Л. В. АССУРЪ.

СХЕМЫ
ГЕОМЕТРИЧЕСКАГО ПОСТРОЕНІЯ
нѣкоторыхъ кривыхъ.

Пособіе при обученіи черченію

Петроградъ.
Типо-Литографія Н. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.
1916.

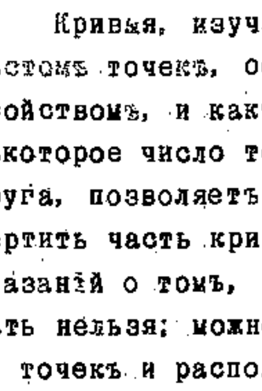
ПРЕДИСЛОВІЕ

Настоящее руководство получило свое начало въ непосредственныхъ моихъ занятіяхъ со студентами перваго семестра Петроградскаго Политехническаго Института, гдѣ обученіе черченію начинается съ примѣненія лекалъ и дугъ окружностей къ вычерчиванію кривыхъ, предполагая, что поступающіе въ Институтъ предварительно уже знакомы, или сами ознакомятся съ вычерчиваніемъ прямыхъ линій. Мнѣ казалось, что приводя нѣкоторые менѣе употребительные пріемы вычерчиванія кривыхъ второго порядка и не ограничиваясь обычно приводимыми въ руководствахъ построеніями циклоидъ и простѣйшихъ спиралей, можно не только достигнуть большаго разнообразія въ матеріалѣ и интереса со стороны учащихся, но и обратить вниманіе ихъ на различныя особенности нѣкоторыхъ кривыхъ, на разнообразіе формъ одной и той же кривой, въ зависимости отъ условій заданія и на необходимость общихъ пріемовъ аналитическаго или геометрическаго изслѣдованія кривыхъ. Въ особенности въ этомъ направленіи оказались плодотворными приводимыя здѣсь построенія краніоиды и каприкорноиды. Съ другой стороны, принимая во вниманіе прямую цѣль руководства, пришлось изъ рамокъ его исключить кривыя, построеніе точекъ которыхъ сопряжено съ болѣе сложными пріемами, въ родѣ графическихъ умноженія, дѣленія или возведенія въ степень, и ограничиться лишь такими кривыми, пріемы построенія которыхъ быстро и наглядно приводятъ къ цѣли.

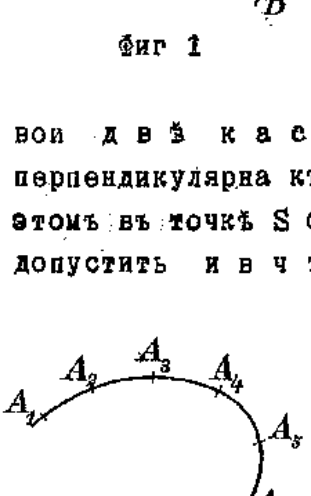
Само названіе предлагаемаго руководства показываетъ, что здѣсь не приводятся изображенія самихъ кривыхъ, а лишь схемы построенія ихъ, предоставляя самому учащемуся соединить полученныя точки въ кривую или различныя вѣтви одной и той же кривой, или же очертить форму искомой кривой методомъ огибающихъ.

ВВЕДЕНІЕ

Кривыя, изучаемыя въ геометріи, являются геометрическимъ мѣстомъ точекъ, обладающихъ тѣмъ или другимъ специфическимъ свойствомъ, и какъ таковыя могутъ быть построены по точкамъ. Нѣкоторое число точекъ кривой, достаточно близкихъ другъ отъ друга, позволяетъ съ большимъ или меньшимъ приближеніемъ вычертить часть кривой или даже всю кривую. Какихъ-либо общихъ указаній о томъ, сколько точекъ для этого необходимо найти, дать нельзя; можно только сказать, что желательно, чтобы число точекъ и расположеніе ихъ было выбрано такъ, чтобы возможная ошибка была нѣсколько меньше неизбѣжныхъ неточностей чертежа. Принимая во вниманіе послѣднее соображеніе, можно замѣнить искомую кривую рядомъ сопрягающихся между собою дугъ окружностей, которыя проводятся циркулемъ. Сопрягая двѣ дуги AS и SB окружностей разныхъ радіусовъ въ точкѣ S въ плавную кривую, необходимо помнить, что центры O и O_1 обѣихъ дугъ (фиг. 1) и точка сопряженія S должны лежать на **одной прямой**; въ противномъ случаѣ въ точкѣ S можно было бы провести къ кривой **двѣ касательныхъ**, изъ которыхъ одна будетъ перпендикулярна къ радіусу OS, другая - къ радіусу O_1S, при этомъ въ точкѣ S былъ бы замѣтенъ изломъ. Практически возможно допустить **ничтожныя** отступленія отъ этого правила, такъ чтобы уголъ между двумя радіусами былъ настолько малъ, чтобы происходящая отсюда неправильность оставалась на глазъ совершенно незамѣтной.



