результирующего момента внешних сил, определенного относительно некоторой точки, принадлежащей оси, причем выбор этой точки на оси, как и в случае с L_{\parallel} , значения не имеет.

Действительно (рис. 13.4), $M_{\parallel} = rF \cos \alpha = \rho F$, где F — составляющая силы, приложенной к твердому телу, перпендикулярная оси вращения, ρ — плечо силы F относительно оси. Поскольку $L_{\parallel} = J\omega$ ($J = \int \rho^2 dm$ — момент инерции

тела относительно оси вращения), то вместо $\frac{dL_{\parallel}}{dt} = M_{\parallel}$ можно записать

$$\frac{d}{dt}(J\omega) = M_{\parallel}, \quad (13.8)$$

или

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{\parallel}, \quad (13.9)$$

поскольку в случае твердого тела $J = \text{const}$.

Уравнение (13.9) и есть основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Его векторная форма имеет вид:

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \mathbf{M}_{\parallel}, \quad (13.10)$$

где вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения; \mathbf{M}_{\parallel} — составляющая вектора момента силы вдоль оси.

В случае $\mathbf{M}_{\parallel} = 0$ получаем $\vec{\omega} = \text{const}$, соответственно и момент импульса относительно оси L_{\parallel} сохраняется. При этом сам вектор \mathbf{L} , определенный относительно какой-либо точки на оси вращения,

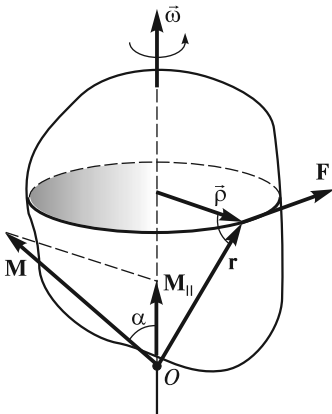


Рис. 13.4

может изменяться. Пример такого движения показан на рис. 13.5. Стержень жестко закреплен на вертикальной оси (в точке O) под углом α к ней. При вращении стержня вокруг этой оси вектор момента импульса \mathbf{L} относительно точки O движется по конической поверхности с углом полураствора $\beta = \pi/2 - \alpha$. Вместе с тем проекция \mathbf{L} на вертикальную ось остается постоянной, поскольку момент силы тяжести относительно этой оси равен нулю.

Кинетическая энергия вращающегося тела и работа внешних сил (ось вращения неподвижна).

Скорость i -й частицы тела

$$v_i = \omega r_i, \quad (13.11)$$

где r_i — расстояние частицы до оси вращения.

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (13.12)$$

так как угловая скорость вращения для всех точек одинакова.

В соответствии с теоремой об изменении механической энергии системы элементарная работа всех внешних сил равна приращению кинетической энергии тела:

$$\delta A = d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = J \omega d\omega = M_{\parallel} \omega dt = M_{\parallel} d\varphi. \quad (13.13)$$

Работа внешних сил при повороте тела на конечный угол φ_0

$$A = \int_0^{\varphi_0} M_{\parallel} d\varphi. \quad (13.14)$$

Допустим, что диск точила вращается по инерции с угловой скоростью ω_0 , и мы останавливаем его, прижимая какой-либо предмет к краю диска с постоянным усилием. При этом на диск будет действовать постоянная по величине сила $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, направленная перпендикулярно его оси. Работа этой силы

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} R \varphi,$$

где R — радиус диска; φ — угол его поворота.

Число оборотов, которое сделает диск до полной остановки,

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{J \omega_0^2}{4\pi F_{\text{тр}} R},$$

где J — момент инерции диска точила вместе с якорем электромотора.

Свободные оси. Устойчивость свободного вращения. При вращении тела вокруг неподвижной оси эта ось удерживается в неизменном положении подшипниками. При вращении несбалансированных частей механизмов оси (валы)

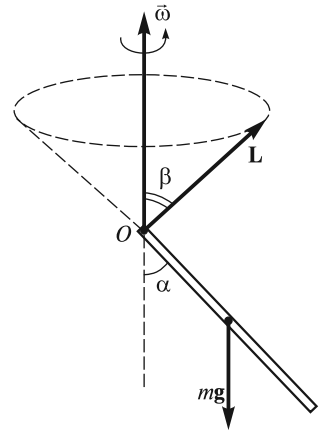


Рис. 13.5

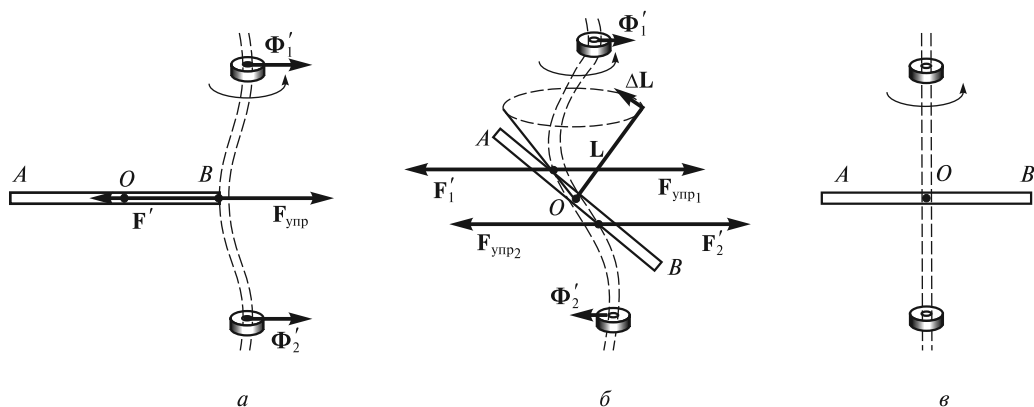


Рис. 13.6

испытывают определенную динамическую нагрузку. Возникают вибрации, тряска, и механизмы могут разрушиться.

Если твердое тело раскрутить вокруг произвольной оси, жестко связанной с телом, и высвободить ось из подшипников, то характер движения тела в общем случае изменится. Для того чтобы это движение осталось неизменным, к оси вращения необходимо приложить определенные силы. Возникающие при этом ситуации показаны на рис. 13.6. В качестве вращающегося тела использован массивный однородный стержень AB , прикрепленный к достаточно эластичной оси (изображена двойными штриховыми линиями). Эластичность оси позволяет наблюдать испытываемые ею динамические нагрузки. Во всех ситуациях ось вращения вертикальна, жестко связана со стержнем и закреплена в подшипниках; стержень раскручен вокруг этой оси и предоставлен сам себе.

В случае, изображенном на рис. 13.6, a , ось вращения является для точки B стержня главной, но нецентральной, $L \parallel \omega$. Ось изгибается, со стороны оси на стержень действует сила $F_{упр}$, обеспечивающая его вращение (в НИСО, связанной со стержнем, эта сила уравнивает центробежную силу инерции). Со стороны стержня на ось действует сила F' , уравновешенная силами Φ' со стороны подшипников.

В случае рис. 13.6, b ось вращения проходит через центр масс стержня и является для него центральной, но не главной. Момент импульса относительно центра масс O не сохраняется и описывает коническую поверхность. Ось сложным образом деформируется (изламывается), со стороны оси на стержень действуют силы $F_{упр1}$ и $F_{упр2}$, момент которых обеспечивает приращение ΔL (в НИСО, связанной со стержнем, момент упругих сил компенсирует момент центробежных сил инерции, действующих на одну и другую половины стержня). Со стороны стержня на ось действуют силы F'_1 и F'_2 , направленные противоположно силам $F_{упр1}$ и $F_{упр2}$. Момент сил F'_1 и F'_2 , уравновешен моментом сил Φ'_1 и Φ'_2 , возникающих в подшипниках.

И только в том случае, когда ось вращения совпадает с главной центральной осью инерции тела (рис. 13.6, v), раскрученный и предоставленный сам себе стержень не оказывает на подшипники никакого воздействия. Такие оси

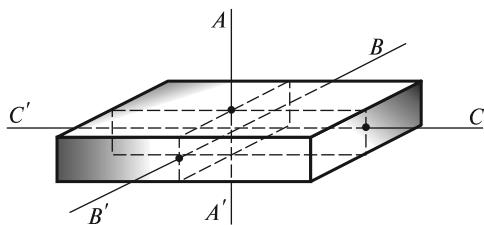


Рис. 13.7

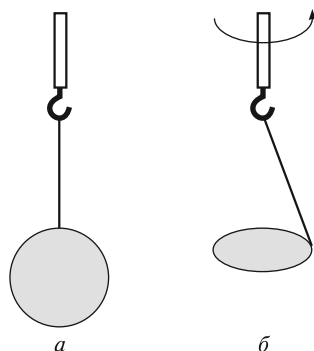


Рис. 13.8

называют *свободными*, потому что тело может вращаться вокруг них и в отсутствие подшипников. При этом, однако, возникает вопрос об *устойчивости* вращения по отношению к малым возмущениям, всегда имеющим место в реальных условиях. Опыты показывают, что вращение вокруг главных центральных осей с наибольшим и наименьшим моментами инерции является устойчивым, а вращение вокруг оси с промежуточным значением момента инерции — *неустойчивым*. В этом можно убедиться, подбрасывая вверх тело в виде параллелепипеда, раскрученное вокруг одной из трех взаимно перпендикулярных главных центральных осей (рис. 13.7). Ось AA' соответствует наибольшему, BB' — среднему, а CC' — наименьшему моменту инерции параллелепипеда. Если подбросить такое тело, сообщив ему быстрое вращение вокруг оси AA' или вокруг оси CC' , то можно убедиться в том, что это вращение является вполне устойчивым. Попытки заставить тело вращаться вокруг оси BB' к успеху не приводят — тело движется сложным образом, кувыркаясь в полете.

Для тел вращения устойчивой оказывается свободная ось, соответствующая наибольшему моменту инерции. Так, если сплошной однородный диск подвесить к быстро вращающемуся валу электромотора (рис. 13.8 *а*, ось вращения вертикальна), то диск довольно быстро займет горизонтальное положение, устойчиво вращаясь вокруг центральной оси, перпендикулярной к плоскости диска (рис. 13.8, *б*).

Центр удара. Опыт показывает, что если тело, закрепленное на оси вращения, испытывает удар, то действие удара в общем случае передается и на ось. Величина и направление силы, приложенной к оси, зависят от того, в какую точку тела нанесен удар.

Рассмотрим сплошной однородный стержень AB , подвешенный в точке A на горизонтальной, закрепленной в подшипниках оси OO' (рис. 13.9). Если удар (короткодействующая сила F) нанесен близко к оси вращения, то ось прогибается в направлении действия силы F (рис. 13.9, *а*). Если удар нанесен по нижнему концу стержня, вблизи точки B , то ось прогибается в противоположном направлении (рис. 13.9, *б*). Наконец, если удар нанесен в строго определенную точку стержня C , называемую *центром удара* (рис. 13.9, *в*), то ось не испытывает никаких дополнительных нагрузок, связанных с ударом. Очевидно, в этом случае скорость поступательного движения, приобретаемого

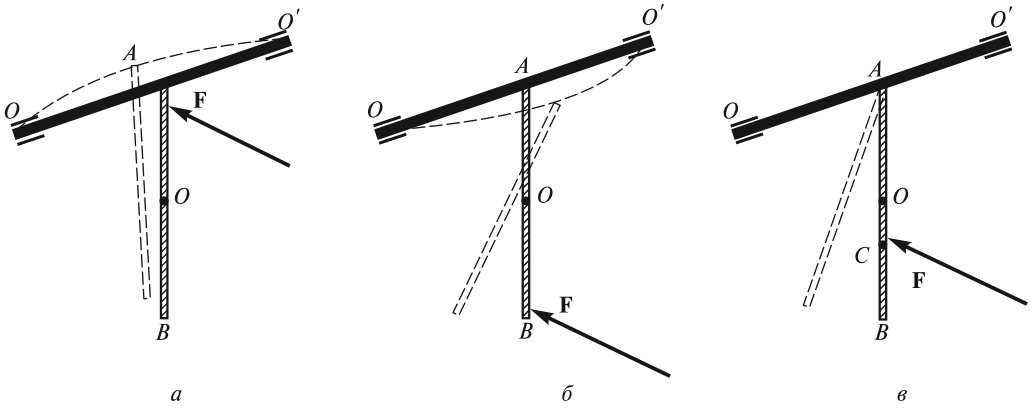


Рис. 13.9

точкой A вместе с центром масс O , будет компенсироваться линейной скоростью вращательного движения вокруг центра масс O (оба эти движения инициируются силой F и происходят одновременно).

Вычислим, на каком расстоянии l от точки подвеса стержня находится центр удара. Уравнение моментов относительно оси вращения OO' дает

$$J \frac{d\omega}{dt} = Fl. \quad (13.15)$$

Сил реакции со стороны оси, как предполагается, при ударе не возникает, поэтому на основании теоремы о движении центра масс можно записать

$$m \frac{dv_0}{dt} = F, \quad (13.16)$$

где m — масса тела; v_0 — скорость центра масс.

Если a — расстояние от оси до центра масс тела, то

$$v_0 = \omega a, \quad (13.17)$$

и в результате из уравнения моментов и уравнения движения центра масс находим

$$l = \frac{J}{ma}. \quad (13.18)$$

При этом точка C (центр удара) совпадает с так называемым *центром качения* данного физического маятника — точкой, где надо сосредоточить всю массу тела, чтобы полученный математический маятник имел такой же период колебаний, как и данный физический. В случае сплошного однородного стержня длиной L имеем:

$$a = \frac{L}{2}; \quad J = \frac{mL^2}{3}; \quad l = \frac{2}{3}L.$$

Отметим, что полученное для l выражение (13.18) справедливо для произвольного твердого тела. При этом надо иметь в виду, что точка подвеса тела A

и центр масс O должны лежать на одной вертикали, а ось вращения должна совпадать с одной из главных осей инерции тела, проходящих через точку A .

■ **Пример 1.** При ударах палкой длиной L по препятствию рука «не чувствует» удара (не испытывает отдачи) в том случае, если удар приходится в точку, расположенную на расстоянии $L - l = L - \frac{2}{3}L = \frac{1}{3}L$ от свободного конца палки.

■ **Пример 2.** При горизонтальном ударе кием по бильярдному шару (рис. 13.10) шар начинает качение без проскальзывания в том случае, если удар нанесен в точку, находящуюся на высоте

$$h = \frac{J}{ma} = \frac{\frac{7}{5}mR^2}{mR} = \frac{7}{5}R$$

от поверхности стола, т.е. на $h - R = \frac{2}{5}R$ выше центра шара. Если удар будет нанесен ниже, качение будет сопровождаться скольжением в направлении движения шара. Если удар нанесен выше, то шар в точке касания с бильярдным столом будет проскальзывать назад.

Плоское движение твердого тела. Напомним, что при плоском движении все точки тела движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, поэтому достаточно рассмотреть движение одного из сечений тела, например, того, в котором лежит центр масс. При разложении плоского движения на поступательное и вращательное скорость поступательного движения определена неоднозначно — она зависит от выбора оси вращения, однако угловая скорость вращательного движения оказывается одной и той же (см. лекцию 11).

Если в качестве оси вращения выбрать ось, проходящую через центр масс, то уравнениями движения твердого тела будут:

уравнение движения центра масс

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{F}_0; \quad (13.19)$$

уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр масс,

$$J_0 \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \mathbf{M}_0. \quad (13.20)$$

Отличительной особенностью плоского движения является то, что ось вращения сохраняет свою ориентацию в пространстве, оставаясь перпендикулярной плоскости, в которой движется центр масс.

Еще раз подчеркнем, что уравнение моментов (13.20) записано относительно движущегося центра масс, однако, как было отмечено в начале лек-

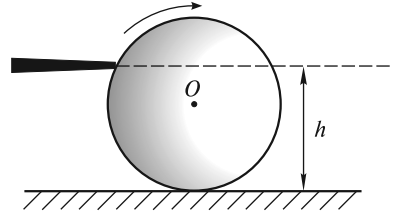


Рис. 13.10

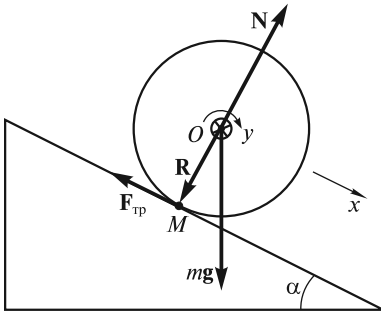


Рис. 13.11

ции, оно имеет такой же вид, как и уравнение моментов относительно неподвижной точки.

В качестве примера рассмотрим задачу о скатывании цилиндра с наклонной плоскости. Приведем два способа решения этой задачи с использованием уравнений динамики твердого тела.

Способ 1. Рассматривается вращение цилиндра относительно оси, проходящей через центр масс (рис. 13.11).

Система уравнений (13.19)–(13.20) имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + \mathbf{N}; \quad (13.21)$$

$$J_0 \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}_{\text{тр}}. \quad (13.22)$$

Эту систему необходимо дополнить уравнением кинематической связи:

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{R} \times \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (13.23)$$

Последнее уравнение учитывает то, что цилиндр скатывается без проскальзывания, т.е. скорость точки M цилиндра равна нулю.

Запишем уравнение движения центра масс (13.21) в проекциях на ось x (вдоль наклонной плоскости), а уравнение моментов (13.22) — в проекциях на ось y , совпадающую с осью цилиндра. Направления осей x и y выбраны так, что положительному линейному ускорению оси цилиндра соответствует положительное угловое ускорение вращения. В итоге получим

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}; \quad (13.24)$$

$$J_0 \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}} R; \quad (13.25)$$

$$a = \frac{d\omega}{dt} R. \quad (13.26)$$

Отсюда

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + J_0/mR^2}. \quad (13.27)$$

Следует подчеркнуть, что величина $F_{\text{тр}}$ — силы трения сцепления — может принимать любое значение в интервале от нуля до максимального, равного величине силы трения скольжения. Эта сила не совершает работы, но обеспечивает ускоренное вращение цилиндра при его скатывании с наклонной плоскости.

В данном случае

$$F_{\text{тр}} = \frac{J_0}{R^2} \frac{g \sin \alpha}{1 + J_0/mR^2}. \quad (13.28)$$

Если цилиндр сплошной, то

$$J_0 = \frac{1}{2} mR^2; \quad a = \frac{2}{3} g \sin \alpha; \quad F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} mg \sin \alpha. \quad (13.29)$$

Качение без проскальзывания имеет место в случае, если

$$F_{\text{тр}} \leq kN, \quad (13.30)$$

где k — коэффициент трения скольжения; $N = mg \cos \alpha$ — сила реакции опоры. Это условие сводится к следующему:

$$\frac{1}{3} mg \sin \alpha \leq kmg \cos \alpha, \quad (13.31)$$

или

$$\text{tg } \alpha \leq 3k. \quad (13.32)$$

Способ 2. Рассматривается вращение цилиндра относительно неподвижной оси, совпадающей в данный момент времени с мгновенной осью вращения (рис. 13.12).

Мгновенная ось вращения проходит через точку соприкосновения цилиндра с плоскостью (точку M). При таком подходе отпадает необходимость в уравнении движения центра масс. Уравнение моментов относительно мгновенной оси имеет вид

$$J \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \mathbf{R} \times m\mathbf{g}. \quad (13.33)$$

Здесь

$$J = J_0 + mR^2. \quad (13.34)$$

В проекции на ось вращения (ось y)

$$J \frac{d\omega}{dt} = Rmg \sin(\pi - \alpha) = Rmg \sin \alpha. \quad (13.35)$$

Ускорение центра масс выражается через угловое ускорение:

$$a = \frac{d\omega}{dt} R = \frac{g \sin \alpha}{1 + J_0/mR^2}. \quad (13.36)$$

Кинетическая энергия при плоском движении.

Кинетическая энергия твердого тела представляет собой сумму кинетических энергий составляющих его элементов:

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_i)^2, \quad (13.37)$$

где \mathbf{v}_0 — скорость центра масс тела; \mathbf{u}_i — скорость i -го элемента относительно системы координат, связанной с центром масс и совершающей поступательное движение вместе с ним.

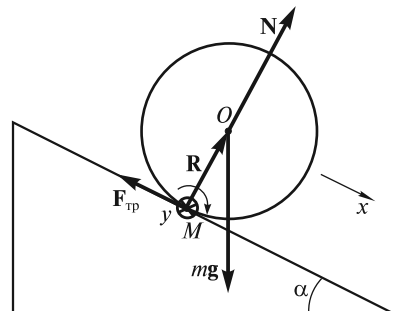


Рис. 13.12

Возводя сумму скоростей в квадрат, получим

$$T = \frac{v_0^2}{2} \sum_i m_i + \mathbf{v}_0 \sum_i m_i \mathbf{u}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 = \frac{m_i v_0^2}{2} + \frac{J_0 \omega^2}{2}, \quad (13.38)$$

так как $\sum_i m_i \mathbf{u}_i = 0$ (суммарный импульс частиц в системе центра масс равен нулю).

Таким образом, *при плоском движении кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений (теорема Кеннига).*

Если рассматривать плоское движение как вращение вокруг мгновенной оси, то кинетическая энергия тела есть энергия вращательного движения. В этой связи задачу о скатывании цилиндра с наклонной плоскости можно решить, используя закон сохранения механической энергии (напомним, что сила трения при качении без проскальзывания работы не совершает). Приращение кинетической энергии цилиндра равно убыли его потенциальной энергии:

$$\frac{J\omega^2}{2} = mgh = mgx \sin \alpha, \quad (13.39)$$

где x — смещение цилиндра вдоль наклонной плоскости; $J = J_0 + mR^2$ — момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси вращения.

Поскольку скорость оси цилиндра $v = \frac{dx}{dt} = \omega R$, то

$$\frac{J}{2} \frac{v^2}{R^2} = mgx \sin \alpha. \quad (13.40)$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по времени, получим

$$\frac{J}{2R^2} 2v \frac{dv}{dt} = mg \frac{dx}{dt} \sin \alpha, \quad (13.41)$$

откуда для линейного ускорения $a = \frac{dv}{dt}$ оси цилиндра будем иметь то же выражение, что и при динамическом способе решения [см. (13.27), (13.36)].

Заметим, что если цилиндр катится с проскальзыванием, то изменение его кинетической энергии будет зависеть также и от работы сил трения.

Движение аксиально симметричного твердого тела с неподвижным центром масс. Такое движение можно реализовать с помощью специального устройства, называемого *кардановым подвесом* (рис. 13.13). Положение тела в подвесе должно быть таким, чтобы оси AA' , BB' и CC' пересекались в центре масс. В этом случае при любых возможных движениях тела его центр масс остается неподвижным. При этом ось AA' (в данном случае — ось симметрии тела) может иметь произвольную ориентацию в пространстве.

Задачей о движении твердого тела, закрепленного в точке, занимались многие ученые: Л. Эйлер, большая часть жизни которого была связана с Петербургской академией наук, выдающиеся русские ученые Н. Е. Жуковский, С. В. Ковалевская, С. А. Чаплыгин, французские ученые Ж. Лагранж, С. Пуассон, Л. Пу-

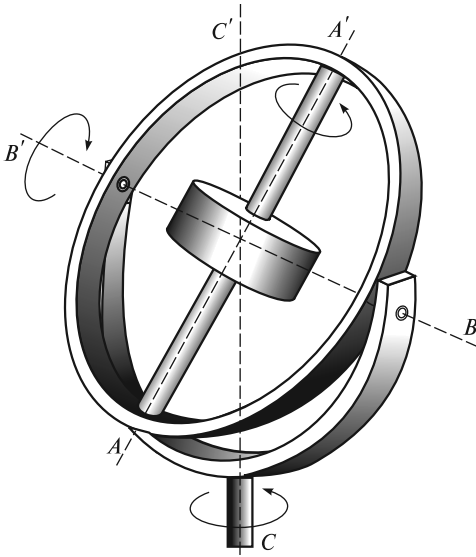


Рис. 13.13

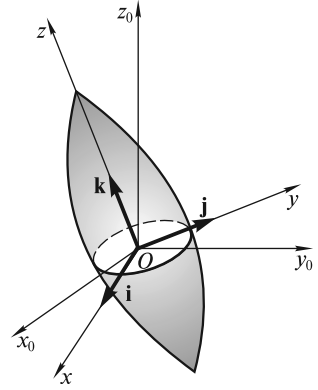


Рис. 13.14

ансо. Оказалось, что в общем случае эта задача аналитически неразрешима. Даже в простейшем случае движения твердого тела только под действием силы тяжести точное решение существует лишь в некоторых частных случаях. Один из этих случаев, когда однородное тело вращения закреплено в центре масс, мы рассмотрим в этой лекции, другой, имеющий отношение к движению гироскопа, — в лекции 14.

Уравнения Эйлера. Рассмотрим однородное аксиально симметричное тело вращения с неподвижным центром масс O (рис. 13.14). Центральный эллипсоид инерции такого тела является эллипсоидом вращения с осью симметрии Oz .

Система координат $x_0y_0z_0$ на рис. 13.14 совпадает с введенной выше лабораторной системой XYZ , система xyz жестко связана с телом, причем оси Ox , Oy и Oz — главные центральные оси инерции тела. Поскольку это тело вращения, то главные осевые моменты инерции J_x и J_y равны между собой: $J_x = J_y$.

Суммарный момент сил тяжести относительно точки закрепления (центра масс) равен нулю, иных сил, кроме силы тяжести, нет, поэтому уравнение моментов (13.2) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad (13.42)$$

откуда

$$\mathbf{L} = \text{const}, \quad (13.43)$$

т. е. момент импульса раскрученного и предоставленного самому себе тела остается постоянным по величине и направлению.

Отметим, что если исследуемое тело — шар, то $J_z = J_x = J_y$, и центральный эллипсоид инерции превращается в сферу. Это означает, что любая центральная

ось вращения является главной осью инерции шара, т. е. имеет место простое соотношение $\mathbf{L} = J\bar{\omega}$, где J — момент инерции относительно центральной оси, и при $\mathbf{L} = \text{const}$ получаем $\bar{\omega} = \text{const}$. Ось вращения совпадает по направлению с \mathbf{L} и сохраняет свою ориентацию в пространстве.

Теперь допустим, что J_z отлично от J_x и J_y , как, например, для тела, изображенного на рис. 13.14. В этом случае вращение с $\bar{\omega} = \text{const}$ имеет место только тогда, когда ось вращения либо совпадает с осью симметрии тела, либо перпендикулярна к ней.

Общий случай $J_z \neq J_x \neq J_y$ более сложен; обычно его рассматривают с помощью дифференциальных уравнений Эйлера. Дело в том, что если в уравнении (13.42) вектор \mathbf{L} спроектировать на оси лабораторной системы $x_0y_0z_0$, то скалярные дифференциальные уравнения движения будут весьма сложными, поскольку моменты инерции относительно неподвижных осей будут функциями времени.

Поэтому гораздо удобнее рассматривать \mathbf{L} в проекциях на оси системы xyz , жестко связанной с твердым телом.

Пусть $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты системы xyz (рис. 13.14). Тогда (13.42) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(L_x\mathbf{i} + L_y\mathbf{j} + L_z\mathbf{k}) = 0, \quad (13.44)$$

где не только проекции L_x, L_y, L_z , но и орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ являются функциями времени. Поэтому из (13.44) следует

$$\frac{\partial L_x}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial L_y}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial L_z}{\partial t}\mathbf{k} + L_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + L_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + L_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0. \quad (13.45)$$

Здесь использован символ $\frac{\partial}{\partial t}$ для того, чтобы подчеркнуть, что рассматриваются изменения во времени проекций L_x, L_y и L_z относительно подвижной системы xyz — системы, которая, в свою очередь, поворачивается вместе с телом с мгновенной угловой скоростью $\bar{\omega}$.

Что касается производных по времени от единичных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, то их изменения во времени обусловлены только вращением системы xyz с угловой скоростью $\bar{\omega}$, поэтому

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \mathbf{i}; \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \mathbf{j}; \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \mathbf{k} \quad (13.46)$$

(формулы Пуассона, см. лекцию 6). Подставляя (13.46) в (13.45), получим

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \mathbf{L} = 0. \quad (13.47)$$

Преобразование

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \mathbf{L} \quad (13.48)$$

находится в полном соответствии с формулой (6.14) преобразования производных произвольного вектора при переходе от неподвижной системы коор-

динат к вращающейся. Существенно, что наблюдатель, находящийся в системе xyz , фиксирует только «относительное» изменение \mathbf{L} (производная $\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t}$). Для наблюдателя в лабораторной системе координат к относительному изменению \mathbf{L} добавляется его «переносное» изменение, связанное с вращением системы xyz с мгновенной угловой скоростью $\bar{\omega}$.

Используя проекции векторов \mathbf{L} и $\bar{\omega}$ на оси системы xyz , получим:

$$\frac{\partial L_x}{\partial t} + \omega_y L_z - \omega_z L_y = 0; \quad (13.49)$$

$$\frac{\partial L_y}{\partial t} + \omega_z L_x - \omega_x L_z = 0; \quad (13.50)$$

$$\frac{\partial L_z}{\partial t} + \omega_x L_y - \omega_y L_x = 0. \quad (13.51)$$

Поскольку оси Ox , Oy и Oz — главные оси инерции для точки закрепления, то $L_x = J_x \omega_x$, $L_y = J_y \omega_y$, $L_z = J_z \omega_z$ и из (13.49)—(13.51) будем иметь следующие уравнения:

$$J_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \omega_y \omega_z (J_z - J_y) = 0; \quad (13.52)$$

$$J_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_z \omega_x (J_x - J_z) = 0; \quad (13.53)$$

$$J_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y (J_y - J_x) = 0, \quad (13.54)$$

где J_x , J_y , J_z — главные моменты инерции тела.

Эти уравнения называют *уравнениями Эйлера при отсутствии моментов внешних сил*.

В частном случае $J_x = J_y$ из (13.52)—(13.54) получаем

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \omega_y \omega_0 = 0; \quad (13.55)$$

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} - \omega_x \omega_0 = 0; \quad (13.56)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 0, \quad (13.57)$$

где введено обозначение

$$\omega_0 = \omega_z \frac{J_z - J_y}{J_x}. \quad (13.58)$$

Из (13.57) следует, что $\omega_z = \text{const}$, т. е. проекция вектора $\bar{\omega}$ на ось симметрии тела остается постоянной. Ясно, что ω_0 — также постоянная величина. Ее

Физический смысл становится понятным, если записать решение уравнений (13.55), (13.56):

$$\omega_x = \omega_{\perp} \cos(\omega_0 t + \varphi); \quad \omega_y = \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (13.59)$$

где $\omega_{\perp} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ — проекция вектора $\vec{\omega}$ на плоскость x_0y_0 .

Таким образом, вектор $\vec{\omega}$ составляет с осью симметрии тела угол $\theta = \text{arctg} \frac{\omega_{\perp}}{\omega_z}$

и вращается вокруг этой оси, как следует из (13.59), с постоянной угловой скоростью ω_0 . Начальная фаза φ этого вращения определяется начальными условиями.

Посмотрим, как будет выглядеть движение твердого тела в лабораторной системе $x_0y_0z_0$. Поскольку нам известны значения ω_x , ω_y и ω_z , то закон движения тела (зависимость углов Эйлера от времени) в принципе может быть получен из кинематических уравнений Эйлера (11.30)–(11.32). Однако это связано с решением, в общем случае, довольно сложных дифференциальных уравнений, поэтому мы ограничимся качественным рассмотрением движения тела. В силу того, что

$$\mathbf{L} = J_x \omega_x \mathbf{i} + J_y \omega_y \mathbf{j} + J_z \omega_z \mathbf{k}, \quad (13.60)$$

а $J_x = J_y$, можно записать

$$\mathbf{L} = J_z \omega_z \mathbf{k} + J_x (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}) + J_x \omega_z \mathbf{k} - J_x \omega_z \mathbf{k}. \quad (13.61)$$

Здесь добавлено и вычтено слагаемое $J_x \omega_z \mathbf{k}$, что позволяет представить (13.61) в виде

$$\mathbf{L} = (J_z - J_x) \omega_z \mathbf{k} + J_x \vec{\omega}. \quad (13.62)$$

Отсюда видно, что \mathbf{k} (ось фигуры), \mathbf{L} и $\vec{\omega}$ лежат в одной плоскости. Из (13.62) следует, что

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} - \omega_0 \mathbf{k}, \quad (13.63)$$

где

$$\vec{\Omega} = \mathbf{L} / J_x \quad (13.64)$$

— составляющая угловой скорости по направлению \mathbf{L} . Плоскость, в которой лежат ось фигуры, $\vec{\omega}$ и \mathbf{L} , поворачивается (прецессирует) вокруг направления \mathbf{L} с угловой скоростью $\vec{\Omega}$, называемой *скоростью прецессии* (рис. 13.15). Само движение называется *регулярной прецессией* свободного симметричного волчка.

Отметим, что в случае веретенообразного тела, изображенного на рис.

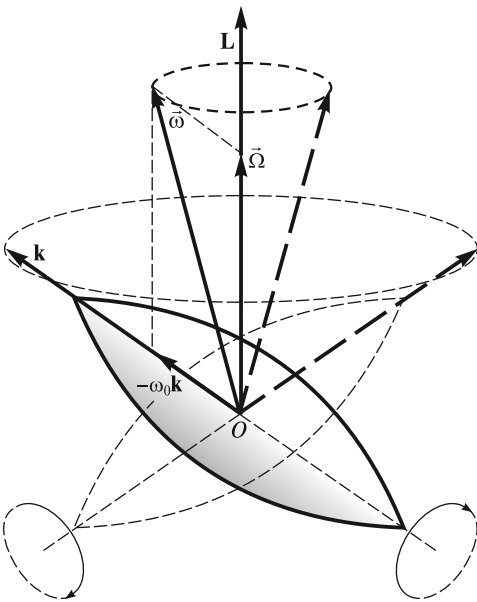


Рис. 13.15

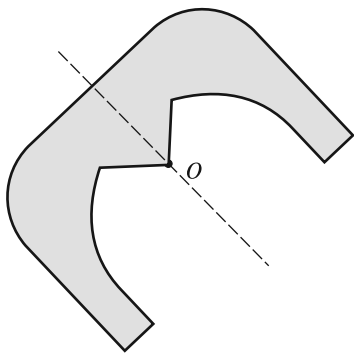


Рис. 13.16

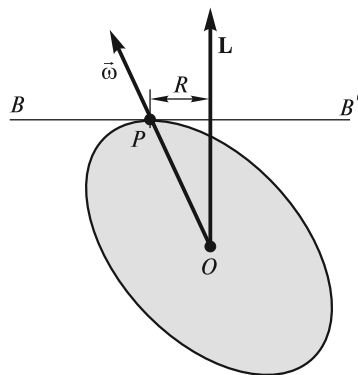


Рис. 13.17

13.15, $J_z < J_y$, поэтому $\omega_0 < 0$ [см. (13.58)], и вектор $-\omega_0 \mathbf{k}$ направлен в ту же сторону, что и \mathbf{k} .

З а м е ч а н и е 1. Закрепление аксиально симметричного твердого тела в центре масс может быть выполнено не только с помощью карданова подвеса, но и так, как показано на рис. 13.16. Массивное тело, сечение которого изображено на рисунке, шарнирно закреплено в центре масс — точке O .

З а м е ч а н и е 2. Используя построение Пуансо (см. лекцию 12), можно дать наглядную геометрическую интерпретацию регулярной прецессии свободного симметричного волчка (рис. 13.17). Момент импульса \mathbf{L} тела относительно неподвижного центра масс O представляет собой вектор, постоянный по величине и направлению. Эллипсоид инерции тела с центром в точке O , сечение которого изображено на рис. 13.17, является эллипсоидом вращения. Касательная к эллипсоиду плоскость BB' проведена через полюс P (точку пересечения вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ с эллипсоидом); эта плоскость перпендикулярна вектору \mathbf{L} и в лабораторной системе отсчета сохраняет свое положение неизменным. При регулярной прецессии волчка эллипсоид инерции тела «катится» по плоскости BB' без скольжения, так что геометрическим местом полюсов P является окружность радиуса R , принадлежащая плоскости BB' .

З а м е ч а н и е 3. Во избежание путаницы отметим следующее. Описанное выше движение связано с изменением угла прецессии ψ (см. рис. 11.3), поэтому оно и было названо регулярной прецессией (кинематическое определение). Однако существуют определения прецессии как движения оси симметрии тела под действием момента внешних сил (динамическое определение, см. лекцию 14). Описанное же выше движение с точки зрения динамического определения называют нутацией.

ЛЕКЦИЯ 14

Гироскопы. Свободный гироскоп. *Гироскоп* — это массивное аксиально-симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии.

В случае так называемого *свободного гироскопа* моменты всех внешних сил, включая и силу тяжести, относительно центра масс гироскопа равны нулю. Это можно реализовать, например, поместив гироскоп в карданов подвес, описанный в лекции 13 и изображенный на рис 13.13. При этом

$$\mathbf{M} = 0; \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad (14.1)$$

и момент импульса сохраняется:

$$\mathbf{L} = \text{const}. \quad (14.2)$$

Гироскоп ведет себя так же, как и свободное тело вращения (см. лекцию 13). В зависимости от начальных условий возможны два варианта поведения гироскопа.

1. Если гироскоп раскручен вокруг оси симметрии, то направления момента импульса и угловой скорости совпадают:

$$\mathbf{L} = J\vec{\omega} = \text{const}, \quad (14.3)$$

и направление оси симметрии гироскопа остается неизменным. В этом можно убедиться, поворачивая подставку, на которой расположен карданов подвес: при произвольных поворотах подставки ось гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве. По этой же причине волчок, «запущенный» на листе картона и подброшенный вверх (рис. 14.1), сохраняет ориентацию своей оси во время полета и, падая острием на картон, продолжает устойчиво вращаться, пока не израсходует запас своей кинетической энергии.

Свободный гироскоп, раскрученный вокруг оси симметрии, обладает большой устойчивостью. Из уравнения моментов следует, что изменение момента импульса

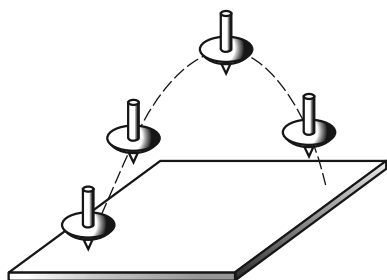


Рис. 14.1

$$\Delta\mathbf{L} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{M} dt. \quad (14.4)$$

Если интервал времени Δt мал, то и $\Delta\mathbf{L}$ мало, т.е. при кратковременных воздействиях даже очень больших сил движение гироскопа изменится незначительно. Гироскоп как бы сопротивляется попыткам изменить его момент импульса и кажется «затвердевшим».

Возьмем гироскоп конусообразной формы, опирающийся на острие подставки в своем цен-

тре масс O (рис 14.2). Если гироскоп не вращается, то он находится в состоянии безразличного равновесия, и малейший толчок сдвигает его с места. Если же его привести в быстрое вращение вокруг оси симметрии, то даже сильные удары деревянным молотком не смогут сколько-нибудь значительно изменить направление оси гироскопа в пространстве. Устойчивость свободного гироскопа используется в различных технических устройствах, например, в автопилоте.

2. Если свободный гироскоп раскручен так, что вектор мгновенной угловой скорости и ось симметрии гироскопа не совпадают (как правило, это несовпадение при быстром вращении бывает незначительным), то наблюдается движение, описанное в лекции 13 как «свободная регулярная прецессия». Применительно же к гироскопу его называют *нутацией*. При этом ось симметрии гироскопа, векторы \mathbf{L} и $\vec{\omega}$ лежат в одной плоскости, которая вращается вокруг направления $\mathbf{L} = \text{const}$ с угловой скоростью, равной L/J_x , где J_x — момент инерции гироскопа относительно главной центральной оси, перпендикулярной оси симметрии. Эта угловая скорость (назовем ее скоростью нутации) при быстром собственном вращении гироскопа оказывается достаточно большой, и нутация воспринимается глазом как мелкое дрожание оси симметрии гироскопа.

Нутационное движение легко продемонстрировать с помощью гироскопа, показанного на рис. 14.2, — оно возникает при ударах молотком по оси вращающегося гироскопа. При этом чем сильнее раскручен гироскоп, тем больше его момент импульса \mathbf{L} , тем больше скорость нутации и тем «мельче» дрожания его оси. Этот опыт демонстрирует еще одну характерную особенность нутации: с течением времени она постепенно уменьшается и исчезает вследствие неизбежного трения в опоре гироскопа.

Наша Земля — своего рода гироскоп, и ей тоже свойственно нутационное движение. Это связано с тем, что Земля несколько приплюснута с полюсов, в силу чего моменты инерции относительно оси симметрии (J_z) и относительно оси, лежащей в экваториальной плоскости (J_x, J_y), различаются. При

этом $J_x = J_y$, а $\frac{J_z - J_x}{J_x} \approx \frac{1}{300}$. В системе отсчета, связанной с Землей, ось вращения движется по поверхности конуса вокруг оси симметрии Земли с угловой скоростью ω_0 , рассчитываемой по формуле (13.58), т. е. она должна совершать один оборот примерно за 300 дней. На самом деле в силу, как предполагается, неабсолютной жесткости Земли это время оказывается больше и составляет около 440 суток. При этом расстояние от точки земной поверхности, через которую проходит ось вращения, до точки, через которую проходит ось симметрии (Северный полюс), равно всего нескольким метрам. Нутационное движение Земли не затухает — по-видимому, его поддерживают сезонные изменения, происходящие на поверхности нашей планеты.

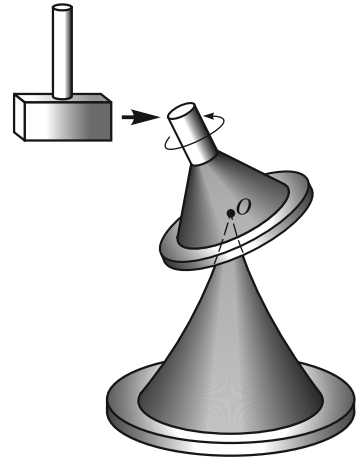


Рис. 14.2

Прецессия гироскопа под действием внешних сил. Угловая скорость прецессии. Рассмотрим теперь ситуацию, когда к оси гироскопа приложена сила, линия действия которой не проходит через точку закрепления. Опыты показывают, что в этом случае гироскоп ведет себя весьма необычным образом.

Если к оси шарнирно закрепленного в точке O гироскопа (рис. 14.3) прикрепить пружину и тянуть за нее вверх с силой F , то ось гироскопа будет перемещаться не в направлении силы, а перпендикулярно к ней. Это движение называют *прецессией гироскопа под действием внешней силы*. Опытным путем можно установить, что угловая скорость прецессии зависит не только от величины силы F , но и от того, к какой точке оси гироскопа эта сила приложена: с увеличением F и ее плеча l относительно точки закрепления O скорость прецессии увеличивается. При этом оказывается, что чем сильнее раскручен гироскоп, тем меньше угловая скорость его прецессии.

В качестве силы F , вызывающей прецессию, может выступать сила тяжести, если точка закрепления гироскопа не совпадает с центром масс. Так, если стержень с быстро вращающимся диском подвесить на нитке (рис. 14.4), то он не опускается вниз, как это можно было бы предположить, а совершает прецессионное движение вокруг нитки. Наблюдение прецессии гироскопа под действием силы тяжести в некотором смысле даже удобнее — линия действия силы «автоматически» смещается вместе с осью гироскопа, сохраняя свою ориентацию в пространстве.

Можно привести и другие примеры прецессии — например, движение оси хорошо известной детской игрушки — юлы с заостренным концом (рис. 14.5). Юла, раскрученная вокруг своей оси и поставленная наклонно на горизонтальную плоскость, начинает прецессировать вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести.

Точное решение задачи о движении гироскопа в поле внешних сил весьма сложно. Однако выражение для угловой скорости прецессии можно легко получить с помощью *элементарной теории гироскопа*. В рамках этой теории делается допущение, что мгновенная угловая скорость вращения гироскопа и его момент импульса направлены вдоль оси симметрии гироскопа. Другими слова-

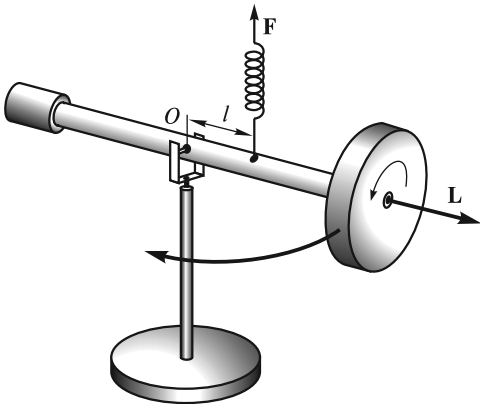


Рис. 14.3

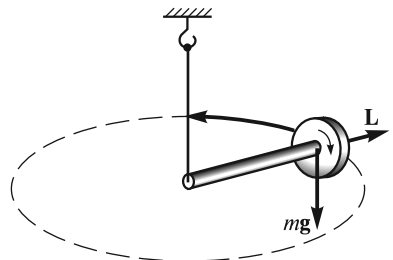


Рис. 14.4

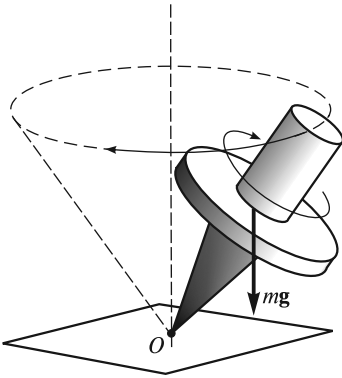


Рис. 14.5

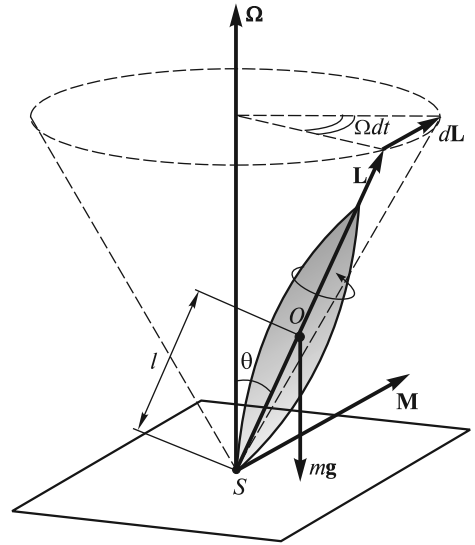


Рис. 14.6

ми, предполагается, что угловая скорость вращения гироскопа вокруг своей оси значительно больше угловой скорости прецессии:

$$\omega \gg \Omega, \quad (14.5)$$

так что вкладом в \mathbf{L} , обусловленным прецессионным движением гироскопа, можно пренебречь. В этом приближении момент импульса гироскопа, очевидно, равен

$$\mathbf{L} = J_z \vec{\omega}, \quad (14.6)$$

где J_z — момент инерции относительно оси симметрии.

Итак, рассмотрим массивный симметричный гироскоп, у которого неподвижная точка S (точка опоры о подставку) не совпадает с центром масс O (рис. 14.6). Момент силы тяжести относительно точки S

$$M = mgl \sin \theta, \quad (14.7)$$

где θ — угол между вертикалью и осью симметрии гироскопа.

Вектор \mathbf{M} направлен по нормали к плоскости, в которой лежат ось симметрии гироскопа и вертикаль, проведенная через точку S . Сила реакции опоры проходит через точку S , и ее момент относительно этой точки равен нулю.

Изменение момента импульса \mathbf{L} определяется выражением

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt. \quad (14.8)$$

При этом и \mathbf{L} , и ось гироскопа прецессируют вокруг вертикали с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Еще раз подчеркнем: делается допущение, что выполнено условие (14.5) и что вектор \mathbf{L} постоянно направлен вдоль оси симметрии гироскопа.

Из рис. 14.6 следует, что

$$dL = L \sin \theta \Omega dt. \quad (14.9)$$

В векторном виде

$$d\mathbf{L} = \vec{\Omega} \times \mathbf{L} dt. \quad (14.10)$$

Сравнивая (14.8) и (14.10), получаем следующую связь между моментом силы \mathbf{M} , моментом импульса \mathbf{L} и угловой скоростью прецессии $\vec{\Omega}$:

$$\mathbf{M} = \vec{\Omega} \times \mathbf{L}. \quad (14.11)$$

Это соотношение позволяет определить направление прецессии при заданном направлении вращения гироскопа вокруг своей оси.

Обратим внимание, что \mathbf{M} определяет угловую скорость прецессии, а не угловое ускорение, поэтому мгновенное «выключение» \mathbf{M} приводит к мгновенному же исчезновению прецессии, т. е. прецессионное движение является безынерционным.

Сила, вызывающая прецессионное движение, может иметь любую природу. Для поддержания этого движения важно, чтобы вектор момента силы \mathbf{M} поворачивался вместе с осью гироскопа. Как уже было отмечено, в случае силы тяжести это достигается автоматически. Из (14.11) с учетом того, что в рассматриваемом приближении справедливо соотношение (14.6), можно получить:

$$mgl \sin \theta = \Omega J_z \omega \sin \theta. \quad (14.12)$$

Угловая скорость прецессии оказывается равной

$$\Omega = \frac{mgl}{J_z \omega}. \quad (14.13)$$

Следует отметить, что Ω не зависит от угла θ наклона оси гироскопа и обратно пропорциональна ω , что хорошо согласуется с опытными данными.

Нутации. Опыт показывает, что прецессионное движение гироскопа под действием внешних сил в общем случае сложнее описанного выше в рамках элементарной теории. Если сообщить гироскопу толчок, изменяющий угол θ (см. рис. 14.6), то прецессия перестанет быть равномерной (часто говорят регулярной), а будет сопровождаться мелкими колебаниями вершины гироскопа — *нутациями*. Для их описания необходимо учесть несовпадение вектора полного момента импульса \mathbf{L} , мгновенной угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ и оси симметрии гироскопа.

Точная теория гироскопа выходит за рамки курса общей физики. Из соотношения $d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt$ следует, что конец вектора \mathbf{L} движется в направлении \mathbf{M} , т. е. перпендикулярно к вертикали и к оси гироскопа. Это значит, что проекции вектора \mathbf{L} на вертикаль L_v и на ось гироскопа L_0 остаются постоянными. Еще одной постоянной является энергия

$$E = T + mgl \cos \theta, \quad (14.14)$$

где T — кинетическая энергия гироскопа.

Выражая L_v , L_0 и T через углы Эйлера и их производные, можно с помощью уравнений Эйлера описать движение тела аналитически. Результат такого описания оказывается следующим: вектор момента импульса \mathbf{L} описывает неподвижный в пространстве конус прецессии, а ось симметрии гироскопа дви-

жется вокруг вектора \mathbf{L} по поверхности конуса нутаций. Вершина конуса нутаций, как и вершина конуса прецессии, находится в точке закрепления гироскопа, а ось конуса нутаций совпадает по направлению с \mathbf{L} и движется вместе с ним. Приблизительно число оборотов в единицу времени, которое совершает ось симметрии гироскопа, двигаясь по поверхности конуса нутаций, можно определить по формуле

$$n \approx \frac{J_z \omega}{2\pi J_S}, \quad (14.15)$$

где J_S и J_z — моменты инерции тела гироскопа относительно оси симметрии и относительно оси, проходящей через точку опоры перпендикулярно оси симметрии; ω — угловая скорость вращения вокруг оси симметрии. Отметим, что угол раствора конуса нутаций пропорционален моменту силы тяжести и обратно пропорционален ω^2 .

Траектории абсолютного движения вершины гироскопа представляют собой линии, примеры которых представлены на рис. 14.7. Вид этих линий зависит от начальных условий. В случае, показанном на рис. 14.7, *а*, гироскоп был раскручен вокруг оси симметрии, установлен на подставке под некоторым углом к вертикали и осторожно отпущен. В случае рис. 14.7, *б* ему, кроме того, был сообщен некоторый толчок вперед, а в случае рис. 14.7, *в* — толчок назад по отношению к направлению прецессии. Кривые на рис. 14.7 аналогичны циклоидам, описываемым точкой на ободе колеса, катящегося по плоскости без проскальзывания или с проскальзыванием в ту или иную сторону. И лишь сообщив гироскопу начальный толчок вполне определенной величины и направления, можно добиться того, чтобы ось гироскопа прецессировала без нутаций. Чем быстрее вращается гироскоп, тем больше угловая скорость нутаций и тем меньше их амплитуда. При очень быстром вращении нутации становятся практически незаметными для глаза.

Может показаться странным: почему гироскоп, будучи раскручен, установлен под углом к вертикали и отпущен, не падает под действием силы тяжести, а движется вбок? Откуда берется кинетическая энергия прецессионного движения? Ответы на эти вопросы можно получить только в рамках точной теории гироскопа. На самом деле гироскоп действительно начинает падать, а прецессионное движение появляется как следствие закона сохранения момента импульса. Действительно, отклонение оси гироскопа вниз приводит к уменьшению проекции момента импульса на вертикальное направление. Это уменьшение должно быть скомпенсировано моментом импульса,

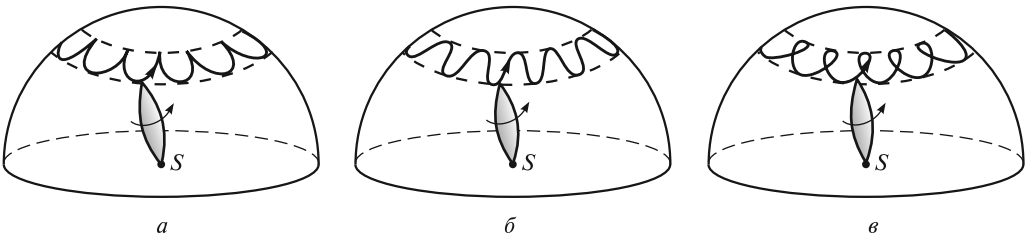


Рис. 14.7

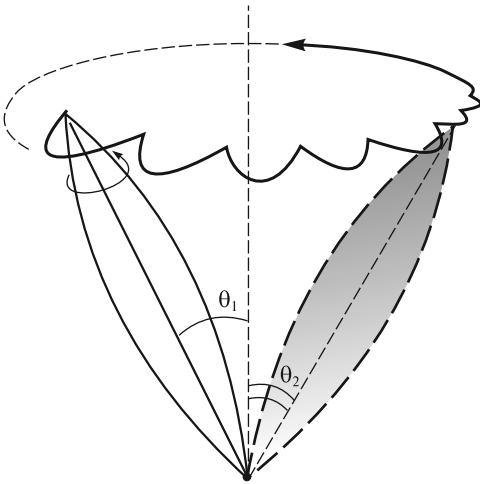


Рис. 14.8

связанным с прецессионным движением оси гироскопа. С энергетической точки зрения кинетическая энергия прецессии появляется вследствие изменения потенциальной энергии гироскопа.

Если за счет трения в опоре нутации гасятся быстрее, чем вращение гироскопа вокруг оси симметрии (как правило, так и бывает), то вскоре после «запуска» гироскопа нутации исчезают и остается только прецессия (рис. 14.8). При этом угол наклона оси гироскопа к вертикали (θ_2) оказывается больше, чем он был вначале (θ_1), т.е. потенциальная энергия гироскопа уменьшается. Таким образом, ось гироскопа должна немного опуститься, чтобы иметь воз-

можность прецессировать вокруг вертикальной оси.

Гироскопические силы. Обратимся к простому опыту. Возьмем в руки вал AB с насаженным на него колесом C (рис. 14.9). Пока колесо не раскручено, не представляет никакого труда поворачивать вал в пространстве произвольным образом. Но если колесо раскручено, то попытки повернуть вал, например, в горизонтальной плоскости с небольшой угловой скоростью $\vec{\Omega}$ приводят к интересному эффекту: вал стремится вырваться из рук и повернуться в вертикальной плоскости; он действует на кисти рук с определенными силами Φ и Φ' (рис. 14.9). Требуется приложить ощутимое физическое усилие, чтобы удерживать вал с вращающимся колесом в горизонтальной плоскости.

Рассмотрим более подробно эффекты, возникающие при вынужденном вращении оси гироскопа. Пусть ось гироскопа укреплена в U-образной раме, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси OO' (рис. 14.10). Такой гироскоп обычно называют несвободным — его ось лежит в горизонтальной плоскости и выйти из нее не может.

Раскрутим гироскоп вокруг его оси симметрии до большой угловой скорости (момент импульса \mathbf{L}) и станем поворачивать раму с гироскопом вокруг вертикальной оси OO' с некоторой угловой скоростью $\vec{\Omega}$, как показано на рис. 14.10. Момент импульса \mathbf{L} получит при этом приращение $d\mathbf{L}$, которое должно быть обеспечено моментом сил \mathbf{M} , приложенным к оси гироскопа. Момент \mathbf{M} создан парой сил \mathbf{F} и \mathbf{F}' , возникающих при вынужденном повороте оси гироскопа и действующих на ось со стороны рамы. По третьему закону Ньютона, ось действует на раму с силами Φ и Φ' (рис. 14.10). Эти силы называются *гироскопическими*; они создают гироскопический момент \mathbf{M}' . Возникновение гироскопических сил называют *гироскопическим эффектом*. Именно эти силы мы и чувствуем, пытаясь повернуть ось вращающегося колеса (см. рис. 14.9).

Гироскопический момент нетрудно рассчитать. Положим, согласно элементарной теории, что

$$\mathbf{L} = J\vec{\omega}, \quad (14.16)$$

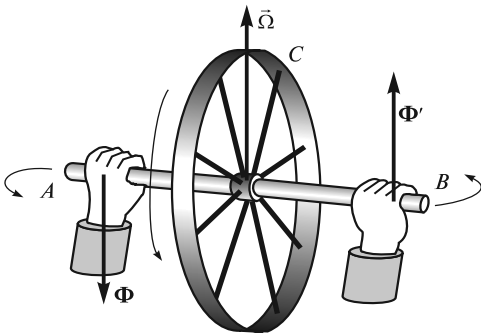


Рис. 14.9

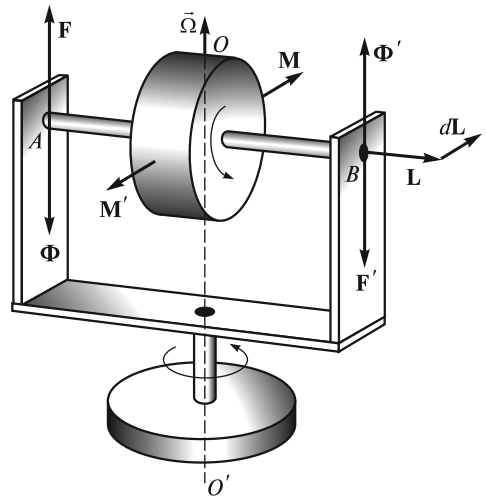


Рис. 14.10

где J — момент инерции гироскопа относительно его оси симметрии; $\bar{\omega}$ — угловая скорость собственного вращения.

Тогда момент внешних сил, действующих на ось, будет равен

$$\mathbf{M} = \bar{\Omega} \times \mathbf{L} = \bar{\Omega} \times (J\bar{\omega}), \quad (14.17)$$

где $\bar{\Omega}$ — угловая скорость вынужденного поворота (иногда говорят: вынужденной прецессии).

Со стороны оси на подшипники действует противоположно направленный момент

$$\mathbf{M}' = -\mathbf{M} = J\bar{\omega} \times \bar{\Omega}. \quad (14.18)$$

Таким образом, вал гироскопа, изображенного на рис. 14.10, будет прижиматься кверху в подшипнике B и оказывать давление на нижнюю часть подшипника A .

Направление гироскопических сил можно легко найти с помощью правила, сформулированного Н. Е. Жуковским: *гироскопические силы стремятся совместить момент импульса гироскопа с направлением угловой скорости вынужденного поворота*. Это правило можно наглядно продемонстрировать с помощью устройства, изображенного на рис. 14.11. Ось гироскопа закреплена в кольце, которое может свободно поворачиваться в обойме. Приведем обойму во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\bar{\Omega}$ (вынужденный поворот), и кольцо с гироскопом будет поворачиваться в обойме до тех пор, пока направления \mathbf{L} и $\bar{\Omega}$ не совпадут. Такой эффект лежит в основе известного магнетомеханического явления — намагничивания железного стержня при его вращении вокруг собственной оси; при этом спины электронов выстраиваются вдоль оси стержня (опыт Барнетта).

Гироскопические усилия испытывают подшипники осей быстро вращающихся частей машины при повороте самой машины (турбины на корабле,

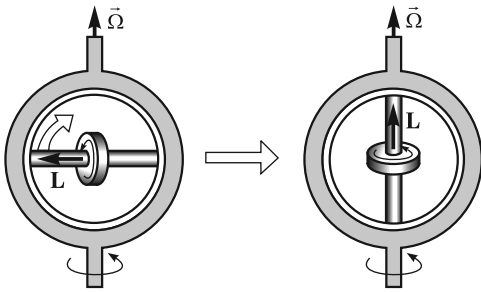


Рис. 14.11

винта на самолете и т.д.). При больших значениях угловой скорости вынужденной прецессии Ω и собственного вращения ω , а также больших размерах вращающихся частей эти силы могут стать причиной разрушения подшипников.

Рассмотрим некоторые примеры проявления гироскопических сил.

■ **Пример 1.** Легкий одномоторный самолет совершает левый вираж (рис. 14.12). Гироскопический момент передается через подшипники на корпус самолета и действует на него, стремясь

совместить ось собственного вращения винта (вектор $\vec{\omega}$) с осью вынужденной прецессии (вектор $\vec{\Omega}$). Самолет начинает задирать нос кверху, и летчик должен «дать ручку от себя», т.е. опустить вниз руль высоты. Таким образом, момент гироскопических сил будет скомпенсирован моментом аэродинамических сил.

■ **Пример 2.** При килевой качке корабля (с носа на корму и обратно) ротор быстроходной турбины участвует в двух движениях: вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и поворачивается вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной валу турбины, с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ (рис. 14.13). При этом вал турбины будет давить на подшипники с силами Φ и Φ' , лежащими в горизонтальной плоскости. При качке эти силы, как и гироскопический момент, периодически меняют свое направление на противоположное и могут вызвать «рыскание» корабля, если он не слишком велик (например, буксир).

Допустим, что масса турбины $m = 3000$ кг, ее радиус инерции $R_{\text{ин}} = \sqrt{J/m} = 0,5$ м, частота вращения турбины $n = 3000$ мин⁻¹, максимальная угловая скорость корпуса судна при килевой качке $\Omega = 5$ град/с, расстояние между подшипниками $l = 2$ м. Максимальное значение гироскопической силы, действующей на каждый из подшипников, составит

$$\Phi = \frac{M}{l} = \frac{J\omega\Omega}{l} = \frac{mR_{\text{ин}}^2 \cdot 2\pi n\Omega}{l}. \quad (14.19)$$

После подстановки числовых данных получим $\Phi \approx 10$ кН.

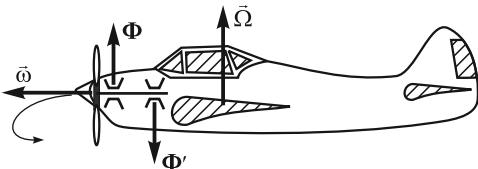


Рис. 14.12

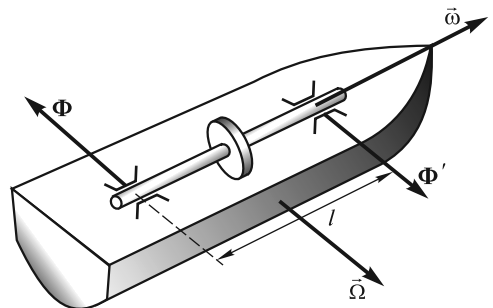


Рис. 14.13

■ **Пример 3.** Гироскопические силы могут вызвать так называемые колебания «шимми» колес автомобиля (рис. 14.14). Колесу, вращающемуся вокруг оси AA' с угловой скоростью ω , в момент наезда на препятствие сообщается дополнительная скорость вынужденного поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. При этом возникает момент гироскопических сил, и колесо начинает поворачиваться вокруг оси BB' . Приобретая угловую скорость поворота вокруг оси BB' , колесо снова начинает поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка. В результате возникают колебательные движения колеса вокруг двух взаимно перпендикулярных осей: оси поворота BB' и оси, совмещенной с направлением движения автомобиля. Если в конструкции автомобиля не принять специальных мер, эти колебания могут привести к срыву покрышки с обода колеса и поломке деталей его крепления. Современные конструкции подвески обеспечивают удержание колеса в вертикальной плоскости при наезде на препятствие.

■ **Пример 4.** С гироскопическим эффектом мы сталкиваемся и при езде на велосипеде (рис. 14.15). Совершая, например, поворот направо, велосипедист инстинктивно смещает центр тяжести своего тела вправо, как бы заваливая велосипед. Возникшее принудительное вращение велосипеда с угловой скоростью Ω приводит к появлению гироскопических сил с моментом M' . На заднем колесе этот момент будет погашен в подшипниках, жестко связанных с рамой. Переднее же колесо, имеющее по отношению к раме свободу вращения в рулевой колонке, под действием гироскопического момента начнет поворачиваться как раз в том направлении, которое было необходимо для правого поворота велосипеда. Опытные велосипедисты совершают подобные повороты, что называется «без рук».

Вопрос о возникновении гироскопических сил можно рассматривать и с другой точки зрения. Можно считать, что гироскоп, изображенный на рис. 14.10, участвует одновременно в двух движениях: относительном вращении вокруг собственной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$ и переносом, вынужденном повороте вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\bar{\Omega}$. Тогда элементарные массы

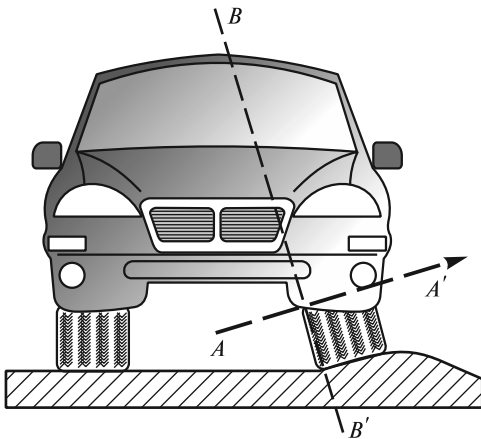


Рис. 14.14

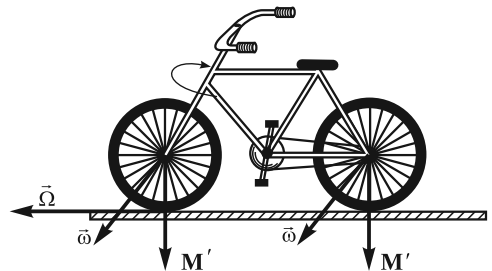


Рис. 14.15

Δm_i , на которые можно разбить диск гироскопа (маленькие кружки на рис. 14.16), должны испытывать кориолисовы ускорения

$$\mathbf{a}_{i\text{кор}} = 2\vec{\Omega} \times \mathbf{v}_{i\text{отн}}. \quad (14.20)$$

Эти ускорения будут максимальны для масс, находящихся в данный момент времени на вертикальном диаметре диска, и равны нулю для масс, которые находятся на горизонтальном диаметре. В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ (в этой системе отсчета ось гироскопа неподвижна), на массы Δm_i будут действовать кориолисовы силы инерции

$$\mathbf{F}_{i\text{кор}} = 2\Delta m_i \mathbf{v}_{i\text{отн}} \times \vec{\Omega}. \quad (14.21)$$

Эти силы создают момент \mathbf{M}' , который стремится повернуть ось гироскопа так, чтобы вектор $\vec{\omega}$ совместился с $\vec{\Omega}$. Момент \mathbf{M}' должен быть уравновешен моментом сил реакции \mathbf{F} и \mathbf{F}' (см. рис. 14.10), действующих на ось гироскопа со стороны подшипников. По третьему закону Ньютона, ось будет действовать на подшипники, а через них и на раму, в которой она закреплена, с гироскопическими силами Φ и Φ' . Поэтому и говорят, что гироскопические силы обусловлены силами Кориолиса.

Возникновение кориолисовых сил можно легко продемонстрировать, если вместо жесткого взять гибкий резиновый диск. При повороте вала с раскрученным диском вокруг вертикальной оси он изгибается в направлении действия кориолисовых сил так, как показано на рис. 14.17.

Волчки. Волчки кардинально отличаются от гироскопов тем, что в общем случае они не имеют ни одной неподвижной точки. Произвольное движение волчков имеет сложный характер: будучи раскручены вокруг оси симметрии и поставлены на горизонтальную плоскость, они прецессируют, «бегают» по плоскости, выписывая замысловатые фигуры, а иногда даже переворачиваются с одного конца на другой. Не вдаваясь в детали такого необычного поведения волчков, отметим лишь, что немаловажную роль здесь играет сила трения, возникающая в точке соприкосновения волчка с плоскостью.

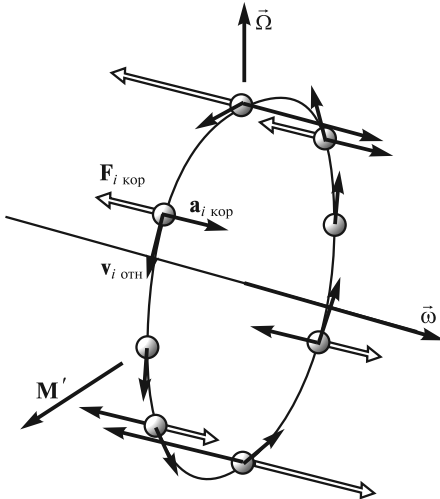


Рис. 14.16

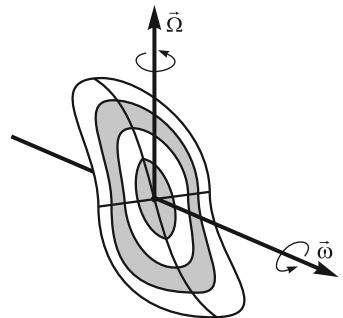


Рис. 14.17

Устойчивость вращения симметричного волчка. Кратко остановимся на вопросе об устойчивости вращения симметричного волчка произвольной формы. Опыт показывает, что если волчок привести во вращение вокруг оси симметрии и установить на плоскость в вертикальном положении, то это вращение в зависимости от формы волчка и угловой скорости вращения будет либо устойчивым, либо неустойчивым.

Пусть имеется волчок, изображенный на рис. 14.18. Введем следующие обозначения: O — центр масс волчка; h — расстояние от центра масс до точки опоры; K — центр кривизны волчка в точке опоры; r — радиус кривизны; J_z — момент инерции относительно оси симметрии; J_x — момент инерции относительно главной центральной оси, перпендикулярной оси симметрии.

Анализ устойчивости вращения волчка приводит к диаграмме, изображенной на рис. 14.19. Здесь по оси абсцисс отложено отношение J_z/J_x , а по оси ординат — отношение h/r .

Проведем гиперболу $h/r = 1/(J_z/J_x)$ и прямую $h/r = 1$. Эти линии делят область значений h/r , J_z/J_x на 4 части. Область I соответствует неустойчивому вращению волчка при всех угловых скоростях, область II — устойчивому вращению при достаточно больших угловых скоростях $\omega > \omega_{кр}$. Область III соответствует устойчивому вращению при малых угловых скоростях $\omega < \omega_{кр}$, область IV — устойчивому вращению при произвольных ω . Критическая угловая скорость $\omega_{кр}$ зависит от моментов инерции J_z , J_x , расстояний r , h и массы тела m :

$$\omega_{кр} = \left[\frac{(h-r)mg}{J_x (r/h)(J_z/J_x - r/h)} \right]^{1/2}. \quad (14.22)$$

Рассмотрим, например, китайский волчок, раскрученный до $\omega > \omega_{кр}$ и поставленный на плоскость вертикально (рис. 14.20, а). Пусть $J_z = J_x$. Поскольку в данном случае $h < r$, то этой ситуации соответствует точка 1 в области III, т. е. область устойчивого вращения лишь при малых ω . Поэтому в нашем случае ($\omega > \omega_{кр}$) вращение будет неустойчивым, и волчок перевернется на ножку (рис. 14.20, б, точка 2 в области II, $h > r$).

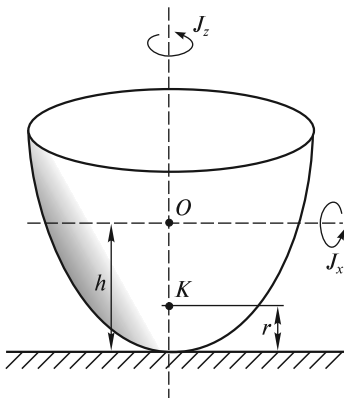


Рис. 14.18

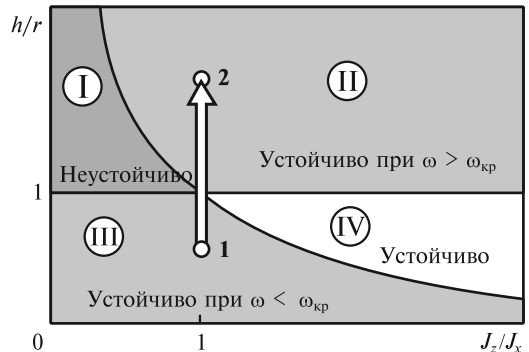


Рис. 14.19

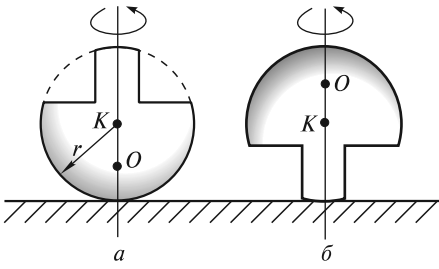


Рис. 14.20

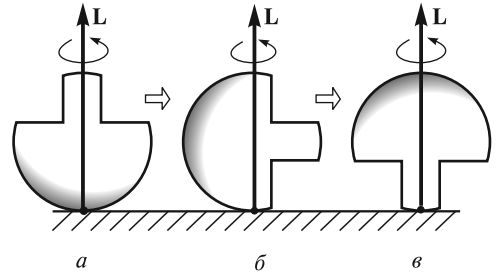


Рис. 14.21

Следует обратить внимание, что в процессе переворачивания волчка результирующий момент импульса сохраняет свое первоначальное направление, т. е. вектор \mathbf{L} все время направлен вертикально вверх. Это означает, что в ситуации, изображенной на рис. 14.21, б, когда ось волчка горизонтальна, вращение вокруг оси симметрии волчка отсутствует! Далее, при опрокидывании на ножку, вращение вокруг оси симметрии будет противоположно исходному (если смотреть все время со стороны ножки, рис. 14.21, в).

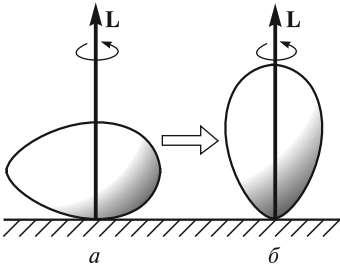


Рис. 14.22

В случае яйцеобразного волчка форма его поверхности вблизи точки опоры не является сферической. Однако существуют два взаимно перпендикулярных направления, для которых радиус кривизны в точке опоры принимает экстремальные (минимальное и максимальное) значения.

Опыты показывают, что в случае, изображенном на рис. 14.22, а, вращение будет неустойчивым, и волчок примет вертикальное положение, раскручиваясь вокруг оси симметрии и продолжая устойчивое вращение на более остром конце (рис. 14.22, б). Это вращение будет продолжаться до тех пор, пока силы трения не погасят в достаточной мере кинетическую энергию волчка, угловая скорость уменьшится (станет меньше $\omega_{кр}$), и волчок упадет.

РАЗДЕЛ 4

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

ЛЕКЦИЯ 15

Деформации твердого тела. В лекциях по механике твердого тела предполагалось, что под действием приложенных сил в теле возникают определенные деформации, однако они не принимались в расчет для описания движения этого тела как целого. Таким образом, твердое тело рассматривалось как *абсолютно твердое* (неизменяемое).

В этой лекции мы рассмотрим поведение *деформируемых твердых тел*, т. е. таких, которые деформируются под действием приложенных сил. Учет деформаций является определяющим в большом числе практически важных случаев, например, при расчете на прочность многочисленных строительных конструкций, деталей машин и механизмов и т. д.

Все тела состоят из атомов и молекул, но их много в любом существенном для нас объеме, поэтому тело можно приближенно рассматривать как сплошную среду. Сказанное относится не только к твердым, но также и к жидким и газообразным телам. Изучению движений таких тел посвящена значительная часть механики — *механика сплошных сред*. Надо отметить, что основные положения механики деформируемых твердых тел, рассматриваемых как сплошные среды, были разработаны в начале XIX в. и составляют основу современной теории упругости. Большой вклад в разработку этих основ внес французский математик О. Коши, который ввел понятия напряжений и деформаций, относящихся к каждой точке твердого тела.

Опыт показывает, что под действием приложенных сил твердое тело в той или иной степени меняет свою форму и объем, что на микроскопическом уровне означает относительное смещение атомов, из которых это тело состоит. Для удобства описания деформаций мысленно разобьем тело на физически малые объемы (иногда их будем называть частицы), содержащие, однако, большое число атомов. В отсутствие деформаций все такие объемы находятся в механическом равновесии. Это означает, что сумма сил и моментов сил, действующих на выделенный объем со стороны примыкающих к нему других объемов, равна нулю. Изменения положений атомов при деформациях приводят к тому, что в теле возникают внутренние силы, или внутренние напряжения, стремящиеся вернуть его в состояние равновесия. Заметим, что внутренние силы, как силы межмолекулярного взаимодействия, являются короткодействующими. Только соседние атомы или молекулы эффективно взаимодействуют друг с другом. Это упрощает ситуацию, поскольку позволяет считать, что внутренние силы, действующие на малый объем, приложены к ограничивающей его поверхности.

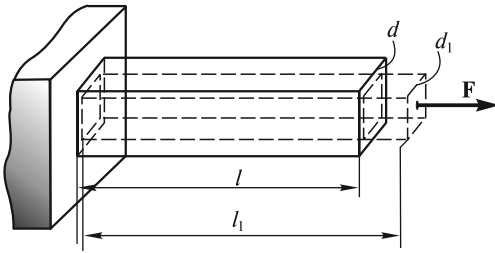


Рис. 15.1

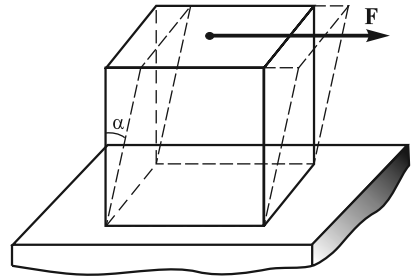


Рис. 15.2

Элементарные деформации. Коэффициент Пуассона. При всем многообразии деформаций произвольного твердого тела деформацию любого элементарного объема, из которого это тело состоит, можно свести к двум ее видам — *растяжению (сжатию) и сдвигу.*

Обратимся к опыту. Закрепим один конец резинового бруска длиной l , имеющего квадратное сечение, и потянем за другой конец с постоянной силой F , равномерно распределенной по торцу бруска. Брусок придет в новое положение равновесия с длиной $l_1 > l$ (рис. 15.1). Такую простейшую деформацию можно охарактеризовать *относительным удлинением*

$$\varepsilon = (l_1 - l)/l = \Delta l/l, \quad (15.1)$$

при этом растяжению соответствует $\varepsilon > 0$, а сжатию — $\varepsilon < 0$.

Деформацию сдвига можно наблюдать в опыте с резиновым кубиком, если закрепить, например, его нижнее основание, а к верхней грани приложить равномерно распределенную по площади и направленную вдоль этой грани силу F (рис. 15.2). Деформация в этом случае будет характеризоваться величиной

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha, \quad (15.2)$$

зависящей от *угла сдвига* α , который в большинстве практически важных случаев мал, так что $\gamma \approx \alpha$.

Отметим также известный факт, что при растяжении резинового шнура его поперечный размер d уменьшается (до величины d_1 , рис. 15.1). Такое поперечное сжатие характеризуется величиной

$$\varepsilon_{\perp} = (d_1 - d)/d = \Delta d/d. \quad (15.3)$$

Опытным путем установлено, что при малых деформациях отношение ε_{\perp} к ε для данного материала имеет одно и то же значение. Поэтому в теории упругости материал характеризуется *коэффициентом Пуассона*

$$\mu = -(\varepsilon_{\perp}/\varepsilon) > 0. \quad (15.4)$$

Каково численное значение коэффициента Пуассона? Чтобы ответить на этот вопрос, подсчитаем изменение объема резинового шнура. В отсутствие деформации его объем $V = ld^2$, объем же деформированного шнура

$$V_1 = l_1 d_1^2 = l(1 + \varepsilon) d^2 (1 + \varepsilon_{\perp})^2 \approx V(1 + \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp}). \quad (15.5)$$

В последнем выражении мы пренебрегли малыми величинами ϵ_{\perp}^2 , $2\epsilon\epsilon_{\perp}$ и $\epsilon\epsilon_{\perp}^2$. С учетом (15.4) относительное изменение объема запишется в виде

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} \approx \epsilon + 2\epsilon_{\perp} = \epsilon(1 - 2\mu). \quad (15.6)$$

Поскольку при растяжении ($\epsilon > 0$) объем никогда не уменьшается, то $0 < \mu \leq 1/2$.

Понятие о тензоре деформаций. В рассмотренных выше случаях мы имели дело с одномерными (вдоль одного направления) однородными деформациями растяжения и сдвига, когда ϵ и γ были одинаковы для всех элементарных объемов резинового бруска и кубика. Во многих случаях ситуация гораздо сложнее: с одной стороны, деформации меняются от точки к точке (неоднородные деформации), а с другой стороны, они не являются одномерными. Произвольную деформацию в некоторой точке P можно описать, задав три относительных удлинения ϵ_{11} , ϵ_{22} , ϵ_{33} маленького кубика с центром в точке P (рис. 15.3) и два сдвига каждой из его граней: γ_{12} , γ_{13} , γ_{21} , γ_{23} , γ_{31} , γ_{32} . Здесь первый индекс i означает, что грань кубика перпендикулярна оси x_i , второй индекс j — что грань смещается вдоль оси x_j . Таким образом, в общем случае неоднородные деформации в каждой точке тела характеризуются набором из девяти величин, являющихся функциями координат. Эти девять величин позволяют построить тензор деформаций (см. ниже).

Рассмотрим подробнее подход, используемый для описания деформации в некоторой точке P и приводящий к понятию тензора деформаций. Пусть тело находится в недеформированном состоянии, и известно положение каждой из его частиц, заданное радиусом-вектором \mathbf{r} относительно некоторой системы координат, как, например, положение частицы в точке P на рис. 15.4. При деформации тела его частицы смещаются. Смещение каждой из них можно охарактеризовать вектором $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, являющимся при неоднородных деформациях функцией координат. Однако деформации в некоторой точке будут определены лишь тогда, когда известно смещение соседних частиц тела. Таким

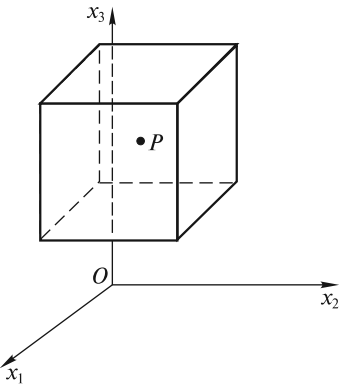


Рис. 15.3

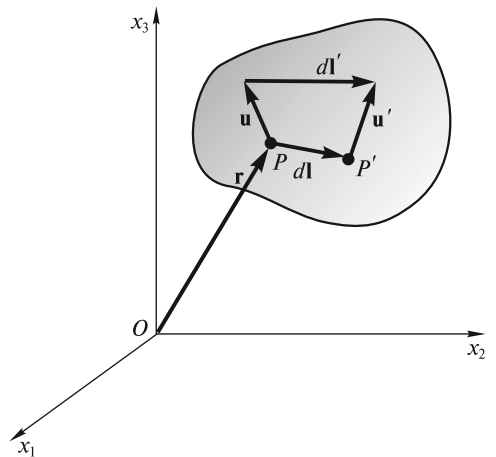


Рис. 15.4

образом, задание смещения всех частиц тела полностью определяет его деформацию. В самом деле, рассмотрим две бесконечно близкие частицы в точках $P(x_1, x_2, x_3)$ и $P'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$, имеющие смещения $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{u}' = \mathbf{u}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Как видно из рисунка, если взаимное расположение частиц в недеформированном состоянии задавалось радиусом-вектором $d\mathbf{l} = \{dx_1, dx_2, dx_3\}$, то в результате деформации новое взаимное расположение характеризуется вектором

$$d\mathbf{l}' = d\mathbf{l} + \mathbf{u}' - \mathbf{u} = d\mathbf{l} + d\mathbf{u}. \quad (15.7)$$

В частности, если $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$, то деформации в точке P отсутствуют.

Для удобства описания деформаций возведем (15.7) в квадрат и будем оперировать с модулями векторов $d\mathbf{l}$ и $d\mathbf{l}'$. Тогда

$$(d\mathbf{l}')^2 = (d\mathbf{l})^2 + 2d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{u} + (d\mathbf{u})^2. \quad (15.8)$$

В равенстве (15.8) пренебрежем последним членом в правой части, поскольку считаем деформации малыми ($du \ll dl$), а проекции вектора $d\mathbf{u}$ представим в виде сумм

$$(d\mathbf{u})_i = du_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j; \quad i = 1, 2, 3. \quad (15.9)$$

Выражение (15.9), по существу, описывает приращение каждой из трех проекций вектора смещения при переходе из точки P в точку P' и содержит три слагаемых, каждое из которых есть произведение производной функции u_i в точке P на приращение соответствующего аргумента dx_j .

Расписывая скалярное произведение в (15.8) в виде

$$d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{u} = dx_1 du_1 + dx_2 du_2 + dx_3 du_3$$

и подставляя (15.9) в (15.8), получим:

$$(d\mathbf{l}')^2 = (d\mathbf{l})^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i = (d\mathbf{l})^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 U_{ij} dx_j dx_i, \quad (15.10)$$

где

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (15.11)$$

— *тензор деформаций*, который является симметричным тензором ($U_{ij} = U_{ji}$).