Фиг 1



Фиг 2

Пользуясь извѣстнымъ изъ геометріи построеніемъ окружности по тремъ ея точкамъ, можно найти сначала окружность, проходящую черезъ три точки кривой A_1,

A_2, A_3 (фигура 2-ая) и провести дугу ея черезъ A_1 A_2, не доводя до A_3, затѣмъ опредѣлить окружность, проходящую черезъ A_2, A_3, A_4, и провести дугу ея черезъ A_3, не доводя до A_4 и сопрягая съ предыдущей между A_2 и A_3, потомъ воспользоваться точками A_3, A_4, A_5 и т.д. При этомъ необходимо слѣдить за тѣмъ, чтобы соблюдалось съ достаточной точностью правило сопряженія дугъ; если послѣдняго не удается достигнуть, необходимо построить между двумя найденными точками кривой еще одну или нѣсколько промежуточныхъ.

Гораздо быстрѣе, при нѣкоторомъ навыкѣ, приводитъ къ цѣли слѣдующій практическій пріемъ. Пользуясь найденными точками намѣчаютъ кривую отъ руки въ карандашѣ. Оцѣнивъ предварительно на глазъ радіусъ окружности, которой можно было бы замѣнить дугу A_1A_2 кривой, берутъ его въ раствореніе измѣрительнаго циркуля, одну ножку котораго ставятъ въ A_1, а другой, методомъ пробъ, подыскиваютъ центръ окружности намѣченнаго радіуса, проходящей черезъ A_1 и A_2. Убѣдившись, что намѣченный радіусъ либо малъ (дуга окружности проходитъ съ выпуклой стороны дуги кривой) либо великъ (дуга окружности проходитъ съ вогнутой стороны дуги кривой), измѣняютъ въ соотвѣтственномъ направленіи величину отверстія циркуля, повторяя тотъ же пріемъ, пока не удастся выбрать радіусъ такъ, чтобы дуга окружности сливалась не только съ отрѣзкомъ дуги A_1A_2 кривой, но и съ частью отрѣзка A_2A_3. Если это достигнуто, можно перейти къ изысканію центра окружности, замѣняющей дугу A_2A_3. Намѣтить соотвѣтственный радіусъ бываетъ тѣмъ легче, что въ силу правила сопряженія дугъ извѣстна прямая, на которой (или вблизи которой) лежитъ центръ этой окружности. Необходимо слѣдить, чтобы дуга новой окружности сливалась въ началѣ съ прилегающими справа и слѣва къ ней дугами A_1A_2 и A_3A_4 кривой. Невозможность найти подходящую окружность указываетъ на необходимость построить между двумя найденными точками кривой еще одну или нѣсколько дополнительныхъ.

Отдавая какой-либо чертежъ для исполненія въ мастерскую, необходимо для всѣхъ криволинейныхъ очертаній отмѣтить какъ радіусы, такъ и центры тѣхъ окружностей, сопряженіемъ которыхъ данное криволинейное очертаніе образуется. Такимъ образомъ, способъ очертанія кривыхъ дугами окружностей является наиболѣе естественнымъ для техника. Тѣмъ не менѣе, съ одной стороны ради сохраненія времени, съ другой - вслѣдствіе затрудненій, возникающихъ при употребленіи дугъ большихъ радіусовъ пользуются различными лекалами. Въ особенности слѣдуетъ имѣть въ виду, что по лекаламъ съ удобствомъ вычерчиваются лишь части кривыхъ съ большими и средними радіусами кривизны, въ то время, какъ части кривой съ малыми радіусами кривизны, лишь съ трудомъ поддаются очертанію по лекаламъ, и гораздо удобнѣе и чище обводить ихъ циркулемъ. Поэтому маленькія лекалы съ кривыми большой, сравнительно, кривизны слѣдуетъ признать не удовлетворяющими цѣли. Необходимо на лекалахъ имѣть хоть одну кривую, которая на протяженіи 120-150 м/м можетъ безъ замѣтнаго на глазъ ущерба, быть замѣнена своими хордами, длиною въ 30-35 м/м. и затѣмъ постепенно пріобрѣтаетъ большую кривизну.

При вычерчиваніи нѣкоторыхъ кривыхъ приходится вычислять и откладывать длину всей или части окружности, при чемъ учащіеся обычно обращаются съ вопросомъ, съ какой точностью брать число π. Принимая во вниманіе, что 0,1 м/м должна считаться предѣломъ точности чертежа, слѣдуетъ брать такое число знаковъ въ выраженіи π, чтобы въ результатѣ ошибка въ длинѣ дуги была равна или меньше 0,1 м/м Казалось бы очевиднымъ, что для цѣлей исполнительныхъ нѣтъ смысла вычислять искомую величину, какъ съ большей, такъ и съ меньшей точностью, чѣмъ та, которую возможно осуществить.

Считаю не излишнимъ указать здѣсь же, что вмѣсто построенія заданныхъ угловъ по скверненькому транспортиру, гораздо раціональнѣе пользоваться таблицами, дающими при радіусѣ равномъ единицѣ длины хордъ, соотвѣтствующихъ данному центральному углу. (Справочная книжка Hütte; таблицы логарифмовъ Пржевальскаго и пр.). Такъ, напримѣръ, находимъ, что центральному углу въ 37° 15' соотвѣтствуетъ хорда 0,6387. Описавъ окружность радіусомъ 200 м/м, находимъ, что хорда, на которую опирается данный центральный уголъ равна 200 × 0,6387 126,7 м/м.

Нѣсколько менѣе удобно, но не менѣе точно, построеніе угловъ по тангенсу.

Число дѣленій окружностей или отрѣзковъ прямыхъ, встрѣчающееся въ нижеизложенныхъ схемахъ, въ виду того, что имѣлось въ виду дать только схему построенія, взято значительно меньше чѣмъ необходимо при дѣйствительномъ исполненіи задачи. Учащіеся надлежащимъ образомъ учтутъ это обстоятельство.

Что касается выполненія чертежей съ чисто внѣшней стороны, то въ Петроградскомъ Политехническомъ Институтѣ установлены слѣдующія нормы. Искомая кривая вычерчивается черною тушью толстымъ штрихомъ ($1/2$ - $3/4$ мм.), кривыя или фигуры, очерченныя въ руководствѣ сплошною чертою - чернымъ штрихомъ средней толщины, построенія - тонкимъ пунктиромъ въ которомъ черта должна быть длиннѣе промежутка, размѣрныя линіи - краснымъ сплошнымъ штрихомъ средней толщины съ черными стрѣлками по концамъ, выноски къ размѣрнымъ линіямъ - такимъ же синимъ штрихомъ. Синимъ же штрихомъ проводятся оси симметріи, обозначенныя въ руководствѣ чертой и точкой.

Н а б о р ъ у г о л ь н и к о в ъ. Можно порекомендовать учащимся пріобрѣсти слѣдующій наборъ угольниковъ 1) одинъ деревянный угольникъ, примѣрно съ катетами 120 × 300 мм. или нѣсколько больше, 2) гуттаперчевые угольники, только не чернаго цвѣта: два съ углами 30° и 60° и длиною большаго катета въ 200 и 300 мм. (послѣдній можно пріобрѣсти впослѣдствіи) и одинъ съ углами въ 45 и длиною катетовъ въ 180 м/м. Кромѣ того необходимо пріобрѣсти р е ш и н у (испорченное нѣмецк. слово Reissschiene), т.е. Т - образную линейку, служащую для проведенія прямыхъ, перпендикулярныхъ краю доски. Решина съ винтомъ представляетъ иногда нѣкоторыя удобства, но не необходима; при покупкѣ послѣдней, слѣдуетъ выбрать конструкцію, не содержащую металлическихъ частей, кромѣ винта.

В ы б о р ъ г о т о в а л ь н и. Можно рекомендовать готовальню системы Riffler'a или Richter'a (Praecision). Послѣдняя немного дешевле, но, пожалуй, нѣсколько менѣе устойчива. М и н и м а л ь н ы й наборъ приборовъ слѣдующій. 1 измѣрительный циркуль, 1 циркуль съ тремя вставками: для карандаша, для рейсфедера и для удлиненія одной ножки; 1 нулевой циркуль (закрепочникъ), для проведенія окружностей весьма малаго радіуса, съ двумя вставками. для карандаша и для рейсфедера. 1 рейсфедеръ для проведенія прямыхъ. Желающіе пріобрѣсти готовальню большихъ размѣровъ могутъ присоединить небольшой измѣрительный циркуль, отверстіе котораго устанавливается микрометреннымъ винтомъ (необходимъ при мелкомъ архитектурномъ черченіи) и второй рейсфедеръ.

I. КРИВЫЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

1. ПОСТРОЕНІЕ ЭЛЛИПСА ПО ДВУМЪ ГЛАВНЫМЪ ОСЯМЪ ЕГО a И b.

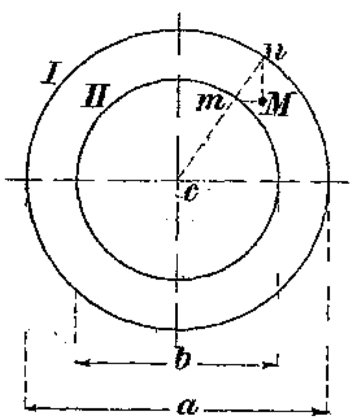
(фиг. 3).

Построивъ двѣ концентрическія окружности I и II съ діаметрами a и b, изъ общаго центра c проводимъ произвольный лучъ, пересѣкающій окружности въ точкахъ m и n. Проведя изъ m горизонталь, изъ n - вертикаль, въ пересѣченіи ихъ получаемъ одну изъ точекъ M эллипса. Повторяя построеніе для различныхъ лучей изъ c, опредѣляемъ столько точекъ, сколько необходимо для построенія кривой. Лучи изъ c желательно приводить по какому-либо опредѣленному закону, напримѣръ, подъ равными углами, и затѣмъ уже, если гдѣ окажется надобность, дополнить построеніе нѣкоторыми добавочными лучами

ЗАДАЮТСЯ a и b.

2. ПОСТРОЕНІЕ ЭЛЛИПСА, ВПИСАННАГО ВЪ ПАРАЛЛЕЛОГРАММЪ.

(фиг. 4).



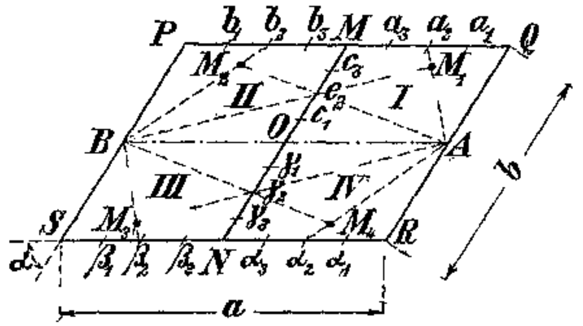
Фиг. 3.