Для описания деформаций в каждой точке P можно выбрать такую систему координат, в которой только три диагональные компоненты тензора U_{11} , U_{22} и U_{33} отличны от нуля. Как и в случае тензора инерции, для каждой точки тела P существуют свои три главные оси, относительно которых формула (15.10) имеет наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} (d\mathbf{l}')^2 &= (d\mathbf{l})^2 + 2U_{11}dx_1^2 + 2U_{22}dx_2^2 + 2U_{33}dx_3^2 = \\ &= dx_1^2(1 + 2U_{11}) + dx_2^2(1 + 2U_{22}) + dx_3^2(1 + 2U_{33}). \end{aligned} \quad (15.12)$$

В качестве примера рассмотрим резиновый кубик (рис. 15.5, а), который при деформации принимает форму, показанную на рис. 15.5, б. Для наглядности нанесем на боковую грань кубика прямоугольную сетку, разбивающую эту грань на маленькие квадратики со сторонами, параллельными ее диагоналям (см. рис. 15.5, а). При деформации квадратiki превращаются в прямоугольники. Если под dl и dl' понимать длины диагоналей элементарных квадратика и прямоугольника соответственно, то эти длины можно связать формулой (15.12) только в системе координат, оси которой x_1 и x_2 направлены вдоль ребер элементарных ячеек (ось x_3 перпендикулярна плоскости чертежа).

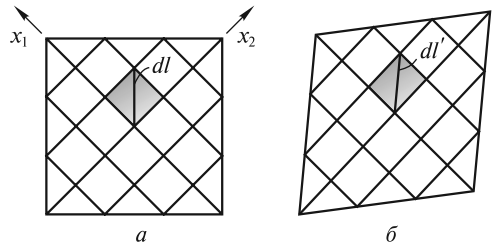


Рис. 15.5

Обобщая полученный результат, следует сказать, что при произвольной деформации главные оси в любой точке P должны быть направлены параллельно ребрам такого элементарного прямоугольного параллелепипеда, который при деформации не изменяет своей формы. Деформации сдвига относительно главных осей координат отсутствуют. Ниже будет установлена связь между деформациями сдвига и недиагональными компонентами тензора деформаций, но вначале выясним физический смысл диагональных компонент U_{11} , U_{22} и U_{33} .

Относительное удлинение каждого ребра параллелепипеда равно соответствующей диагональной компоненте тензора деформаций. В самом деле, в случае главных осей, как следует из (15.12),

$$\varepsilon_i = \frac{dx_i \sqrt{1 + 2U_{ii}} - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2U_{ii}} - 1 \approx U_{ii}. \quad (15.13)$$

Пусть в окрестности точки $P(x_1, x_2, x_3)$ деформации таковы, что параллелепипед со сторонами dx_1 , dx_2 и dx_3 превращается в другой параллелепипед. Для наглядности рассмотрим картину деформаций в плоскости Ox_1x_2 (рис. 15.6, а). Смещения вершин прямоугольника при деформации изображены соответствующими векторами. Длины прямоугольника в направлении главных осей Ox_1 и Ox_2 изменились до величин

$$\begin{aligned} dx'_1 &= dx_1 + u_1(x_1 + dx_1, x_2) - u_1(x_1, x_2); \\ dx'_2 &= dx_2 + u_2(x_1, x_2 + dx_2) - u_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (15.14)$$

Из (15.14) легко вычисляются относительные удлинения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{dx'_1 - dx_1}{dx_1} = \frac{u_1(x_1 + dx_1, x_2) - u_1(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = U_{11}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{dx'_2 - dx_2}{dx_2} = \frac{u_2(x_1, x_2 + dx_2) - u_2(x_1, x_2)}{dx_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = U_{22}. \end{aligned} \quad (15.15)$$

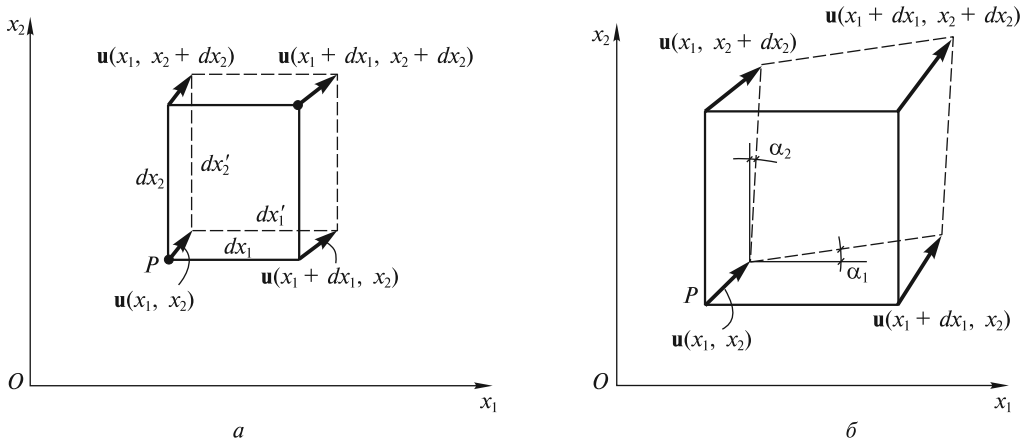


Рис. 15.6

Соотношение (15.13) позволяет связать изменение элементарного объема с диагональными компонентами тензора. Объем элементарного параллелепипеда до деформации равен $dV = dx_1 dx_2 dx_3$, а после деформации

$$dV' = dx_1' dx_2' dx_3' = dx_1 dx_2 dx_3 \sqrt{1 + 2U_{11}} \sqrt{1 + 2U_{22}} \sqrt{1 + 2U_{33}}. \quad (15.16)$$

Относительное изменение объема dV при малых деформациях ($|U_{ij}| \ll 1$), как следует из (15.16), равно:

$$\frac{dV' - dV}{dV} \approx U_{11} + U_{22} + U_{33}. \quad (15.17)$$

Важно отметить, что при сдвиге объем тела не меняется. Поэтому при деформациях сдвига сумма диагональных компонент тензора деформаций (иногда употребляют термин «след тензора»), приведенного к главным осям, равна нулю.

Поясним теперь физический смысл недиагональных компонент тензора деформаций. Пусть параллелепипед испытывает деформацию, в результате которой прямоугольник, изображенный на рис. 15.6, б, превращается в параллелограмм. В рассматриваемом примере мы отвлекаемся, как и ранее, от смещения частиц вдоль оси Ox_3 . Легко подсчитать углы α_1 и α_2 , на которые повернулись стороны параллелограмма относительно сторон прямоугольника. Они, очевидно, равны

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \gamma_{12} = \frac{u_2(x_1 + dx_1, x_2) - u_2(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1};$$

$$\alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \gamma_{21} = \frac{u_1(x_1, x_2 + dx_2) - u_1(x_1, x_2)}{dx_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Тогда полный угол сдвига в плоскости Ox_1x_2 составит

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2U_{12} = 2U_{21}.$$

Таким образом, недиагональные компоненты тензора деформаций определяют сдвиговые углы α в соответствующих плоскостях.

Возвращаясь к величинам относительных удлинений ϵ_{ii} и сдвигов γ_{ij} , введенным в начале данного раздела, тензор деформаций можно записать в виде

$$\hat{U} = U_{ij} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2}(\gamma_{12} + \gamma_{21}) & \frac{1}{2}(\gamma_{13} + \gamma_{31}) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{12}) & \epsilon_{22} & \frac{1}{2}(\gamma_{23} + \gamma_{32}) \\ \frac{1}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{13}) & \frac{1}{2}(\gamma_{32} + \gamma_{23}) & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (15.18)$$

Упругие деформации. Модули Юнга и сдвига. Как уже отмечалось выше, при деформациях возникают внутренние напряжения, которые, в общем случае, зависят не только от деформаций, но и от скоростей, с которыми эти деформации происходят. В этом легко убедиться на опыте, если взять полимерное вещество, которое в обычных условиях медленно растекается подобно замазке. Можно без особых усилий изменить его форму, если делать это медленно. Однако, если из этого вещества вылепить шарик, то легко обнаружить, что такой шарик обладает хорошими упругими свойствами, подскакивая после удара об пол практически на ту же высоту, с которой он был брошен без начальной скорости. Этот опыт показывает, что напряжения, подобно силам вязкого трения, возрастают по мере увеличения скорости деформации. Во многих случаях можно считать, что напряжения определяются только деформациями. Такие тела называются *абсолютно упругими*. Замечательным свойством абсолютно упругих тел является их способность полностью восстанавливать свою форму после снятия внешних воздействий.

Рассмотрим, например, растяжение (или сжатие) стержня с площадью сечения S под действием силы \mathbf{F} , приложенной перпендикулярно к торцевой грани. При последовательном возрастании нагрузки деформации вначале однородны по длине стержня и растут пропорционально нагрузке, т. е.

$$\epsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \chi \frac{F}{S} = \chi \sigma,$$

где $\sigma = F/S$ — *нормальное напряжение*.

Пропорциональность деформаций ϵ напряжению σ составляет содержание *закона Гука*. Коэффициент пропорциональности χ называется *коэффициентом удлинения*, для каждого материала он определяется опытным путем. Так как численные значения ϵ гораздо меньше σ , то χ — весьма малая величина. Поэтому обычно вводят *модуль упругости (модуль Юнга)* $E = \chi^{-1}$, и закон Гука записывают в виде

$$\epsilon = \sigma/E. \quad (15.19)$$

Величины σ и E в СИ измеряют в паскалях ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$).

Опыт показывает, что закон Гука выполняется лишь в определенном интервале напряжений. Если растягивать стержень, последовательно увеличивая

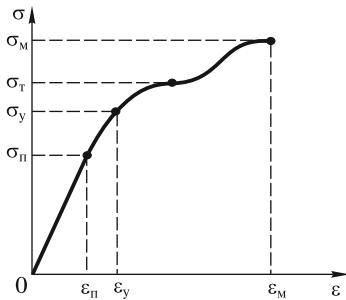


Рис. 15.7

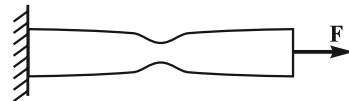


Рис. 15.8

от нуля приложенную к нему силу, то каждый раз после снятия нагрузки деформация исчезает. Однако при некотором напряжении $\sigma \geq \sigma_y$ появляется остаточное удлинение. Это напряжение σ_y называют *пределом упругости*. На рис. 15.7 изображена диаграмма растяжений — график зависимости $\sigma = \sigma(\epsilon)$. Закон Гука выполняется только в части области упругости — области пропорциональности, когда $0 \leq \sigma \leq \sigma_{\text{п}}$.

При $\sigma > \sigma_y$ наблюдается явление текучести, когда удлинение образца растет при практически постоянной нагрузке $\sigma_{\text{т}}$, называемой *пределом текучести*. При этом течение материала происходит равномерно по всей длине стержня. За пределами области текучести деформации будут уже неоднородными (рис. 15.8) — в некотором месте можно заметить образование шейки. Увеличение σ в этой области обусловлено именно уменьшением площади S поперечного сечения шейки, а не возрастанием силы F . При напряжении $\sigma_{\text{м}}$, называемом *пределом прочности*, в ослабленном сечении стержня происходит разрыв.

Ясно, что на практике материал не должен испытывать опасных нагрузок. Расчеты конструкций проводят таким образом, чтобы $\sigma < [\sigma]$, где $[\sigma]$ — так называемое *допустимое напряжение*. Обычно $[\sigma] < \sigma_{\text{п}}$, и все расчеты проводят на основе закона Гука. При этом допустимое напряжение существенно меньше, чем предел прочности. Так, для металлов выбирают $[\sigma] \approx 0,2\sigma_{\text{м}}$, а для дерева $[\sigma] \approx 0,1\sigma_{\text{м}}$. Эти нормы относятся к так называемой «спокойной» нагрузке. Если нагрузка переменная или сооружение подвергается колебаниям, то допустимое напряжение уменьшают в 1,5—2 раза.

Наибольшие деформации, которые может выдержать материал, определяются протяженностью области текучести. Если эта область велика, то материал называют *пластичным*. Например, сталь способна выдерживать большие нагрузки без разрушения. Если же область текучести мала, то этот материал *хрупок*. Хрупкие материалы, например, чугун, разрушаются при деформациях $\epsilon \geq \epsilon_{\text{п}}$. Однако при некоторых условиях и пластичные материалы могут стать хрупкими и разрушиться при малых деформациях $\epsilon \gtrsim \epsilon_{\text{п}}$ (например, сталь при температуре ниже -50°C).

Для небольших деформаций сдвига также существует область пропорциональности между деформацией и касательным напряжением (см. рис. 15.2). В этом случае закон Гука можно записать в виде

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{G}, \quad (15.20)$$

где $\sigma_\tau = F/S$ — касательное напряжение, аналогичное по смыслу введенному выше нормальному напряжению; G — модуль сдвига, являющийся, как и модуль Юнга, характеристикой материала.

В табл. 15.1 приведены характеристики упругости и прочности некоторых материалов. Анализ таблицы позволяет сделать два важных вывода.

Во-первых, поскольку предел текучести σ_τ на 2—3 порядка меньше модуля упругости, то в области упругих деформаций $\varepsilon < 10^{-3} - 10^{-2}$.

Во-вторых, просматривается корреляция между величиной модуля Юнга E и модуля сдвига G : чем больше E , тем больше G . Это не случайно, так как между обеими величинами существует связь. Чтобы ее установить, рассмотрим растяжение маленького кубика с длиной ребра $dx = l$ (рис. 15.9). Обратим внимание на то, что квадрат $ABCD$ — грань параллелепипеда, находящегося внутри рассматриваемого кубика, — превращается при деформации в ромб $A'B'C'D'$. Совершенно ясно, что параллелепипед испытывает деформацию сдвига, а его объем практически не изменяется [см. также формулу (15.17)]. Величину угла сдвига α можно связать с деформацией удлинения $\varepsilon = \Delta l/l$ и коэффициентом Пуассона $\mu = -\varepsilon_\perp/\varepsilon$. Из треугольника $A'OD'$ следует, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \frac{l/2 + \Delta l/2}{l/2 - \Delta d/2} = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_\perp} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon\mu}. \quad (15.21)$$

Поскольку $\beta \ll 1$, то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \approx 1 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \beta = 1 + 2\beta. \quad (15.22)$$

Приравнивая правые части (15.21) и (15.22), находим:

$$\alpha = 2\beta = \frac{\varepsilon(1 + \mu)}{1 - \varepsilon\mu} \approx \varepsilon(1 + \mu). \quad (15.23)$$

В последней формуле учтено, что $\varepsilon\mu \ll 1$.

Таблица 15.1

Материал	Модуль упругости E , ГПа	Модуль сдвига G , ГПа	Предел текучести σ_τ , ГПа	Предел прочности при растяжении σ_m , ГПа
Сталь углеродистая обыкновенная	200—210	77—81	0,19—0,31	0,32—0,71
Сталь высокопрочная закаленная	200—210	77—81	1,2—1,95	1,5—2,0
Медь	110—130	41,5—44,0	0,07	0,22
Алюминий	69—72	25,0—26,5	0,022	0,05
Свинец	14—18	5,5—8,0	0,005	0,014—0,018

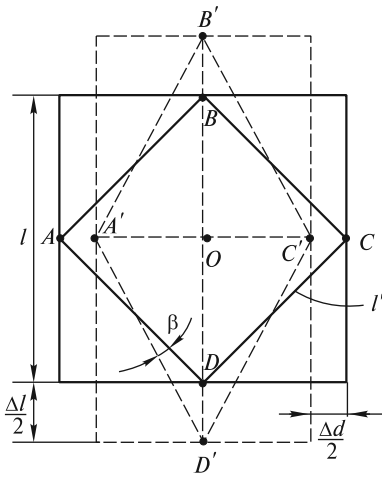


Рис. 15.9

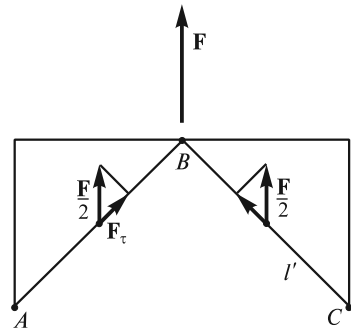


Рис. 15.10

Сила \mathbf{F} , растягивающая кубик (рис. 15.10), создает нормальное напряжение $\sigma = F/l^2$. Это напряжение передается на грани AB и BC параллелепипеда, однако силы, действующие на каждую из граней, имеют не только нормальную к грани, но и направленную вдоль грани составляющую F_τ . Касательное напряжение оказывается при этом равным

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{l'l'} = \frac{\sigma l^2 \cos(\pi/4)}{2l'l'} = \frac{\sigma}{2}. \quad (15.24)$$

Поскольку деформации ε в формуле (15.23) пропорциональны напряжениям, а $\sigma = 2\sigma_\tau$, то

$$\alpha = \frac{2(1+\mu)}{E} \sigma_\tau. \quad (15.25)$$

Сравнивая последнее равенство с соотношением (15.20) и учитывая, что $\gamma = \tan \alpha \approx \alpha$, находим искомую связь между модулем Юнга и модулем сдвига:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (15.26)$$

Обратим внимание на то, что величина и направление силы, приложенной к некоторой площадке, зависят от ориентации и размера этой площадки. Так, в рассмотренном выше примере на грань $l \times l$ кубика действует сила \mathbf{F} , перпендикулярная к грани, в то время как на грань параллелепипеда $l \times l'$ действует сила $\mathbf{F}/2$, направленная под углом 45° к этой грани. Это замечание получит далее обобщение при обсуждении способов задания сил, действующих на каждый из элементов тела.

Посмотрим теперь, что будет происходить с тем же кубиком, если его растягивать одновременно силами, приложенными к каждой из его граней. В этом случае относительные удлинения ребер будут определяться соотношениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E}.\end{aligned}\tag{15.27}$$

Формулы (15.27) описывают деформации кубика при его всестороннем растяжении или сжатии. Если напряжения одинаковы ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$), то и деформации будут одинаковы: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$, и $\varepsilon = \sigma(1 - 2\mu)/E$.

В результате всесторонней деформации объем кубика станет равным

$$V' = l^3(1 + \varepsilon)^3 \approx V(1 + 3\varepsilon),$$

а относительное изменение объема будет равно

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varepsilon = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \sigma = \frac{\sigma}{K}.\tag{15.28}$$

Величину

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}\tag{15.29}$$

называют *модулем всестороннего сжатия*. Этот модуль играет важную роль в теории упругости.

Отметим, что хрупкие материалы, подвергнутые всестороннему давлению, на которое дополнительно накладывается растяжение, сжатие или сдвиг, обнаруживают значительные пластические деформации. Такие деформации играют существенную роль, например, в процессах образования рельефа земной коры: граниты, базальты и другие породы, хрупкие в обычных условиях, становятся текучими под действием колоссального давления и высокой температуры в глубинных слоях Земли.

Деформации растяжения и сдвига возникают при изгибе балок строительных конструкций и скручивании валов машин и механизмов. Расчет деформаций в этих случаях имеет важное практическое значение.

Изгиб балок. Пренебрегая массой балки, рассмотрим ее изгиб под действием внешней силы \mathbf{F} (рис. 15.11). Балка деформируется таким образом, что ее ось O_1O_2 (нейтральная линия) искривляется. Все слои, лежащие ниже нейтральной линии, удлиняются (в них возникают растягивающие напряжения), а слои, лежащие выше этой линии, сжимаются (в них возникают сжимающие напряжения). При этом два первоначально параллельных и находящихся на расстоянии dx друг от друга сечения при изгибе образуют некоторый угол $d\varphi$. Для удобства описания распределения деформаций и напряжений свяжем с балкой систему координат с началом в некоторой точке O на нейтральной линии O_1O_2 . Ось Ox направим вдоль нейтральной линии, а ось Oy — по нормали к ней, как показано на рис. 15.11. С увеличением координаты y деформации в некотором сечении $x = \text{const}$ линейно нарастают от $\varepsilon_1 < 0$ на верхней стороне

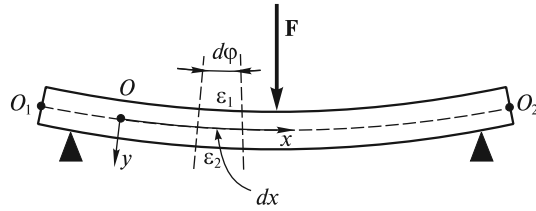


Рис. 15.11

балки до $\varepsilon_2 > 0$ на нижней. В соответствии с законом Гука распределение напряжений можно записать в виде

$$\sigma(x, y) = k(x)y, \quad (15.30)$$

где k — неизвестный коэффициент пропорциональности, меняющийся от сечения к сечению. Распределение напряжений (15.30) в произвольном сечении стержня можно изобразить графически. Для этого в каждой точке сечения проведем перпендикулярно к нему вектор, модуль которого равен силе, действующей на площадку dS : $df = \sigma dS$ (рис. 15.12, а).

Рассмотрим равновесие части балки слева от рассматриваемого сечения. Начало координат поместим на одной вертикали с левой опорой (рис. 15.12, а). Предположим, что балка имеет вертикальную плоскость симметрии, как это изображено на рис. 15.12, б, и что внешние силы лежат в этой плоскости. Нейтральный слой пересекает сечение балки по прямой n_1n_2 . Для равновесия выделенной части балки необходимо, чтобы выполнялись следующие известные из статики условия.

Во-первых, сумма всех горизонтальных сил должна быть равна нулю, т. е.

$$\int df = \int \sigma dS = k(x) \int y dS = 0. \quad (15.31)$$

Во-вторых, сумма всех вертикальных сил равна нулю — в сечении, кроме нормальных напряжений будут действовать и касательные напряжения σ_τ , компенсирующие силу реакции опоры N , т. е.

$$N = \int \sigma_\tau dS. \quad (15.32)$$

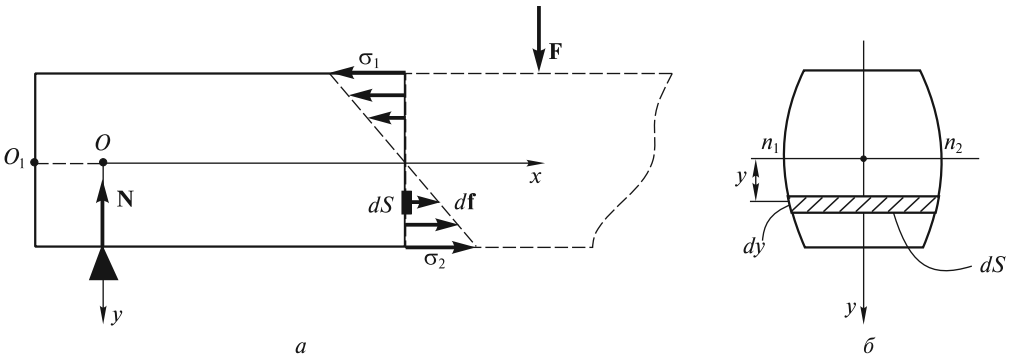


Рис. 15.12

В большинстве случаев касательные напряжения при изгибе малы по сравнению с нормальными и при расчете балки на прочность не учитываются.

В-третьих, сумма моментов всех сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Если в качестве такой точки выбрать центр рассматриваемого сечения, находящийся на пересечении нейтральной линии O_1O_2 и прямой n_1n_2 , то это условие запишется в виде

$$Nx - M(x) = 0, \quad (15.33)$$

где $M(x) = \int \sigma y dS$ — момент сил упругости, действующих в рассматриваемом сечении. Для его вычисления учтем распределение напряжений (15.30), в котором коэффициент пропорциональности $k(x) = \frac{\sigma_2(x)}{y_2}$ (y_2 — расстояние между нейтральным и наиболее растянутым нижним слоем). В итоге получим

$$M(x) = \frac{\sigma_2(x)}{y_2} \int y^2 dS = \frac{\sigma_2(x)}{y_2} J, \quad (15.34)$$

где

$$J = \int y^2 dS \quad (15.35)$$

— момент инерции поперечного сечения относительно оси n_1n_2 .

Отношение J/y_2 зависит от размеров и формы сечения и называется *осевым моментом сопротивления*:

$$I = J/y_2, \quad (15.36)$$

а уравнение (15.34) можно представить в виде

$$M(x) = \sigma_2(x) I. \quad (15.37)$$

Для расчета прочности балок необходимо знать распределение напряжений σ , возникающих при известных моментах внешних сил. Оно может быть получено из (15.34):

$$\sigma(x, y) = (M(x)/J) y. \quad (15.38)$$

Моменты инерции прямоугольного и круглого поперечных сечений (рис. 15.13) равны

$$J_{\square} = \frac{1}{12} bh^3; \quad J_{\circ} = \frac{1}{64} \pi d^4, \quad (15.39)$$

а соответствующие им осевые моменты сопротивления имеют вид

$$I_{\square} = \frac{1}{6} bh^2; \quad I_{\circ} = \frac{1}{32} \pi d^3. \quad (15.40)$$

Согласно (15.37), прочность балок возрастает при увеличении осевого момента сопротивления, причем, как следует из (15.40), прочность балки прямоугольного сечения эффективно достигается за счет увеличения ее высоты h .

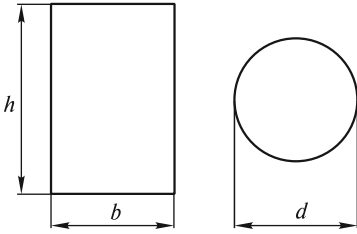


Рис. 15.13

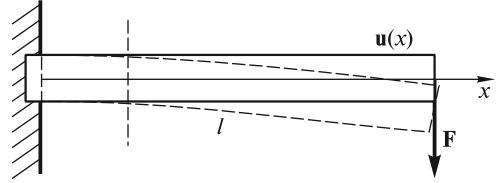


Рис. 15.14

Полученные результаты позволяют рассчитать искривление осевой линии балки. Элементарный угол $d\varphi$, на который развернулись сечения x и $x + dx$, очевидно связан с двумя деформациями $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ крайних слоев соотношением

$$d\varphi = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) dx}{y_2 - y_1} = \frac{1}{E} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) dx}{y_2 - y_1}, \quad (15.41)$$

где $y_2 - y_1$ — расстояние между крайними слоями.

Подставляя (15.38) в (15.41), получим

$$d\varphi = \frac{1}{E} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{y_2 - y_1} dx = \frac{M(x)}{EJ} dx. \quad (15.42)$$

В частности, можно рассчитать изгиб невесомой горизонтальной балки, выступающей из стены на расстояние l (консольной балки), если к ее концу приложена вертикальная сила \mathbf{F} (рис. 15.14).

Как следует из (15.42), в сечении балки с координатой x

$$d\varphi = \frac{F(l-x)}{EJ} dx. \quad (15.43)$$

Если ось балки в этом сечении сместилась вниз на расстояние $u(x)$, то, очевидно, углы наклона нейтральной линии балки к горизонтальной оси в сечениях x и $x + dx$ составляют соответственно

$$\varphi(x) \approx \operatorname{tg} \varphi(x) = \left. \frac{du}{dx} \right|_x; \quad \varphi(x + dx) = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x+dx}. \quad (15.44)$$

Приращение угла наклона

$$d\varphi = \varphi(x + dx) - \varphi(x) = \frac{d^2u}{dx^2} dx. \quad (15.45)$$

Приравнивая правые части (15.45) и (15.43), получаем уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{F(l-x)}{EJ}. \quad (15.46)$$

Интегрируя два раза при условии, что $u(0) = 0$ (конец закреплен), получаем искомое искривление балки в виде

$$u(x) = \frac{F}{EJ} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (15.47)$$

Смещение $u(l)$ конца балки под действием силы F , называемое *стрелой прогиба*, оказывается равным

$$u(l) = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EJ}. \quad (15.48)$$

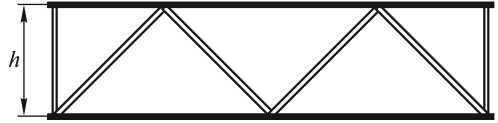


Рис. 15.15

По мере увеличения высоты балки h стрела прогиба существенно уменьшается, поскольку $J \sim h^3$.

Для экономии материала используют пустотелые балки. Такие балки значительно легче цельных, а их осевой момент сопротивления [см. (15.36)] остается достаточно большим. На практике используют фермы — относительно легкие жесткие конструкции, высота которых, в значительной степени определяющая момент сопротивления, может достигать нескольких метров (рис. 15.15). Примером достаточно жесткой конструкции может служить также подвесной мост (рис. 15.16). Необходимая жесткость такого моста обеспечивается комбинацией тросов и вертикальных стяжек. Рекордную длину 3910 м имеет мост, соединяющий два острова в Японии. Длина его центрального пролета L составляет 1990 м при высоте опор $H = 297$ м.

Кручение валов. Деформации сдвига возникают при кручении валов машин и механизмов, когда вращательное усилие передается от одной части механизма к другой.

Если, например, нижнее основание вала, изготовленного в виде круглого стержня радиусом R и длиной l , закрепить, а к верхнему основанию приложить закручивающий момент внешних сил M , то вал деформируется. На рис. 15.17 изображены деформируемый вал и деформация сдвига его элементарного объема. Очевидно, что угол сдвига α зависит от удаления этого объема от оси вала. Касательные напряжения σ_τ , ответственные за деформации сдвига, создают в рассматриваемом сечении момент упругих сил, равный

$$M_{\text{упр}} = \int r df_\tau = \int r \sigma_\tau dS = \int_0^R r G \gamma 2\pi r dr. \quad (15.49)$$

Здесь учтено, что площадь элементарного кольца радиусом r и шириной dr равна $dS = 2\pi r dr$, а $\sigma_\tau(r) = \gamma(r) G$.

Из условия равновесия части вала, находящейся, например, выше от рассматриваемого сечения, следует, что

$$M_{\text{упр}} = M \quad (15.50)$$

и $M_{\text{упр}}$ не зависит от выбора сечения вала.

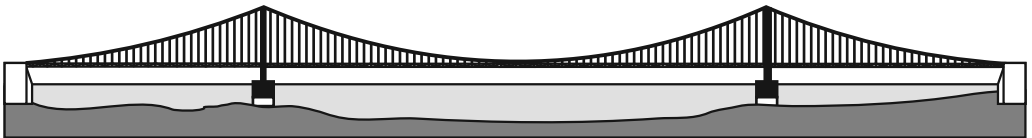


Рис. 15.16

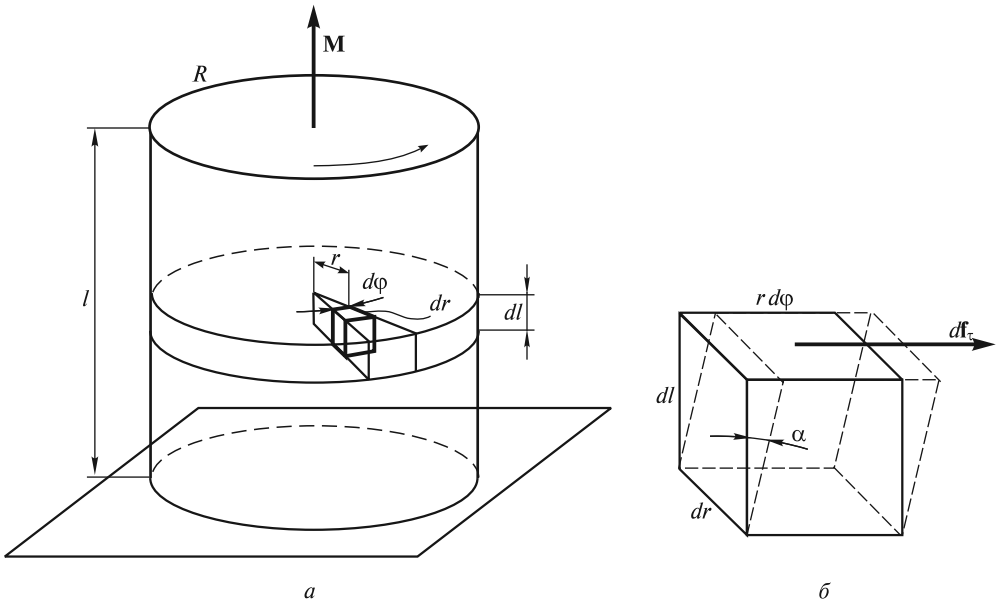


Рис. 15.17

Зависимость $\gamma(r)$ является линейной функцией расстояния r , т. е.

$$\gamma(r) = kr, \quad (15.51)$$

где неизвестный коэффициент k может быть определен из (15.49) с учетом (15.50):

$$M_{\text{упр}} = M = 2\pi Gk \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi GR^4}{2} k. \quad (15.52)$$

Таким образом, сдвиговые деформации

$$\gamma(r) = \frac{2M}{\pi GR^4} r \quad (15.53)$$

пропорциональны моменту внешних сил и обратно пропорциональны четвертой степени радиуса R . Из последнего соотношения легко подсчитать угол кручения φ , на который повернется верхнее основание стержня относительно нижнего. Из равенства

$$l\gamma(R) = R\varphi$$

с учетом (15.53) находим

$$\varphi = l\gamma(R)/R = M/B, \quad (15.54)$$

где $B = \frac{\pi GR^4}{2l}$ — модуль кручения, зависящий от размеров вала и модуля сдвига материала, из которого вал изготовлен.

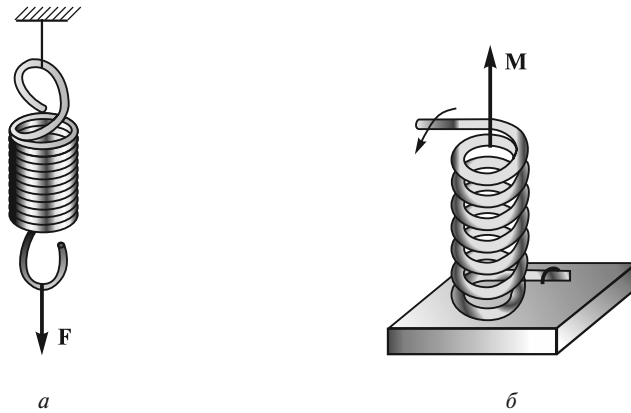


Рис. 15.18

Для создания жестких валов необходимо увеличивать их диаметр и сокращать длину. В целях экономии материала валы часто делают пустотелыми, обеспечивая при этом высокую жесткость вала.

В ряде случаев, наоборот, используют валы, изготовленные в виде тонких нитей, как, например, нити подвеса крутильных весов, использовавшихся Ш. Кулоном в опытах по исследованию электростатического взаимодействия и П. Н. Лебедевым — в опытах по измерению давления света. В этих опытах тонкие кварцевые нити закручивались на заметные углы под действием ничтожно малых моментов сил, что обеспечивало высокую чувствительность крутильных весов.

Отметим, что во многих практически важных случаях различные строительные конструкции (балки, фермы и др.) должны обладать достаточной сопротивляемостью к изгибу и кручению. Примерами таких конструкций являются железнодорожный рельс, балка двутаврового сечения, швеллер и др.

При растяжении пружины одновременно могут возникать деформации как растяжения, так и сдвига. Пружины с малыми углами наклона витков к горизонтали (рис. 15.18, *a*) при их растяжении вдоль оси, в отличие от стержней, испытывают деформации сдвига. Под действием силы F такая пружина удлиняется на величину $\Delta l = F/k_1$, при этом коэффициент жесткости k_1 зависит от диаметра проволоки d , числа витков n , диаметра витка D :

$$k_1 = \frac{Gd^4}{8nD^3}. \quad (15.55a)$$

При закручивании пружины вокруг оси, когда к ее торцевому сечению прикладывается момент внешних сил M (рис. 15.18, *b*), витки пружины испытывают деформации изгиба. В этом случае угол закручивания $\varphi = M/k_2$, где коэффициент пропорциональности

$$k_2 = \frac{Ed^4}{32nD}, \quad (15.55b)$$

как и при растяжении пружины, зависит от диаметра проволоки d , числа витков n и диаметра витка D .

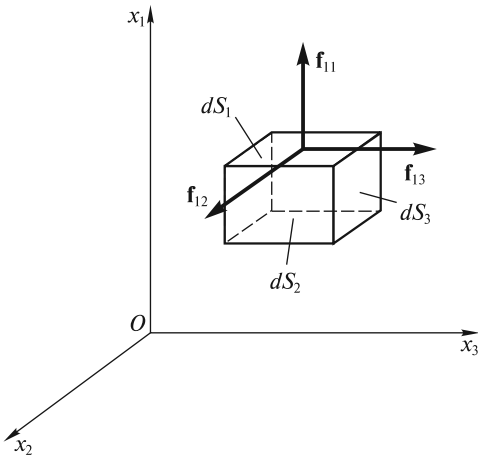


Рис. 15.19

Понятие о тензоре напряжений. Зная упругие свойства тел, мы всегда можем рассчитать деформации, возникающие под действием заданных сил. Основная идея таких расчетов сводится к следующему.

Под действием внешних сил в теле возникают напряжения. Эти напряжения действуют на элементарный объем через ограничивающую его поверхность. На рис. 15.19 изображена одна нормальная f_{11} и две тангенциальные силы f_{12} и f_{13} , действующие на верхнюю грань кубика. Модули этих сил равны

$$\begin{aligned} f_{11} &= \sigma_{11} dS_1; & f_{12} &= \sigma_{12} dS_1; \\ f_{13} &= \sigma_{13} dS_1. \end{aligned} \quad (15.56)$$

Здесь индексы указывают на то, что силы приложены к площадке, перпендикулярной оси Ox_1 , и действуют в направлении оси Ox_1 (σ_{11} — нормальное напряжение) и осей Ox_2 и Ox_3 (σ_{12} , σ_{13} — соответствующие тангенциальные напряжения).

Аналогично, но с другими индексами, записываются модули сил, приложенных к площадкам dS_2 и dS_3 . Сила, действующая на произвольно ориентированную площадку dS , определяется девятью величинами σ_{ij} , которые составляют *тензор напряжений*. С помощью этого тензора можно рассчитать силу, действующую на элементарный объем твердого тела. В абсолютно упругих телах деформации пропорциональны соответствующим напряжениям. Таким образом, сложные деформации таких тел описываются системой линейных дифференциальных уравнений, связывающих компоненты тензора деформаций и тензора напряжений. Упругие свойства изотропных сред представлены, как правило, коэффициентом Пуассона μ (15.4) и модулем всестороннего сжатия K (15.29). Анализ такой системы уравнений позволяет не только рассчитать деформации тела, но и ответить на вопрос, устойчивы эти деформации или нет.

Устойчивость упругого равновесия. В качестве примера рассмотрим задачу о потере устойчивости стержня при его продольном сжатии силой F (рис. 15.20).

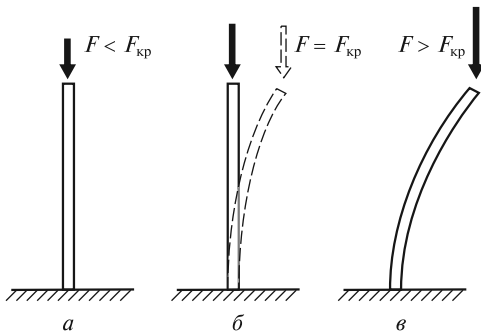


Рис. 15.20

Если сила мала, то стержень находится в устойчивом равновесии, так как при малом случайном отклонении от вертикали он возвращается в вертикальное положение (ситуация *a*). При $F = F_{кр}$ наступает состояние безразличного равновесия: прямолинейная форма еще устойчива, но устойчивым уже будет и изогнутое состояние стержня (штриховые линии на рис. 15.20, *б*). Наличие двух положений равновесия называется

ся бифуркацией. При $F > F_{кр}$ устойчивым будет лишь искривленное положение стержня (ситуация ϵ). Однако в этом случае в нем возникают большие изгибы и напряжения.

Задача об изгибе стержня при продольном сжатии была решена в XVIII в. выдающимся математиком Л. Эйлером. Рассчитаем, следуя Эйлеру, значение критической силы $F_{кр}$ и форму изогнутого стержня, закрепленного в шарнирах, как показано на рис. 15.21, a . Для этого воспользуемся уравнением (15.46), в котором вместо момента поперечной силы $F(l - x)$ для произвольного сечения $x = \text{const}$ следует записать момент сдвигивающей силы в виде $M = Fu$. Тогда уравнение (15.46) примет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{Fu}{EJ}. \quad (15.57)$$

Если обозначить $q^2 = \frac{F}{EJ}$ и обратить внимание на то, что уравнение (15.57) аналогично уравнению гармонических колебаний, то можно записать

$$u(x) = u_0 \sin(qx + \Phi). \quad (15.58)$$

Из граничного условия $u(0) = 0$ следует, что $\Phi = 0$. Из другого граничного условия $u(l) = 0$ следует

$$\sin ql = 0, \text{ или } q_n = \frac{n\pi}{l}; \quad n = 1, 2, 3... \quad (15.59)$$

Каждому значению q_n соответствует своя конфигурация изогнутого стержня, представляющая собой синусоиду, имеющую n полуволн. Эти конфигурации возникают при соответствующих значениях сил, равных

$$F_n = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (15.60)$$

При $n = 1$ (рис. 15.21, δ) формула (15.60) дает значение критической силы

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (15.61)$$

Эта формула была получена Эйлером и носит его имя.

Другие искривленные формы равновесия ($n = 2, 3...$) являются неустойчивыми, однако они могут быть реализованы, если стержень дополнительно закрепить шарнирными опорами в сечениях, где $u = 0$ (рис. 15.21, ϵ).

Полученный результат имеет большое практическое значение. В силу неустойчивости стержней при их сжатии толкающие рычаги и штоки в машинах

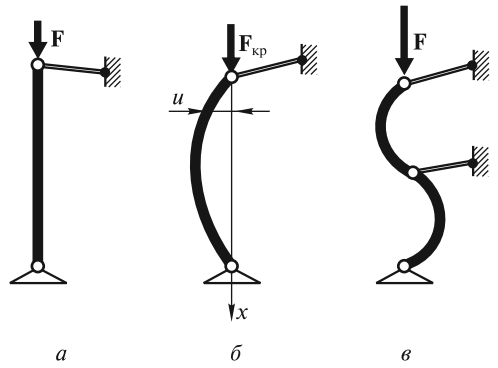


Рис. 15.21

делают по возможности короче и большого сечения, в то время как тянущие штоки, имеющие большой запас прочности на разрыв, могут быть и не очень толстыми. По аналогии легко понять, что герметичные емкости, испытывающие нагрузку на разрыв (например, паровые котлы), делают более тонкостенными, чем емкости, подверженные сжатию (оболочки батискафов, подводных лодок и пр.)

Энергия упругих деформаций. При деформации внешние силы совершают работу. Эта работа в общем случае идет на увеличение потенциальной энергии и на нагревание тела. Так, если мы будем пытаться переломить проволоку, то место ее многократного изгиба может сильно нагреться, прежде чем проволока переломится.

В реальных телах возникающие внутренние напряжения зависят не только от величины деформаций, но и от их скорости. Поэтому работа против таких сил, называемых силами «внутреннего трения», идет на нагревание тела. С этими силами и связаны пластические деформации, когда не выполняется закон Гука и существуют остаточные деформации при прекращении внешнего воздействия.

Вычислим работу, затрачиваемую на малую деформацию элемента объема тела. При растяжении на величину dx уже деформированного кубика (рис. 15.22) элементарная работа

$$dA_\epsilon = f dx = \sigma l^3 d\epsilon. \quad (15.62)$$

Здесь учтено, что $\epsilon = \Delta l/l$, а $d\epsilon = d(\Delta l)/l = dx/l$. Поскольку $\sigma(\epsilon)$ — нелинейная функция деформаций (см. рис. 15.7), то полная работа, затрачиваемая на приведение тела в деформированное состояние, равна

$$A_\epsilon = l^3 \int_0^\epsilon \sigma(\epsilon) d\epsilon. \quad (15.63)$$

По аналогии, работа при сдвиге может быть рассчитана по формуле:

$$A_\gamma = l^3 \int_0^\gamma \sigma_\tau(\gamma) d\gamma, \quad (15.64)$$

где γ — деформация сдвига, связанная с углом сдвига α соотношением (15.2).

На рис. 15.23 работа A_ϵ численно равна площади под кривой $\sigma(\epsilon)$. Опыт, однако, показывает, что если деформации выйдут за область упругости, то

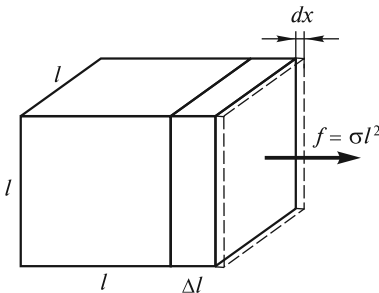


Рис. 15.22

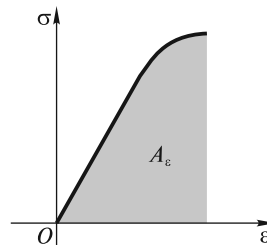


Рис. 15.23

при снятии внешних нагрузок в теле будут существовать остаточные деформации $\epsilon_{\text{ост}}$ (рис. 15.24). Чтобы их устранить, надо приложить сжимающую силу ($\sigma < 0$). Такая неоднозначность деформаций в зависимости от приложенных напряжений носит название *упругого гистерезиса*. При периодически повторяющихся деформациях диаграмма $\sigma(\epsilon)$ будет иметь вид замкнутой кривой, которая называется *петлей гистерезиса*. Площадь этой петли, в соответствии с законом сохранения энергии, равна количеству теплоты, идущей на нагревание тела. При $\sigma \leq \sigma_y$ (см. рис. 15.7) гистерезис отсутствует. На практике детали механизмов, испытывающие многократные, периодически повторяющиеся деформации, делают из материалов с большим пределом упругости σ_y . Так, для закаленной пружинной стали этот предел имеет очень большое значение и составляет около 0,8 ГПа. По этой причине, например, пружины клапанов двигателей делают из закаленной стали.

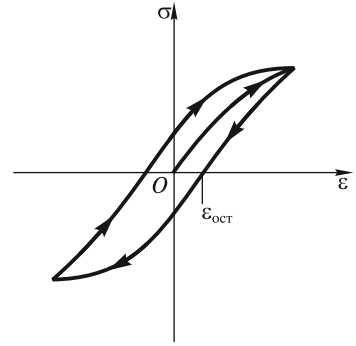


Рис. 15.24

На линейном участке, где $\sigma = E\epsilon$, $\sigma_\tau = G\gamma$, интегралы (15.63) и (15.64) легко вычисляются:

$$A_\epsilon = l^3 E \int_0^\epsilon \epsilon d\epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon^2 l^3; \quad (15.65)$$

$$A_\gamma = l^3 G \int_0^\gamma \gamma d\gamma = \frac{1}{2} G \gamma^2 l^3. \quad (15.66)$$

В этом случае работа затрачивается только на увеличение потенциальной энергии упругой деформации. В единице объема деформированного тела запасается энергия

$$w_\epsilon = \frac{A_\epsilon}{l^3} = \frac{1}{2} E \epsilon^2; \quad w_\gamma = \frac{A_\gamma}{l^3} = \frac{1}{2} G \gamma^2. \quad (15.67)$$

Величина w_ϵ называется объемной плотностью энергии при деформации растяжения, а w_γ — при деформации сдвига.

ЛЕКЦИЯ 16

Под действием внешних сил в жидкости и газах, как и в твердых телах, могут возникать внутренние напряжения. Рассматривая жидкости и газы как сплошные среды, мы отметим, что жидкости, не имея определенной формы, сохраняют практически неизменным свой объем. Газы же не имеют ни определенной формы, ни фиксированного объема.

В жидкости (далее этот термин будет использоваться и для газов, за исключением только отдельно оговариваемых случаев) при сжатии силы отталкивания между молекулами могут быть весьма значительными. По этой причине говорят не о растягивающих и сдвиговых напряжениях σ_{ij} , а о давлениях $p_{ij} = -\sigma_{ij}$ как об отрицательных напряжениях. Совокупность давлений p_{ij} , действующих на площадки, перпендикулярные осям координат и ограничивающие кубический элемент жидкости, образует *тензор давлений*.

Опыт показывает, что при медленном относительном перемещении двух прилегающих слоев жидкости тангенциальные напряжения p_{ij} ($i \neq j$) являются незначительными. В этом можно убедиться, приведя в движение тело, плавающее на поверхности жидкости, с помощью сколь угодно малой силы. Поэтому следует принять, что в состоянии покоя тангенциальные напряжения p_{ij} равны нулю.

Жидкость и газ в состоянии равновесия. Условия равновесия. Закон Паскаля. Из условий равновесия любого элементарного объема покоящейся жидкости следует, что

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p, \quad (16.1)$$

где давление p возникает вследствие воздействия соседних элементов жидкости и является скалярной величиной.

Заметим, что соотношения (16.1) справедливы независимо от того, действуют на элементарный объем какие-либо массовые силы (тяжести, инерции) или нет. С уменьшением объема массовые силы убывают пропорционально объему элемента жидкости, а силы давления — пропорционально площади его поверхности. В силу этого рассматриваемый элементарный объем всегда можно выбрать столь малым, чтобы массовыми силами можно было пренебречь. Условие (16.1) автоматически обеспечивает не только равенство нулю суммы сил давления, приложенных к поверхности данного объема, но и равенство нулю суммарного момента этих сил.

Для доказательства условия (16.1) рассмотрим неподвижную жидкость в цилиндрическом сосуде с площадью основания S_1 , закрытом сверху поршнем (рис. 16.1, левый сосуд). Если надавить на поршень с силой \mathbf{F}_1 , то в жидкости будут созданы внутренние напряжения (давления). Рассмотрим условия равновесия элементарного объема жидкости, имеющего форму кубика. На единицу его поверхности будет действовать сжимающая сила $\mathbf{f}_{ii} = -p_{ii}\mathbf{n}_i$, направленная противоположно нормали \mathbf{n}_i к i -й поверхности (на рис. 16.1 указаны лишь две силы). Поскольку силы, действующие на противоположные грани кубика, равны

по величине, то $p_{11} = F_1/S_1$. Равенство давлений p_{11} и p_{22} следует из условия равновесия половины кубика, изображенного на фрагменте. Действительно, $f_{11}\Delta S = f_{22}\Delta S = F_n/\sqrt{2}$, поэтому $p_{22} = p_{11}$. Ясно, что и при произвольной ориентации кубика силы давления, действующие на его грани, будут одинаковы по величине. Если принять, что никакие внешние силы, кроме силы давления поршня, на жидкость не действуют, то из условий равновесия элементарных объемов в различных точках жидкости получим, что всюду внутри объема жидкости

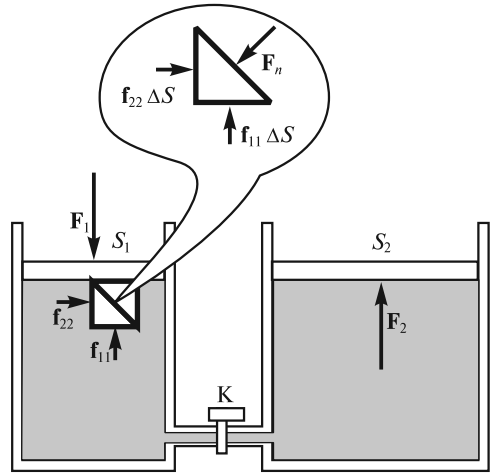


Рис. 16.1

$$p_{ii} = p = F_1/S_1. \quad (16.2)$$

Таким образом, *давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем оно одинаково передается по всему объему покоящейся жидкости (закон Паскаля).*

Если рассмотренный сосуд соединить при помощи трубки с другим цилиндрическим сосудом с площадью основания S_2 , то при открывании крана К внутренние напряжения в соответствии с законом Паскаля передадутся во второй сосуд (рис. 16.1). На поршень, закрывающий этот сосуд, жидкость будет давить вверх с силой

$$F_2 = pS_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2. \quad (16.3)$$

Если $S_2 > S_1$, то развиваемое усилие $F_2 > F_1$. Этот выигрыш в силе используется во многих гидроприводных устройствах (гидроприводах): в приводе ковша экскаватора, рулей ракет и самолетов. На этом же принципе работают гидравлические пресс и домкрат, гидравлические тормозные системы автомобилей и т.д.

В СИ за единицу давления принимается паскаль. В технике в качестве единицы давления используется техническая атмосфера: $1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$.

Жидкость в поле внешних сил. Рассмотрим напряжения, возникающие в жидкости, находящейся в поле внешних сил (сил тяжести, инерции и др.).

Пусть к элементу жидкости объемом $dV = dx dy dz$ приложена внешняя сила $\mathbf{f}dV$ (\mathbf{f} — плотность силы, т.е. сила, приходящаяся на единицу объема жидкости, рис 16.2). В результате возникающих внутренних напряжений на нижнюю грань кубика с координатой x и площадью $dy dz$ в положительном направлении оси x действует сила давления $p(x, y, z) dy dz$, а на верхнюю грань — $p(x + dx, y, z) dy dz$. При равновесии кубика, очевидно, необходимо, чтобы выполнялось равенство:

$$p(x, y, z) dy dz - p(x + dx, y, z) dy dz + f_x dx dy dz = 0. \quad (16.4a)$$

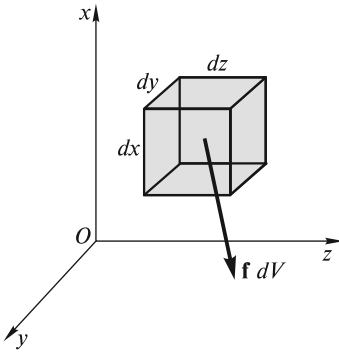


Рис. 16.2

Аналогичные по смыслу равенства должны быть записаны и для двух других направлений (вдоль осей координат Oy и Oz):

$$p(x, y, z)dx dz - p(x, y + dy, z)dx dz + f_y dx dy dz = 0; \quad (16.4б)$$

$$p(x, y, z)dx dy - p(x, y, z + dz)dx dy + f_z dx dy dz = 0. \quad (16.4в)$$

Разделив левые и правые части записанных выше равенств на элементарный объем, получаем условия равновесия в виде дифференциальных уравнений

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + f_x = 0; \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y = 0; \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z = 0. \quad (16.5)$$

Из уравнений (16.5) следует, что давление не остается постоянным и изменяется в тех направлениях, вдоль которых действует внешняя сила. Если ввести вектор градиента давления

$$\text{grad } p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (16.6)$$

где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z — единичные векторы вдоль осей координат, то уравнения (16.5) можно записать в более компактном векторном виде

$$-\text{grad } p + \mathbf{f} = 0. \quad (16.7)$$

В соответствии со смыслом введенного в предыдущих лекциях вектора градиента скалярной величины из (16.7) следует, что давление наиболее быстро нарастает в направлении действия внешней силы \mathbf{f} , а в перпендикулярных направлениях остается постоянным. Таким образом, можно говорить о поверхностях равного давления, нормаль к которым в каждой точке совпадает с направлением действующей в этой точке внешней силы. Несложно рассчитать распределение давлений по объему жидкости, если принять во внимание, что компоненты внешней силы \mathbf{f} выражаются через производные скалярной функции координат $p(x, y, z)$. Это означает, что сила \mathbf{f} — потенциальная и, следовательно, может быть выражена через потенциальную функцию U (потенциальную энергию единицы объема жидкости во внешнем поле) следующим образом:

$$\mathbf{f} = -\text{grad } U. \quad (16.8)$$

Подставив (16.8) в (16.7), получим

$$\text{grad}(p + U) = 0, \text{ или } p + U = \text{const}. \quad (16.9)$$

Константа в (16.9) определяется из условия нормировки потенциала.

Жидкость в поле силы тяжести. Пусть несжимаемая однородная жидкость (например, вода) находится в поле силы тяжести $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, плотность жидкости

$\rho = \text{const}$. Для расчета распределения давлений удобно направить ось Ox вдоль силы тяжести, совместив начало оси со свободной поверхностью жидкости. Поскольку потенциальную функцию можно записать в виде $U(x) = -\rho gx$ [нормировка потенциала такова, что $U(0) = 0$], то распределение давлений по глубине находят из соотношения

$$p(x) - \rho gx = \text{const}. \quad (16.10)$$

Константу определяют из условия равенства давления на поверхности воды атмосферному давлению p_0 . Следовательно,

$$p(x) = p_0 + \rho gx. \quad (16.11)$$

Если принять атмосферное давление $p_0 \approx 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³, то из (16.11) легко подсчитать, что с увеличением глубины на каждые 10 м ($\Delta x = 10$ м) давление увеличивается на величину атмосферного давления ($\Delta p = p_0$). Важно отметить, что возрастание давления с глубиной не зависит от формы сосуда, в который налита жидкость. Яркой иллюстрацией справедливости этого утверждения является равенство уровней жидкости в двух сообщающихся сосудах произвольной формы (рис. 16.3). Действительно, равенство двух горизонтальных сил давления, обеспечивающих равновесие кубика жидкости в нижней части сообщающихся сосудов, возможно лишь при равенстве высот столбов воды в обоих сосудах.

Модифицируем эксперимент с сообщающимися сосудами. Пусть оба колена U-образного сосуда (рис. 16.4) разделены подвижной перегородкой П, при этом правое колено заполнено водой, а левое — ртутью, плотность которой ρ_1 более чем в 10 раз превышает плотность воды ρ ($\rho_1 = 13,6\rho$). Очевидно, равновесие в этой ситуации достигается при высоте столба ртути $h_1 = \frac{\rho}{\rho_1} h$, значи-

тельно меньшей высоты h столба воды. Столб ртути высотой $h_1 = 760$ мм уравновешивает давление 10-метрового столба воды, или почти 10-километрового столба атмосферы. Поэтому для измерения атмосферного давления (в мм рт. ст.) используют ртутный манометр, представляющий собой два сообщающихся сосуда, заполненных ртутью. Один из сосудов в виде тонкой трубки запаян сверху, и воздух в нем над поверхностью ртути отсутствует (торричеллиева пустота), а второй сообщается с атмосферой (рис. 16.5).

Если измеряемые давления на 1–2 порядка меньше атмосферного давления, то можно использовать и водяные манометры (см. последующие лекции).

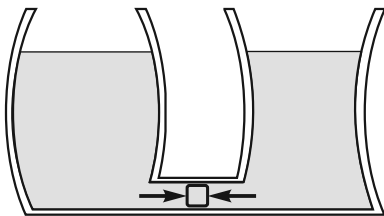


Рис. 16.3

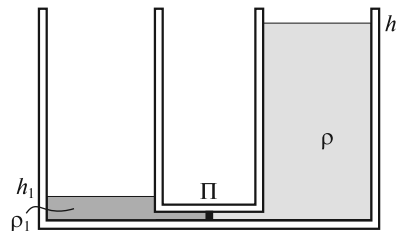


Рис. 16.4

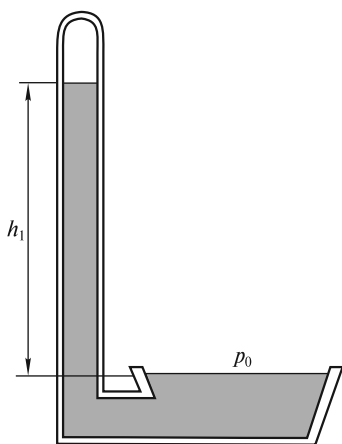


Рис. 16.5

Завершая описание равновесия жидкости, отметим, что в Мировом океане из-за больших глубин формула (16.11) нуждается в уточнении, так как плотность увеличивается с глубиной. За исключением нескольких особых мест, она может меняться в зависимости от географического положения в пределах 2 % от постоянной величины $\rho = 1035 \text{ кг/м}^3$. Эти изменения плотности обусловлены в основном колебаниями температуры и солености воды.

Жидкость в неинерциальных системах отсчета. При ускоренном движении сосуда с однородной жидкостью на частицы жидкости, наряду с силой тяжести, действуют силы инерции. Распределение давлений в покоящейся относительно сосуда жидкости легко определяется из (16.9), где под U следует понимать потенциальную энергию

жидкости в поле сил тяжести и инерции.

Если сосуд с жидкостью движется поступательно с постоянным горизонтальным ускорением \mathbf{a} (рис. 16.6), то потенциальная функция имеет вид

$$U(x, y) = -\rho g x - \rho a y + \text{const}. \quad (16.12)$$

Следовательно, для двумерного распределения давлений $p(x, y)$ с учетом нормировки $p(0, 0) = p_0$ получаем:

$$p(x, y) = p_0 + \rho g x + \rho a y. \quad (16.13)$$

Очевидно, что поверхности равного давления (включая поверхность жидкости), перпендикулярные вектору полной силы $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g} - \rho \mathbf{a}$, будут наклонены к горизонту под углом

$$\alpha = \text{arctg} \frac{a}{g}. \quad (16.14)$$

При свободном падении сосуда (в условиях невесомости) давление во всех точках объема, как это следует из закона Паскаля, одинаково и равно внешнему давлению p_0 . В невесомости вследствие действия сил поверхностного натяжения жидкость приобретает шарообразную форму, при которой площадь поверхности становится минимальной.

Пусть теперь цилиндрический сосуд с жидкостью равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси симметрии. Опыт показывает, что поверхность жидкости искривится так, как показано на рис. 16.7. Не представляет труда определить форму поверхностей равного давления. Поскольку центробежная сила инерции $f_{\text{и}} = \rho \omega^2 r$ является, как и сила тяжести, потенциальной, то потенциальная функция U имеет вид:

$$U(x, r) = -\rho g x - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \text{const}, \quad (16.15)$$

где r — расстояние до оси вращения.

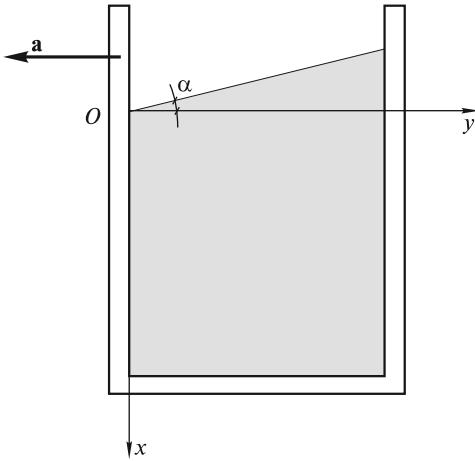


Рис. 16.6

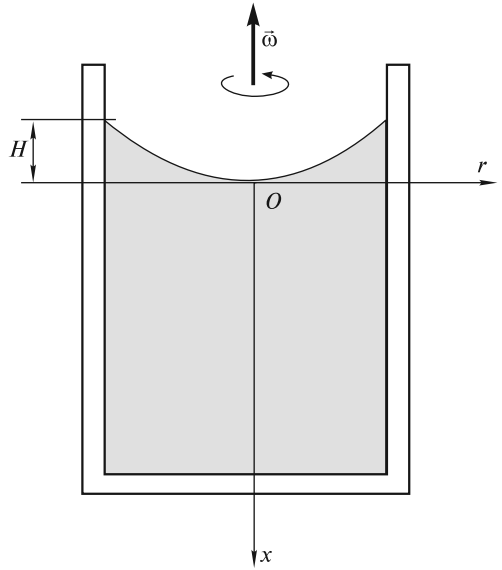


Рис. 16.7

Тогда распределение давлений с использованием (16.9) получается равным

$$p(x, r) = p_0 + \rho g x + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2. \quad (16.16)$$

Легко видеть, что поверхности равного давления являются параболоидами вращения. В частности, форма поверхности жидкости, для которой $p(x, r) = p_0$, описывается уравнением

$$x = -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2. \quad (16.17)$$

Если радиус сосуда равен R , то разность уровней на периферии и в центре составляет

$$H = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}, \quad (16.18)$$

где v — скорость вращающихся частиц жидкости, прилегающих к стенке сосуда.

Заметим, что если сосуд вращать с угловым ускорением, то появится дополнительная составляющая сил инерции, перпендикулярная радиусу и равная $f'_и = \rho r \frac{d\omega}{dt}$. Эта сила не будет потенциальной, поскольку ее работа $A_и$, например, вдоль окружности радиуса r_0 отлична от нуля:

$$A_и = f'_и 2\pi r_0 = 2\pi r_0^2 \rho \frac{d\omega}{dt} \neq 0. \quad (16.19)$$

В силу этого равновесие жидкости невозможно: последняя будет вращаться относительно цилиндра, причем распределение скоростей и давлений можно получить, рассматривая уравнения гидродинамики, в которых должны быть учтены силы вязкости.

Закон Архимеда. Плавание тел. Из повседневной практики известно, что на тела, погруженные в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх. Эта сила является результатом действия сил давления $\mathbf{f}_i = -p\mathbf{n}_i$ (рис. 16.8) и равна

$$\mathbf{F}_A = \sum_i \mathbf{f}_i \Delta S_i = -\sum p_i \Delta S_i \mathbf{n}_i, \quad (16.20)$$

где ΔS_i — площадь элемента поверхности тела; \mathbf{n}_i — единичный вектор, перпендикулярный поверхности (суммирование производится по всем элементам поверхности).

Выталкивающая сила \mathbf{F}_A , называемая *силой Архимеда*, может быть подсчитана при учете распределения давления по глубине (16.11). Она оказывается равной весу вытесненной жидкости. Предоставляя читателю произвести такой подсчет самостоятельно, вычислим ее, исходя из более простых соображений. Извлечем из сосуда тело и дольем ту же жидкость, восстановив ее прежний уровень (рис. 16.9). Если затем мысленно выделить часть жидкости, замещающую извлеченное тело, то на нее действуют те же силы давления, что и на погруженное тело [см. формулу (16.20)]. Их сумма \mathbf{F}_A не только уравнивает силу тяжести ($\mathbf{F}_A = -m\mathbf{g}$, где m — масса вытесненной жидкости), но и имеет равнодействующую, приложенную к центру масс вытесненной жидкости, или к центру объема O .

Центр масс погруженного тела O_1 может не совпадать с центром объема O . Это несовпадение имеет большое значение для устойчивого плавания тел, погруженных в жидкость (в кораблестроении используется термин *остойчивость*). На рис. 16.10 схематично изображено поперечное сечение батискафа,

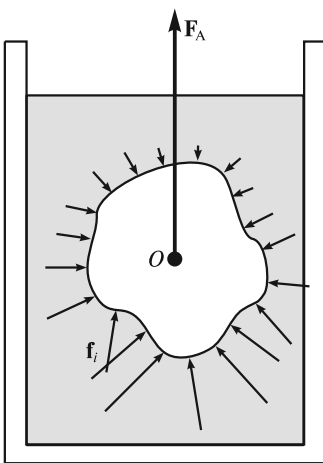


Рис. 16.8

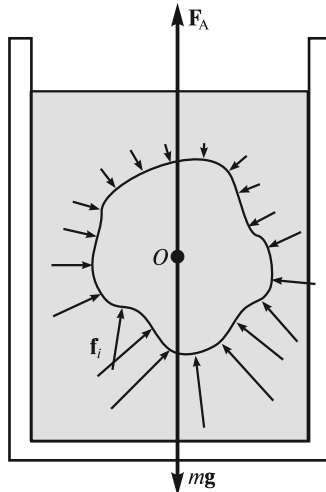


Рис. 16.9

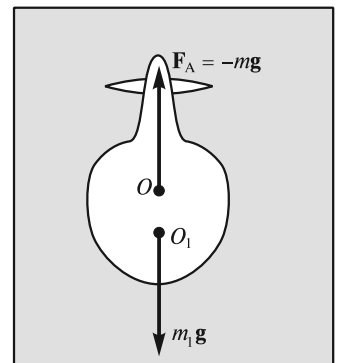


Рис. 16.10

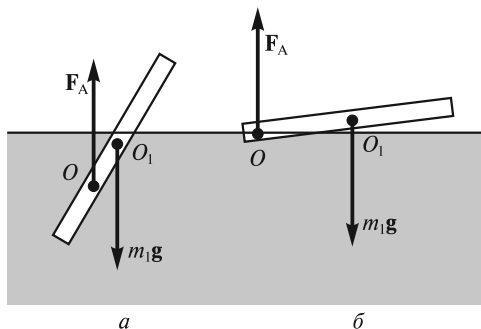


Рис. 16.11

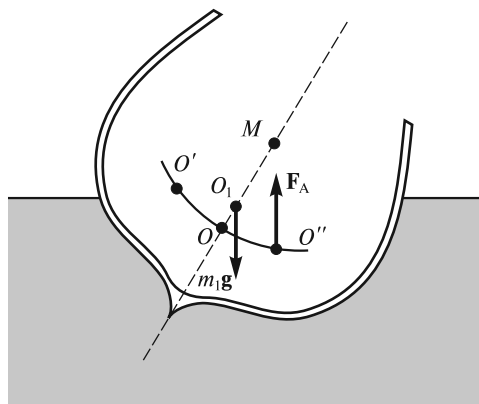


Рис. 16.12

погруженного в воду, при этом его центр тяжести, к которому приложена сила тяжести m_1g (m_1 — масса батыскафа), находится ниже точки приложения архимедовой силы. Естественно, что при боковом наклоне батыскафа момент указанной пары сил будет возвращать его в вертикальное положение.

Для тел, плавающих на поверхности жидкости, центр тяжести расположен, как правило, выше центра объема, погруженного в жидкость, и остойчивость плавания (например, корабля) достигается выбором формы корабля и его загрузки. Хорошо известно, что карандаш никогда не плавает на поверхности жидкости в вертикальном положении. Пара сил, возникающая при неизбежном случайном отклонении карандаша от вертикали, немедленно «укладывает» его на поверхность (рис. 16.11, *a*). Устойчиво будет плавать «горизонтальный» карандаш. При малейшем его наклоне (ситуация *б*) он будет возвращаться в исходное горизонтальное положение. В судостроении форму судна с учетом его загрузки рассчитывают таким образом, чтобы *метацентр* M находился выше центра масс судна (точка O_1). Этот метацентр является центром кривизны кривой $O''O'$, проходящей через центры объемов погруженных частей корпуса корабля, сменяющих друг друга при его боковой качке (рис. 16.12). Из рисунка видно, что метацентр находится на пересечении плоскости симметрии судна с линией действия архимедовой силы. При строительстве судов добиваются того, чтобы расстояние O_1M в несколько раз превышало расстояние OO_1 .

Рассмотрение гидростатики несжимаемой жидкости было бы неполным, если бы мы не коснулись вопроса о силах давления, действующих на дно и стенки сосуда с жидкостью. Это можно сделать, обратившись непосредственно к примерам.

■ **Пример 1.** Если в цилиндрический сосуд с площадью основания S до уровня H налита вода массой m (рис. 16.13, *a*), то давление жидкости на дно сосуда (без учета силы атмосферного давления) приведет к возникновению силы $F = pS = \rho gHS = mg$, равной весу налитой жидкости. Если на поверхность жидкости опустить плавающее тело массой m_1 , то давление на дно жидкости увеличится на величину $\Delta p = \rho g\Delta H$, где ΔH — высота подъема уровня жидко-

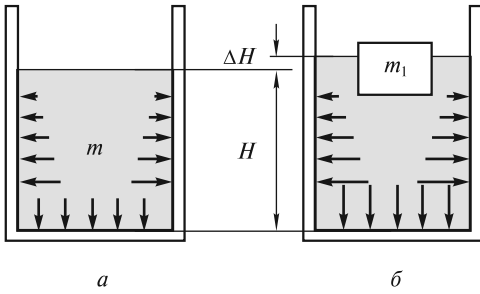


Рис. 16.13

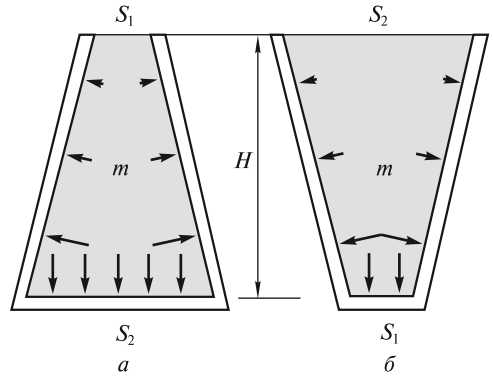


Рис. 16.14

сти (рис. 16.13, б). Дополнительная сила, действующая на дно, $\Delta F = \Delta p S = \rho g \Delta H S$. Поскольку объем цилиндрического слоя $\Delta H S$ равен объему погруженной части тела, то величина ΔF равна силе Архимеда и, естественно, $\Delta F = m_1 g$. Показания весов, на которые поставлен сосуд с водой, при помещении в него плавающего тела возрастут на эту величину.

■ **Пример 2.** Если два легких конических сосуда одинаковой высоты наполнить водой и расположить их так, как показано на рис. 16.14, то в ситуации (а) сила давления на дно сосуда с площадью $S_2 > S_1$ будет больше веса жидкости: $F_2 = \rho g H S_2 > mg$. В ситуации (б), наоборот, $F_1 = \rho g H S_1 < mg$. Между тем при взвешивании сосудов весы покажут одинаковый результат. На первый взгляд, мы столкнулись с парадоксом. Парадокс, однако, разрешается просто, если принять во внимание, что весы измеряют силу давления сосуда на чашку весов, равную той силе, с которой жидкость действует на весь сосуд, включая действие на его наклонные боковые стенки. В обеих ситуациях сумма всех этих элементарных сил одинакова и равна весу жидкости mg .

Равновесие газов. В отличие от жидкостей, плотность газов при их сжатии не остается постоянной. В случае так называемого баротропного распределения массы газа ее плотность является функцией одного только давления: $\rho = \rho(p)$, причем вид этой функции, как будет показано ниже, задается условиями, при которых находится газ. Поэтому в механике сплошных сред в этих случаях оперируют с плотностью силы \mathbf{f}^* , т.е. с силой, приложенной к единице массы, которая связана с силой \mathbf{f} в (16.7) соотношением

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{f}^*. \quad (16.21)$$

Тогда условие равновесия (16.7) примет вид

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathbf{f}^*. \quad (16.22)$$

В левую часть этого равенства входят давление и плотность, являющиеся неизвестными функциями координат, а правая часть обычно известна.

В поле силы тяжести $\mathbf{f}^* = \mathbf{g} = \text{const}$. В этом случае поверхностями равных давлений и плотностей будут горизонтальные плоскости, две из которых $p(x_1) = p_1$ и $p(x) = p$ изображены на рис. 16.15. Если ввести вспомогательную функцию

$$\mathcal{P}(x) = \int_{p_1}^p \frac{dp}{\rho}, \quad (16.23)$$

то (16.22) может быть переписано в виде, аналогичном (16.7):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{d\mathcal{P}}{dx} = f^*. \quad (16.24)$$

Вводя далее для единицы массы потенциальную энергию U^* , с которой внешняя сила связана соотношением

$$f^*(x) = -\frac{dU^*}{dx}, \quad (16.25)$$

получаем уравнение, аналогичное (16.9):

$$\frac{d}{dx}(\mathcal{P} + U^*) = 0, \text{ или } \mathcal{P} + U^* = \text{const}. \quad (16.26)$$

Заметим, что вспомогательная функция $\mathcal{P}(x)$ зависит от верхнего предела p интеграла (16.23), вычисление которого возможно при известной связи между плотностью и давлением. С другой стороны, если найти зависимость $\mathcal{P}(x)$ [с помощью (16.24) или (16.26)], то можно определить функцию $p(x)$ в (16.23), что позволяет получить распределение давлений.

Очевидно, что поверхности равных значений величины \mathcal{P} совпадают с поверхностями равных давлений. В задачах с трехмерным распределением давления и плотности вспомогательной функцией является

$$\mathcal{P}(x, y, z) = \int_{p_1}^{p(x,y,z)} \frac{dp}{\rho}, \quad (16.27)$$

а условие равновесия имеет вид

$$\text{grad } \mathcal{P} = \mathbf{f}^*. \quad (16.28)$$

Поскольку сила \mathbf{f}^* связана с потенциальной энергией единицы массы соотношением

$$\mathbf{f}^* = -\text{grad } U^*, \quad (16.29)$$

то подстановка (16.29) в (16.28) дает условие

$$\text{grad}(\mathcal{P} + U^*) = 0, \text{ или } \mathcal{P} + U^* = \text{const}. \quad (16.30)$$

Следует отметить, что условие равновесия (16.28) является более общим, чем (16.7), так как позволяет рассчитать распределение давлений как в жидкостях, так и в газах.

Распределение плотности и давления в атмосфере. Многочисленные исследования атмосферы, проведенные при помощи аэростатов (см. ниже), ракет и

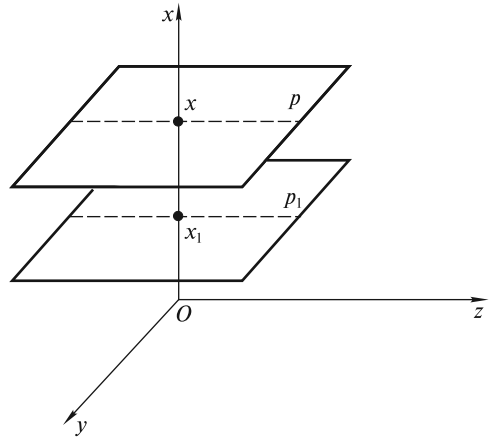


Рис. 16.15

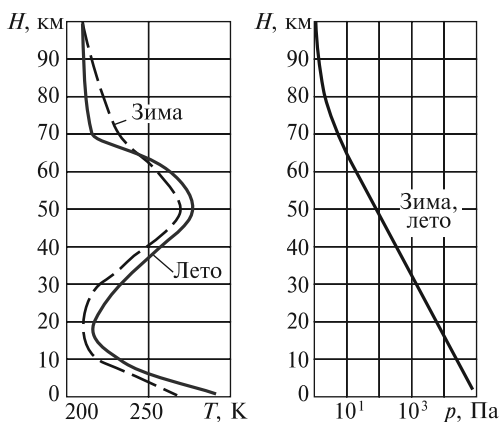


Рис. 16.16

искусственных спутников Земли, показывают, что по мере увеличения высоты давление и плотность монотонно убывают, а температура монотонно убывает лишь в нижнем 10-километровом слое, а в более высоких слоях меняется немонотонно. Параметры атмосферы зависят как от географического положения места, так и от времени года. В качестве иллюстрации к сказанному на рис. 16.16 представлены высотные зависимости параметров среднестатистической атмосферы г. Москвы, полученные в летнее и зимнее время. Если разница в высотных зависимостях температуры атмосферы

достигает десятков градусов, то распределение «зимнего» давления отличается от «летнего» всего лишь на несколько процентов, и на рисунке эта разница неразличима.

Сложная высотная зависимость температуры атмосферы есть результат совместного проявления процессов теплопереноса, инициируемых излучением Солнца. Расчеты показывают, что если бы атмосфера и Мировой океан, называемые жидкой оболочкой Земли, не поглощали бы энергию солнечного излучения, то Земля нагрелась бы на экваторе до 270 К, на Южном полюсе — до 150 К и на Северном полюсе — до 170 К. При таких температурах установилось бы радиационное равновесие: нагретая Земля излучала бы в мировое пространство столько энергии, сколько получает от Солнца. Однако поверхность Земли значительно теплее, а контраст температур между экватором и полюсом намного меньше. Это — результат поглощения солнечной энергии самой атмосферой. Кроме того, атмосфера и океан переносят теплоту от одной области к другой, что также влияет на энергетический баланс.

Поглощение солнечной энергии осуществляется главным образом водяным паром, углекислым газом и озоном, вследствие чего создается «парниковый эффект», приводящий к дополнительному нагреванию поверхности Земли. Поскольку воздух вблизи поверхности более теплый и легкий, чем воздух сверху, то он всплывает вверх (вертикальная конвекция), и нижние слои атмосферы перемешиваются. Поэтому распределение температуры, изображенное на рис. 16.16, является результатом динамического равновесия атмосферы в поле силы тяжести, при котором соблюдается баланс энергии. Радиационное равновесие можно рассчитать, если принять во внимание, что в нижнем слое атмосферы основным физическим фактором, отвечающим за достижение равновесия, является поглощение радиации водяным паром. На больших высотах доминирующим является поглощение углекислым газом и озоном.

Атмосферу Земли можно разделить на отдельные слои. Нижний слой атмосферы, называемый тропосферой, содержит 80 % массы атмосферы, почти весь водяной пар и облака и характеризуется сильным вертикальным перемешиванием. Сверху тропосфера ограничена тропопаузой, где температура атмосферы

меняется очень мало. Выше расположена стратосфера, которая слабо перемешивается. Ее устойчивость обусловлена повышением температуры с высотой в результате радиационного баланса. Возрастание температуры заканчивается в стратопause. Выше находится мезосфера, где температура опять падает. Мезосфера содержит лишь 0,1 % массы всей атмосферы. Выше мезосферы ($H > 100$ км) находится термосфера, в которой температура опять растет с высотой, достигая более 2000 К в период солнечной активности.

Для вычисления изменения атмосферного давления с высотой воспользуемся условием равновесия (16.24) в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -g. \quad (16.31)$$

Для сухого воздуха связь между давлением и плотностью задается уравнением состояния идеального газа

$$p = \rho \frac{RT}{\mu}, \quad (16.32)$$

где универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(К · моль), а молярная масса воздуха $\mu = 0,029$ кг/моль.

Возможность использования этого уравнения обусловлена тем, что влияние влажности на плотность воздуха существенно лишь в тропиках вблизи поверхности Земли, однако даже там ошибка при использовании (16.32) не превышает 2 %. Подставляя значение плотности ρ из (16.32) в (16.31), получаем уравнение

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{RT(x)}, \quad (16.33)$$

которое можно проинтегрировать, если известна функция $T(x)$.

В качестве грубого приближения в (16.33) можно использовать среднее значение температуры $\bar{T} = 255$ К, при этом отклонение максимальной температуры у поверхности или минимальной температуры на высоте $H = 100$ км от среднего значения составляет около 15 %. Интегрируя (16.33), получаем распределение давления в изотермической атмосфере:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g x}{RT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{x}{H_0}\right), \quad (16.34)$$

носящее название *барометрической формулы*. Высота H_0 , на которой давление падает в e раз, называется *приведенной высотой* атмосферы:

$$H_0 = \frac{R\bar{T}}{\mu g} = 7,4 \text{ км}. \quad (16.35)$$

Отметим, что если бы плотность не менялась с высотой ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), то интегрирование (16.31) привело бы к линейному (как для несжимаемой жидкости) закону убывания давления с высотой:

$$p(x) = p_0 - \rho_0 g x = p_0 (1 - x/H_0). \quad (16.36)$$

В этом случае вся атмосфера была бы ограничена высотой $H_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g} = 8,4$ км, что, конечно, противоречит реальной ситуации.

Для практических целей используют стандартные атмосферные параметры и их высотные зависимости. Так, Международная организация гражданской авиации (МОГА) в 1952 г. определила *стандартную атмосферу* до высоты 20 км, а в 1963 г. — до высоты 32 км. Стандартная атмосфера есть условная атмосфера, для которой давление и температура на уровне моря, градиент температуры и другие значения выбраны так, чтобы получить наилучшее согласие с их средними значениями, наблюдаемыми на средних широтах. Эта модель, в частности, широко используется для градуировки альтиметров (приборов для определения высоты летательного аппарата). В этой модели принимается, что до высоты $h = 11\,000$ стандартных геопотенциальных метров над уровнем моря, где температура воздуха равна $-56,5^\circ\text{C}$, градиент температуры dT/dh равен $-0,0065^\circ\text{C} \cdot \text{м}^{-1}$. До высоты 20 000 м $dT/dh = 0$, а выше, вплоть до 32 000 м, градиент температуры равен $+0,001^\circ\text{C} \cdot \text{м}^{-1}$.

Геопотенциальный метр является единицей измерения геопотенциала, определяемого уравнением

$$h = \frac{1}{9,8} \int_0^x g(x) dx. \quad (16.37)$$

Здесь ускорение свободного падения

$$g(x) = g \frac{R_3^2}{(R_3 + x)^2}, \quad (16.38)$$

где R_3 — радиус Земли; g — ускорение свободного падения на среднем уровне моря; x — высота над уровнем моря.

Если бы ускорение g не менялось с высотой, то высота h в геопотенциальных метрах была бы равна геометрической высоте над уровнем моря.

В модели стандартной атмосферы соотношения между давлением p , температурой T , плотностью ρ и геопотенциалом h задаются следующим образом.

1. В двух атмосферных слоях (тропосфере и стратосфере) с постоянным градиентом температур

$$T(h) = T(0) + \frac{dT}{dh} h;$$

$$\frac{p(h)}{p(0)} = \left(\frac{T(0)}{T(0) + \frac{dT}{dh} h} \right)^{\frac{G\mu}{R(dT/dh)}}. \quad (16.39)$$

2. В изотермическом атмосферном слое (тропопаузе), где $dT/dh = 0$ и $T(0) = \text{const}$,

$$\frac{p(h)}{p(0)} = e^{-\frac{\mu Gh}{RT(0)}}, \quad (16.40)$$

и справедлива барометрическая формула.

Здесь $p(0)$ и $T(0)$ — давление и температура у основания каждого слоя; R — универсальная газовая постоянная для сухого воздуха; h — разница геопотенциала между рассматриваемой точкой слоя и его основанием; μ — молярная масса сухого воздуха; коэффициент $G = 9,80665$, если геопотенциал выражен в геопотенциальных метрах. Учет изменения температуры с высотой приводит к высотной зависимости давления (16.39), которая является лучшей аппроксимацией реальной атмосферы, чем барометрическая формула.

Воздухоплавание. Плотность атмосферы на уровне стратопазузы уменьшается приблизительно на 3 порядка, тем не менее это позволяет осуществлять воздухоплавание с применением аэростатов и стратостатов вплоть до высот ~ 50 км.

Аэростаты — летательные аппараты, которые легче воздуха. Подъемная сила возникает вследствие того, что оболочка аэростата наполняется газом, который легче воздуха (водород, гелий, светильный газ). Аэростаты, предназначенные для полетов в стратосферу, называются *стратостатами*. Аэростаты делят на управляемые, или дирижабли, снабженные двигателями, и неуправляемые. Неуправляемые аэростаты используют для свободных полетов по ветру (свободные аэростаты). Они также могут «висеть» неподвижно в атмосфере, если их присоединить тросом к закрепленной на земле лебедке (привязные аэростаты).

Конструкция аэростата (рис. 16.17) включает оболочку 1, содержащую легкий газ, гондолу 2 для размещения экипажа и аппаратуры и подвеску 3, крепящую гондолу к оболочке. Для подъема на большие высоты объем оболочки должен составлять $100\,000$ — $800\,000$ м³. Оболочку аэростата изготавливают из специальных полотнищ и меридиональных усилительных лент.

Подъемная сила 1 м³ водорода у земной поверхности равна приблизительно $11,5$ Н, а более тяжелого, но безопасного гелия — 10 Н. Это означает, что если масса оснащенного аэростата равна 1 т, то в оболочку достаточно закачать > 1000 м³ гелия, и аэростат взлетит.

Избыток подъемной силы уравнивают балластом. Заметим, что оболочка заполняется лишь частично, и это позволяет защитить ее от перенапряжения. При подъеме по мере уменьшения давления атмосферы легкий газ в оболочке расширяется. Хотя подъемная сила каждого кубического метра газа в оболочке и падает, однако подъемная сила оболочки остается примерно постоянной. На некоторой высоте легкий газ займет весь объем оболочки, и последняя примет шарообразную форму. При дальнейшем подъеме часть легкого газа будет выходить через открытый рукав 4, и подъемная сила аэростата будет уменьшаться. Подъем будет продолжаться до тех пор, пока не уравниются вес и подъемная сила аэростата. Максимальная высота полета достигается сбрасыванием балласта.

Для спуска открывается газовый клапан 5 в верхней части оболочки. Подъемная сила падает, и аэростат опускается. Поскольку давление атмосферы начинает расти, то оболочка снова теряет форму шара. При приземлении масса легкого газа всегда меньше

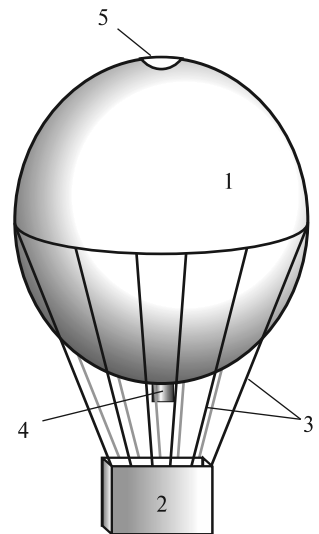


Рис. 16.17

его начальной массы. Чтобы предотвратить удар гондолы о землю из-за падения подъемной силы, необходимо перед посадкой уменьшить массу аэростата. Это достигается выбрасыванием остающегося балласта.

Отметим, что впервые идея полетов в стратосферу на аэростате с герметичной кабиной (стратостате) была предложена в 1875 г. Д. И. Менделеевым. Первые полеты в стратосферу в герметичной гондоле были совершены в 1931—1932 гг. бельгийцем А. Пикаром; он достиг высоты около 16 км. В 1934 г. советский экипаж в составе П. Ф. Федосеенко, А. Б. Васенко и И. Д. Усыскина на стратостате «Осоавиахим-1» поднялся на рекордную в то время высоту 22 км.

С помощью высотных аэростатов осуществляются многочисленные научные исследования. Развитие техники аэростатных исследований связано с оперативностью проведения научных работ и их сравнительно небольшой стоимостью. Круг научных задач, решаемых при этом, очень широк: физика Солнца и межпланетной среды, γ -астрономия и другие астрофизические исследования, физика космических лучей, процессы в атмосфере Земли и др.

В развитых странах расчет, конструирование и производство аэростатов имеют высокую степень компьютеризации и автоматизации. Производство аэростатных оболочек осуществляется «на заказ» под заданную массу полезного груза. Рядовыми являются полеты аэростатов с оболочками нулевого давления с объемами 350 000—850 000 м³ и массой полезного груза 500—900 кг на высотах 38—43 км и продолжительностью полета до 100 ч. Современные аэростаты способны летать на высотах примерно 50 км (рекордная высота составляет 51,7 км), их грузоподъемность достигает нескольких тонн, продолжительность полета 10—15 сут.

Центрифугирование. В соответствии с барометрической формулой плотность изотермической атмосферы убывает с высотой по экспоненциальному закону

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g x}{RT}}. \quad (16.41)$$

Эта формула дает распределение средней плотности атмосферы, состоящей из различных газов. Если говорить о парциальной плотности различных компонент, то плотность более тяжелых кислорода O₂ ($\mu = 0,032$ кг/моль) и азота N₂ ($\mu = 0,028$ кг/моль) убывает с высотой быстрее, чем плотность легкого гелия He ($\mu = 0,004$ кг/моль). Это наводит на мысль о возможности разделения легких и тяжелых газов в силовом поле. Наиболее успешно это можно осуществить в быстро вращающихся вокруг вертикальной оси барабанах (центрифугах), заполненных смесью газов. Для расчета парциального давления и плотности каждого газа в центрифуге воспользуемся равенством (16.30). Потенциальная энергия единицы массы газа в поле центробежной силы и силы тяжести равна

$$U^*(x, r) = -gx + \frac{1}{2} \omega^2 r^2. \quad (16.42)$$

При постоянной температуре $T = \text{const}$

$$\mathcal{P} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{RT}{\mu} \ln \frac{p}{p_0}, \quad (16.43)$$

где p_0 — давление газа в некоторой точке на оси барабана.

Тогда из условия равновесия (16.30) находим:

$$p(x, r) = p_0 \exp \left[\frac{\mu}{RT} \left(-gx + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right) \right]. \quad (16.44)$$

Как видно из (16.44), поверхностями равного давления будут параболоиды вращения, при этом p_0 — это давление на единственном параболоиде вращения, для которого

$$-gx + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = 0. \quad (16.45)$$

Когда барабан современной центрифуги быстро вращается, совершая $\sim 10^5$ об/мин, то центробежная сила превышает силу тяжести в сотни тысяч раз, и

$$p(r) \approx p(0) \exp \left(\frac{\mu \omega^2 r^2}{2RT} \right). \quad (16.46)$$

Смесь на периферии будет обогащаться тяжелой компонентой, так как плотность ρ пропорциональна давлению. Однако при малой молярной массе разделение газов посредством центрифугирования не будет эффективным. На практике центрифуги применяют для разделения газообразных соединений изотопов урана, молекул (например, белковых) и других объектов, являющихся предметом изучения биологии и химии.

Торнадо. Локальное вращение воздуха в атмосфере имеет место и в естественных условиях. Возникает оно вследствие нарушения условий равновесия в атмосфере. Наиболее впечатляющим примером такого движения является *торнадо* (смерч). Торнадо представляет собой близкий к вертикали вихрь, в котором воздух, вращаясь, одновременно движется к оси вихря и вверх вдоль нее. Вблизи от вихря (в ядре) давление сильно понижено, что заставляет воздух в слое высотой несколько десятков метров вблизи поверхности Земли устремляться в нижнюю часть вихря. Достигнув его края, воздух начинает подниматься вверх по спирали, пока в верхней части торнадо не сливается с воздушными потоками.

По своей природе торнадо — это продукт взаимодействия сильной грозы с ветром в тропосфере. Сильная гроза обеспечивает вертикальный подсос воздуха. В самом деле, теплые массы воздуха под действием архимедовой силы могут всплывать вверх. Из-за падения давления движущиеся вверх массы будут расширяться и охлаждаться. В тропосфере температура может уменьшаться с высотой быстрее, чем охлаждается поднимающийся объем воздуха. Это означает, что атмосфера будет неустойчива, и в ней имеет место свободная вертикальная конвекция. Последняя усиливается в грозовую погоду при возрастании вертикального перепада температур. Для того чтобы поднимающийся воздух начал вращаться, необходим боковой ветер, скорость которого увеличивается с высотой. Вертикальный градиент скорости ветра является причиной вращения воздуха вокруг горизонтальной оси (рис. 16.18, а), а наличие вертикального движения воздуха приводит к его движению вверх по спирали (рис. 16.18, б).

Согласно современным представлениям, образование торнадо происходит в две стадии. Вначале начинает закручиваться весь столб восходящего воздуха диаметром около 10—20 км, называемый *мезоциклоном*. Мезоциклон с пониженным давлением на его оси подобен рукаву пылесоса (рис. 16.19). Воздух в

Ветер с возрастающей с высотой скоростью

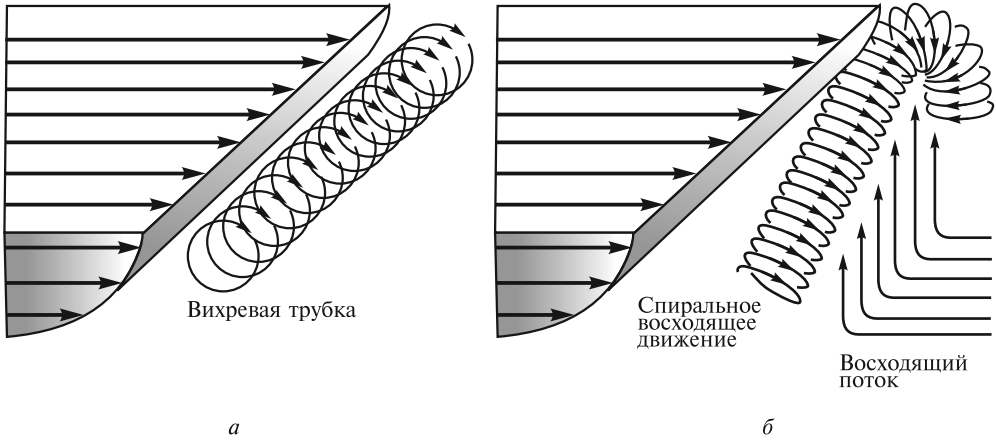


Рис. 16.18

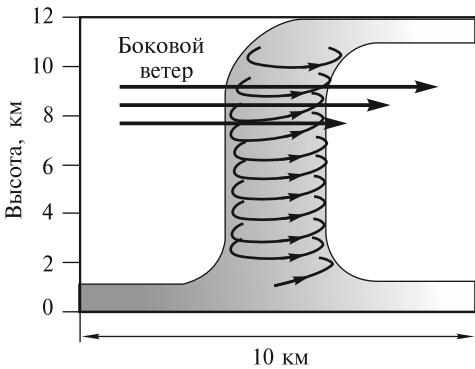


Рис. 16.19

приземном слое начинает засасываться в этот мезоциклон, при этом его скорость под вращающимся столбом достигает 100—120 км/ч.

На второй стадии по не установленным пока причинам внутри мезоциклона, ближе к его периферии, образуется область с диаметром не более 1 км, в которой на высотах порядка нескольких километров происходит усиление вращения (рис. 16.19). Затем это быстрое вращение передается вниз, вихревая трубка вытягивается почти до Земли, «повисая» лишь в нескольких десятках метров над ней. Это и есть торнадо. Скорость воздуха на оси торнадо может достигать 300 км/ч. Из-за взаимодействия сильного ветра с поверхностью Земли торнадо часто ревет, как реактивный двигатель. На протяжении короткой, не более нескольких часов, жизни торнадо обладает огромной разрушительной силой, сметая все на своем пути.

Торнадо зарегистрированы во многих районах мира, однако излюбленное место их обитания — это центральные и юго-восточные области США, а также Австралия. В этих районах весной и несколько реже осенью создаются все условия для возникновения сильнейших гроз, порождающих торнадо. К этим условиям относятся крайне неустойчивое распределение температуры и влажности в атмосфере, резкие холодные атмосферные фронты, обеспечивающие эффективный подъем воздуха, и высотные ветры, способствующие образованию мезоциклонов.

ЛЕКЦИЯ 17

Стационарное течение несжимаемой жидкости. Условие несжимаемости. Равновесие жидкостей и особенно газов, рассмотренное в предыдущей лекции, реализуется далеко не всегда. Обычно жидкость при внешнем воздействии приходит в движение, при этом давление в жидкости и скорость ее частиц могут сложным образом меняться от точки к точке.

Поясним сказанное примером. Подключим горизонтальную стеклянную трубку переменного сечения при помощи резинового шланга к водопроводному крану (рис. 17.1). Если напор воды остается постоянным, то течение воды можно считать стационарным. В этом случае масса воды m , протекающая в единицу времени через сечения с площадями S_1 и S_2 , будет одинаковой, поэтому имеет место равенство

$$m = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2, \quad (17.1)$$

где ρ_1, ρ_2 и v_1, v_2 — плотности и скорости жидкости в этих сечениях.

Если жидкость несжимаема ($\rho_1 = \rho_2$), то условие (17.1) переходит в условие постоянства объема жидкости, протекающей через сечения S_1 и S_2 :

$$V = v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (17.2)$$

(условие несжимаемости).

Следует отметить, что условия (17.1) и (17.2) записаны для случая, когда скорости всех частиц жидкости в поперечном сечении трубки одинаковы.

Для графического изображения течения жидкости удобно использовать *линии тока* — линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с вектором скорости частицы (рис. 17.2). Легко видеть, что в сечении S скорости частиц различны, и объем протекающей жидкости через это сечение не может быть записан в виде (17.2).

Далее отметим, что по мере приближения к малому сечению S_2 частица (элемент жидкости, выделенный на рис. 17.2), деформируясь, ускоряется (в соответствии с 17.2), а при удалении от S_2 — замедляется. Эти ускорения возникают благодаря силам давления $\mathbf{f}_i = -p_i \mathbf{n}$, показанным короткими стрелками. Из рисунка ясно, что по мере приближения к S_2 давление в жидкости падает, а затем возрастает. Это легко проверить, если сравнить уровни h_1 и h_2

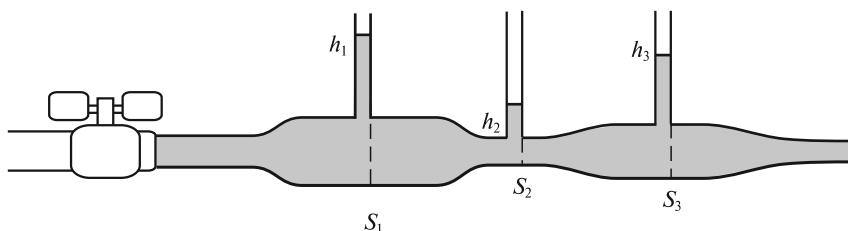


Рис. 17.1

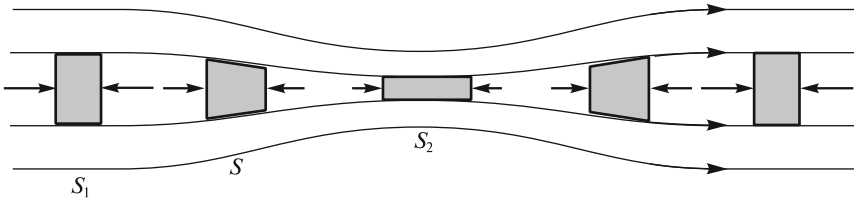


Рис. 17.2

жидкости в манометрических стеклянных трубках, впаянных в горизонтальную трубку вблизи сечений S_1 и S_2 (см. рис. 17.1). Поскольку $p_1 = \rho gh_1$, $p_2 = \rho gh_2$, то $p_1 > p_2$, так как $h_1 > h_2$. На рис. 17.3 изображено распределение скоростей и давлений вдоль оси трубки (оси Ox).

Для количественного описания течения жидкости разобьем поток жидкости по трубе на элементарные *трубки тока*, образуемые семейством линий тока. В поперечном сечении элементарной трубки тока скорости частиц приблизительно одинаковы, и это обстоятельство существенно облегчает анализ течения жидкости.

Найдем связь между скоростью и давлением, примерное распределение которых показано на рис. 17.3. При движении частиц воды вдоль осевой трубки тока сумма сил, приложенных к единице объема [см. (16.5)], обеспечивает его ускорение. В соответствии со II законом Ньютона можно записать:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \quad (17.3)$$

где f_x — плотность силы, Н/м³.

Отметим, что в уравнение (17.3) не входят силы вязкого трения, зависящие от скорости движения элемента жидкости. Впоследствии мы учтем их влияние и выясним условия, при которых ими можно пренебречь. Изменение скорости частицы dv_x и связанное с ним ускорение может иметь место как при стационарном движении частицы от широкого сечения к узкому (или наоборот), так и при нестационарном изменении скорости течения (например, при медленном увеличении или ослаблении напора воды). Поэтому в общем случае скорость частицы является функцией не только координаты x , но и времени t , и

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx, \quad (17.4)$$

где $dx = v_x dt$ — расстояние, пройденное частицей за время dt .

Подставляя (17.4) в (17.3), получаем уравнение Эйлера:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \quad (17.5)$$

описывающее одномерное течение несжимаемой невязкой жидкости. При стационарном течении жидкости по горизонтальной трубе скорость не зависит от времени

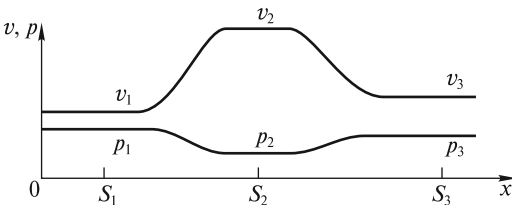


Рис. 17.3

$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0\right)$, внешние силы отсутствуют ($f_x = 0$). В этом случае уравнение Эйлера принимает простой вид:

$$\rho v_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{dp}{dx}. \quad (17.6)$$

Здесь вместо $\frac{\partial}{\partial x}$ используется символ полной производной $\frac{d}{dx}$.

Учитывая, что $v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{v_x^2}{2} \right)$, $\rho = \text{const}$, перепишем (17.6) в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho v_x^2}{2} + p \right) = 0, \text{ или } \frac{\rho v_x^2}{2} + p = \text{const}. \quad (17.7)$$

Равенство (17.7), устанавливающее связь между давлением и скоростью, является частным случаем *уравнения Бернулли*. Константа, входящая в это уравнение, определяется из значений давления и скорости в каком-либо сечении трубки тока.

Используя уравнение (17.7), определим массу жидкости, протекающей через сечение трубки, изображенной на рис. 17.1, в единицу времени (расход). В соответствии с (17.7), давления и скорости в сечениях S_1 и S_2 связаны соотношением:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (17.8)$$

Искомый расход воды определяется равенством (17.1):

$$m = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2. \quad (17.9)$$

Давления $p_1 = \rho g h_1$ и $p_2 = \rho g h_2$ рассчитывают по показаниям h_1 и h_2 манометрических трубок. Из уравнений (17.8) и (17.9) находим:

$$m = \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{S_2^{-2} - S_1^{-2}}}. \quad (17.10)$$

Для измерения расхода воды на практике применяют водомеры, основу которых составляет труба переменного сечения, оснащенная манометрами для измерения давлений p_1 и p_2 в сечениях S_1 и S_2 .

Уравнение Бернулли. Рассмотрим задачу о течении жидкости вдоль произвольных трубок тока, которые могут составлять некоторый переменный угол с горизонтом. Одна из таких криволинейных трубок показана на рис. 17.4. Если ввести криволинейную координату l вдоль оси трубки тока, то при стационарном течении скорость и давление жидкости являются функциями этой координаты. Проектируя силу тяжести на ось l , запишем уравнение Эйлера (17.5) в виде

$$\rho v \frac{dv}{dl} = -\frac{dp}{dl} + \rho g \cos \alpha, \quad (17.11)$$

где v — скорость частиц на оси трубки.

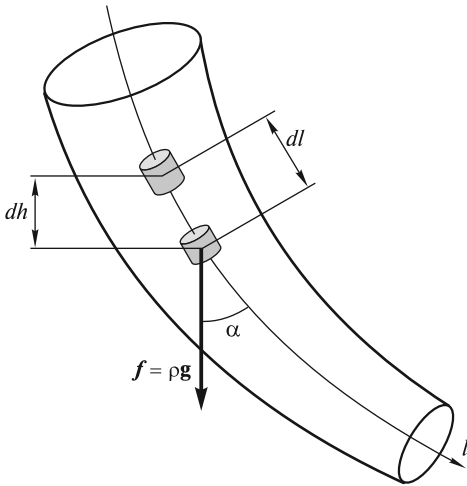


Рис. 17.4

Если элемент жидкости сместится вниз на расстояние dl , то он опустится на высоту $dh < 0$, при этом $\cos \alpha = -\frac{dh}{dl}$. Подставляя значение $\cos \alpha$ в (17.11) и используя тождество $v \frac{dv}{dl} = \frac{1}{2} \frac{d}{dl} v^2$, находим:

$$\rho \frac{d}{dl} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{dp}{dl} + \rho g \frac{dh}{dl} = 0. \quad (17.12)$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) последнее равенство трансформируется к виду

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gh \right) = 0. \quad (17.13)$$

Интегрируя (17.13) вдоль трубки тока, получаем уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gh = \text{const}. \quad (17.14)$$

Это уравнение описывает стационарное течение невязкой (идеальной) несжимаемой жидкости и играет фундаментальную роль в гидродинамических исследованиях. Его также называют интегралом Бернулли, поскольку оно получается интегрированием (17.13). Если нам известны давление p_1 и скорость v_1 в некотором сечении трубки тока, находящемся на высоте h_1 , то в любом другом сечении на высоте h величины p и v связаны соотношением

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1. \quad (17.15)$$

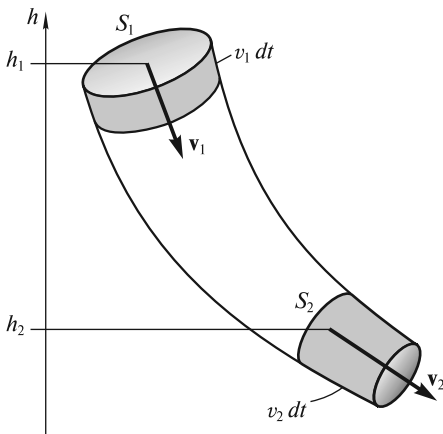


Рис. 17.5

Отметим, что давление p — это *статическое давление*, измеряемое неподвижным манометром (так, как показано на рис. 17.1), либо манометром, движущимся вместе с жидкостью. Величину $\rho v^2/2$ называют *динамическим давлением*, смысл которого будет раскрыт позднее. Заметим, что в покоящейся жидкости равенство (17.15) описывает гидростатическое распределение давлений.

Уравнение Бернулли может быть также получено из условия баланса энергии. В отсутствие сил вязкости приращение суммарной (потенциальной и кинетической) энергии массы воды, находящейся в трубке тока между сечениями S_1 и S_2 (рис. 17.5),

равно работе сил давления. Из рисунка видно, что за время dt элемент жидкости массой $dm = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt$ опустился с уровня h_1 на уровень h_2 , а его скорость увеличилась от v_1 до v_2 . Приращение кинетической энергии равно

$$dT = dm \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3) dt.$$

Изменение потенциальной энергии составляет

$$dU = dm g (h_2 - h_1) = \rho g (S_2 v_2 h_2 - S_1 v_1 h_1) dt.$$

Работа, совершаемая силами давления,

$$dA = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt.$$

Записывая уравнение энергетического баланса в виде

$$dT + dU = dA,$$

получаем уравнение

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2, \quad (17.16)$$

которое идентично (17.15).

Вывод уравнения Бернулли на основе энергетического баланса делает более понятным физический смысл входящих в него слагаемых. Так, статическое давление p численно равно работе, совершаемой силами давления над единичным объемом жидкости; динамическое давление $\rho v^2/2$ есть кинетическая энергия этого единичного объема, а величина $\rho g h$ является его потенциальной энергией в поле силы тяжести.

Применим уравнение Бернулли для решения ряда задач.

Вытекание жидкости через отверстие в сосуде. Пусть жидкость, заполняющая сосуд, вытекает из него под действием силы тяжести через отверстие в боковой стенке с закругленной внутренней кромкой, расположенное вблизи дна сосуда (рис. 17.6). В отверстие вставлена горизонтальная трубка, направляющая вытекающую струю воды. Закругление кромки обеспечивает полное заполнение трубки вытекающей жидкостью.

Разобьем текущую жидкость на трубки тока. Одна из таких трубок изображена на рис. 17.6. Хотя мы и не знаем, как выглядят эти трубки, однако все они начинаются на свободной поверхности жидкости и заканчиваются на выходном торце сливной трубки. Если площадь отверстия трубки S значительно меньше площади свободной поверхности S_0 , то при истечении жидкости ее поверхность будет оставаться горизонтальной и опускаться с некоторой малой скоростью v_0 . Это означа-

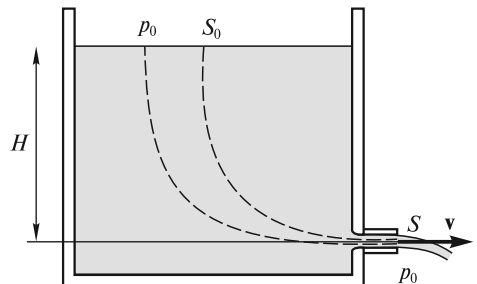


Рис. 17.6

ет, что константа, входящая в уравнение Бернулли (17.14), будет одинаковой для всех трубок тока:

$$\text{const} = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 + \rho g H,$$

где H — высота столба жидкости над сливной трубкой.

В связи с этим скорость истечения жидкости v определяется из уравнения

$$\frac{\rho v^2}{2} + p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 + \rho g H, \quad (17.17)$$

где p_0 — атмосферное давление на свободной поверхности и у сливной трубки.

Поскольку $S \ll S_0$, то из условия несжимаемости (17.2) следует, что $v_0 \ll v$. С учетом этого скорость истечения получается равной

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (17.18)$$

Эта формула носит имя Э. Торричелли. Сразу бросается в глаза, что скорость истечения жидкости из сосуда такая же, как и при ее свободном падении с высоты H . В этом нет ничего удивительного, поскольку вязкостью мы пренебрегли, а работа сил атмосферного давления над жидкостью в трубке тока равна нулю. Поэтому, как и при свободном падении тел в отсутствие сопротивления воздуха, приращение кинетической энергии равно работе силы тяжести:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho g H.$$

Справедливость формулы Торричелли можно легко проверить, если на выходную трубку надеть кусок шланга и вытекающую струю направить вверх под небольшим углом к вертикали (рис. 17.7). Струя поднимется практически до уровня поверхности жидкости. Если же струю направить вертикально вверх, то падающие вниз частицы будут тормозить поднимающиеся, и она не сможет подняться на высоту H .

Интересно отметить, что трубки тока жидкости в сосуде расположены преимущественно ближе к стенке с отверстием, в то время как у противоположной (левой на рис. 17.8) стенки скорость жидкости близка к нулю. Это означает, что на левую стенку действуют силы давления, которые легко подсчитать,

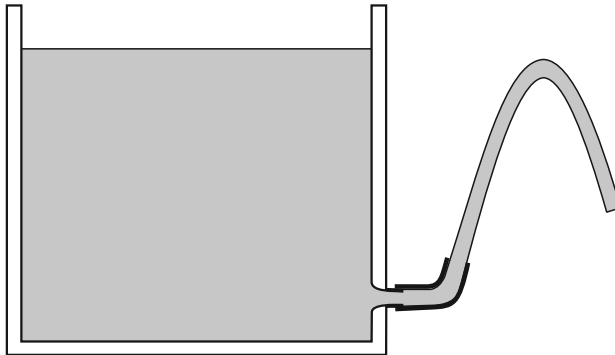


Рис. 17.7

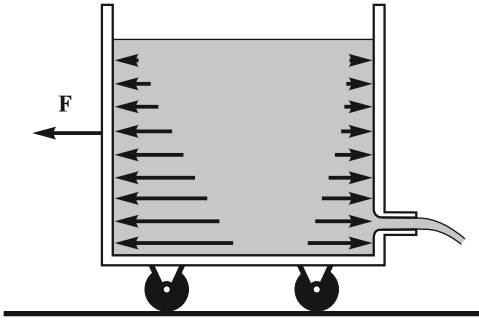


Рис. 17.8

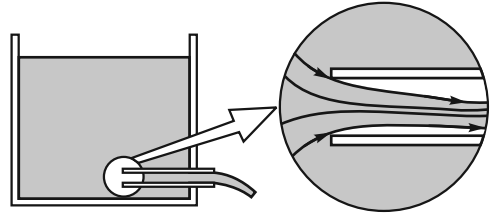


Рис. 17.9

используя линейный закон нарастания гидростатического давления с глубиной. Расчет же сил давления, действующих на правую стенку, требует учета движения жидкости. Однако и без такого расчета ясно, что в трубке тока, примыкающей к правой стенке, давление на каждом уровне будет меньше соответствующего этой глубине гидростатического давления. Это означает, что равнодействующая сил давления, действующих на обе стенки, направлена в сторону, противоположную направлению истечения жидкости. Под действием этой силы, называемой также *реактивной*, тележка с поставленным на нее сосудом может прийти в движение. Величину этой силы легко подсчитать, используя формулу Торричелли. По III закону Ньютона искомая сила равна по величине силе, с которой стенки сосуда действуют на жидкость, вызывая изменение ее импульса в направлении истечения. Поскольку масса жидкости, вытекающей в единицу времени через отверстие с сечением S , равна $\rho v S$, то изменение импульса в единицу времени составит величину $\rho v^2 S$. Поэтому реактивная сила

$$F = \rho v^2 S = 2\rho gHS. \quad (17.19)$$

Эта формула впервые была получена И. Бернулли.

Если бы мы ошибочно приняли, что распределение давлений с глубиной у правой стенки такое же, как у левой, то реактивная сила получилась бы вдвое меньшей:

$$F' = \rho gHS, \quad (17.20)$$

где ρgH — гидростатическое давление на глубине H ; S — площадь отверстия в правой стенке.

Отметим, что можно добиться одинакового распределения давлений у обеих стенок, если конец трубки с острой кромкой отодвинуть от правой стенки вглубь сосуда, как показано на рис. 17.9. В этом случае реактивная сила определяется по формуле (17.20). В (17.19) вместо сечения трубки S надо подставить сечение струи в трубке $S_c = kS$, где коэффициент истечения $k \approx 1/2$. Ясно, что при таком истечении трубка будет заполнена жидкостью приблизительно наполовину.

Реактивную силу можно увеличить, если повысить скорость истечения жидкости. Для этого следует использовать замкнутый сверху сосуд, а над свобод-

ной поверхностью жидкости создать давление $p_1 > p_0$. Тогда скорость истечения получается равной

$$v = \sqrt{2 \left(gH + \frac{p_1 - p_0}{\rho} \right)}, \quad (17.21)$$

а реактивная сила возрастает линейно с повышением избыточного давления $\Delta p = p_1 - p_0$ над свободной поверхностью жидкости.

Гидрорезание. Если создать очень высокое избыточное давление, например, $\Delta p \approx 5000 \text{ атм} = 500 \text{ МПа}$, то скорость истечения воды $v \approx 1000 \text{ м/с}$. Если такую струю направить на какой-либо твердый материал, то его поверхность будет подвержена гидродинамическому давлению $p_d = \rho v^2 / 2 = 500 \text{ МПа}$. Такое огромное давление в ряде случаев может превышать предел прочности σ_m некоторых материалов, и последние будут разрушаться под действием струи.

Со второй половины 80-х годов XX в. получило развитие новое направление в обработке материалов — гидрорезание. В этой технологии водяной нож — высокоскоростная струя воды с диаметром иглы — легко режет материалы толщиной в несколько сантиметров со скоростью резания несколько десятков сантиметров в минуту. Для резки металлов, твердых сплавов, бетона и других материалов в струю добавляют абразивный порошок. Это значительно увеличивает гидродинамическое давление, повышает производительность и возможности гидрорезания.

Сосуд Мариотта. Этот сосуд позволяет обеспечить постоянную скорость истечения жидкости через малое отверстие, несмотря на понижения ее уровня. Для этого в сосуд через герметичную пробку в его горловине вводится трубочка, сообщающаяся с атмосферой (рис. 17.10). Пока уровень жидкости в сосуде выше нижнего конца трубки, скорость истечения через нижнее отверстие определяется по формуле Торричелли

$v = \sqrt{2gh}$, где h — высота нижнего конца трубки над отверстием. Это связано с тем, что при вытекании жидкости из полностью заполненного сосуда давление под пробкой будет меньше атмосферного, воздух будет засасываться в сосуд через трубку, а давление в горизонтальной плоскости, совпадающей с нижним концом трубки, будет равно атмосферному. Скорость вытекания легко регулируется вертикальным перемещением трубки. Если конец трубки находится на уровне отверстия или ниже его, то жидкость не вытекает вовсе, как, например, через верхнее отверстие, изображенное на рис. 17.10.

Дифференциальная форма условия несжимаемости. Понятие о дивергенции вектора. Равенство (17.2), являющееся условием несжимаемости, связывает

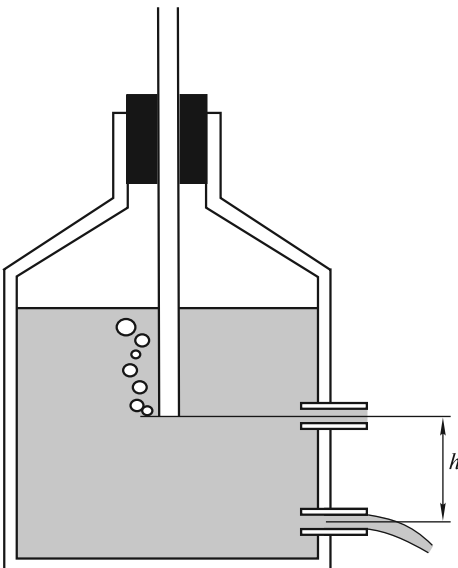


Рис. 17.10

скорости движущейся жидкости в двух различных сечениях. Между тем, как на это неоднократно обращалось внимание в предыдущих лекциях, в физике важно оперировать с равенствами или уравнениями, отнесенными к одной точке пространства.

Для этого рассмотрим деформацию движущегося кубического элемента жидкости. Если его объем через малый отрезок времени δt не изменяется, то сумма диагональных элементов тензора деформации равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

где u_x , u_y и u_z — смещения граней кубика в направлении соответствующих осей координат.

Эти смещения связаны со скоростями движения граней (а точнее, частиц жидкости, находящихся в данный момент на этих гранях):

$$u_x = v_x \delta t, \quad u_y = v_y \delta t, \quad u_z = v_z \delta t.$$

Используя эти равенства, получаем локальное (относящееся к одной точке пространства) условие несжимаемости в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (17.22)$$

Это соотношение называют также *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости.

В физике для описания векторных полей, а в нашем случае речь идет о векторном поле скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, используется понятие *дивергенции* (источка) поля в данной точке пространства. В декартовой системе координат выражение для $\operatorname{div} \mathbf{v}$ имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (17.23)$$

Дивергенция вектора является скалярной функцией координат и времени и легко рассчитывается, если известны компоненты векторного поля (в нашем случае v_x , v_y и v_z).

Условие (17.22) постоянства объема несжимаемой жидкости записывается кратко:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (17.24)$$

Уравнение (17.24) является одним из основных уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости.

Заметим, что имеется множество векторных полей, как, например, электрическое $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$, магнитное $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$ и другие, при описании которых также широко используется понятие дивергенции. Хотя $\operatorname{div} \mathbf{E}$ и $\operatorname{div} \mathbf{B}$ и вычисляются в соответствии с (17.23), определяются они, однако, из других соображений, поскольку в электродинамике не идет речь о движении и деформации элемента материальной среды.

Поясним смысл понятия дивергенции на примере векторного поля скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$. Для этого рассмотрим элементарный объем пространства

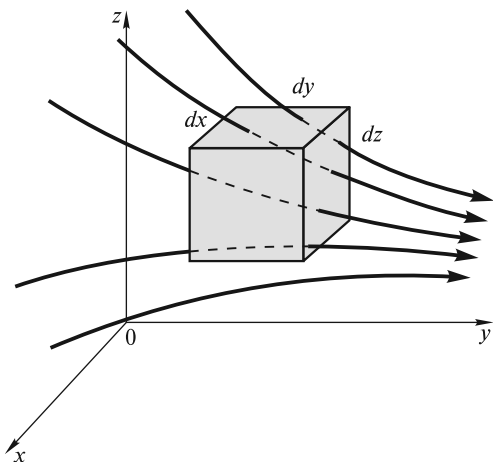


Рис. 17.11

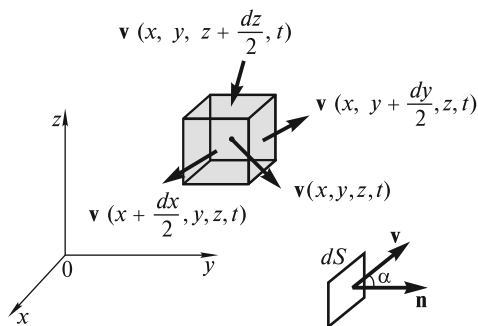


Рис. 17.12

$dV = dx dy dz$ (рис. 17.11) и подсчитаем количество жидкости, втекающей и вытекающей из этого объема за единицу времени.

Введем понятие элементарного потока вектора скорости \mathbf{v} через площадку dS :

$$dQ_v = v dS \cos \alpha = \mathbf{v} d\mathbf{S}, \quad (17.25)$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ — вектор, направленный по нормали \mathbf{n} к элементарной площадке.

Ясно, что поток (17.25) равен объему жидкости, пересекающей площадку dS за единицу времени (рис. 17.12). Он допускает также наглядную геометрическую интерпретацию. В самом деле, в соответствии с определением линий тока, данным в начале этой лекции, их густота характеризует скорость течения. Поэтому величине скорости всегда можно поставить в соответствие количество линий тока, пересекающих единичную площадку, перпендикулярную вектору скорости. Тогда поток dQ_v в (17.25) будет определять число линий тока, пересекающих площадку при ее произвольной ориентации.

Теперь легко подсчитать баланс между втекающей и вытекающей жидкостью для элементарного объема (кубика), изображенного на рис. 17.12. Для этого оценим потоки жидкости через грани кубика. Если нормаль к грани — внешняя, то положительное значение потока будет для вытекающей жидкости, а отрицательное — для втекающей. Если скорость в центре кубика $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ изменяется при приближении к соответствующей грани, то при вычислениях это необходимо учесть. Результирующий поток определится следующим образом:

$$\begin{aligned} dQ_v = & \left[v_x \left(x + \frac{dx}{2}, y, z, t \right) - v_x \left(x - \frac{dx}{2}, y, z, t \right) \right] dy dz + \\ & + \left[v_y \left(x, y + \frac{dy}{2}, z, t \right) - v_y \left(x, y - \frac{dy}{2}, z, t \right) \right] dx dz + \\ & + \left[v_z \left(x, y, z + \frac{dz}{2}, t \right) - v_z \left(x, y, z - \frac{dz}{2}, t \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (17.26)$$

Разделив левую и правую части (17.26) на $dx dy dz$, получим

$$\frac{dQ_v}{dx dy dz} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (17.27)$$

Таким образом, дивергенция вектора скорости численно равна потоку жидкости через поверхность элементарного объема, внутри которого находится рассматриваемая точка, отнесенному к величине этого объема. Если жидкость несжимаема, то, естественно, этот поток должен быть равен нулю (предполагается, что внутри объема нет истоков и стоков жидкости). Графически последнее интерпретируется как равенство количества входящих в объем и выходящих из него линий тока. Это, в свою очередь, означает, что в окрестности точки, где $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, линии тока не прерываются. Поэтому равенство $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и называют уравнением неразрывности.

Из школьного курса физики известно, что силовые линии электростатического поля (аналог линий тока жидкости) прерываются только на зарядах. Поэтому для областей, не занятых зарядами, мы также вправе написать

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \text{ Силовые линии индукции магнитного поля } \mathbf{B} \text{ всегда замкнуты (нет магнитных зарядов), поэтому } \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Уравнения Эйлера для идеальной жидкости. При заданных внешних силах и известных свойствах жидкости можно записать уравнение движения единичного объема несжимаемой невязкой жидкости:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} p, \quad (17.28)$$

где оператор grad (градиент) определяется как

$$\operatorname{grad} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (17.29)$$

(см. лекцию 5).

Уравнение (17.28) записано в векторном виде и является обобщением одномерного уравнения (17.3).

Расписывая (17.28) для трех проекций скорости, получаем систему уравнений, аналогичных (17.5):

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (17.30)$$

Если эти уравнения дополнить условием несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

то мы получим полную систему уравнений с четырьмя неизвестными функциями координат и времени (v_x, v_y, v_z и p). Уравнения (17.30) называются *уравнениями Эйлера* и позволяют, в принципе, рассчитать динамику течения жидкости. С математической точки зрения эта система является нелинейной из-за

наличия членов $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, \dots, v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$. Поэтому интегрирование этих уравнений и нахождение искомым функций представляет подчас весьма сложную задачу даже при использовании мощных ЭВМ. Из (17.30) можно получить уравнение

Бернулли для стационарного течения, когда $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. В дальнейшем мы будем использовать уравнения (17.30) для описания волнового движения жидкости и анализа свойств акустических волн.

В заключение отметим, что система (17.30) часто записывается в более компактном виде с использованием оператора градиента. Каждое из трех уравнений (17.30) имеет вид

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) v_{x,y,z} = f_{x,y,z} - (\text{grad } p)_{x,y,z}.$$

В результате четыре скалярных уравнения для v_x, v_y, v_z и p можно записать в виде двух векторных уравнений:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right] \mathbf{v} = \mathbf{f} - \text{grad } p, \tag{17.31}$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Течение сжимаемой жидкости. При течении сжимаемых жидкостей (газов), особенно с большими скоростями, их плотность может значительно меняться во времени и в пространстве. Ясно, что объем жидкости, вытекающей через поверхность кубика, изображенного на рис. 17.11, может быть не равен объему вытекающей жидкости. Если это так, то масса газа внутри кубика (а с ней и плотность) будет со временем меняться, и уравнение (17.24) станет несправедливым. В этом случае можно записать уравнение неразрывности, которое выводится из условия баланса массы газа. Поток массы газа через площадку $d\mathbf{S}$ будет равен $dQ_m = \rho \mathbf{v} d\mathbf{S}$, а полный поток через поверхность элемента с объемом $dx dy dz$, аналогично (17.27), равен

$$dQ_m = dx dy dz \text{ div } (\rho \mathbf{v}), \tag{17.32}$$

где $\rho \mathbf{v}$ — новое векторное поле.

Если этот поток положительный, то масса внутри элемента $m = \rho dx dy dz$ будет убывать за счет уменьшения во времени плотности ρ . Поэтому, записывая условие баланса массы в виде

$$dx dy dz \text{ div } (\rho \mathbf{v}) = -dx dy dz \frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{17.33}$$

мы получаем (после сокращения на $dx dy dz$) одно из фундаментальных уравнений гидродинамики — *уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (17.34)$$

Следует отметить, что при $\rho = \text{const}$ это уравнение переходит в (17.24). В электродинамике аналогичное уравнение для плотности заряда является математическим выражением универсального закона сохранения заряда и также является фундаментальным.

Динамика сжимаемой жидкости базируется на II законе Ньютона, записанном для единицы массы жидкости. Равнодействующая сил давления и внешних сил создает ускорение единицы массы, поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad}\right) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{f}^*, \quad (17.35)$$

где \mathbf{f}^* — внешняя сила, действующая на единицу массы.

Для определения пяти неизвестных величин (v_x , v_y , v_z , p и ρ) необходимо дополнить (17.35) уравнением неразрывности (17.34) и материальным уравнением, связывающим плотность и давление:

$$\rho = \rho(p). \quad (17.36)$$

Система (17.34)–(17.36) носит название *уравнений Эйлера для сжимаемой жидкости*. На основе этих уравнений решается большое число задач газодинамики.

Воспользуемся уравнением (17.35) и получим уравнение Бернулли. Для этого видоизменим правую часть (17.35), введя вспомогательную функцию \mathcal{P} (16.27) и учтем (16.29), т. е. введем потенциальную энергию единицы массы U^* . Тогда (17.35) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad}\right) \mathbf{v} = -\operatorname{grad}(\mathcal{P} + U^*). \quad (17.37)$$

При стационарном течении $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. В направлении оси трубки тока (вдоль криволинейной координаты l) можно записать

$$v \frac{d}{dl} v = -\frac{d}{dl} (\mathcal{P} + U^*). \quad (17.38)$$

Поскольку потенциальная энергия единицы массы $U^*(l) = U^*(h) = gh + \text{const}$,

а $\mathcal{P}(l) = \int_{p_1(l_1)}^{p(l)} \frac{dp}{\rho}$, то, по аналогии с (17.13), перепишем (17.38) в виде

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{v^2}{2} + \int_{p_1(l_1)}^{p(l)} \frac{dp}{\rho} + gh \right) = 0. \quad (17.39)$$

Интегрируя (17.39) вдоль линии тока, получаем *уравнение Бернулли для стационарного течения сжимаемой жидкости*:

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_1(h_1)}^{p(h)} \frac{dp}{\rho} + gh = \text{const}, \quad (17.40)$$

где h — высота сечения трубки тока с координатой l . Очевидно, что $p(l) = p(h)$, $p_1(l_1) = p_1(h_1)$. Постоянная в (17.40) определяется заданием скорости v_1 и высо-

ты h_1 для фиксированного сечения с координатой l_1 . С учетом этого уравнение (17.40) можно переписать в виде

$$\frac{v^2}{2} + \int_{\rho_1(h_1)}^{p(h)} \frac{dp}{\rho} + gh = \frac{v_1^2}{2} + gh_1. \quad (17.41)$$

Для практического использования уравнения Бернулли необходимо знать связь между p и ρ . В случае несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение (17.41) переходит в (17.15).

Если речь идет о потоке газа (сжимаемой жидкости), то при быстром сжатии (увеличении плотности) он будет нагреваться. Из-за плохой теплопроводности газа теплота не будет успевать уходить из нагретых областей. Поэтому для установления связи $\rho = \rho(p)$ воспользуемся адиабатическим приближением:

$$p/p_1 = (\rho/\rho_1)^\gamma, \quad (17.42)$$

где $\gamma > 1$ — показатель адиабаты.

Такая связь получается из первого начала термодинамики и уравнения состояния идеального газа (16.32) при условии отсутствия теплообмена между нагретой областью и окружающей средой.

Давление в (17.42) возрастает с увеличением плотности быстрее, чем при изотермическом процессе, так как $\gamma > 1$. В курсе молекулярной физики будет показано, что $\gamma = C_p/C_V$ (C_p и C_V — удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно). Для воздуха, состоящего главным образом из двухатомных газов, $\gamma = 1,4$.

Если подставить (17.42) в (17.41) и выполнить простейшее интегрирование, то можно найти распределение давления вдоль трубки тока:

$$p = p_1 \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_1}{p_1} \left[\frac{1}{2}(v^2 - v_1^2) + g(h - h_1) \right] \right\}^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (17.43)$$

Будем считать трубку тока горизонтальной ($h = h_1$), а скорости течения таковыми, что

$$\frac{1}{2}|v^2 - v_1^2| < \frac{1}{\gamma-1} \frac{\gamma p_1}{\rho_1} = \frac{c_1^2}{\gamma-1}, \quad (17.44)$$

где $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ — параметр, имеющий размерность скорости.

Как мы увидим несколько позднее, скорость звука в газе

$$c = \sqrt{\gamma p/\rho}. \quad (17.45)$$

При нормальных условиях ($p = 760$ мм рт. ст., $t = 0^\circ\text{C}$) скорость звука в воздухе $c = 330$ м/с.

При выполнении условия (17.44) правую часть (17.43) можно разложить в ряд:

$$p = p_1 \left\{ 1 - \frac{\rho_1}{p_1} \left(\frac{v^2 - v_1^2}{2} \right) + \frac{1}{2\gamma} \frac{\rho_1^2}{p_1^2} \left(\frac{v^2 - v_1^2}{2} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (17.46)$$

Если скорости течения газа считать малыми ($v, v_1 \ll c_1$), то в (17.46) можно пренебречь квадратичным и более высокими членами разложения. В этом случае распределение давлений соответствует течению несжимаемой жидкости с плотностью $\rho_1 = \text{const}$. Квадратичный член начинает давать вклад в распределение давлений при скоростях потока, соизмеримых со скоростью звука c_1 .

Подставив (17.42) в (17.43), получаем распределение плотности вдоль трубки тока:

$$\rho = \rho_1 \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_1}{p_1} \left[\frac{1}{2} (v^2 - v_1^2) + g(h - h_1) \right] \right\}^{1/(\gamma - 2)}. \quad (17.47)$$

Для горизонтальной трубки тока и при условии (17.44) распределение плотности (17.47) после разложения в ряд примет вид

$$\rho = \rho_1 \left(1 - \frac{v^2 - v_1^2}{2c_1^2} + \dots \right). \quad (17.48)$$

Таким образом, изменение плотности газа необходимо учитывать только при скоростях течения, сопоставимых по порядку величины со скоростью звука, определяемой, как следует из (17.45), давлением и плотностью в этом потоке. Если же скорость течения $v \ll c$, то сжимаемостью газа можно пренебречь.

Распространение возмущений давления и плотности. Если в неподвижной жидкости (или газе) быстро создать в небольшой области избыточное давление Δp , а значит и избыточную плотность $\Delta \rho$, то эти возмущения будут распространяться с некоторой скоростью, последовательно приводя в движение частицы среды, расположенные на пути распространения. Скорость распространения, как показывает опыт, не зависит от конкретного вида возмущения, если только относительные изменения $\Delta p/p \ll 1$ и $\Delta \rho/\rho \ll 1$ (p и ρ — равновесные значения давления и плотности среды). Важно отметить, что и форма таких малых возмущений в процессе их распространения не меняется.

Рассчитаем скорость распространения возмущений, используя самую простую физическую ситуацию. Пусть труба с площадью поперечного сечения S заполнена жидкостью (или газом) с плотностью ρ под давлением p . Предположим, что в момент времени $t = 0$ поршень, закрывающий трубу с одного конца, начинает двигаться с постоянной скоростью $v \ll c$. Перед поршнем образуется область повышенного давления (рис. 17.13), граница которой будет

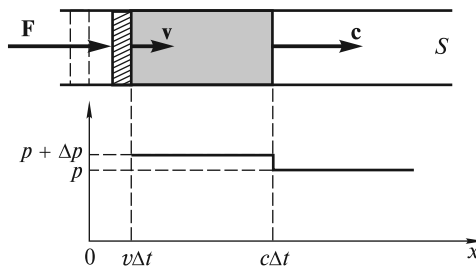


Рис. 17.13

двигаться со скоростью c . Импульс силы F , действующей в течение времени Δt , передается частицам среды в объеме с повышенной плотностью $\rho + \Delta\rho$, которые начинают двигаться со скоростью v . Поэтому можем записать равенство:

$$F\Delta t = \Delta p S \Delta t = (\rho + \Delta\rho)(c - v)\Delta t S v, \quad (17.49)$$

или

$$\Delta p = (\rho + \Delta\rho)(c - v)v. \quad (17.50)$$

Из условия постоянства (до и после сжатия) массы вещества следует, что

$$\rho S c \Delta t = (\rho + \Delta\rho)(c - v) S \Delta t, \quad (17.51)$$

или

$$\rho c = (\rho + \Delta\rho)(c - v). \quad (17.52)$$

Из уравнений (17.50) и (17.52) находим скорость движения частиц как функцию избыточного давления:

$$v = \frac{\Delta p}{\rho c}. \quad (17.53)$$

В акустике последнее равенство выражает *акустический закон Ома*. Если проводить аналогию с законом Ома для участка цепи постоянного тока, то v является аналогом силы тока, Δp — разности потенциалов, а ρc так и называется — акустическое сопротивление среды.

Равенство (17.52) после раскрытия скобок будет иметь вид

$$0 = \Delta\rho c - \rho v - v\Delta\rho. \quad (17.54)$$

Последний член в правой части (17.54) пренебрежимо мал. Подстановка (17.53) в (17.54) приводит к искомому выражению для скорости:

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}}. \quad (17.55)$$

Формула (17.55) позволяет рассчитать скорость звука в различных жидкостях и газах, если известна связь между давлением и плотностью. Для газов эта связь дается уравнением адиабаты (17.42):

$$p = \text{const} \cdot \rho^\gamma. \quad (17.56)$$

Поскольку $\Delta p = \text{const} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1} \Delta\rho$, то

$$c = \sqrt{\text{const} \cdot \gamma \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma p / \rho} \quad (17.57)$$

(формула Лапласа). Для воздуха при нормальных условиях $p \approx 10^5$ Па, $\rho \approx 1,3$ кг/м³ и $c \approx 330$ м/с.

Для идеального газа $p/\rho = RT/\mu$, поэтому скорость звука $c = \sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}$,

т. е. не зависит от плотности, а зависит только от температуры и вида газа.

Для воды, сжимаемость которой значительно меньше, скорость звука $c \approx 1200$ м/с.

Истечение сжатого газа через сопло. Рассмотрим одну из важнейших задач газодинамики — истечение газа, сжатого в сосуде до давления p_1 и плотности ρ_1 , через выходную трубку — сопло (рис. 17.14). Скорость истечения v , согласно равенству (17.43), составляет

$$v = \sqrt{v_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]}. \quad (17.58)$$

Здесь учтено, что $h \approx h_1$.

При малом сечении сопла скоростью v_1 движения газа внутри сосуда можно пренебречь. Наконец, будем считать, что снаружи давление $p \ll p_1$. Тогда

$$v = \sqrt{2\gamma/(\gamma-1)(p_1/\rho_1)}. \quad (17.59)$$

Расчет, проведенный по этой формуле для случая, когда воздух при нормальных условиях вытекает в вакуум, дает значение скорости $v \approx 740$ м/с. Эта скорость более чем вдвое превышает скорость звука и, как показывает опыт, при использовании сопла постоянного сечения не достигается. Реально скорость газа не превышает скорости звука, поскольку газ, находящийся в сопле под заметным давлением, является своеобразной «аэродинамической пробкой» для газа внутри сосуда — поток как бы запирает сопло. Этот вывод подтверждается и простейшими расчетами. Пусть l — координата, направленная вдоль оси сопла с переменным сечением $S = S(l)$. Для стационарного течения уравнение Эйлера (17.35) или уравнение Бернулли (17.40) связывают приращение скорости и давления:

$$v dv = -dp/\rho. \quad (17.60)$$

Из условия постоянства массы (17.1) следует, что в любом сечении сопла $\rho v S = \text{const}$, или

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0. \quad (17.61)$$

Наконец, согласно (17.55), можем записать:

$$dp = c^2 d\rho, \quad (17.62)$$

где c — скорость звука в сечении S , меняющаяся вдоль сопла.

Из (17.60) и (17.62) имеем:

$$v dv = -c^2 \frac{d\rho}{\rho}. \quad (17.63)$$

Подставив (17.63) в (17.61), находим:

$$\frac{dS}{S} = \frac{dv}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right). \quad (17.64)$$

Таким образом, при дозвуковых скоростях ($v/c < 1$) в сужающемся сопле ($dS < 0$), скорость возрастает ($dv > 0$), а давление [согласно (17.63)] убывает. Однако по мере приближения к скорости звука приращение скорости dv стре-

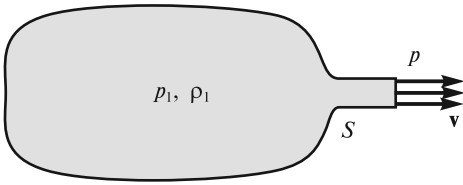


Рис. 17.14

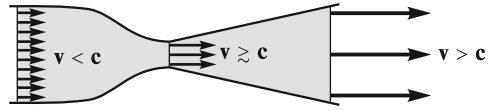


Рис. 17.15

мится к нулю, а сама скорость достигает некоторого максимального значения, близкого к c . В расширяющемся сопле ($dS > 0$) при начальной скорости $v < c$ будет иметь место уменьшение скорости потока с одновременным увеличением давления и плотности.

Получить сверхзвуковые скорости можно лишь при использовании сопла, форма которого показана на рис. 17.15. В сужающейся части сопла поток ускоряется. Когда его скорость в самом узком сечении незначительно превысит скорость звука ($v \gtrsim c$), то, согласно (17.64), последующее увеличение сечения ($dS > 0$) будет приводить к дальнейшему ускорению потока при одновременном падении давления и плотности. Такое сопло, получившее название *сопла Лаваля*, позволяет получить сверхзвуковые скорости потоков. Эта идея используется при конструировании ракетных двигателей. Этот же принцип лежит в основе конструкции аэродинамических труб, используемых для испытания сверхзвуковых летательных аппаратов. На практике сопла профилируют так, чтобы в выходном сечении получить поток, скорость которого по сечению была бы одной и той же.

ЛЕКЦИЯ 18

Силы вязкого трения. В предыдущей лекции было рассмотрено движение жидкостей и газов без учета сил вязкого трения. Однако эти силы, действующие между движущимися частицами, могут кардинальным образом повлиять как на распределение скоростей в потоке, так и на обтекание тел, находящихся в этом потоке.

Еще Ньютон установил, что при скольжении друг относительно друга двух параллельных плоскостей, пространство между которыми заполнено жидкостью, силы вязкого трения препятствуют этому скольжению (рис. 18.1). Так, при движении со скоростью v верхней плоскости площадью S относительно нижней возникает сила вязкого трения F , направленная против движения,

$$F = \eta S(v/h). \quad (18.1)$$

Эта сила пропорциональна площади S и изменению скорости на единицу длины v/h в поперечном направлении (градиенту скорости в направлении, перпендикулярном движению) и зависит также от вязкости жидкости η .

Формула (18.1) справедлива, если расстояние h между пластинами значительно меньше их линейных размеров ($h \ll \sqrt{S}$) и скорость v невелика. Важно отметить, что частицы жидкости, прилегающие к верхней пластине, движутся вместе с нею со скоростью v (увлекаются пластиной). Напротив, частицы жидкости вблизи нижней (неподвижной) пластины находятся в покое (прилипают к пластине).

Разобьем жидкость между пластинами на плоские параллельные слои, движущиеся равномерно (рис. 18.2). Нетрудно понять, что каждый вышележащий слой увлекает за собой нижний соседний слой с силой F . В свою очередь, этот нижний слой тормозит движение верхнего слоя с той же силой F . На каждый слой действуют сверху и снизу две равные, но противоположно направленные силы. Скорость слоев линейно возрастает от нижнего слоя к верхнему, а силы трения, действующие на каждый из слоев, одинаковы. С точки зрения молекулярной физики внутреннее трение в жидкостях и газах обусловлено хаотическим тепловым движением молекул. При движении жидкости молекулы в це-

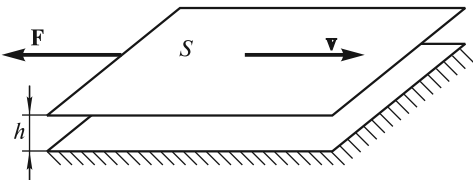


Рис. 18.1

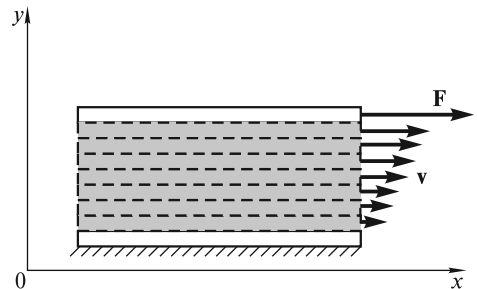


Рис. 18.2

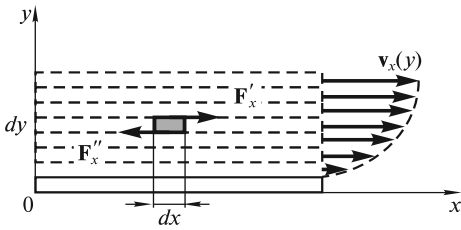


Рис. 18.3

лом приобретают некоторый импульс, соответствующий скорости данного слоя. Этот импульс либо увеличивается (при столкновениях с молекулами из соседнего, более «быстрого» слоя), либо уменьшается (при столкновениях с молекулами из более «медленного» слоя). В результате и появляется сила, действующая на рассматриваемый слой либо по направлению его скорости, либо противоположно

но. В итоге усилие F , приложенное к верхней пластине, передается на нижнюю.

Коэффициенты вязкости жидкостей и газов можно определить экспериментально, например, по скорости их протекания через трубку известных размеров (см. ниже). Как показывает опыт, при нагревании вязкость жидкостей уменьшается, а газов — увеличивается. Объяснение такой зависимости будет дано в курсе «Молекулярная физика».

Течение вязкой жидкости. Уравнение Навье — Стокса. Для анализа течения вязкой жидкости в правую часть уравнения движения (17.28) необходимо добавить силу вязкого трения, действующую на единичный объем жидкости. Для простоты ограничимся рассмотрением течения жидкости в направлении оси Ox , при этом единственная компонента скорости v_x будет зависеть от поперечной координаты y (рис. 18.3). На верхнюю грань $dx dz$ элемента $dx dy dz$ (ось Oz перпендикулярна плоскости чертежа) в направлении оси Ox действует, в соответствии с (18.1), увлекающая сила $F'_x = \eta dx dz \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y+dy}$, а на нижнюю грань —

тормозящая сила $F''_x = -\eta dx dz \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_y$. Равнодействующая сил вязкого трения для рассматриваемого элемента

$$F = F'_x + F''_x. \quad (18.2)$$

Сила, действующая на единичный объем,

$$f_x = \frac{F}{dx dy dz} = \eta \frac{d^2 v_x}{dy^2}. \quad (18.3)$$

При линейном изменении скорости от слоя к слою, как показано на рис. 18.2, $f_x = 0$. Если скорость изменяется нелинейно (см. рис. 18.3), то $f_x \neq 0$. В общем случае сила вязкого трения имеет три компоненты $\mathbf{f} = \{f_x, f_y, f_z\}$, где

$$\begin{aligned} f_x &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \eta \Delta v_x; \\ f_y &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) = \eta \Delta v_y; \\ f_z &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \eta \Delta v_z. \end{aligned} \quad (18.4)$$

В (18.4) использовано обозначение $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, применяемый в математике и физике для сокращения записи. Если теперь компоненты силы трения (18.4) подставить в правые части уравнений (17.30) для соответствующих компонент скоростей, то получим систему уравнений гидродинамики вязкой жидкости. Эти три уравнения могут быть записаны в виде одного векторного уравнения:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \text{ grad} \right] \mathbf{v} = \mathbf{f} - \text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v}. \quad (18.5)$$

Оно отличается от первого из уравнений (17.31) наличием слагаемого $\eta \Delta \mathbf{v}$ в правой части.

Уравнение (18.5) называется *уравнением Навье—Стокса* и является основным при расчете движения вязкой несжимаемой жидкости; в общем случае для его решения используются численные методы. В ряде случаев вязкость жидкости (газа) можно не учитывать, что значительно упрощает решение задач. Выясним, когда можно пренебречь силами вязкости.

Число Рейнольдса. Рассмотрим течение вязкой жидкости под действием сил давления между двумя неподвижными горизонтальными пластинами, расстояние между которыми равно h . Поскольку частицы жидкости «прилипают» к пластинам, то скорости слоев жидкости будут различными. Распределение скоростей слоев показано на рис. 18.4.

Если известна характерная скорость течения (например, скорость v на оси потока), то легко оценить силу вязкого трения, действующую на единичный объем жидкости. Согласно (18.3),

$$f_x = \eta \frac{d^2 v_x}{dy^2} \approx \eta \frac{v}{h^2}. \quad (18.6)$$

Отсюда следует, что силы вязкого трения убывают с увеличением расстояния между пластинами. В общем случае можно считать, что *плотность силы вязкости обратно пропорциональна квадрату характерного поперечного размера потока и пропорциональна скорости*.

Вязкостью можно пренебречь, если потери энергии потока, обусловленные силами трения, незначительны. Это означает, что работа сил трения, действующих на некоторый элемент жидкости, значительно меньше его кинетической энергии. Оценим работу силы вязкого трения, действующей на единичный объем жидкости, текущей по горизонтальной трубе радиусом R . С учетом (18.6) ($h \approx R$) эта работа при перемещении единичного объема на расстояние l определяется выражением:

$$A = f_x l \approx \frac{\eta v}{R^2} l. \quad (18.7)$$

Кинетическая энергия единичного объема жидкости с плотностью ρ

$$T = \rho v^2 / 2. \quad (18.8)$$

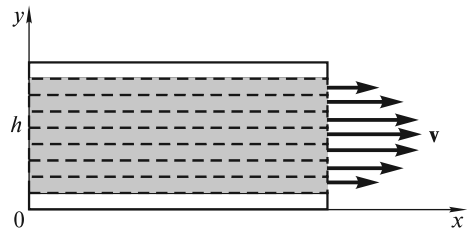


Рис. 18.4

Таким образом, условие пренебрежения вязкостью можно записать в виде

$$\frac{\eta v}{R^2} l \ll \frac{\rho v^2}{2}. \quad (18.9)$$

Поскольку оценка проводится по порядку величины, то можно положить $l \approx R$ и опустить числовой коэффициент в (18.9). В итоге получим

$$\rho v R / \eta \gg 1. \quad (18.10)$$

Безразмерная величина

$$Re = \rho v R / \eta \quad (18.11)$$

называется *числом Рейнольдса*. Чем меньше Re , тем большую роль в движении жидкости играют силы вязкости. Если, например, характерный размер трубы, по которой течет жидкость или газ, очень мал, то даже при небольшой вязкости Re будет незначительно, и силы трения будут играть существенную роль. Наоборот, если размер трубы велик, то даже при значительной вязкости силы трения не играют определяющей роли.

Таким образом, текущую жидкость можно рассматривать как невязкую, если число Рейнольдса для такого течения $Re \gg 1$. Однако и в этом случае вязкость играет определенную вспомогательную роль. При не очень высоких скоростях течения силы вязкости «гасят» компоненты скорости жидкости, поперечные к потоку, препятствуя тем самым возникновению неустойчивого течения и обеспечивая ламинарность потока.

Приведем некоторые оценки для течения жидкости по круглой трубе радиусом R . Если $R = 1$ см, а скорость течения $v = 1$ см/с, то для воды ($\rho = 10^3$ кг/м³, $\eta = 1,15 \cdot 10^{-3}$ Па · с при $t = 15$ °С) $Re = 86$. Это означает, что силы вязкости не существенны, и воду можно рассматривать как невязкую жидкость. Однако это приближение становится несправедливым, если радиус трубы уменьшить на два порядка, и $Re = 0,86 < 1$. При таком течении распределение давлений и скоростей в потоке уже не подчиняется уравнению Бернулли. Еще в большей степени это относится к вязкому глицерину ($\eta = 1,4$ Па · с). При течении воздуха по трубе ($\rho = 1,3$ кг/м³, $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Па · с) число Рейнольдса приблизительно на порядок меньше его значения для воды. Это указывает на то, что силы вязкости при течении воздуха и других газов играют большую роль, чем при течении воды.

Формула Пуазейля. Рассмотрим следующий опыт. Подсоединим тонкую горизонтальную стеклянную трубу (с впаянными в нее вертикальными манометрическими трубками) при помощи резинового шланга к водопроводному крану (рис. 18.5). При небольшой скорости течения хорошо видно понижение уровня воды в манометрических трубках в направлении течения ($h_1 > h_2 > h_3$). Это указывает на наличие градиента давления вдоль оси трубки — статическое давление жидкости уменьшается по потоку. При равномерном прямолинейном течении силы давления уравниваются силами вязкости. Уравнение Навье—Стокса для этого случая запишется в виде

$$-\text{grad } p + \eta \Delta v = 0. \quad (18.12)$$

Распределение скоростей в поперечном сечении потока вязкой жидкости можно наблюдать при ее вытекании из вертикальной трубки через узкое от-

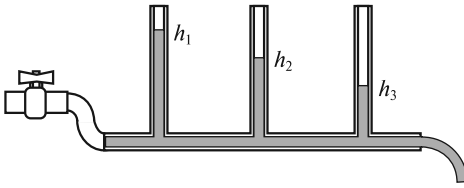


Рис. 18.5

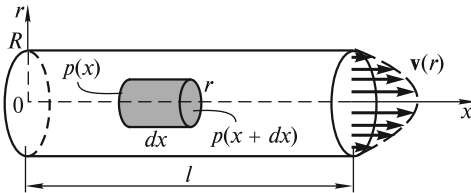


Рис. 18.7

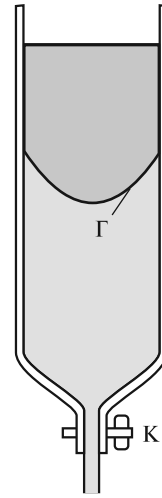


Рис. 18.6

верстие (рис. 18.6). Если, например, при закрытом кране К в трубку налить вначале неподкрашенный глицерин, а затем сверху осторожно добавить подкрашенный, то в состоянии равновесия граница раздела Γ будет горизонтальной. Если кран К открыть, то через некоторое время граница раздела примет форму, похожую на параболоид, что указывает на существование распределения скоростей в сечении трубки. Это распределение можно найти, проинтегрировав уравнение (18.12), записанное в цилиндрических координатах (x, r) . Однако можно поступить проще. Приравняем нулю сумму сил вязкости и давления, действующих на цилиндрический объем жидкости радиусом r и длиной dx (рис. 18.7):

$$[p(x) - p(x + dx)]\pi r^2 + \eta 2\pi r dx \frac{dv}{dr} = 0. \quad (18.13)$$

Отметим, что равнодействующая сил давления направлена по потоку (вдоль оси x), а сила вязкого трения, приложенная к боковой поверхности выделенного цилиндра — против потока, поскольку $\frac{dv}{dr} < 0$. Произведя сокращение и разделив (18.13) на dx , получаем:

$$-\frac{dp}{dx} + \eta \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = 0. \quad (18.14)$$

Величина градиента $\frac{dp}{dx}$ в (18.14) не зависит от радиуса r , что позволяет легко проинтегрировать (18.14):

$$\frac{dp}{dx} \int_R^r r dr = 2\eta \int_0^v dv. \quad (18.15)$$

Пределы интегрирования записаны здесь с учетом того, что у стенок трубы скорость равна нулю. В итоге получаем следующее распределение скоростей:

$$v(r) = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2). \quad (18.16)$$

Давление равномерно падает в направлении оси x , поэтому $-\frac{dp}{dx} > 0$ и не зависит от x . Параболическое распределение скоростей (18.16) в одном из сечений трубы изображено на рис. 18.7. Поток вектора скорости через поперечное сечение трубы, или объем жидкости, протекающей через сечение в единицу времени (на практике употребляют термин «объемный расход жидкости»), оказывается равным

$$Q_V = \int v dS = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(-\frac{dp}{dx} \right). \quad (18.17)$$

Для практических целей объемный расход жидкости определяют по *формуле Пуазейля*

$$Q_V = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (18.18)$$

Здесь расход воды Q_V пропорционален разности давлений $p_1 - p_2$ на концах трубы длиной l . Следует обратить внимание на существенную зависимость пропускной способности трубы от ее радиуса R . При заданном давлении на входе водопроводной сети увеличение диаметра труб вдвое приводит к повышению их пропускной способности в 16 раз!

Пользуясь формулой Пуазейля, можно определить вязкость жидкости. Так, в опыте с горизонтальной стеклянной трубкой (см. рис. 18.5) легко измерить разность давлений и расход жидкости и при известном радиусе трубки рассчитать вязкость жидкости. Однако более удобно определять вязкость жидкости по методу Стокса, измеряя время падения шарика в этой жидкости (см. ниже).

Параболический профиль скорости слоев будет и при течении жидкости между двумя пластинами, как это изображено на рис. 18.4. Если этот рисунок разрезать посередине на высоте $h/2$ и наклонить нижнюю пластину под углом α , то мы получим картину течения воды в реке под действием силы тяжести (рис. 18.8). При расчете профиля скоростей течения вместо градиента давления

$\frac{dp}{dx}$ можно использовать компоненту силы тяжести $f_x = \rho g \sin \alpha$.

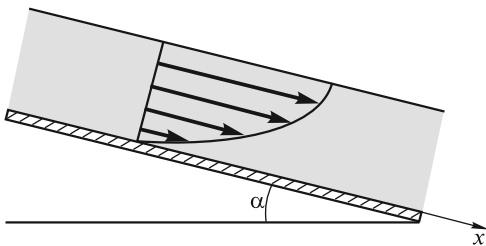


Рис. 18.8

Ламинарное и турбулентное течение.

Обратимся теперь к вопросу об устойчивости течения жидкости по трубам. С этой целью поставим следующий эксперимент. Пусть жидкость вытекает из сосуда через горизонтальную стеклянную трубку (рис. 18.9). Для контроля за характером течения будем при помощи капилляра К впускать во входное сечение трубки ту же, но окрашенную жидкость.

В случае малого поперечного сечения трубки и не очень большой скорости течения окрашенная жидкость движется прямолинейно строго вдоль оси трубки (рис. 18.10, а)*. Такое течение называют *ламинарным*, или *слоистым*. При ламинарном течении силы вязкости сглаживают боковые движения жидкости, возникающие вследствие флуктуаций и различных неровностей стенок трубы. По мере увеличения скорости эти боковые движения становятся все более заметными (рис. 18.10, б), и затем осуществляется переход к *турбулентному течению* (рис. 18.10, в). При турбулентном течении скорость в каждой точке не остается постоянной, а претерпевает быстрые беспорядочные изменения как по величине, так и по направлению. Переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при некотором значении числа Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v R}{\eta} = Re_{кр}, \quad (18.19)$$

где $Re_{кр}$ — критическое значение числа Рейнольдса, в значительной степени зависящее от формы входной части трубы и определяемое опытным путем.

В случае закругленного конца, как показано на рис. 18.9, течение остается ламинарным вплоть до больших значений числа Рейнольдса. Область критических значений лежит между 1200 (незакругленный вход) и 20 000 (закругленный вход). Поэтому в литературе приводятся весьма различные значения $Re_{кр}$.

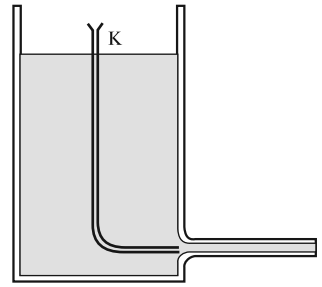


Рис. 18.9



Рис. 18.10

* Рисунки 18.10, 18.13, 18.22, 24.12 взяты из Альбома течений жидкости и газа (М. Ван-Дайк. — М.: Мир, 1986).

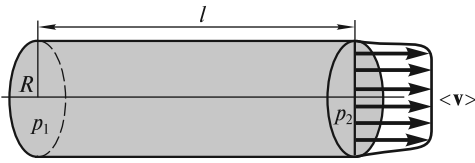


Рис. 18.11

При установившемся турбулентном течении, как было указано выше, скорость в каждой точке случайным образом меняется со временем, однако средняя скорость $\langle v \rangle$ направлена вдоль оси трубы. Она остается постоянной по сечению трубы, и только в очень тонком

пограничном слое у ее стенок падает до нуля (рис. 18.11).

На практике для расчета турбулентного течения жидкости по трубе используется формула

$$p_1 - p_2 = k\rho \langle v \rangle^2 \frac{l}{R}, \quad (18.20)$$

где k — безразмерный гидравлический коэффициент.

Средняя же по сечению скорость ламинарного течения из формулы Пуазейля (18.18) получается равной

$$\langle v \rangle = \frac{Q_V}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (18.21)$$

Разность давлений как функция скорости определяется в этом случае формулой

$$p_1 - p_2 = \frac{8\eta}{R} \langle v \rangle \frac{l}{R}. \quad (18.22)$$

Если сравнить перепады давлений для турбулентного (18.20) и ламинарного (18.22) течений, то легко заметить, что повышение скорости прокачки жидкости по трубам при турбулентном течении потребует значительно большего увеличения перепада давлений, чем при ламинарном. Известен исторический факт, когда нефтепровод, проложенный в России, был спроектирован на основе формулы (18.20). Однако при приложенной разности давлений пропускная способность нефтепровода оказалась выше расчетной. Ошибка проекта (к счастью, удачная) состояла в том, что несмотря на большой диаметр труб, течение вязкой нефти по ним было ламинарным, и пропускная способность нефтепровода должна была бы рассчитываться по формуле (18.22).

Формулы (18.20) и (18.22) можно объединить в одну, если принять, что безразмерный гидравлический коэффициент в (18.20) зависит от числа Рейнольдса:

$$k = k_0 + 8/\text{Re}.$$

Тогда при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$ течение турбулентное и коэффициент $k \approx k_0$. Напротив, при $\text{Re} \leq 1$ $k \approx 8/\text{Re}$ и формула (18.20) переходит в (18.22). На рис. 18.12 изображен график зависимости перепада давления в трубах от скорости течения. Однако, если двигать трубу относительно неподвижной жидкости, то кривую на рис. 18.12 в некотором приближении можно интерпрети-

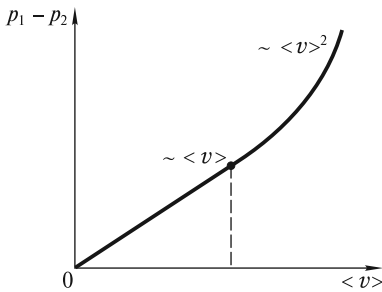


Рис. 18.12

ровать как зависимость силы сопротивления, действующей на единицу площади поперечного сечения трубы, от скорости ее движения. При малых скоростях сила сопротивления пропорциональна скорости, а при больших — квадрату скорости.

При свободном ламинарном течении жидкости или газа (в отсутствие направляющих поверхностей) развиваются неустойчивости, и ламинарное течение переходит в турбулентное. На рис. 18.13 показан ламинарный поток воздуха, вытекающего из круглой трубы при числе $Re = 10000$. Во внешней области струи развиваются колебания, затем появляются вихревые кольца, после чего вся струя становится турбулентной. До настоящего времени нет ясного понимания всех стадий развития турбулентности. Классическая линейная теория устойчивости дает качественно верное описание начальной стадии разрушения ламинарности. Ясно, что переход к турбулентному течению является существенно нелинейным процессом, и теория устойчивости должна базироваться на анализе нелинейных уравнений гидродинамики.

Отметим, что в области ламинарного течения (за исключением пограничного слоя, примыкающего к поверхности трубы), поле скоростей является потенциальным. Описание течения можно значительно упростить, если использовать потенциал скоростей

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \tag{18.23}$$

В ряде задач проще рассчитать сначала потенциал скоростей, а затем и скорость:

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \Phi.$$

В области турбулентного течения невозможно ввести потенциал скоростей. Скорость течения \mathbf{v} в каждой точке является случайной функцией времени, и необходим статистический подход к описанию турбулентного течения.

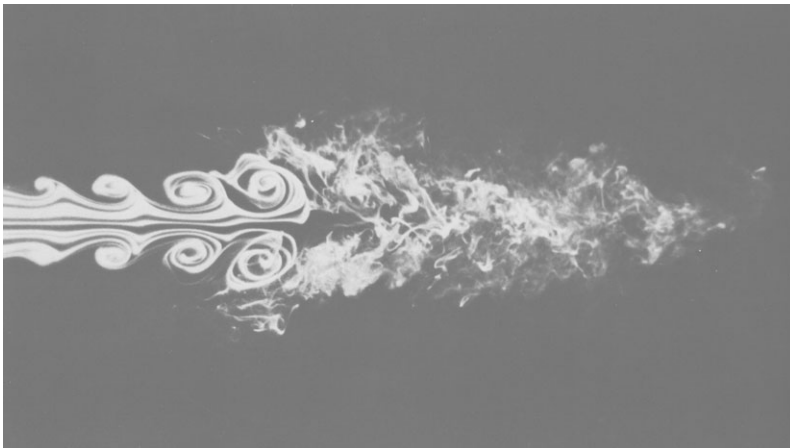


Рис. 18.13

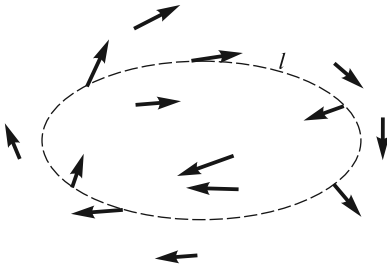


Рис. 18.14

Очень важным является понятие *вихря*. Вихревой характер течения имеет место тогда, когда отлична от нуля «работа» вектора скорости \mathbf{v} по замкнутому контуру, получившая название циркуляции:

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{v} d\mathbf{l} \neq 0. \quad (18.24)$$

На рис. 18.14 изображены векторы скорости частиц жидкости в фиксированный момент времени при турбулентном течении и показан контур l , по которому вычисляется интеграл (18.24). Символ \oint означает, что интегрирование производится по замкнутому контуру. Если размеры контура стягивать в точку, то в этой точке интенсивность вихреобразного течения будет характеризоваться ротором вектора скорости в соответствии с определением:

$$(\text{rot } \mathbf{v})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\Delta S}, \quad (18.25)$$

где ΔS — площадь маленького контура; \mathbf{n} — нормаль к этой площадке, направленная туда же, куда и острие буравчика, рукоятка которого вращается в положительном направлении обхода контура.

Формула (18.25) определяет лишь значение проекции вектора $\text{rot } \mathbf{v}$ на направление нормали, поскольку контур ориентирован произвольно. Чтобы рассчитать компоненты вектора $\text{rot } \mathbf{v}$, надо вычислить циркуляции по контурам, нормали к которым совпадают с соответствующими осями координат.

В качестве иллюстрации к сказанному подсчитаем ротор вихревого течения жидкости, частицы которой движутся по некоторой окружности с угловой скоростью ω . Циркуляция вектора скорости по контуру радиуса r с центром на этой окружности равна

$$\Gamma = v \cdot 2\pi r = \omega r^2 2\pi = 2\pi r^2 \omega. \quad (18.26)$$

Вектор $\text{rot } \mathbf{v}$ направлен по нормали \mathbf{n} к контуру и равен

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{\Gamma}{\Delta S} \mathbf{n} = \frac{2\pi r^2 \omega}{\pi r^2} \mathbf{n} = 2\omega \mathbf{n}. \quad (18.27)$$

Приведем без доказательства выражение для вектора $\text{rot } \mathbf{v}$ в декартовых координатах:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \quad (18.28)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} — единичные векторы вдоль соответствующих декартовых осей координат.

Естественно, что результат (18.27) может быть получен с помощью (18.28).

Турбулентность атмосферы. При описании атмосферы отмечалось, что в нижнем (приземном) слое происходит интенсивное конвективное перемешивание воздуха. Скорость воздушных потоков в каждой точке атмосферы является случайной функцией времени. Это подтверждается, например, оптическим

явлением мерцания звезд, свет от которых рассеивается на случайных областях с повышенной и пониженной плотностью воздуха. Это явление аналогично дрожанию и искажению объектов, наблюдаемых через пространство с сильным испарением воды после дождя в теплую погоду или бензина на автозаправочных станциях.

Вариации скорости в турбулентных потоках воздуха также являются случайными, поэтому описание его движения требует статистического подхода. В полном объеме осуществить такое описание невозможно. Очень плодотворным, однако, является представление турбулентных потоков в виде совокупности вихрей с размерами от $l_0 \approx 1$ мм до $L_0 \approx 1$ м. Характерные размеры l_0 и L_0 носят название внутреннего и внешнего масштабов турбулентности, причем оба масштаба возрастают при удалении от поверхности Земли.

Внутренний масштаб возникает как результат последовательного распада больших, но неустойчивых вихрей на более мелкие, которые, в свою очередь, распадаются дальше вплоть до вихрей размером порядка нескольких миллиметров. Оценку величины внутреннего масштаба можно получить из следующих простых соображений. Если в потоке, движущемся со скоростью v , имеется неоднородность с линейным размером $\sim l$, то ее кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2} \approx \rho l^3 v^2. \quad (18.29)$$

Из-за наличия вязкости часть этой энергии диссипирует в тепло. Если неоднородность смещается на расстояние $\sim l$, то количество теплоты Q равно работе сил вязкого трения

$$Q = F_{\text{тр}} l \approx \eta \frac{v}{l} S l \approx \eta v l^2. \quad (18.30)$$

Здесь учтено, что $\frac{dv}{dl} \approx \frac{v}{l}$; $S \approx l^2$ — площадь поверхности неоднородности, к которой приложена сила вязкости. Отношение кинетической энергии к количеству теплоты приблизительно равно числу Рейнольдса:

$$\frac{T}{Q} \approx \frac{\rho v l}{\eta} = \text{Re}. \quad (18.31)$$

Если $T > Q$ ($\text{Re} > 1$), силы вязкости несущественны. В таком интервале скоростей, называемом инерционным, вихри распадаются на более мелкие, для которых число Рейнольдса $\text{Re} \approx 1$. При минимальных скоростях течения $v \approx 1$ см/с такому числу Рейнольдса соответствует $l \approx 1$ мм, что по порядку величины совпадает с внутренним масштабом турбулентности.

А. Н. Колмогоров рассмотрел изменение во времени разности скоростей в точках пространства, разнесенных на расстояние l (рис. 18.15). Он установил, что в инерционном интервале $l_0 < l < L_0$ средний квадрат разности скоростей $\langle [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})]^2 \rangle$ можно описать универсальной зависимостью. Для компонент вектора скорости, направленных вдоль \mathbf{l} ,

$$D_{ll} = \langle [v_l(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - v_l(\mathbf{r})]^2 \rangle = C_v^2 l^{2/3}, \quad (18.32)$$

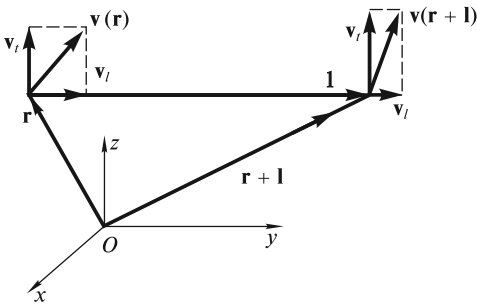


Рис. 18.15

Структурная функция $D_{ii} = \langle [v_i(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - v_i(\mathbf{r})]^2 \rangle$ для поперечных компонент v_i с учетом несжимаемости атмосферы ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) выражается через D_{ii} следующим образом:

$$D_{ii} = \frac{1}{2l} \frac{d}{dl} (l^2 D_{ii}). \quad (18.33)$$

Введенная выше функция скоростей D_{ii} позволяет рассчитать структурную функцию флуктуаций температуры, также подчиняющуюся закону «2/3»:

$$D_{TT} = \langle [T(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - T(\mathbf{r})]^2 \rangle = C_T^2 l^{2/3}. \quad (18.34)$$

Вывод этой формулы может быть выполнен на основе усреднения решений уравнений гидродинамики и теплопереноса при учете (18.32), что выходит за рамки нашего курса. Структурная постоянная температуры C_T^2 может быть рассчитана, если измерить микропульсации температуры с помощью чувствительных датчиков, разнесенных на расстояние l , и усреднить результаты за длительный (порядка 1 ч) отрезок времени. Такие датчики устанавливают на мачтах, шарах-зондах и самолетах. В настоящее время широкое применение получили методы акустической локации, позволяющие изучать высотную зависимость C_T^2 вплоть до высот около 1 км. Эти методы основаны на том, что участки атмосферы с интенсивными флуктуациями температуры (и, следовательно, плотности) сильнее отражают акустические импульсы, чем участки со слабыми температурными флуктуациями.

Высотная зависимость C_T^2 , полученная акустическим методом, показана на рис. 18.16. Хотя флуктуации температуры составляют сотые (и даже меньше) доли градуса, тем не менее они приводят к заметным флуктуациям показателя преломления n . Структурная функция n получается из материального уравнения $n = n(p, T)$ (p и T — равновесные значения давления и температуры) и также подчиняется универсальному закону «2/3»:

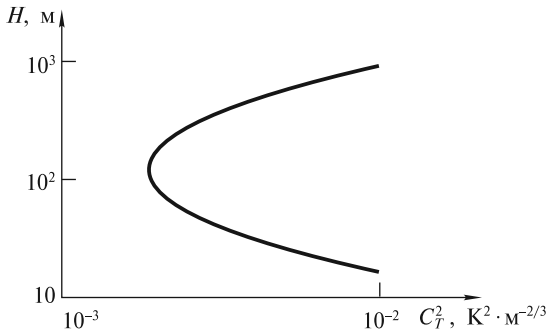


Рис. 18.16



a



б

Рис. 18.17

$$D_{nn} = \langle [n(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - n(\mathbf{r})]^2 \rangle = C_n^2 l^{2/3}. \quad (18.35)$$

Величина C_n^2 называется структурной постоянной показателя преломления. Ее значения заключены в пределах $10^{-15} \text{ м}^{-2/3} < C_n^2 < 10^{-14} \text{ м}^{-2/3}$. Она легко вычисляется из уравнения $n = n(p, T)$, если известна C_T^2 .