Проведя равнодѣлящіе AB и MN противоположныхъ сторонъ параллелограмма, дѣлимъ площадь его на четыре подобныхъ ему части, которая называемъ I, II, III, IV. Двѣ противоположныя стороны PQ и SR и ихъ равнодѣлящую, дѣлимъ на одинаковое и притомъ четное число равныхъ частей, которыя нумеруемъ въ порядкѣ указанномъ на чертежѣ. Каждое дѣленіе равнодѣлящей MN даетъ возможность найти двѣ точки кривой. Взявъ для примѣра дѣленіе c_2 и отмѣтивъ концы A и B второй равнодѣлящей въ пересѣченіи лучей Bb_2 и Ac_2 находимъ точку кривой M_2, а въ пересѣченіи лучей Aa_2 и Bc_2 находимъ точку M_1 равнымъ обра -

зонѣ лучи Ay_2 и BB_2 даютъ точку M_3. Совершенно аналогично пользуемся остальными точками дѣленій.

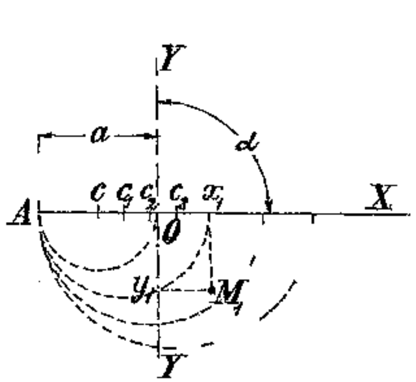
Задаются a, b и $\angle \alpha$.

3. ПОСТРОЕНІЕ ПАРАБОЛЫ ПО УДВОЕННОМУ ПАРАМЕТРУ a. (фиг.5)



Фиг. 4.

Даются взаимно перпендикулярныя прямыя УУ и ОХ и на послѣдней точка А на разстояніи а отъ первой. Находимъ центръ с окружности касательной къ УУ и проходящей черезъ А, и откладываемъ на АХ точки c_1, c_2, c_3 произвольно, напримѣръ, на равныхъ разстояніяхъ другъ отъ друга. Изъ каждой такой точки, какъ центра, описываемъ окружность (на черт. показана лишь полуокружность) и изъ точекъ пересѣченія ея съ прямыми УУ и ОХ проводимъ параллели къ послѣднимъ, которыя своимъ пересѣченіемъ опредѣляютъ точку кривой.



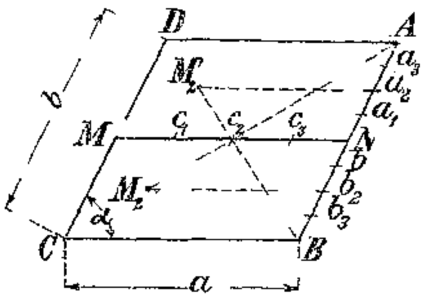
Фиг.5.

ПРИМѢЧАНІЕ I. Текстъ предыдущаго построенія изложенъ такимъ образомъ, что его можно примѣнить къ случаю, если уголъ α между данными прямыми не равенъ 90°. Въ послѣднемъ случаѣ построенная кривая не только не будетъ параболой, но и вообще кривой второго порядка.

ПРИМѢЧАНІЕ 2. Кривая въ томъ и другомъ случаѣ удаляется въ безконечность и поэтому можно вычертить лишь часть ея. Чертежъ окружностей, проходящихъ черезъ одну точку при вычерчиваніи ихъ пунктиромъ можетъ быть полученъ достаточно чисто, если сначала провести наименьшую и наибольшую изъ нихъ, а затѣмъ уже въ послѣдовательномъ порядкѣ остальныя.

ЗАДАЮТСЯ а и $\angle\alpha$

4. ПОСТРОЕНІЕ ПАРАБОЛЫ СЪ ПОМОЩЬЮ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА (фиг.6).

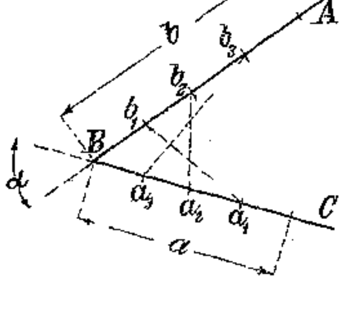


Фиг 6

Равнодѣлящую MN двухъ сторонъ параллелограмма и сторону AB ей не параллельную дѣлимъ на равныя части, такъ чтобы во второй ихъ уложилось вдвое болѣе, чѣмъ въ первой и нумеруемъ ихъ въ порядкѣ указанномъ на чертежѣ. Каждая точка равнодѣлящей служитъ для построенія двухъ точекъ кривой, лежащихъ на лучахъ соотвѣтственно проведенныхъ изъ A и B. Проводя, напримѣръ, лучъ Bc_2 находимъ на немъ точку M_2^1 въ пересѣченіи съ параллелью къ равнодѣлящей изъ a_2; на лучѣ же Ac_2, находимъ M_2, проводя параллель къ ней же изъ b_2. Кривая касается стороны параллелограмма въ M и проходитъ черезъ точки A и B. Точки ея, лежащія внѣ параллелограмма, легко получить, продолжая дѣленія на сторонѣ и на равнодѣлящей за предѣлы послѣдняго.