Формула (18.35) играет фундаментальную роль в задачах распространения световых волн через атмосферу. Эти задачи решаются в рамках самостоятельной науки — атмосферной оптики. На рис. 18.17, *a* приведены результаты компьютерного моделирования мгновенного изображения здания Московского государственного университета, рассматриваемого через турбулентную атмосферу в подзорную трубу с расстояния 20 км. С течением времени это изображение, разумеется, будет хаотически меняться. Однако при известном распределении флуктуаций показателя преломления с помощью компьютерных методов обработки изображений можно устранить турбулентные искажения (рис. 18.17, *б*).

Обтекание тел потоком жидкости. Лобовое сопротивление. Одной из важнейших проблем гидро- и аэродинамики является всестороннее исследование и установление основных закономерностей воздействия потоков жидкости и газа на обтекаемые ими тела. Эта область знаний приобрела исключительное значение в турбиностроении, авиации, при проектировании гидроэлектростанций, ветряных двигателей и др.

Еще Ньютоном была сформулирована теория (получившая название ударной), базирующаяся на представлении воздуха в виде отдельных не связанных друг с другом материальных частиц. Согласно этой теории, сила давления воздушного потока на площадку S , наклоненную под углом α (углом атаки) к направлению потока, равна

$$F = \rho S v^2 \sin^2 \alpha. \quad (18.36)$$

Эта формула легко получается, если подсчитать импульс, передаваемый площадке в единицу времени струей в результате неупругих ударов составляющих ее материальных частиц (рис. 18.18). Она правильно объясняет появление подъемной силы в случае, например, воздушного змея или плоского крыла. Однако в количественном отношении формула (18.36) оказывается неверной:

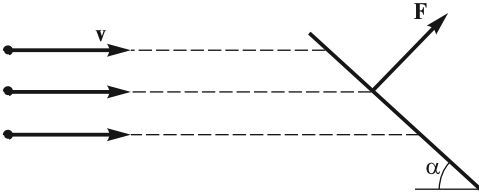


Рис. 18.18

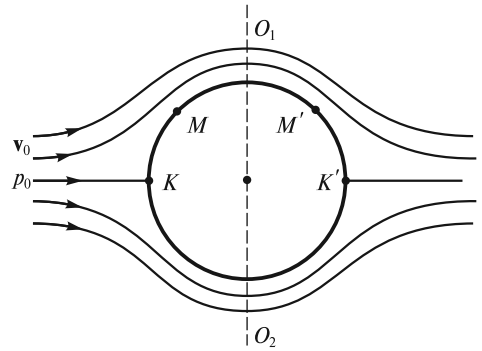


Рис. 18.19

на самом деле значение этой силы пропорционально не $\sin^2\alpha$, а $\sin\alpha$. И только при скоростях потока, значительно больших скорости звука, формула Ньютона оказывается справедливой, что подтверждается опытным путем. Все это говорит о том, что модель воздуха как совокупности дискретных частиц является некорректной. Реальные силы могут быть подсчитаны на основе гидродинамического подхода, учитывающего обтекание тела движущимся потоком континуальной среды.

Поясним сказанное простым примером. Допустим, что в потоке идеальной жидкости, движущемся со скоростью v_0 , находится шар радиусом r . Согласно ударной теории Ньютона, на шар будет действовать сила лобового сопротивления

$$F = \rho S v_0^2, \quad (18.37)$$

где $S = \pi r^2$ — площадь поперечного сечения шара.

При гидродинамическом подходе, учитывающем обтекание шара идеальной жидкостью, сила лобового сопротивления в данном случае будет отсутствовать вовсе. Действительно, в случае идеальной жидкости поток будет плавно обтекать гладкий шар и линии тока расположатся совершенно симметрично относительно сечения $O_1 O_2$ (рис. 18.19). В точке K , называемой *критической*, поток останавливается ($v = 0$) и давление, согласно уравнению Бернулли, равно

$$p_k = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}. \quad (18.38)$$

Это давление больше статического давления p_0 на величину $\rho v_0^2/2$, получившую ранее название динамического давления, или динамического напора. Давление в любой точке потока вблизи поверхности шара можно рассчитать, пользуясь уравнением Бернулли:

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}. \quad (18.39)$$

Ясно, что в симметричных относительно $O_1 O_2$ точках M и M' давления будут одинаковыми, поскольку одинаковы скорости потока в этих точках.

На рис. 18.20 показано распределение избыточных сил давления $\sigma_p = p - p_0$, действующих по нормали к поверхности шара. При этом сила направлена к поверхности, если $p > p_0$, и от поверхности при $p < p_0$. Отсутствие сил в точках A и A' есть результат равенства скоростей в этих точках исходной скорости потока: $v_A = v_{A'} = v_0$. Таким образом, действительно, результирующая сила при плавном (безотрывном) обтекании идеальной жидкостью шара, как, впрочем, и любого тела, равна нулю (*парадокс Даламбера*).

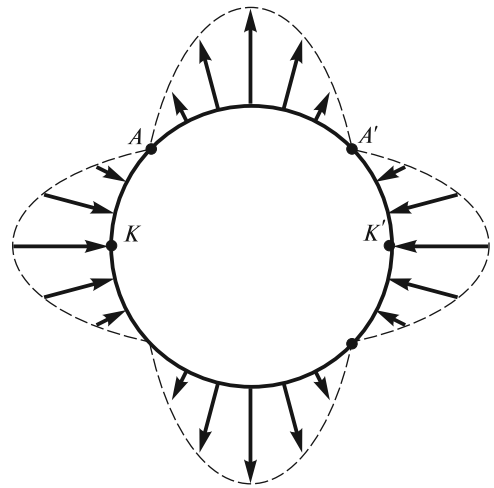


Рис. 18.20

Между тем, из повседневной практики известно, что поток реальной жидкости или газа действует на тело, помещенное в этот поток, с некоторой силой. Для осесимметричного тела с осью симметрии, направленной вдоль потока, эта сила также будет направлена вдоль потока. Она получила название *силы лобового сопротивления*. Эта сила возрастает с увеличением скорости потока аналогично росту перепада давлений при повышении скорости течения жидкости по трубе.

В общем случае для расчета силы лобового сопротивления можно использовать формулу

$$F_{\parallel} = C_x(\text{Re}) \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (18.40)$$

где ρ — плотность жидкости; v — скорость потока; S — площадь поперечного сечения тела; $C_x(\text{Re})$ — коэффициент лобового сопротивления тела данной формы, зависящий от числа Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta} \quad (l — \text{характерный размер тела}).$$

Основные физические причины возникновения лобового сопротивления можно установить на примере цилиндра, ориентированного поперек потока обтекающей его жидкости. Зависимость C_x от числа Рейнольдса $\text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta}$

для длинного цилиндра диаметром D и для шара того же диаметра представлена на рис. 18.21, а фотографии различных режимов обтекания цилиндра — на рис. 18.22.

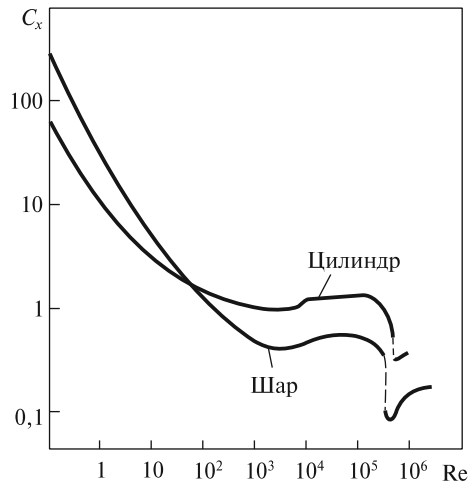


Рис. 18.21

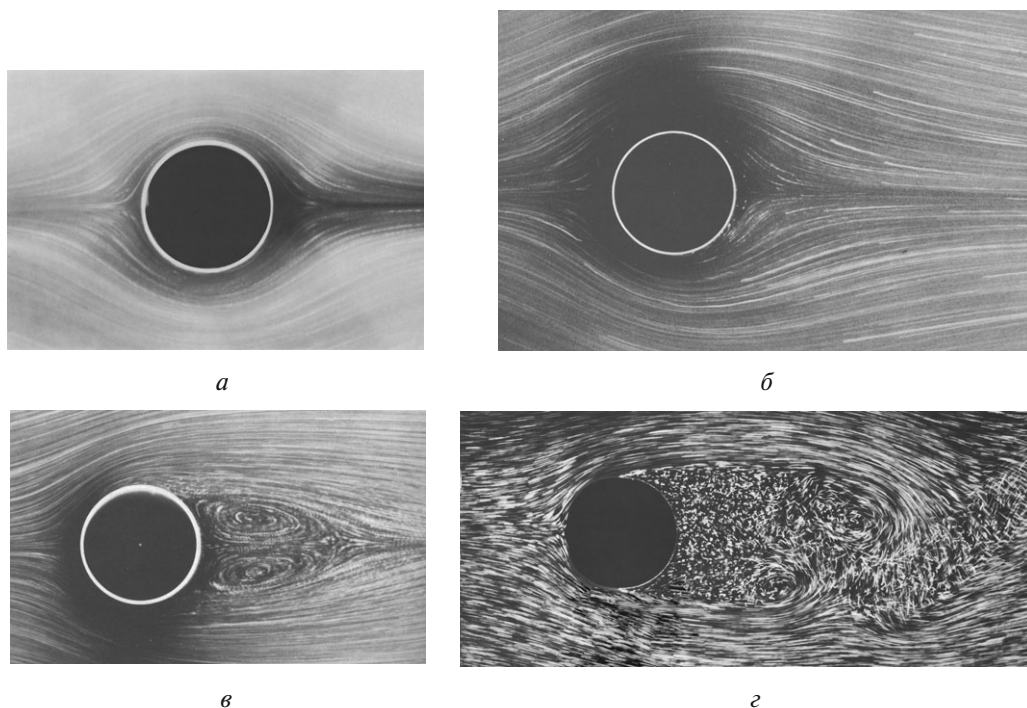


Рис. 18.22

При $Re < 1$ поток стационарен, скорость в любой точке потока постоянна и он плавно обтекает цилиндр (рис. 18.22, а). Сила лобового сопротивления возникает вследствие сил вязкости, действующих между слоями обтекающей тело жидкости: слой жидкости, примыкающий к поверхности тела, «прилипает» к ней ($v=0$); по мере удаления от поверхности цилиндра в поперечном к потоку направлении скорости слоев возрастают. В области $Re < 1$ коэффициент лобового сопротивления C_x убывает обратно пропорционально скорости потока. В соответствии с (18.40) это означает, что сила лобового сопротивления пропорциональна скорости. Для шара в этом случае имеет место *формула Стокса*:

$$F_{\parallel} = 3\pi\eta Dv. \quad (18.41)$$

Эта формула лежит в основе метода измерения вязкости жидкости. При падении шарика в жидкости его скорость изменяется согласно уравнению

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_A - F_{\parallel}, \quad (18.42)$$

где m — масса шарика; F_A — выталкивающая сила; F_{\parallel} — сила лобового сопротивления, определяемая по формуле (18.41).

По истечении некоторого времени шарик будет падать с практически постоянной скоростью. Эту скорость легко рассчитать, положив сумму сил в правой части (18.42) равной нулю:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_{ш} - \rho_{ж}) - 6\pi\eta r v = 0. \quad (18.43)$$

В эксперименте измеряют скорость падающего шарика и из (18.43) определяют вязкость жидкости η . Так, скорость падения стального шарика с радиусом $r = 1$ мм в глицерине при 40°C $v \approx 0,5$ см/с и вязкость $\eta \approx 0,3$ кг/(м·с). Указанной скорости соответствует число Рейнольдса $Re \approx 0,02$.

С увеличением скорости потока картина обтекания становится все более несимметричной (рис. 18.22, б). Здесь, кроме касательных сил, возникающих вследствие вязкости, все большую роль начинает играть перераспределение сил давления вследствие отрыва потока за цилиндром, благодаря чему возникает результирующая сил давления, действующая по потоку.

При $Re \approx 10 \div 30$ за цилиндром образуется пара вихрей (рис. 18.22, в). Существенную роль в образовании вихрей играет пограничный слой — слой жидкости, примыкающий к поверхности обтекаемого тела, в котором велики градиенты скорости в поперечном к потоку направлении. Толщину этого слоя можно определить по формуле:

$$\delta \approx \frac{D}{\sqrt{Re}}. \quad (18.44)$$

Скорость различных точек элемента жидкости, находящегося в пограничном слое, возрастает с увеличением расстояния от поверхности тела. В результате, когда этот элемент «сносится» потоком за пределы тела, он начинает вращаться — образуется вихрь.

Если $Re \gtrsim 40$, один из вихрей становится настолько длинным, что он отрывается и плывет вниз по течению вместе с жидкостью. Вихри поочередно отрываются то с одной, то с другой стороны, и возникает так называемая вихревая дорожка Кармана.

Когда $Re > 100$ (для шара при $Re > 1000$), поток становится хаотичным и нерегулярным, возникает область турбулентности (рис. 18.22, г). При этом $C_x \approx \text{const}$, и сила лобового сопротивления возрастает уже пропорционально квадрату скорости.

При дальнейшем увеличении Re область турбулентности продвигается вперед и при $Re > 10^5$ достигает места, где линии тока огибают цилиндр. Пограничный слой постепенно турбулизуется, C_x и F_{\parallel} с ростом скорости даже уменьшаются. Однако затем квадратичная зависимость силы от скорости опять восстанавливается, правда, с несколько меньшим коэффициентом C_x .

Иллюстрацией к возникновению силы лобового сопротивления из-за несимметричного обтекания тела служат представленные в табл. 18.1 значения коэффициентов лобового сопротивления тел различной формы. Хорошо видно, что наименьшим коэффициентом лобового сопротивления обладает осесимметричное каплеобразное тело, у которого тупой нос и заостренная задняя часть. При обтекании этого тела поток хорошо смыкается позади него, тем самым препятствуя падению давления за телом.

Подъемная сила. Формула Жуковского. Опыт показывает, что при обтекании жидкостью несимметричных тел, да еще произвольно ориентированных относительно потока, на эти тела будет действовать сила \mathbf{F} , направленная под некоторым углом к потоку. Составляющая этой силы, \mathbf{F}_{\parallel} , параллельная потоку, является силой лобового сопротивления. Другая составляющая \mathbf{F}_{\perp} , направленная перпендикулярно потоку, носит название *подъемной силы*.

Коэффициенты лобового сопротивления

Тело	C_x	Re
→ ■ диск	1,11	$0 \div 5 \cdot 10^6$
→ ◐ полусфера	1,35—1,40	$0 \div 5 \cdot 10^6$
→ ◑ полусфера	0,30—0,40	$0 \div 5 \cdot 10^6$
→ ● шар	0,4	$2 \cdot 10^3 \div 2,5 \cdot 10^5$
→ ◐ каплевидное	0,045	$1,5 \cdot 10^5 \div 6 \cdot 10^6$
→ ◑ каплевидное	0,1	$1,5 \cdot 10^5 \div 6 \cdot 10^6$

В качестве важнейшего примера рассмотрим возникновение подъемной силы при обтекании воздухом крыла самолета. Типичная картина безотрывного обтекания воздухом профиля крыла при небольшом угле атаки α показана на рис. 18.23. Уже из одного только факта, что поток после обтекания приобрел составляющую импульса, направленную вниз, следует, что такой же импульс, направленный вверх, приобретает крыло.

Отметим, что подъемная сила возникает не столько за счет повышения давления под крылом, сколько за счет падения давления над ним. Эта сила пропорциональна гидродинамическому давлению, площади крыла S и вычисляется по формуле

$$F_{\perp} = C_y S \frac{\rho v^2}{2}, \quad (18.45)$$

где C_y — коэффициент подъемной силы, зависящий от угла атаки α .

Характерная зависимость C_y , равно как и коэффициента лобового сопротивления C_x , от угла атаки α приведена на рис. 18.24. Коэффициент подъемной силы C_y с увеличением угла α растет, достигает максимального значения $(C_y)_{\max}$ при α_{\max} , после чего уменьшается. У обычных крыльев $(C_y)_{\max} \approx 1,2 \div 1,6$. При $\alpha < \alpha_{\max}$ обтекание плавное (рис. 18.25, а). При углах $\alpha \gtrsim \alpha_{\max}$ наблюдается «срыв» потока в области над крылом (как за обтекаемым жидкостью цилиндром), образуются завихрения (рис. 18.25, б); в конечном итоге это приводит к уменьшению подъемной силы.

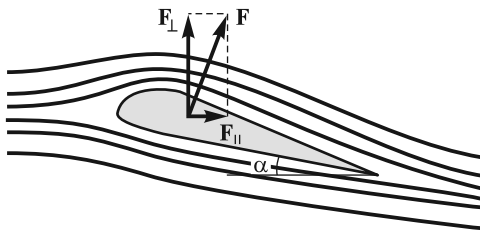


Рис. 18.23

Для увеличения подъемной силы при малых скоростях полета (взлет, посадка) используют специальные приспособления (рис. 18.26): предкрылки 1 и закрылки 2, выдвигаемые механически из крыла 3. Это позволяет повысить коэффициент подъемной силы $(C_y)_{\max}$ до значений $3 \div 4$.

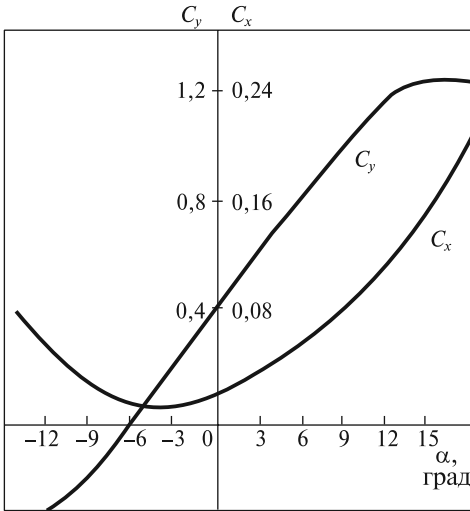
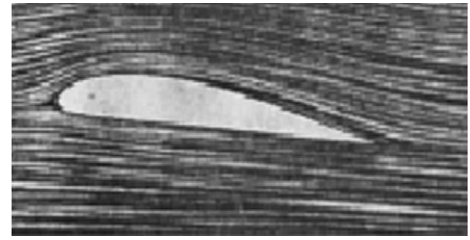


Рис. 18.24



а



б

Рис. 18.25

Выдающаяся роль в разработке теории обтекания тел потоком, имевшей исключительно важное значение для развития авиации, принадлежит Н. Е. Жуковскому. Он показал (1906 г.), что обтекание крыла (рис. 18.27, а) можно представить как суперпозицию двух течений идеальной жидкости: плавного, безвихревого течения (рис. 18.27, б) и циркуляционного движения вокруг крыла (рис. 18.27, в). Величина циркуляции скорости $\Gamma = \oint \mathbf{v} d\mathbf{l}$ однозначно определена условием Жуковского — Чаплыгина — совпадением задней критической точки в течении, изображенном на рис. 18.27, а, с острой задней кромкой крыла. Такой выбор Γ фактически позволяет учесть влияние сил вязкости, приводящих к образованию циркуляции и плавному обтеканию задней кромки, как это наблюдается на опыте. В результате наложения циркуляции на набегающий поток скорость воздуха над крылом становится больше, а под крылом — меньше скорости невозмущенного потока. Вследствие этого давление над крылом понижается, а под крылом повышается, что и приводит к появлению подъемной силы.

Возникновение отличной от нуля циркуляции скорости можно объяснить следующим образом. В начальный момент обтекания крыла является бесциркуляционным (см. рис. 18.27, б), и точка схода струй (задняя критическая точка) расположена на верхней поверхности крыла. Слой, огибающий заднюю кромку снизу, как бы «прилипает» к поверхности крыла, и возникает вихрь с циркуляцией против часовой стрелки, который увлекается потоком, а линия отрыва смещается к задней кромке крыла. В результате, по закону сохранения момента количества движения, циркуляция скорости по замкнутому контуру, охватывающему крыло, становится отличной от

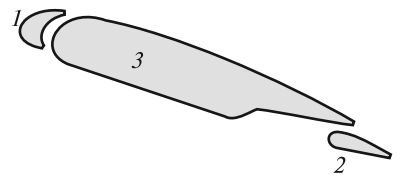


Рис. 18.26

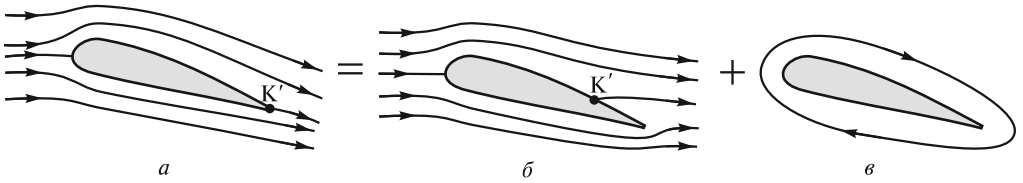


Рис. 18.27

нуля. Разумеется, что никакого течения воздуха вокруг крыла не происходит. При постоянной скорости полета отрыв вихрей происходит периодически, что поддерживает величину циркуляции практически постоянной.

Расчет подъемной силы может быть проведен на основе результирующей сил давления, исходя из теории течения идеальной жидкости. Распределение давлений вблизи поверхности крыла определяют по формуле (18.39):

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}.$$

Сила, действующая на элемент dl крыла, приближенно равна

$$dF \approx (p_{\text{н}} - p_{\text{в}})L \cdot dl \quad (18.46)$$

(L — длина крыла) и зависит от разности давлений снизу ($p_{\text{н}}$) и сверху ($p_{\text{в}}$) от элемента крыла (рис. 18.28). Эта разность давлений может быть выражена с помощью (18.39) через скорости:

$$p_{\text{н}} - p_{\text{в}} = \frac{1}{2} \rho (v_{\text{в}}^2 + v_{\text{н}}^2) = \frac{1}{2} \rho (v_{\text{в}} + v_{\text{н}})(v_{\text{в}} - v_{\text{н}}). \quad (18.47)$$

Скорости $v_{\text{н}}$ и $v_{\text{в}}$ берутся в симметричных точках относительно хорды длиной b (ширина крыла). Подставляя (18.47) в (18.39) и учитывая, что $v_{\text{н}} + v_{\text{в}} \approx 2v$, находим полную силу:

$$F_{\perp} = \int dF = \rho v L \int_0^b (v_{\text{в}} - v_{\text{н}}) dl = \rho v L \Gamma. \quad (18.48)$$

Эта формула получена Жуковским и носит его имя. Циркуляция Γ , определяющая подъемную силу, пропорциональна углу атаки и для плоского крыла

$$\Gamma = \frac{1}{2} \pi b v \alpha. \quad (18.49)$$

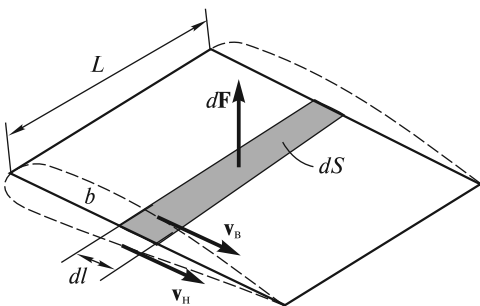


Рис. 18.28

Для профильного крыла, изображенного на рис. 18.28 штриховыми линиями, подъемная сила существует и при нулевом угле атаки ($\alpha = 0$) и исчезает, когда угол атаки достигает некоторой отрицательной величины.

Отметим, что при увеличении угла атаки растет и лобовое сопротивление (см. рис. 18.24). Отношение полезной подъемной силы к «вредной» силе ло-

бового сопротивления определяет «качество крыла». Для легких спортивных самолетов и истребителей это отношение находится в пределах $12 \div 15$, а для тяжелых грузовых и пассажирских самолетов достигает значений $17 \div 25$. Аэродинамическое качество повышается при улучшении обтекания (уменьшении C_x) и увеличении отношения длины крыла L к его ширине b .

Из распределения сил давления следует, что равнодействующая этих сил смещена к передней кромке крыла. Это необходимо принимать во внимание при определении моментов сил, действующих на крыло и определяющих устойчивость самолета. Весьма поучительным примером, иллюстрирующим смещение равнодействующей сил давления к передней кромке, является опыт с тонким диском, находящимся в потоке воздуха. Если струю от вентилятора направить на диск, который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, то диск займет устойчивое положение, при котором его плоскость перпендикулярна потоку воздуха (рис. 18.29). Если диск случайно повернется и кромка K_1 окажется ближе к вентилятору, чем кромка K_2 , то возникнет сила, точка приложения которой будет расположена между кромкой K_1 и осью вращения диска. Момент этой силы повернет диск в исходное устойчивое положение. Отметим, что положение, при котором плоскость диска направлена по потоку, также является положением равновесия, однако это равновесие является неустойчивым.

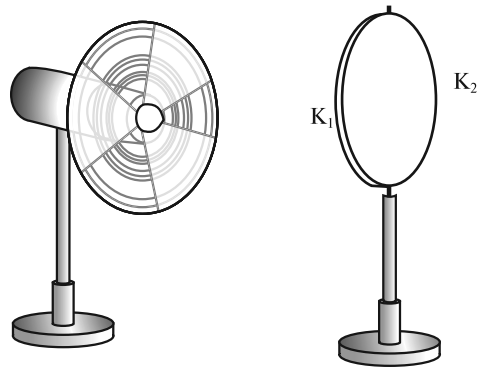


Рис. 18.29

Эффект Магнуса. Если расположить цилиндр поперек потока, то на него будет действовать сила лобового сопротивления. Однако если цилиндр привести во вращение вокруг своей оси, то появится также и поперечная к потоку сила, происхождение которой аналогично происхождению подъемной силы крыла. В наличии этой силы можно убедиться, наблюдая за траекторией падающего легкого пенопластового цилиндра, скатившегося с наклонной плоскости (рис. 18.30). Цилиндр падает под стол, что свидетельствует о наличии силы F_{\perp} , направленной перпендикулярно скорости движения оси цилиндра. Эта сила появляется вследствие вращения цилиндра в вязком воздухе. Само явление получило название *эффекта Магнуса*.

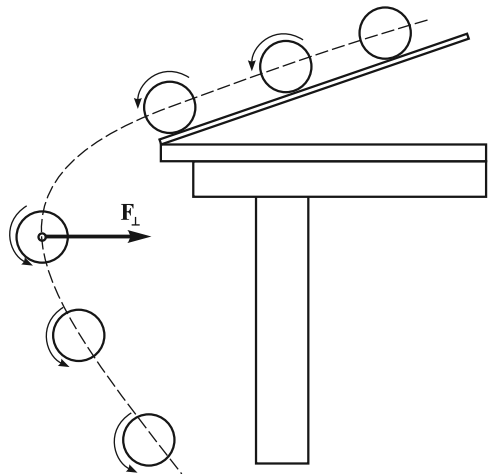


Рис. 18.30

При вращении цилиндра воздух в пограничном слое увлекается поверх-

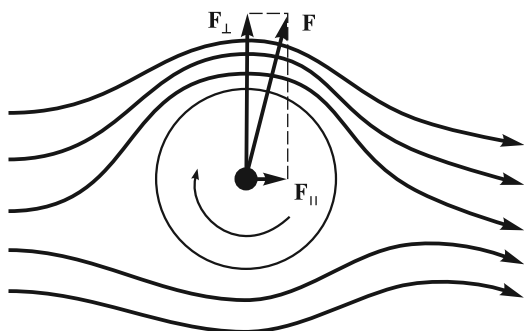


Рис. 18.31

ностью цилиндра. Обтекание вращающегося цилиндра будет выглядеть так, как показано на рис. 18.31. Скорость воздушного потока над цилиндром будет больше, чем под ним. Результирующая сила \mathbf{F} складывается из силы \mathbf{F}_\perp , направленной перпендикулярно потоку, и силы \mathbf{F}_\parallel , направленной вдоль него. Отметим, что сила \mathbf{F}_\perp возрастает с увеличением как скорости потока, так и угловой скорости вращения цилиндра.

Эффект Магнуса не получил широкого технического применения, хотя предпринимались попытки заменить паруса кораблей вращающимся цилиндром (ротором Флеттнера). Однако в спортивных играх с мячом последний часто подкручивают, чтобы задать полету мяча нужную траекторию.

Экранный эффект. Этот эффект заключается в увеличении подъемной силы, а также в снижении лобового сопротивления на высотах, соизмеримых с длиной хорды крыла летательного аппарата. Прирост подъемной силы крыла вблизи ровного участка Земли или поверхности воды (экрана) вызывается повышением динамического давления на нижней поверхности крыла вследствие близости экрана. Снижение лобового сопротивления связано с уменьшением интенсивности образования вихрей около концов крыльев.

Первыми начали изучать экранный эффект судостроители. Шведский ученый Э. Сведберг в 1716 г. предложил идею использования «воздушной подушки» для уменьшения сопротивления движению судов. Впоследствии эта идея нашла воплощение при строительстве экранопланов — воздушных судов, летающих вблизи экрана. Первый экспериментальный экраноплан был построен в 1935 г. финским инженером Т. Каарно. Разработка и производство экранопланов, не имеющих мировых аналогов, получили широкое развитие в 80-е годы в СССР. Полет экраноплана «Лунь» показан на рис. 18.32. Экраноплан может быть использован для перевозки пассажиров и грузов, поисково-спасательных работ, в военных целях и др. Скорость движения таких судов у экрана составляет 400—550 км/ч, при полете вне экрана — до 750 км/ч; высота полета вне экрана — до 7500 м; мореходность при посадке в море — до 5 баллов (высота волны до 3,5 м).

Сверхзвуковое обтекание тел. Обтекание тела воздушным потоком, скорость которого превышает скорость звука в воздухе, имеет ряд специфических особенностей. Рассмотрим вначале обтекание сильно вытянутого вдоль потока тела, напоминающего иглу (рис. 18.33). В непосредственной близости перед острием в точке O возникает возмущение плотности воздуха $\Delta\rho > 0$. Если это возмущение невелико ($\Delta\rho \ll \rho_0$), то оно распространяется в виде сферических волн, радиус которых R увеличивается со временем по закону $R = ct$, и одновременно сносится сверхзвуковым потоком. В результате возмущения будут находиться внутри так называемого конуса Маха с углом $\sin \alpha = c/v < 1$.

Воспользуемся принципом обратимости движения, согласно которому обтекание тела воздухом эквивалентно движению тела в неподвижном воздухе.

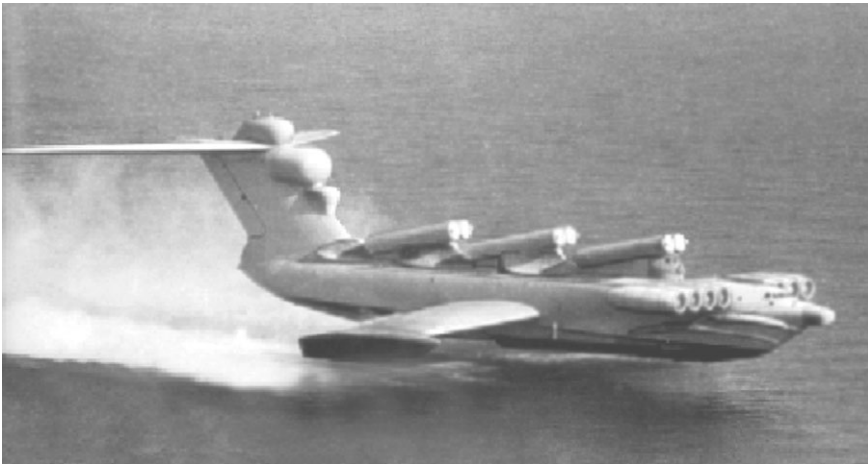


Рис. 18.32

С учетом этого можно сказать, что при движении тела со сверхзвуковой скоростью возбуждаются возмущения плотности и давления, локализованные внутри движущегося с телом конуса Маха. На границе области возмущений — поверхности конуса Маха — происходит скачкообразное изменение плотности и давления. Когда эта граница достигает неподвижных частиц воздуха, последние получают воздействие, подобное удару, и приходят в движение. Распространяющуюся таким образом волну возмущений называют ударной волной.

При обтекании сверхзвуковым потоком клина (рис. 18.34) линии тока «преломляются» на поверхности фронта ударной волны. При углах раскрытия клина, больших некоторого предельного, и для тел с тупой головной частью фронт ударной волны становится криволинейным и отходит от тела (рис. 18.35). Между поверхностью тела и фронтом волны образуется область с дозвуковым течением газа. На рис. 18.35 эта область ограничена фронтом ударной волны и штриховой линией, примыкающей к носовой части тела. Для классификации течения вводят число Маха $M = v/c$. Оно равно отношению скорости течения к

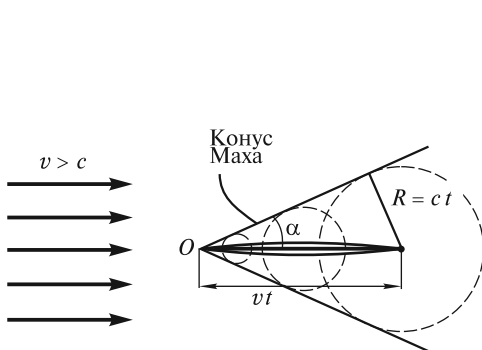


Рис. 18.33

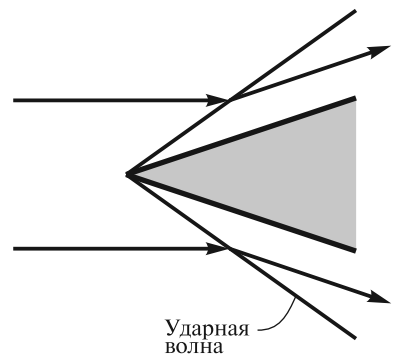


Рис. 18.34

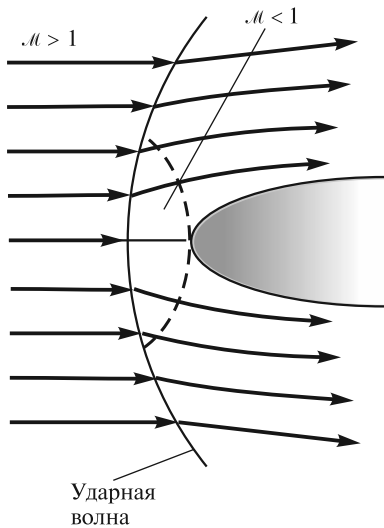


Рис. 18.35

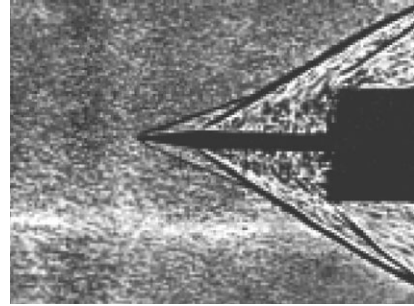


Рис. 18.36

скорости звука. В невозмущенном сверхзвуковом потоке $M > 1$, а в области дозвукового течения $M < 1$.

На образование ударных волн расходуется кинетическая энергия движущегося тела. Поэтому даже в отсутствие вязкости при сверхзвуковых скоростях возникает значительная сила лобового сопротивления. Эта сила существенно зависит от формы головной части движущегося тела. Например, игла, помещенная перед цилиндрическим телом (рис. 18.36), как бы рассекает поток, способствуя уменьшению лобового сопротивления.

Отдельно следует упомянуть об обтекании с гиперзвуковой скоростью, когда число Маха $M \gg 1$. Полет тел в газе с такими скоростями (например, спускаемых космических аппаратов) связан с увеличением температуры газа вблизи поверхности тела до очень больших значений. Это обусловлено адиабатическим нагревом сжимаемого воздуха перед головной частью тела. При высоких температурах необходимо учитывать изменение физико-химических свойств воздуха. Ограничимся лишь одним важным выводом из такого анализа: при очень больших числах Маха давление воздуха непосредственно перед головной частью значительно превышает давление воздуха на фронте ударной волны.

Коэффициент C_x лобового сопротивления при сверхзвуковом обтекании существенно зависит от формы тела. В частности, для заостренного тела $C_x \sim S^2/l^4$, где S — площадь поперечного сечения тела, l — его длина. На рис. 18.37 показаны зависимости коэффициентов C_x от числа Маха для тел (снарядов и пули) различной формы. При увеличении скорости до звуковой ($M \approx 1$) коэффициент лобового сопротивления резко возрастает; затем он постепенно уменьшается и при $M > 3$ «стабилизируется». Наименьшим коэффициентом C_x обладает узкая, заостренная на конус пуля (рис. 18.37, кривая IV).

Для уменьшения лобового сопротивления переднюю кромку крыла на сверхзвуковых самолетах, как и заднюю, делают заостренной, а сами крылья — скошенными (стреловидными). Одним из уникальных достижений современ-

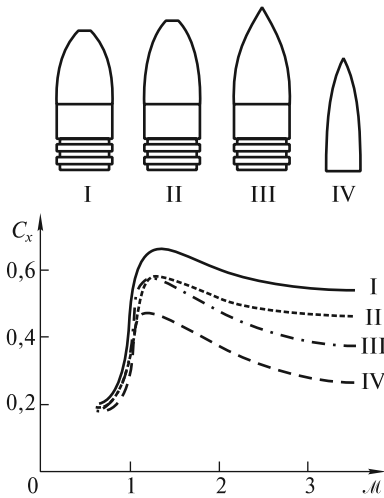


Рис. 18.37

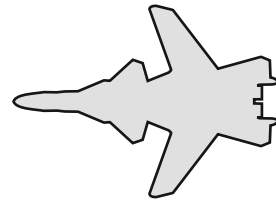


Рис. 18.38

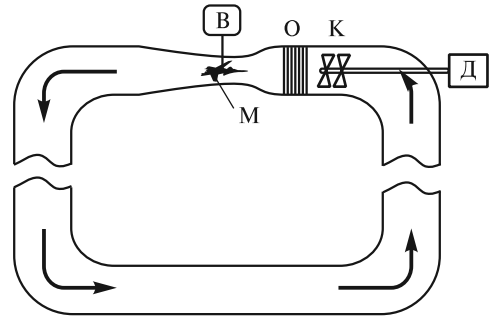


Рис. 18.39

ной аэродинамики является создание в России в 1997 г. новейшего истребителя Су-37, в конструкции которого использованы крылья с отрицательной стреловидностью. Его контур изображен на рис. 18.38. Такой самолет обладает увеличенной подъемной силой на малых и высоких скоростях и уникальными взлетно-посадочными характеристиками.

Гидродинамическое подобие. Взаимодействие летательных аппаратов с потоком воздуха изучают экспериментально в ходе летных испытаний. Для этого на борт устанавливается разнообразная аппаратура, фиксирующая аэродинамические нагрузки. Однако значительно больший объем информации удается получить при обдувании потоком воздуха летательного аппарата в натуральную величину или его уменьшенной геометрической копии (модели). Это осуществляется в аэродинамической трубе, схема которой изображена на рис. 18.39. В замкнутом канале переменного сечения с помощью мощного компрессора К, приводимого в действие двигателем Д, создается поток воздуха в направлении, указанном стрелками. После охладителя О воздух поступает в сопло Лаваля, в расширяющуюся часть которого помещается модель М. Эта модель связана с аэродинамическими весами В, позволяющими измерять силы и моменты сил, действующие на модель. Широкое распространение получили баллонные аэродинамические трубы, в которые воздух поступает из баллонов высокого давления (несколько тысяч атмосфер).

Аэродинамическая труба для экспериментов с объектами в натуральную величину является очень большой, сложной и чрезвычайно дорогостоящей установкой. В настоящее время в мире существуют уникальные аэродинамические трубы, позволяющие проводить испытания летательных аппаратов в натуральную величину при сверхзвуковых скоростях потоков. Первая в России аэродинамическая труба была построена Н. Е. Жуковским в 1902 г. в Московском

университете. В 1905 г. был открыт первый в России Аэродинамический институт в Кучино, а в 1918 г. создан Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), сыгравший выдающуюся роль в развитии отечественной авиации и космонавтики.

В экспериментах с моделями возникает проблема перенесения результатов эксперимента на реальные объекты. Ясно, что модель должна быть точной уменьшенной геометрической копией объекта. Если, например, бугорки на поверхности крыла реального самолета достигают нескольких микрометров, то у модели, уменьшенной в 10 раз, крылья должны быть отполированы до долей микрометра. Однако одного лишь геометрического подобия недостаточно. Надо также создать такие условия обтекания, при которых соотношения между всеми силами (давления, вязкости и т. д.) в модельных и реальных условиях были бы одинаковыми. Для дозвуковых скоростей критерием подобия натуральных и модельных экспериментов является равенство чисел Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho_M v_M l_M}{\eta_M} = \frac{\rho_N v_N l_N}{\eta_N}. \quad (18.50)$$

Здесь индексы «м» и «н» относятся к параметрам модельного и натурального экспериментов. Если, например, размер модели в 10 раз меньше размеров реального объекта ($l_M = 0,1l_N$), то подобие обтекания может быть достигнуто либо при десятикратном увеличении скорости потока, либо при таком же увеличении плотности воздуха. Второе чаще оказывается предпочтительнее, поскольку скорость v_M ограничена скоростью звука. Поэтому в аэродинамических трубах воздух сжимается до давления в несколько десятков атмосфер, что позволяет обеспечить условие (18.50).

В сверхзвуковом режиме, помимо (18.50), необходимо выполнение и второго условия подобия — равенства чисел Маха:

$$M = \frac{v_M}{c_M} = \frac{v_N}{c_N}. \quad (18.51)$$

РАЗДЕЛ 5

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ЛЕКЦИЯ 19

Чрезвычайно важными движениями являются такие, в которых объект совершает финитное (ограниченное) движение вблизи некоторого положения равновесия. Разумеется, под движением мы понимаем не только его простейшую форму — изменение положения объекта в пространстве, — но и любое изменение во времени свойств материи, распределенной в пространстве. *Колебаниями* называют процессы, повторяющиеся (или приблизительно повторяющиеся) во времени.

Любая система, колебания которой мы будем изучать, может быть охарактеризована некоторой физической величиной, отклонение которой $f(x, y, z, t)$ от равновесного значения зависит от координат и времени. В случае механических систем движущимися объектами являются точечные массы или физически малые элементы объема материальной среды (жидкости, газа, твердого тела и т. д.). Поэтому при описании колебаний таких систем функция $f(x, y, z, t)$ может характеризовать смещение (линейное или угловое), скорость, ускорение, деформацию, кинетическую или потенциальную энергию, давление и пр. При колебаниях в электрических системах колеблющейся величиной f может быть ток в цепи, заряд на пластинах конденсатора колебательного контура, напряжение на катушке индуктивности. В случае открытого колебательного контура в окружающем пространстве периодически изменяются величины напряженности электрического поля $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ и магнитной индукции $\mathbf{B}(x, y, z, t)$.

Колебания могут быть результатом кратковременного внешнего воздействия. Тогда они называются *свободными*, или *собственными*. Такие колебания происходят на частотах, обусловленных исключительно конструктивными особенностями системы, — собственных частотах, и продолжаются в течение некоторого характерного времени — времени затухания, зависящего от диссипации энергии в системе.

Для поддержания незатухающих колебаний к системе должна непрерывно подводиться энергия от внешнего источника. В этом случае колебания будут *вынужденными*. В зависимости от способа поддержания незатухающих колебаний различают вынужденные колебания под действием периодической силы, автоколебания, параметрические колебания, релаксационные колебания и т. д.

Далее мы рассмотрим все многообразие механических колебаний.

Незатухающие гармонические колебания систем с одной степенью свободы.

Если положение системы может быть описано одним единственным параметром $f(t)$, зависящим от времени, то такая система имеет одну степень свободы. Примерами таких систем являются хорошо известные математический и

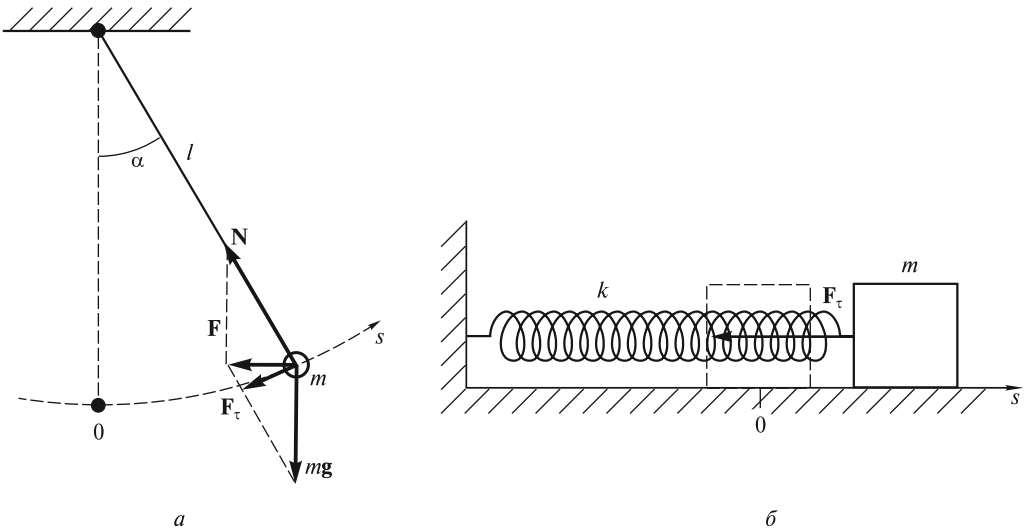


Рис. 19.1

пружинный маятники, изображенные на рис. 19.1, если первый из них движется в одной плоскости, а второй — по прямой. Для математического маятника $f(t)$ может характеризовать либо линейное смещение точечной массы m вдоль траектории [$f(t) = s(t)$], либо угловое отклонение от положения равновесия [$f(t) = \alpha(t)$] (рис. 19.1, а). Для пружинного маятника $f(t) = s(t)$, где $s(t)$ — смещение массы m из ее положения равновесия, изображенного штриховыми линиями (рис. 19.1, б).

Движение таких и подобных им систем можно описать на основе второго закона Ньютона:

$$ma = \mathbf{F}. \quad (19.1)$$

Если пренебречь силами сопротивления (в дальнейшем мы учтем их действие), то на массу m математического маятника будет действовать результирующая сила $\mathbf{F} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$ (\mathbf{N} — сила натяжения нити), направленная под углом к траектории, а на массу m пружинного маятника, лежащего на гладкой горизонтальной поверхности, — горизонтальная сила \mathbf{F}_τ , являющаяся функцией смещения s из положения равновесия.

Смещение $s(t)$ в случае математического маятника определяется тангенциальным ускорением. Уравнения движения для рассматриваемых маятников будут иметь вид

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s) = -mg \sin \frac{s}{l}; \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau(s), \quad (19.2)$$

где l — длина нити.

В первом уравнении использована проекция $F_\tau(s)$ результирующей силы \mathbf{F} на направление скорости в виде $F_\tau = -mg \sin \alpha = -mg \sin(s/l)$.

В этих примерах возвращающая сила $F_\tau(s)$ является нелинейной функцией смещения s . Поэтому точное решение уравнений (19.2) получить не удастся. Далее мы рассмотрим некоторые примеры таких нелинейных колебаний. Здесь

же будем считать смещения малыми по сравнению с длиной нити или длиной недеформированной пружины. При таких предположениях возвращающая сила пропорциональна смещению:

$$F_{\tau}(s) = -mg(s/l); \quad F_{\tau}(s) = -ks. \quad (19.3)$$

Выражение слева записано с учетом условия $\sin(s/l) \approx (s/l)$, а справа — с использованием закона Гука, справедливого при малых деформациях пружины с жесткостью k .

С учетом (19.3) уравнения (19.2) принимают одинаковый вид

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s; \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k}{m}s. \quad (19.4)$$

Различаются лишь коэффициенты в правых частях этих уравнений, которые численно равны отношению возвращающей силы при единичном смещении к массе колеблющегося тела. Если использовать обозначения

$$\omega_0^2 = g/l; \quad \omega_0^2 = k/m, \quad (19.5)$$

то уравнения (19.4) примут вид уравнения незатухающих гармонических колебаний, или уравнения гармонического осциллятора

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega_0^2 s. \quad (19.6)$$

Решением уравнения (19.6) является семейство гармонических функций

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (19.7)$$

в чем легко убедиться, дважды продифференцировав функцию $s(t)$ по времени:

$$\frac{ds}{dt} = s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0); \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -s_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 s.$$

Заметим, что в случае, когда уравнение движения приводится к виду (19.4), его решением являются гармонические функции (19.7) с *угловой частотой* ω_0 , равной корню квадратному из абсолютного значения коэффициента при s . Значения этих гармонических функций в начальный момент времени (при $t = 0$) определяются *начальной фазой* φ_0 (см. ниже) и *амплитудой колебаний* s_0 . У одной и той же системы эти значения могут быть различными при разных способах возбуждения колебаний.

Чтобы возбудить собственные колебания, надо вначале (при $t = 0$) либо отклонить тело [задать начальное смещение $s(0)$], либо толкнуть его [задать начальную скорость $\frac{ds}{dt}(0) = v(0)$], либо сделать и то, и другое одновременно. Знание начальных условий (смещения и скорости) позволяет определить амплитуду s_0 и начальную фазу колебаний φ_0 из уравнений:

$$s(0) = s(t)|_{t=0} = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)|_{t=0} = s_0 \sin \varphi_0; \quad (19.8)$$

$$v(0) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = s_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)|_{t=0} = s_0 \omega_0 \cos \varphi_0. \quad (19.9)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$s_0 = \sqrt{s^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega_0^2}}; \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0 s(0)}{v(0)}. \quad (19.10)$$

Важно отметить, что при наличии начального толчка амплитуда колебаний s_0 , равная максимальному смещению тела из положения равновесия, может превышать начальное смещение $s(0)$.

Наряду с угловой частотой ω_0 колебания характеризуются *частотой* $\nu_0 = \omega_0/2\pi$, равной числу колебаний в единицу времени, и *периодом колебаний* $T = 1/\nu_0$, равным длительности одного колебания. Период гармонических колебаний (равно как и частоты ω_0 и ν_0) не зависит от начальных условий и равен

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}; \quad T = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (19.11)$$

Другим примером являются колебания *физического маятника* (рис. 19.2) — тела произвольной формы массой m , закрепленного на горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O' . Центр масс тела находится в точке O , удаленной от оси на расстояние a . При отклонении маятника от вертикали на небольшой угол α он будет совершать свободные гармонические колебания под действием силы тяжести, приложенной к центру масс. Уравнение вращательного движения запишется в виде

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M = -mga \sin \alpha, \quad (19.12)$$

где J — момент инерции тела относительно оси вращения.

Если считать, что при вращении, например, против часовой стрелки угол α увеличивается, то момент силы тяжести M вызывает уменьшение этого угла и, следовательно, при $\alpha > 0$ момент $M < 0$. Это и отражает знак минус в правой части (19.12).

Для малых углов отклонения уравнение (19.12) переходит в уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mga}{J} \alpha, \quad (19.13)$$

из которого сразу ясно, что частота ω_0 и период T колебаний равны соответственно:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}. \quad (19.14)$$

Сравнивая выражения для периода колебаний физического (19.14) и математического (19.11) маятников, легко видеть, что оба периода совпадают, если

$$\frac{J}{ma} = l. \quad (19.15)$$

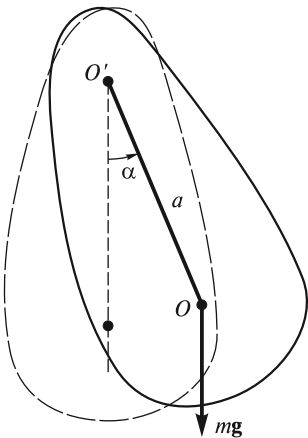


Рис. 19.2

Поэтому физический маятник характеризуется *приведенной длиной* (19.15), которая равна длине математического маятника с таким же периодом колебаний.

Период колебаний физического маятника (а следовательно, и его приведенная длина l) немонотонно зависит от расстояния a . Это легко заметить, если, в соответствии с теоремой Гюйгенса—Штейнера, момент инерции J выразить через момент инерции J_0 относительно параллельной горизонтальной оси, проходящей через центр масс: $J = J_0 + ma^2$. Тогда период колебаний (19.14) будет равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + ma^2}{mga}}. \quad (19.16)$$

Изменение периода колебаний при удалении оси вращения от центра масс O в обе стороны на расстояние a показано на рис. 19.3. Видно, что один и тот же период колебаний может реализоваться относительно любой из четырех осей, расположенных попарно по разные стороны от центра масс. Можно показать, что сумма расстояний a_1^+ и a_2^+ равна приведенной длине физического маятника: $l = a_1^+ + a_2^+$. В силу симметрии графика ясно, что

$$l = a_2^+ + a_1^-. \quad (19.17)$$

Это обстоятельство позволяет для любой оси вращения O^+ определить сопряженную ось O^- . Периоды колебаний относительно этих осей одинаковы, а расстояние между осями равно приведенной длине физического маятника. На рис. 19.4 изображены положения осей O^+ и O^- , при этом ось вращения, удаленная на расстояние a_2^- , при такой форме маятника находится вне его.

Физический маятник применяют для измерения ускорения свободного падения. С этой целью определяют зависимость периода колебаний маятника от положения оси вращения и по этой экспериментальной зависимости находят, в соответствии с формулой (19.17), приведенную длину. Определенная таким образом приведенная длина в сочетании с измеренным с хорошей точностью периодом колебаний относительно обеих осей позволяет рассчитать ускорение свободного падения. Важно отметить, что при таком способе измерений не требуется определять положение центра масс, что в ряде случаев повышает точность измерений.

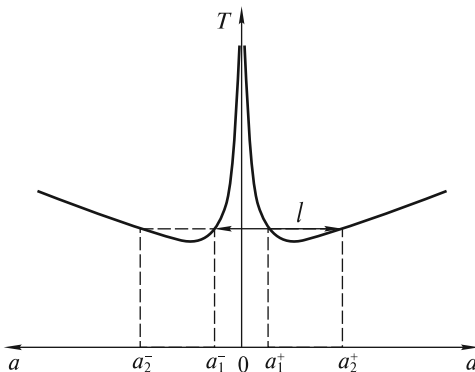


Рис. 19.3

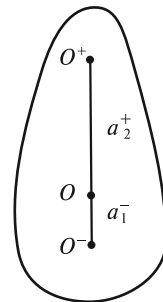


Рис. 19.4

Метод векторных диаграмм. Гармонические колебания (19.7) допускают наглядную графическую интерпретацию. Ее смысл состоит в том, что каждому гармоническому колебанию с угловой частотой ω_0 можно поставить в соответствие вращающийся с угловой скоростью ω_0 вектор, длина которого равна амплитуде s_0 , а его начальное (стартовое) положение задается углом φ_0 , совпадающим с начальной фазой (рис. 19.5).

Вертикальная проекция вектора \mathbf{s}_0 изменяется со временем: $s(t) = s_0 \sin \varphi(t)$. Мгновенное положение вектора \mathbf{s}_0 определяется углом $\varphi(t)$, который называется *фазой*:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0. \quad (19.18)$$

При угловой скорости (угловой частоте) ω_0 вектор совершает $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ оборотов (циклов) в секунду, а продолжительность одного оборота (период) составляет $T = 2\pi/\omega_0$.

С помощью векторных диаграмм легко осуществить сложение гармонических колебаний. Так, если необходимо сложить два гармонических колебания с одинаковыми частотами:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_{01} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + s_{02} \sin(\omega_0 t + \varphi_2) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

то амплитуду s_0 и начальную фазу φ_0 суммарного колебания $s(t)$ с той же частотой ω_0 можно рассчитать из рис. 19.6, на котором показано сложение векторов \mathbf{s}_{01} и \mathbf{s}_{02} в момент времени $t = 0$:

$$s_0 = \sqrt{(s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2)^2 + (s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2)^2};$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{s_{01} \sin \varphi_1 + s_{02} \sin \varphi_2}{s_{01} \cos \varphi_1 + s_{02} \cos \varphi_2}.$$

Ясно, что вертикальная проекция вектора \mathbf{s}_0 будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой ω_0 , поскольку взаимное расположение векторов \mathbf{s}_{01} и \mathbf{s}_{02} не изменяется с течением времени. Как видно из этой диаграммы, суммарное колебание $s(t)$ опережает по фазе колебание $s_1(t)$ и отстает по

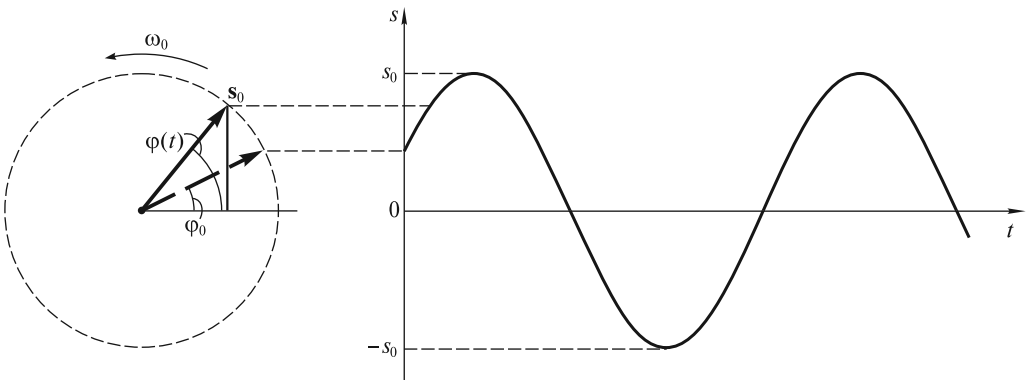


Рис. 19.5

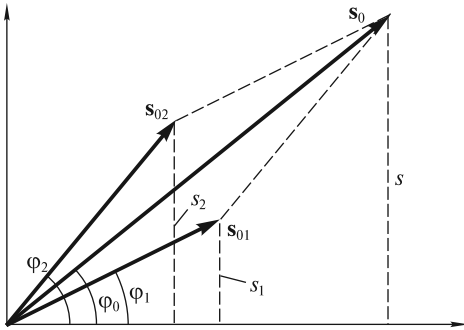


Рис. 19.6

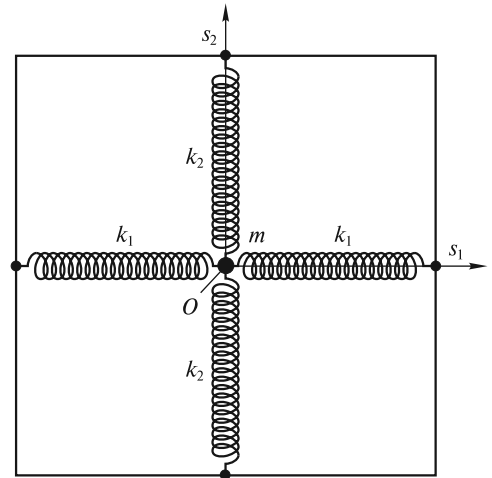


Рис. 19.7

фазе от колебания $s_2(t)$. Полная фаза для каждого из трех колебаний в произвольный момент времени отличается от их начальных фаз на одну и ту же величину $\omega_0 t$, которую при построении векторных диаграмм не учитывают.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Рассмотрим колебательную систему, состоящую из небольшого груза массой m и четырех связанных с ним невесомых пружин (рис. 19.7) — усложненный вариант приведенного выше пружинного маятника.

Если груз движется по гладкой горизонтальной поверхности (на рисунке показан вид сверху), то его положение определяется двумя координатами: $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Такая система обладает двумя степенями свободы. Будем считать смещения малыми, чтобы, во-первых, выполнялся закон Гука, и, во-вторых, при смещении вдоль направления s_1 деформации пружин с жесткостью k_2 не приводили к сколько-нибудь заметному вкладу в возвращающую силу $F_1 = -2k_1 s_1$. Аналогично, при смещении в перпендикулярном направлении s_2 возвращающая сила $F_2 = -2k_2 s_2$. При таких условиях колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях происходят независимо друг от друга:

$$s_1(t) = s_{01} \sin(\omega_{01} t + \varphi_1); \quad s_2(t) = s_{02} \sin(\omega_{02} t + \varphi_2). \quad (19.19)$$

Здесь собственные частоты гармонических колебаний определяются выражениями:

$$\omega_{01} = \sqrt{2k_1/m}; \quad \omega_{02} = \sqrt{2k_2/m}, \quad (19.20)$$

а амплитуды и начальные фазы определяются начальными условиями.

При возбуждении колебаний в такой системе при произвольном соотношении собственных частот ω_{01} и ω_{02} траектория колеблющегося груза может быть весьма сложной. Ее, в принципе, можно проанализировать, принимая во внимание тот факт, что результирующее движение груза является суперпозицией двух взаимно перпендикулярных независимых колебаний.

Рассмотрим вначале движение груза в случае $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ (жесткости всех пружин одинаковы). Чтобы получить траекторию движения, исключим из (19.19) текущее время. Для этого перепишем (19.19) в виде

$$\frac{s_1}{s_{01}} = \sin \omega_0 t \cos \varphi_1 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_1; \quad (19.21)$$

$$\frac{s_2}{s_{02}} = \sin \omega_0 t \cos \varphi_2 + \cos \omega_0 t \sin \varphi_2.$$

Умножим первое уравнение (19.21) на $\cos \varphi_2$, а второе — на $\cos \varphi_1$ и вычтем второе уравнение из первого. В результате получим

$$\frac{s_1}{s_{01}} \cos \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \cos \varphi_1 = \cos \omega_0 t \sin (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (19.22a)$$

Теперь умножим первое уравнение на $\sin \varphi_2$, а второе — на $\sin \varphi_1$, повторим вычитание и получим

$$\frac{s_1}{s_{01}} \sin \varphi_2 - \frac{s_2}{s_{02}} \sin \varphi_1 = \sin \omega_0 t \sin (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (19.22b)$$

Наконец, возведем в квадрат каждое из равенств (19.22) и сложим их. В результате время будет исключено, а уравнением траектории движущегося груза будет уравнение эллипса:

$$\left(\frac{s_1}{s_{01}} \right)^2 + \left(\frac{s_2}{s_{02}} \right)^2 - 2 \frac{s_1}{s_{01}} \frac{s_2}{s_{02}} \cos (\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2 (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (19.23)$$

Таким образом, в общем случае груз будет совершать периодические движения по эллиптической траектории. Направление движения вдоль траектории и ориентация эллипса относительно осей $O s_1$ и $O s_2$ зависят от начальной разности фаз $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. На рис. 19.8 изображены траектории движения груза при различных значениях $\Delta \varphi$. Все траектории заключены в прямоугольник со сторонами $2s_{01}$ и $2s_{02}$. При $\Delta \varphi = 0$ и $\Delta \varphi = \pi$ груз движется по прямой линии. При $\Delta \varphi = \pi/2$ и $\Delta \varphi = 3\pi/2$ полуоси эллипса совпадают с $O s_1$ и $O s_2$ (при $s_{01} = s_{02}$ эллипс вырождается в окружность). При разности фаз $0 < \Delta \varphi < \pi$ груз движется по часовой стрелке, а при $\pi < \Delta \varphi < 2\pi$ — против часовой стрелки.

Типичным примером двумерного осциллятора (маятника) является электрон в атоме, который движется вокруг ядра по эллиптической орбите с периодом обращения $T \approx 10^{-15}$ с. Можно считать, что такой электрон одновременно совершает два взаимно перпендикулярных колебания с частотой $\omega_0 = 2\pi/T \sim 10^{16}$ с⁻¹.

Если частоты двух взаимно перпендикулярных колебаний не совпадают, но являются кратными: $m\omega_{02} = n\omega_{01}$, где m и n — целые числа, то траектории движения представляют собой замкнутые кривые, называемые *фигурами Лиссажу* (рис. 19.9). Отметим, что отношение частот колебаний равно отношению чисел точек касания фигуры Лиссажу сторон прямоугольника, в который она вписана. Если кратность между частотами отсутствует, то траектории не являются замкнутыми и постепенно заполняют весь прямоугольник, напоминая нить в клубке.

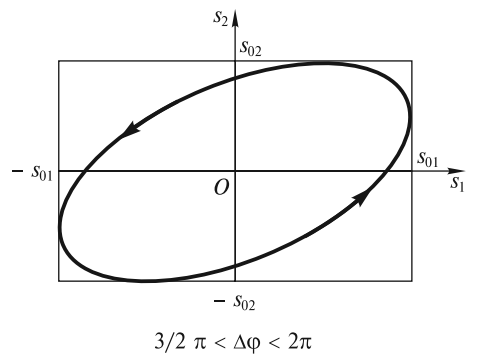
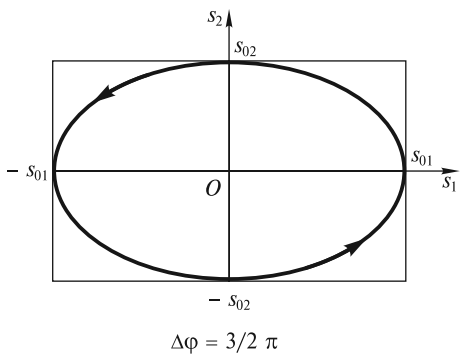
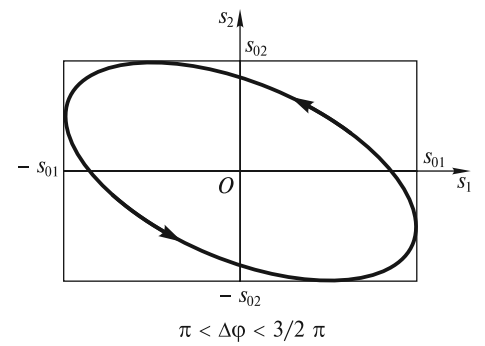
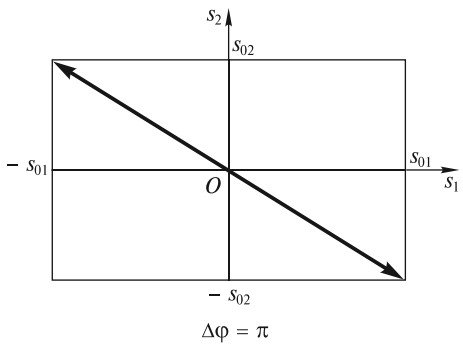
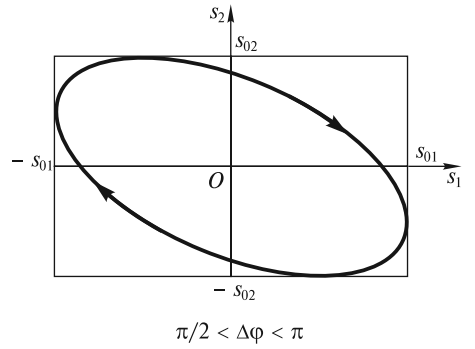
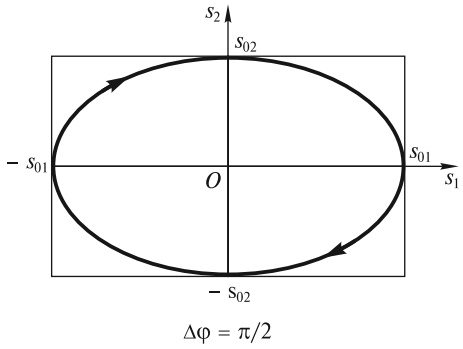
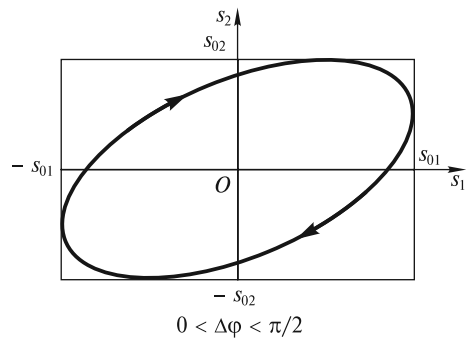
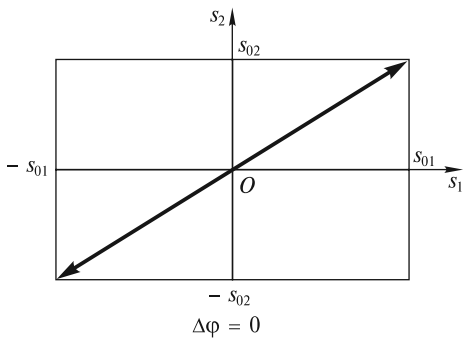


Рис. 19.8

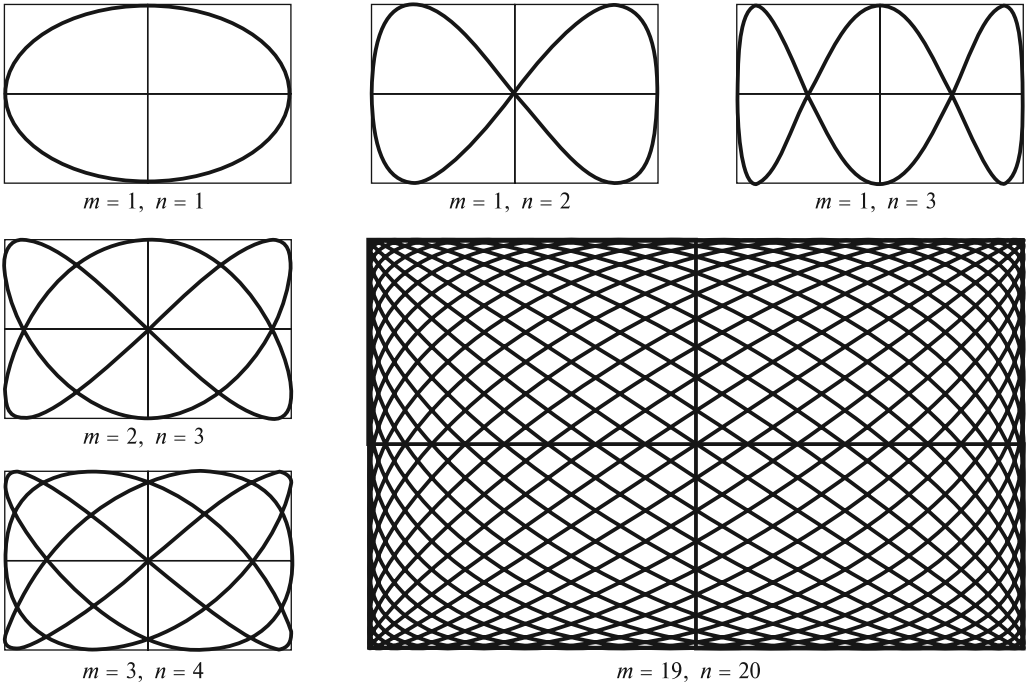


Рис. 19.9

Фазовый портрет колебательной системы. В любой колебательной системе с одной степенью свободы смещение $s(t)$ и скорость $v(t) = ds/dt$ меняются со временем. Состояние системы в каждый момент времени можно охарактеризовать значениями s и v . На плоскости (s, v) это состояние однозначно определяется положением изображающей точки P (рис. 19.10). С течением времени изображающая точка перемещается по кривой, которую называют *фазовой траекторией* движения.

Плоскость переменных s и v называется *фазовой плоскостью*. Семейство фазовых траекторий образует *фазовый портрет* колебательной системы. Анализ фазового портрета дает хотя и не полную, но обширную информацию о колебательной системе. К построению такого портрета прибегают тогда, когда не удастся аналитически решить уравнение, описывающее сложные колебания.

В первую очередь это относится к нелинейным колебаниям, анализ которых затруднен из-за отсутствия точных решений нелинейных уравнений.

Вначале проиллюстрируем сказанное на примере простейших гармонических колебаний вида

$$s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Поскольку скорость $v(t) = \frac{ds}{dt} = s_0 \omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ опережает смещение по фазе на $\pi/2$, то фазовая траектория будет эллипсом. Точка P будет двигаться по эллиптической траекто-

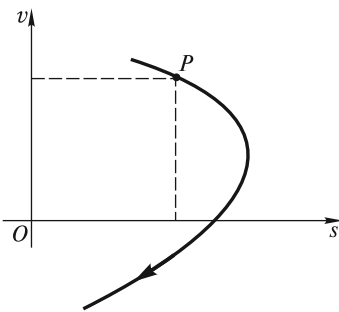


Рис. 19.10

рии по часовой стрелке [при $v > 0$ смещение s увеличивается, а при $v < 0$ — уменьшается (рис. 19.11)].

Параметры эллипса определяются энергией, запасенной гармоническим осциллятором. Потенциальная энергия пружинного маятника пропорциональна квадрату смещения:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} ks^2 = \frac{1}{2} k s_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (19.24)$$

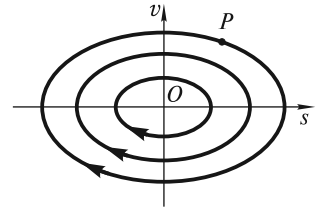


Рис. 19.11

Кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости:

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} k \omega_0^2 s_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (19.25)$$

Принимая во внимание равенство $k = m\omega_0^2$, легко заметить, что взаимопревращения одного вида энергии в другой за период происходят дважды. При этом полная энергия системы остается постоянной:

$$E_0 = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \frac{1}{2} m(\omega_0^2 s^2 + v^2). \quad (19.26)$$

Равенство (19.26) как раз и является уравнением эллипса, которое можно переписать в более удобном виде:

$$s^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = \frac{2E_0}{m\omega_0^2}. \quad (19.27)$$

Фазовый портрет гармонического осциллятора представляет собой семейство эллипсов, каждому из которых соответствует свое значение энергии E_0 , запасенной осциллятором. Положению равновесия соответствует точка O (рис. 19.11), которая называется особой точкой типа «центр». С увеличением энергии E_0 возрастают амплитуды колебаний смещения (s_0) и скорости ($s_0\omega_0$). Колебания, как правило, перестают быть гармоническими, а фазовые траектории — эллипсами.

Проанализируем колебания математического маятника при произвольных углах α отклонения от положения равновесия. При этом будем считать, что точечная масса m прикреплена не к нити, а к жесткому невесомому стержню длиной l (рис. 19.12). Первое из уравнений (19.2) запишем в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin \alpha. \quad (19.28)$$

Это нелинейное уравнение не имеет аналитического решения; позднее мы приведем его приближенное решение. Однако многие закономерности таких колебаний можно проанализировать с использованием фазового портрета на плоскости (α ; $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$). С этой целью уравнение (19.28) надо преобразовать к такому виду, чтобы в нем остались только эти переменные, а время было бы исключено. Для этого угловое ускорение в левой части (19.28) преобразуем к виду

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt} = \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} \cdot \dot{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\alpha}^2)}{d\alpha}. \quad (19.29)$$

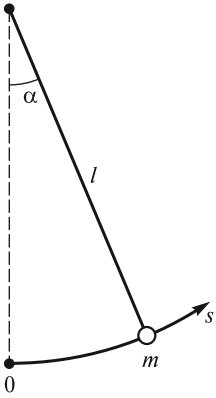


Рис. 19.12

Подставляя (19.29) в (19.28), получим:

$$\frac{1}{2} d(\dot{\alpha}^2) = -\omega_0^2 \sin \alpha d\alpha. \quad (19.30)$$

Уравнение (19.30) отражает тот факт, что приращение кинетической энергии маятника равно убыли его потенциальной энергии в поле силы тяжести. Интегрируя (19.30), находим

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} - \omega_0^2 \cos \alpha = \text{const}. \quad (19.31)$$

Принимая, что потенциальная энергия маятника в положении равновесия равна нулю, константу можно выразить

через запасенную маятником энергию $E_0 = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}_0^2$ ($\dot{\alpha}_0$ —

угловая скорость маятника в положении равновесия):

$$\text{const} = \frac{E_0}{ml^2} - \omega_0^2. \quad (19.32)$$

Уравнение фазовой траектории (19.31) окончательно запишется в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{\alpha}^2}{\omega_0^2} + (1 - \cos \alpha) = \frac{E_0}{ml^2 \omega_0^2}. \quad (19.33)$$

При этом кинетическая и потенциальная энергии задаются выражениями:

$$E_k = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}^2; \quad E_p = ml^2 \omega_0^2 (1 - \cos \alpha). \quad (19.34)$$

Для наглядности последующего изложения зависимость $E_p(\alpha)$ представлена на рис. 19.13, а.

Используя (19.33), построим фазовый портрет системы (рис. 19.13, б). Отчетливо видны два типа фазовых траекторий, соответствующие двум типам движения. Замкнутые траектории, окружающие особые точки типа «центр» с координатами $\dot{\alpha} = 0$, $\alpha = 2\pi n$ (n — целое число), соответствуют колебаниям маятника относительно устойчивого нижнего положения равновесия. Такие колебания имеют место в случае $E_0 < 2ml^2 \omega_0^2 = 2mgl$ (см. рис. 19.13, а). При этом, если $E_0 \ll 2mgl$, то колебания будут гармоническими, а фазовые траектории — эллипсами. Если $E_0 \lesssim 2mgl$, то колебания будут негармоническими. При увеличении энергии, а значит, и амплитуды колебаний осциллятора их период будет возрастать.

Верхнему положению равновесия с координатами $\dot{\alpha} = 0$, $\alpha = (2n - 1)\pi$ соответствуют особые точки типа «седло». Фазовые кривые, проходящие через «седла», называются сепаратрисами. Им соответствует энергия $E_0 = 2mgl$.

Если, наконец, $E_0 > 2mgl$, то получаются незамкнутые (убегающие) траектории, соответствующие вращательному движению маятника. Таким образом, сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на две области: область замкнутых траекторий и область траекторий, приходящих из бесконечности и уходящих в бесконечность.

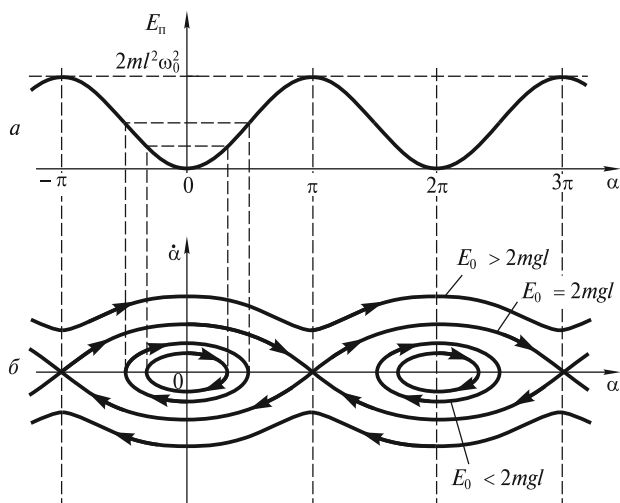


Рис. 19.13

Отметим, что для негармонических колебаний нельзя употреблять термин «круговая частота», поскольку, как будет показано ниже, такие колебания являются, как правило, суперпозицией гармонических колебаний с различными частотами. Период же является по-прежнему одной из главных характеристик колебаний.

Фазовый портрет не позволяет определить, как быстро движется точка P по траектории. Период нелинейных колебаний математического маятника можно получить на основе приближенного решения уравнения (19.28).

Негармонические колебания математического маятника. Колебания математического маятника при больших амплитудах, как уже отмечалось, не будут гармоническими. Это связано с тем, что возвращающая сила пропорциональна $\sin \alpha$ и при больших α становится меньше той «линейной» силы (пропорциональной α), которая возвращает колеблющуюся массу в положение равновесия за неизменное время, равное четверти периода колебаний. Такая «линейная» сила обеспечивает независимость этого времени от амплитуды α_0 , т.е. изохронность колебаний.

Для анализа колебаний при больших амплитудах α_0 запишем разложение $\sin \alpha$ в ряд:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \dots, \quad (19.35)$$

в котором отброшены члены более высокого порядка, пропорциональные α^5 , α^7 и т.д. Подстановка (19.35) в (19.28) приводит к нелинейному уравнению колебаний:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = \frac{\omega_0^2}{6} \alpha^3. \quad (19.36)$$

Решением этого уравнения уже не будет гармоническая функция. Действительно, допустим, что решением уравнения (19.36) будет гармоническое ко-

лебание вида $\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$. Подставляя это выражение в правую часть (19.36) и учитывая тригонометрическое тождество

$$\sin^3 \omega t \equiv \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t, \quad (19.37)$$

приходим к противоречию. Получается так, что нелинейный член в правой части уравнения изменяется во времени не только с основной частотой ω , но также и с утроенной частотой 3ω (частотой третьей гармоники). Чтобы устранить это противоречие, будем считать, что колебания маятника происходят одновременно на частотах ω и 3ω так, что

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + \varepsilon \alpha_0 \sin 3(\omega t + \varphi_0), \quad (19.38)$$

где ε — безразмерный параметр.

Подставляя (19.38) в (19.36), снова обнаруживаем, что нелинейный член, помимо двух частот ω и 3ω , меняется во времени и на частоте 9ω . Это говорит о том, что решение (19.38) не является полным (в нем отсутствуют высшие гармоники 9ω , 27ω и т.д.). Между тем, если амплитуда колебаний α_0 не очень велика, то параметр $\varepsilon \ll 1$, и отсутствующие члены с высшими гармониками имеют амплитуды $\varepsilon^2 \alpha_0$, $\varepsilon^3 \alpha_0$ и т.д., которые много меньше амплитуды третьей гармоники $\varepsilon \alpha_0$.

Теперь рассчитаем частоту ω . Для простоты положим $\varphi_0 = 0$ (маятник получает начальный толчок в положении равновесия). Используя (19.38), запишем каждый из трех членов уравнения (19.36), опуская слагаемые, имеющие порядок малости ε^2 и выше:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\omega^2 \alpha_0 \sin \omega t - 9\omega^2 \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega t;$$

$$\omega_0^2 \alpha = \omega_0^2 \alpha_0 \sin \omega t + \omega_0^2 \varepsilon \alpha_0 \sin 3\omega t; \quad (19.39)$$

$$-\frac{1}{6} \omega_0^2 \alpha^3 = -\frac{3\omega_0^2}{24} \alpha_0^3 \sin \omega t + \frac{\omega_0^2}{24} \alpha_0^3 \sin 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{2} \alpha_0^3 \varepsilon \sin^2 \omega t \sin 3\omega t.$$

Заметим, что в последнем равенстве третье слагаемое в правой части, содержащее множитель $\alpha_0^3 \varepsilon$, мало по сравнению с двумя предыдущими, и его также можно отбросить.

Сложим полученные три равенства. В силу (19.36), сумма левых частей равенств (19.39) равна нулю. Поэтому

$$0 = \alpha_0 \left(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24} \omega_0^2 \alpha_0^2 \right) \sin \omega t + \alpha_0 \left(-9\omega^2 \varepsilon + \omega_0^2 \varepsilon + \frac{1}{24} \omega_0^2 \alpha_0^2 \right) \sin 3\omega t. \quad (19.40)$$

Поскольку равенство (19.40) должно выполняться для любого момента времени, то каждое из выражений, стоящих в круглых скобках, должно равняться нулю. Из равенства нулю первого выражения можно определить квадрат частоты основной гармоники:

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8} \alpha_0^2 \right). \quad (19.41)$$

Если $\frac{\alpha_0^2}{8} \ll 1$, то для частоты ω получим

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{8} \right)^{1/2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16} \right). \quad (19.42)$$

Последнее выражение показывает, что с возрастанием амплитуды колебаний их частота уменьшается (период увеличивается), т. е. нарушается изохронность колебаний.

Далее приравняем нулю второе выражение в круглых скобках в формуле (19.40):

$$-9\omega^2\varepsilon + \omega_0^2\varepsilon + \frac{\omega_0^2}{24}\alpha_0^2 = 0. \quad (19.43)$$

Считая, что $\omega \approx \omega_0$, находим выражение для малого коэффициента ε :

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0^2}{192}. \quad (19.44)$$

Если положить $\alpha_0 = 15^\circ \approx 0,26$ рад, то $\varepsilon \approx 3,5 \cdot 10^{-4}$, и вклад третьей гармоники в колебания ничтожно мал. Отличие частоты ω от частоты гармонических колебаний ω_0 составит величину:

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\alpha_0^2}{16} \approx 4,2 \cdot 10^{-3}. \quad (19.45)$$

Даже при $\alpha_0 \approx 1$ рад $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-3}$, а $(\omega_0 - \omega)/\omega_0 \approx 6\%$. Таким образом, приближенным решением уравнения (19.36) будет (19.38), где частоту ω определяют из (19.41), а параметр ε — из (19.44).

Заметим, что негармонические колебания могут возникать не только при больших отклонениях системы от положения равновесия. Например, если в разложении возвращающей силы $F_\tau(s)$ по степеням s отсутствует линейный член, и оно начинается с выражения, пропорционального s^3 , то колебания будут негармоническими при любых, даже сколь угодно малых отклонениях.

Свободные колебания в диссипативных системах с вязким трением. В реальных системах всегда происходит диссипация энергии. Если потери энергии не будут компенсироваться за счет внешних устройств, то колебания будут затухать и через какой-то промежуток времени прекратятся вовсе.

Формально затухающие колебания описываются уравнением:

$$m\ddot{s} = F_\tau(s) + F_{\text{тр}}(\dot{s}), \quad (19.46)$$

которое, в отличие от (19.2), помимо возвращающей силы F_τ содержит и силу трения $F_{\text{тр}}$. Сила сопротивления движению зависит как от направления скорости (например, при сухом трении), так и от ее величины (при движении в вязкой среде). Если возвращающая сила пропорциональна смещению: $F_\tau(s) = -ks$, где k — коэффициент пропорциональности (для пружинного маятника — жесткость пружины), то уравнение (19.46) можно переписать в виде

$$\ddot{s} - \frac{F_{\text{тр}}}{m} + \omega_0^2 s = 0, \quad (19.47)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота незатухающих гармонических колебаний.

Вначале мы рассмотрим затухающие колебания в случае, когда на колеблющееся тело действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости: $F_{\text{тр}} = -\Gamma \dot{s}$. Такая ситуация может иметь место, например, при колебательном движении тела в воздухе или жидкости, когда число Рейнольдса $\text{Re} \lesssim 1$. Тогда уравнение (19.47) можно записать в виде

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = 0, \quad (19.48)$$

где $\delta = \Gamma/2m$ — коэффициент, или показатель затухания.

Общая идея решения однородных линейных уравнений типа (19.48) заключается в следующем: в качестве функциональной зависимости $s(t)$ надо выбрать такую, которая при дифференцировании по времени переходит сама в себя, т. е. $s(t) = s_0 e^{\lambda t}$. Подставим ее в уравнение (19.48):

$$s_0 e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) = 0. \quad (19.49)$$

Поскольку $e^{\lambda t} \neq 0$, получаем так называемое характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (19.50)$$

которое в данном случае (для уравнения второго порядка) имеет два корня:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (19.51)$$

а само уравнение (19.48) — два независимых решения: $s_1(t) = s_{01} e^{\lambda_1 t}$ и $s_2(t) = s_{02} e^{\lambda_2 t}$. В силу линейности уравнения (19.48) сумма любых его решений также является решением, т. е. справедлив принцип суперпозиции, и общим решением данного уравнения является:

$$s(t) = s_{01} e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + s_{02} e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (19.52)$$

Решение содержит две независимые константы s_{01} и s_{02} , которые определяются из начальных условий $s(0)$, $v(0)$.

В зависимости от соотношения между δ и ω_0 возможны три случая.

Если $\delta < \omega_0$, то $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, где $i \equiv \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Поскольку начальные условия действительные, то с помощью формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (19.53)$$

нетрудно показать, что общее решение будет действительным и может быть записано в виде

$$s(t) = s_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (19.54)$$

т. е. представляет собой затухающие колебания, частота ω которых меньше, чем у собственных незатухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (19.55)$$

Колебания, описываемые (19.54), не являются гармоническими (рис. 19.14). Их амплитудой обычно называют величину

$$A(t) = s_0 e^{-\delta t}, \quad (19.56)$$

которая монотонно убывает со временем. Длительность колебаний характеризуется *временем затухания*

$$\tau = 1/\delta. \quad (19.57)$$

Если δ из (19.57) подставить в (19.56), то можно увидеть, что по истечении времени затухания τ амплитуда убывает в e раз. Количество совершенных системой колебаний за время τ равно отношению этого времени к периоду затухающих колебаний $T = 2\pi/\omega$. Если затухание в системе мало ($\delta \ll \omega_0$), то период колебаний $T \approx 2\pi/\omega_0$ и число этих колебаний велико:

$$N = \frac{\tau}{T} \approx \frac{\omega_0}{2\pi\delta} \gg 1. \quad (19.58)$$

Экспоненциальный закон убывания амплитуды со временем позволяет ввести безразмерный параметр — *логарифмический декремент затухания* θ , который равен логарифму отношения двух последовательных отклонений в одну и ту же сторону:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T. \quad (19.59)$$

Из (19.57) — (19.59) находим:

$$\theta = 1/N. \quad (19.60)$$

Логарифмический декремент затухания можно оценить, если подсчитать число колебаний, совершенных системой за время затухания τ , т. е. до уменьшения амплитуды колебаний примерно в 3 раза. Чем больше этих колебаний, тем меньше потери энергии в системе.

Проследим за убыванием энергии, запасенной осциллятором, с течением времени. Используя (19.54), запишем, по аналогии с (19.24) и (19.25), выражения для потенциальной и кинетической энергий осциллятора:

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2} k s^2 = \frac{1}{2} k s_0^2 e^{-2\delta t} \sin^2(\omega t + \varphi_0); \quad (19.61)$$

$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2} m v^2 \approx \frac{1}{2} m \omega^2 s_0^2 e^{-2\delta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (19.62)$$

Заметим, что скорость равна

$$v = \dot{s} = -s_0 \delta e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + s_0 \omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (19.63)$$

Очевидно, что если $\delta \ll \omega$, то первым слагаемым в (19.63) можно пренебречь и записать выражение для кинетической энергии в виде (19.62). Суммарная энергия осциллятора убывает со временем:

$$E(t) = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \frac{1}{2} s_0^2 e^{-2\delta t} [k \sin^2(\omega t + \varphi_0) + m \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)]. \quad (19.64)$$

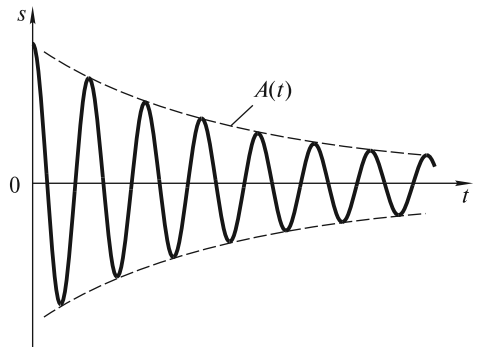


Рис. 19.14

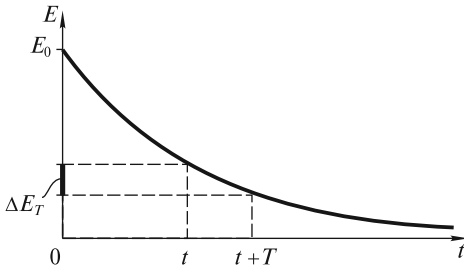


Рис. 19.15

Примем во внимание, что при $\delta \ll \omega_0$ частота $\omega \approx \omega_0$. Так как $k = m\omega_0^2$, то (19.64) окончательно запишем в виде

$$E(t) = \frac{1}{2} s_0^2 m \omega_0^2 e^{-2\delta t} = E_0 e^{-2\delta t}. \quad (19.65)$$

Полная энергия осциллятора, равная вначале $E_0 = s_0 m \omega_0^2 / 2$, монотонно убывает со временем по экспоненциальному закону и уменьшается в e раз за время

$$\tau_E = 1/2\delta = \tau/2. \quad (19.66)$$

«Качество» колебательной системы характеризуется безразмерным параметром Q , называемым *добротностью*. Добротность пропорциональна отношению запасенной энергии $E(t)$ к энергии ΔE_T , теряемой за период (рис. 19.15):

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E_T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\delta t}}{E_0 e^{-2\delta t} - E_0 e^{-2\delta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}. \quad (19.67)$$

Если число колебаний велико, то произведение $\delta T = 1/N \ll 1$. Тогда

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\delta T + \dots)} \approx \frac{\pi}{\theta} = \pi N. \quad (19.68)$$

При экспоненциальном убывании энергии $E(t)$ добротность Q оказывается постоянной величиной, которую, как и логарифмический декремент затухания θ , можно оценить по числу колебаний $N_Q = \pi N \approx 3N$, совершенных системой до их полного прекращения (за время 3τ амплитуда колебаний уменьшается в $e^3 \approx 20$ раз, т.е. колебания практически полностью затухают). Следует отметить, что добротность не только характеризует затухание колебаний, но и является важной величиной, определяющей параметры вынужденных колебаний под действием внешней периодической силы.

Рассмотрим теперь случай $\delta = \omega_0$, когда корни характеристического уравнения кратные: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$. При этом частота $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 0$, т.е. колебания отсутствуют. Общее решение, как нетрудно проверить подстановкой, имеет следующий вид:

$$s(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}, \quad (19.69)$$

где независимые постоянные C_1 и C_2 определяются, как и раньше, начальными условиями. Если $s(0) = s_0$, $\dot{s}(0) = v_0$, то $s(t) = [s_0(1 + \delta t) + v_0 t] e^{-\delta t}$. Возможные виды зависимости $s(t)$ при разных начальных условиях показаны на рис. 19.16 (кривые 1, 2, 3). Характерной особеннос-

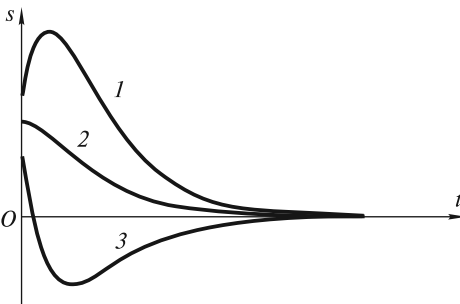


Рис. 19.16

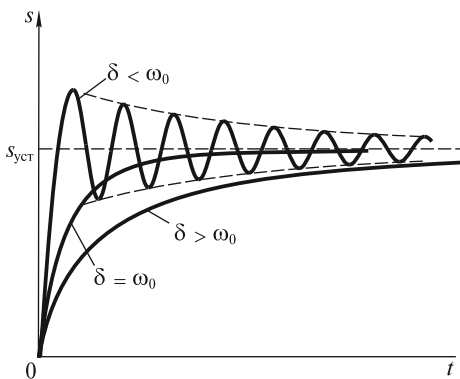


Рис. 19.17

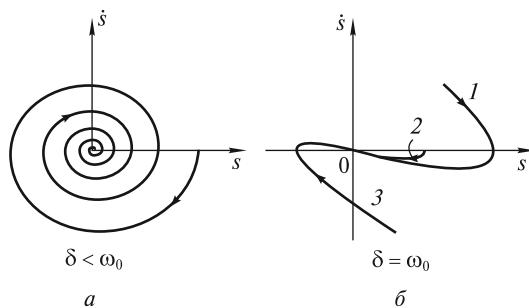


Рис. 19.18

тью этих кривых является то, что они пересекают ось Ot не более одного раза. Возврат к равновесному состоянию системы, выведенной из него, происходит за время порядка нескольких τ . Такой режим движения называют *критическим*.

Наконец, если $\delta > \omega_0$, то общее решение (19.52) является суммой двух убывающих с течением времени экспонент, поскольку $-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$. Возможная зависимость $s(t)$ похожа на ту, которая изображена на рис. 19.16, но возврат к равновесию осуществляется медленнее, чем в критическом режиме, поскольку вязкое трение больше. Данный режим движения называют *апериодическим*, или *закритическим*.

Отметим, что наиболее быстро возвращение системы к положению равновесия происходит в критическом режиме, а в колебательном и апериодическом режимах этот процесс длится дольше. Поэтому, например, гальванометры — приборы для электрических измерений — работают обычно в режиме, близком к критическому, когда процесс установления их показаний, т. е. смещения s рамки к устойчивому отклонению $s_{уст}$, имеет наименьшую длительность (рис. 19.17).

Иллюстрацией к рассмотренным закономерностям затухающих колебаний являются фазовые кривые, построенные для колебательного ($\delta < \omega_0$) и критического ($\delta = \omega_0$) режимов (рис. 19.18). При $\delta < \omega_0$ фазовый портрет представляет собой совокупность спиралей, стягивающихся в особую точку типа «фокус» (рис. 19.18, а). За каждый оборот радиус спирали уменьшается в e^{θ} раз. Для критического режима ($\delta = \omega_0$) фазовые траектории сходятся в особую точку типа «узел» (рис. 19.18, б, нумерация кривых соответствует рис. 19.16). Особая точка типа «узел» имеет место и для апериодического режима ($\delta > \omega_0$).

Затухание колебаний в системах с сухим трением. На практике мы часто имеем дело с системами, в которых главную роль играет сила сухого трения, не зависящая от скорости. Типичный пример — пружинный маятник, груз которого скользит по шероховатой горизонтальной поверхности, или колебательная система стрелочных измерительных приборов, основу которой составляет вращающаяся рамка, испытывающая действие сил сухого трения в оси вращения. Хотя сила $F_{тр}$ сухого трения и остается постоянной по величине, тем

не менее она меняет свое направление при изменении направления скорости. В силу этого необходимо записать два уравнения:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = -\frac{F_{\text{тр}}}{m} \text{ для } \dot{s} > 0; \quad (19.70)$$

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_{\text{тр}}}{m} \text{ для } \dot{s} < 0. \quad (19.71)$$

Если в (19.70) использовать переменную $s_1 = s + \frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$, а в (19.71) — $s_2 = s - \frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$, то оба уравнения примут одинаковый вид:

$$\ddot{s}_{1,2} + \omega_0^2 s_{1,2} = 0. \quad (19.72)$$

Фазовые траектории в переменных $(s, \dot{s}/\omega_0)$, соответствующие этому уравнению, представляют собой окружности с центрами, имеющими координаты

$s_- = -\frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$ ($s_1 = 0$) для верхней полуплоскости $\dot{s} > 0$, и $s_+ = +\frac{F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}$ ($s_2 = 0$) для нижней полуплоскости $\dot{s} < 0$. Чтобы нарисовать фазовый портрет, необходимо сомкнуть фазовые траектории верхней и нижней полуплоскостей на их общей границе $\dot{s} = 0$.

Из построенного на рис. 19.19 фазового портрета видно, что движение прекращается после конечного числа колебаний. Чрезвычайно важно, что система не обязательно придет к состоянию $s = 0$, а может остановиться, попав в зону застоя $s_- \div s_+$. Зона застоя тем шире, чем больше сила $F_{\text{тр}}$. Из фазового портрета

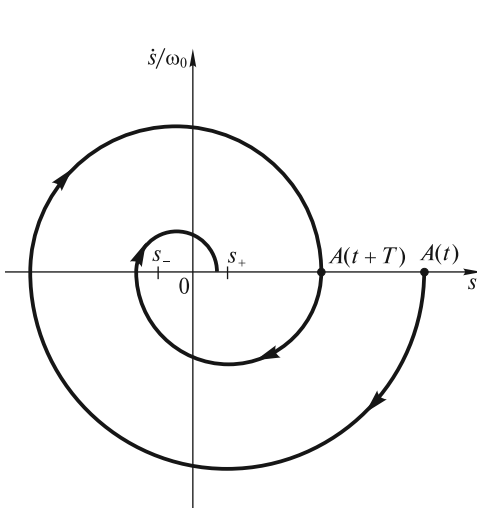


Рис. 19.19

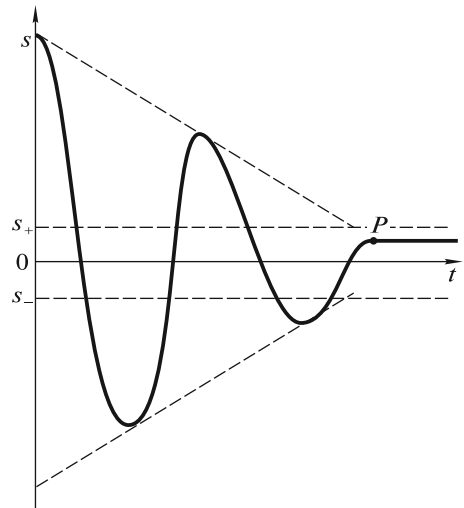


Рис. 19.20

легко определить убывание амплитуды колебаний за один период. Это изменение амплитуды превышает протяженность зоны застоя в два раза:

$$\Delta A = A(t) - A(t + T) = 2(s_+ - s_-) = \frac{4F_{\text{тр}}}{m\omega_0^2}. \quad (19.73)$$

Таким образом, в отличие от экспоненциального закона (19.56), характерного для вязкого трения, амплитуда колебаний убывает со временем линейно.

На рис. 19.20 показана зависимость от времени смещения колеблющегося тела при сухом трении. Число совершаемых системой колебаний до их прекращения зависит от начальной амплитуды A_0 , и его можно оценить по формуле:

$$N = \frac{A_0}{\Delta A} = \frac{A_0}{2(s_+ - s_-)}. \quad (19.74)$$

Частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ остается такой же, как и при отсутствии силы трения [см. (19.72)]. Колебания продолжаются до тех пор, пока их амплитуда больше половины ширины зоны застоя $s_+ - s_-$. При этом в реальных условиях колеблющаяся масса останавливается в случайном положении внутри этой зоны (в точке P на рис. 19.20).

ЛЕКЦИЯ 20

В предыдущей лекции мы рассмотрели свободные затухающие колебания, возникающие при начальном кратковременном воздействии внешних сил на колебательную систему. Между тем, в повседневной практике мы сталкиваемся с незатухающими колебаниями, для поддержания которых необходимо подводить энергию к колебательной системе, чтобы компенсировать ее энергетические потери.

Один из распространенных способов поддержания незатухающих колебаний — воздействие на тело периодической силой (вынуждающей силой)

$$F(t) = F(t + T). \quad (20.1)$$

Если такую силу приложить к колеблющейся массе описанного выше пружинного маятника (рис. 20.1), то уравнение ее движения примет вид:

$$m\ddot{s} = -\Gamma\dot{s} - ks + F(t). \quad (20.2)$$

Опыт показывает, что если сила начинает действовать внезапно (например, в момент времени $t=0$), то маятник будет постепенно раскачиваться, и спустя какое-то время его колебания установятся. По порядку величины время установления таких вынужденных колебаний будет совпадать с временем затухания $\tau = \delta^{-1} = 2m/\Gamma$. Далее мы сконцентрируем внимание именно на установившихся колебаниях. Естественно, что параметры таких колебаний будут зависеть от конкретного вида силы $F(t)$.

Из математики известно, что любую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt + \psi_n\right) \quad (20.3)$$

Физический смысл этого представления состоит в том, что периодическое воздействие $F(t)$ эквивалентно одновременному воздействию постоянной силы и набора гармонических сил с соответствующими амплитудами F_{0n} , начальными фазами ψ_n и частотами $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n = \omega n$, кратными низшей (основной) частоте $\omega = 2\pi/T$.

Чтобы получить полную картину вынужденных колебаний под действием силы (20.3), необходимо принять во внимание линейность уравнения (20.2). Это позволяет представить его решение $s(t)$ как сумму гармонических колебаний:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{0n} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt + \varphi_n\right) \quad (20.4)$$

происходящих с установившимися амплитудами s_{0n} и фазами φ_n на частотах ω_n соответствующих гармоник вынуж-

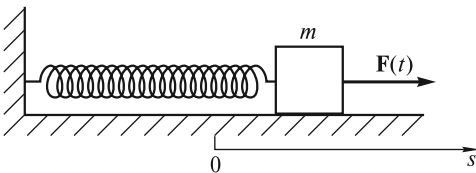


Рис. 20.1

дающей силы (20.3). Каждое слагаемое в (20.4) может рассматриваться как вынужденное гармоническое колебание, происходящее под действием внешней гармонической силы с амплитудой F_{0n} и частотой $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n$.

Перейдем теперь к нахождению амплитуд s_{0n} и фаз φ_n .

Вынужденные колебания под действием гармонической силы. Пусть внешняя сила изменяется по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 \sin \omega t. \quad (20.5)$$

Уравнение (20.2) в этом случае принимает вид:

$$m\ddot{s} = -\Gamma\dot{s} - ks + F_0 \sin \omega t. \quad (20.6)$$

Под действием этой силы маятник в установившемся режиме будет совершать гармонические колебания:

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (20.7)$$

Как показывает опыт, амплитуда s_0 и начальная фаза φ_0 (т.е. сдвиг фазы между смещением s и силой F) установившихся колебаний зависят не только от амплитуды силы F_0 [что очевидно из уравнения (20.6)], но и от того, насколько частота вынуждающей силы ω отличается от собственной частоты колебаний маятника $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Наиболее сильно маятник будет раскачиваться, когда эти частоты практически совпадают: $\omega \approx \omega_0$.

Прежде чем приступить к нахождению s_0 и φ_0 , заметим, что для механических колебательных систем не так просто с технической точки зрения осуществить воздействие гармонической силы непосредственно на движущуюся массу. Гораздо проще это сделать для электрических и оптических колебательных систем, например, для колебательного контура, подключенного к внешнему источнику переменного напряжения. Можно, однако, поддерживать вынужденные колебания маятника, изображенного на рис. 20.1, иным способом, не прикладывая внешнюю силу $F(t)$ непосредственно к массе m . Достаточно приложить эту силу к левому концу пружины так, чтобы этот конец двигался по гармоническому закону $\xi(t) = \xi_0 \sin \omega t$ (рис. 20.2). Тогда удлинение пружины составит величину $s - \xi$, а сила упругости, приложенная к массе m , будет равна $-k(s - \xi)$. Поэтому уравнение движения массы m запишется в виде

$$m\ddot{s} = -\Gamma\dot{s} - k(s - \xi). \quad (20.8)$$

Если принять во внимание, что сила упругости пружины в отсутствие смещения груза ($s = 0$) равна

$$F(t) = k\xi(t) = k\xi_0 \sin \omega t, \quad (20.9)$$

то уравнение (20.8) полностью эквивалентно уравнению (20.6). Сила (20.9) выполняет роль внешней гармонической силы в классической схеме, изображенной на рис. 20.1. Эта сила может быть визуализирована, поскольку ее величина и направление однозначно опреде-

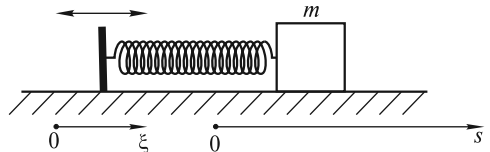


Рис. 20.2

ляются смещением подвижного левого конца пружины. Это, в свою очередь, дает возможность наглядно продемонстрировать фазовые соотношения между силой $F(t)$ [или смещением $\xi(t)$] и смещением $s(t)$ колеблющейся массы.

Перепишем уравнение (20.8) следующим образом:

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \sin \omega t, \quad (20.10)$$

где $F_0 = k\xi_0$.

Решение этого уравнения будем искать в виде гармонической функции (20.7), где амплитуда s_0 и фаза φ_0 могут быть определены, если подставить (20.7) в (20.10). Мы сделаем это несколько позднее, а пока рассмотрим три важных режима вынужденных колебаний.

Режим медленных колебаний. Если частота ω вынуждающей силы значительно меньше ω_0 , то скорость \dot{s} и ускорение \ddot{s} колеблющейся массы будут очень малыми. Поэтому можно пренебречь первыми двумя членами в левой части уравнения (20.10) и записать его в приближенном виде:

$$\omega_0^2 s = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (20.11)$$

Решение этого уравнения очевидно:

$$s(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{k} \sin \omega t. \quad (20.12)$$

В этом режиме смещение груза пропорционально внешней силе и не зависит от его массы m . Решение (20.12) является, по существу, математическим выражением закона Гука для статической деформации пружины. Поэтому этот режим можно назвать квазистатическим (почти статическим). Амплитуда колебаний в соответствии с этим законом равна $s_0 = F_0/k$, а смещение $s(t)$ изменяется в фазе с внешней силой.

В схеме, изображенной на рис. 20.2, это эквивалентно тому, что смещение массы m практически повторяет смещение левого конца пружины:

$$s(t) = \frac{F_0}{k} \sin \omega t = \frac{k\xi_0}{k} \sin \omega t = \xi(t), \quad (20.13)$$

поскольку $F_0 = k\xi_0$. Это и не удивительно, так как для движения массы m с пренебрежимо малым ускорением \ddot{s} не требуется больших деформаций пружины: $s(t) - \xi(t) \approx 0$.

Режим быстрых колебаний. Если $\omega \gg \omega_0$, то период вынужденных колебаний $T = 2\pi/\omega$ мал. Это означает, что масса m испытывает действие лишь внешней силы $F(t)$, а силы упругости ks и вязкого трения $\Gamma\dot{s}$ малы. Действительно, за половину короткого периода колебаний, когда масса движется в одном направлении, она не успевает ни набрать заметную скорость \dot{s} , ни сместиться на достаточную величину s от положения равновесия. Поэтому в уравнении (20.10) можно опустить члены, содержащие s и \dot{s} , и записать его в другом приближенном виде:

$$\ddot{s} = \frac{F_0}{m} \sin \omega t. \quad (20.14)$$

Интегрируя это уравнение два раза, находим закон движения колеблющейся массы:

$$s(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{m\omega^2} \sin(\omega t - \pi). \quad (20.15)$$

Из (20.15) следует, что смещение отстает по фазе от внешней силы на π ($\varphi_0 = -\pi$), а амплитуда, как мы и предполагали, убывает с увеличением частоты.

В схеме, изображенной на рис. 20.2, в таком режиме левый подвижный конец пружины и масса m всегда движутся в противоположных направлениях:

$$s(t) = -\frac{k\xi_0}{m\omega^2} \sin \omega t = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \xi(t). \quad (20.16)$$

По абсолютной величине смещение массы m в $\omega^2/\omega_0^2 \gg 1$ раз меньше смещения левого конца пружины, т. е. практически не будет заметным.

Резонансный режим. Если частота $\omega \approx \omega_0$, то вынужденные колебания происходят на собственной частоте колебаний. Это означает, что

$$\dot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (20.17)$$

Следовательно, уравнение (20.10) с учетом (20.17) принимает вид:

$$2\delta\dot{s} = \frac{F_0}{m} \sin \omega_0 t. \quad (20.18)$$

Интегрируя его, получаем выражение для смещения:

$$s(t) = \frac{F_0}{2\delta m \omega_0} \sin(\omega_0 t - \pi/2). \quad (20.19)$$

Последнее выражение удобно переписать в виде

$$s(t) = \frac{F_0}{k} Q \sin(\omega_0 t - \pi/2), \quad (20.20)$$

где $Q = \frac{\pi}{\delta T}$ — добротность маятника.

Если добротность $Q \gg 1$, то амплитуда колебаний может во много раз превышать амплитуду медленных квазистатических колебаний [сравним с (20.12)]. Поэтому такой режим называют *резонансным*.

Велики также амплитуды скорости и ускорения. Поскольку скорость \dot{s} , как следует из (20.18), изменяется в фазе с внешней силой, то это весьма благоприятно для «подкачки» энергии в колебательную систему. Работа внешней силы за период колебаний равна:

$$A = \int_0^T F(t) \dot{s}(t) dt = \frac{F_0^2}{2\delta m} \int_0^T \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{F_0^2 T}{4\delta m} \quad (20.21)$$

и значительно превосходит работу этой силы в обоих рассмотренных выше режимах. Такая большая работа необходима для компенсации значительных потерь энергии из-за вязкого трения.

Для большей наглядности последнего результата обратимся к схеме с подвижным левым концом пружины, где, как это видно из решения (20.20),

$$s(t) = \xi_0 Q \sin(\omega_0 t - \pi/2). \quad (20.22)$$

Амплитуда смещения правого конца пружины в Q раз превосходит амплитуду смещения левого конца. При прохождении массой m положения равновесия $s = 0$, когда ее скорость максимальна, левый конец пружины смещен на максимальную величину ξ_0 в направлении скорости движущейся массы. В этот момент времени мощность силы упругости пружины имеет максимально возможное положительное значение при заданной величине ξ_0 . В последующие моменты времени эта мощность будет оставаться положительной, что, естественно, обеспечивает наиболее эффективную передачу энергии движущемуся с трением телу.

Если сила (20.5) изменяется с произвольной частотой ω , то амплитуда s_0 и фаза φ_0 , входящие в решение (20.7), могут быть найдены, как было сказано выше, подстановкой решения (20.7) в уравнение (20.10). Такую подстановку можно осуществить наиболее просто, если воспользоваться методом комплексных амплитуд, широко применяемым в различных областях физики: теории колебаний, теории волн, электромагнетизме, оптике и др.

Метод комплексных амплитуд. Если в формуле Эйлера (19.53): $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ под φ понимать фазу гармонических колебаний

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad (20.23)$$

то каждому такому колебанию $s(t)$ можно поставить в соответствие комплексное число

$$\hat{s}(t) = s_0 e^{i\varphi} = s_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} = s_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + i s_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (20.24)$$

Из (20.24) видно, что решение (20.7) является мнимой частью этого комплексного выражения:

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = \text{Im} \hat{s}_0 e^{i\omega t}, \quad (20.25)$$

где $\hat{s}_0 = s_0 e^{i\varphi_0}$ — комплексная амплитуда, которая несет информацию об амплитуде s_0 и начальной фазе φ_0 колебаний.

Надо отметить, что метод комплексных амплитуд является, фактически, аналитическим выражением метода векторных диаграмм. Если в последнем методе колебание с частотой ω полностью задается вектором \mathbf{s}_0 , то в методе комплексных амплитуд колебание задается числом \hat{s}_0 на комплексной плоскости. Поскольку с комплексными числами удобно и просто производить математические операции, то мы используем это обстоятельство для получения решения уравнения вынужденных колебаний (20.10).

Амплитудные и фазовые характеристики. Будем искать решение уравнения (20.10) в комплексном виде:

$$\hat{s}(t) = \hat{s}_0 e^{i\omega t}. \quad (20.26)$$

Вынуждающую силу в правой части (20.10) также запишем в комплексной форме:

$$\hat{F}(t) = \hat{F}_0 e^{i\omega t}, \quad (20.27)$$

где $\widehat{F}_0 = F_0$ — действительное число, поскольку мы предположили для простоты, что начальная фаза в выражении для силы (20.5) равна нулю.

Тогда уравнение (20.10) можно записать в виде:

$$\ddot{\widehat{s}} + 2\delta\dot{\widehat{s}} + \omega_0^2\widehat{s} = \frac{\widehat{F}_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (20.28)$$

Комплексную амплитуду $\widehat{s}_0 = s_0 e^{i\varphi_0}$ легко находим подстановкой (20.26) в (20.28):

$$(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2)\widehat{s}_0 e^{i\omega t} = \frac{\widehat{F}_0}{m} e^{i\omega t}, \quad (20.29)$$

откуда

$$\widehat{s}_0 = \frac{\widehat{F}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega)}. \quad (20.30)$$

Из (20.30) нетрудно найти амплитуду колебаний $s_0 = |\widehat{s}_0|$:

$$s_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (20.31)$$

и фазу $\varphi_0 = \arg \widehat{s}_0$:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\operatorname{Im} \widehat{s}_0}{\operatorname{Re} \widehat{s}_0} = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (20.32)$$

полностью определяющие вынужденные колебания (20.25).

Зависимость амплитуды s_0 от частоты ω , задаваемую формулой (20.31), называют *амплитудной характеристикой*, а зависимость $\varphi_0(\omega)$, описываемую формулой (20.32), — *фазовой характеристикой*. На рис.20.3 изображены амплитудные характеристики (амплитудные резонансные кривые), которые отображают нарастание амплитуды s_0 при приближении ω к ω_0 . Это явление получило название *резонанса смещений*. Максимальное значение амплитуды, в Q раз превышающее статическое смещение F_0/k , достигается на частоте

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad (20.33)$$

которая несколько меньше как собственной частоты ω_0 , так и частоты затухающих колебаний $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

С уменьшением затухания δ резонансная кривая становится более «острой».

Для частот ω , лежащих вблизи ω_0 , формула (20.31) может быть значительно упрощена. Так, можно положить

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= (\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 \approx (\omega_0 - \omega)^2 \cdot 4\omega_0^2; \\ 4\delta^2\omega^2 &\approx 4\delta^2\omega_0^2. \end{aligned} \quad (20.34)$$

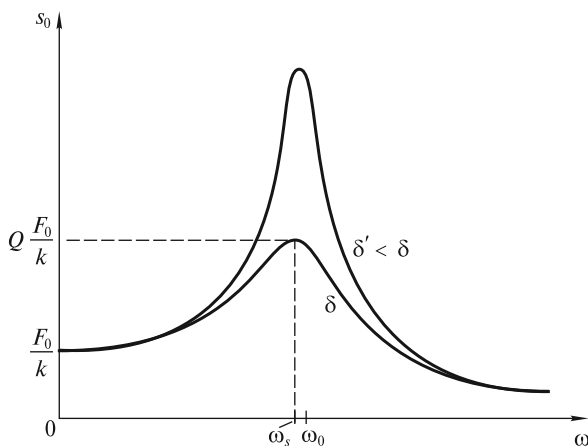


Рис. 20.3

С учетом приближений (20.34) формула (20.31) примет вид

$$s_0(\omega) = \frac{F_0}{k} Q \frac{1}{\sqrt{[(\omega_0 - \omega)/\delta]^2 + 1}}. \quad (20.35)$$

Безразмерную функцию

$$L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[(\omega_0 - \omega)/\delta]^2 + 1}} \quad (20.36)$$

называют *лоренцевой*, а график этой функции — *лоренцевым контуром*. Ширину $\Delta\omega$ этого контура, характеризующую остроту резонанса, находят из условия убывания вдвое энергии колебательной системы, пропорциональной квадрату амплитуды $s_0(\omega)$, что эквивалентно приближенному соотношению

$$\frac{1}{\sqrt{(\Delta\omega/2\delta)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7, \quad (20.37)$$

которое поясняется рис. 20.4. При этом условии $\Delta\omega/2 = \delta$, т. е. $\Delta\omega = 2\delta$. Ширина лоренцева контура характеризует полосу пропускания колебательной системы, т. е. такую область частот внешней силы, для которых система эффективно откликается на гармоническое внешнее воздействие. Легко заметить, что добротность системы равна

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}, \quad (20.38)$$

т. е. обратно пропорциональна полосе пропускания.

Фазовые характеристики (фазовые резонансные кривые) для двух различных коэффициентов затухания изображены на рис. 20.5. Физическое содержание зависимости $\varphi_0(\omega)$ мы подробно обсудили для трех различных режимов вынуж-

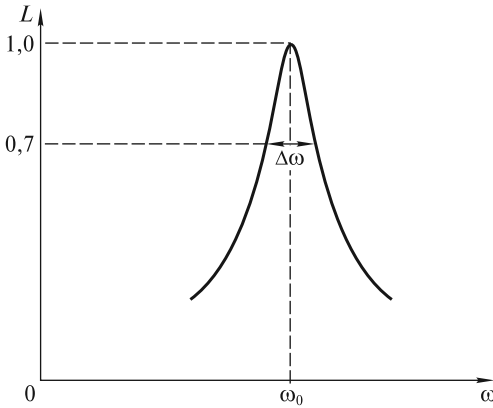


Рис. 20.4

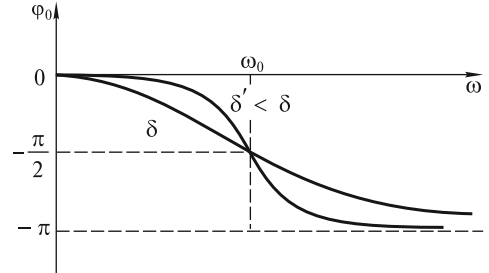


Рис. 20.5

денных колебаний. Отметим лишь, что с уменьшением затухания δ кривая $\varphi_0(\omega)$ становится более «чувствительной» к изменению частоты вблизи резонанса.

Наряду с резонансом смещений можно говорить о *резонансе скоростей* \dot{s} и *резонансе ускорений* \ddot{s} .

Скорость и ускорение колеблющегося тела равны соответственно:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= s_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2); \\ \ddot{s} &= s_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi), \end{aligned} \quad (20.39)$$

т. е. резонансная характеристика для скорости получается умножением (20.31) на ω , а для ускорения — на ω^2 :

$$\begin{aligned} v_0 &= s_0 \omega = \frac{F_0}{m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\delta^2}}; \\ a_0 &= s_0 \omega^2 = \frac{F_0}{m \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + 4\frac{\delta^2}{\omega^2}}}. \end{aligned} \quad (20.40)$$

На рис. 20.6 показаны частотные зависимости амплитуд скорости $v_0 = s_0 \omega$ (рис. 20.6, а) и ускорения $a_0 = s_0 \omega^2$ (рис. 20.6, б). Характерно, что резонанс скорости происходит на частоте $\omega_s = \omega_0$, а резонанс ускорения — при $\omega_s > \omega_0$. Отметим, что все резонансные частоты связаны между собой:

$$\omega_s \omega_{\ddot{s}} = \omega_s^2 = \omega_0^2. \quad (20.41)$$

Заметим также, что по причинам, рассмотренным ранее, в области низких частот малы как ускорение, так и скорость. В области высоких частот ускорение конечно ($s_0 \omega^2 \rightarrow F_0/m$) и обеспечивается лишь внешней силой. Однако скорость по-прежнему незначительна, поскольку тело не успевает разогнаться.

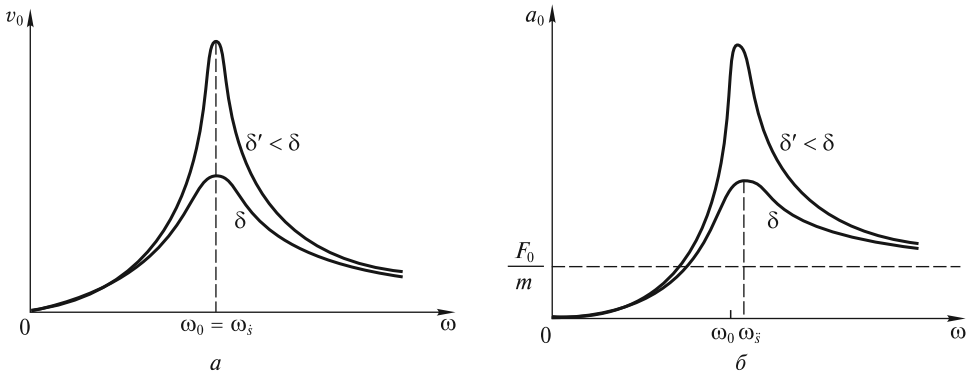


Рис. 20.6

Не представляет труда нарисовать фазовые характеристики для скорости и ускорения, пользуясь формулами (20.39) и (20.40), поскольку они получаются простым сдвигом фазовой характеристики для смещения, изображенной на рис. 20.5, вверх соответственно на $\pi/2$ и на π .

В заключение рассмотрим вопрос о подводе энергии к осциллятору при произвольной частоте вынуждающей силы. Средняя за период мощность этой силы равна

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \dot{s}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T F_0 \sin \omega t \cdot v_0 \sin \left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2} \right) dt = \\
 &= \frac{1}{T} F_0 v_0 \int_0^T \sin \omega t \sin (\omega t + \psi_0) dt = \frac{1}{T} F_0 v_0 \int_0^T \sin^2 \omega t \cos \psi_0 dt + \\
 &\quad + \frac{1}{T} F_0 v_0 \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t \sin \psi_0 dt = \frac{1}{2} F_0 v_0 \cos \psi_0,
 \end{aligned}$$

где $\psi_0 = \varphi_0 + \pi/2$ — фазовый сдвиг между скоростью и силой.

Мы видим, что максимум подводимой к осциллятору мощности достигается на частоте ω_0 , поскольку при этом максимальны и амплитуда скорости v_0 , и $\cos \psi_0$ ($\psi_0 = 0$). При других частотах вынуждающей силы эта мощность быстро уменьшается и стремится к нулю, как при $\omega \rightarrow 0$, так и при $\omega \rightarrow \infty$.

Баллистический режим колебаний. Рассмотрим колебания системы, к которой приложена произвольная сила $F(t)$, действующая в течение промежутка времени Δt , значительно меньшего периода собственных колебаний: $\Delta t \ll T$. Отклик системы на такое воздействие будет пропорционален импульсу действующей силы

$$P = \int_0^{\Delta t} F(t) dt. \quad (20.42)$$

В самом деле, при кратковременном воздействии (в течение времени Δt) колеблющаяся масса не успевает заметно сместиться из положения равновесия, однако будет обладать ускорением

$$\ddot{s} = F(t)/m. \quad (20.43)$$

При записи (20.43) мы пренебрегли силой вязкого трения. По окончании действия силы масса приобретет скорость

$$v_0 = \dot{s} = \int_0^{\Delta t} \ddot{s} dt = \frac{P}{m}, \quad (20.44)$$

пропорциональную импульсу силы. Далее она будет совершать собственные гармонические колебания с амплитудой

$$s_0 = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{P}{m\omega_0}. \quad (20.45)$$

Если параметры m и ω_0 известны, то можно определить P , измеряя амплитуду первого колебания после воздействия.

В качестве примера рассмотрим процедуру измерения заряда, протекающего по электрической цепи, с использованием баллистического гальванометра. В этом гальванометре находится рамка, которая может совершать крутильные колебания. Рамка имеет увеличенный (по сравнению с обычным гальванометром) момент инерции, что повышает период ее собственных колебаний до нескольких секунд. Так как рамка находится в магнитном поле постоянного магнита, то при протекании через нее электрического тока на рамку будет действовать момент сил, пропорциональный току. При кратковременном протекании тока рамка приобретает угловую скорость и затем за четверть периода колебаний отклоняется на некоторый максимальный угол, который пропорционален интегралу от протекшего через рамку тока, т. е. величине протекшего заряда.

Установление колебаний. Мы уже отмечали, что если к покоящемуся маятнику приложить гармоническую силу в момент времени $t=0$, то маятник начнет постепенно раскачиваться. Установление колебаний связано с тем фактом, что наряду с вынужденными колебаниями на частоте ω будут возбуждены и собственные колебания на частоте $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, которые, конечно, будут затухать.

Из математики известно, что общее решение линейного неоднородного уравнения (20.10) при $\delta < \omega_0$ имеет вид:

$$s(t) = s_{0c} e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_c) + s_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (20.46)$$

Это решение представляет собой суперпозицию собственных затухающих колебаний на частоте $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ и незатухающих вынужденных колебаний на частоте ω . Из (20.46) видно, что колебания установятся лишь тогда, когда затухнут собственные колебания. Это произойдет по истечении времени

$$\Delta t_{уст} \approx \tau = 1/\delta. \quad (20.47)$$

За это время в систему «закачивается» энергия, поскольку до установления колебаний работа внешней силы превышает работу сил трения. В установившемся режиме имеет место баланс поступающей и расходуемой энергий.

В частности, если $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, то при $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$ и $\delta \ll \omega_0$ формула (20.46) имеет вид

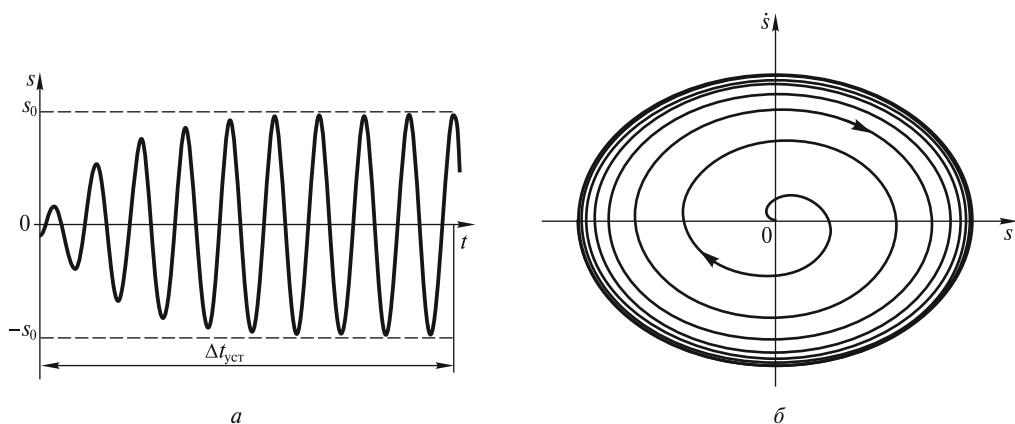


Рис. 20.7

$$s(t) = s_0(1 - e^{-\delta t}) \sin(\omega t - \pi/2) \quad (20.48)$$

(рис. 20.7, а), поскольку при этих условиях $s_{0c} = s_0$, $\varphi_c = -\varphi_0 \approx \pi/2$.

Отметим, что формула (20.47) определяет лишь порядок величины (временной масштаб) $\Delta t_{уст}$. На практике время установления (равно как и время затухания) колебаний принимают равным $\Delta t_{уст} = (3 \div 5)\tau$.

На фазовой плоскости (рис. 20.7, б) фазовая траектория будет постепенно «раскручиваться» из начала координат и стремиться к *предельному циклу* — эллипсу.

Характеристики различных колебательных систем. Интересно сопоставить основные характеристики различных колебательных систем (иногда их для краткости называют *осцилляторами*). Примерами таких осцилляторов могут быть механические (рассмотренные выше), электрические (известные из школьного курса физики, например, колебательный контур), оптические (например, электрон в атоме) и другие системы.

Вначале обратимся к характеристикам наиболее распространенного осциллятора — маятника, представляющего собой тело, подвешенное на нити.

Маятник является одним из древнейших физических приборов. С помощью крутильных маятников были открыты законы гравитационного и электрического взаимодействий, измерено давление света, выполнено множество других физических экспериментов. В последнее время предложен и реализуется ряд новых экспериментов для изучения фундаментальных свойств материи, в которых очень малые силы измеряются с помощью крутильных маятников. Чувствительность таких экспериментов зависит от того, насколько ослаблены сейсмические возмущения, действующие на маятник, а также от стабильности его параметров, например, упругих свойств нити подвеса. Но даже если устранены все внешние возмущающие воздействия, остается один принципиальный источник флуктуаций амплитуды и фазы его колебаний. Это хаотическое тепловое движение молекул в нити подвеса и подвешенном теле. Действующая на него флуктуационная сила зависит от температуры и добротности маятника. Чем выше добротность маятника, тем медленнее затухают его колебания и диссипирует его энергия, превращаясь в теплоту, т. е.

хаотическое движение молекул. Это означает, что ослабевают и обратный процесс раскачки маятника хаотическим движением молекул, т.е. уменьшается флуктуационная сила, действующая на маятник. Для того чтобы уменьшить затухание, тело и нить подвеса изготавливают из высококачественного плавленого кварца — материала с низкими потерями упругой энергии, а также принимают специальные меры для исключения других источников диссипации энергии. В результате добротность крутильных маятников достигает величины $\sim 10^7$.

В настоящее время в ряде стран создаются лазерные гравитационные антенны для регистрации гравитационного излучения от космических объектов. Принцип действия антенны основан на том, что гравитационная волна действует на свободные массы, помещенные в разные точки пространства, изменяя расстояние между ними. Это изменение пропорционально интенсивности волны и расстоянию между массами. По этой причине в гравитационных антеннах пробные массы располагают в нескольких километрах друг от друга в специальных вакуумных камерах, а расстояние между ними измеряют уникальным лазерным интерферометром. Каждую пробную массу подвешивают на тонких нитях, образуя, таким образом, маятник качания. С массами связывают два зеркала, отражающие лазерный луч, распространяющийся вдоль прямой, соединяющей эти массы. По сдвигу интерференционной картины, формируемой этой сложной оптической системой, можно «почувствовать» взаимное смещение масс на величину порядка 10^{-17} см, что на 7 порядков меньше размеров атома!

Чувствительность гравитационной антенны ограничена тепловыми флуктуациями колебаний такого маятника, а значит, также определяется его добротностью. В отличие от добротности крутильных маятников, добротность маятников качания зависит не только от потерь в упругом элементе — нити подвеса, но и от ее натяжения. За счет этого можно значительно увеличить добротность маятника качания. Так, добротность маятников качания, изготовленных целиком из плавленого кварца, может превышать 10^8 , т.е. время затухания их колебаний достигает нескольких лет. Конечно, при столь малой диссипации энергии маятника на его добротность влияют весьма слабые внешние воздействия, например, электрические и магнитные поля, или частицы пыли, осевшие на нити подвеса, и т.д.

При таких высоких значениях добротности и соответствующем подавлении сейсмических возмущений проявляются квантовые свойства маятника. В этом случае поведение вполне макроскопического объекта будет определяться принципом неопределенности Гейзенберга. Правда, необходимые условия реализуются пока для малых временных интервалов (около 10^{-3} с), и для наблюдения квантовых особенностей поведения маятников требуются очень чувствительные регистрирующие устройства, но именно такие маятники, обладающие предельно высокой добротностью, предполагается использовать в будущих гравитационных антеннах.

Камертон, служащий для настройки музыкальных инструментов, также является высокодобротным осциллятором. Звук, издаваемый вибрирующими ножками камертона, затихает за достаточно длительное время по сравнению с периодом их колебаний. Если, например, собственная частота камертона

равна $\nu = 440$ Гц, а продолжительность звучания составляет $\tau \approx 10$ с, то камертон совершит $\nu\tau \approx 4400$ колебаний. Это означает, что его добротность по порядку величины равна $Q \sim 10^4$.

Как это ни покажется парадоксальным, электрический колебательный контур является менее добротной системой, хотя частота его собственных колебаний имеет порядок величины $\nu \sim (10^5 \div 10^8)$ Гц. Добротность контура ограничена, главным образом, омическими потерями и составляет $Q \sim 10^2$. Это, в свою очередь, означает, что полоса пропускания $\Delta\nu = Q^{-1}\nu$, введенная ранее при рассмотрении вынужденных колебаний, равна $\Delta\nu \sim (10^3 \div 10^6)$ Гц.

Если частота радиопередающей станции ν_c высока ($\nu_c > 10^6$ Гц), то в радиоприемных устройствах ее преобразуют до низкой (называемой промежуточной) частоты $\nu_{\text{п}} \approx 10^5$ Гц. Тогда колебательный контур радиоприемника будет иметь очень малую полосу пропускания $\Delta\nu = Q^{-1} \cdot \nu_{\text{п}} \approx 5 \cdot 10^3$ Гц. Это означает, что если частоты двух станций ν_{1c} и ν_{2c} различаются более, чем на величину полосы пропускания ($|\nu_{1c} - \nu_{2c}| > \Delta\nu$), то, перестраивая собственную частоту колебательного контура приемника, можно по отдельности настроиться на каждую из этих передающих станций.

Оптический электрон в атоме, осуществляя переходы с одной орбиты на другую, в соответствии с постулатами Бора, излучает квант света с энергией $\hbar\omega = E_2 - E_1$. С классической точки зрения это можно интерпретировать таким образом, что электрон совершает колебания с частотой ω , т.е. является оптическим осциллятором. Поскольку электрон теряет энергию на излучение, то амплитуда его колебаний должна затухать в течение некоторого характерного времени τ . Для уединенного атома (не взаимодействующего с другими атомами) это время определяется зарядом и массой электрона и зависит от частоты ω . Однако для всех атомов оно имеет один и тот же порядок величины: $\tau \sim 10^{-8} \div 10^{-9}$ с. Учитывая, что в видимом оптическом диапазоне период колебаний $T = 2\pi/\omega \approx 10^{-15}$ с, легко подсчитать число колебаний до их затухания. Оно имеет порядок величины $\tau/T \sim 10^6 \div 10^7$. Поэтому добротность оптического осциллятора ($Q \sim 10^7$), хотя и высока, но все же не превышает добротности прецизионных кварцевых маятников.

Параметрические колебания. В повседневной жизни мы имеем дело с незатухающими колебаниями, для поддержания которых требуется периодически менять какой-либо параметр колебательной системы. Одним из ярких примеров являются колебания качелей. Хорошо известно, что можно поддерживать колебания длительное время, если быстро присесть в момент наибольшего отклонения качелей и также быстро встать при прохождении положения равновесия. Благодаря этому параметр физического маятника (качелей) — расстояние l между осью вращения и центром масс — меняется скачкообразно на величину $\pm \Delta l$ ($\Delta l \ll l$). Величина Δl должна быть такой, чтобы обеспечить баланс энергии системы: потери энергии маятника за период должны компенсироваться за счет работы, совершаемой при приседании и вставании.

Запишем условие энергетического баланса для простейшего случая колебаний математического маятника с длиной нити l , которая меняется на величину $\pm \Delta l$ (рис. 20.8). Это можно осуществить, если пропустить нить маятника через отверстие в точке P (точке подвеса) и затем, прикладывая внешнюю силу \mathbf{F} к концу нити, периодически менять ее длину.

Рассмотрим установившиеся параметрические колебания маятника с небольшими амплитудами и будем считать, что затухание мало ($\delta \ll \omega_0$). Поскольку $\Delta l \ll l$, то приближенно можно считать, что угол отклонения маятника α от положения равновесия изменяется со временем по гармоническому закону:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t, \quad (20.49)$$

где, согласно (19.42), $\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right)$, а $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

В момент наибольшего отклонения на угол α_0 сила натяжения нити равна $N_1 = mg \cos \alpha_0$. Удлиняя нить на величину Δl , внешняя сила $F_1 = N_1$ совершает отрицательную работу $A_- = -mg \cos \alpha_0 \cdot \Delta l$. Раскладывая $\cos \alpha_0$ в ряд

$\cos \alpha_0 \approx 1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24} + \dots$, получим

$$A_- \approx -mg \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \frac{\alpha_0^4}{24}\right) \Delta l. \quad (20.50)$$

При прохождении маятником положения равновесия ($\alpha = 0$) $F_2 = N_2 = mg + mv_0^2/l$, где $v_0 = \alpha_0 \omega l$. Поэтому положительная работа при укорачивании нити с точностью до членов порядка α_0^4 равна:

$$A_+ = (mg + m\alpha_0^2 \omega^2 l) \Delta l \approx mg \left(1 + \alpha_0^2 - \frac{\alpha_0^4}{8}\right) \Delta l, \quad (20.51)$$

где учтено, что $\omega_0^2 l = g$.

Полная работа, совершаемая внешней силой \mathbf{F} за период, будет положительной и равной:

$$A = 2(A_+ + A_-) = 3mg\alpha_0^2 \Delta l - \frac{mg\alpha_0^4}{3} \Delta l = 3mg\alpha_0^2 \Delta l \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{9}\right). \quad (20.52)$$

Потери энергии за период численно равны работе силы трения:

$$A_{\text{тр}} = \int_0^T F_{\text{тр}} v dt = -\int_0^T \Gamma v^2 dt, \quad (20.53)$$

где $F_{\text{тр}} = -\Gamma v$.

При гармонических колебаниях (20.49) скорость

$$v(t) = l\dot{\alpha}(t) = l\alpha_0 \omega \cos \omega t. \quad (20.54)$$

Подставляя (20.54) в (20.53) и выполняя интегрирование, получим

$$A_{\text{тр}} = -\Gamma l^2 \alpha_0^2 \omega^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt = -\Gamma l^2 \alpha_0^2 \omega^2 \frac{T}{2} \approx -\Gamma \alpha_0^2 g l \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right) \frac{T_0}{2}, \quad (20.55)$$

поскольку $\omega T = \omega_0 T_0 = 2\pi$.

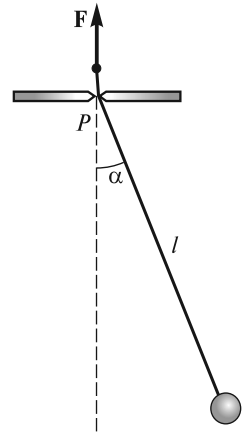


Рис. 20.8

Условие баланса энергии состоит в равенстве нулю суммы работ: $A + A_{\text{тр}} = 0$, или

$$3mg\alpha_0^2\Delta l\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{9}\right) = \Gamma\alpha_0^2gl\frac{T_0}{2}\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{16}\right). \quad (20.56)$$

Проводя сокращения и используя выражение для добротности $Q = \frac{\pi}{\delta T_0}$, получаем приближенное выражение для амплитуды α_0 установившихся параметрических колебаний:

$$\alpha_0 \approx \frac{12}{\sqrt{7}} \sqrt{1 - \frac{\pi}{3Q(\Delta l/l)}}. \quad (20.57)$$

Отношение $\Delta l/l$ называют *глубиной модуляции* параметра l . Из (20.57) видно, что для возникновения параметрических колебаний глубина модуляции должна превысить некоторое минимальное (пороговое) значение, приблизительно равное величине, обратной добротности:

$$\Delta l/l > 1/Q. \quad (20.58)$$

Чем больше добротность системы, тем меньше пороговая глубина модуляции. С повышением величины $\Delta l/l$ амплитуда колебаний α_0 , как это следует из формулы (20.57), будет увеличиваться. Однако при больших амплитудах ($\alpha_0 > 1$) формула (20.57) в силу сделанных приближений становится неприменимой.

Следует отметить, что параметрическое возбуждение является существенно нелинейным эффектом. Это видно, в частности, из уравнения (20.56): если пренебречь в нем малыми слагаемыми $\sim \alpha_0^2$, которые описывают нелинейность,

то α_0 из уравнения выпадает, и получается соотношение $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\pi}{3Q}$. Физически это означает, что при таком значении глубины модуляции энергетический баланс в системе обеспечивается при любых амплитудах α_0 , что неверно.

Заметим, что возбуждение параметрических колебаний может происходить не только на удвоенной частоте собственных колебаний системы, когда параметр меняется один раз за каждый полупериод, но и при более редком воздействии: через один, два, три и т.д. полупериодов колебаний, т.е. на частотах $2\omega_0/n$, где n — любое целое число. Возбуждение также возможно внутри некоторой области — вблизи каждой из этих частот, но пороговые значения глубины модуляции для разных частот будут различны.

Автоколебания. Наблюдая колебания листьев деревьев, дорожных знаков над проезжей частью улиц, полотнищ на ветру, мы понимаем, что во всех перечисленных случаях незатухающие колебания происходят за счет энергии постоянно дующего ветра. При этом сама колебательная система производит отбор энергии ветра в нужный момент времени и в количестве, требуемом для компенсации неизбежно присутствующих энергетических потерь. Колебания в этих системах начинаются самопроизвольно за счет начальных флуктуаций (дрожаний) колеблющихся предметов. Частота и амплитуда установившихся колебаний определяется как параметрами самой системы, так и

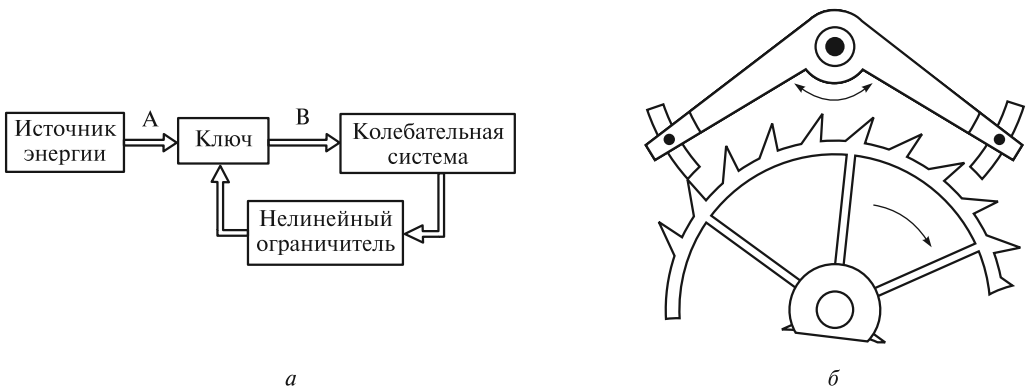


Рис. 20.9

параметрами ее взаимодействия с ветром. Такие колебания являются примерами *автоколебаний*, а сами системы — примерами автоколебательных систем. Классическим примером автоколебательной системы служат механические часы с маятником и гирями. Эти часы периодически «черпают» энергию при опускании гирь, подвешенных на цепочке, перекинутой через шестерню часового механизма.

Принцип работы всех автоколебательных систем можно понять, обратившись к схеме, изображенной на рис. 20.9, а. Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу АВ управляет сама колебательная система посредством обратной связи. Схематически это изображено в виде некоторого запирающего канал АВ устройства (ключа), который управляется самой системой. Так, в зависимости от положения и скорости колеблющегося листа на ветру будет различная мощность сил аэродинамического давления. В конструкции часового механизма (рис. 20.9, б) присутствует специальное устройство — анкер, выполняющий роль ключа. Анкер представляет собой коромысло и приводится в действие самим маятником часов. При определенных положениях он «отпирает» одну из шестерен часового механизма. В этот момент времени шестерня проворачивается за счет момента сил, приложенного со стороны натянутой цепи с грузом. Груз при этом немного опускается. Количество энергии, поступающей в часовой механизм, равно изменению потенциальной энергии груза в поле силы тяжести.

Важно отметить, что любая автоколебательная система нелинейна. На схеме это отражено наличием в системе обратной связи нелинейного ограничителя сигнала, управляющего ключом. Нелинейность системы проявляется в том, что при начальном нарастании амплитуды колебаний, порожденных флуктуациями, поступление энергии в систему за каждый последующий период колебаний увеличивается нелинейно, т.е. прирост поступающей энергии становится все меньше и меньше. Естественно, что при установившейся амплитуде колебаний приток энергии и ее потери будут равны.

Маятник на вращающемся валу (маятник Фруда). Для более углубленного изучения принципа действия автоколебательной системы проанализируем колебания маятника, подвес которого скреплен с муфтой 1, надетой на горизонтальный вал 2 (рис. 20.10).

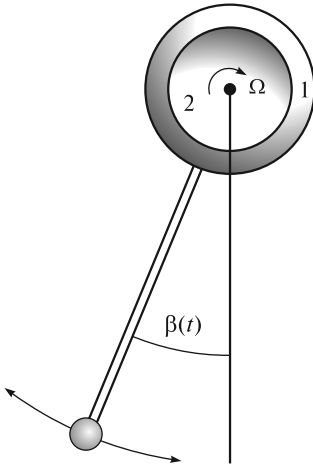


Рис. 20.10

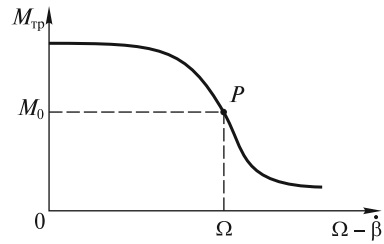


Рис. 20.11

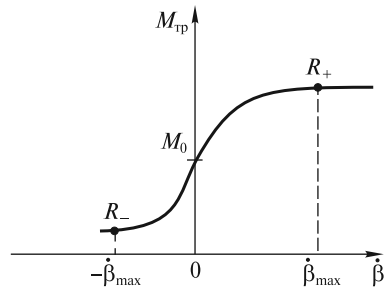


Рис. 20.12

Пусть вал вращается с постоянной угловой скоростью Ω по часовой стрелке. Если угол отклонения маятника от вертикали $\beta(t)$ изменяется с течением времени, то сила сухого трения в подвесе, нелинейно зависящая от относительной скорости муфты и вала $\Omega - \dot{\beta}$, также будет изменяться ($\dot{\beta}$ — угловая скорость муфты). Момент этой силы $M_{\text{тр}}$ будет оказывать периодическое воздействие на маятник, поддерживая его колебания. На рис. 20.11 показана нелинейная зависимость $M_{\text{тр}}$ от относительной угловой скорости муфты и вала. На изображенной кривой имеется точка перегиба P . Подберем такую скорость вращения вала Ω , чтобы в отсутствие колебаний ($\dot{\beta} = 0$) попасть в эту точку. В этом случае к муфте маятника будет приложен момент силы трения $M_{\text{тр}} = M_0$. Для дальнейшего анализа более удобно воспользоваться зависимостью $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$, изображенной на рис. 20.12. Следует подчеркнуть, что начальное (линейное) нарастание $M_{\text{тр}}$ с угловой скоростью $\dot{\beta}$ обеспечивает условие для самопроизвольного нарастания колебаний из флуктуации, что эквивалентно наличию положительной обратной связи, а последующее замедление роста $M_{\text{тр}}$ при увеличении $\dot{\beta}$ является причиной нелинейного ограничения нарастания колебаний: амплитуда смещения маятника (а значит и амплитуда его скорости $\dot{\beta}_{\text{max}}$) достигнет максимального (установившегося) значения, что эквивалентно наличию нелинейного ограничителя.

Отклоним осторожно маятник от вертикали на такой угол β_0 , чтобы момент силы трения, действующий на неподвижный маятник, $M_0 = M_{\text{тр}}(0)$, был уравновешен моментом силы тяжести $M(\beta_0) = mga \sin \beta_0$:

$$M_{\text{тр}}(0) = M(\beta_0), \text{ или } M_0 = mga \sin \beta_0, \quad (20.59)$$

где m — масса маятника; a — расстояние от оси вала до центра масс маятника.

На первый взгляд, может показаться, что маятник так и останется висеть под углом β_0 к вертикали. На самом деле это положение будет неустойчивым. Представим, что в результате ничтожного толчка маятник приобретет небольшую угловую скорость $\dot{\beta} > 0$. При этом возрастут моменты сил тяжести M и трения $M_{\text{тр}}$, и условие (20.59) может нарушиться. Если начальный наклон кривой $M_{\text{тр}}(\beta)$ на рис. 20.12 достаточно велик (сильная положительная обратная связь), то $M_{\text{тр}}(\dot{\beta}) > M(\beta_0)$. Это означает, что угловая скорость $\dot{\beta}$ будет нарастать. Однако затем это нарастание прекратится, так как из-за нелинейного загиба кривой $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$ равенство моментов опять восстановится (сработает механизм нелинейного ограничения):

$$M_{\text{тр}}(\dot{\beta}_{\text{max}}) = M(\beta). \quad (20.60)$$

Условию (20.60) соответствует точка R_+ на кривой $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$. После этого угловая скорость начнет уменьшаться, поскольку с ростом угла β момент $M(\beta)$ продолжает расти, а $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$ — убывать. Следовательно, спустя какое-то время маятник остановится, а угол его отклонения достигнет максимального значения β_{max} . Поскольку в этот момент $M(\beta_{\text{max}}) > M_{\text{тр}} = M_0$, то маятник начнет двигаться в обратном направлении. Момент силы тяжести начнет уменьшаться, а момент силы трения будет также уменьшаться, но быстрее, чем момент силы тяжести (опять срабатывает положительная обратная связь). Сначала это движение будет ускоренным, пока $M > M_{\text{тр}}$ (до точки R_- на рис. 2.12), а затем, при $M < M_{\text{тр}}$ — замедленным. Остановившись при некотором угле наклона β_{min} , маятник опять движется влево, так как все еще $M < M_{\text{тр}}$. Наконец, он достигает стартовой позиции, однако приобретенная им скорость будет больше скорости начального толчка. Таким образом, в течение одного периода колебаний увеличилась энергия маятника за счет ее заимствования от устройства, вращающего вал.

В последующие периоды колебаний точки R_+ и R_- на кривой $M_{\text{тр}}(\dot{\beta})$ будут сдвигаться в разные стороны, однако из-за нелинейности кривой этот сдвиг прекратится (срабатывает механизм нелинейного ограничения), и колебания установятся.

Чтобы количественно проанализировать автоколебания маятника, запишем уравнение вращательного движения маятника с моментом инерции J :

$$J\ddot{\beta} = M_{\text{тр}}(\dot{\beta}) - mg\sin\beta. \quad (20.61)$$

В этом уравнении мы пока пренебрежем моментом силы вязкого трения, действующей на движущийся маятник. Момент силы сухого трения в подвесе, нелинейно зависящий от угловой скорости $\dot{\beta}$ (см. рис. 20.12), можно аппроксимировать выражением:

$$M_{\text{тр}}(\dot{\beta}) = M_0 + k_1\dot{\beta} - k_2\dot{\beta}^3, \quad (20.62)$$

где k_1 и k_2 — размерные коэффициенты, определяющие обратную связь и нелинейное ограничение соответственно.

Если колебание описывать углом отклонения α от положения неустойчивого равновесия, задаваемого углом β_0 ($\alpha = \beta - \beta_0$), то

$$mg\sin\beta = mga(\sin\beta_0\cos\alpha + \cos\beta_0\sin\alpha). \quad (20.63)$$

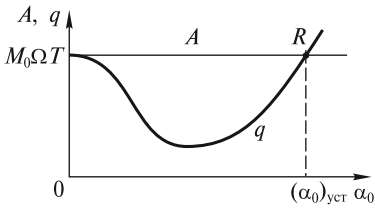


Рис. 20.13

Для малых углов $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$. Если учесть далее, что $\dot{\beta} = \dot{\alpha}$, то уравнение (20.61) примет вид

$$J\ddot{\alpha} + mga \cos \beta_0 \alpha = k_1 \dot{\alpha} - k_2 \dot{\alpha}^3. \quad (20.64)$$

Это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением и не имеет аналитического решения. В теории колебаний существуют методы, позволяющие решить его приближенно, исследовать условия, при которых возможно самовозбуждение колебаний, и найти амплитуду $(\alpha_0)_{уст}$ и частоту ω установившихся колебаний. Мы же поступим более просто и определим $(\alpha_0)_{уст}$ из условия энергетического баланса.

Пусть колебания происходят по закону:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t. \quad (20.65)$$

Поскольку правая часть (20.64) мала, то частота колебаний приближенно равна $\omega = \sqrt{mga \cos \beta_0 / J}$. Подсчитаем работу за период колебаний $T = 2\pi/\omega$, совершаемую устройством (например, электродвигателем), вращающим вал. Она, очевидно, равна:

$$A = \int_0^T M_{тр}(\dot{\beta}) \Omega dt = M_0 \Omega T. \quad (20.66)$$

Здесь учтено, что интегралы по времени от $\dot{\beta}$ и $\dot{\beta}^3$ равны нулю, поскольку

$$\dot{\beta} = \dot{\alpha} = \alpha_0 \omega \cos \omega t. \quad (20.67)$$

Потери энергии в скользящем подвесе за это время составят:

$$q = \int_0^T M_{тр}(\dot{\beta})(\Omega - \dot{\beta}) dt = \left(M_0 \Omega - \frac{k_1 \alpha_0^2 \omega^2}{2} + \frac{3k_2 \alpha_0^4 \omega^4}{8} \right) T. \quad (20.68)$$

На рис. 20.13 показаны зависимости A и q от амплитуды α_0 . Видно, что при случайных флуктуациях, когда α_0 мало, $A > q$. Это означает, что колебания будут нарастать. Однако с ростом амплитуды начинают увеличиваться потери q . Колебания установятся при $A = q$ (точка R на графике). Амплитуда установившихся колебаний определится из равенства

$$M_0 \Omega T = \left(M_0 \Omega - \frac{k_1 \alpha_0^2 \omega^2}{2} + \frac{3k_2 \alpha_0^4 \omega^4}{8} \right) T. \quad (20.69)$$

Отсюда

$$(\alpha_0)_{уст} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}}. \quad (20.70)$$

Заметим, что теперь мы можем достаточно просто учесть силы вязкого трения, для чего в правую часть уравнения (20.64) следует добавить член $-\Gamma \dot{\alpha}$. Это

приведет к тому, что k_1 в (20.70) будет уменьшен на величину Γ . Поэтому (20.70) изменится:

$$(\alpha_0)_{\text{уст}} = \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{k_1 - \Gamma}{3k_2}}. \quad (20.71)$$

Из последнего выражения следует, что при $\Gamma \geq k_1$ колебания самопроизвольно начаться не могут.

Автоколебательные системы находят широчайшее применение в технике. Духовые и смычковые инструменты, органные трубы, генераторы электромагнитного излучения в приемно-передающих линиях связи, оптические квантовые генераторы (лазеры) представляют собой примеры автоколебательных систем. Однако автоколебания могут играть и негативную роль, начиная от безобидных колебаний деталей кранов водопроводных систем, «ревущих» при достаточно сильном напоре воды, до опасных колебаний крыльев самолетов, получивших название «флаттер». В ноябре 1940 г. подвесной мост через реку Такома в США разрушился из-за крутильных автоколебаний, возникших под действием дувшего вдоль реки ветра.

ЛЕКЦИЯ 21

Наблюдая колебания груза массой m , подвешенного на легкой пружине жесткости k_1 , нельзя не обратить внимание на то, что, наряду с вертикальными колебаниями груза, возникают и так называемые маятниковые колебания (из стороны в сторону) (рис. 21.1).

Наиболее сильными маятниковые колебания будут тогда, когда частота вертикальных колебаний $\sqrt{k_1/m}$ будет равна удвоенной частоте маятниковых колебаний $\sqrt{g/l}$ (l — длина растянутой пружины при неподвижном грузе). Такой результат легко понять, если рассматривать маятниковые колебания как резонансные параметрические колебания, при этом параметр маятника — длина пружины l — изменяется при вертикальных колебаниях на величину $\pm \Delta l$ (см. лекцию 20). В течение некоторого времени маятниковые колебания могут усиливаться за счет уменьшения энергии вертикальных колебаний. Затем процесс пойдет в обратном направлении: маятниковые колебания начнут ослабевать, «возвращая» энергию усиливающимся вертикальным колебаниям. Следовательно, вертикальные колебания не будут гармоническими, что связано с наличием маятниковых колебаний, соответствующих возбуждению второй степени свободы. При определенных условиях могут возникать и крутильные колебания груза вокруг вертикальной оси пружины. Опыт показывает, что наиболее сильными эти колебания будут в том случае, когда их частота $\sqrt{k_2/J}$ (k_2 — коэффициент жесткости пружины при ее скручивании, J — момент инерции тела относительно вертикальной оси) будет примерно в два раза меньше частоты вертикальных колебаний. В общем случае в этой системе могут происходить четыре типа колебаний, соответствующих четырем степеням свободы: одно вертикальное, два маятниковых в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и одно крутильное.

Таким образом, перед нами возникает задача изучения основных закономерностей колебаний в системах с двумя, тремя и более степенями свободы, затем можно рассмотреть и колебания сплошной среды как системы с бесконечно большим числом степеней свободы.

Таким образом, перед нами возникает задача изучения основных закономерностей колебаний в системах с двумя, тремя и более степенями свободы, затем можно рассмотреть и колебания сплошной среды как системы с бесконечно большим числом степеней свободы.

Свободные незатухающие колебания в системах с двумя степенями свободы. Нормальные колебания (моды). На рис. 21.2 изображены три различные колебательные системы с двумя степенями свободы. Первая из них (а) — это два различных пружинных маятника, связанные пружиной с жесткостью k' . Вторая (б) — два груза массами m_1 и m_2 , закрепленные на натянутом некоторой силой F невесомом резиновом

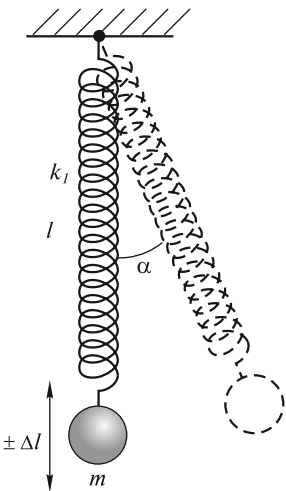


Рис. 21.1

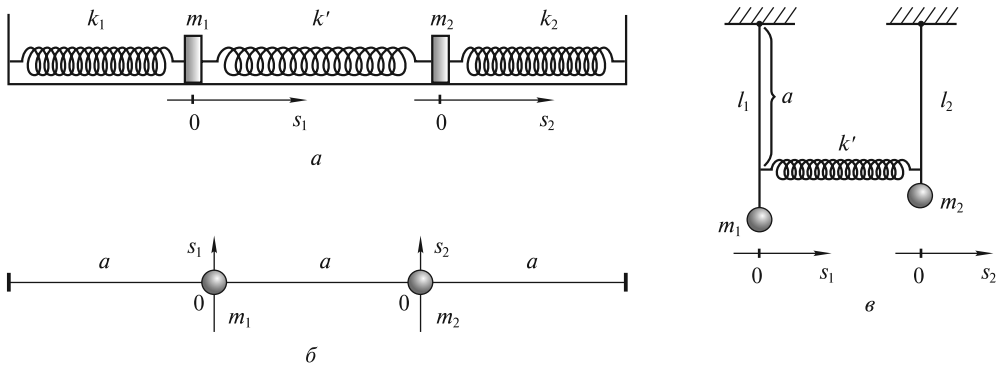


Рис. 21.2

шнуре. Третья (ϵ) — два связанных пружиной k' различных маятника, каждый из которых состоит из груза, подвешенного на невесомом стержне. Колебания грузов в каждой из трех систем описываются двумя временными зависимостями их смещений $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Положительное направление смещения s на рисунке указано стрелками.

Опыт показывает, что при произвольном способе возбуждения колебания не будут гармоническими: амплитуда колебаний каждого из грузов будет периодически меняться во времени. Однако можно создать такие начальные условия, при которых каждый груз будет совершать гармонические колебания с одной и той же частотой ω :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_{01} \sin(\omega t + \varphi); \\ s_2(t) &= s_{02} \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (21.1)$$

Частота этих колебаний ω определяется свойствами системы. Отношение

$$\zeta = s_{02}/s_{01} \quad (21.2)$$

также определяется параметрами системы. Эту безразмерную алгебраическую величину ζ называют *коэффициентом распределения амплитуд* при гармоническом колебании. Отметим, что s_{01} и s_{02} могут иметь любой знак. Если $\zeta > 0$, то смещения обоих грузов всегда происходят в одну сторону (синфазные колебания), а при $\zeta < 0$ — в противоположные стороны (противофазные колебания). Гармонические колебания (21.1) называют *нормальными колебаниями*, или *модами*, а частоту ω — *нормальной частотой*. Таким образом, мода характеризуется двумя параметрами: частотой ω и коэффициентом ζ , определяющим «конфигурацию» моды.

Практика показывает, что в системе с двумя степенями свободы могут существовать синфазные гармонические колебания с частотой ω_I и противофазные гармонические колебания с частотой $\omega_{II} > \omega_I$. Следовательно, в системе могут быть возбуждены две моды:

I мода

$$s_1^I(t) = s_{01}^I \sin(\omega_I t + \varphi_I);$$

$$s_2^I(t) = s_{02}^I \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \quad (21.3)$$

$$\zeta_I = s_{02}^I / s_{01}^I > 0.$$

II мода

$$s_1^{II}(t) = s_{01}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II});$$

$$s_2^{II}(t) = s_{02}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}); \quad (21.4)$$

$$\zeta_{II} = s_{02}^{II} / s_{01}^{II} < 0.$$

Нетрудно понять, что любое колебание линейной системы с двумя степенями свободы (а именно такие системы мы будем рассматривать далее) может быть представлено в виде суперпозиции двух нормальных колебаний (21.3) и (21.4):

$$s_1(t) = s_1^I(t) + s_1^{II}(t) = s_{01}^I \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + s_{01}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II});$$

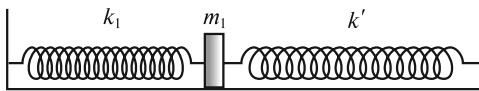
$$s_2(t) = s_2^I(t) + s_2^{II}(t) = s_{02}^I \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + s_{02}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}). \quad (21.5)$$

Парциальные и нормальные частоты. Не прибегая пока к детальному математическому исследованию, проанализируем поведение системы с двумя степенями свободы, пользуясь основными идеями, развитыми в предыдущих лекциях. Представим любую из систем, изображенных на рис. 21.2, как сложную систему, состоящую из двух *парциальных систем*. Эти парциальные системы, соответствующие случаю рис. 21.2, а, показаны на рис. 21.3: каждая из этих парциальных систем имеет собственную частоту колебаний, которую называют *парциальной частотой*. Значения этих парциальных частот соответственно равны:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k'}{m_1}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2 + k'}{m_2}}. \quad (21.6)$$

Совершенно очевидно, что частота ω_1 — это частота колебаний груза массой m_1 в системе двух связанных маятников, когда груз массой m_2 неподвижен (заблокирована вторая степень свободы). Аналогично, с частотой ω_2 будет колебаться груз массой m_2 , когда неподвижен груз массой m_1 .

Найдем теперь нормальные частоты ω_1 и ω_{II} . Вспомним, что квадрат частоты гармонических колебаний равен отношению возвращающей силы к смещению груза s и величине его массы m . Подберем начальные смещения грузов m_1 и m_2 таким образом, чтобы для обоих грузов эти отношения (а следовательно, и частоты) были бы одинаковы. Такой подбор легко угадывается для симметричной системы ($m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$) (рис. 21.4, а), у которой парциальные частоты совпадают:



$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k + k'}{m}}. \quad (21.7)$$

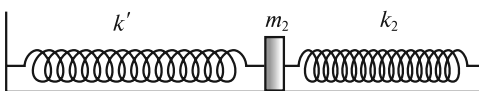


Рис. 21.3

Если оба груза сместить вправо на одинаковые расстояния $s_{01}^I = s_{02}^I$, то средняя пружина k' (пружина связи) не будет деформирована (рис. 21.4, б). После отпуска груза пружина будет оставаться недеформированной. Поэтому

каждый из грузов будет совершать гармонические колебания с одной и той же частотой

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}, \quad (21.8)$$

которая и является первой нормальной частотой. Конфигурация этого синфазного колебания (моды) задается коэффициентом распределения амплитуд $\zeta_1 = +1$.

Если оба груза сместить в разные стороны на одинаковые расстояния $s_{02}^{\text{II}} = -s_{01}^{\text{II}}$ (рис. 21.4, в), то пружина k' удлинится на величину $2s_{02}^{\text{II}}$. Поэтому к грузу, расположенному справа, будет приложена возвращающая сила, равная $-(ks_{02}^{\text{II}} + 2k's_{02}^{\text{II}})$, а на груз, расположенный слева, будет действовать в противоположном направлении сила $-(ks_{01}^{\text{II}} + 2k's_{01}^{\text{II}})$. После отпускания грузы будут колебаться в противофазе со второй нормальной частотой:

$$\omega_{\text{II}} = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}. \quad (21.9)$$

Конфигурация второй моды характеризуется коэффициентом распределения $\zeta_{\text{II}} = -1$.

Биения. Сместим грузы, изображенные на рис. 21.5, а, на произвольные расстояния (например, в одну сторону на величины s_{01} и s_{02} , рис. 21.5, б). Это эквивалентно суперпозиции двух типов начальных смещений: в одну сторону на одинаковые величины (рис. 21.5, в)

$$s_{01}^{\text{I}} = s_{02}^{\text{I}} = \frac{1}{2}(s_{01} + s_{02}); \quad (21.10)$$

и в разные стороны (рис. 21.5, г) на величины

$$-s_{01}^{\text{II}} = s_{02}^{\text{II}} = \frac{1}{2}(s_{02} - s_{01}). \quad (21.11)$$

Поскольку колебательная система линейна, то синфазные колебания, возникающие после отпускания грузов в позиции (в), будут происходить независимо от противофазных колебаний при отпускании грузов в позиции (г). Временные зависимости смещения обоих грузов будут описываться формулами (21.5), в которых амплитуды определяются равенствами (21.10) и (21.11), а начальные фазы $\varphi_1 = \varphi_{\text{II}} = \pi/2$.

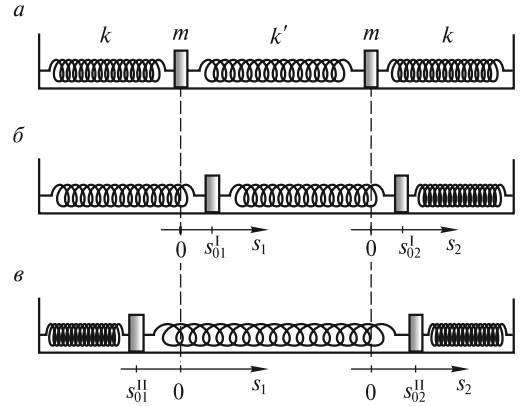


Рис. 21.4

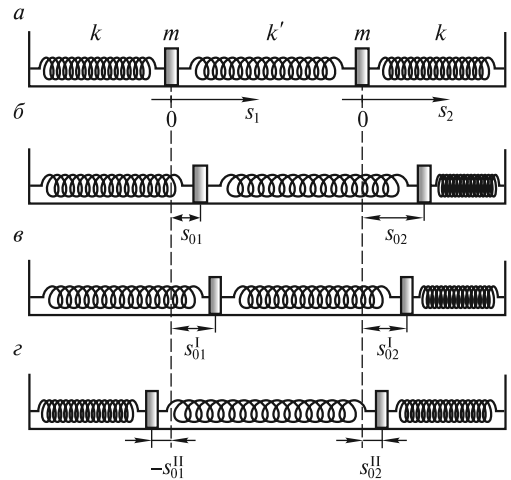


Рис. 21.5

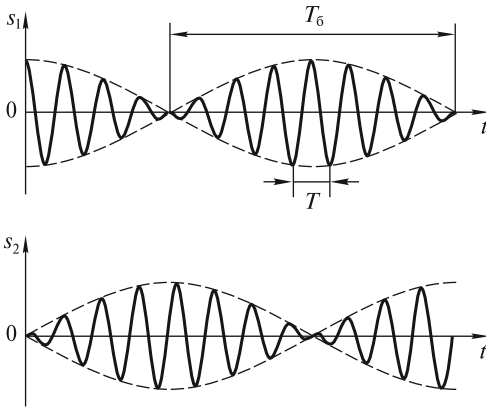


Рис. 21.6

Проанализируем более подробно колебания в системе, изображенной на рис. 21.5. Пусть мы сдвинули левый груз вправо на расстояние s_{01} , а правый груз оставили в несмещенном положении ($s_{02} = 0$). После отпускания обоих грузов в системе возникнут колебания. Из (21.10) и (21.11) определяем амплитуды мод: $s_{01}^I = s_{02}^I = s_{01}/2$; $-s_{01}^{II} = s_{02}^{II} = -s_{01}/2$. Поскольку фазы $\varphi_I = \varphi_{II} = \pi/2$ (так как начальные скорости отсутствуют), то смещения грузов будут равны

$$s_1(t) = \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_I t + \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_{II} t; \quad (21.12)$$

$$s_2(t) = \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_I t - \frac{s_{01}}{2} \cos \omega_{II} t.$$

Производя суммирование тригонометрических функций в (21.12), получим:

$$s_1(t) = s_{01} \cos \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_{II} + \omega_I}{2} t; \quad (21.13)$$

$$s_2(t) = s_{01} \sin \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_{II} + \omega_I}{2} t.$$

Временные зависимости (21.13) изображены на рис. 21.6. Видно, что колебания каждой из масс имеют форму *биений*. Период этих биений равен*

$$T_6 = \frac{2\pi}{\omega_{II} - \omega_I} = \frac{2\pi}{\Omega_6}, \quad (21.14)$$

где частота биений

$$\Omega_6 = \Delta\omega = \omega_{II} - \omega_I. \quad (21.15)$$

Если ввести среднюю частоту

$$\omega_0 = \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2}, \quad (21.16)$$

то с этой частотой связан период колебаний $T = 2\pi/\omega_0$.

Если частота биений $\Omega_6 \ll \omega_0$, как это изображено на рис. 21.6, то $T_6 \gg T$. В этом случае колебания обоих грузов будут почти гармоническими (квазигармоническими). Если переписать (21.13) с использованием средней частоты ω_0 и частоты биений Ω_6 в виде:

* Колебания (21.12) не являются периодическими, т.е. нельзя указать такое время T^* , спустя которое они точно повторяются (отношение частот ω_I/ω_{II} — чаще всего иррациональное число, а случаи их рационального отношения $m\omega_I = n\omega_{II}$ будут исчезать редко). Поэтому периодом биений T_6 мы называем период (21.14) повторения *огибающей* суммарного колебания, равный половине периода колебания с частотой $\frac{\omega_{II} - \omega_I}{2}$, а $\Omega_6 = \frac{2\pi}{T_6} = \omega_{II} - \omega_I$.

$$s_1(t) = s_{01} \cos \frac{\Omega_6}{2} t \cdot \cos \omega_0 t = A_1(t) \cos \omega_0 t; \quad (21.17)$$

$$s_2(t) = s_{01} \sin \frac{\Omega_6}{2} t \cdot \cos \omega_0 t = A_2(t) \cos \omega_0 t,$$

то при $\Omega_6 \ll \omega_0$ временные зависимости (21.17) можно трактовать как колебания с частотой ω_0 и медленно меняющейся амплитудой $A(t)$.