ЗАДАЮТСЯ: a, b и $\angle\alpha$

5 ПОСТРОЕНІЕ ПАРАБОЛЫ МЕТОДОМЪ ОГИБАЮЩИХЪ ЕЕ ПРЯМЫХЪ (фиг.7)



Фиг.7

На сторонахъ угла α откладываемъ данные отрѣзки a и b, дѣлимъ ихъ на одинаковое число равныхъ частей, нумеруемъ ихъ въ порядкѣ, указанномъ на чертежѣ и проводимъ прямыя a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 и т. д. Всѣ эти прямыя, равно какъ и стороны угла будутъ касательными къ одной и той же параболѣ, которая вполнѣ ими обрисуется, если дѣленіе взять достаточно мелкими. Дѣленія на сторонахъ угла могутъ быть продолжены за предѣлы отрѣзковъ α и b, причемъ слѣдуетъ принять во вниманіе продолженія сторонъ угла, лежащія по ту сторону его вершины.

ПРИМѢЧАНІЕ Если дугу какой-нибудь кривой неудобно замѣнить окружностью, вслѣдствіе большого радіуса послѣдней, то ее замѣняютъ дугой параболы. Послѣдняя можетъ быть съ точностью выполнена въ мастерской методомъ огибающихъ прямыхъ, если даны концы A и C дуги и касательныя AB и BC въ этихъ точкахъ.

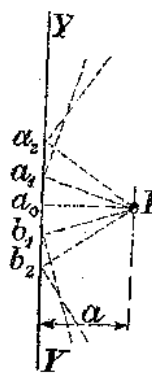
ЗАДАЮТСЯ a, b и α

6. ДРУГОЕ ПОСТРОЕНІЕ ПАРАБОЛЫ МЕТОДОМЪ ОГИБАЮЩИХЪ ПРЯМЫХЪ.

(фиг.8)

Дается прямая УУ и точка F на разстояніи Fa_0 равномъ a отъ нея. Проведя лучи Fa_1, Fa_2 и т.д. возставляемъ въ точкахъ ихъ пересѣченія съ осью УУ къ нимъ перпендикуляры, которые и являются касательными къ параболѣ. Вблизи a_0 дѣленія УУ слѣдуетъ брать наиболѣе мелкими.

ЗАДАЕТСЯ a

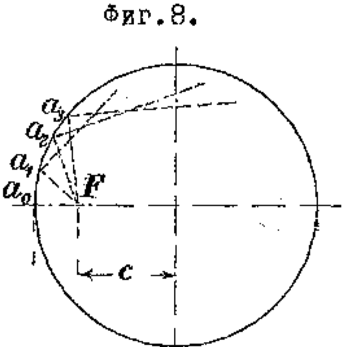


Фиг.8.

7. ПОСТРОЕНІЕ ЭЛЛИПСА И ГИПЕРБОЛЫ МЕТОДОМЪ ОГИБАЮЩИХЪ ПРЯМЫХЪ (фиг.9).

Отличается отъ предыдущаго лишь тѣмъ, что прямая замѣняется окружностью діаметра d. Если точка F лежитъ внутри окружности, получается эллипсъ, если внѣ, то гипербола.

ЗАДАЮТСЯ d и c.

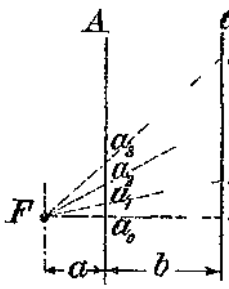


Фиг.9.

8. ПОСТРОЕНІЕ ЭЛЛИПСА И ГИПЕРБОЛЫ МЕТОДОМЪ ОГИБАЮЩИХЪ ОКРУЖНОСТЕЙ

(фиг.10).

Даются двѣ параллельныя прямыя A и C и точка F. Проводимъ изъ F пучекъ лучей, пересѣкающихъ прямыя A и C соотвѣтственно въ точкахъ a_0, a_1, a_2.. и c_0, c_1, c_2....



Фиг. 10.

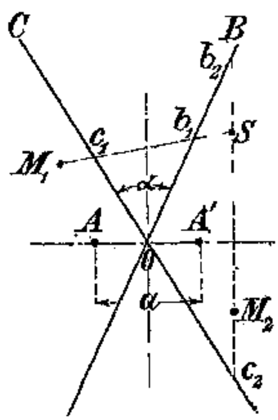
Принявъ c_0, c_1, c_2 и т.д. за центры окружностей, проходящихъ соотвѣтственно черезъ a_0, a_1, a_2, описываемъ послѣднія.

ПРИМѢЧАНІЕ 1. Нѣтъ надобности вычерчивать эти окружности полностью. Достаточно вычертить два отрѣзка дугъ каждой окружности такой длины, чтобы каждый изъ нихъ пересѣкался съ отрѣзками дугъ двухъ смѣжныхъ.

ПРИМѢЧАНІЕ 2. Прямая С будетъ мнимою осью гиперболы, прямая А - касательною въ вершинѣ, F - фокусомъ.

ПРИМѢЧАНІЕ 3. Если точка F задается между прямыми А и С, то совокупность полученныхъ такимъ образомъ окружностей огибаетъ эллипсъ, касаясь его в н у т р е н н е й стороной дуги, полное очертаніе его получится лишь при продолженіи дѣленій на прямыхъ А и О до безконечности

9. ПОСТРОЕНІЕ ГИПЕРБОЛЫ ПО АССИМПТОТАМЪ И ТОЧКѢ (фиг. 11).