Спектр колебаний. В теории колебаний и в других разделах физики для анализа колебательного процесса используют спектральное представление, или *спектр колебаний*. Этот спектр изображают графически, где по оси абсцисс указывают частоты колебаний, а по оси ординат откладывают квадраты их амплитуд. Так, в частности, для колебаний, изображенных на рис. 21.6 (s_1 или s_2) и описываемых формулами (21.17), такой спектр изобразить достаточно просто, поскольку уже известно спектральное разложение этого колебания (представление в виде суммы гармонических колебаний), задаваемое формулами (21.12). Этот спектр приведен на рис. 21.7. Он содержит две спектральные компоненты. Его можно охарактеризовать средней частотой ω_0 и шириной $\Delta\omega$. В соответствии с формулой (21.14), произведение $\Delta\omega$ на период T_6 равно постоянной величине:

$$\Delta\omega T_6 = 2\pi. \quad (21.18)$$

Формула (21.18) имеет глубокое физическое содержание. Допустим, что имеется некоторое квазигармоническое колебание

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (21.19)$$

амплитуда A и фаза φ которого медленно изменяются с характерным временем τ (рис. 21.8, *a*). Спектр такого колебания может состоять из большого числа частот. Эти частоты группируются вблизи центральной (основной) частоты

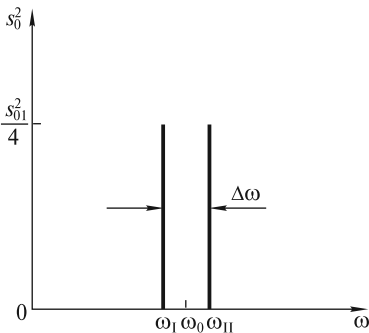


Рис. 21.7

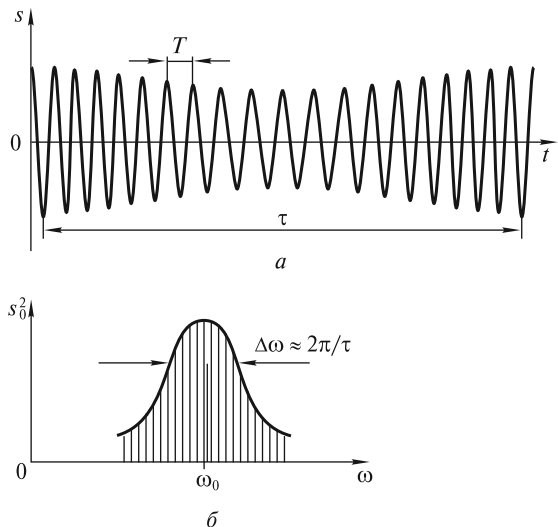


Рис. 21.8

$\omega_0 = 2\pi/T$ в пределах характерного интервала частот $\Delta\omega$, величина которого обратно пропорциональна временному масштабу τ . Такой спектр изображен на рис. 21.8, б (по оси ординат отложен квадрат амплитуды s_0 каждой из гармоник, причем $\Delta\omega\tau \approx 2\pi$).

Количественная связь между колебательным процессом $s(t)$ и его спектром представляется [по аналогии с формулами (21.12)] в виде суммы конечного или бесконечного числа гармонических составляющих (в виде ряда или интеграла Фурье). Такое представление будет широко использоваться в курсе «Оптика».

Методика анализа колебаний двух связанных осцилляторов. Выше мы рассмотрели колебания двух одинаковых связанных пружинных маятников, не прибегая к решению уравнений их движения. Однако, если жесткости пружин и массы тел имеют произвольные значения, то зачастую бывает трудно из простых соображений определить конфигурации мод и их частоты. Поэтому представляется важным использовать универсальный метод, позволяющий по единой схеме проводить последовательный анализ любой колебательной системы с двумя степенями свободы, являющейся системой любых связанных осцилляторов.

Запишем систему уравнений движения двух связанных пружинных маятников в виде:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 &= -k_1 s_1 - k' s_1 + k' s_2; \\ m_2 \ddot{s}_2 &= -k_2 s_2 - k' s_2 + k' s_1. \end{aligned} \quad (21.20)$$

Разделив первое уравнение на m_1 , а второе — на m_2 и используя выражения (21.6) для парциальных частот, перепишем (21.20) следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1 &= -\omega_1^2 s_1 - \alpha_1 s_2; \\ \ddot{s}_2 &= -\alpha_2 s_1 - \omega_2^2 s_2, \end{aligned} \quad (21.21)$$

где $\alpha_1 = -k'/m_1$; $\alpha_2 = -k'/m_2$ — коэффициенты, зависящие от жесткости k' пружины связи.

Обратим внимание, что уравнения (21.21) не могут решаться по отдельности, так как каждое из них содержит s_1 и s_2 . Поэтому целесообразно перейти от смещений s_1 и s_2 к новым функциям ξ_1 и ξ_2 , называемым *нормальными координатами*. Цель перехода — получение двух независимых уравнений движения, которые можно решать по отдельности.

Однако в общем случае эти координаты найти не просто. Поэтому для иллюстрации такого перехода рассмотрим систему с одинаковыми массами ($m_1 = m_2 = m$) и пружинами ($k_1 = k_2 = k$). Поскольку парциальные частоты совпадают [$\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{(k+k')/m}$] и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = -k'/m$, то система уравнений (21.21) упрощается. Сложив оба уравнения, получаем

$$\ddot{\xi}_1 = -(\omega^2 + \alpha)\xi_1, \quad (21.22a)$$

где $\xi_1 = s_1 + s_2$ — первая нормальная координата.

Вычитая второе уравнение из первого, находим

$$\ddot{\xi}_2 = -(\omega^2 - \alpha)\xi_2, \quad (21.22б)$$

где $\xi_2 = s_1 - s_2$ — вторая нормальная координата.

Теперь уравнения (21.22) независимы. Первое из них описывает колебание центра масс системы с частотой

$$\omega_I^2 = \omega^2 - k'/m, \quad (21.23)$$

меньшей парциальной частоты ω . Второе уравнение описывает изменение расстояния между двумя массами с частотой

$$\omega_{II}^2 = \omega^2 + k'/m, \quad (21.24)$$

превышающей парциальную частоту. Решения уравнений (21.22) очевидны:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= s_1(t) + s_2(t) = \xi_{01} \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \\ \xi_2(t) &= s_1(t) - s_2(t) = \xi_{02} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}). \end{aligned} \quad (21.25)$$

Возвращаясь к функциям s_1 и s_2 , получаем:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \frac{\xi_{01}}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\xi_{02}}{2} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}); \\ s_2(t) &= \frac{\xi_{01}}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{\xi_{02}}{2} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}). \end{aligned} \quad (21.26)$$

Четыре величины ξ_{01} , ξ_{02} , φ_1 и φ_{II} определяются из начальных условий $s_1(0)$, $s_2(0)$, $\dot{s}_1(0)$, $\dot{s}_2(0)$.

Проиллюстрировав переход к нормальным координатам, вернемся к методике анализа колебаний в произвольных системах, описываемых уравнениями (21.21).

Пусть в системе происходит нормальное колебание с неизвестной пока частотой ω и коэффициентом распределения амплитуд $\zeta = s_{02}/s_{01}$:

$$s_1(t) = s_{01} \sin(\omega t + \varphi); \quad s_2(t) = s_{02} \sin(\omega t + \varphi). \quad (21.27)$$

Подставим (21.27) в систему уравнений (21.21). Тогда получим систему из двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \omega^2)s_{01} + \alpha_1 s_{02} &= 0; \\ \alpha_2 s_{01} + (\omega_2^2 - \omega^2)s_{02} &= 0. \end{aligned} \quad (21.28)$$

Система линейных однородных уравнений (21.28) имеет ненулевые решения только в том случае, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \omega_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \alpha_1 \alpha_2 = 0. \quad (21.29)$$

Это квадратное уравнение относительно ω^2 , причем $\omega > 0$. Решив его, можно определить нормальные частоты ω_1 и ω_{II} , после чего не составляет труда найти конфигурацию мод, т.е. коэффициенты распределения амплитуд ζ_I и ζ_{II} . Их можно определить, например, из первого уравнения (21.28), причем очевидно, что для каждой нормальной частоты (ω_1 или ω_{II}) эти коэффициенты различны:

$$\zeta_I = \left(\frac{s_{02}}{s_{01}} \right)_I = \frac{\omega_1^2 - \omega_1^2}{\alpha_1}; \quad \zeta_{II} = \left(\frac{s_{02}}{s_{01}} \right)_{II} = \frac{\omega_{II}^2 - \omega_1^2}{\alpha_1}. \quad (21.30)$$

Таким образом, уравнение (21.29) и равенства (21.30) позволяют полностью рассчитать параметры каждой из двух мод. Движение каждой из масс, как уже неоднократно отмечалось, является суперпозицией двух нормальных колебаний:

$$s_1(t) = s_{01}^I \sin(\omega_1 t + \varphi_I) + s_{01}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II});$$

$$s_2(t) = \zeta_I s_{01}^I \sin(\omega_1 t + \varphi_I) + \zeta_{II} s_{01}^{II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{II}),$$

где амплитуды (s_{01}^I, s_{01}^{II}) и начальные фазы (φ_I, φ_{II}) определяются, как и раньше, начальными условиями $s_1(0), s_2(0), \dot{s}_1(0), \dot{s}_2(0)$.

Соотношение между парциальными и нормальными частотами. Для установления связи между парциальными и нормальными частотами перепишем (21.29) в виде

$$(\omega_I^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) - \gamma^2 \omega_1^2 \omega_2^2 = 0, \quad (21.31)$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\omega_1^2 \omega_2^2} = \frac{k'^2}{(k_1 + k')(k_2 + k')}. \quad (21.32)$$

Безразмерный коэффициент связи γ между двумя системами может принимать значения $0 < \gamma < 1$. Если из (21.31) определить нормальные частоты ω_I и ω_{II} , то они будут выражаться через парциальные частоты ω_1 и ω_2 и коэффициент γ . Эти четыре частоты будут располагаться на оси частот в последовательности, изображенной на рис. 21.9.

При слабой связи ($\gamma \ll 1$) нормальные частоты близки к парциальным, а при сильной связи ($\gamma \lesssim 1$) различие в частотах становится существенным. Это хорошо видно, если парциальные частоты совпадают ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$). Тогда (21.31) примет вид:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \gamma^2 \omega_0^4 = 0.$$

Отсюда

$$\omega_I^2 = \omega_0^2(1 - \gamma); \quad \omega_{II}^2 = \omega_0^2(1 + \gamma). \quad (21.33)$$

Затухание колебаний. Если энергия не подводится извне, то колебания связанных осцилляторов будут затухать. Поскольку сила вязкого трения пропорциональна скорости, то уравнения (21.21) с учетом затухания примут вид:

$$\ddot{s}_1 = -\omega_1^2 s_1 - 2\delta_1 \dot{s}_1 - \alpha_1 s_2;$$

$$\ddot{s}_2 = -\alpha_2 s_1 - \omega_2^2 s_2 - 2\delta_2 \dot{s}_2, \quad (21.34)$$

где $\delta_1 = \Gamma_1/2m_1$ и $\delta_2 = \Gamma_2/2m_2$ — коэффициенты затухания для первого и второго осцилляторов.

Если искать решение этой системы в виде нормальных затухающих колебаний:

$$s_1(t) = s_{01} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi); \quad s_2(t) = s_{02} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (21.35)$$

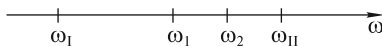


Рис. 21.9

то после подстановки (21.35) в (21.34) можно найти нормальную частоту ω , коэффициент затухания δ и конфигурацию ζ каждой из двух

мод. Опуская промежуточные выкладки, отметим, что при $\omega_1 \gg \delta_1$ и $\omega_2 \gg \delta_2$ (слабое затухание) нормальные частоты и распределение амплитуд в модах будут близки к тем, что и в отсутствие затухания. Коэффициент затухания δ определяется выражением:

$$\delta = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)\delta_1 + (\omega_2^2 - \omega^2)\delta_2}{(\omega_1^2 - \omega^2) + (\omega_2^2 - \omega^2)}. \quad (21.36)$$

Можно видеть, что при произвольном соотношении между ω_1 , ω_2 , δ_1 и δ_2 коэффициенты затухания мод δ_I и δ_{II} , получаемые из (21.36) при $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_{II}$, будут различными. Если парциальные частоты совпадают ($\omega_1 = \omega_2$), то

$$\delta_I = \delta_{II} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2). \quad (21.37)$$

Если $\omega_1 \neq \omega_2$, а $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, то

$$\delta_I = \delta_{II} = \delta. \quad (21.38)$$

Последним результатом мы воспользуемся при рассмотрении диссипации энергии в связанной колебательной системе.

Энергия колебательной системы и ее диссипация. Рассмотрим колебания двух грузов одинаковой массы (рис. 21.10, а), закрепленных на растянутом легком резиновом шнуре.

Если один из грузов оттянуть на расстояние $2s_0$ (рис. 21.10, б) и затем одновременно отпустить обе массы, то их колебания будут иметь вид биений. С другой стороны, при этих начальных условиях будут возбуждены две моды (рис. 21.10, в, г) с одинаковыми амплитудами колебаний обеих масс, равными s_0 . Энергия первой моды равна сумме кинетических энергий обеих масс в момент прохождения ими положения равновесия со скоростью $v_0^I = s_0\omega_1$:

$$E_0^I = 2 \frac{m}{2} (v_0^I)^2 = ms_0^2\omega_1^2, \quad (21.39a)$$

а энергия второй моды, аналогично, равна

$$E_0^{II} = 2 \frac{m}{2} (v_0^{II})^2 = ms_0^2\omega_{II}^2. \quad (21.39б)$$

Важно отметить, что энергообмен между модами отсутствует, а полная энергия системы равна сумме энергий ее мод. В то же время в процессе биений энергия первого осциллятора за время, равное половине периода биений, «перетекает» ко второму осциллятору и затем за такое же время возвращается обратно. Полный энергообмен между осцилляторами возможен лишь тогда, ког-

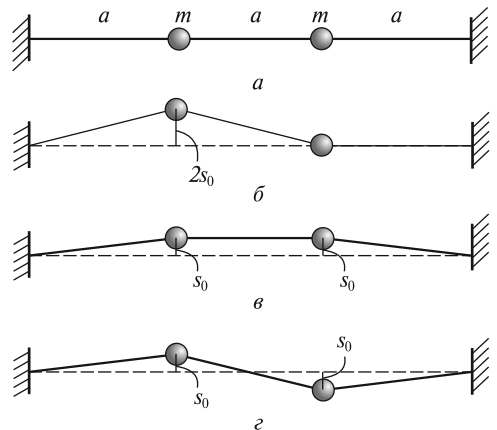


Рис. 21.10

да массы обоих грузов одинаковы и отношение $(\omega_1 + \omega_{II}) / (\omega_{II} - \omega_1)$ равно целому числу n , т. е.

$$\frac{\omega_1 + \omega_{II}}{\omega_{II} - \omega_1} = \frac{2\omega_0}{\Omega_\delta} = n. \quad (21.40)$$

Следовательно, частота ω_0 должна быть кратной частоте биений. В самом деле, при выполнении условия (21.40) каждый из грузов будет периодически останавливаться в положении равновесия [как следует из формул (21.17)].

С течением времени колебания будут затухать, и будет экспоненциально уменьшаться энергия мод:

$$\begin{aligned} E^I(t) &= ms_0^2 e^{-2\delta t} \omega_1^2 = E_0^I e^{-2\delta t}; \\ E^{II}(t) &= ms_0^2 e^{-2\delta t} \omega_{II}^2 = E_0^{II} e^{-2\delta t}. \end{aligned} \quad (21.41)$$

Важно подчеркнуть, что через время $\tau_E = 1/2\delta$ энергия каждой из мод уменьшится в e раз, при этом противофазная мода «потеряет» больше энергии, чем синфазная, поскольку начальная энергия E_0^{II} у нее была больше, чем E_0^I [см. (21.39)].

Вынужденные колебания. Резонанс. Рассмотрим основные закономерности установившихся вынужденных колебаний в системе, изображенной на рис. 21.11, если на груз массой m_1 действует сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$. Уравнения движения в этом случае будут отличаться от (21.34) наличием этой силы в правой части первого уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1 &= -\omega_1^2 s_1 - 2\delta_1 \dot{s}_1 - \alpha_1 s_2 + \frac{F_0}{m_1} \sin \omega t; \\ \ddot{s}_2 &= -\alpha_2 s_1 - \omega_2^2 s_2 - 2\delta_2 \dot{s}_2. \end{aligned} \quad (21.42)$$

Нетрудно догадаться, что решениями этой системы в установившемся режиме являются гармонические функции

$$s_1(t) = s_{01} \sin(\omega t + \varphi_1); \quad s_2(t) = s_{02} \sin(\omega t + \varphi_2), \quad (21.43)$$

которые отражают тот факт, что оба груза колеблются на частоте вынуждающей силы. Подставляя (21.43) в (21.42), можно вычислить амплитуды и фазы вынужденных колебаний. Ограничимся лишь обсуждением получаемых при этом результатов.

На рис. 21.12 изображена амплитудная резонансная кривая для первого осциллятора, к которому приложена сила. Обращает на себя внимание наличие двух резонансов, которые при малом затухании наблюдаются на нормальных частотах ω_1 и ω_{II} . При изменении частоты ω от ω_1 до ω_{II} амплитуда s_{01} падает, достигая минимума на второй парциальной частоте ω_2 , при этом с уменьшением затухания амплитуда на этой частоте стремится к нулю. Это обстоятельство используют для подавления отклика системы на действие внешней силы. В радиотехнике, где используются связанные колебательные контуры, их применяют как фильтры и демпферы.

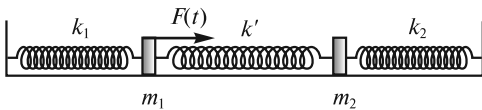


Рис. 21.11

Два резонанса имеют место и для смещения s_2 второго груза. Если проанализировать отношение амплитуд s_{02}/s_{01} в зависимости от частоты ω , то оказывается, что это отношение вблизи частоты ω_1 равно коэффициенту распределения амплитуд ζ_1 для первой моды, а вблизи частоты ω_{II} — коэффициенту распределения амплитуд ζ_{II} для второй моды. Отметим, что экспериментальное определение этих коэффициентов при вынужденных колебаниях проще, чем при собственных.

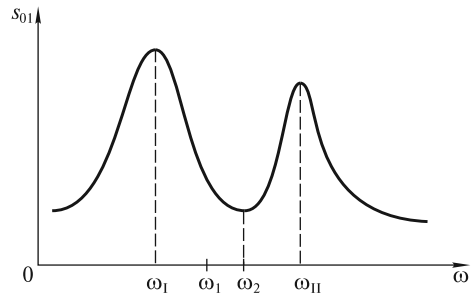


Рис. 21.12

Колебания систем со многими степенями свободы. Основные идеи, сформулированные при рассмотрении колебаний систем с двумя степенями свободы, теперь могут быть использованы для анализа колебаний систем с тремя, четырьмя, ..., N степенями свободы и в пределе, при $N \rightarrow \infty$, для анализа колебаний в сплошных средах, т. е. волн.

Обратимся вначале к колебаниям трех грузов одинаковой массы m , закрепленных на равных расстояниях a на натянутом легком резиновом шнуре, как показано на рис. 21.13, *а*. Любое колебание этой системы может быть представлено как суперпозиция трех нормальных колебаний с частотами ω_1 , ω_{II} и ω_{III} . Опуская на время вопрос о величине частот, найдем конфигурацию этих мод. Примем во внимание, что квадрат частоты колебаний каждого груза в данной моде должен быть одинаков. Этого можно добиться в случае, когда отношения возвращающей силы к величине массы m и ее смещению s у всех грузов будут одинаковыми. Такие условия реализуются при смещении грузов тремя способами (рис. 21.13, *б—г*). При отпуске грузов из положения (*б*) в системе будет происходить первое нормальное колебание на частоте ω_1 ; из положения (*в*) — второе на частоте ω_{II} ; из положения (*г*) — третье на частоте ω_{III} . Очевидно, что $\omega_{III} > \omega_{II} > \omega_1$.

Конфигурация каждой из мод может быть описана с помощью двух коэффициентов распределения амплитуд. Забегая вперед, отметим, что для четырех грузов таких коэффициентов должно быть три, для пяти грузов — четыре и т. д. Ситуацию можно упростить, если обратить внимание на то, что через точки, в которых расположены грузы (рис. 21.13, *б—г*), можно провести синусоиды (штриховыми линиями изображены фрагменты функции $\sin kx$, где k — некоторый параметр, характеризующий период этой функции). Тогда конфигурация мод будет описана следующим образом.

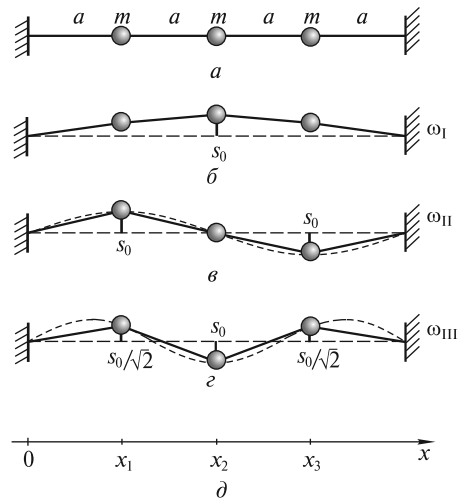


Рис. 21.13

Для первой моды

$$s_0^I(x) = s_0 \sin k_I x; \quad k_I = \frac{\pi}{4a}. \quad (21.44a)$$

Для второй моды

$$s_0^{II}(x) = s_0 \sin k_{II} x; \quad k_{II} = 2k_I. \quad (21.44b)$$

Для третьей моды

$$s_0^{III}(x) = s_0 \sin k_{III} x; \quad k_{III} = 3k_I. \quad (21.44в)$$

Роль безразмерных коэффициентов ζ выполняет функция $\sin k_p x$ ($p = I, II, III$), вычисленная в точках $x = x_1 = a$, $x = x_2 = 2a$, $x = x_3 = 3a$.

Другими примерами трех связанных осцилляторов являются атомы в молекулах CO_2 , H_2O и т. д. На рис. 21.14 изображены конфигурации мод и приведены значения частот нормальных колебаний молекул. Обратим внимание, что эти частоты имеют порядок величины $(10^{14} \div 10^{15}) \text{ c}^{-1}$ и значительно превышают (на несколько порядков) частоты механических колебаний макроскопических систем. Резонансные колебания этих (и других) молекул возбуждаются при взаимодействии разноименно заряженных ионов, составляющих эти молекулы, с электрическим полем световой электромагнитной волны инфракрасного (ИК) диапазона.

Увеличим число грузов, закрепленных на шнуре через равные промежутки a . Если N — число этих грузов, то полная длина шнура равна $l = a(N + 1)$ (рис. 21.15). Рассчитаем нормальные частоты всех мод и их конфигурации. Будем считать, что невесомый шнур натянут с силой F , и при малых отклонениях масс от положения равновесия ($s \ll l$) эта сила не меняется. Каждый груз испытывает действие сил натяжения шнура по обе стороны от него.

На рис. 21.16 показано мгновенное положение фрагмента шнура и трех грузов. Если углы θ_1 и θ_2 малы, то возвращающая сила, действующая на средний груз, равна:

$$f = -F(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \approx -F(\theta_1 + \theta_2). \quad (21.45)$$

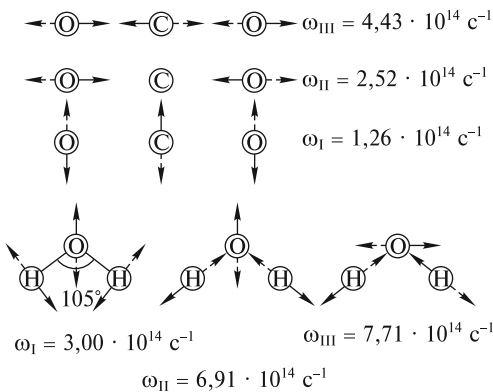


Рис. 21.14



Рис. 21.15

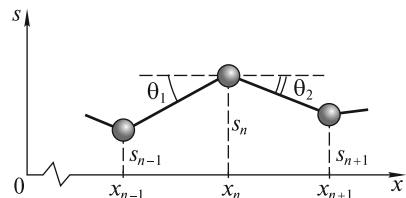


Рис. 21.16

Углы θ_1 и θ_2 зависят от взаимного расположения грузов:

$$\theta_1 \approx \frac{s_n - s_{n-1}}{a}; \quad \theta_2 \approx \frac{s_n - s_{n+1}}{a}. \quad (21.46)$$

С учетом (21.45) и (21.46) уравнение движения среднего груза принимает вид:

$$m\ddot{s}_n = -F \left(\frac{s_n - s_{n-1}}{a} + \frac{s_n - s_{n+1}}{a} \right). \quad (21.47)$$

В случае нормальных колебаний рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} s_{n-1}(t) &= s_{0,n-1} \sin \omega t; \\ s_n(t) &= s_{0,n} \sin \omega t; \\ s_{n+1}(t) &= s_{0,n+1} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (21.48)$$

причем частоту ω и распределение амплитуд предстоит определить.

Подставляя (21.48) в (21.47), получим:

$$-s_{0,n-1} + \left(2 - \frac{ma\omega^2}{F} \right) s_{0,n} - s_{0,n+1} = 0. \quad (21.49)$$

Поскольку $n = 1, 2, 3, \dots, N$, то (21.49) представляет собой систему N линейных однородных уравнений. Из условия равенства нулю ее определителя можно рассчитать все N нормальных частот, а затем для каждой из этих частот найти распределение амплитуд для каждой моды, число которых, очевидно, будет равно N . Мы же используем уже описанный ранее более легкий путь и будем искать конфигурацию каждой моды в виде «синусоидальной» конфигурации:

$$s_0(x) = s_0 \sin kx, \text{ или } s_{0,n} = s_0(x_n), \quad (21.50)$$

где $x_1 = a, x_2 = 2a, \dots, x_n = na, \dots, x_N = Na$.

Убедимся, что конфигурация (21.50) удовлетворяет уравнению (21.49), которое перепишем в виде:

$$\frac{s_{0,n+1} + s_{0,n-1}}{s_{0,n}} = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}, \quad (21.51)$$

где $\Omega^2 = \frac{F}{ma}$.

Подставим (21.50) в левую часть (21.51):

$$\frac{\sin k(n+1)a + \sin k(n-1)a}{\sin kna} = 2 \cos ka = \frac{2\Omega^2 - \omega^2}{\Omega^2}. \quad (21.52)$$

Очевидно, что (21.50) удовлетворит уравнению (21.49), если для данного k подобрать подходящую частоту ω .

Параметр k назовем *волновым числом* (объяснение этого термина будет дано в следующей лекции). Этот параметр должен быть таким, чтобы на концах

закрепленного шнура удовлетворялись граничные условия. При $x=0$ эти условия выполняются: $\sin(k \cdot 0) = 0$. На другом конце, где $x = a(N + 1)$,

$$\sin [ka(N + 1)] = 0, \quad (21.53)$$

откуда получим

$$k_p a(N + 1) = p\pi, \text{ или } k_p = \frac{p\pi}{a(N + 1)}, \quad (21.54)$$

где целое число $p = I, II, \dots, N$ указывает на номер моды (число мод, как было показано выше, равно N). Каждой p -й моде соответствует своя частота, которую можно найти из уравнения (21.52):

$$\omega_p^2 = 2\Omega^2 (1 - \cos k_p a) = 2\Omega^2 \left(1 - \cos \frac{p\pi}{(N + 1)} \right). \quad (21.55)$$

Зная волновые числа k_p и нормальные частоты ω_p , не составляет труда получить выражения для смещений всех грузов как функций времени. Для p -й моды можно записать:

$$s_p(x_n, t) = s_{0p} \sin k_p x_n \cdot \sin(\omega_p t + \varphi_p), \quad (21.56)$$

где $x_n = na; n = 1, 2, \dots, N$.

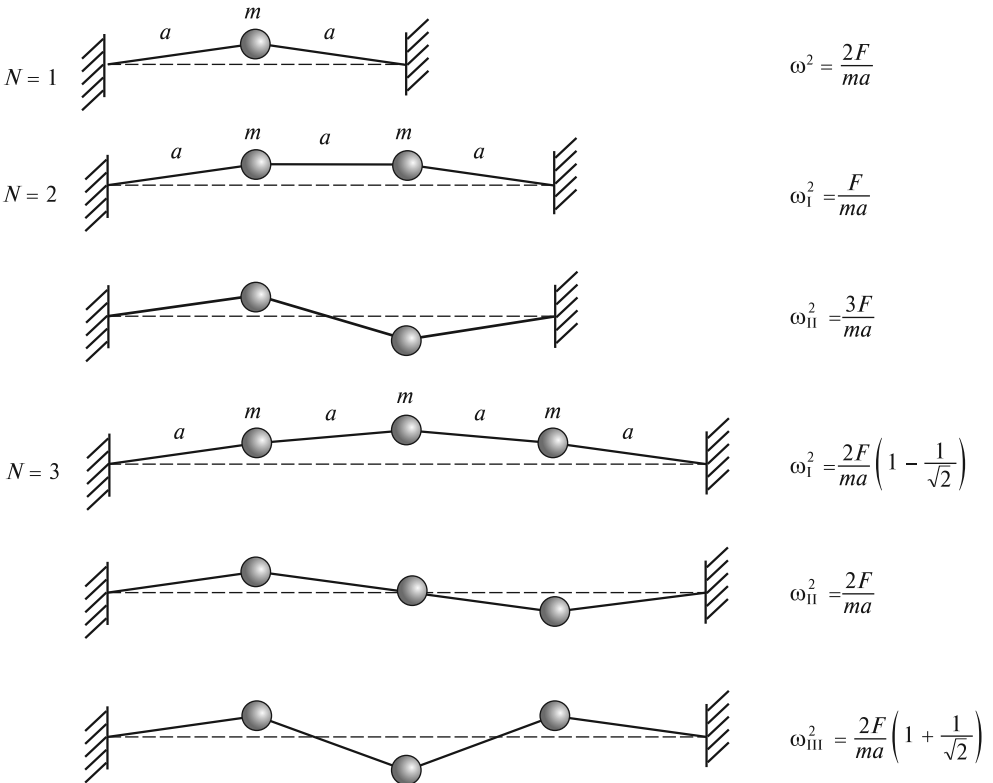


Рис. 21.17

Амплитуда s_{0p} и начальная фаза φ_p определяются начальными условиями, а k_p и ω_p — свойствами самой системы [формулы (21.54) и (21.55)].

В силу линейности колебательной системы в самом общем случае колебаний для смещения всех частиц получаем выражение:

$$s(x_n, t) = \sum_p s_p(x_n, t), \quad (21.57)$$

где суммирование проводится только по тем модам, которые «участвуют» в колебаниях. Так, удерживая все время средний груз в положении равновесия, мы не можем возбудить моды с нечетными номерами $p = I, III, \dots$, поскольку эти моды «требуют» смещения центрального груза.

Пользуясь формулой (21.55), можно вычислить нормальные частоты колеблющихся грузов на шнуре. На рис. 21.17 изображены моды колебаний в системе с одним, двумя и тремя грузами и для каждой моды указаны значения нормальных частот.

В заключение отметим, что связь типа (21.55) между частотой ω и волновым числом k называют *дисперсионным соотношением*, которое будет использовано далее при анализе распространения волн в периодических структурах.

ЛЕКЦИЯ 22

Распространение возмущений в системе с большим числом степеней свободы.

Рассмотрим колебания $N \gg 1$ грузов на резиновом шнуре (рис. 22.1, а). Отклоним несколько грузов в середине шнура от положения равновесия (рис. 22.1, б) и затем отпустим их в момент времени $t = 0$. Как показывает опыт, эта начальная конфигурация, представляющая собой по форме импульс, с течением времени трансформируется в два одинаковых импульса, которые распространяются в разные стороны с некоторой конечной скоростью c (рис. 22.1, в). Эти импульсы достигнут концов шнура, изменят свою полярность при отражении и побегут в обратном направлении (рис. 22.1, г). После встречи в середине шнура они отразятся еще раз, восстановят исходную полярность и спустя время $\Delta t = 2l/c$ вновь встретятся в середине, сформировав исходный импульс. Затем этот процесс с периодом Δt будет повторяться до тех пор, пока импульсы не затухнут из-за диссипации энергии.

С точки зрения повседневного опыта в рассмотренном примере нет ничего удивительного, поскольку смещения группы грузов ведут к возникновению упругих сил, стремящихся вернуть эту группу в положение равновесия и одновременно вывести соседние частицы из положения равновесия. С точки зрения описания колебаний «на языке мод» также понятно, что отклонив, а затем отпустив группу частиц, мы возбуждаем много мод. Колебания всех N частиц происходят одновременно на нескольких нормальных частотах ω_p . Все эти частоты различны, и сумма нормальных колебаний представляет собой биения. Поскольку через время, равное периоду биений, колебания группы частиц в центре шнура восстановятся, то очевидно, что период биений равен времени $\Delta t = 2l/c$.

Определим скорость c , исходя из представления о биениях как о суперпозиции нормальных колебаний. Для этого вначале перепишем дисперсионное соотношение (21.55) в виде:

$$\omega_p = 2\Omega \sin \frac{k_p a}{2} = 2\Omega \sin \frac{1}{2} \left(\frac{p\pi}{N+1} \right). \quad (22.1)$$

При наличии многих частот ω_p в спектре колебаний биения не будут периодическими — начальная конфигурация не повторяется. Визуально это будет проявляться в искажении формы бегущих импульсов, если длина импульса $l_i \gtrsim a$ (импульс «накрывает» мало частиц), а шнур достаточно длинный. Это искажение будет ничтожным, если $l_i \gg a$ (группа состоит из большого числа частиц). Так обыч-

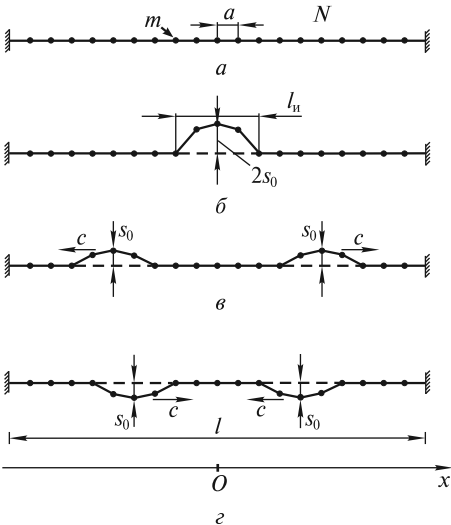


Рис. 22.1

но и происходит при распространении возмущений в твердом теле, где $a \approx 10^{-10}$ м (расстояние между узлами кристаллической решетки, около которых колеблются атомы).

Если $l_n \gg a$, то в спектре колебаний доминируют низшие моды, которые характеризуются волновыми числами k_p , где $p = I, II, III, \dots \ll N$. Частоты этих мод получаются из формулы (22.1):

$$\omega_p \approx \Omega a k_p = \frac{\Omega \pi}{N+1} p; \quad p = I, II, III, \dots \quad (22.2)$$

Здесь использовано приближение $\sin x \approx x$ при $x \ll 1$. Эта зависимость $\omega_p(k_p)$ изображена на рис. 22.2. Обратим внимание, что низшие частоты располагаются эквидистантно: $\Delta\omega = \omega_{II} - \omega_I = \omega_{III} - \omega_{II} = \dots$. Поэтому период биений [см. также формулу (21.14)] получается равным:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2(N+1)}{\Omega}. \quad (22.3)$$

С учетом того, что длина шнура $l = a(N+1)$, скорость распространения импульса будет равна:

$$c_0 = \frac{2l}{\Delta t} = a\Omega = \sqrt{Fa/m}. \quad (22.4)$$

Если теперь увеличивать число грузов N на шнуре фиксированной длины, тем самым уменьшая расстояние a , то получится предельный переход к непрерывному распределению массы, т. е. к однородному весоному шнуру, при этом

$$\rho_1 = m/a \quad (22.5)$$

является линейной плотностью однородного шнура. Поэтому окончательно для скорости распространения импульса произвольной формы по шнуру имеем:

$$c_0 = \sqrt{F/\rho_1}. \quad (22.6)$$

Например, в случае тонкого резинового шланга с линейной плотностью $\rho_1 \approx 0,1$ кг/м, натянутого с силой $F \approx 10^2$ Н, скорость движения импульса $c_0 \approx 30$ м/с. Такая сравнительно небольшая скорость позволяет легко наблюдать распространение и отражение импульса.

Итак, подведем некоторые итоги.

1. Если пренебречь периодической структурой среды, то скорость c_0 распространения импульса не зависит от его формы, а сам импульс при распространении не искажается (дисперсия отсутствует).

2. Если ось x направить вдоль шнура и задать начальное возмущение (в момент $t=0$) в виде $s(x)$, то с течением времени возмущение шнура будет иметь вид:

$$\frac{1}{2} s(x - c_0 t) + \frac{1}{2} s(x + c_0 t). \quad (22.7)$$

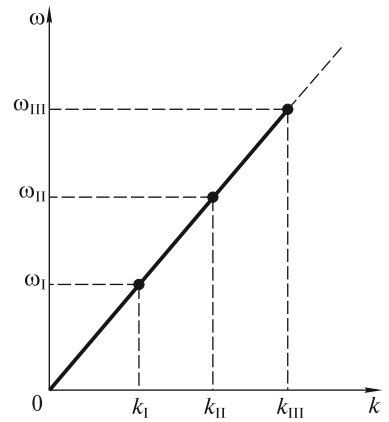


Рис. 22.2

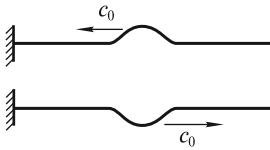


Рис. 22.3

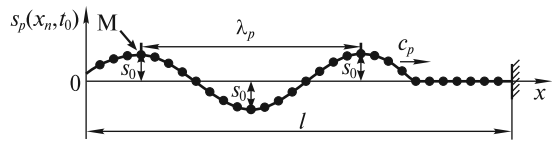


Рис. 22.4

Первое слагаемое описывает возмущение, бегущее со скоростью c_0 в положительном направлении оси Ox , указанном на рис. 22.1, а второе соответствует импульсу, распространяющемуся в противоположном направлении.

3. У концов невесомого шнура с грузами оба импульса отражаются. Отраженный импульс имеет противоположную полярность (направление смещения s) по сравнению с падающим. Аналогичные граничные условия реализуются для сплошного массивного шнура с закрепленными концами (рис. 22.3).

4. В области перекрытия бегущих импульсов образуется колебание, называемое стоячей волной. Так мы приходим к понятиям *бегущих* и *стоячих* волн, при этом стоячая волна может рассматриваться как суперпозиция волн, бегущих в противоположных направлениях.

Возбуждение волн. Рассмотрим колебания невесомого шнура с грузами, правый конец которого закреплен, а левый под действием внешней силы в момент времени $t = 0$ начинает смещаться по гармоническому закону:

$$s(t) = s_0 \sin \omega t. \quad (22.8)$$

Под действием этой силы грузы, связанные друг с другом отрезками натянутого шнура, рано или поздно начнут совершать вынужденные гармонические колебания с частотой ω . Естественно, что систему грузов (по аналогии с системой с двумя грузами) можно заметно раскачать лишь в случае резонанса, когда частота ω совпадает с одной из нормальных частот ω_p .

Вначале придут в движение грузы вблизи левого подвижного конца шнура, а с течением времени в колебания будут вовлекаться все новые грузы. Такие колебания представляют собой волновой процесс (волну), распространяющийся «слева — направо» с некоторой скоростью c_p . На рис. 22.4 изображены положения колеблющихся масс в некоторый момент времени t_0 . Поскольку грузы колеблются «поперек» направления распространения (оси Ox), то волна называется *поперечной*. Эта волна добежит до правого закрепленного конца шнура и отразится. После этого будут существовать две волны: исходная бегущая (иногда ее называют падающей волной) и отраженная волна, которая бежит навстречу падающей. Спустя время $\Delta t = 2l/c_p$ отраженная волна достигнет левого конца, снова отразится, и «сформируется» мода колебаний. Конфигурация этой моды задается *волновым числом* k_p [см. (22.1)].

Рассмотрим падающую волну с волновым числом k_p более подробно. Пространственный период λ_p , изображенный на рис. 22.4 как минимальное расстояние между грузами, колеблющимися в фазе, называют *длиной волны*. Длина волны связана с волновым числом k_p соотношением:

$$k_p = 2\pi/\lambda_p. \quad (22.9)$$

Если силы вязкого трения, приложенные к каждому из грузов, малы, то амплитуды колебаний всех грузов будут одинаковы и равны s_0 . Теперь мы можем записать *уравнение бегущей волны*, описывающее смещение любой из масс в произвольный момент времени. Для частоты ω_p , волнового числа k_p и амплитуды s_0 оно имеет вид

$$s_p(x_n, t) = s_0 \sin(\omega_p t - k_p x_n), \quad (22.10)$$

где $x_n = a, 2a, \dots, na, \dots, Na$, а $\omega_p t - k_p x_n = \varphi$ — фаза волны.

Уравнение (22.10) отражает тот факт, что все грузы колеблются с одинаковой частотой ω_p , имеют одинаковую амплитуду s_0 , однако эти колебания различаются по фазе φ .

Найдем теперь скорость c_p распространения волны. Для этого проследим за движением гребня волны, вершина которого в некоторый момент времени находится в точке M . Пусть за время Δt этот гребень сместится на расстояние $\Delta x_n \gg a$. Поскольку на вершине гребня грузы имеют максимальное положительное смещение, то фаза их колебаний постоянна и равна

$$\omega_p t - k_p x_n = \pi/2. \quad (22.11)$$

Поэтому

$$\omega_p \Delta t - k_p \Delta x_n = 0, \quad (22.12)$$

откуда

$$c_p = \frac{\Delta x_n}{\Delta t} = \frac{\omega_p}{k_p} = v_p \lambda_p. \quad (22.13)$$

Скорость c_p называют *фазовой скоростью* гармонической волны с частотой $\omega_p = 2\pi\nu_p$. Проанализируем зависимость этой скорости от волнового числа, пользуясь дисперсионным соотношением (22.1). Для этого перепишем его с учетом (22.4) в виде

$$\omega_p = c_0 k_p \frac{\sin(k_p a/2)}{k_p a/2}. \quad (22.14)$$

График зависимости (22.14) называют *дисперсионной кривой* (рис. 22.5, а). На этой кривой каждой точке соответствуют значения частот ω_p и волновых чисел k_p . Штриховой линией изображена прямая $\omega_p = c_0 k_p$. Она получается из (22.14) предельным переходом при $a \rightarrow 0$ (непрерывная среда).

Из формулы (22.14) и рис. 22.5, а можно сделать ряд принципиально важных выводов.

1. Поскольку зависимость ω_p от k_p нелинейная, то фазовая скорость гармонической волны $c_p = \omega_p/k_p$ зависит от k_p или ω_p (рис. 22.5, б):

$$c_p = c_0 \frac{\sin(k_p a/2)}{k_p a/2}. \quad (22.15)$$

Это явление носит название *дисперсии среды* по отношению к распространяющейся в ней волне. Эквивалентным является выражение «дисперсия волны»

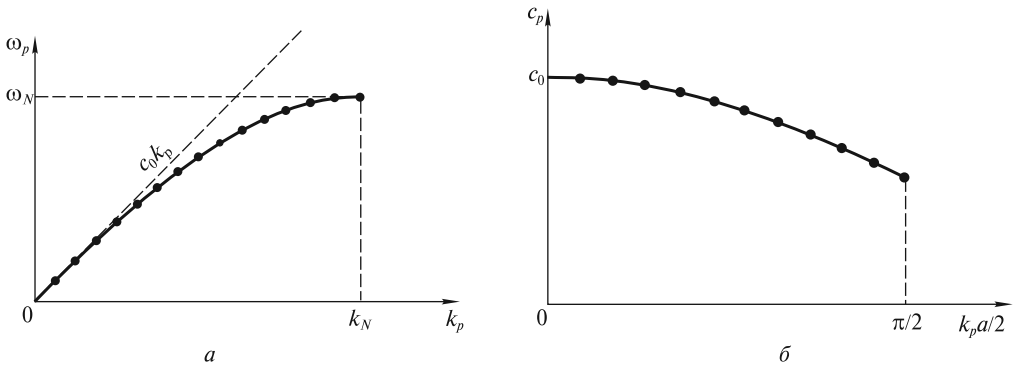


Рис. 22.5

в среде». Если фазовая скорость волны не зависит от k_p , как, например, в случае непрерывной среды, то говорят, что дисперсия отсутствует.

2. Для малых волновых чисел ($k_p a \ll 1$, или $\lambda_p \gg a$) дисперсия мала. Скорость таких «длинных волн» $c_p \approx c_0$, а среда может считаться сплошной.

3. С увеличением волнового числа k_p (а значит и ω_p) скорость c_p , как это следует из (22.15), убывает. Такое изменение скорости называют *нормальной дисперсией*. Следует отметить, что в оптике, помимо этой, реализуется и другая ситуация, когда фазовая скорость света в некотором диапазоне частот может возрастать с увеличением частоты. В этом случае дисперсию называют *аномальной*.

4. Дисперсионная кривая обрывается, когда волновое число и частота достигают максимальных значений k_N и ω_N , которые находят по формулам (22.14) и (22.1) при $N \gg 1$:

$$k_N = \frac{\pi}{a}; \quad \omega_N = 2\Omega.$$

Это означает, что волны с частотами $\omega > \omega_N$ в такой среде распространяться не могут. Действительно, при частоте $\omega = \omega_N$ длина волны $\lambda_N = 2\pi/k_N = 2a$. Волны с меньшей длиной волны не могут существовать, поскольку на длине распространяющейся волны должно находиться не меньше двух колеблющихся грузов.

Заметим, что в некоторых случаях, например, при распространении электромагнитных волн в твердом теле и плазме, кривая дисперсии может начинаться в некоторой точке ω^* на оси частот. В таких средах могут распространяться электромагнитные волны только с частотами ω , лежащими внутри интервала $\omega^* < \omega \leq \omega_N$.

В качестве примера отметим, что для кристаллов $F/a \approx 15$ Н/м (F — упругая сила, которая определяется межатомным взаимодействием). Если принять массу

иона $m \approx 6 \cdot 10^{-26}$ кг, то $\omega_N = 2\sqrt{\frac{F}{ma}} \approx 3 \cdot 10^{13}$ с⁻¹. Эта частота, как и частоты колебаний молекул CO_2 и H_2O , лежит в инфракрасной (ИК) области электромагнитного спектра, поэтому при распространении ИК излучения в кристаллах ионы могут совершать резонансные колебания. В этом частотном оптическом диапазоне может существовать сильная дисперсия света.

При распространении волн в протяженных средах проблемы «настройки» частоты ω внешнего воздействия, порождающего волну, на частоту ω_p одной из мод среды не существует. Воздействие внешней силы, даже сколь угодно близкой к гармонической, на самом деле всегда будет квазигармоническим, характеризуемым узким интервалом частот $\Delta\omega \ll \omega$. С другой стороны, для протяженной среды к частоте ω будут близки частоты ω_p мод с большими номерами p ($p \gg 1$). Разность частот двух соседних мод $\Delta\omega_p = \omega_{p+1} - \omega_p$, как это легко видеть из рис. 22.5, будет настолько малой, что $\Delta\omega_p \ll \Delta\omega$. Следовательно, для любой частоты ω внешнего воздействия, прикладываемого к границе среды, в ней будет распространяться волна, которую в ряде случаев можно приближенно считать гармонической:

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx). \quad (22.16)$$

Группа волн. Групповая скорость. Под действием квазигармонического внешнего воздействия в среде будет распространяться квазигармоническая волна. Поэтому вместо (22.16) следует записать уравнение волны в виде

$$s(x, t) = s_0(x, t) \sin[\omega_0 t - k_0 x + \phi_0(x, t)]. \quad (22.17)$$

Здесь амплитуда $s_0(x, t)$ и фаза $\phi_0(x, t)$ являются медленно меняющимися функциями времени на некотором масштабе времени τ [сравните с формулой (21.19)]. Естественно, что такая волна представляет собой группу гармонических волн, частоты которых заключены в пределах интервала $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau$ вблизи основной частоты ω_0 . Каждая из волн группы в среде с дисперсией имеет собственную фазовую скорость. В среде с нормальной дисперсией волны с большей частотой будут двигаться медленнее, чем волны с меньшей частотой. Возникает естественный вопрос: что является скоростью группы волн, и если такая скорость существует, то как ее вычислить? Какой физический смысл имеет эта скорость и в чем ее отличие от фазовой скорости?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим для простоты группу из двух волн с одинаковыми амплитудами s_0 и близкими частотами ω_1 и ω_2 , бегущих в положительном направлении оси Ox . Будем считать, что $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$. С такой ситуацией мы уже встречались при анализе биений двух связанных осцилляторов. Зададим свойства среды дисперсионным соотношением $\omega = \omega(k)$. С его помощью вычислим значения k_1 и k_2 двух волновых чисел, соответствующих частотам ω_1 и ω_2 . Тогда уравнение группы волн примет вид

$$\begin{aligned} s(x, t) &= s_0 \sin(\omega_1 t - k_1 x) + s_0 \sin(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2s_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right) \sin(\omega_0 t - k_0 x), \end{aligned} \quad (22.18)$$

где $\Delta k = k_2 - k_1$, $k_0 = (k_1 + k_2)/2$.

На рис. 22.6 изображена группа из двух волн в некоторый фиксированный момент времени t_0 . Выделим две точки: M и R . Первая из них отвечает фиксированному значению фазы $\phi_M = \omega_0 t - k_0 x_M$, при которой $\sin \phi_M = 1$. Очевидно, что скорость этой точки, определяемая из условия $d\phi_M = \omega_0 dt - k_0 dx_M = 0$, равна

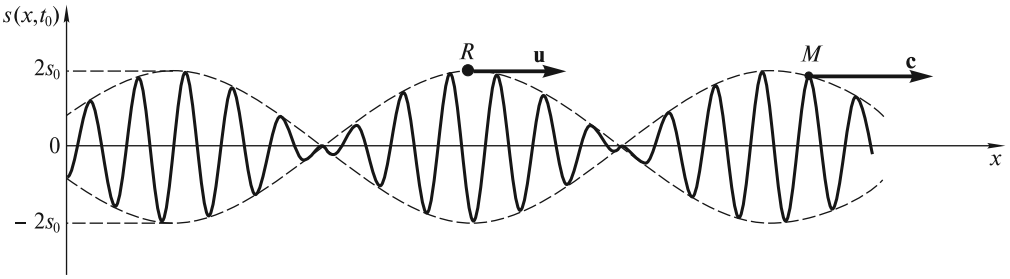


Рис. 22.6

$$c = \frac{dx_M}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0} \quad (22.19)$$

и совпадает с фазовой скоростью волны с частотой ω_0 .

Амплитуда квазигармонической волны (22.18) определяется как

$$s_0(x, t) = 2s_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right), \quad (22.20)$$

и ее распределение на рис. 22.6 изображено штриховой линией в виде медленно изменяющейся вдоль оси Ox огибающей волны основной частоты ω_0 . Точка R на вершине этой огибающей будет двигаться со скоростью, отличающейся от c . Действительно, для координаты x_R этой точки, как это следует из (22.20), можем записать условие:

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x_R = \text{const}. \quad (22.21)$$

За время dt точка R сместится на расстояние dx_R , которое находится из равенства

$$\frac{\Delta\omega}{2}dt - \frac{\Delta k}{2}dx_R = 0. \quad (22.22)$$

Следовательно, скорость движения вершины огибающей будет равна

$$u = \frac{dx_R}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (22.23)$$

Эта скорость характеризует движение группы волн и называется *групповой скоростью*. Ее смысл станет еще более понятным, если в пределах интервала $\Delta\omega$ в группе будут находиться волны с близко расположенными частотами, как, например, изображено на рис. 22.7, *a*. Сама группа имеет вид одного импульса длительностью $\tau_{\text{г}}$, распространяющегося вдоль оси Ox (рис. 22.7, *b*). Импульс будет двигаться с групповой скоростью $u = \Delta\omega/\Delta k$. На дисперсионной кривой (рис. 22.7, *в*) эта скорость равна угловому коэффициенту касательной в точке A . «Синусоида» внутри импульса будет его обгонять и двигаться с фазовой скоростью $c = \omega_0/k_0$. Численно эта скорость будет равна угловому коэффициенту отрезка, проведенного из начала координат в точку A . В среде без дисперсии дисперсионная кривая является прямой линией $\omega = ck$. Поэтому

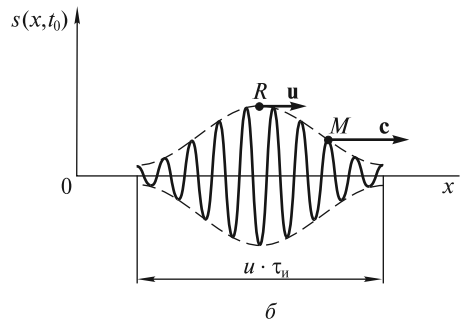
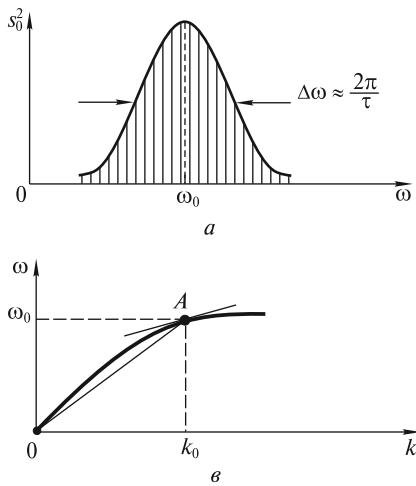


Рис. 22.7

$$c = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = u, \quad (22.24)$$

т. е. фазовая и групповая скорости совпадают. В среде с нормальной дисперсией, как это видно из рис. 22.7, *в*, $u < c$. В среде с аномальной дисперсией кривая $\omega = \omega(k)$ должна загнуться вверх и, формально, $u > c$. Однако обычно эта зависимость настолько нелинейна, что понятие групповой скорости теряет смысл. Действительно, когда импульс, изображенный на рис. 22.7, *б*, пройдет очень большое расстояние в диспергирующей среде, то форма его исказится, и он растянется в пространстве. В среде с сильной аномальной дисперсией это искажение происходит уже на малых расстояниях, поэтому говорить о распространении импульса как целого с групповой скоростью u некорректно.

Дисперсионное уширение импульсов негативно сказывается, например, на скорости передачи информации посредством коротких световых импульсов, бегущих по волоконно-оптическим линиям связи, длина которых достигает нескольких тысяч километров. Два следующих друг за другом импульса могут расширяться настолько, что сольются в один (станут неразличимыми). Естественно, что приемник, установленный в конце линии, «воспримет» два импульса как один, и часть передаваемой информации будет утеряна.

Волны в сплошном шнуре. Волновое уравнение. Уравнение бегущей гармонической волны в однородном шнуре, где дисперсия отсутствует ($\omega = c_0 k$), по аналогии с (22.16) имеет вид:

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t \mp kx) = s_0 \sin[\omega(t \mp x/c_0)]. \quad (22.25)$$

Знак « \rightarrow » соответствует волне, бегущей в положительном направлении оси Ox , а знак « \leftarrow » — в отрицательном. В более общем случае распространения произвольного импульса (группы волн),двигающегося с той же скоростью c_0 , уравнение волны можно записать в виде:

$$s(x, t) = s(t \mp x/c_0), \quad (22.26)$$

где $s(\theta)$ — произвольная функция аргумента $\theta = t \mp x/c_0$.

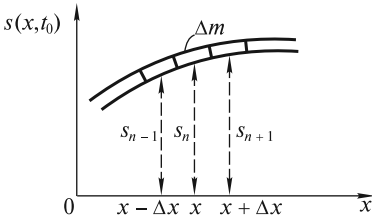


Рис. 22.8

Покажем, что закон движения (22.26) и, конечно, его частный случай (22.25) являются решениями некоторого уравнения движения, которое называется *волновым уравнением*. Это волновое уравнение можно получить предельным переходом из уравнения (21.47), заменяя a на Δx .

На рис. 22.8 показан фрагмент колеблющегося шнура. На этом фрагменте изображены три элемента шнура длиной Δx и массой Δm каждый.

Смещения этих элементов в некоторый произвольный момент времени равны $s_{n-1} = s(x - \Delta x, t)$, $s_n = s(x, t)$, $s_{n+1} = s(x + \Delta x, t)$. Ускорение центрального элемента

$\ddot{s}_n = \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2}$. Оно записано в виде второй частной производной функции $s(x, t)$

по времени. Учтем далее, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s_{n+1} - s_n}{\Delta x} = \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x + \frac{\Delta x}{2}}; \quad (22.27)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s_n - s_{n-1}}{\Delta x} = \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x - \frac{\Delta x}{2}}.$$

Обратим внимание, что сила $F \cdot \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x + \Delta x/2}$ является проекцией на направленные смещения s силы F , приложенной к центральному элементу справа (в точке

$x + \Delta x/2$). Слева (в точке $x - \Delta x/2$) проекция этой силы равна $-F \cdot \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x - \Delta x/2}$.

Равнодействующая этих сил, очевидно, определяется приращением первой производной $\frac{\partial s}{\partial x}$ на длине малого элемента Δx . Поэтому

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{F}{\Delta m} \left(\left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x + \Delta x/2} - \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x - \Delta x/2} \right). \quad (22.28)$$

Если теперь учесть, что $\Delta m = \rho_1 \Delta x$ (ρ_1 — плотность единицы длины, или линейная плотность шнура), то (22.28) при $\Delta x \rightarrow 0$ примет вид волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_1} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (22.29)$$

Это волновое уравнение является математическим выражением второго закона Ньютона, в котором ускорение единицы длины шнура и действующая на него сила записаны в виде вторых частных производных смещения s соответ-

ственно по времени и координате. С математической точки зрения оно является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. Его решение хорошо известно: им может быть любая функция $s(\theta)$, аргумент которой «сконструирован» в виде (22.26), а скорость $c_0 = \sqrt{F/\rho_1}$. Убедемся в справедливости этого утверждения. Для этого вычислим вторые производные в соответствии с правилами дифференцирования функции со сложным аргументом $\theta = t \mp x/c_0$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta}; \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \left(\mp \frac{1}{c_0} \right); \quad (22.30)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{d^2 s}{d\theta^2}; \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{d^2 s}{d\theta^2} \left(\mp \frac{1}{c_0} \right)^2. \quad (22.31)$$

Подставляя вторые производные из (22.31) в (22.29), приходим к выводу, что при $c_0 = \sqrt{F/\rho_1}$ уравнение (22.29) тождественно удовлетворяется, т. е. функция $s(\theta)$ действительно является его решением.

Волновое уравнение является одним из фундаментальных уравнений. В разных областях физики оно получается как результат применения соответствующих законов, описывающих поведение систем различной природы (механических, электромагнитных и др.). В общем случае волновое уравнение описывает распространение волн в трехмерном пространстве и имеет более сложный вид:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right). \quad (22.32)$$

Под s может подразумеваться любая величина: смещение, скорость, плотность, давление, электрический ток, электрическое напряжение, напряженность электрического и индукция магнитного полей и др.

Важно подчеркнуть, что если удастся получить волновое уравнение (вывести его) для какого-либо процесса, то стоящий перед вторыми пространственными производными множитель равен квадрату скорости распространения волны в среде без дисперсии. Этот факт часто используют для нахождения скорости распространения волн различной природы. Ниже этот прием будет использован при рассмотрении волн в твердых телах, жидкостях и газах.

Отражение волны на конце шнура. Мы уже упоминали в начале этой лекции, что волна, достигнув конца шнура, отражается. Характер этого отражения зависит от условий закрепления конца шнура (граничных условий).

Рассмотрим вначале более подробно процесс отражения импульса от закрепленного конца шнура. На рис. 22.9 показаны последовательные стадии отражения импульса треугольной формы. Штриховыми линиями показаны падающий (бегущий вправо) и отраженный (бегущий влево) импульсы, суперпозиция которых дает реальный (наблюдаемый) импульс, изображенный сплошной линией. Для моментов времени $t \leq 0$ падающий импульс также изображен сплошной линией. Если длительность импульса равна $\tau_{и}$, то его протяженность вдоль шнура равна $c_0 \tau_{и}$. Пусть в момент времени $t = 0$ он добежит до конца

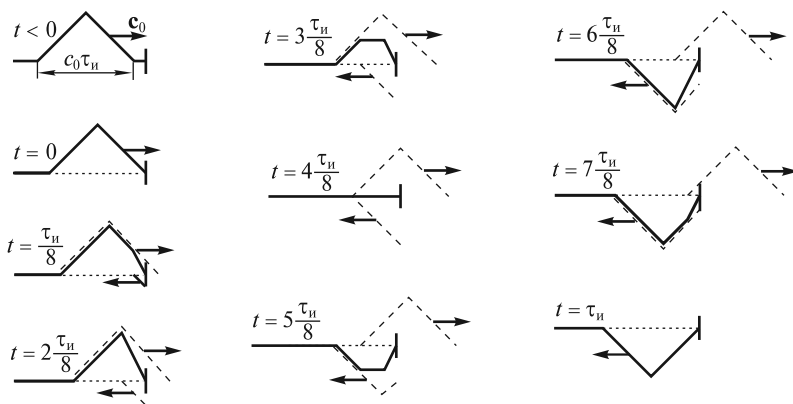


Рис. 22.9

шнура. В последующие моменты времени шнур будет воздействовать на кронштейн, к которому прикреплен его конец, с переменной силой, перпендикулярной направлению движения импульса. Эта сила в момент времени $t > 0$ начинает тянуть кронштейн вверх. В течение времени $0 < t < \tau_{и}/2$ она остается постоянной, и в момент времени $t = \tau_{и}/2$ становится равной нулю. По третьему закону Ньютона с такой же силой кронштейн действует вниз на конец шнура. В момент времени $t = \tau_{и}/2$ шнур становится прямым. Однако часть шнура длиной $c\tau_{и}/2$ продолжает двигаться вниз по инерции. При $t > \tau_{и}/2$ шнур тянет кронштейн вниз, и это действие прекращается при $t = \tau_{и}$. Естественно, что кронштейн воздействует на конец шнура с силой, направленной вверх, тормозя движение его элементов вниз. Окончательно поперечное действие шнура на кронштейн прекратится при $t > \tau_{и}$, когда сформируется отраженный импульс, имеющий противоположную (по отношению к падающему) полярность.

Если по шнуру бежит гармоническая волна, то по достижении ею закрепленного конца шнура возникает обращенная отраженная волна. Чтобы учесть изменение ее полярности, в аргумент уравнения отраженной волны добавляют фазовый сдвиг $\varphi_{отр} = \pi$. В этом случае при отражении фаза волны скачком изменяется на π , или «теряется полволны». В общем случае при произвольных граничных условиях сдвиг фазы $\varphi_{отр}$ может изменяться в интервале $0 \leq \varphi_{отр} \leq \pi$. Поясним сказанное на простейшем примере.

Пусть по шнуру бежит гармоническая волна (рис. 22.10, сплошная кривая). У его конца при $x = l$ она будет отражаться (штриховая линия). Смещение любого участка шнура, имеющего координату $x \leq l$, определяется как суперпозиция бегущей и отраженной волн:

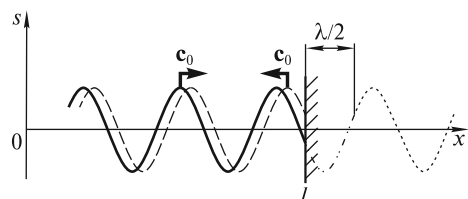


Рис. 22.10

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx) + s_0 \sin[\omega t - k(2l - x) + \varphi_{отр}]. \quad (22.33)$$

В (22.33) учтено, что отраженная волна, во-первых, проходит расстояние «туда

и обратно», равное $l + (l - x) = 2l - x$, и, во-вторых, приобретает сдвиг фазы $\varphi_{\text{отр}}$ при ее отражении. Проведем суммирование в (22.33) и получим

$$s(x, t) = 2s_0 \cos \left[k(l - x) + \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2} \right] \sin \left[\omega t - kl + \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2} \right]. \quad (22.34)$$

Предполагается, что амплитуда волны s_0 остается постоянной при распространении и не изменяется при отражении. Выражение (22.34) является *уравнением стоячей волны*. Основные ее особенности заключаются в следующем:

1. В стоячей волне все участки шнура колеблются с одинаковой частотой ω и в фазе, однако амплитуда этих колебаний изменяется вдоль шнура, т. е. стоячая волна является модой колебаний.

2. Амплитуда колебаний в стоячей волне, согласно (22.34), равна

$$A(x) = 2s_0 \cos [k(l - x) + \varphi_{\text{отр}}/2]. \quad (22.35)$$

Из этого выражения видно, что некоторые участки шнура колеблются с амплитудой, равной $2s_0$. Это так называемые «пучности» стоячей волны. С другой стороны, существуют участки, которые остаются неподвижными, так как для них амплитуда $A = 0$. Это «узлы» стоячей волны.

На рис. 22.11 изображены смещения фрагмента струны для трех последовательных моментов времени t_1 , t_2 и t_3 . Нетрудно показать, что расстояние между двумя соседними узлами равно расстоянию между двумя соседними пучностями и составляет величину $\Delta x = \pi/k = \lambda/2$.

3. Все части шнура, лежащие между двумя соседними узлами, совершают колебания в фазе. При переходе через узел фаза колебаний скачком изменяется на π , что соответствует изменению знака $A(x)$.

4. На конце шнура ($x = l$) амплитуда

$$A(l) = 2s_0 \cos \frac{\varphi_{\text{отр}}}{2}. \quad (22.36)$$

Для закрепленного конца шнура $A(l) = 0$ и $\varphi_{\text{отр}} = \pi$. На рис. 22.10 показан участок в полволны, который «теряется» при таком отражении. Отраженная волна является зеркальным отражением участка кривой в области $x \geq l + \lambda/2$, показанного пунктиром.

Рассмотрим теперь отражение волны от свободного конца шнура. Технически это можно реализовать, если конец шнура привязать к тонкой и легкой нити, которая служит лишь для создания натяжения шнура с силой F .

Процесс отражения треугольного импульса от свободного конца шнура показан на рис. 22.12. Обращают на себя внимание два обстоятельства:

1. Отраженный импульс сохраняет ту же полярность, что и падающий. Это связано с тем, что при движении свободный конец будет тянуть вверх прилегающие к нему слева участки шнура, и в результате будет возбужден отраженный импульс, в котором элементы шнура также смеще-

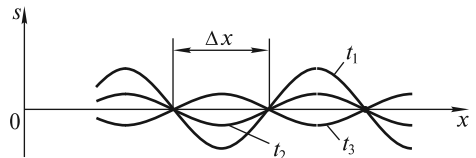


Рис. 22.11

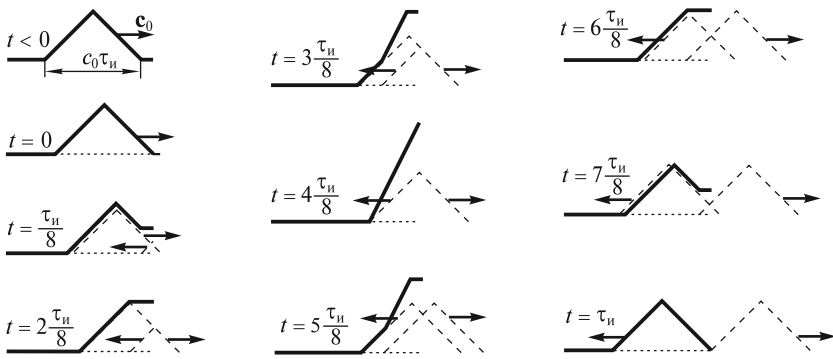


Рис. 22.12

ны вверх. В случае гармонической волны отраженная волна находится в фазе с падающей. Образующаяся стоячая волна будет описываться уравнением (22.34), в котором $\varphi_{\text{отр}} = 0$.

2. Конец шнура совершает «взмах», величина которого вдвое превышает амплитуду импульса в его середине. Для гармонической волны на конце шнура ($x = l$) образуется пучность стоячей волны. Это следует из формулы (22.36), в которой $\varphi_{\text{отр}} = 0$.

Возбуждение стоячих волн в шнуре. Моды колебаний. Пусть кронштейн, к которому привязан левый конец шнура, совершает гармонические колебания $s(t) = \xi_0 \sin \omega t$, где ξ_0 — очень малая амплитуда. В связи с этим левый конец шнура можно считать закрепленным. По шнуру побежит гармоническая волна (рис. 22.13), которая после отражения от правого закрепленного конца приобретет сдвиг фазы, равный π . Добежав до левого конца, она еще раз отразится, а сдвиг фазы станет равным 2π .

Двукратно отраженная волна наложится на постоянно бегущую вправо гармоническую волну. Если сдвиг фазы колебаний у этих волн будет кратным величине 2π , то результатом наложения будет волна, амплитуда которой превышает амплитуду ξ_0 исходной бегущей волны. Таким образом, бегущая волна усилится. Однако потери энергии также увеличатся с ростом амплитуды. Поэтому колебания установятся: в систему будет закачено некоторое количество энергии, а дальнейший приток ее будет равен диссипации.

Определим частоту ω , с которой следует двигать левый кронштейн, чтобы обеспечить максимальное усиление волны. Бегущая гармоническая волна может рассматриваться как набор следующих друг за другом со скоростью c_0 импульсов разной полярности. Проследим за усилением любого из них (например, заштрихованного на рис. 22.13). Время движения импульса (для определенности, точки A в его начале) по шнуру туда и обратно равно $\Delta t = 2l/c_0$. Учтем далее, что после двух отражений этот импульс два раза обратится. Для его усиления необходимо, чтобы в момент

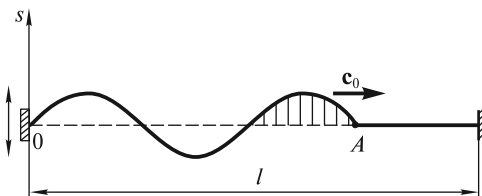


Рис. 22.13

усиления необходимо, чтобы в момент

$t = \Delta t$ левый конец шнура проходил положение равновесия и двигался при этом вверх:

$$\begin{aligned} s(\Delta t) &= \xi_0 \sin((\omega \Delta t)) = 0; \\ \dot{s}(\Delta t) &= \xi_0 \omega \cos(\omega \Delta t) = + \xi_0 \omega. \end{aligned} \quad (22.37)$$

Поэтому частота ω должна удовлетворять условию:

$$\omega_p \Delta t = 2\pi p, \quad (22.38)$$

где $p = I, II, III, \dots$. Отсюда

$$\omega_p = \frac{\pi c_0}{l} p. \quad (22.39)$$

Конфигурацию колеблющейся с частотами (22.39) струны легко изобразить графически в том случае, когда амплитуды бегущей и отраженной волн не меняются вдоль шнура и равны между собой. Очевидно, что это будут стоячие волны, рассмотренные выше и соответствующие одинаковым граничным условиям: на обоих концах шнура должны быть узлы смещения. Для примера на рис. 22.14 изображены три возможные конфигурации шнура в момент времени, когда смещения элементов шнура максимальны. Колебания, соответствующие этим конфигурациям, являются нормальными колебаниями (модами), а частоты $\omega_I, \omega_{II}, \omega_{III}$ — нормальными частотами. Если действие внешней силы прекратится, то эти колебания будут продолжаться как собственные, пока не затухнут.

Условие (22.39) можно записать в более наглядном виде, если перейти от частоты ω_p к длине волны $\lambda_p = 2\pi c_0 / \omega_p$:

$$l = p \frac{\lambda_p}{2}. \quad (22.40)$$

Это условие означает, что при нормальных колебаниях на длине шнура должно укладываться целое число полуволен. Теперь легко заметить, что каждая из мод может быть возбуждена, если прикладывать силу нужной частоты к любому участку шнура, за исключением тех, которые совпадают с узлами данной моды.

Изменим граничные условия и сделаем оба конца шнура свободными (привяжем их к натянутым легким нитям). Подсчитаем частоты вынуждающей силы, на которых возбуждаются стоячие волны (моды). Учтем, что после двух отражений импульс не меняет свою полярность, поэтому условие (22.40) останется прежним. На рис. 22.15 показаны конфигурации мод для шнура со свободными концами. Видно, что при нормальных колебаниях на длине шнура

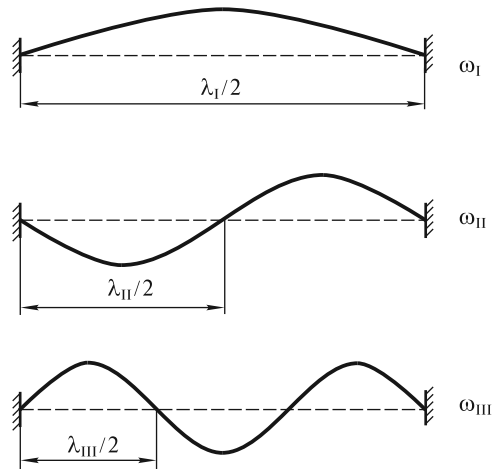


Рис. 22.14

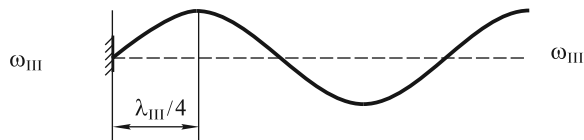
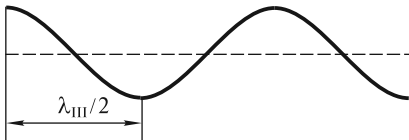
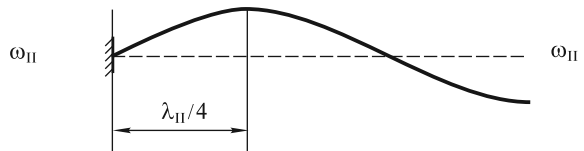
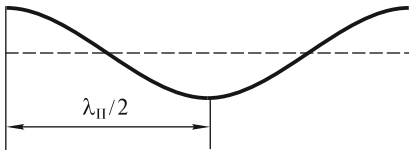
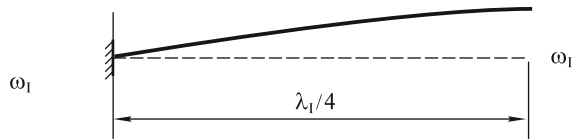
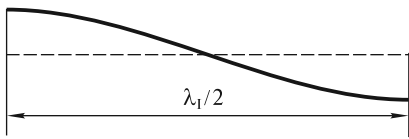


Рис. 22.15

Рис. 22.16

также должно укладываться целое число полуволн, но при условии, чтобы на концах шнура были пучности.

Закрепим теперь только левый конец шнура и будем двигать кронштейн с малой амплитудой ξ_0 . Условие оптимального возбуждения стоячих волн (мод) получается из тех соображений, что импульс изменяет полярность только при отражении от левого конца шнура. Для усиления импульса необходимо, чтобы левый конец в момент времени $t = \Delta t$ двигался вниз, проходя положение равновесия:

$$\begin{aligned} s(\Delta t) &= \xi_0 \sin(\omega \Delta t) = 0; \\ \dot{s}(\Delta t) &= \xi_0 \omega \cos(\omega \Delta t) = -\xi_0 \omega. \end{aligned} \quad (22.41)$$

Поэтому частота ω должна удовлетворять условию:

$$\omega_p \Delta t = (2p - 1)\pi, \quad (22.42)$$

где $p = I, II, III, \dots$

Откуда

$$\omega_p = \frac{\pi c_0}{2l} (2p - 1). \quad (22.43)$$

Последнее условие становится более наглядным, если перейти к длине волны λ_p :

$$l = (2p - 1)\lambda_p/4, \quad (22.44)$$

где $p = I, II, III, \dots$

Соответствующие три первые моды изображены на рис. 22.16. Очевидно, что это будут стоячие волны, отвечающие разным граничным условиям: на левом конце должен быть узел, а на правом — пучность. На длине шнура при этом укладывается нечетное число четвертей длины волны.

З а м е ч а н и е. При возбуждении моды мы задавали закон движения закрепленного конца шнура в виде $s(t) = \xi_0 \sin \omega t$, что может вызвать некоторое недоумение — как может двигаться закрепленный конец? Однако амплитуда колебаний ξ_0 обычно значительно меньше амплитуды колебаний в пучностях, поэтому незначительно вибрирующий конец шнура может рассматриваться как неподвижный.

Волны в упругих телах. Как мы видели, силы взаимодействия между соседними колеблющимися элементами шнура обеспечивают распространение в нем волн. В упругих телах такие силы сводятся к касательным и нормальным напряжениям, возникающим при деформациях сдвига и растяжения (сжатия). Этим деформациям соответствуют два типа волн: *поперечные* и *продольные*.

Поперечные волны. Если по стержню, изготовленному из упругого материала, ударить молотком в его средней части (рис. 22.17), то в обе стороны от места удара побегут импульсы, как это имело место в шнуре с грузами (рис. 22.1). Однако поперечные смещения частиц стержня будут незаметны для глаза, поэтому для регистрации бегущих по стержню возмущений требуются специальные методы.

Поскольку дисперсия волн механической природы в сплошной среде отсутствует, то скорость их распространения можно рассчитать с помощью волнового уравнения. На рис. 22.18 показан фрагмент колеблющегося стержня. На средний элемент длиной Δx действуют касательные напряжения [слева $\sigma_\tau(x)$ и справа $\sigma_\tau(x + \Delta x)$], значения которых пропорциональны деформациям сдвига соседних элементов:

$$\sigma_\tau(x) = G \operatorname{tg} [\gamma(x)] = G \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_x ; \tag{22.45}$$

$$\sigma_\tau(x + \Delta x) = G \operatorname{tg} [\gamma(x + \Delta x)] = G \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} ,$$

где G — модуль сдвига; γ — угол сдвига.

Если площадь поперечного сечения стержня равна S , то масса элемента $\Delta m = S\rho\Delta x$ (ρ — плотность материала). Следовательно, уравнение движения этого элемента может быть записано в виде:

$$S\rho\Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = G \left(\left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_x \right) S. \tag{22.46}$$

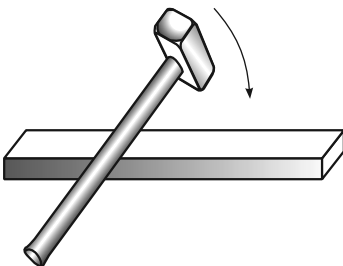


Рис. 22.17

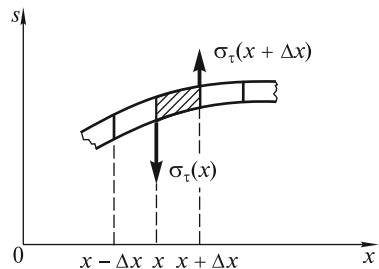


Рис. 22.18

Поделив обе части (22.46) на S и Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (22.47)$$

Его решением, как мы уже отмечали выше, является любая функция аргумента $\theta = t \mp x/c$:

$$s(x, t) = s(\theta) = s(t \mp x/c), \quad (22.48)$$

а скорость распространения волны

$$c = \sqrt{G/\rho}. \quad (22.49)$$

Процессы распространения и отражения поперечных волн в стержне полностью аналогичны таковым в однородном натянутом шнуре, поэтому мы их рассматривать не будем. Сконцентрируем внимание на закономерностях переноса механической энергии бегущей волной.

Энергия, переносимая волной. Вектор Умова. В лекции 15 мы отмечали, что при деформации сдвига в единице объема тела запасается потенциальная энергия

$$w_\gamma = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} G \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2, \quad (22.50)$$

называемая объемной плотностью энергии при деформации сдвига. В (22.50) полагаем $\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial s}{\partial x}$. Помимо этого, единица объема с массой, равной ρ и скоростью колебаний $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ имеет кинетическую энергию

$$w_v = \frac{1}{2} \rho v^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2. \quad (22.51)$$

Полная энергия единицы объема равна

$$w = w_\gamma + w_v = \frac{1}{2} \left[G \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (22.52)$$

Покажем, что в бегущей волне (22.48) $w_\gamma = w_v$. Для этого вычислим производные:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{ds}{d\theta} \left(\mp \frac{1}{c} \right); \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{ds}{d\theta}. \quad (22.53)$$

Из (22.53) получаем

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \mp \frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (22.54)$$

или

$$\gamma = \mp v/c.$$

Обратим внимание, что в бегущей волне деформации γ какого-либо элемента пропорциональны скорости его колебаний v . Возводя (22.54) в квадрат и учитывая, что $c^2 = G/\rho$, получаем

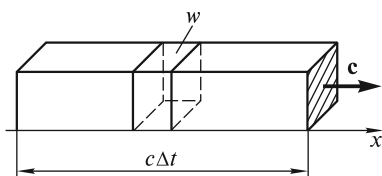


Рис. 22.19

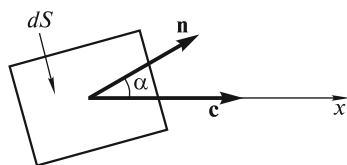


Рис. 22.20

$$\frac{1}{2} G \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2, \quad (22.55)$$

или $w_\gamma = w_v$. Последнее равенство позволяет записать полную плотность энергии w в виде:

$$w = 2w_\gamma = 2w_v. \quad (22.56)$$

Поскольку волна распространяется, то она переносит механическую энергию. Так, за время Δt через площадку единичной площади, заштрихованную на рис. 22.19, будет перенесена энергия, равная

$$\Delta W = wc\Delta t. \quad (22.57)$$

В физике используют понятие плотности потока энергии, определяемой количеством энергии, переносимой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны. Согласно (22.57), эта плотность равна

$$J = \frac{\Delta W}{\Delta t} = wc. \quad (22.58)$$

Если площадка имеет площадь dS , а ее нормаль \mathbf{n} составляет с направлением распространения волны (осью Ox) угол α (рис. 22.20), то количество энергии, переносимое волной через эту площадку за единицу времени (поток энергии), равно

$$d\Phi = wc \cdot dS \cos \alpha. \quad (22.59)$$

Профессором Московского университета Н. А. Умовым в 1874 г. был введен вектор плотности потока энергии

$$\mathbf{J} = w\mathbf{c}, \quad (22.60)$$

получивший название *вектор Умова*. С его использованием поток $d\Phi$ может быть записан в виде

$$d\Phi = \mathbf{J}d\mathbf{S} = JdS \cos \alpha, \quad (22.61)$$

где $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$. С подобным представлением потока вектора скорости мы встречались при изучении движения жидкостей.

Удобство вектора Умова становится особенно ощутимым, когда волна распространяется в трехмерном пространстве. Тогда поток энергии через произвольную поверхность S выражается в виде интеграла по этой поверхности:

$$\Phi = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{S}. \quad (22.62)$$

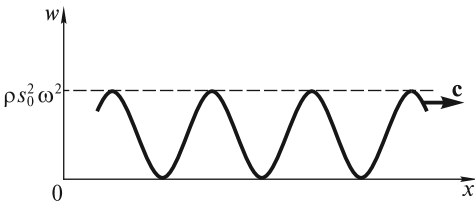


Рис. 22.21

Подсчитаем среднее за период значение вектора Умова для бегущей вдоль стержня поперечной гармонической волны

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx). \quad (22.63)$$

Объемная плотность энергии (сумма потенциальной и кинетической энергий) равна

$$w = \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = \rho s_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (22.64)$$

В некоторый момент времени она распределена вдоль стержня так, как показано на рис. 22.21. С течением времени это распределение смещается вдоль оси Ox со скоростью c . Плотность потока энергии через любое сечение $x = \text{const}$ будет периодически возрастать от нуля до максимальной величины $\rho s_0^2 \omega^2$. Поэтому удобно пользоваться средним значением J за период $T = 2\pi/\omega$:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T J dt = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 s_0^2. \quad (22.65)$$

Эта величина называется *интенсивностью* бегущей волны. Важно отметить, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды.

В стоячей волне нет переноса энергии, так как она является суперпозицией двух бегущих волн, переносящих одинаковое количество энергии в противоположных направлениях. Однако локальное движение энергии в ограниченном пространстве между соседними узлами все же происходит. Запишем уравнение стоячей волны (22.34), опустив в нем постоянные фазовые добавки $\varphi_{\text{отр}}/2$ и kl :

$$s(x, t) = 2s_0 \cos(kx) \sin(\omega t). \quad (22.66)$$

Объемная плотность энергии при деформации сдвига равна

$$w_\gamma = \frac{1}{2} G \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = 2s_0^2 k^2 G \sin^2(kx) \sin^2(\omega t), \quad (22.67)$$

а объемная плотность кинетической энергии выражается в виде:

$$\begin{aligned} w_v &= \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = 2s_0^2 \omega^2 \rho \cos^2(kx) \cos^2(\omega t) = \\ &= 2s_0^2 k^2 G \cos^2(kx) \cos^2(\omega t), \end{aligned} \quad (22.68)$$

поскольку $c^2 = \omega^2/k^2 = G/\rho$.

Локальное движение энергии наглядно демонстрирует рис. 22.22, на котором показан фрагмент стоячей волны в моменты времени $t_1 = 0$ и $t_2 = t_1 + T/4$ (а) и соответствующие распределения w_γ (б) и w_v (в). Видно, что при $t = t_1$, когда элементы стержня проходят положение равновесия и имеют максимальные скорости, деформация отсутствует ($w_\gamma = 0$), а вся энергия запасена в виде кинетической энергии w_v и локализована вблизи пучности. Однако через четверть

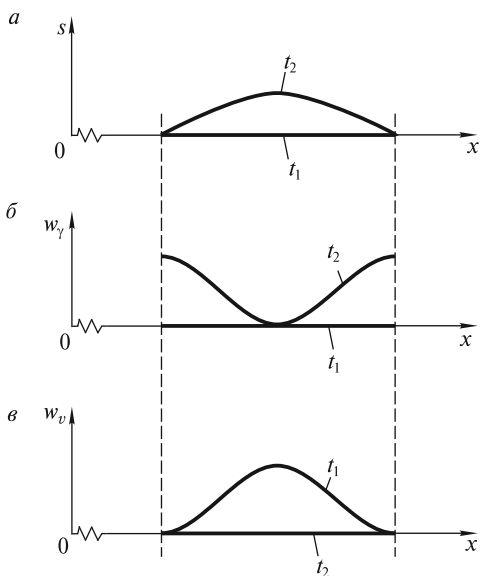


Рис. 22.22

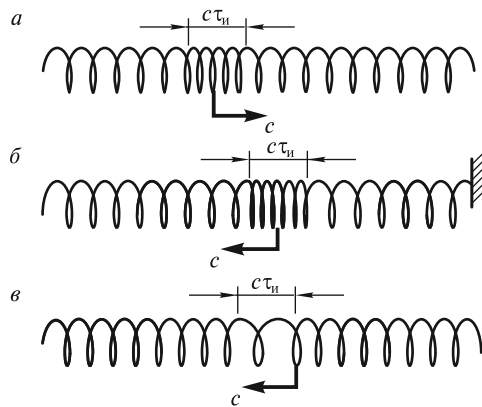


Рис. 22.23

периода колебаний частицы стержня сместятся на максимальные расстояния и остановятся ($w_v = 0$). Энергия будет запасена в виде потенциальной энергии w_p и локализована вблизи узлов. Это означает, что энергия из области вблизи пучности за четверть периода колебаний перетекает в обе стороны по направлению к узлам. Затем она движется в обратном направлении, и этот процесс повторяется многократно. Поток энергии через узлы отсутствует. Среднее за период значение потока энергии через любое сечение $x = \text{const}$ будет равно нулю ($I = 0$).

Продольные волны. Такие волны могут быть возбуждены ударом молотка по одному из торцов упругого стержня. Возмущение, распространяющееся вдоль стержня, визуально незаметно, однако основные закономерности такого волнового процесса можно установить, если вместо стержня использовать длинную пружину с витками большого диаметра (рис. 22.23). Если эту пружину подвесить горизонтально на нескольких нитях (не показанных на рисунке) и резко ударить ладонью по ее левому торцу, то по пружине побежит импульс сжатия с некоторой скоростью c . На рис. 22.23, а этот импульс имеет длину $c\tau_n$ (τ_n — длительность импульса, равная длительности удара). Добежав до правого конца пружины, он отразится. При этом, если конец закреплен (рис. 22.23, б), то отраженный импульс также будет импульсом сжатия. Если правый конец свободен, то отраженный импульс будет импульсом растяжения (рис. 22.23, в). Он возникает в момент смещения вправо свободного конца пружины, когда до него добежит импульс сжатия. Эта ситуация напоминает смещение свободного конца шнура. Отметим, что в рассмотренном случае смещения витков пружины происходят вдоль направления распространения волны, поэтому волна называется продольной.

Рассмотрим теперь распространение импульсов сжатия и растяжения в стержне.

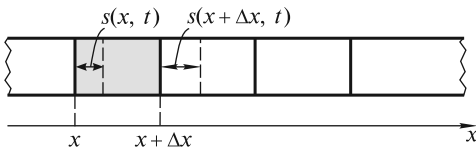


Рис. 22.24

Разделим стержень на ряд элементов длиной Δx каждый. При распространении продольной волны концы каждого элемента, отмеченные на рис. 22.24 сплошными линиями, будут смещены в новые положения, отмеченные штриховыми линиями. Эти смещения s будем считать положительными, если они происходят в положительном направлении оси Ox , и отрицательными — в противоположном случае.

Пусть левый конец некоторого элемента, имеющий координату x , сместился в данный момент времени t на расстояние $s(x, t)$, а правый конец — на $s(x + \Delta x, t)$. Деформация растяжения (сжатия) определяется относительным удлинением элемента Δx :

$$\epsilon(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s(x + \Delta x, t) - s(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (22.69)$$

Отметим, что деформации растяжения соответствует $\epsilon > 0$, а деформации сжатия — $\epsilon < 0$.

В отличие от поперечной волны, плотность среды ρ при растяжении (сжатии) уменьшается (увеличивается). Ее можно представить в виде

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho; \quad |\delta\rho| \ll \rho_0. \quad (22.70)$$

Здесь $\delta\rho$ — малая добавка к равновесной плотности ρ_0 , причем $\delta\rho$ может быть как положительной, так и отрицательной. С учетом постоянства массы деформируемого элемента Δx можно записать:

$$\rho_0 \Delta x = (\rho_0 + \delta\rho)[\Delta x + s(x + \Delta x, t) - s(x, t)] = (\rho_0 + \delta\rho)\Delta x(1 + \epsilon). \quad (22.71)$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малой величиной $\epsilon\delta\rho$, получим

$$\delta\rho/\rho_0 = -\epsilon. \quad (22.72)$$

Спустя некоторое время t после удара по торцу стержня или после резкого оттягивания этого торца распределения смещений s , деформаций ϵ и возмущений плотности $\delta\rho$ в бегущих вдоль стержня импульсах сжатия и растяжения будут иметь вид, показанный на рис. 22.25. Штриховыми линиями показаны распределения всех величин в один из последующих моментов времени.

Уравнение волны, бегущей вдоль оси Ox , в обоих случаях имеет вид $s(x, t) = s(t - x/c)$. По аналогии с (22.54) деформация $\epsilon = \frac{\partial s}{\partial x}$ и скорость колебаний $v = \partial s / \partial t$ элемента связаны соотношением:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (22.73)$$

или

$$\epsilon = -\frac{v}{c}.$$

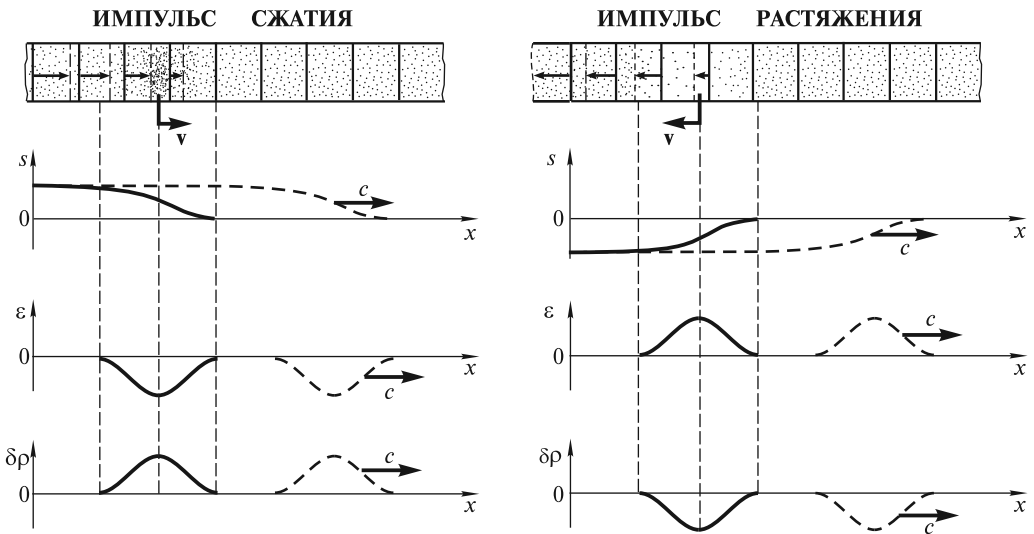


Рис. 22.25

Подчеркнем, что в импульсе сжатия ($\epsilon < 0$) скорость v совпадает по направлению со скоростью c , а в импульсе растяжения они имеют противоположные направления.

Рассчитаем скорость распространения продольных волн. На рис. 22.26 изображен фрагмент стержня и показан его элемент Δx , к концам которого приложены нормальные напряжения σ_n . Уравнение движения элемента с поперечным сечением S имеет вид:

$$\Delta m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = S [\sigma_n(x + \Delta x, t) - \sigma_n(x, t)], \quad (22.74)$$

где $\Delta m = \rho_0 S \Delta x$.

Чтобы (22.74) преобразовать к волновому уравнению, необходимо связать напряжения σ_n с деформациями элементов стержня. Наиболее просто это можно сделать для тонкого стержня.

Скорость волн в тонком стержне. Если стержень тонкий, то деформации и напряжения вдоль координаты x связаны известным законом Гука:

$$\sigma_n(x, t) = E \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_x; \quad \sigma_n(x + \Delta x, t) = E \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}, \quad (22.75)$$

где E — модуль Юнга.

Подставляя (22.75) в (22.74), производя деление на $\rho_0 S \Delta x$ и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho_0} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}. \quad (22.76)$$

Скорость продольных волн

$$c = \sqrt{E/\rho_0}. \quad (22.77)$$

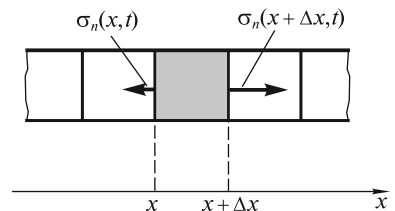


Рис. 22.26

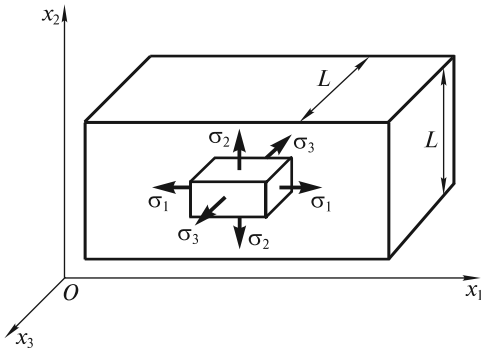


Рис. 22.27

Эта скорость превышает скорость поперечных волн [см. формулу (22.49)], поскольку $E > G$. По порядку величины обе скорости совпадают и для различных материалов преимущественно заключены в диапазоне $c \sim (10^3 \div 10^4)$ м/с.

Скорость волн в толстом стержне.

Пусть вдоль оси толстого стержня (оси Ox_1) распространяется продольная волна, при этом колеблются элементы стержня, находящиеся вблизи его оси. Один из таких элементов показан на рис. 22.27. Под действием нормального на-

пряжения σ_1 появляется относительное удлинение ε_1 , которое определяется первым уравнением (15.27), приведенным в лекции 15:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3)\mu}{E}. \quad (22.78)$$

Уравнение (22.78) отражает тот факт, что при растяжении элемента стержня вдоль оси Ox_1 площадь его поперечного сечения уменьшается. Он потянет к оси стержня окружающие его элементы, возникнут напряжения σ_2 и σ_3 . За счет этих напряжений придут в движение элементы, находящиеся вблизи оси стержня, а затем и близкие к поверхности. Через время $\Delta t = L/2c$ (L — поперечный размер стержня, c — скорость распространения возмущения) все элементы сместятся, и напряжения σ_2 и σ_3 исчезнут.

Если длительность $\tau_{\text{и}}$ импульса, распространяющегося вдоль оси стержня, велика, т.е. $\tau_{\text{и}} \gg \Delta t = L/2c$, то в (22.78) можно не учитывать σ_2 и σ_3 . Скорость такого длинного импульса будет определяться формулой (22.77). Такой режим можно реализовать, если

$$L \ll c\tau_{\text{и}}. \quad (22.79)$$

Условие (22.79) означает, что поперечный размер стержня L значительно меньше длины импульса. Такой стержень можно считать тонким. Если речь идет о гармонической волне, распространяющейся вдоль стержня, то условие (22.79) имеет вид:

$$L \ll \lambda, \quad (22.80)$$

где $\lambda = cT$ — длина волны; T — период колебаний.

Так, для стального стержня $c = \sqrt{E/\rho} \approx 5000$ м/с. При частоте $\nu = 5000$ Гц, $\lambda = c/\nu \approx 1$ м, поэтому стержни с поперечным размером $L \approx 1$ см могут считаться тонкими.

Если длительность импульса $\tau_{\text{и}} \ll \Delta t = L/2c$ (стержень толстый), то в (22.78) следует учесть σ_2 и σ_3 . Чтобы найти связь между ε_1 и σ_1 , вместе с (22.78) запишем аналогичные уравнения для ε_2 и ε_3 и сложим:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(1 - 2\mu)}{E}. \quad (22.81)$$

Для краткости выкладок введем средние значения:

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3); \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Тогда (22.81) можно записать в виде

$$\varepsilon = \frac{\sigma(1 - 2\mu)}{E}. \quad (22.82)$$

С учетом (22.82) уравнение (22.78) изменяется:

$$\varepsilon_1 + \frac{3\mu\varepsilon}{1 - 2\mu} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma_1. \quad (22.83)$$

Поскольку в толстом стержне $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, то $\varepsilon = \varepsilon_1/3$, и искомая связь будет иметь вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{Ef(\mu)} = \frac{\sigma_1(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(1 - \mu)}. \quad (22.84)$$

В этом случае связь деформации и напряжения определяется как модулем Юнга E , так и функцией коэффициента Пуассона

$$f(\mu) = \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \quad (22.85)$$

Легко убедиться, что при любых возможных значениях коэффициента Пуассона $f(\mu) > 1$. Поэтому скорость продольной волны в этом случае

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0} f(\mu)} \quad (22.86)$$

превышает скорость волны в тонком стержне. Величину $Ef(\mu)$ обычно называют модулем одностороннего растяжения.

Отметим, что наиболее сложен анализ для промежуточного случая, когда $L \sim \lambda$. Для таких волн имеет место дисперсия (фазовая скорость гармонической волны зависит от ее частоты). Распределение амплитуды волны в поперечном сечении стержня вдоль осей x_2 и x_3 аналогично распределению амплитуды для шнура длиной L со свободными концами при нормальном колебании. Стержень в этом случае выполняет роль волновода. При плавном изгибании стержня волна распространяется вдоль его оси.

Продольные волны переносят энергию, и для них справедливы все рассуждения и выводы, полученные для поперечных волн. Формально во всех выражениях для плотности энергии w , вектора Умова \mathbf{J} и других величин следует заменить модуль сдвига G на модуль Юнга E или $Ef(\mu)$.

Явления на границе двух сред. Волновое сопротивление. Рассмотрим подробнее прохождение продольной волны через границу раздела двух упругих сред при нормальном ее падении на эту границу.

Пусть продольная волна распространяется со скоростью $c_1 = \sqrt{E_1/\rho_1}$ в среде с модулем Юнга E_1 и равновесной плотностью ρ_1 (рис. 22.28). Опыт показывает,

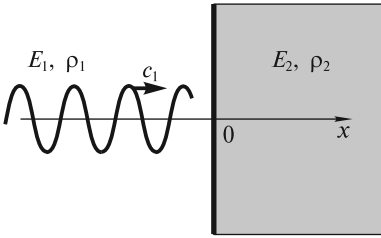


Рис. 22.28

что эта волна на границе раздела двух сред ($x = 0$) частично отражается и частично проходит во вторую среду, которая характеризуется параметрами E_2 и ρ_2 . Следовательно, для первой среды можно записать:

$$s_1(x, t) = s_{01} \sin(\omega t - k_1 x) + s'_{01} \sin(\omega t + k_1 x) \quad (22.87a)$$

(падающая + отраженная волна).

Для второй среды (прошедшая волна):

$$s_2(x, t) = s_{02} \sin(\omega t - k_2 x), \quad (22.87b)$$

где ω — частота; s_{01} , s'_{01} и s_{02} — амплитуды соответственно падающей, отраженной и прошедшей волн; $k_1 = \omega/c_1$ и $k_2 = \omega/c_2$ — соответствующие волновые числа.

Чтобы найти соотношения между амплитудами трех волн, характеризующие отражательную и пропускательную способность («прозрачность») границы раздела, запишем два условия, которые должны выполняться на границе раздела при $x = 0$. Первое — это условие неразрывности вещества:

$$s_1(0, t) = s_2(0, t). \quad (22.88)$$

Второе — равенство напряжений:

$$\sigma_1(0, t) = \sigma_2(0, t), \text{ или } E_1 \varepsilon_1(0, t) = E_2 \varepsilon_2(0, t). \quad (22.89)$$

С учетом (22.87) из этих условий получаем:

$$s_{01} + s'_{01} = s_{02}; \quad (22.90)$$

$$-s_{01} E_1 k_1 + s'_{01} E_1 k_1 = -s_{02} E_2 k_2.$$

В акустике фундаментальным является понятие *импеданса* z , или *удельного волнового (акустического) сопротивления* материала. По определению,

$$z = \frac{\text{сжимающее напряжение}}{\text{скорость колебаний}} = \frac{-\sigma}{v}. \quad (22.91)$$

Импеданс можно выразить через характеристики материала, воспользовавшись формулой (22.73):

$$\varepsilon = \sigma/E = -v/c. \quad (22.92)$$

Отсюда

$$z = -\sigma/v = E/c = \rho c. \quad (22.93)$$

С использованием этой величины и выражений для k_1 и k_2 условия (22.90) примут вид:

$$s_{01} + s'_{01} = s_{02}; \quad (22.94)$$

$$-s_{01} z_1 + s'_{01} z_1 = -s_{02} z_2.$$

Отсюда получаем искомую связь между амплитудами волн:

$$s'_{01} = \frac{1 - z_2/z_1}{1 + z_2/z_1} s_{01}, \quad s_{02} = \frac{2}{1 + z_2/z_1} s_{01}. \quad (22.95)$$

Для практических целей пользуются коэффициентами отражения (R) и пропускания (T), характеризующими отношение интенсивностей отраженной и прошедшей волн к интенсивности падающей волны. Эти коэффициенты получаются из (22.95) с учетом (22.65):

$$R = \frac{I'}{I_1} = \left(\frac{s'_{01}}{s_{01}} \right)^2 = \left(\frac{1 - z_2/z_1}{1 + z_2/z_1} \right)^2; \quad (22.96)$$

$$T = \frac{I_2}{I_1} = \frac{z_2}{z_1} \left(\frac{s_{02}}{s_{01}} \right)^2 = \frac{4(z_2/z_1)}{(1 + z_2/z_1)^2},$$

где использовано то обстоятельство, что интенсивность бегущей волны [см. формулу (22.65)]

$$I = \frac{1}{2} c \rho \omega^2 s_0^2 = \frac{1}{2} z \omega^2 s_0^2 \quad (22.97)$$

зависит не только от амплитуды s_0 и частоты ω , но и пропорциональна акустическому сопротивлению z . Следует отметить, что формулы (22.96) справедливы и для поперечных колебаний.

Из рис. 22.29, на котором изображены зависимости (22.96), видно, что если $z_1 = z_2$, отражение не происходит. Поэтому на практике, когда надо уменьшить отражение, стараются согласовать (сделать практически одинаковыми) волновые сопротивления двух сред.

Заметим также, что при $z_2 \ll z_1$, как в случае свободного конца стержня (z_2 — сопротивление воздуха), или $z_2 \gg z_1$ (закрепленный конец), $R \approx 1$, т.е. происходит практически полное отражение волны. Этот факт использовался выше при рассмотрении отражения в этих предельных случаях.

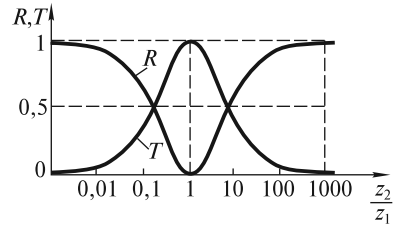


Рис. 22.29

ЛЕКЦИЯ 23

Тепловые колебания кристаллической решетки твердых тел. Акустические фононы. В твердом теле ионы совершают тепловые колебания около положений равновесия в узлах кристаллической решетки. Поскольку они взаимодействуют друг с другом, то система ионов должна рассматриваться как совокупность связанных осцилляторов. Такие тепловые колебания ионов можно представить в виде суперпозиции стоячих звуковых волн, частоты ω которых заключены в диапазоне $0 < \omega \leq \omega_N$, где ω_N — максимальная частота колебаний, обусловленная дискретностью среды (см. лекцию 22).

При нагревании кристалла энергия тепловых колебаний увеличивается. Естественно, что информацию об этих колебаниях можно получить, измеряя теплоемкость кристаллов. Если бы каждый ион представлял собой классический осциллятор, колеблющийся в трех взаимно перпендикулярных направлениях, то, в соответствии с теоремой о равномерном распределении энергии по степеням свободы, он обладал бы энергией $\epsilon_1 = 6kT/2$, где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура. Здесь учтено, что колеблющийся ион обладает средней кинетической и равной ей средней потенциальной энергией $kT/2$ по каждой из трех степеней свободы. Поскольку энергия кристалла, состоящего из N атомов, $U = N\epsilon_1 = 3NkT$, то его теплоемкость при постоянном объеме равна

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3Nk \quad (23.1)$$

($3R$ для одного моля, закон Дюлонга и Пти).

Между тем формула (23.1) согласуется с экспериментом лишь при высоких температурах, а при приближении температуры к абсолютному нулю, как показывает опыт, $c_V \sim T^3$. Чтобы объяснить такое поведение теплоемкости, А. Эйнштейн предложил рассматривать ионы как независимые осцилляторы, обладающие дискретным набором значений энергии, однако ему не удалось получить для теплоемкости зависимость T^3 .

На самом деле тепловые колебания ионов могут быть представлены как суперпозиция нормальных колебаний, или мод системы связанных осцилляторов. Каждая мода с частотой ω обладает энергией, кратной $\hbar\omega$, где $\hbar = h/2\pi$ ($h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка). Если принять во внимание, что в твердом теле возможно распространение продольной волны с частотой ω и двух поперечных волн с той же частотой, имеющих два различных взаимно перпендикулярных направления смещения атомов (две различные поляризации), то с учетом размеров кристалла и его дискретной структуры можно подсчитать число мод в кристалле. Такой подсчет был впервые выполнен П. Дебаем, и поэтому эти волны получили название дебаевских.

Следует подчеркнуть, что, в отличие от классического представления, при вычислении энергии кристалла мода представляется как квантовый объект, обладающий дискретным набором значений энергии (набором энергетических уровней)

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega, \quad (23.2)$$

где n — целое число.

При термодинамическом равновесии вероятность P_n возбуждения моды убывает по мере увеличения ее энергии ε_n (или числа n) в соответствии с распределением Больцмана: $P_n \sim e^{-n\hbar\omega/kT}$. При нагревании кристалла вероятность P_n растёт, а значит увеличивается и запасенная кристаллом энергия. При подсчете последней Дебаем была введена характерная температура (*температура Дебая*) θ_D с помощью равенства

$$k\theta_D = \hbar\omega_N. \quad (23.3)$$

Обычно θ_D лежит в интервале ($10^2 \div 10^3$) К. При $T \gg \theta_D$ справедлив закон Дюлонга и Пти, а при $T \ll \theta_D$ теплоемкость $c_V \sim T^3$.

Соотношение (23.2) аналогично выражению для энергии фотонов (квантов света). Это позволяет рассматривать моду как квазичастицу, называемую *тепловым фононом*. Введение этого нового понятия является весьма плодотворным и с математической точки зрения значительно облегчает анализ тепловых колебаний кристаллической решетки. Представление о фононном газе в твердом теле широко используется при описании таких свойств, как теплоемкость, теплопроводность, тепловое расширение, электрическое сопротивление и др. В физике используются и другие квазичастицы: плазмон (волна электронной плотности), магنون (волна перемагничивания), полярон (электрон + упругая деформация), экситон (волна электронного возбуждения). Эти квазичастицы являются модами соответствующих колебаний.

Объемные сейсмические волны. Современная модель Земли. Важным примером волн в упругом твердом теле являются *сейсмические волны*, возникающие в ограниченной области пространства (очаге) размером в несколько километров и распространяющиеся на огромные расстояния под поверхностью Земли. Такие волны бывают поперечными (волны сдвига) и продольными (сжатия и разрежения) и могут пронизывать всю нашу планету. Это позволяет (подобно рентгеновскому анализу) исследовать внутреннее строение Земли. Занимается этим специальная наука — сейсмология, одним из основателей которой является русский физик Б. Б. Голицын.

Скорость продольных волн приблизительно в 1,7 раза больше скорости поперечных, поэтому эти волны регистрируются на сейсмограммах последовательно: вначале приходят более быстрые продольные (первичные), которые называются *p-волнами*, а потом поперечные (вторичные), называемые *s-волнами*. Кроме того, сейсмографы регистрируют и заметный фон, или шумы, связанные как с работой промышленных установок и транспорта, так и с сейсмическими волнами (микросейсмами), генерируемыми штормами и волнением в океанах.

Если бы скорости *p*- и *s*-волн в Земле не изменялись с глубиной, то волны распространялись бы по прямым линиям (прямым сейсмическим лучам). В действительности скорости продольной c_p и поперечной c_s волн возрастают с глубиной. Исследование зависимости скоростей c_p и c_s от глубины позволило сделать вывод, что Земля разделяется на три основные части: кору, мантию и ядро (рис. 23.1). Кора отделена от мантии резкой сейсмической границей, на которой скачкообразно возрастают плотность ρ и скорости c_p и c_s . Эта граница

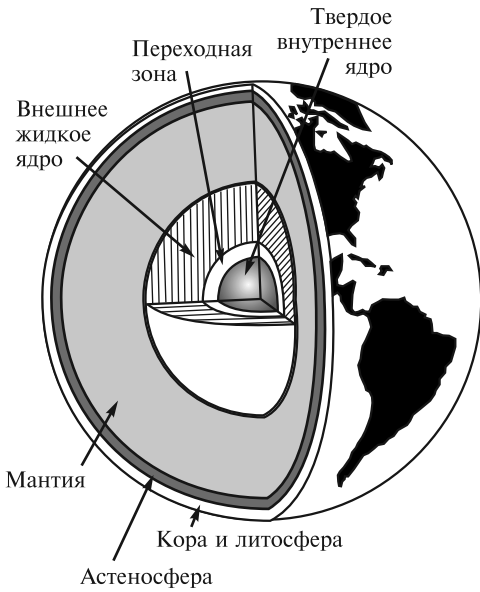


Рис. 23.1

была открыта в 1909 г. югославским сейсмологом А. Мохоровичичем и носит название границы М. Толщина лежащей выше границы М земной коры меняется от ~10 км (под слоем воды в океанических областях) до нескольких десятков километров в горных районах континентальных областей. Ниже коры до глубин около 2900 км расположена силикатная оболочка, или мантия Земли. Существование ядра с плотностью, превышающей среднюю плотность Земли, равную примерно $5,5 \text{ г/см}^3$, следует из того факта, что плотность земной коры (от $\sim 2,8 \text{ г/см}^3$ у гранитов до $\sim 3,0 \text{ г/см}^3$ у базальтов) существенно меньше этой средней плотности.

Ядро состоит в основном из железа и небольшой примеси других элементов. Оно подразделяется на внешнюю (жидкую) и внутреннюю (твердую) части,

разделенные переходной зоной. Естественно, что поперечные s -волны во внешней (жидкой) части ядра распространяться не могут.

В последние годы была выявлена детальная структура мантии Земли. Земная кора и верхний слой мантии до глубины $l \approx 70 \text{ км}$ образуют наружную зону — литосферу, или литосферную плиту. Эта жесткая плита расколота примерно на 10 больших плит, по границам которых расположено подавляющее число очагов землетрясений. Под жесткой литосферной плитой на глубинах $70 < l < 250 \text{ км}$ расположен слой повышенной текучести, называемый астеносферой. Литосферные плиты как бы плавают в «астеносферном океане» Земли.

При распространении объемной сейсмической волны амплитуда уменьшается с расстоянием r , пройденным волной от точечного источника. Уравнение такой волны, называемой *сферической*, имеет вид

$$s(r, t) = \frac{s_0}{r} e^{-\alpha r} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]. \quad (23.4)$$

Из этого уравнения видно, что амплитуда волны убывает, во-первых, из-за ее геометрического расхождения во все стороны от эпицентра; это убывание происходит обратно пропорционально пройденному волной расстоянию r . Во-вторых, амплитуда волны убывает из-за перехода части энергии волны в теплоту вследствие неидеальной упругости земных недр. Это ослабление характеризуется коэффициентом затухания α . Коэффициент α пропорционален частоте сейсмической волны, поэтому короткие волны затухают быстрее длинных. Расчет показывает, что для коэффициентов затухания s - и p -волн могут быть записаны соотношения:

$$\alpha_s \text{ (км}^{-1}\text{)} \approx 1 \cdot 10^{-3} \nu \text{ (Гц)}; \quad \alpha_p \text{ (км}^{-1}\text{)} \approx 0,25 \cdot 10^{-3} \nu \text{ (Гц)}.$$

Частоты объемных сейсмических волн лежат в инфразвуковом диапазоне $0,1 \text{ Гц} < \nu < 10 \text{ Гц}$. Следовательно, для волн с частотой $\nu \approx 1 \text{ Гц}$ уменьшение амплитуды в e раз у поперечной волны происходит на пути $\sim 1000 \text{ км}$, а у продольной волны — на пути $\sim 4000 \text{ км}$.

Помимо бегущих волн, в толще Земли могут наблюдаться и стоячие волны с различными частотами, соответствующими различным модам колебаний. Конфигурации этих мод относятся к двум основным типам колебаний: сфероидальным (наибольший период около 55 мин, частота $\sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$) и торсионным (крутильным) (наибольший период ~ 44 мин, частота около $3,8 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$). В настоящее время спектр этих колебаний насчитывает несколько тысяч экспериментально обнаруженных частот.

Поверхностные сейсмические волны. Наряду с объемными существуют и поверхностные сейсмические волны, которые подразделяют на волны *Рэлея* и *Лява*. Они были теоретически предсказаны Дж. Рэлеем в 1855 г. и Лявом в 1911 г. В волне Рэлея частицы грунта смещаются в вертикальной плоскости, ориентированной вдоль направления распространения волн, а траектории их движения представляют собой эллипсы (см. далее гравитационные волны на поверхности жидкости). В волне Лява частицы движутся в горизонтальной плоскости поперек направления распространения волны.

Длины поверхностных волн λ , возбуждаемых при землетрясении, лежат в интервале от десятков до многих сотен километров. В поверхностных волнах амплитуда убывает с глубиной, и на глубине $l > \lambda$ колебания мантии малы. Поэтому с помощью таких волн можно исследовать лишь наружные слои Земли.

Амплитуда поверхностных волн убывает медленнее (обратно пропорционально \sqrt{r}), чем у объемных волн. Поэтому такие волны могут несколько раз обогнуть земной шар. Скорость поверхностных волн зависит от частоты, т. е. они обладают дисперсией.

Сейсмические волны можно вызвать при помощи взрыва. Небольшие взрывы используют в инженерной сейсмологии для проведения разведки полезных ископаемых (нефти, руды, газа и т. д.). Подземные ядерные взрывы создают интенсивные волны, которые можно регистрировать на любых расстояниях. Это дает возможность надежно проводить контроль над подземными ядерными испытаниями.

Отметим, что в настоящее время изучается возможность исследования строения Земли с помощью потоков нейтрино. Поскольку поглощение нейтрино зависит от плотности вещества, через которое они проходят, то измерение ослабления потоков нейтрино позволит сделать заключение о распределении плотности земных пород.

Волны в жидкостях и газах. В жидкостях и газах возможны лишь сжатия и разрежения, поэтому в них могут распространяться только продольные волны. Рассчитаем скорость распространения продольных волн с использованием волнового уравнения. Последнее может быть получено из уравнения (22.74), в котором σ_n следует заменить величиной $-\delta p = p_0 - p$, где p — давление в волне, p_0 — равновесное давление в среде, δp — возмущение давления. Тогда можно записать

$$\Delta m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = [-\delta p(x + \Delta x, t) + \delta p(x, t)] S. \quad (23.5)$$

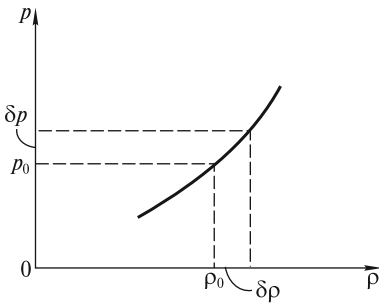


Рис. 23.2

Чтобы из (23.5) получить волновое уравнение, необходимо использовать материальное уравнение среды:

$$p = p(\rho). \quad (23.6)$$

Общий вид этой зависимости изображен на рис. 23.2. При очень малых возмущениях плотности $|\delta\rho| \ll \rho_0$ и давления $|\delta p| \ll p_0$ из (23.6) получаем

$$\delta p = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0} \delta\rho = c^2 \delta\rho, \quad (23.7)$$

где

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0}}. \quad (23.8)$$

С учетом (22.69) и (22.72) возмущения плотности $\delta\rho$ в (23.7) связаны со смещением s соотношением

$$\delta\rho = -\epsilon\rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (23.9)$$

Следовательно, (23.7) примет вид

$$\delta p = -\rho_0 c^2 \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (23.10)$$

Подставляя (23.10) в (23.5), записывая $\Delta t = \rho_0 S \Delta x$ и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \quad (23.11)$$

из которого видно, что скорость волны задается выражением (23.8) и не зависит от частоты (дисперсия отсутствует). Естественно, что с такой скоростью распространяются волны с длиной волны λ , превышающей длину свободного пробега молекул в газе или межатомное расстояние в жидкости l . В этом случае жидкость и газ могут рассматриваться как сплошные среды. Для волн высоких частот, когда $\lambda \approx l$, возникает дисперсия, а волны с длиной $\lambda < l$ распространяться вообще не могут.

Звук. Упругие волны в жидкостях и газах, как, впрочем, и в твердых телах, называют *акустическими*, а раздел физики, который их изучает — акустикой. Частоты этих волн лежат в диапазоне от долей герца (инфразвук) до 10^{13} Гц (гиперзвук). Этим частотам соответствуют длины волн λ от десятков километров до нескольких ангстрем. Значения скоростей (фазовых и групповых) для разных сред лежат в диапазоне от долей до десятков километров в секунду.

Для воздуха материальное уравнение (23.6) является уравнением адиабаты и в акустике обычно записывается в виде (см. также предыдущие лекции)

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad (23.12)$$

где $\gamma = c_p/c_V$ — показатель адиабаты.

Тогда из (23.8) скорость волны (в акустике употребляют термин «скорость звука») в газе будет равна

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (23.13)$$

где μ — молярная масса газа.

Таким образом, скорость звука зависит от рода газа и по порядку величины совпадает со средней скоростью теплового движения молекул.

Для жидкости материальным уравнением является полуэмпирическое уравнение Тета

$$p = p_{\text{вн}} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\Gamma - 1 \right], \quad (23.14)$$

где $p_{\text{вн}}$ — характерное внутреннее давление, обусловленное межмолекулярным взаимодействием (для большинства жидкостей без пузырьков и различных включений оно составляет несколько тысяч атмосфер). Параметр Γ по порядку величины равен нескольким единицам (например, для воды $\Gamma \approx 7$).

В табл. 23.1 приведены значения скорости звука в некоторых газах (при $t = 0^\circ\text{C}$) и жидкостях.

Интенсивность звука. Интенсивность звука определяется формулой (22.65):

$$I = \frac{1}{2} c \rho_0 \omega^2 s_0^2. \quad (23.15)$$

Так как она пропорциональна квадрату частоты, то при переходе в область высоких частот облегчается задача получения больших интенсивностей, необходимых, например, для наблюдения нелинейных эффектов (см. лекцию 24). В зависимости от решаемой задачи в акустике используются волны с интенсивностью от 10^{-8} до 10^6 Вт/см².

Таблица 23.1

Газ	Скорость звука, м/с	Жидкость	Температура жидкости, °C	Скорость звука, м/с
Водород	1265	Вода	20	1490
Гелий	965	Этиловый спирт	20	1180
Азот	334	Водород	-252	1127
Воздух	331	Кислород	-183	911
Кислород	316	Азот	-196	867
Углекислый газ	216	Гелий	-269	180

Для практических целей интенсивность I выражают через возмущение давления δp , которое называют также *звуковым давлением*. Наиболее просто такую зависимость можно получить из (23.15) с учетом того, что амплитуда колебаний скорости частиц $v_0 = \omega s_0$. С другой стороны, в соответствии с акустическим законом Ома [см. формулу (17.53)], эта скорость равна

$$v_0 = \frac{(\delta p)_0}{\rho_0 c}, \quad (23.16)$$

где $(\delta p)_0$ — амплитуда колебаний звукового давления δp . Поэтому

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)_0^2}{\rho_0 c}. \quad (23.17)$$

Выполним некоторые оценки.

1. Вблизи струи газа, вытекающей из сопла реактивного двигателя самолета, амплитуда колебаний звукового давления $(\delta p)_0 = 300$ Па. Поскольку $p_0 = 10^5$ Па, то $(\delta p)_0 \ll p_0$. Такое давление находится на пороге болевого ощущения. Поскольку акустическое волновое сопротивление воздуха $z = \rho_0 c = 41 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, то $v_0 = 73 \text{ см/с}$. Если принять, что частота звуковых колебаний $\nu = 10^3$ Гц (хотя из турбины исходит многочастотный шум), то амплитуда смещения $s_0 = v_0 / 2\pi\nu = 0,01$ см. Таким образом, смещение частиц воздуха даже при таком сильном звуке оказывается малым.

2. Звуки на пределе слышимости на частоте $\nu = 10^3$ Гц (ухо человека весьма чувствительно к этой частоте) имеют амплитуду колебаний звукового давления $(\delta p)_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па, а смещение частиц воздуха $s_0 = 0,8 \cdot 10^{-9}$ см. Уместно заметить, что современные методы измерения смещений в принципе дают возможность зарегистрировать колебания с амплитудой $s_0 \approx 10^{-16}$ см.

3. Интенсивность ультразвуковых волн с частотами порядка нескольких мегагерц может достигать нескольких сотен Вт/см^2 , а с использованием фокусирующих устройств — даже более десятка кВт/см^2 . Это приводит к появлению огромных ускорений частиц среды, в которой распространяется ультразвуковая волна. Например, при распространении в воде волны с частотой $\nu = 10^6$ Гц и интенсивностью $I = 100 \text{ Вт/см}^2$ амплитуда ускорения $a_0 = \omega^2 s_0$, согласно (23.15), составляет

$$a_0 = \omega \sqrt{\frac{2I}{c\rho_0}} = 6,3 \cdot 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \approx 10^5 g, \quad (23.18)$$

что на пять порядков превышает ускорение свободного падения g . Учет таких громадных ускорений особенно важен в биологических исследованиях с применением ультразвука.

Поглощение звука. Наличие вязкости и теплопроводности среды приводит к потере энергии звуковой волны, и эта энергия расходуется на нагревание среды. Волна давления $\delta p(\mathbf{r}, t)$, а также волны смещения $s(\mathbf{r}, t)$ и скорости $v(\mathbf{r}, t) = \partial s / \partial t$ по мере распространения затухают. Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор точки, в которой фиксируются возмущения давления, смещение частиц и их скорость. В случае гармонической волны, распространяющейся по одному направлению (вдоль оси Ox), возмущение давления записывается в виде

$$\delta p(x, t) = (\delta p)_0 e^{-\alpha x} \sin[\omega(t - x/c)], \quad (23.19)$$

где α — коэффициент затухания.

Это уравнение описывает плоскую волну (возмущение δp в плоскости $x = \text{const}$ одинаково). В этом случае отсутствует геометрическое расхождение волны. Амплитуда волны $(\delta p)_0 e^{-\alpha x}$ экспоненциально убывает с расстоянием. В соответствии с (23.17) интенсивность волны равна

$$I = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)_0^2}{\rho_0 c} e^{-2\alpha x} = I_0 e^{-2\alpha x}, \quad (23.20)$$

где $I_0 = \frac{1}{2} \frac{(\delta p)_0^2}{\rho_0 c}$ — начальная интенсивность волны.

Если пренебречь потерями, связанными с теплопроводностью, то коэффициент α , согласно гидродинамике, оказывается равным

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{\omega^2}{2\rho_0 c^3} \eta, \quad (23.21)$$

где η — вязкость жидкости или газа.

Важно отметить, что $\alpha \sim \omega^2$. Этим объясняется тот факт, что резкий звук выстрела или щелчка кнута, в спектре которого присутствует широкий набор частот, по мере распространения трансформируется в более мягкий, поскольку в спектре остаются преимущественно низкие частоты. Заметим, что поглощение звука в воде существенно меньше, чем в воздухе, а в твердых телах еще меньше, чем в воде. Очень низким поглощением звука отличаются такие кристаллы, как сапфир, топаз, берилл, ниобат лития и другие. Отметим, что поглощение звука ограничивает применение многих материалов на высоких частотах.

Излучатели звука. Применяемые в акустике излучатели упругих волн можно разделить на две большие группы.

К первой относят излучатели-генераторы; колебания в них возбуждаются из-за наличия препятствия на пути постоянного потока газа или жидкости (сирены, свистки, генераторы Гартмана). Такие генераторы отличаются высоким коэффициентом преобразования кинетической энергии струи в энергию акустических волн (до 50%), простотой конструкции и эксплуатации, дешевой. Интенсивность звука в непосредственной близости от излучателя может достигать 10 Вт/см². К недостаткам этих излучателей относятся широкий спектр излучаемых частот, нестабильность мощности излучения, невозможность получения звуковых колебаний заданной формы.

Вторую группу излучателей составляют электроакустические преобразователи. Свое название они получили потому, что преобразуют электрические колебания в механические колебания какого-либо тела, которое и возбуждает акустические волны. Наиболее распространенные электроакустические преобразователи, такие как электродинамические излучатели, магнитострикционные и пьезоэлектрические преобразователи, представляют собой линейные устройства, возбуждающие акустическую волну той же формы, что и

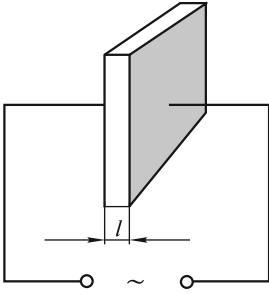


Рис. 23.3

электрический сигнал. Кроме того, эти устройства обратимы, т. е. могут работать и как излучатели, и как приемники звука.

Принцип действия электродинамических излучателей, используемых в диапазоне слышимых частот, основан на взаимодействии переменного электрического тока с магнитным полем (телефоны, громкоговорители). В магнитострикционных преобразователях используется эффект магнитострикции — деформации твердого тела в магнитном поле.

В ультразвуковом и гиперзвуковом диапазонах (до 10^{10} Гц) наиболее широко применяют пьезоэлектрические преобразователи, принцип действия которых основан на обратном пьезоэффекте — деформации тела под действием электрического поля. На рис. 23.3 схематично показан простейший преобразователь, основу которого составляет пьезопластинка, вырезанная специальным образом из монокрystalла кварца, ниобата лития (LiNbO_3) или другого пьезоматериала. К противоположным поверхностям пластинки (обычно металлизированным) прикладывается переменное напряжение U с частотой ν . Толщина пластинки l будет при этом периодически изменяться с той же частотой, причем это изменение не превышает нескольких микрометров. Вибрирующие поверхности пластинки приводят в движение соприкасающийся с ними воздух. Наибольшая амплитуда колебаний будет при резонансе, когда на толщине l укладывается нечетное число полуволн:

$$l = n \frac{\lambda_n}{2}; \quad n = 1, 3, 5 \dots \quad (23.22)$$

Отметим, что при четном n на электродах возникли бы электрические заряды одного знака, что невозможно. Резонансные частоты получаются равными

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2l}. \quad (23.23)$$

Например, для кварцевой пластинки при скорости продольных волн $c = 5700$ м/с и толщине $l = 1$ мм резонансные частоты равны

$$\nu_n = n \cdot 2850 \text{ кГц}. \quad (23.24)$$

Наибольшую амплитуду колебаний имеет волна основной частоты ($n = 1$), поэтому пьезоизлучатели применяют, как правило, на основной частоте.

На частотах до нескольких мегагерц широкое распространение получили преобразователи из пьезокерамики. Пьезокерамика представляет собой поликристаллический сегнетоэлектрический материал (твердые растворы на основе $\text{BaTiO}_3 - \text{CaTiO}_3$, $\text{PbTiO}_3 - \text{PbZnO}_3$ и др.), обладающий после поляризации в электрическом поле устойчивыми и сильными пьезоэлектрическими свойствами. Из пьезокерамики можно изготавливать излучатели самой разнообразной формы (в виде пластин, стержней, колец и др.). С помощью преобразователей сферической или цилиндрической формы получают сфокусированный ультразвуковой пучок, в фокусе которого интенсивность звука достигает $10^5 \div 10^6$ Вт/см².

Для частот $10 \div 100$ МГц необходима столь малая толщина l , что изготовить преобразователь можно лишь в жестком соединении со звукопроводом — массивным куском звукопроводящего материала. В этом случае на хорошо отполированную поверхность звукопровода напыляется металлическая пленка (один электрод), к которой приваривается толстая (порядка 1 мм) пластинка пьезоэлектрика. Затем эта пластинка сошлифовывается до нужной толщины l , после чего на нее наносится второй электрод.

Для частот порядка 1 ГГц толщина пьезопреобразователя $l \approx 1$ мкм. Изготовление таких преобразователей представляет серьезную технологическую проблему. В этом частотном диапазоне применяют пленочные преобразователи, получаемые напылением на торец звукопровода пьезоэлектрических пленок из таких материалов, как CdS, ZnS, ZnO и др. Современные технологии позволяют создавать преобразователи с коэффициентом преобразования электрической энергии в акустическую до 90 % и мощностью волны в несколько ватт.

Применение акустических методов. Современный уровень развития акустики дает возможность применять акустические методы для решения самых разнообразных задач не только в физике, но также и в информационной и измерительной технике, промышленности, медицине, биологии, военном деле и т.д.

Первое (в порядке исторического становления) важное прикладное направление в акустике связано с получением с помощью акустических волн информации о свойствах и строении вещества, о происходящих в нем процессах. Применяемые в этих случаях методы основаны на измерении скорости распространения и коэффициента поглощения ультразвука на разных частотах ($10^4 \div 10^5$ Гц в газах и $10^5 \div 10^{10}$ Гц в жидкостях и твердых телах). Такие исследования позволяют получать информацию об упругих и прочностных характеристиках материалов, о степени их чистоты и наличии примесей, о размерах неоднородностей, вызывающих рассеяние и поглощение волн, и т.д.

Большая группа методов базируется на эффектах отражения и рассеяния упругих волн на границе между различными средами, что позволяет обнаруживать присутствие инородных тел и их местоположение. Эти методы лежат в основе гидролокации, неразрушающего контроля изделий и материалов, медицинской диагностики. Применение акустической локации в гидроакустике имеет исключительное значение, поскольку звуковые волны являются единственным видом волн, распространяющихся на большие расстояния в водной среде.

Как разновидность дефектоскопии можно рассматривать ультразвуковую диагностику в медицине. Даже при небольшом различии в плотности биологических тканей происходит отражение ультразвука на их границах. Поэтому ультразвуковая диагностика позволяет выявлять образования, не обнаруживаемые с помощью рентгеновских лучей. В такой диагностике используются частоты ультразвука порядка 10^7 Гц; интенсивность звука при этом не превышает $0,5$ мВт/см², что считается вполне безопасным для организма. В настоящее время развитие дефектоскопии привело к созданию акустической томографии. В этом методе с помощью набора приемников ультразвука или одного сканирующего приемника регистрируются упругие волны, рассеиваемые в разных направлениях, а затем с использованием компьютерной обработки сигнала

лов на экране дисплея формируется объемное изображение внутренней структуры исследуемого объекта.

Другим важным прикладным направлением акустики является активное воздействие ультразвуком на вещество. Такое воздействие широко используют в промышленной технологии для поверхностной обработки деталей, сварки, интенсификации химических процессов и т.д. В жидкостях основную роль при таком воздействии играет кавитация — образование в интенсивной звуковой волне пульсирующих пузырьков. Схлопывание пузырьков сопровождается мощным гидродинамическим возмущением и сильным локальным разогревом вещества, в результате чего разрушается поверхность твердого тела, находящегося в области кавитации.

Применение ультразвука для воздействия на живой организм в медицине основывается на эффектах, возникающих в биологических тканях при прохождении через них акустических волн. При умеренной интенсивности звука (до 1 Вт/см^2) колебания частиц среды вызывают микромассаж тканей, а поглощение звука — локальный разогрев, что применяется в ультразвуковой терапии. При больших интенсивностях сильное нагревание и кавитация вызывают разрушение тканей. Для хирургических операций используется сфокусированный ультразвуковой пучок, который позволяет производить локальные разрушения в глубинных структурах (например, мозга или почки) без повреждения окружающих тканей. В хирургии применяют ультразвук с частотами $0,5 \div 5 \text{ МГц}$, интенсивность которого в фокусе достигает 10^3 Вт/см^2 .

Основные характеристики звука. Упругие волны в воздухе, имеющие частоты в пределах от 20 Гц до 20 кГц, вызывают у человека ощущение звука. В узком смысле упругие волны в любой среде, имеющие частоту в этом интервале, называют слышимыми звуковыми волнами, или просто *звуком*. Волны с частотами $\nu < 20 \text{ Гц}$ называют *инфразвуком*, а с частотами $\nu > 20 \text{ кГц}$ — *ультразвуком*. Инфразвук и ультразвук человеческим ухом не воспринимаются.

В действительности самые низкие и самые высокие частоты интервала слышимых звуков доступны, как правило, лишь очень молодым людям. С возрастом этот интервал сужается, причем мужчины начинают утрачивать чувствительность к высоким частотам раньше, чем женщины. После 50 лет люди чаще всего утрачивают способность к восприятию звуков с частотами $\nu > 12 \text{ кГц}$.

Звуки различают по *высоте*, *тембру* и *громкости*. Всякий реальный звук, как правило, представляет собой не простое гармоническое колебание, а является наложением колебаний с определенным набором частот. Чтобы убедиться в этом, подключим микрофон М через усилитель УС ко входу осциллографа ОС (рис. 23.4) и будем регистрировать осциллограммы различных источников звука. Наиболее близким к гармоническому является звук камертона

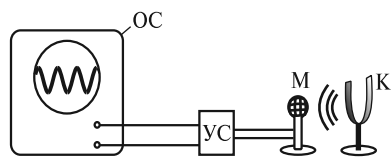


Рис. 23.4

К — осциллограмма по своему виду очень близка к синусоиде. Из произносимых звуков на гармонические более всего похожи гласные звуки. Однако уже здесь заметно отличие осциллограммы от синусоиды, что указывает на сложный состав гласных звуков. Гораздо более сложный вид у осциллограмм согласных звуков. Принципиально возможно, используя набор резонансных частот, воспроизвести любой звук.

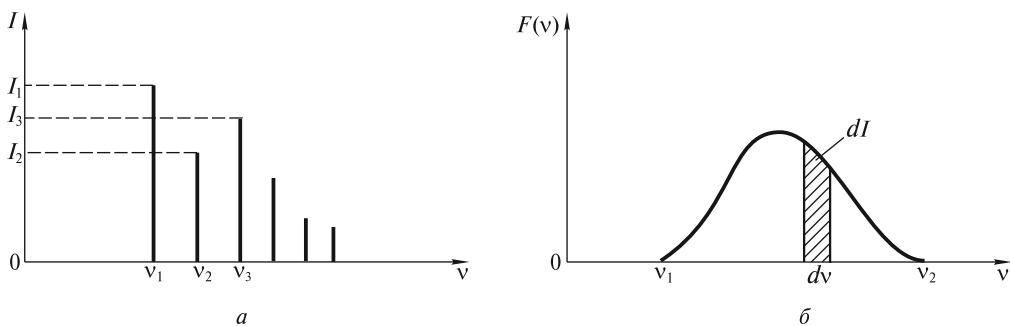


Рис. 23.5

наторов (см. ниже) или компьютерную обработку осциллограмм, произвести гармонический анализ звука, т. е. установить тот набор частот, который присутствует в данном звуке. Измеряя интенсивность каждой из гармоник, можно получить акустический спектр. Если в результате такого анализа окажется, что звук состоит из колебаний с дискретными частотами ν_1, ν_2, ν_3 и так далее, то спектр называют *линейчатым*. На рис. 23.5, *a* показан пример такого спектра, где по оси ординат отложены интенсивности I простых (гармонических) звуков.

Может быть и другая ситуация, когда в звуке присутствуют колебания всех частот в некотором интервале $\nu_1 \leq \nu \leq \nu_2$. Такой спектр, изображенный на рис. 23.5, *б*, называют *сплошным*. По оси ординат здесь отложена спектральная плотность интенсивности звука $F(\nu) = dI/d\nu$. В этом случае можно говорить об интенсивности $dI = F(\nu) d\nu$ звука, занимающего узкий частотный интервал $d\nu$. Эта интенсивность численно равна заштрихованной на рисунке площади. Естественно, что полная интенсивность I сложного звука со сплошным спектром будет равна площади под кривой $F(\nu)$. Сплошным спектром обычно обладают шумы.

Колебания с линейчатым спектром вызывают ощущение звука с более или менее определенной высотой. Такой звук называют *тональным*. Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой ν_1 . Колебания с частотами ν_2, ν_3 и так далее называют *обертонами*. Соотношения интенсивностей основного тона I_1 и обертонов I_2, I_3, \dots определяют *тембр* звука, придают ему определенную окраску. Фазы гармоник на тембр звука не влияют. В отсутствие обертонов тональный звук называют *чистым тоном*. Камертоны дают чистый тон и используются при настройке музыкальных инструментов.

Из каждого музыкального инструмента извлекают звуки с характерным набором гармоник. Это позволяет на слух различать звуки одного тона (с одинаковой основной частотой ν_1), издаваемые флейтой, трубой, фортепьяно и др. На рис. 23.6 показаны осциллограммы тональных звуков с частотой $\nu_1 = 440$ Гц (нота «ля» первой октавы): флейты (*a*), голоса (*б*) и трубы (*в*). Все осциллограммы имеют одинаковый период повторения $T = 1/440$ с, но значительно отличаются друг от друга своим видом. Это указывает на то, что основные частоты $\nu_1 = 1/T$ у всех звуков совпадают, однако спектральный состав звуков различен. На рис. 23.7 изображена клавиатура рояля с указанием основных частот, а также приближенные диапазоны основных частот для других инструментов и голосов.

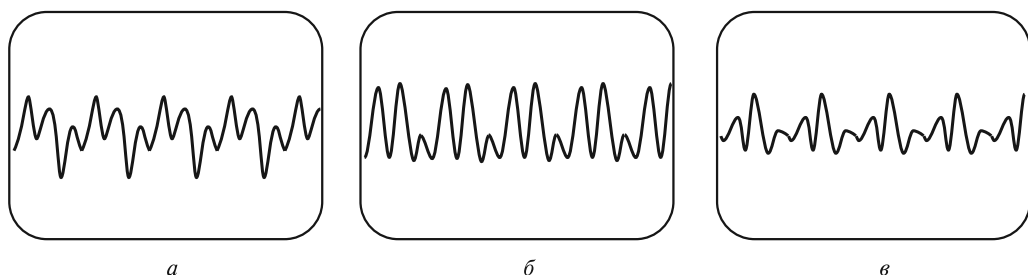


Рис. 23.6

Закон Вебера — Фехнера. Диаграмма слуха. Определение громкости звука основано на психофизическом законе, установленном в 1846 г. Э. Вебером, который заложил основы «психометрии», т. е. количественных измерений ощущений. Поскольку ощущения субъективны, то их абсолютные измерения затруднительны, и Вебер перенес проблему в область измерения относительных величин — он искал минимальные различия в ощущениях, которые можно зафиксировать. Суть закона Вебера заключается в том, что минимальное изменение интенсивности звука ΔI , которое различает человеческое ухо, не зависит от интенсивности I слышимого звука и составляет приблизительно 10 % от ее величины:

$$\frac{\Delta I}{I} = 10^{-1}. \quad (23.25)$$

Помимо слуховых ощущений, Вебер изучал также осязание и зрение и установил, что для осязания минимальное различие в ощущении тяжести груза не зависит от величины этого груза и составляет примерно $1/30$, а для зрения минимальная воспринимаемая разница в интенсивности света также не зависит от величины интенсивности и составляет около $1/100$.

Исходя из закона Вебера, можно построить шкалу уровня ощущения звука, или шкалу *громкости* β , записав следующее соотношение:

$$\frac{dI}{I} = A d\beta, \quad (23.26)$$

где $d\beta$ — прирост громкости, обусловленный приростом интенсивности; A — коэффициент, определяющий масштаб шкалы.

Интегрируя (23.26), получаем

$$\ln \frac{I}{I_{\text{пор}}} = A\beta. \quad (23.27)$$

Для того чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна обладать некоторой минимальной интенсивностью $I_{\text{пор}}$ и соответственно некоторым минимальным звуковым давлением $\delta p_{\text{пор}}$, которое называют *порогом слышимости*. Естественно, что при $I = I_{\text{пор}}$ громкость $\beta = 0$. Следовательно,

$$\beta = \frac{1}{A} \ln \frac{I}{I_{\text{пор}}}. \quad (23.28)$$

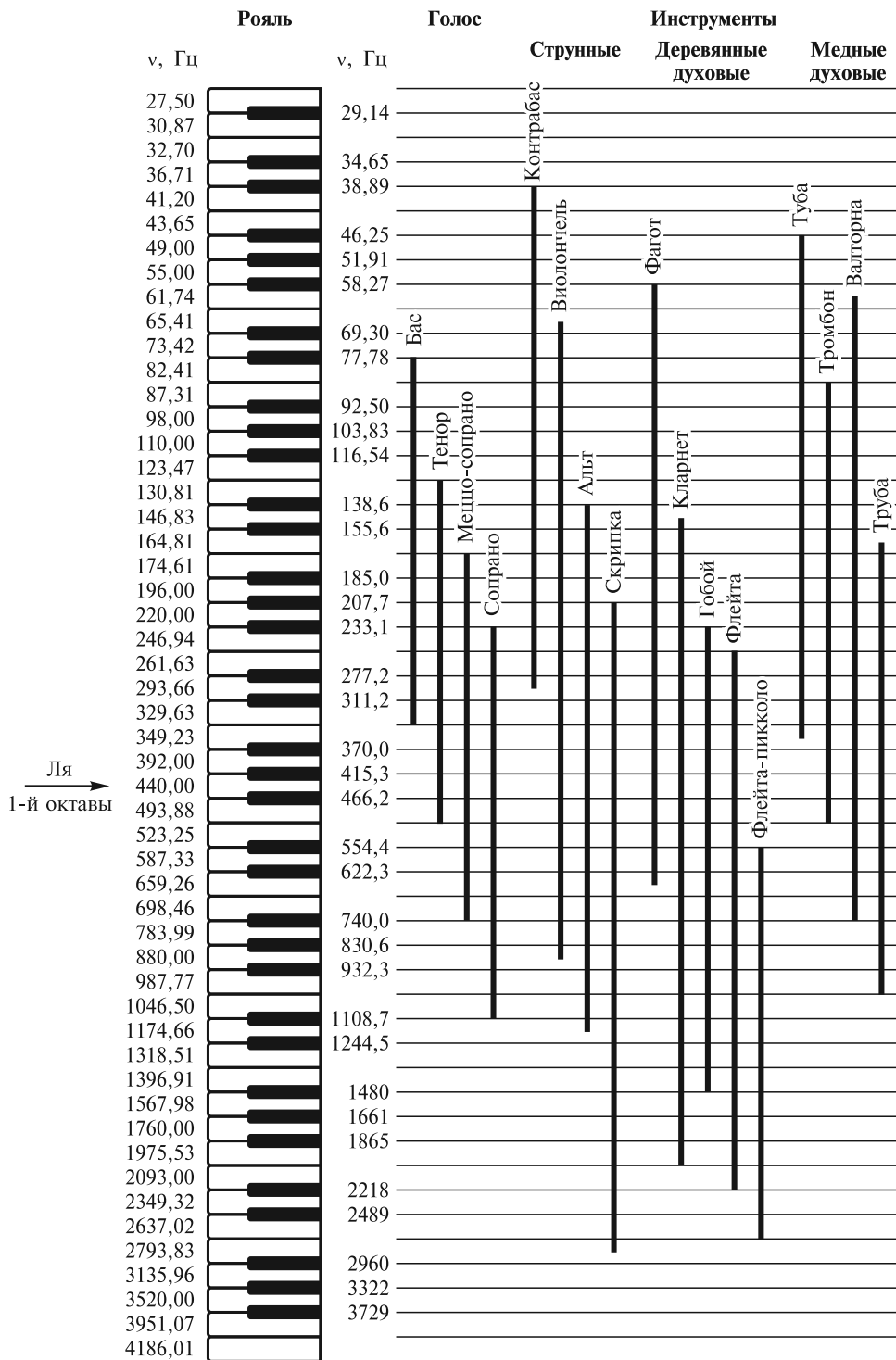


Рис. 23.7

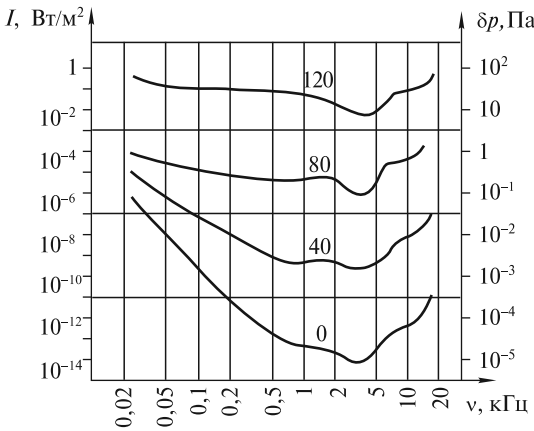


Рис. 23.8

ухом. Нижняя кривая характеризует зависимость порога слышимости от частоты, а верхняя — порог болевого ощущения, когда волна перестает восприниматься как звук, вызывая в ухе ощущение боли и давления. Отметим, что человеческое ухо является уникальным приемником акустических волн, воспринимающим звуки, различающиеся по интенсивности на 12 порядков в области частот около 1 кГц.

Из диаграммы видно, что при одинаковом звуковом давлении (одинаковой интенсивности) звуки различной частоты могут восприниматься как звуки разной громкости β . Поэтому в акустике, помимо субъективной величины — громкости звука β , оцениваемой на слух, используются и объективные характеристики звука, которые могут быть непосредственно измерены, — уровень звукового давления L_p и соответствующий ему уровень интенсивности:

$$L_p = \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}} = 2 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{пор}}}. \quad (23.30)$$

где учтено, что $I \sim (\delta p)^2$.

В определении L_p принято использовать стандартный порог слышимости $\delta p_{\text{пор}} = 2 \cdot 10^{-5}$ Па, а соответствующее ему значение минимальной интенсивности $I_{\text{пор}}$ зависит, согласно (23.17), от среды, в которой распространяется звук, и для воздуха при нормальных условиях составляет $I_{\text{пор}} = 10^{-12}$ Вт/м².

В принципе, L_p — величина безразмерная, но для численного значения логарифма используют название «бел» (в честь изобретателя телефона Г. Белла). На практике обычно используют в 10 раз меньшую единицу — «децибел», так что (23.30) принимает вид

$$L_p [\text{дБ}] = 20 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{пор}}} = 10 \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}}. \quad (23.30а)$$

Для громкости звука β используют единицу под названием «фон». На рис. 23.8 изображены кривые для уровней равной громкости $\beta = 0; 40; 80$ и 120 фон. Обратим внимание, что при $\nu = 1$ кГц уровни громкости β и звукового давления L_p совпадают, а для других слышимых частот они могут заметно отличаться.

Если выбрать $A = \ln 10 \approx 2,3$, то (23.28) будет иметь вид

$$\beta = \lg \frac{I}{I_{\text{пор}}}. \quad (23.29)$$

Это соотношение называется *законом Вебера — Фехнера*, оно отражает тот факт, что чувствительность уха человека к звуку меняется, как логарифм интенсивности звука.

На рис. 23.8 изображена диаграмма слуха, на которой показаны области частот и звуковых давлений, а также уровни интенсивности звуков, воспринимаемых человеческим

Акустические резонаторы. В ряде случаев возникает необходимость выделения гармонических составляющих из сложных звуковых колебаний. С такой задачей приходится сталкиваться при упомянутом выше спектральном анализе сложных звуков, при создании узкополосных приемников звука, чувствительных к определенной частоте, музыкальных инструментов и др. Для этих целей используется *акустический резонатор* — устройство, обладающее одной или множеством собственных частот.

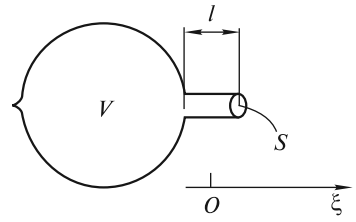


Рис. 23.9

Типичным примером акустической системы, реагирующей лишь на одну частоту, является сосуд сферической формы с открытой горловиной (рис. 23.9), который называют резонатором Гельмгольца. В задней части резонатора имеется еще одно маленькое отверстие в виде сопла, служащее для обнаружения колебаний. Воздух в горловине является колеблющейся массой. При смещении этой массы, например, в сторону сферического объема V воздух в этом объеме слегка сжимается, и возникающие силы избыточного давления выполняют роль возвращающей силы. Если площадь горловины равна S , а ее длина — l , то масса колеблющегося столба равна $m = \rho_0 l S$, где ρ_0 — плотность воздуха. При смещении массы m на расстояние $\xi \ll l$ (положительное направление оси $O\xi$ показано на рисунке) плотность воздуха изменяется на величину $\delta\rho$, удовлетворяющую равенству

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{S\xi}{V}. \quad (23.31)$$

Согласно (23.7), избыточное давление оказывается равным

$$\delta p = c^2 \delta\rho = -\frac{\rho_0 c^2 S}{V} \xi. \quad (23.32)$$

Следовательно, уравнение движения столба воздуха принимает вид

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = \delta p S,$$

или

$$\rho_0 S l \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\rho_0 c^2 S^2}{V} \xi. \quad (23.33)$$

Отсюда находим, что собственная частота колебаний столба воздуха в горловине, или частота резонатора Гельмгольца, равна

$$\omega_0 = c\sqrt{S/Vl}. \quad (23.34)$$

При объеме резонатора $V = 10^{-3} \text{ м}^3$, площади отверстия горловины $S = 1 \text{ см}^2$, ее длине $l = 1 \text{ см}$ и скорости звука $c = 334 \text{ м/с}$ для частоты ν_0 получим величину

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{334}{2\pi} \sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-3} \cdot 10^{-2}}} \approx 168 \text{ Гц}, \quad (23.35)$$

соответствующую слышимому диапазону звуковых частот.

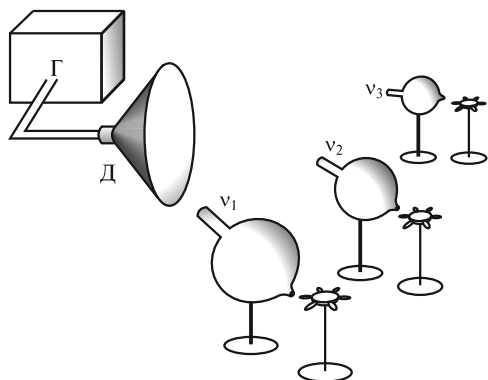


Рис. 23.10

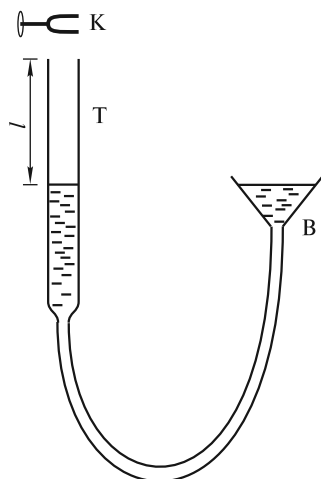


Рис. 23.11

Зависимость собственной частоты колебаний резонатора от его параметров (и прежде всего от объема V) демонстрируется в следующем опыте (рис. 23.10). Перед динамиком Д, подключенным к генератору звуковой частоты Г, устанавливаются несколько резонаторов, отличающихся своими размерами. Около отверстия каждого из резонаторов помещается легкий бумажный пропеллер-вертушка. При плавном увеличении частоты звукового генератора будет возрастать частота акустической волны, испускаемой динамиком в направлении резонаторов и играющей роль гармонической вынуждающей силы. При последовательном совпадении частоты этой волны ν с собственными частотами ν_1 , ν_2 и ν_3 резонаторов давление воздуха в их объемах будет колебаться с максимальной (резонансной) амплитудой. В результате вертушки начнут вращаться: сначала у большого, затем у среднего и, наконец, у самого маленького резонатора, имеющего самую высокую собственную частоту ν_3 .

При частоте резонатора $\nu_0 \approx 10^2$ Гц длина возбуждающей волны $\lambda = c/\nu_0 \approx 3,3$ м, что значительно больше характерных размеров резонатора: $\lambda \gg V^{1/3}$. Следовательно, не может быть и речи о стоячей акустической волне частоты ν_0 в самой сферической полости. Однако и в полости можно возбудить стоячие волны с длиной $\lambda \leq V^{1/3}$ и частотой $\nu = c/\lambda \geq c/V^{1/3}$. Если характерный размер резонатора $V^{1/3} \approx 10$ см, то частоты этих волн $\nu > 3000$ Гц. Такой резонатор будет обладать множеством собственных частот в килогерцовом диапазоне.

Наиболее простым в изготовлении акустическим резонатором является деревянный ящик или труба, открытые либо с одной, либо с двух противоположных сторон. Проведем следующий опыт. Заполним водой нижнюю часть вертикальной трубки Г, используя систему сообщающихся сосудов, и поднесем к верхнему концу звучащий на частоте ν камертон К (рис. 23.11). Перемещая воронку В вверх, можно добиться усиления тонального звука, создаваемого системой «камертон + часть трубы, заполненная воздухом». Это усиление будет наблюдаться при совпадении частоты ν с одной из собственных частот ν_p резонатора — трубы с воздухом длиной l , «закрытой» у нижнего конца. Соб-

ственные частоты стоячих волн в таком резонаторе легко подсчитать, если учесть, что на нижнем конце должен быть узел смещений, а на верхнем — пучность. Это возможно лишь для длин волн λ_p , удовлетворяющих условию (22.40):

$$l = (2p - 1) \frac{\lambda_p}{4}, \quad p = \text{I, II, III, ...},$$

когда на длине трубы укладывается нечетное число четвертей длины волны. Соответственно, частоты колебаний будут равны

$$\nu_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{4l} (2p - 1). \quad (23.36)$$

Хотя усиление звука будет наблюдаться при нескольких значениях длины воздушного столба l , однако самым эффективным оно будет при $\nu = \nu_1$ или $l = c/4\nu_1$.

Особо подчеркнем, что резонатор создает более благоприятные условия для звучания камертона, позволяя перераспределить, а следовательно, и усилить звук по определенным направлениям. Именно поэтому в опытах камертоны устанавливают на деревянный ящик, открытый с одной стороны и настроенный на частоту камертона (рис. 23.12).

Музыкальные инструменты. Деревянные деки струнных музыкальных инструментов выполняют функции резонаторов, обеспечивая хорошее звучание. Основная частота звука ν_1 и частоты обертонов зависят от массы, натяжения и длины струны. Однако тембр звука зависит от способа возбуждения струны и эффективности, с которой резонатор «поддерживает» эти частоты и посылает соответствующие волны в окружающее пространство.

В духовых инструментах формирование звука связано с возбуждением автоколебаний и зависит как от конструкции инструмента, так и от способа, с помощью которого воздух вдвигается в инструмент. В качестве иллюстрации рассмотрим процесс возникновения автоколебаний в органной трубе, разрез которой изображен на рис. 23.13, а.

При равномерном поступлении в мундштук М воздух проходит через узкую щель Ш, за которой образуется турбулентный поток (рис. 23.13, б). Образующаяся при таком течении вихревая дорожка является источником «шелестового» тона, основная частота которого обратно пропорциональна периоду следования вихрей T_v . По существу система «мундштук + щель» и представляет собой автоколебательную систему.

Вихри, выходящие из щели, поочередно проходят слева и справа от язычка Я, вызывая его вибрацию. Язычок оказывает периодическое воздействие

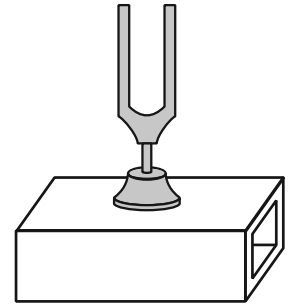


Рис. 23.12

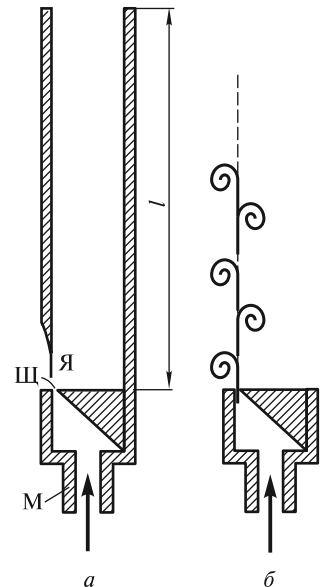


Рис. 23.13

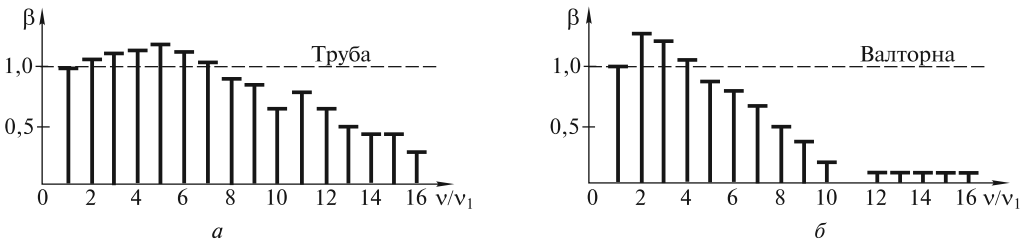


Рис. 23.14

на столб воздуха в трубе. Возникающие в столбе импульсы сжатия, добежав до открытого конца трубы, отражаются в виде импульсов разрежения и возвращаются к щели через время $T = 2l/c$ (l — длина трубы, c — скорость звука в воздухе), управляя поступлением воздуха через щель. Таким образом, основная частота $\nu_1 = 1/T$ формируется резонаторной системой. Органные трубы обычно конструируют для звучания на основной частоте. Однако можно вдвухнуть воздух так, чтобы в трубе одновременно существовали два импульса сжатия, и мы услышим звучание трубы на частоте первого обертона (удвоенной частоте).

В духовых инструментах вибратором (аналогом язычка Я в органной трубе) можно управлять, чтобы посылать в трубу один или более импульсов сжатия, прежде чем первый отразится от открытого конца. Высота звука инструмента определяется количеством импульсов в секунду, отраженных от открытого конца духового инструмента.

Звуки, произносимые человеком, возникают в результате того, что голосовые связки гортани вибрируют под напором движущегося воздуха, а гортань является объемным резонатором. Как правило, у мужчин объем гортани больше, чем у женщин, поэтому, в соответствии с формулой (23.34), мужские голоса более низкие.

На рис. 23.14 показаны спектры звуков, извлекаемых на трубе и валторне с одинаковой основной частотой $\nu_1 = 440$ Гц. По оси ординат отложена громкость β (нормирована на громкость волны основной частоты). В спектре звука валторны отсутствуют частоты $\nu > 10$ кГц, поэтому ее звук более приглушенный, нежели звук трубы.

Эффект Доплера. Наблюдая за проходящим мимо поездом или движущимся автомобилем, мы замечаем, что высота тона подаваемого ими звукового сигнала постоянно изменяется. Это и есть одно из проявлений *эффекта Доплера*, состоящего в изменении частоты звука при относительном движении источника и приемника. Рассмотрим это явление несколько подробнее.

Пусть источник И (рис. 23.15, а) излучает монохроматическую (т.е. гармоническую) акустическую волну частоты ν_0 . Длина этой волны, распространяющейся со скоростью c , будет равна

$$\lambda_0 = c/\nu_0. \quad (23.37)$$

Если теперь источник будет двигаться со скоростью $v < c$ в направлении распространения волны, то волна будет «отрываться» от источника со скоростью $c - v$, и ее длина уменьшится (рис. 23.15, б):

$$\lambda = \frac{c - v}{v_0}. \quad (23.38)$$

Достигнув неподвижного приемника П, эта волна будет воздействовать на него с частотой

$$v = \frac{c}{\lambda} = v_0 \frac{c}{c - v} = v_0 \frac{1}{1 - v/c}, \quad (23.39)$$

которая будет больше исходной частоты v_0 . При движении источника в противоположном направлении эта частота уменьшится. Именно это изменение частоты тона сигнала мы ощущаем при приближении и последующем удалении поезда или автомобиля.

Изменение частоты будет также и при движении приемника П, однако физическая причина этого изменения состоит в том, что волна с длиной $\lambda_0 = c/v_0$ будет поступать в приемник со скоростью $v + c$ (если приемник движется навстречу волне). Следовательно, частота воздействия на приемник будет равна

$$v = \frac{c + v}{\lambda_0} = v_0 \frac{c + v}{c} = v_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right). \quad (23.40)$$

В силу различия физических причин, приводящих к изменению частоты при движении источника и приемника, разнятся и формулы (23.39) и (23.40). Однако при $v \ll c$, как нетрудно убедиться, с точностью до членов порядка $(v/c)^2$ формула (23.39) может быть записана в виде (23.40).

При одновременном движении навстречу друг другу источника со скоростью $v_{\text{и}}$ и приемника со скоростью $v_{\text{п}}$ обе формулы можно объединить в одну:

$$v = v_0 \left(\frac{1 + v_{\text{п}}/c}{1 - v_{\text{и}}/c} \right). \quad (23.41)$$

При удалении источника или приемника в формуле (23.41) следует изменить знак при соответствующей скорости.

При скоростях $v > c$ формируются ударные волны, и формулы, описывающие изменение частоты, становятся несправедливыми.

Бинауральный эффект. Этот эффект представляет собой психофизиологическое явление, заключающееся в слитном восприятии звуков, достигающих правого и левого уха. Он дает возможность определить направление на источник звука и играет существенную роль в музыкальной акустике (стереофония).

Если волна падает под углом α к линии, соединяющей оба уха (рис. 23.16, штриховой линией изображен контур радиусом R , имитирующий голову человека), то волна достигнет левого уха позднее правого, а время задержки составит величину

$$\Delta t = (R \sin \alpha + R \alpha) / c, \quad (23.42)$$

где $R \alpha$ — криволинейный путь, проходимый звуковой волной при огибании ею головы человека за счет дифракции (см. ниже).

Кроме того, поскольку голова частично экранирует звук, то амплитуда волны, достигающей левого уха, несколько уменьшается. Совместное действие

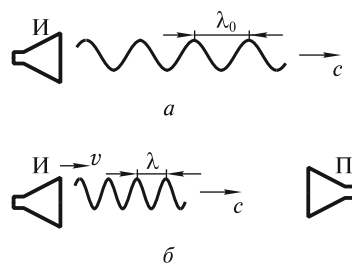


Рис. 23.15

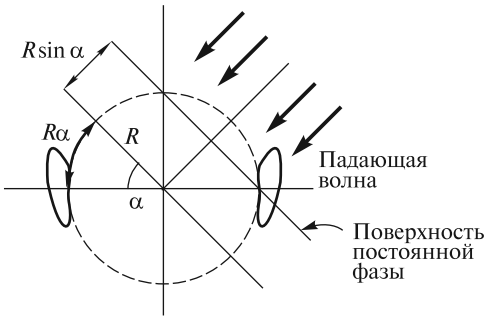


Рис. 23.16

Если положить $R = 10$ см, $\sin \alpha \approx 1$, то для волн с периодом $T < 10^{-3}$ с ($\nu \geq 1$ кГц) условие (23.43) не выполняется, и определять направление по сдвигу фазы затруднительно. Однако остается возможность сравнить амплитуды волн, достигающих обеих ушей, и тем самым определить угол α .

Интерференция волн. В предыдущей лекции мы получили уравнение стоячей волны (22.34), описывающее колебания шнура (или иной среды), по которому навстречу друг другу распространяются две гармонические волны одинаковой частоты ω и амплитуды s_0 . В результате наложения волн происходит перераспределение в пространстве объемной плотности энергии колебаний. В узлах, где волны встречаются в противофазе, эта энергия равна нулю. В пучностях, напротив, волны складываются в фазе, и энергия максимальна. Явление наложения волн, приводящее к перераспределению в пространстве объемной плотности энергии колебаний, носит название *интерференции*.

Интерференция является одним из фундаментальных явлений, присущих волнам различной природы (акустическим, электромагнитным, волнам на поверхности жидкости, плазменным волнам и др.). Она была хорошо известна еще во времена Ньютона, который установил основные закономерности интерференционной картины, получившей название «кольца Ньютона». Эти закономерности легко прослеживаются в опытах по интерференции капиллярных волн на поверхности жидкости.

Один из таких опытов выглядит следующим образом (рис. 23.17). В неглубокую чашку К с большой площадью основания наливают воду. Волны на ее поверхности возбуждают с помощью вибратора В, приводящего в периодическое движение два маленьких шарика O_1 и O_2 ,

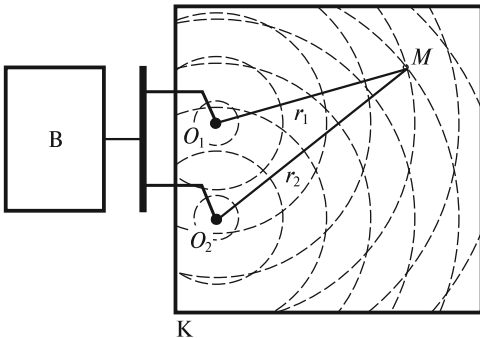


Рис. 23.17

этих двух факторов дает человеку возможность определить направление на источник звука. Если период колебаний звуковой волны сравним с временем задержки

$$\Delta t \leq T/2, \quad (23.43)$$

то волны, падающие под углом, вызывают колебания барабанных перепонок левого и правого уха со сдвигом фаз $0 \leq \Delta\varphi \leq \pi$, по которому человек и определяет направление прихода волны.

Волны на ее поверхности возбуждают с помощью вибратора В, приводящего в периодическое движение два маленьких шарика O_1 и O_2 , которые являются точечными источниками волн. Эти шарики слегка погружены в воду и совершают синхронные колебания с частотой $\nu \approx 10^2$ Гц в направлении, перпендикулярном поверхности воды. От каждого из точечных источников распространяется волна длиной $\lambda \approx 3$ мм со скоростью $c \approx 40$ см/с. Гребни этих волн в фиксированный момент времени изображены на рисунке штри-

ховыми линиями. В результате наложения волн образуется интерференционная картина, которую удобно наблюдать в стробоскопическом освещении (освещая ее вспышками света, следующими также с частотой $\nu \approx 10^2$ Гц). При таком освещении волны будут казаться практически неподвижными.

Наиболее сильные возмущения поверхности будут наблюдаться в тех местах, где волны складываются в фазе. Говорят, что здесь располагаются интерференционные максимумы. В местах, куда волны приходят в противофазе, поверхность будет практически не возмущена: здесь располагаются интерференционные минимумы. Возмущение поверхности в произвольной точке M зависит от разности хода $\Delta r = r_2 - r_1$, где r_1 и r_2 — расстояния от точки M до соответствующего точечного источника. Действительно, смещение s поверхности жидкости в точке M можно рассматривать как результат наложения двух синусоидальных (т.е. монохроматических) волн, прошедших расстояния r_1 и r_2 :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t - kr_1 - \varphi_1) + s_0 \sin(\omega t - kr_2 - \varphi_2). \quad (23.44)$$

Здесь предполагается, что обе волны в точке M имеют одинаковые амплитуды (хотя это и не совсем верно), и постоянные фазовые добавки φ_1 и φ_2 , так что их разность $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ не зависит от времени.

Выполняя в (23.44) суммирование, получаем

$$s(t) = 2s_0 \cos\left(\frac{k\Delta r}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (23.45)$$

Если положить для простоты $\Delta\varphi = 0$, то положение интерференционных максимумов определяется из условия

$$\cos\left(\frac{k\Delta r}{2}\right) = \pm 1. \quad (23.46)$$

Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, то последнему условию соответствует разность хода

$$\Delta r = r_2 - r_1 = m\lambda, \quad (23.47)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Каждому максимуму принято присваивать порядковый номер, определяемый соответствующим числом m (максимум нулевого, первого, минус первого порядка и т.д.). Интерференционные минимумы располагаются в тех местах, где

$$\Delta r = r_2 - r_1 = n \frac{\lambda}{2}, \quad (23.48)$$

где $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

Рассмотренная интерференционная картина соответствует идеализированной ситуации. Реальные волны даже в лучшем случае являются квазимонохроматическими. Для таких волн амплитуды s_0 и фазы φ_1 и φ_2 являются медленно меняющимися функциями времени (заметные изменения этих функций происходят за время $\tau \gg T = 2\pi/\omega$). Однако, если оба шарика приводятся в колебательное движение одним вибратором, разность фаз $\Delta\varphi$ в (23.45) остается постоянной, положение интерференционных максимумов задается формулой (23.47) и не зависит от времени.

В практически важных случаях источники интерферирующих волн могут быть независимы. В нашем опыте это можно осуществить, если использовать два вибратора, к каждому из которых присоединен маленький шарик. Тогда разность фаз $\Delta\varphi$ будет также изменяться за характерное время τ , и ее можно записать в виде

$$\Delta\varphi(t) = \overline{\Delta\varphi} + \delta(t), \quad (23.49)$$

где $\overline{\Delta\varphi}$ — среднее по времени значение разности фаз; $\delta(t)$ — знакопеременная функция.

Считая для простоты в (23.45) $s_0 = \text{const}$, приходим к выводу, что интерференционная картина как целое будет достаточно хаотично смещаться в разные стороны. Если такую картину снимать на киноплёнку со временем экспозиции кадра $\Delta t > \tau$, то на каждом кадре будет отпечатана усредненная за время Δt «размазанная» картина. Она может стать совсем неразличимой, если интерференционные максимумы будут смещаться на величины, равные или превышающие расстояния между соседними максимумами. Такая ситуация достаточно часто встречается при интерференции световых волн. Чтобы полного «смазывания» картины не произошло, очевидно, необходимо выполнение следующего условия:

$$|\delta(t)| \ll 2\pi. \quad (23.50)$$

Чем лучше выполняется это неравенство, тем выше четкость картины. Для световых волн $\tau \sim 10^{-9} \div 10^{-12}$ с и при визуальном наблюдении (для органов зрения $\Delta t \approx 0,1$ с) мы всегда регистрируем «размазанную» интерференционную картину.

С четкостью картины напрямую связано понятие *когерентности* интерферирующих волн. Когерентность характеризуется безразмерным коэффициентом γ (степенью когерентности), который может изменяться в интервале $0 < \gamma < 1$. Чем выше четкость картины, тем больше степень когерентности. Для монохроматических волн $\gamma = 1$. Детальное описание понятия когерентности будет дано в курсе «Оптика».

Дифракция волн. В упрощенном смысле под дифракцией понимают круг явлений, в которых проявляется отступление от прямолинейного распространения волн. На самом деле прямолинейное распространение волн является лишь определенным приближением. Действительно, специфика любого волнового движения проявляется в том, что оно, возникнув вначале в ограниченной области, стремится распространиться в равной степени во все стороны. Выбором специальной формы этой области можно добиться того, что волна побежит преимущественно в некотором направлении, то есть будет распространяться практически прямолинейно.

Для изучения основных закономерностей дифракции видоизменим характер возбуждения волн на поверхности воды в описанном ранее опыте. В качестве источника волны вместо шариков будем использовать пластину $O_1 O_2$, длина которой $l_0 = (3 \div 5)$ см, т. е. заметно превышает длину волны $\lambda \approx 3$ мм (рис. 23.18). В результате по поверхности воды побежит «плоская» волна в направлении, перпендикулярном пластине. Отчетливо наблюдаются две прямолинейные границы Γ_1 и Γ_2 , отделяющие возмущенную волной и гладкую части поверхности

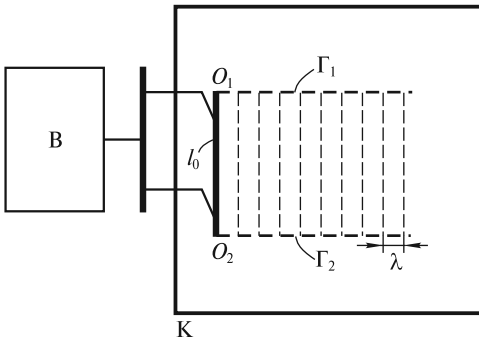


Рис. 23.18

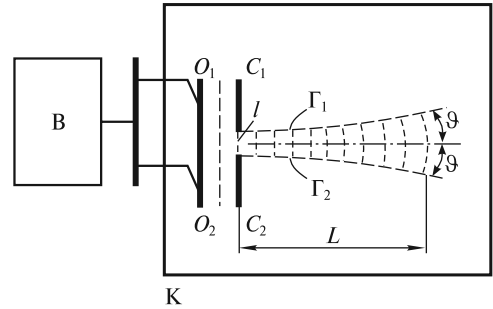


Рис. 23.19

воды. Для этой последней части можно употребить заимствованный из оптики термин: «область геометрической тени». Саму волну часто называют волновым пучком, или лучом. В этом эксперименте можно считать, что волна распространяется прямолинейно и не заходит в область тени. Это связано с тем, что размер ее волнового фронта $l_0 \gg \lambda$.