Фиг. 11.

Даются двѣ прямыя В и С и точка S. Изъ S проводятся различные лучи, напримѣръ Sc_1, Sc_2 и т.д. Откладывая по величинѣ и направленію, $c_2M_2 = Sb_2$, $Sc_1M_1 = Sb_1$, получаемъ точки M_1, M_2 гиперболы. Каждую изъ полученныхъ точекъ можно принять за новый центръ лучей при построеніи точекъ той же гиперболы; точка S лежитъ на этой же кривой.

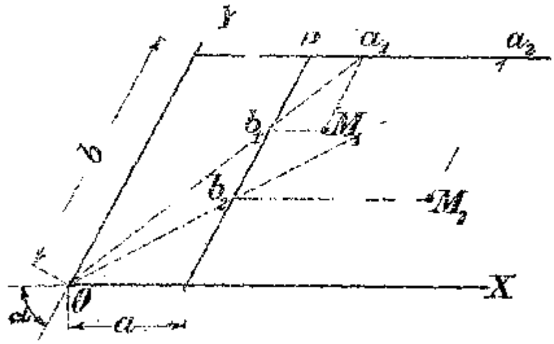
ПРИМѢЧАНІЕ. Для построенія удобно задаться вмѣсто S лежащими на внѣшней биссектриссѣ угла α точками А и А' прямой, расположенными симметрично относительно внутренней его биссектриссы, проводя изъ нихъ по пучку лучей по какому либо опредѣленному закону.

ЗАДАЮТСЯ а и α.

10. ДРУГОЕ ПОСТРОЕНІЕ ГИПЕРБОЛЫ ПО АССИМПТОТАМЪ И ТОЧКѢ (фиг. 12).

Даются точка S и двѣ прямыхъ OX и OY. Черезъ S проводимъ прямыя, параллельныя даннымъ. Изъ точки O проводимъ лучи пересѣкающіе эти прямыя соотвѣтственно въ точкахъ a_1, a_2.. и b_1, b_2..... Проводя изъ лежащихъ на одномъ лучѣ точекъ a_1 и b_1, a_2 и b_2 и т.д. параллели къ даннымъ прямымъ, находимъ точки M_1, M_2 и т.д. кривой. Вторая вѣтвь гиперболы проходитъ въ вертикальномъ углѣ, образованномъ тѣми же прямыми.

ЗАДАЮТСЯ a, b и α.



Фиг.12.

11. ПОСТРОЕНІЕ ГИПЕРБОЛЫ СЪ ПОМОЩЬЮ ОКРУЖНОСТИ (фиг.13).

Взявъ на окружности точку S, проводимъ изъ нея лучъ, пересѣкающій окружность въ a_1, намѣчаемъ хорду a_1b_1 параллельно діаметру OS и соединяемъ прямыми a_1 – съ центромъ круга O, a_1b_1 – съ S. Въ пересѣченіи этихъ прямыхъ получаемъ точку M гиперболы. Измѣнивъ роль точекъ a и b, легко получить тѣмъ же пріемомъ точку N гиперболы. Одна вѣтвь послѣдней проходитъ черезъ концы K и L діаметра перпендикулярнаго OS и пересѣкаетъ радіусъ OS на разстояніи одной трети его длины отъ O, другая – касается окружности въ S.

Фиг 13

ПРИМѢЧАНІЕ. То же самое построеніе, если точка S взята не на окружности, а внутри, или внѣ ея – гиперболы не даетъ. Въ послѣднемъ случаѣ каждый лучъ изъ S пересѣкаетъ окружность въ д в у х ъ точкахъ, что необходимо имѣть въ виду при построеніи.

ЗАДАЕТСЯ d

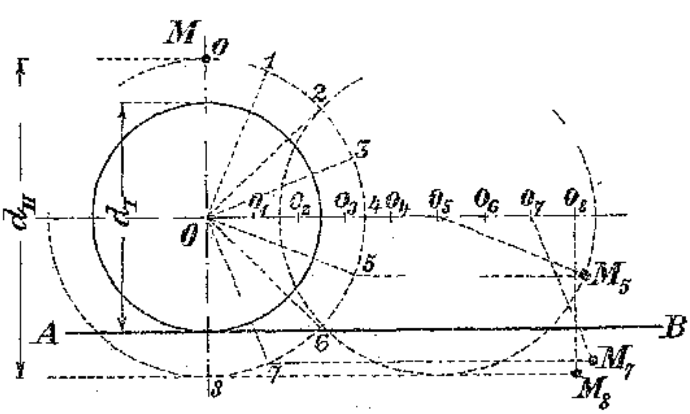
12. ПРОСТѢЙШІЯ ПОСТРОЕНІЯ КРИВЫХЪ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Эллипсъ легко можетъ быть построенъ, какъ геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ есть данная величина. Для гиперболы ту же роль играетъ разность разстояній. Наконецъ, парабола строится, какъ геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ данной прямой и данной точки. Построенія эти настолько элементарны, что входить подробно въ ихъ исполненіе будетъ излишне.

\- o- -

II. КРИВЫЯ, ПОЛУЧАЕМЫЯ КАЧЕНІЕМЪ ОКРУЖНОСТЕЙ.

13 ПОСТРОЕНІЕ ЦИКЛОИДЫ (фиг.14).