Уменьшим теперь этот размер. Наиболее просто это можно осуществить, если параллельно пластине O_1O_2 установить две вертикальные стенки C_1 и C_2 , расстояние l между которыми можно изменять (рис. 23.19). Если сделать $l \approx 5\lambda \approx 15$ мм, то волна начнет постепенно заходить в область тени, а ее фронт будет искривляться. На некотором характерном расстоянии L волновой пучок приобретет заметную угловую расходимость и далее будет распространяться по части поверхности, ограниченной углом 2ϑ . При уменьшении зазора l между стенками угол 2ϑ возрастает, а расстояние L уменьшается. Это отступление от прямолинейного распространения является результатом дифракции и существенно тогда, когда $l \approx \lambda$.

Не составляет труда оценить величины ϑ и L , используя подход, предложенный французским ученым О. Френелем в XIX в. для объяснения дифракции световых волн. Следуя Френелю, участок фронта падающей волны в зазоре между стенками можно рассматривать как цепочку из $N \gg 1$ близко расположенных одинаковых точечных источников O_1, O_2, \dots, O_N (рис. 23.20). Возмущение в любой точке M поверхности воды есть результат интерференции N волн от этих, так называемых «вторичных» источников, и зависит от разности хода всех интерферирующих волн. В практически важных случаях расстояния $r_1, r_2, \dots, r_N \gg l$, поэтому отрезки O_1M, O_2M, \dots, O_NM можно считать параллельными. Понятно, что в точку P , лежащую на оси волнового пучка, интерферирующие волны приходят в фазе и возмущение поверхности в ней будет максимальным. Напротив, в точке M волны могут погасить друг друга, если разность хода $\Delta r = r_{N/2} - r_1$ между волнами от крайнего источника O_1 и среднего источника $O_{N/2}$ будет равна $\lambda/2$. Поскольку эта разность, как видно из рис. 23.20, равна $\frac{l}{2} \sin \vartheta$, то

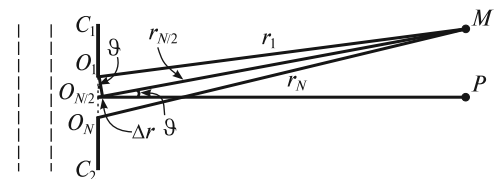


Рис. 23.20

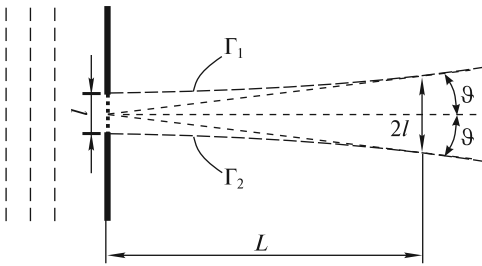


Рис. 23.21

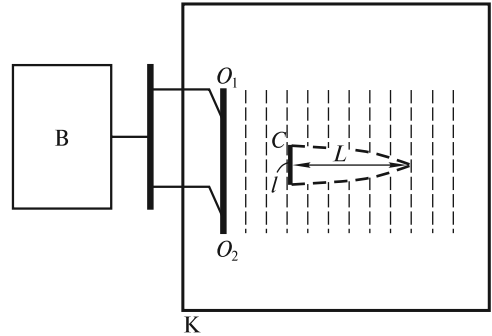


Рис. 23.22

$$\Delta r = \frac{l}{2} \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2}. \quad (23.51)$$

Аналогично, в противофазе будут приходить волны и от других пар источников ($O_2, O_{N/2+1}; O_3, O_{N/2+2}; \dots; O_{N/2+1}, O_N$). Говорят, что в точке M будет наблюдаться первый минимум дифракционной картины. Легко написать условие, подобное (23.51), и для других минимумов. Однако, как показывает строгий анализ, более 90 % всей энергии переносится волной в пределах угла 2ϑ . Поэтому на рис. 23.19 границы Γ_1 и Γ_2 весьма условны и очерчивают лишь основную, наиболее энергоемкую часть пучка.

Для оценки дифракционной расходимости волновых пучков используется угол ϑ , который при $l \gg \lambda$ оценивается согласно (23.51) по формуле

$$\vartheta \approx \lambda/l. \quad (23.52)$$

Такую расходимость пучок приобретает на некотором характерном расстоянии L . Его можно легко оценить из рис. 23.21, на котором изображены асимптоты к границам Γ_1 и Γ_2 . Будем условно считать, что на расстоянии L поперечный размер пучка удвоился и стал равным $2l$. Тогда с учетом (23.52) можно записать:

$$\vartheta = l/L = \lambda/l. \quad (23.53)$$

Отсюда

$$L = l^2/\lambda. \quad (23.54)$$

Величина L называется *дифракционной длиной пучка* с длиной волны λ и поперечным размером l . Она определяет масштаб расстояний, на которых развивается заметная дифракция пучка.

Сделаем некоторые оценки. В опыте, изображенном на рис. 23.18, $l = 5$ см, $\lambda = 3$ мм, и $L \approx 80$ см. Это означает, что в кювете дифракция просто не успевает заметно развиваться. При уменьшении l (см. рис. 23.19) до величины $l = 5\lambda = 15$ мм дифракционная длина пучка $L = 7,5$ см, и дифракция становится отчетливо видна. Если на пути волнового пучка поставить препятствие — стенку C (рис. 23.22), то сразу за стенкой будет тень, однако волна, пройдя расстояние $L \approx l^2/\lambda$, обогнет препятствие. Иллюстрацией к сказанному является, например, возможность услышать звуковой сигнал автомобиля, находясь позади небольшого строения. Однако за многоэтажный дом звук практически не проникает.

ЛЕКЦИЯ 24

Волны на поверхности жидкости. Гравитационные волны. Многие из нас могут долго любоваться поверхностью моря или реки, по которой перекачиваются волны. Рожденные ветром, они распространяются затем за счет силы тяжести. Такие волны называют *гравитационными*. Частицы воды совершают в них движение по круговым и эллиптическим траекториям («вверх — вниз» и «вперед — назад» одновременно), поэтому такие волны (как и волны Рэлея) нельзя отнести ни к продольным, ни к поперечным. Гравитационные волны обладают рядом удивительных свойств, к анализу которых мы и приступим.

Пусть по поверхности водоема глубиной H вдоль оси Ox распространяется поверхностная гармоническая волна

$$s(x, t) = s_0 \sin(\omega t - kx), \quad (24.1)$$

где s — смещение поверхности воды вверх от ее равновесного горизонтального положения, отмеченного на рис. 24.1 штриховой линией. Будем считать, что $|s| \ll H$.

Предположим, что давление жидкости на глубине z равно

$$p(z, x, t) = \rho gz + \delta p(z, x, t), \quad (24.2)$$

где δp — добавка к гидростатическому давлению ρgz , обусловленная волновым движением поверхности.

Сделаем также предположение, что

$$\delta p(z, x, t) = f(z) \rho g s(x, t). \quad (24.3)$$

Выражение (24.3) записано в приближении, что возмущение давления вблизи поверхности ($z \rightarrow 0$) определяется дополнительным гидростатическим давлением $\rho g s$, связанным с изменением уровня жидкости при распространении волны:

$$\delta p(0, x, t) = \rho g s(x, t), \quad (24.4)$$

причем с глубиной это возмущение должно убывать. Следовательно, функция $f(z)$ с ростом z также должна убывать, при этом $f(0) = 1$. Позже мы докажем, что представление возмущения давления в виде (24.3) оправдано.

Для описания волнового движения жидкости нам необходимо, во-первых, для заданной частоты ω найти k , т. е. установить дисперсионную зависимость $\omega = \omega(k)$ и, во-вторых, определить вид функции $f(z)$. Это можно сделать, если с учетом (24.2) записать уравнения Эйлера для движения несжимаемой и невязкой жидкости в плоскости Oxz [см. уравнение (17.30)]:

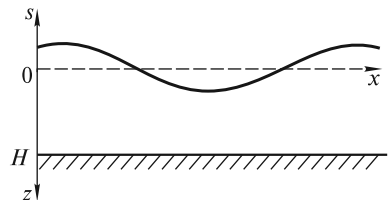


Рис. 24.1

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \delta p}{\partial x};$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \delta p}{\partial z}.$$
(24.5)

При записи (24.5) мы предполагаем, что движение частиц по оси Oy отсутствует.

Учтем далее, что членами $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$, $v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$, $v_x \frac{\partial v_z}{\partial x}$ и $v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$ в силу их малости можно пренебречь. Тогда

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x};$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial z}.$$
(24.6)

Эти уравнения дополним условием несжимаемости:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$
(24.7)

Уравнения (24.6) и (24.7) при заданных граничных условиях дают возможность рассчитать v_z , v_x и δp и получить решение задачи о движении жидкости, включая движение ее поверхности.

Продифференцируем первое из уравнений (24.6) по x , а второе — по z :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2};$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2}.$$
(24.8)

В левых частях этой системы уравнений изменен порядок дифференцирования.

Сложим теперь уравнения (24.8). Тогда с учетом (24.7) можем записать

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\left(\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} \right) = 0.$$
(24.9)

Уравнение

$$\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial z^2} = 0$$
(24.10)

является знаменитым *уравнением Лапласа*, используемым во многих разделах физики. Поэтому его решение хорошо известно.

На поверхности водоема при $z=0$ граничным условием является равенство (24.4), а на дне при $z=H$ должно выполняться условие $v_z=0$, из которого с учетом второго уравнения (24.6) получаем

$$\left. \frac{\partial \delta p}{\partial z} \right|_{z=H} = 0. \quad (24.11)$$

Подставим (24.3) в (24.10) и учтем, что $\frac{\partial^2 \delta p}{\partial x^2} = -k^2 \delta p$. Тогда (24.10) примет вид

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0. \quad (24.12)$$

Используя подстановку $f(z) = Ae^{\lambda z}$, получаем характеристическое уравнение $\lambda^2 - k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm k$, и общее решение (24.12) может быть записано в виде функции

$$f(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}, \quad (24.13)$$

при этом граничные условия для $f(z)$ следующие:

$$f(0) = 1; \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=H} = 0. \quad (24.14)$$

Подставляя (24.13) в (24.14), получаем

$$\begin{aligned} A + B &= 1; \\ Ae^{kH} - Be^{-kH} &= 0. \end{aligned} \quad (24.15)$$

Отсюда

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch}[k(z-H)]}{\operatorname{ch}(kH)}, \quad (24.16)$$

где функция $\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$ — гиперболический косинус. График функции $f(z)$ изображен на рис. 24.2.

Определим теперь волновое число k , входящее в (24.1) и (24.3). Это можно сделать, если сначала из (24.1) найти вертикальное ускорение частицы на поверхности жидкости. При этом надо учесть, что положительные значения v_z соответствуют уменьшению s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \\ &= s_0 \omega^2 \sin(\omega t - kx) = \omega^2 s(x, t). \end{aligned} \quad (24.17)$$

Подставим (24.17) в левую часть второго уравнения (24.6), а правую часть этого уравнения запишем, используя представление (24.3). Тогда получим

$$\rho \omega^2 s = -\rho g s \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=0} = \rho g s k \operatorname{th}(kH). \quad (24.18)$$

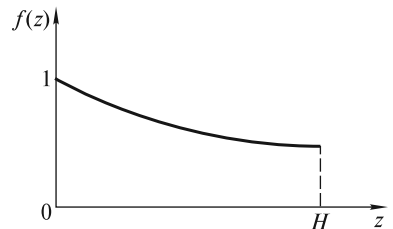


Рис. 24.2

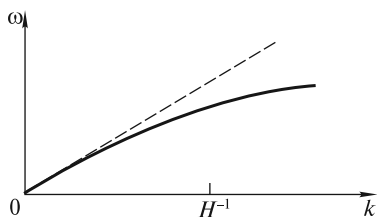


Рис. 24.3

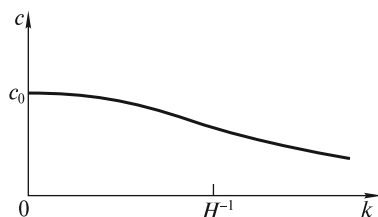


Рис. 24.4

В (24.18) учтено, что $(\operatorname{ch} \alpha)' = \operatorname{sh} \alpha$, $\operatorname{th} \alpha = \operatorname{sh} \alpha / \operatorname{ch} \alpha$. Поэтому дисперсионное соотношение получается в виде

$$\omega = \sqrt{gH}k \left(\frac{\operatorname{th}(kH)}{kH} \right)^{1/2}. \quad (24.19)$$

Обозначим $c_0 = \sqrt{gH}$. Тогда

$$\omega = c_0k \left(\frac{\operatorname{th}(kH)}{kH} \right)^{1/2}. \quad (24.20)$$

На рис. 24.3 эта зависимость изображена сплошной линией, а штриховой линией показана прямая $\omega = c_0k$. Фазовая скорость волны $c = \omega/k$ как функция волнового числа показана на рис. 24.4.

Таким образом, поверхностные гравитационные волны подвержены сильной дисперсии. Эффект дисперсии ярко выражен у океанских волн, зарождающихся в удаленных штормовых районах. Поскольку длинные волны (с меньшим k) движутся быстрее, чем короткие, то они достигают берегов на 1—2 дня раньше коротких. Эффект дисперсии может быть использован для определения места возникновения волн. Расстояние до штормового района подсчитывается по разности времен прибытия волн разной длины волны и, следовательно, разной частоты. Преобладающая частота прибывающих волн растет во времени, а длина пройденного пути находится по скорости изменения частоты. Так, по оценке, один из пакетов волн, наблюдавшихся в северной части Тихого океана, прошел половину окружности земного шара от Индийского океана по дуге большого круга, проходящей южнее Австралии.

Реальные волны, как уже говорилось раньше, представляют собой суперпозицию волн, или волновые пакеты, которые движутся с групповой скоростью $u = d\omega/dk$. Скорость u группы меньше, чем скорости $c = \omega/k$ каждой из волн в группе. Если рассматривать отдельную волну, то можно видеть, что она перемещается быстрее, чем группа. При достижении фронта группы она затухает, а ее место занимают волны, пришедшие с тыла.

Фазовая скорость волны $c = \omega/k$, как следует из (24.20), зависит от параметра $kH = 2\pi H/\lambda$. Поэтому различают волны глубокой и мелкой воды.

Волны глубокой воды. Если $kH \gg 1$ ($H \gg \lambda$), то волны называются волнами глубокой воды. Возмущения δr сосредоточены в приповерхностном слое тол-

шиной $\sim \lambda$ и не «чувствуют» присутствия дна. Для таких волн, с учетом приближения $\text{th}(kH) \approx 1$, дисперсионное соотношение (24.19) имеет вид

$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (24.21)$$

Таким образом, эти волны обладают сильной дисперсией.

Сделаем некоторые оценки. В океане преобладают волны с периодом колебаний $T \approx 10$ с. Согласно (24.21), длина волны $\lambda = 2\pi/k \approx 150$ м, а фазовая скорость $c \approx 15$ м/с. Такая скорость является типичной, так как она совпадает с характерной скоростью ветра, генерирующего волны глубокой воды.

Если проанализировать распределение возмущений давления с глубиной, описываемое функцией $f(z)$ [см. (24.16)], то можно показать, что $f = e^{-1}$ при $z = \lambda/6 = 25$ м. Таким образом, приближение глубокой воды справедливо в тех местах, где глубина $H > 25$ м.

Волны мелкой воды. При приближении к берегу глубина H уменьшается, и реализуется условие $kH < 1$ ($2\pi H < \lambda$). Хотя частота волны остается прежней, однако дисперсионное соотношение примет иной вид

$$\omega = k\sqrt{gH} = kc_0, \quad (24.22)$$

из которого следует, что на мелкой воде дисперсия волн отсутствует. Скорость волн $c_0 = \sqrt{gH}$ уменьшается с глубиной, и на глубине $H = 1$ м скорость $c_0 \approx 3$ м/с, а длина волны при $T \approx 10$ с равна $\lambda = c_0 T \approx 30$ м.

В непосредственной близости от берега, где глубина H сравнима с амплитудой волны s_0 , волна искажается — появляются крутые гребни, которые движутся быстрее самой волны и затем опрокидываются. Это происходит потому, что глубина $H + s_0$ под гребнем существенно превышает глубину $H - s_0$ под впадиной. В результате колебания частиц волны приобретают сложный характер. Они являются суперпозицией колебаний многих частот, причем по мере приближения к берегу ширина частотного спектра увеличивается.

Из приведенной выше классификации гравитационных волн следует, что для океана с глубиной $H \approx 5$ км волны глубокой воды должны иметь длину волны $\lambda < 2\pi H \approx 30$ км. Согласно (24.21), для $\lambda = 30$ км период колебаний $T = 2\pi/\omega \approx 2$ мин, а скорость $c = \lambda/T \approx 250$ м/с. Для континентального шельфа $H \approx 50$ м, поэтому волнами глубокой воды будут волны с $\lambda < 300$ м, $T \approx 15$ с и $c \approx 20$ м/с.

С другой стороны, при $H \approx 5$ км волны с $\lambda > 30$ км будут волнами мелкой воды. Они имеют период колебаний $T > 2$ мин и скорость $c > 250$ м/с. Такие волны распространяются со скоростью реактивного самолета и могут пересечь Атлантический океан примерно за 7 ч.

Характер движения частиц жидкости. Рассчитаем скорости частиц v_x и v_z как функции координат x , z и времени t . Это можно сделать, используя уравнения (24.6) с учетом (24.1), (24.3) и (24.16):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \delta p = f(z) \rho g k s_0 \cos(\omega t - kx); \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \delta p = -\frac{df}{dz} \rho g s_0 \sin(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (24.23)$$

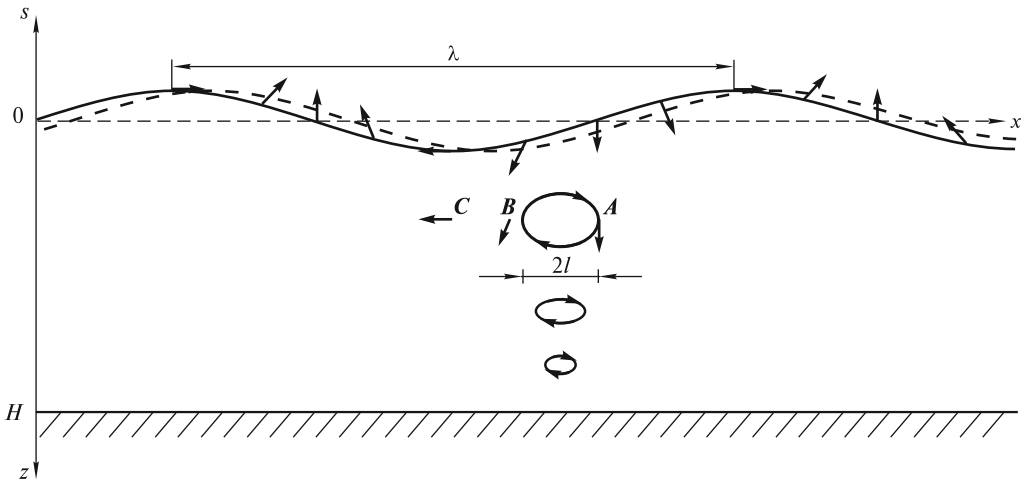


Рис. 24.5

Отсюда

$$v_x = f(z) g \frac{k}{\omega} s_0 \sin(\omega t - kx);$$

$$v_z = \frac{df}{dz} \frac{g}{\omega} s_0 \cos(\omega t - kx).$$
(24.24)

На рис. 24.5 показаны векторы скорости частиц на поверхности в фиксированный момент времени. Пунктиром изображено положение волны через малый промежуток времени. На гребне волны частицы имеют составляющую скорости $v_x > 0$, а во впадине $v_x < 0$. Скорость некоторой частицы A направлена вниз, и с течением времени она будет изменяться. Легко понять, что в последующий момент скорость частицы A будет такой, как у частицы B в настоящий момент, затем — как у частицы C в настоящий момент, и так далее. Поэтому траектория частицы A будет эллиптической. По мере увеличения координаты z (глубины погружения) $v_z \rightarrow 0$, эллипсы сплюсчиваются, и при $z \gtrsim \lambda$ частицы жидкости колеблются практически вдоль оси Ox .

Размер l большей полуоси эллипса можно оценить из условия

$$l \approx (v_x)_{\max} T = g \frac{k}{\omega} s_0 T.$$
(24.25)

Сравним l с длиной волны λ :

$$\frac{l}{\lambda} \approx \frac{g}{\lambda} \frac{k}{\omega} s_0 T.$$
(24.26)

Учтем, что $\omega/k = c$, $\lambda = cT$, $c_0 = \sqrt{gH}$ — скорость волн мелкой воды. Тогда

$$\frac{l}{\lambda} \approx \frac{c_0^2}{c^2} \frac{s_0}{H}.$$
(24.27)

Для мелкой воды $c = c_0$, и

$$\frac{l}{\lambda} \approx \frac{s_0}{H} \ll 1.$$
(24.28)

Поскольку в этом случае $\lambda \sim H$, то $l \sim s_0$, т. е. возрастает с ростом амплитуды волны s_0 . Но так как $s_0 \ll H$, то амплитуда горизонтальных колебаний $l \ll \lambda$.

При большой глубине водоема частицы на поверхности движутся по траекториям, близким к круговым. По таким же траекториям будут двигаться и плавающие на поверхности небольшие тела, например, притопленный поплавок.

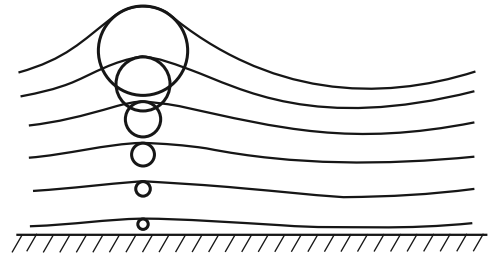


Рис. 24.6

До сих пор мы предполагали, что профиль волны является синусоидальным, что возможно только в том случае, если амплитуда волны очень мала по сравнению с ее длиной. В природе таким профилем реально обладают только приливные волны, длина которых чрезвычайно велика по сравнению с их высотой. Обычные ветровые волны имеют более сложный вид. Как показывают расчеты, частицы жидкости в них движутся по окружностям, радиус которых экспоненциально убывает с глубиной (рис. 24.6). Сплошные линии — это линии равного давления (изобары), любая из которых может соответствовать поверхности воды при определенной амплитуде волны. Эти линии являются трохоидами, поэтому такую волну называют трохоидальной. Очень близкими к трохоидальным являются волны после наступления на море штиля. Это так называемая мертвая зыбь.

Опытным путем установлено, что у трохоидальных волн угол между касательной к поверхности воды и горизонтом не превышает 30° . В противном случае волна теряет устойчивость. Это проявляется в процессе зарождения и развития волн под действием ветра. Высокие волны с острыми гребешками не могут продолжать свой бег, так как их гребни опрокидываются и разрушаются, и волны уменьшаются по высоте.

Капиллярные волны. При анализе зависимости скорости от волнового числа, изображенной на рис. 24.4, возникает вопрос: до какой величины падает скорость c при увеличении волнового числа k (или уменьшении длины волны)? Опыт показывает, что с уменьшением длины волны скорость достигает минимума, а затем начинает возрастать. Это связано с тем, что при малом радиусе R кривизны поверхности ($R \sim \lambda$) заметную роль начинают играть силы поверхностного натяжения. Под их действием поверхность воды стремится уменьшить свою площадь. Такие волны называют *капиллярными*.

Если при увеличении натяжения шнура скорость распространения по нему волн возрастала, то при усилении роли поверхностного натяжения (уменьшении $\lambda \sim R$) скорость капиллярных волн также должна увеличиваться. Известно, что давление под искривленной цилиндрической поверхностью $p = \sigma/R$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения. Если считать, что $\lambda \approx 2\pi R$, то, по аналогии с формулой для скорости звука в газе (при $\gamma = 1$), можно оценить фазовую скорость таких волн:

$$c_{\text{кап}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{p/\rho} = \sqrt{\sigma k/\rho}. \quad (24.29)$$

Расчет показывает, что формула (24.29) для капиллярных волн глубокой воды оказывается точной. Учет конечности глубины водоема дает для этих волн результат, аналогичный полученному выше для гравитационных волн: в формуле (24.29) под корнем дополнительно появляется множитель $\text{th}(kH)$.

Капиллярные волны также испытывают дисперсию, однако, в отличие от гравитационных, их фазовая скорость возрастает с увеличением волнового числа k , т.е. с уменьшением λ . Запишем дисперсионное соотношение (24.29) в виде

$$\omega^2 = \sigma k^3 / \rho. \quad (24.30)$$

Как следует из этого соотношения, групповая скорость $u_{\text{кап}}$ капиллярных волн глубокой воды больше их фазовой скорости $c_{\text{кап}}$ в 1,5 раза: $u_{\text{кап}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k = \frac{3}{2} c_{\text{кап}}$, тогда как для гравитационных волн [см. (24.21)] $u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} c$, т.е. групповая скорость вдвое меньше фазовой. Различие групповой и фазовой скоростей капиллярных волн хорошо заметно на поверхности воды при порывах ветра: видно, что мелкая рябь внутри группы волн движется медленнее, чем весь волновой пакет.

Если при рассмотрении поверхностных волн учесть как действие силы тяжести, так и поверхностное натяжение, то для волн глубокой воды получится одно дисперсионное соотношение:

$$\omega = \sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3}. \quad (24.31)$$

Отсюда скорость гравитационно-капиллярных волн глубокой воды получается равной

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} k}. \quad (24.32)$$

Для волновых чисел $k \ll H^{-1}$ (волны мелкой воды) в соответствии с (24.22) скорость стремится к значению $c_0 = \sqrt{gH}$, а для произвольных значений k , в соответствии с (24.20), можно записать выражение для скорости волн следующим образом:

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho} k\right) \text{th}(kH)}. \quad (24.33)$$

Зависимость (24.33) скорости c от волнового числа k показана на рис. 24.7. Видно, что скорость достигает минимальной величины. В соответствии с (24.32), это происходит при $g/k_{\text{min}} = \sigma k_{\text{min}} / \rho$, откуда $k_{\text{min}} = \sqrt{g\rho/\sigma}$. Следовательно,

$$c_{\text{min}} = 4 \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}} \sqrt{2}. \quad (24.34)$$

Для воды $\sigma = 0,073$ Н/м, $c_{\min} \approx 23,2$ см/с, $\lambda_{\min} = 2\pi/k_{\min} \approx 1,73$ см. Таким образом, на поверхности воды не могут существовать волны, распространяющиеся со скоростью меньше 23 см/с!

Цунами. Кроме волн, генерируемых ветром, существуют очень длинные волны, возникающие во время подводных землетрясений, или моретрясений. Наиболее часто такие землетрясения происходят на дне Тихого океана, вдоль длинных цепей Курильских и Японских островов. Громадные волны, возникающие при мощном толчке, имеют высоту $s_0 \sim 10$ м и $\lambda \sim 10^3$ км. Достигая берега, они вызывают значительные разрушения. Большие бедствия такие волны причиняют населению Японии, где они были названы «цунами» (по-японски — «большая волна в гавани»).

Интересны сведения о деформациях дна океана во время землетрясений. В 1922 г. японские гидрографы сделали промеры глубин в заливе Сагами недалеко от Токио, а через год — 1 сентября 1923 г. — там произошло катастрофическое землетрясение. Повторный промер глубин показал, что изменения рельефа дна произошли на площади около 150 км², при этом одни части дна поднялись на 230 м, а другие опустились до 400 м. Поднявшаяся часть дна вытолкнула громадный объем воды, который по оценкам составил $V \approx 23$ км³. В результате такого толчка образовался огромный водяной холм (уединенная волна), который при распространении вызвал подъем уровня воды у берегов Японии в разных местах от 3,3 до 10 м.

Внутренние волны. Наряду с поверхностными гравитационно-капиллярными волнами, в океане существует множество других видов волн, которые играют важную роль в динамике океана. Океан, в отличие от идеальной жидкости, стратифицирован, т.е. его воды не являются однородными, а изменяются по плотности с глубиной. Это распределение обусловлено потоками энергии (теплоты) и вещества. В упрощенном виде океан можно представить состоящим из двух слоев воды: сверху находится более легкая (теплая или менее соленая), а снизу — более плотная (более соленая или холодная). Подобно тому, как поверхностные волны существуют на границе «вода—воздух», на границе раздела вод разной плотности будут существовать внутренние гравитационные волны. Возникновение внутренних волн можно представить следующим образом. Если в покоящейся стратифицированной среде возникло возмущение, которое вывело частицу воды из состояния равновесия, то возникает возвращающая сила, равная равнодействующей архимедовой силы и силы тяжести, вызывающая колебания этой частицы около положения равновесия. Распространение этих колебаний в среде и представляет собой внутреннюю волну. Амплитуда волн этого типа в океане может достигать сотни метров, длина волны — многих километров, но колебания водной поверхности при этом ничтожно малы. Образование внутренних волн происходит под действием приливов, колебаний атмосферного давления, неустойчивости течений.

Акустические волны большой амплитуды. Если возмущения плотности $\delta\rho$ и давления δp в акустической волне не являются исчезающе малыми по сравнению с равновесными значениями ρ_0 и p_0 , то говорят, что волна имеет конеч-

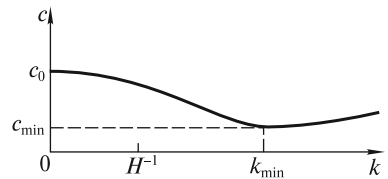


Рис. 24.7

ную амплитуду. Обычно такие волны обладают большой интенсивностью, и для описания их распространения необходимо решать нелинейные уравнения гидродинамики. Анализом распространения волн конечной амплитуды занимается отдельная наука, называемая нелинейной акустикой. Ограничимся лишь небольшим объемом сведений из нелинейной акустики.

Пусть в газе вдоль оси Ox распространяется мощная акустическая волна. Если пренебречь вязкостью газа, то одномерное движение частиц вдоль этой оси будет описываться уравнением Эйлера и уравнением непрерывности:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0. \end{aligned} \quad (24.35)$$

Сложность решения этой системы уравнений состоит в том, что в их левых частях содержатся нелинейные члены. Обычно эту нелинейность называют кинематической нелинейностью. Поскольку уравнения (24.35) содержат три неизвестные функции $\rho(x, t)$, $p(x, t)$ и $v(x, t)$, то необходимо дополнить их третьим уравнением, связывающим p и ρ . Для газа оно, как уже отмечалось ранее, является уравнением адиабаты:

$$p = p(\rho) = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma. \quad (24.36)$$

Представим p и ρ в виде

$$p = p_0 + \delta p; \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho. \quad (24.37)$$

Подставим (24.37) в (24.36):

$$p_0 + \delta p = p_0 (1 + \delta \rho / \rho_0)^\gamma. \quad (24.38)$$

Полагая, что $|\delta \rho / \rho_0| < 1$, разложим правую часть (24.38) в ряд:

$$p_0 + \delta p = p_0 \left[1 + \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \left(\frac{\delta \rho}{\rho_0} \right)^2 + \dots \right]. \quad (24.39)$$

Пренебрегая членами, имеющими порядок малости $(\delta \rho / \rho_0)^3$ и выше, окончательно запишем уравнение адиабаты в виде

$$\delta p = c_0^2 \delta \rho + c_0^2 \frac{\gamma-1}{2} \frac{(\delta \rho)^2}{\rho_0}, \quad (24.40)$$

где $c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$.

Второе слагаемое в правой части (24.40) начинает давать заметный вклад при сильном сжатии (разрежении), поэтому связь между возмущениями давления δp и плотности $\delta \rho$ становится нелинейной. Это обусловлено нелинейностью сил межмолекулярного взаимодействия (отклонениями от закона Гука). Такая нелинейность называется физической. Вместе с кинематической нели-

нейностью она может кардинально повлиять на характер распространения интенсивных акустических волн.

Установим основные закономерности такого распространения. После подстановки (24.37) в уравнения (24.35) получим

$$(\rho_0 + \delta\rho) \frac{\partial v}{\partial t} + (\rho_0 + \delta\rho) v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [(\rho_0 + \delta\rho) v] = 0. \quad (24.41)$$

Чтобы преодолеть психологический барьер, связанный с анализом системы нелинейных уравнений (24.40) — (24.41), покажем вначале, как из них можно получить волновое уравнение, описывающее линейный режим распространения волн, изученный подробно ранее.

Линейный режим ($|\delta\rho| \ll \rho_0$, $|\delta p| \ll p_0$). Оставим в уравнениях (24.40) — (24.41) только линейные члены. Тогда получим

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x}; \quad \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \delta p = c_0^2 \delta\rho. \quad (24.42)$$

Исключим две неизвестные функции, например, $\delta\rho$ и δp . Для этого продифференцируем первое уравнение по времени t , а второе дополнительно умножим на c_0^2 и продифференцируем по координате x , а затем вычтем одно уравнение из другого. С учетом третьего уравнения члены, содержащие $\delta\rho$ и δp , сократятся, и мы получим известное нам волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (24.43)$$

описывающее распространение волны гидродинамической скорости без искажений вдоль оси Ox со скоростью c_0 .

Аналогичным образом можно получить волновые уравнения для возмущений давления δp и плотности $\delta\rho$. Не останавливаясь далее на решениях таких уравнений (они обсуждались в предыдущих лекциях), перейдем к нелинейному режиму распространения волн конечной амплитуды.

Нелинейный режим ($|\delta\rho| < \rho_0$, $|\delta p| < p_0$). Вначале попытаемся качественно описать основные черты нелинейного распространения волн, не прибегая к математике. Наиболее просто это сделать, если учесть только физическую нелинейность (24.36). Если вспомнить, что скорость звука $c = \sqrt{dp/d\rho}$, то легко понять, что различные части волны могут двигаться с разными скоростями.

На рис. 24.8 изображена зависимость (24.36), и для трех значений плотности ρ_0 , ρ_1 и ρ_2 проведены касательные к графику функции $p = p(\rho)$, угловые коэффициенты которых равны квадрату скорости распространения волны. Из этого графика можно сделать вывод, что чем выше плотность, тем больше скорость этой части волны.

Если, например, гармоническая волна (волна плотности) распространяется вдоль оси Ox (рис. 24.9), то из-за различия скоростей ее частей форма волны

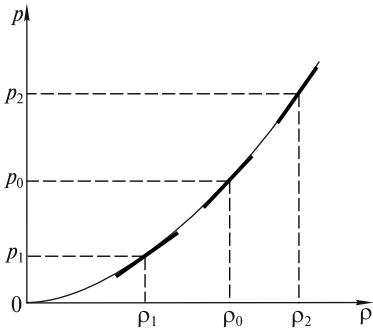


Рис. 24.8

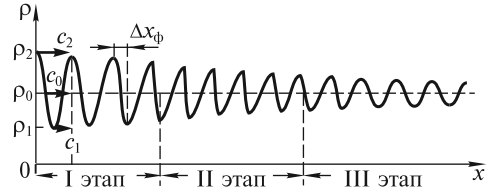


Рис. 24.9

будет постепенно изменяться. На рисунке для простоты показаны лишь три скорости: $c_1 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_1}}$; $c_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0}}$; $c_2 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_2}}$.

Как следует из опыта, при распространении волны можно выделить три этапа.

На I этапе волна трансформируется в пилообразную, обладающую скачком плотности ρ (а также давления p и скорости v). Эта пилообразная волна приобретает ударный фронт, ширина которого Δx_ϕ по мере распространения уменьшается и достигает величины порядка длины свободного пробега молекул газа.

На II этапе происходит нелинейное затухание волны даже при очень малой вязкости и теплопроводности среды. Этот, на первый взгляд, неожиданный эффект связан с переходом в теплоту части кинетической энергии молекул, обладающих гидродинамическими скоростями v . Эти молекулы под действием перепада давления на длине свободного пробега приобретают кинетическую энергию, которая затем переходит в теплоту при неупругих столкновениях. Простейший расчет показывает, что энергия, перешедшая в теплоту, будет существенно больше, чем на I этапе, когда на расстоянии Δx_ϕ происходили многочисленные столкновения. Естественно, что эта тепловая энергия заимствуется у распространяющейся волны.

III этап связан с возрастающим влиянием вязкости и теплопроводности, которые особенно сильны в областях больших перепадов скорости и температуры (вследствие локального адиабатического нагрева или охлаждения при колебаниях газа). Резкие перепады скорости приводят к возрастанию сил вязкости, а перепады температуры на масштабах порядка длины волны влекут отток теплоты из более нагретых областей в менее нагретые. Из-за этих причин часть энергии волны переходит в теплоту, и ее амплитуда уменьшается. Поскольку поглощение звука пропорционально квадрату частоты, быстрее затухают волны высших частот, и волна трансформируется в гармоническую волну с исходной (начальной) частотой.

Рассуждения, приведенные выше, носят качественный характер. Для количественного описания нелинейного распространения волн используем упрощенный подход к анализу системы нелинейных уравнений (24.40) — (24.41). Оговоримся сразу, что, поскольку уравнения Эйлера описывают поведение

невязкой среды, можно будет проанализировать распространение волны лишь на первых двух этапах.

Перепишем уравнения (24.41) в виде

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} = -\delta \rho \frac{dv}{dt} - \rho_0 v \frac{\partial v}{\partial x} - \delta \rho v \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(v \delta \rho),$$
(24.44)

где все нелинейные члены, по порядку величины меньшие линейных, перенесены в правые части уравнений. С учетом малости этих нелинейных членов в нелинейной акустике разработаны приближенные методы решения таких уравнений. Смысл их состоит в получении значительно более простых уравнений, имеющих в ряде случаев несложные аналитические решения. Одно из таких уравнений можно получить относительно просто. Для этого, во-первых, ограничимся вначале лишь кинематической нелинейностью, а, во-вторых, будем предполагать, что между скоростью v и возмущением δp существует такая же связь, как и в линейном режиме:

$$-\varepsilon = \delta p / p_0 = \delta \rho / \rho_0 = v / c_0, \quad (24.45)$$

где ε — относительная деформация элементарного объема газа ($\varepsilon < 0$ при сжатии и $\varepsilon > 0$ при разрежении).

Эта связь позволяет нам ограничиться одним из двух уравнений гидродинамики. Предпочтительнее воспользоваться более простым уравнением непрерывности. При подстановке во второе уравнение (24.44) возмущения плотности $\delta \rho$, пропорционального, согласно (24.45), гидродинамической скорости v , получаем нелинейное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -2v \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (24.46)$$

Заметим, что в линейном режиме, когда правая часть этого уравнения равна нулю, его решением является любая функция вида

$$v(x, t) = f(t - x/c_0), \quad (24.47)$$

описывающая акустическую волну, бегущую без искажения вдоль оси x со скоростью c_0 .

В нелинейном режиме ситуация усложняется. В самом деле, перепишем уравнение (24.46) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + 2v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (24.48)$$

Отсюда видно, что скорость участка волны равна

$$c = c_0 + 2v \quad (24.49)$$

и зависит от гидродинамической скорости частиц. Для фрагмента гармонической волны гидродинамической скорости, изображенного на рис. 24.10, это означает, что синусоидальное распределение скорости вдоль оси Ox трансфор-

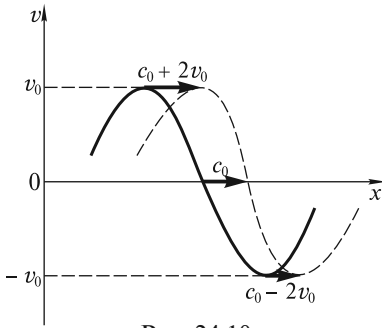


Рис. 24.10

мируется в пилообразное. Следовательно, оба механизма нелинейности способствуют трансформации гармонической волны в пилообразную.

Если с самого начала учесть действие обоих механизмов нелинейности, то из уравнений (24.44) и (24.40) получилось бы уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + \beta v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (24.50)$$

где $\beta = (\gamma + 1)/2$ — параметр, отражающий действие обоих механизмов нелинейности.

Справедливости ради отметим, что формула (24.49) не является точной, поскольку в отсутствие физической нелинейности ($\gamma = 1$) параметр $\beta = 1$, и на самом деле $c = c_0 + v$. Это связано с тем, что была использована связь (24.45), которая для волн конечной амплитуды не является верной.

По аналогии с (24.47), можно записать решение уравнения (24.50) в виде

$$v(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_0 + \beta v}\right). \quad (24.51)$$

Это решение описывает эволюцию простых (римановых) волн. Теперь не составляет труда количественно описать трансформацию гармонической волны в пилообразную. Пусть на входе в среду (при $x = 0$)

$$v(0, t) = f(t) = v_0 \sin \omega t. \quad (24.52)$$

Тогда на расстоянии x

$$v = v_0 \sin \left[\omega \left(\tau + \frac{\beta}{c_0^2} xv \right) \right], \quad (24.53)$$

где $\tau = t - x/c_0$.

Для построения графика зависимости (24.53) перепишем ее в явном виде

$$\omega \tau = \arcsin \frac{v}{v_0} - \frac{x}{l_{\text{нл}}} \frac{v}{v_0}, \quad (24.54)$$

где

$$l_{\text{нл}} = \frac{c_0^2}{\omega v_0 \beta} \quad (24.55)$$

— характерное расстояние, на котором развивается значительное нелинейное искажение волны. Это расстояние сокращается с ростом амплитуды v_0 исходной волны и параметра β .

На рис. 24.11 изображены распределения скорости в пределах одного периода колебаний волны на расстояниях $x = 0$ (1); $x < l_{\text{нл}}$ (2); $x > l_{\text{нл}}$ (3). Из рисунка видно, что синусоидальная волна постепенно превращается в пилообразную, а при $x > l_{\text{нл}}$ в профиле волны появляется неоднозначность. Эта неоднозначность не имеет физического смысла и возникает лишь из-за пренебрежения вязкостью газа. В действительности, при $\omega t = 0$ скорость испытывает скачок,

или разрыв (от величины скорости в точке A до величины скорости в точке B). Положение ударного фронта задается линией AB , которую проводят так, чтобы заштрихованные площади слева и справа от AB были одинаковы (в рассматриваемом случае AB совпадает с осью ординат). Таким построением автоматически учитывается нелинейное затухание волны. Расстояние $l_{нл}$, как нетрудно теперь понять, — это расстояние, на котором у волны появляются разрывы скорости v , плотности ρ и давления δp . К сожалению, без учета вязкости ширина ударного фронта получается равной нулю. В реальной ситуации она конечна и возрастает с увеличением вязкости.

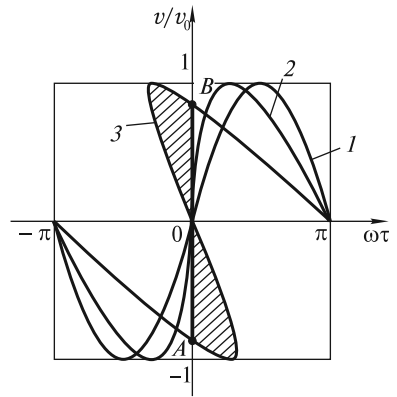


Рис. 24.11

Учет вязкости позволяет описать III этап распространения, однако это выходит за рамки нашего курса.

Говоря об образовании ударного фронта в конце I этапа и последующем нелинейном затухании на II этапе, мы не должны забывать о наличии обычного (линейного) поглощения волны вследствие вязкости среды. Это поглощение характеризуется коэффициентом α [см. формулу (23.19)] и зависит от частоты. Амплитуда волны при линейном поглощении уменьшается по экспоненциальному закону уже на I этапе: $v_0(x) = v_0 e^{-x/l_3}$, где $l_3 = \alpha^{-1}$ — характерное расстояние, характеризующее поглощение звука. Естественно, что уменьшение амплитуды v_0 «притормаживает» процесс искажения профиля волны. Если поглощение таково, что $l_3 < l_{нл}$, то нелинейное искажение может и не проявляться вовсе. В акустике отношение

$$Re = l_3 / l_{нл} \quad (24.56)$$

называют *акустическим числом Рейнольдса*. Если $Re > 10$, то волна считается мощной, и для нее имеет место нелинейное искажение. При $Re < 1$ волна слабая, и ее нелинейное искажение подавляется обычным линейным поглощением.

Если учесть далее, что амплитуда скорости v_0 связана с амплитудой возмущения давления $(\delta p)_0$ акустическим законом Ома, то нелинейная длина будет обратно пропорциональна величине $(\delta p)_0$:

$$l_{нл} = \frac{\rho c_0^3}{2\pi\beta v (\delta p)_0}. \quad (24.57)$$

Следовательно, выражение для акустического числа Рейнольдса имеет вид

$$Re = \frac{l_3}{l_{нл}} = \frac{2\pi l_3 \beta v (\delta p)_0}{\rho c_0^3} = \frac{D (\delta p)_0}{v}. \quad (24.58)$$

Здесь учтено, что, в соответствии с формулой (23.21), $l_3 = \alpha^{-1} \sim v^{-2}$, и использовано обозначение D для группы констант, характеризующих свойства среды.

В качестве примера проведем некоторые оценки, иллюстрирующие распространение звуковой волны в воде, где $D = 300 \text{ (Па}\cdot\text{с)}^{-1}$. При частоте ультразвука $\nu = 1 \text{ МГц}$ расстояние $l_3 = 50 \text{ м}$, и условие $\text{Re} > 10$ выполняется, согласно (24.58), для волн с амплитудой звукового давления $(\delta p)_0 > 30 \text{ кПа}$, или интенсивностью

$$I > \frac{(\delta p)_0^2}{2\rho c_0} = 300 \text{ Вт/м}^2. \quad (24.59)$$

Соответствующий уровень звукового давления $L_p > 180 \text{ дБ}$. Для волн с такими интенсивностями $l_{\text{нл}} < l_3/10 = 5 \text{ м}$, поэтому уже на первых метрах своего распространения ультразвуковая волна будет превращаться в пилообразную, и затем при $x > l_{\text{нл}}$ начнется ее нелинейное затухание.

Из (24.54) с учетом построения ударного фронта (рис. 24.11) следует, что амплитуда пилообразной волны при $\text{Re} \gg 1$ убывает с пройденным расстоянием x по закону

$$\delta p(x > l_{\text{нл}}) = \frac{(\delta p)_0}{1 + x/l_{\text{нл}}}. \quad (24.60)$$

На основании этой формулы можно сделать вывод о том, что величина δp не может превысить некоторого предельного значения, как бы мы ни увеличивали амплитуду гармонической волны $(\delta p)_0$. Действительно, при возрастании $(\delta p)_0$ величина $l_{\text{нл}} \sim 1/(\delta p)_0$ уменьшается, и δp стремится к δp_{max} . Значение δp_{max} может быть получено при одновременном учете линейного поглощения и нелинейного затухания. Оно оказывается равным

$$\delta p_{\text{max}} = \frac{4\nu}{D} e^{-x/l_3}. \quad (24.61)$$

Оценим максимальное значение интенсивности I_{max} , которая может быть передана в воде ультразвуковым лучом с частотой $\nu = 1 \text{ МГц}$ на расстояние $x = 2l_3 = 100 \text{ м}$:

$$I_{\text{max}} = \frac{\delta p_{\text{max}}^2}{2\rho c_0} = \frac{8\nu^2}{\rho c_0 D^2} e^{-2x/l_3} = 1 \text{ Вт/м}^2. \quad (24.62)$$

Таким образом, в условиях, наилучших для возбуждения мощных ультразвуковых волн в воде, на расстояние $x = 100 \text{ м}$ через площадь сечения 1 м^2 можно передать энергию, достаточную лишь для свечения лампочки от карманного фонарика. Это ни в какое сравнение не идет с той энергией, которую посылают ультразвуковые пушки, используемые героями научно-фантастического романа Г. Адамова «Тайна двух океанов», где ультразвуковым лучом якобы повреждают корабли и ракеты.

В связи с вышеизложенным возникает естественный вопрос — а как же объяснить разрушающее действие взрывных ударных волн на большом расстоянии от места взрыва? Ответ на него заключается в том, что взрывная ударная волна представляет собой одиночный импульс, амплитуда δp которого убывает с расстоянием x более медленно, чем у гармонической волны:

$$\delta p(x > l_{\text{нл}}) = \frac{(\delta p)_0}{(1 + x/l_{\text{нл}})^{1/2}}. \quad (24.63)$$

При возрастании в эпицентре взрыва амплитуды импульса $(\delta p)_0$ будет неограниченно увеличиваться и величина δp , которая при большой мощности заряда окажется достаточной для разрушения препятствия.

Надо отметить, что нелинейное затухание тем не менее не ограничивает широкого применения ультразвука в лабораторных условиях, поскольку длина $l_{\text{нл}}$ обычно сравнима с размерами лабораторных акустических систем или превышает их.

До сих пор мы говорили о распространении только одной волны. Однако если распространяются, например, две волны с частотами ω_1 и ω_2 , то нелинейное взаимодействие между ними приводит к появлению волн с другими частотами. Среди них будут волны с кратными частотами $n_1\omega_1$ и $n_2\omega_2$ (гармоники) и волны с комбинационными частотами $n_1\omega_1 \pm n_2\omega_2$ (n_1 и n_2 — целые числа). Все эти волны распространяются с одинаковой скоростью, поэтому они могут эффективно взаимодействовать между собой, проходя большие расстояния. Генерация гармоник и волн с комбинационными частотами имеет многочисленные применения. Проиллюстрируем сказанное на двух примерах.

1. При изучении упругих и прочностных свойств твердых материалов их обычно подвергают большим нагрузкам с помощью специальных прессов, создающих давление, близкое к пределу прочности этих материалов или превышающее его, т.е. десятки тысяч атмосфер. Вместо этой громоздкой и дорогостоящей аппаратуры можно использовать методы нелинейной акустики. Для этого к одному торцу образца исследуемого материала прикрепляют пьезоэлектрический излучатель мощной акустической волны с частотой ω . На другом конце образца помещают такой же пьезоэлектрический преобразователь (приемник звука). Полученный электрический сигнал представляет собой суперпозицию колебаний на частотах ω , 2ω , 3ω и т.д. Говорят, что он состоит из основной, второй, третьей и т.д. гармоник. Сигнал на основной частоте несет информацию о модуле Юнга, так как, согласно закону Гука, деформации пропорциональны приложенным напряжениям. При больших нагрузках связь деформаций и напряжений описывают с использованием нелинейных модулей. Информацию о таких модулях несет амплитуда сигнала с частотой 2ω (вторая гармоника) и т.д.

2. Другим ярким примером использования методов нелинейной акустики является генерация в воде узконаправленных пучков акустических волн. Это осуществляется с помощью параметрических антенн. При рассмотрении явления дифракции волн мы отмечали, что угловая расходимость ϑ звукового пучка тем меньше, чем больше размер l передающего излучателя (антенны). Проблему изготовления огромных излучающих антенн с размерами в десятки метров можно обойти, используя нелинейное взаимодействие двух мощных звуковых волн с близкими частотами ω_1 и ω_2 , распространяющихся в одном направлении. Эти волны излучаются одним пьезоизлучателем с размером $l \approx 10$ см. Обе волны до их затухания пройдут расстояние $L \approx 10^3$ м. В этой протяженной области рождается волна низкой (разностной) частоты $\omega = \omega_2 - \omega_1$, которая затухает гораздо слабее и может пройти очень большие расстояния. Таким

образом, объем воды с малым поперечным размером l и большим продольным размером L представляет собой гигантскую естественную антенну, излучающую звуковой пучок разностной частоты. Расходимость ϑ этого пучка задается выражением:

$$\vartheta = (\lambda/L)^{1/2}. \quad (24.64)$$

При частоте $\nu \approx 1$ кГц, $\lambda \approx 1$ м и при $L \approx 10^3$ м получаем $\vartheta \approx 3 \cdot 10^{-2}$ рад = $1,8^\circ$. Такая чрезвычайно малая расходимость пучка с разностной частотой позволяет с большой точностью проводить разнообразие морские исследования: изучать рельеф дна, обнаруживать скопления рыбы у поверхности и на дне моря, на мелководье — там, где обычные гидролокаторы неэффективны, и т. д.

Уединенные волны (солитоны). В 1834 г. шотландский инженер-кораблестроитель и ученый Дж. Рассел, наблюдая за движением баржи по каналу, которую тащила пара лошадей, обратил внимание на удивительное явление. При внезапной остановке судна масса воды вокруг баржи в узком канале не остановилась, а собралась около носа судна, затем оторвалась от него и в виде большого уединенного водного холма стала двигаться со скоростью около 8 миль в час. Удивительно, что форма холма в процессе его движения практически не менялась. Рассел назвал это движущееся по поверхности воды образование «*great solitary wave*», что в переводе означает «большая уединенная волна». Теоретическое объяснение уединенные волны получили впоследствии в работах французского ученого Ж.В. де Буссинеска и английского физика Дж. Рэлея. Они математически обосновали возможность существования уединенных волн в мелководных каналах.

Уже после смерти Рассела в 1895 г. голландский физик Д. Кортевег и его ученик Г. де Фриз вывели уравнение, описывающее уединенные волны. Это уравнение получило название уравнения Кортевега — де Фриза (уравнение КДФ):

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c_0 \left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{3}{2H} s \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} \right) = 0, \quad (24.65)$$

где $c_0 = \sqrt{gH}$ — скорость волн мелкой воды; H — глубина водоема.

Оно описывает распространение поверхностных гравитационных волн на мелкой воде. Отметим, что по виду уравнение КДФ отличается от нелинейного уравнения (24.50) наличием дополнительного члена $\frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3}$, ответственного за дисперсию гравитационных волн (хотя и небольшую на мелкой воде).

Рассмотрим несколько подробнее влияние нелинейности и дисперсии на распространение поверхностных гравитационных волн. По аналогии с нелинейными акустическими волнами можно сразу сказать, что скорость различных участков поверхностной волны будет различна:

$$c = c_0 \left(1 + \frac{3s}{2H} \right). \quad (24.66)$$

Из-за различия скоростей (гребень волны движется быстрее впадины) происходит превращение гармонической волны в пилообразную. Крутой фронт под действием силы тяжести опрокидывается, и на поверхности воды появля-

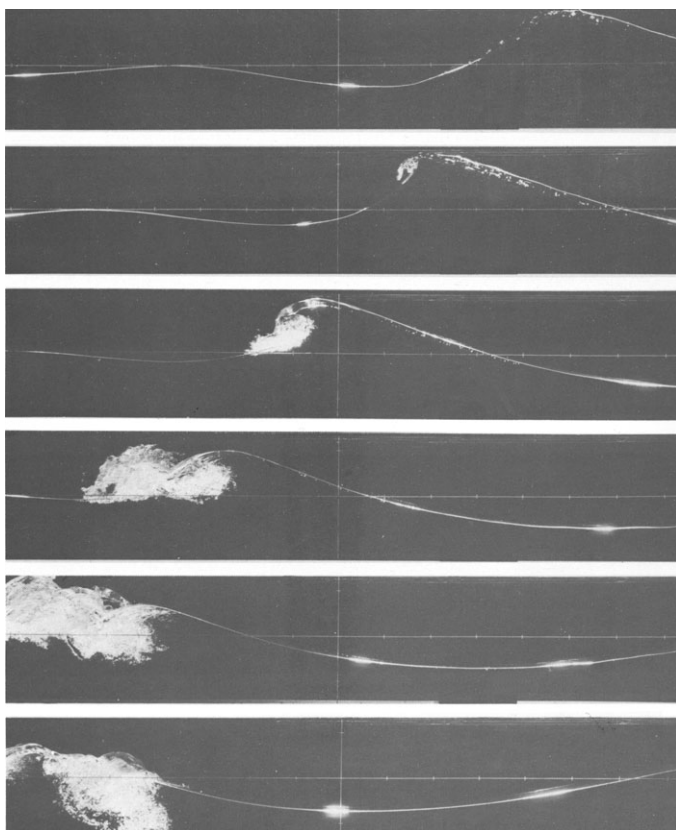


Рис. 24.12

ются пенистые гребешки. Опрокидывание фронта легко наблюдать при движении волны по мелководью вблизи берега (рис. 24.12, волна движется справа налево). Однако в ряде случаев нелинейное искажение волны может компенсироваться дисперсией. В самом деле, пилообразная волна представляет собой набор гармонических волн с разными частотами. Из-за дисперсии эти волны движутся с разными скоростями, и поэтому пилообразный фрагмент волны, подобно импульсу, стремится расшириться. При определенной форме фрагмента оба конкурирующих механизма могут компенсировать друг друга, и тогда по поверхности воды побежит устойчивая структура в виде уединенной волны (солитона). Выясним некоторые свойства этой уединенной волны.

Предположим, что солитон имеет амплитуду s_0 и протяженность вдоль оси x , равную l (рис. 24.13). Оценим величины нелинейного и дисперсионного членов в уравнении КДФ:

$$\frac{3s}{2H} s \frac{\partial s}{\partial x} \sim \frac{1}{H} s_0 \frac{s_0}{l}; \quad \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} \sim -H^2 \frac{s_0}{l^3}. \quad (24.67)$$

Здесь учтено, что на переднем и заднем фронтах холмика $\frac{\partial^3 s}{\partial x^3} < 0$. Естественно, что оба механизма будут компенсировать друг друга при условии

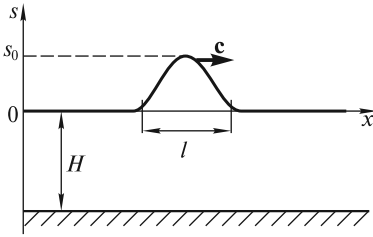


Рис. 24.13

$$\frac{1}{H} s_0 \frac{s_0}{l} - H^2 \frac{s_0}{l^3} \approx 0. \quad (24.68)$$

Это соотношение накладывает связь на амплитуду s_0 и длину l солитона:

$$l^2 \approx H^3/s_0. \quad (24.69)$$

Таким образом, чем больше амплитуда солитона s_0 , тем меньше должна быть его длина l . Скорость солитона c возрастает с увеличением амплитуды, что характерно для нелинейного

распространения волн.

Точное решение уравнения КДФ, описывающее солитон, имеет вид

$$s(x, t) = \frac{s_0}{\text{ch}^2\left(\frac{x - ct}{l}\right)}. \quad (24.70)$$

При этом длина солитона l связана с амплитудой s_0 соотношением

$$l^2 = \frac{4H^3}{3s_0}, \quad (24.71)$$

а скорость солитона равна

$$c = c_0 \left(1 + \frac{s_0}{2H}\right). \quad (24.72)$$

Если $s_0 \ll H$, то последнее выражение можно переписать в виде

$$c = \sqrt{gH} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{s_0}{H}\right) \approx \sqrt{g(H + s_0)}. \quad (24.73)$$

Важно подчеркнуть, что солитон является устойчивым образованием. Если первоначально соотношение (24.71) не выполняется и амплитуда s_0 слишком велика, то водяной холм распадается на несколько меньших холмиков, из которых формируются солитоны. Напротив, если s_0 слишком мала, то такой низкий холм расплывется вследствие дисперсии.

При подходе к берегу достаточно крупный солитон становится выше и короче, его высота становится сравнимой с глубиной океана, и он может привести к образованию цунами.

В заключение отметим, что в настоящее время обнаружены солитоны для волн различной природы. Так, существуют солитоны при распространении акустических волн в кристаллах, световых импульсов в волоконных световодах, ионно-звуковых волн в плазме и др. Во всех случаях существование солитонов обусловлено взаимной компенсацией нелинейных и дисперсионных эффектов. Естественно, что энергия, переносимая уединенной волной любой природы, будет диссипировать в теплоту, поэтому по мере распространения солитона его амплитуда будет стремиться уменьшиться, что, естественно, рано или поздно приведет к его исчезновению.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация света звезд 136, 166
Абсолютно твердое тело 6, 192
— упругое тело 257
Автоколебания 368, 369, 373, 433
Аксонид неподвижный 203
— подвижный 203
Амплитуда 335, 348, 396, 401
Анкер 369
Антициклон 127
Атмосфера 281
— изотермическая 283
— стандартная 284
— техническая 273
Аэростат 285
- Балка** 261
Бел 430
Биения 377, 383, 390
Бинормаль 26
Брахистохрона 39
- Вал** 265
Вектор единичный 24, 32, 35
— Умова 407
Вертикаль 124
Вес 55
Ветер эфирный 137
Вихрь 316, 323, 325
Воздухоплавание 285
Волна 392
— бегущая 392
— внутренняя 449
— гравитационная 441
— капиллярная 447
— Лява 419
— отраженная 414
— падающая 414
— плоская 423
— поперечная 392, 405, 417
— продольная 409, 413, 417
— Рэлея 419
— сейсмическая 417, 419
— стоячая 392, 401, 408
— сферическая 418
— трохоидальная 447
— ударная 329
Волны в жидкостях и газах 419
— в упругих телах 405
— в шнуре 397
— глубокой воды 444
— мелкой воды 445
— на поверхности жидкости 441
Волчок 238, 248, 249
- Время 11, 16, 147
— всемирное 16
— затухания 349
— собственное 148, 159, 171
— установления 354
— эфемеридное 11
Высота звука 426
Вязкость 307
- Геометрия евклидова 7
— неевклидова 8
Геопотенциал 284
Гидрорезание 296
Гиперзвук 420, 424
Гироскоп 238
Год тропический 16
Годограф 23
Градиент 94, 299
График движения 21
Громкость 426, 428
Группа волн 395
- Давление атмосферное 282
— в жидкости 272, 289
— динамическое 292, 320
— звуковое 422, 430
— статическое 292
- Движение абсолютное 36, 113, 115
— вращательное 114, 198, 203, 224
— инфинитное 97, 100
— криволинейное 30
— относительное 36, 113, 114
— переносное 36, 113, 114
— плоское 198, 229
— по окружности 31
— поступательное 113, 194, 199, 205
— ракеты 70
— скачками 58
— тел с переменной массой 69
— финитное 97, 101
- Декремент затухания логарифмический 349
Деформации 251—253, 257
Децибел 430
Диаграмма слуха 430
Дивергенция 297
Динамика 40
Дисперсия 393
— аномальная 394
— нормальная 394
- Дифракция 438
Длина 15, 46, 132, 152
— волны 392
— дифракционная 440

— приведенная 337
— собственная 152
Добротность 350, 365
Дорожка Кармана 323

Единицы внесистемные 14
— основные 14

Жидкость вязкая 308
— идеальная 292, 299, 320
— несжимаемая 274, 289, 297
— сжимаемая 300

Задача двух тел 106
— динамики обратная 51
— — прямая 50
— кинематики обратная 28
— — прямая 18

Закон Амонтон—Кулона 58
— Архимеда 278
— Вебера—Фехнера 428, 430
— всемирного тяготения 90
— Гаука 89, 257
— движения 21, 32, 171
— Дюлонга и Пти 416
— Ньютона второй 50
— — первый 41, 50
— — третий 51
— Ома акустический 304
— Паскаля 273
— сохранения импульса 66, 108, 176
— — механической энергии 96, 103, 110
— — момента импульса 85, 109

Законы Кеплера 35, 83
— сохранения 63, 108

Замедление темпа хода часов 149, 152, 155
Звук 420, 426
Зона застоя 59

Изгиб 261, 269

Излучатели звука 423
Излучение реликтовое 10, 43
Измерение времени 147
— длины 152
— силы 48

Изотропность пространства 109

Импеданс 414

Импульс 63, 64, 66, 178, 184
— момент силы 81
— релятивистский 176, 178, 184
— силы 64
— системы 64, 68

Инвариант 45, 50, 154, 158, 159

Интенсивность волны 408, 423
— звука 421

Интервал 157
— времениподобный 158, 160
— пространственноподобный 158, 160
— светоподобный 157, 160

Интерференция 436
Интерферометр Майкельсона 138
Инфразвук 420, 426
Искажение нелинейное 454, 459
Истечение газа 305

Календарь григорианский 16
— юлианский 16

Камертон 365, 433
Касательная 25
Качение колеса 198, 201, 202
Килограмм 14, 17
Кинематика 18, 192
Когерентность 438
Колебаний сложение 338, 339
— установление 363
Колебания 333
— вынужденные 333, 355, 384
— гармонические 333, 338, 342, 355
— затухающие 347, 351, 382
— негармонические 345
— нормальные 375
— параметрические 366
— противофазные 375
— свободные 333
— синфазные 375
— со многими степенями свободы 385
— тепловые 416

Количество движения 50, 63

Конус Маха 328
— световой 160

Конфигурация моды 377, 385

Координаты 45
— декартовы 19
— полярные 19, 33, 34
— сферические 20, 35, 36, 216
— цилиндрические 20, 35, 36

Коэффициент вязкости 307, 323
— жесткости 55, 267
— затухания 348
— лобового сопротивления 321, 324, 330
— отражения 415
— подъемной силы 324
— пропускания 415
— Пуассона 252
— трения качения 61
— трения скольжения 58

Кривая дисперсионная 393, 444

Кривизна кривой 26
— пространства 8

Кручение 265

Крыло 324

Линия мировая 161, 172
— одновременности 161
— тока 289, 298

Луч световой 8

Масса 17, 47, 53, 179, 183, 185, 186

- приведенная 107
- релятивистская 176
- Масштаб турбулентности 317
- Маятник качания 365
 - крутильный 364
 - математический 31, 80, 334, 343, 345
 - тауохронный 39
 - физический 221, 336
 - Фурада 369
 - Фуко 42
- Мезосфера 283
- Метацентр 279
- Метод векторных диаграмм 338
 - комплексных амплитуд 358
 - триангуляции 8
- Методы акустические 425
- Метр 14, 15
 - геопотенциальный 284
- Механика Ньютона 132
- Мода 375, 388, 402, 416
- Модель физическая 5
- Модуль всестороннего сжатия 261
 - кручения 266
 - сдвига 259, 260
 - Юнга 257, 259, 260
- Моль 14, 17
- Момент импульса 79, 83, 84, 109, 207, 218
 - относительно оси 83, 213
 - инерции 209, 216, 217, 263
 - главный 210
 - осевой 209
 - относительно оси 213, 216, 218
 - центробежный 209
 - силы 80, 83, 224
 - относительно оси 83
 - сопротивления осевой 263
- Мощность 87
- Напряжение допустимое 258
- Напряжения упругие 412
- Нелинейность кинематическая 450
 - физическая 450
- Несинхронность часов 145, 154
- Нормаль 26
- Нормировка потенциальной энергии 93
- Нутация 237, 239, 242
- Обергон 427
- Область застоя 59
- Обтекание крыла 324
 - сверхзвуковое 328
 - тел 319
- Одновременность 46, 157, 161
- Однородность времени 110
 - пространства 108
- Опыт Брэдли 136
 - Майкельсона—Морли 138
 - Физо 136
 - Кеннеди и Торндайка 140
- Росси 150
- Хафеле и Китинга 130, 151
- Орт 24, 26, 33, 115
- Осциллятор 335, 364
- Осцилляторы связанные 380, 386, 416
- Ось вращения 195, 200
 - мгновенная 200, 203, 231
 - инерции главная 210
 - центральная 210
 - свободная 225
- Относительность одновременности 157
- Отражение волны 399
- Парадокс близнецов 172
 - Даламбера 321
- Параметр прицельный 106, 177
- Паскаль 273
- Перемещение 24
- Период 336, 337
 - биений 378
- Плавание тел 278
- Плоскость Минковского 160, 172
 - соприкасающаяся 26
 - фазовая 342
- Плотность 47, 280, 303
 - потока энергии 407
 - силы 280
 - энергии 271, 406
- Поверхность эквипотенциальная 95
- Подобие гидродинамическое 331
- Поле потенциальное 95
 - сил 92
 - стационарное 93, 95
 - центральное 82, 96
- Полюс 199, 205
- Порог болевой 430
 - слышимости 428, 430
- Портрет фазовый 342
- Постоянная гравитационная 90
 - Хаббла 10
- Построение Пуансо 216
- Постулат Эйнштейна 134
- Потенциал Леннарда-Джонса 100
- Поток жидкости 298
 - сверхзвуковой 306, 328
 - энергии 407
- Предел пропорциональности 258
 - прочности 258, 259
 - текучести 258, 259
 - упругости 258
- Преобразование скоростей 46, 163
 - ускорений 46, 168, 169
- Преобразования Галилея 44
 - Лоренца 142, 146
- Прецессия 237, 240
 - регулярная 236
- Принцип относительности Галилея 46, 136
 - Эйнштейна 141
 - суперпозиции 47, 348

- эквивалентности 54, 128
- Пространства искривление 7, 8, 10
- Пространство абсолютное 7, 133
- Пространство-время 4-мерное 7
- Пространство евклидово 7, 9, 11
 - и геометрия 7
- Пружина 267, 409
- Пучность 401
- Работа силы 87, 183, 225, 357
 - гравитационной 90
 - кулоновской 91
 - тяжести 90
 - упругой 89
- Радиус-вектор 23, 32
- Радиус кривизны 26, 27
- Ракета 70, 74, 75
- Растяжение 252, 267, 270, 410
- Расход воды 291, 312
 - топлива 71
- Режим апериодический 351
 - баллистический 362
 - критический 351
- Резонанс 357, 359, 361, 384
- Резонатор акустический 431
 - Гельмгольца 431
- Ротор 316
- Сдвиг 252, 266, 267, 270, 405
- Секунда 14, 16, 17
- Сила 47, 52
 - внешняя 65, 355
 - внутренняя 65, 222
 - вязкого трения 61, 307, 309, 348
 - выталкивающая 278
 - гироскопическая 244
 - гравитационная 52, 90
 - диссипативная 89, 103
 - инерции 120
 - кориолисова 92, 121, 126, 128, 248
 - переносная 121
 - центробежная 121, 124, 126, 276
 - консервативная 88, 91, 95, 102
 - критическая 269
 - кулоновская 54, 91
 - лобового сопротивления 320, 321, 322, 330
 - межмолекулярного взаимодействия 100, 186
 - неконсервативная 88
 - нормального давления 58
 - подъемная 285, 323
 - реактивная 71, 295
 - реакции опоры 262
 - связи 55
 - сопротивления воздуха 76
 - трения покоя 56, 57
 - скольжения 58
 - тяги 71
- тяжести 54, 90
- упругая 55, 89, 93
- центральная 92, 96
- Синхронизация часов 12
- Система замкнутая 66, 85
 - изолированная 66, 185
 - координат 18
 - декартова 19
 - естественная 26
 - полярная 19
 - правовинтовая 19
 - сферическая 20
 - цилиндрическая 20
 - материальных точек 64, 84, 101
 - отсчета 18
 - гелиоцентрическая 41, 43
 - инерциальная 41, 43
 - лабораторная 40, 42, 101
 - локально инерциальная 43
 - неинерциальная 42, 111, 121, 276
 - сопутствующая 169
 - центра масс 68, 101, 107, 165
- Скоростей сложение 36, 114
- Скорость 24, 33, 35, 195, 199, 203
 - абсолютная 37, 114, 116
 - групповая 396, 448
 - звука 302, 304, 421
 - истечения газов 70, 74
 - космическая первая 78, 99
 - вторая 78, 100
 - третья 100
 - относительная 36, 114, 116
 - переносная 36, 114, 116
 - предельная 133
 - прецессии 236, 242
 - радиальная 33, 97
 - сверхзвуковая 306
 - света 134, 137
 - секторная 35, 83
 - средняя 24, 314
 - трансверсальная 33
 - угловая 31, 196, 204
 - фазовая 393, 444, 448
 - характеристическая 74
- Слой пограничный 323
- Смазка граничная 62
 - жидкостная 62
- Смещение красное 129
- Событие 157
- Сокращение длины 141, 153
- Солитон 458
- Соотношение дисперсионное 389, 390, 448
- Сопло Лавала 306, 331
- Сопротивление волновое 414
- Состояния связанные 185
- Сосуд Мариотта 296
- Сосуды сообщающиеся 275
- Спектр акустический 427, 434
- Спектр колебаний 379

- линейчатый 427
- сплошной 427
- Спираль Архимеда 34, 120
- Степени свободы 192, 374, 385
- Степень когерентности 438
- Столкновения 103, 176
- Стратосфера 283, 284, 286
- Стрела времени 13
 - прогиба 265
- Струи частиц 165
- Сутки солнечные 16
 - средние 16
- Таутохрона 38
- Тело отсчета 18
 - твердое 192, 251
 - свободное 205
 - упругое 257
- Тембр 426
- Темп хода часов 13, 112, 130, 145
- Температура Дебая 417
- Тензор деформаций 253, 254
 - инерции 208, 210
 - напряжений 268
- Теорема Гюйгенса—Штейнера 217
 - Кенига 102, 232
 - Кориолиса 119
 - о движении центра масс 68
 - Эйлера 202
- Теория Большого Взрыва 10
 - расширяющейся Вселенной 9
- Термосфера 283
- Течение безвихревое 325
 - жидкости 289
 - ламинарное 313, 315
 - сжимаемого газа 300
 - стационарное 289, 301
 - турбулентное 313, 315
- Течения 128
- Торнадо 287
- Точка критическая 320, 325
 - материальная 6, 18
- Траектория 21, 99, 243, 340
 - фазовая 342, 351, 352
- Трение 56
 - вязкое 61, 307, 347
 - качения 61
 - покоя 56
 - скольжения 58
- Тропосфера 282, 284, 287
- Труба аэродинамическая 331
- Трубка тока 290, 293
- Турбулентность 313, 315, 316, 323
- Углы Эйлера 194, 204
- Угол атаки 319, 324, 326
 - сдвига 252, 405
- Узел 401, 409
- Ультразвук 422, 424—426
- Уравнение адиабаты 302
 - бегущей волны 393, 397
 - Бернулли 291, 292, 301
 - волновое 398, 399, 406, 411, 420
 - вынужденных колебаний 354
 - гармонических колебаний 81, 335, 336
 - движения 50, 72, 121, 222, 334, 380, 411
 - релятивистское 179, 180
 - центра масс 68, 222, 229
 - затухающих колебаний 347
 - Кортвега—де Фриза 458
 - Лапласа 442
 - материальное 301, 420, 421
 - моментов 80, 222, 223, 229
 - Мещерского 72
 - Навье—Стокса 309
 - неразрывности 297, 299, 300
 - стоячей волны 401
 - характеристическое 348, 443
 - Эйлера 290
- Уравнение Максвелла 137
 - Эйлера 204, 235, 299, 301, 441
- Ускорение 28, 29, 36, 40, 168, 203, 205
 - абсолютное 115, 118, 120
 - кориолисово 34, 118, 120, 248
 - нормальное 29, 32, 202
 - относительное 114, 118, 120
 - переносное 114, 118, 120
 - радиальное 34
 - свободного падения 30, 53, 54, 91, 123, 125, 129, 284, 337
 - среднее 27
 - тангенциальное 29, 198, 202
 - трансверсальное 34
 - угловое 32, 197
 - центростремительное 32, 118, 198, 203, 205
- Ускорений сложение 116, 119
- Ускоритель на встречных пучках 153, 164
- Условие Жуковского—Чаплыгина 325
 - несжимаемости 289, 296, 297, 442
- Устойчивость вращения 225, 249
 - упругого равновесия 268
- Фаза 338, 359
 - волны 393
 - начальная 335, 338, 389
- Фактор лоренцовский 146, 164, 182
- Ферма 265
- Фигура Лиссажу 340
- Фонон 416, 417
- Формула барометрическая 283
 - Жуковского 326
 - Лапласа 304
 - Пуазейля 310, 312
 - Стокса 322
 - Торричелли 294, 296
 - Циолковского 73
 - Эйлера 32, 197, 269, 348

- Формулы Пуассона 115
Функция потенциальная 274, 276
- Характеристика амплитудная 359, 385
— фазовая 359
- Центр качания 228
— кривизны 27, 249
— масс 67, 107, 218, 279
— силовой 82
— удара 227
- Циклоида 21, 38, 198
Циклон 127
Циркуляция 316, 325, 326
Цунами 449
- Частица нестабильная 147, 162
— релятивистская 149, 165
- Частота 336, 431, 435
— нормальная 375, 376, 382, 386, 387, 403
— парциальная 376, 382
— угловая 335, 338
- Часы 11, 18
— атомные 11, 130
- Число Авогадро 217
— волновое 387, 392
— Маха 329, 332
— Рейнольдса 309, 310, 313, 317, 321, 332
— акустическое 455
- Эллипсоид инерции 214, 215
- Энергия кинетическая 88, 101, 183, 188, 225, 231, 293, 349
— механическая 96, 103
— переносимая волной 406
— покоя 183, 185, 188
— потенциальная 93, 100, 102, 281
— связи 187
— упругих деформаций 270
- Эталон времени 17
— длины 15
— массы 17
- Эфир мировой 7, 133
- Эффект бинауральный 435
— Доплера 130, 434
— Магнуса 327
— экранный 328
- Явление заноса 60
— застоя 59

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Раздел 1. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА

Лекция 1 5

Задача механики (5). Модельный характер физических представлений (5). Пространство и геометрия (7). Время (11). Синхронизация часов (12). Необратимость времени (13). Физические величины и их измерение (14). Эталоны основных механических величин (15)

Лекция 2 18

Задача кинематики (18). Материальная точка (18). Тело отсчета (18). Система координат (18). Система отсчета (18). Траектория (21). Способы задания движения точки (21). Перемещение (24). Скорость (24). Ускорение (26). Нормальное и тангенциальное ускорения (29). Движение по окружности (31). Скорость и ускорение точки в полярных координатах (32). Теорема о сложении скоростей (36)

Лекция 3 40

Инерциальные системы отсчета (40). Первый закон Ньютона (40). Локально инерционная система отсчета (43). Преобразования Галилея (44). Принцип относительности Галилея (46). Сила (47). Масса (47). Второй закон Ньютона (47). Третий закон Ньютона (51). Силы в механике (52)

Лекция 4 63

Количество движения (импульс) материальной точки (63). Импульс силы (63). Импульс системы материальных точек (64). Изменение импульса под действием внешних сил (64). Закон сохранения импульса (66). Центр масс (67). Теорема о движении центра масс (67). Система центра масс (68). Движение тел с переменной массой (69). Уравнение Мещерского (69). Формула Циолковского (72). Момент количества движения (импульса) материальной точки (79). Уравнение моментов (79). Момент импульса и момент силы относительно оси (83). Момент импульса системы материальных точек (84). Закон сохранения момента импульса (85)

Лекция 5 87

Работа силы (87). Мощность (87). Кинетическая энергия и ее изменение (88). Консервативные и неконсервативные силы (88). Работа упругой силы (89). Работа гравитационной силы (90). Работа кулоновской силы (91). Поле сил (92). Потенциальная энергия частицы в поле (93). Потенциальное поле сил (95). Полная механическая энергия частицы (95). Движение в центральном силовом поле (96). Механическая энергия системы материальных точек (101). Закон сохранения механической энергии (103). Столкновения (103). Задача двух

тел (задача Кеплера) (106). Законы сохранения и симметрия пространства и времени (108)

Лекция 6 111

Неинерциальные системы отсчета (111). Связь скоростей материальной точки в неподвижной и движущейся системах отсчета (113). Относительное, переносное и абсолютное движение (113). Сложение ускорений (116). Силы инерции (120). Проявления сил инерции (122). Принцип эквивалентности (129)

Раздел 2. ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Лекция 7 132

Исходные положения механики Ньютона (132). Предельная скорость распространения взаимодействий (133). Принцип относительности (135). Гипотеза о сокращении длин движущихся тел (141). Преобразования Лоренца (142)

Лекция 8 147

Измерение времени при движении с околосветовыми скоростями (147). Замедление темпа хода движущихся часов (149). Сокращение продольных размеров движущихся тел (152). Нарушение синхронности хода совокупности движущихся часов (154). Интервалы (157). Пространство Минковского (160)

Лекция 9 162

Преобразования скоростей (162). Ускорители на встречных пучках (164). Струи частиц (165). Аберрация света звезд (166). Преобразования ускорений (168). Сопутствующая система отсчета (169). Парадокс близнецов (172)

Лекция 10 176

Релятивистские импульс и масса (176). Релятивистское уравнение движения (179). Работа силы и энергия частицы (183). Энергия, импульс и масса системы свободных частиц (184). Связанные состояния системы взаимодействующих частиц (185). Взаимопревращения энергии покоя и кинетической энергии (188)

Раздел 3. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Лекция 11 192

Кинематика абсолютно твердого тела (192). Степени свободы (192). Углы Эйлера (192). Поступательное движение (194). Вращение вокруг неподвижной оси (195). Плоское движение (198). Движение твердого тела с одной неподвижной точкой (202). Движение свободного твердого тела (205)

Лекция 12 206

Динамика абсолютно твердого тела (206). Момент импульса (207). Тензор инерции (207). Главные оси инерции (210). Момент импульса твердого тела отно-

сительно оси (213). Момент инерции относительно оси (213). Эллипсоид инерции (214). Вычисление моментов инерции (216). Теорема Гюйгенса — Штейнера (217). Момент импульса относительно движущегося центра масс (218)

Лекция 13 221

Уравнения динамики твердого тела (221). Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (224). Кинетическая энергия вращающегося тела и работа внешних сил (225). Свободные оси (225). Устойчивость свободного вращения (225). Центр удара (227). Плоское движение твердого тела (229). Кинетическая энергия при плоском движении (231). Движение аксиально симметричного твердого тела с неподвижным центром масс (232). Уравнения Эйлера (233)

Лекция 14 238

Гироскопы (238). Свободный гироскоп (238). Прецессия гироскопа под действием внешних сил (240). Угловая скорость прецессии (240). Нутации (242). Гироскопические силы (244). Волчки (248). Устойчивость вращения симметричного волчка (249)

Раздел 4. МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Лекция 15 251

Деформации твердого тела (251). Элементарные деформации (252). Коэффициент Пуассона (252). Понятие о тензоре деформаций (253). Упругие деформации (257). Модули Юнга и сдвига (257). Изгиб балок (261). Кручение валов (265). Понятие о тензоре напряжений (268). Устойчивость упругого равновесия (268). Энергия упругих деформаций (270)

Лекция 16 272

Жидкость и газ в состоянии равновесия (272). Условия равновесия (272). Закон Паскаля (272). Жидкость в поле внешних сил (273). Закон Архимеда (278). Плавание тел (278). Равновесие газов (280). Распределение плотности и давления в атмосфере (281). Воздухоплавание (285). Центрифугирование (286). Торнадо (287)

Лекция 17 289

Стационарное течение несжимаемой жидкости (289). Условие несжимаемости (289). Уравнение Бернулли (291). Дифференциальная форма условия несжимаемости (296). Понятие о дивергенции вектора (296). Уравнения Эйлера для идеальной жидкости (299). Течение сжимаемой жидкости (300). Распространение возмущений давления и плотности (303). Истечение сжатого газа через сопло (305)

Лекция 18 307

Силы вязкого трения (307). Течение вязкой жидкости (308). Уравнение Навье — Стокса (308). Число Рейнольдса (309). Формула Пуазейля (310). Ламинарное и турбулентное течение (312). Турбулентность атмосферы (316). Обтекание тел потоком жидкости (319). Лобовое сопротивление (319). Подъемная сила (323). Формула Жуковского (323). Эффект Магнуса (327). Экранный эф-

фekt (328). Сверхзвуковое обтекание тел (328). Гидродинамическое подобие (331)

Раздел 5. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Лекция 19 333

Незатухающие гармонические колебания систем с одной степенью свободы (333). Метод векторных диаграмм (338). Сложение взаимно перпендикулярных колебаний (339). Фазовый портрет колебательной системы (342). Негармонические колебания математического маятника (345). Свободные колебания в диссипативных системах с вязким трением (347). Затухание колебаний в системах с сухим трением (351)

Лекция 20 354

Вынужденные колебания под действием гармонической силы (355). Режим медленных колебаний (356). Режим быстрых колебаний (356). Резонансный режим (357). Метод комплексных амплитуд (358). Амплитудные и фазовые характеристики (358). Баллистический режим колебаний (363). Установление колебаний (363). Характеристики различных колебательных систем (364). Параметрические колебания (366). Автоколебания (368). Маятник на вращающемся валу (маятник Фруда) (369)

Лекция 21 374

Свободные незатухающие колебания в системах с двумя степенями свободы (374). Нормальные колебания (моды) (374). Парциальные и нормальные частоты (376). Биения (377). Спектр колебаний (379). Методика анализа колебаний двух связанных осцилляторов (380). Соотношение между парциальными и нормальными частотами (382). Затухание колебаний (382). Энергия колебательной системы и ее диссипация (383). Вынужденные колебания (384). Резонанс (384). Колебания систем со многими степенями свободы (385)

Лекция 22 390

Распространение возмущений в системе с большим числом степеней свободы (390). Возбуждение волн (392). Группа волн (395). Групповая скорость (395). Волны в сплошном шнуре (397). Волновое уравнение (397). Отражение волны на конце шнура (399). Возбуждение стоячих волн в шнуре (402). Моды колебаний (402). Волны в упругих телах (405). Поперечные волны (405). Энергия, переносимая волной (406). Вектор Умова (406). Продольные волны (409). Скорость волн в тонком стержне (411). Скорость волн в толстом стержне (412). Явления на границах двух сред (413). Волновое сопротивление (413)

Лекция 23 416

Тепловые колебания кристаллической решетки твердых тел (416). Акустические фононы (416). Объемные сейсмические волны (417). Современная модель Земли (417). Поверхностные сейсмические волны (419). Волны в жидкостях и газах (419). Звук (420). Интенсивность звука (421). Поглощение звука (422). Излучатели звука (423). Применение акустических методов (425). Основные характеристики звука (426). Закон Вебера—Фехнера (428). Диаграм-

ма слуха (428). Акустические резонаторы (431). Музыкальные инструменты (433). Эффект Доплера (434). Бинауральный эффект (435). Интерференция волн (436). Дифракция волн (438)

Лекция 24 441

Волны на поверхности жидкости (441). Гравитационные волны (441). Капиллярные волны (447). Цунами (449). Внутренние волны (449). Акустические волны большой амплитуды (449). Линейный режим (451). Нелинейный режим (451). Уединенные волны (солитоны) (458)

Предметный указатель 461

Учебное издание

АЛЕШКЕВИЧ Виктор Александрович
ДЕДЕНКО Леонид Григорьевич
КАРАБАЕВ Владимир Александрович

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ. МЕХАНИКА

Редактор *Т.Ф. Мельникова*
Оригинал-макет: *Г.Ю. Никитина*
Оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 10.12.10. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 38,5. Уч.-изд. л. 42. Тираж 700 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-1271-0



9 785922 112710