Фиг 14

Циклоидой называется кривая, описываемая точкой, неизмѣняемо соединенной съ плоскостью окружности катящейся безъ скольженія по прямой. Допустивъ, что послѣдняя (AB) - горизонтальна, начнемъ построеніе съ того момента, когда подвижная точка M_o находится въ своемъ наивысшемъ положеніи. Описавъ изъ центра O окружности d_I другую окружность радіусомъ OM_o, дѣлимъ дугу послѣдней, расположенную по одну сторону вертикальнаго діаметра, на произвольное число равныхъ частей, концы которыхъ отмѣчены цифрами. Вычисливъ длину полуокружности d_I откладываемъ ее по горизонтальному направленію отъ точки O въ видѣ отрѣзка Oo_8, который дѣлимъ на такое же число равныхъ частей какъ раньше полуокружность d_{II}.

Предполагая, что центръ О катящейся окружности перемѣстился въ положенiе O_5, описываемъ изъ послѣдней точки, какъ центра, окружность дiаметромъ d_{II}, изъ точки же 5 проводимъ горизонталь до пересѣченiя съ послѣдней окружностью въ M_5. Она и есть точка кривой. Аналогичное построенiе совершаемъ для каждой изъ точекъ дѣленiя.

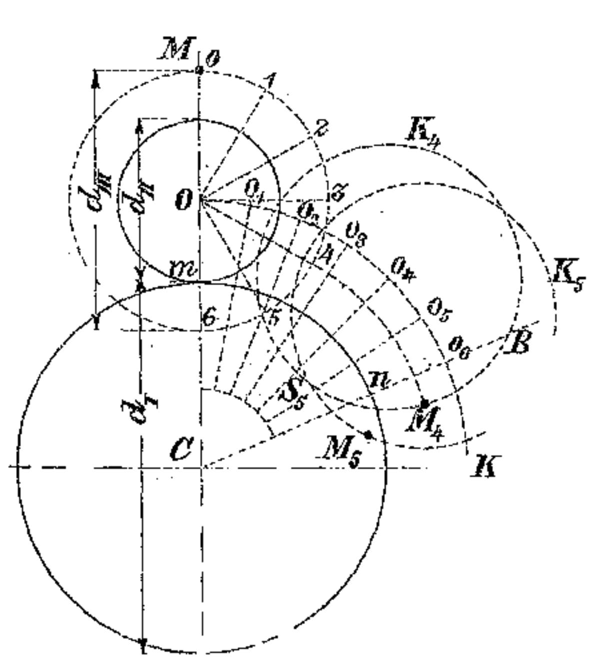
Указанное построенiе мало точно для точекъ окружности d_{II}, расположенныхъ вблизи концовъ вертикальнаго дiаметра, такъ какъ горизонталь пересѣкаетъ окружность подъ очень острымъ угломъ. Для нахожденiя соотвѣтствующихъ точекъ замѣчаемъ, что OO_5M_5 5 есть параллелограммъ. Вторымъ прiемомъ найдена точка M_7. Примѣнительно къ дѣленiямъ, расположеннымъ вблизи концовъ горизонтальнаго дiаметра, наоборотъ, второй прiемъ оказывается мало точнымъ.

Дальнѣйшее построенiе кривой легче всего исполнить, замѣтивъ, что она располагается с и м м е т р и ч н о относительно вертикали O_8M_8

Точка M_0 можетъ задаваться какъ внѣ, такъ и внутри окружности d_I, или же на ея периферiи.

ЗАДАЮТСЯ: d_I и d_{II}.

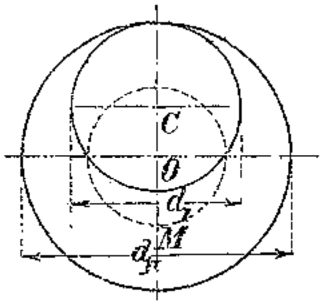
13 ПОСТРОЕНIЕ ЭПИЦИКЛОИДЫ (фиг. 15 и 16)



Фиг. 15

Такъ называется кривая, описываемая нѣкоторой точкой, неизмѣняемо соединенной съ плоскостью круга, катящагося безъ скольженiя по выпуклой сторонѣ дуги другой окружности.

Обозначивъ дiаметръ катящейся окружности черезъ d_{II} неподвижной — черезъ d_I, замѣчаемъ, что первая можетъ касаться второй либо выпуклой стороной (фиг. 15), либо вогнутой (фиг. 16). Построенiе въ томъ и другомъ случаѣ можетъ быть произведено по одной и той же схемѣ.



Фиг. 16.

Предположивъ, что точка М находится въ наибольшемъ удаленіи отъ центра С неподвижной окружности, проводимъ изъ послѣдняго черезъ центръ О подвижной - окружности ОК, и въ свою очередь, изъ О, какъ центра, окружность черезъ М. Половину дуги послѣдней, расположенную по одну сторону діаметра СО дѣлимъ на произвольное число равныхъ частей, отмѣченныхъ цифрами, и на окружности d_I откладываемъ длину дуги mn, равную длинѣ полуокружности d_{II}. Проще всего это сдѣлать, вычисливъ въ градусахъ уголъ ОСВ, равный $180°. d_{II}/d_I$. Сторона СВ послѣдняго пересѣкаетъ окружность ОК въ точкѣ o_6.

Дугу Oo_6 дѣлимъ на равныя части, число которыхъ равно числу дѣленій на полуокружности d_{III}. Предположивъ, что центръ катящагося круга перемѣстился въ o_4, описываемъ изъ послѣдняго окружность K_4 съ діаметромъ d_{III}, а затѣмъ изъ С, какъ центра, окружность черезъ точку 4. Въ пересѣченіи этихъ двухъ окружностей получится точка кривой M_4

Построивъ точки кривой, соотвѣтствующія дѣленіямъ полуокружности, дальнѣйшее построеніе проще всего вести, замѣтивъ, что какъ радіусъ СО, такъ и радіусъ Co_6 будутъ осями симметріи кривой. Опуская, слѣдовательно, на эти радіусы перпендикуляры изъ различныхъ построенныхъ уже точекъ кривой, и продолжая ихъ на ихъ же собственныя длины, получимъ дальнѣйшій рядъ точекъ кривой.

Точка М можетъ быть дана внѣ, внутри или на окружности d_{II}.

Въ виду того значенія, которое разсматриваемая кривая имѣетъ при профилированіи зубчатыхъ колесъ необходимо къ указанному построенію присоединить слѣдующія замѣчанія. Приведенное построеніе практически совершенно непригодно для дѣленій окружности d_{III}, лежащихъ вблизи 6; двѣ окружности, опредѣляющія точки кривой, пересѣкаются здѣсь подъ столь острыми углами, что нѣтъ возможности достаточно точно опредѣлить точку ихъ пересѣченія. Между тѣмъ для профиля зубца имѣетъ значеніе именно эта часть кривой Другое построеніе, которое и слѣдуетъ примѣнять въ этихъ случаяхъ указано примѣнительно къ дѣленію 5. Проведя изъ O_5, какъ центра, окружность K_5 съ діаметромъ d_{II} и прямую CO_5, въ пересѣченіи ихъ получимъ точку S_5. Взявъ затѣмъ въ отверстіе циркуля хорду 6.5 засѣкаемъ изъ S_6, какъ центра, точку M_5 на окружности K_5. Обѣ окружности пересѣкаются подъ угломъ близкимъ къ 90°, вслѣдствіе чего указанное построеніе очень точно опредѣляетъ искомую точку.

Аналогичное построеніе производится и для дѣленій, лежащихъ между 0 и 1.

Нерѣдко примѣняется нѣсколько отличный отъ указаннаго пріемъ построенія, при которомъ равные отрѣзки дугъ, взятые на окружностяхъ d_I и d дѣлятся на равное число частей. При этомъ часто повторяется практически весьма грубая ошибка. Взявъ отрѣзокъ дуги одной окружности, дѣлятъ его на части достаточно мелкія, чтобы практически можно было считать длину дуги равной длинѣ стягивающей ее хорды и затѣмъ столько же такихъ же частей откладываютъ на дугѣ другой окружности, воображая, что такимъ образомъ удастся отложить отрѣзокъ дуги такой же длины. Чтобы убѣдиться въ нелѣпости этого пріема и замѣтить, въ чемъ именно кроется ошибка, возьмите отрѣзокъ AB прямой длиною около 100 $^{m}/_{m}$ и, раздѣливъ его на 24 части, отложите одну изъ полученныхъ частей 24 раза подъ рядъ на другой прямой. Сверьте затѣмъ длину вновь полученнаго отрѣзка A^1B^1 съ длиною отрѣзка AB, которому онъ теоретически долженъ быть равенъ.

Итакъ, необходимо сначала отмѣтить дуги равной длины, а затѣмъ уже дѣлить ихъ на одинаковое число равныхъ частей. Сдѣлать это очень просто пользуясь таблицами длинъ хордъ при радіусѣ равномъ единицѣ (см. введеніе) и помня, что равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ углы обратно пропорціональные діаметрамъ окружностей

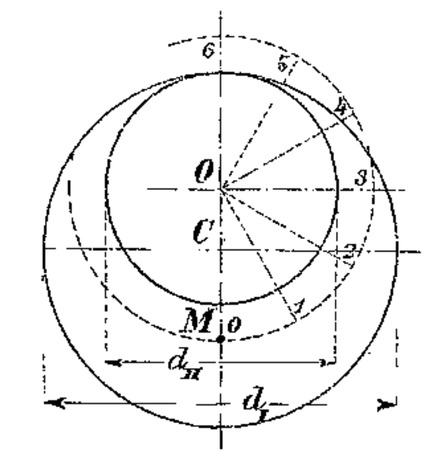
ПРИМѢЧАНІЕ. Взявъ простыя отношенія діаметровъ d_I и d_{II} и принявъ OM = OC можно получить довольно любопытныя формы, если вычерчивать кривую до тѣхъ поръ, пока она не сомкнется, т.е. точка M не вернется въ первоначальное положеніе. Условив-

---

шись считать, при расположенiи фиг.16, d_{II} отрицательнымъ, можно указать, для примѣра, слѣдующiя два соотношенiя: 1) $\frac{d_{II}}{d_I} = 2/3$ и 2) $\frac{d_{II}}{d_I} = -5/3$

ЗАДАЮТСЯ. d_I, d_{II} и d_{III} Если $d_{II} > d_I$, то указывается номеръ чертежа либо 15, либо 16.

15 ПОСТРОЕНIЕ ГИПОЦИКЛОИДЫ (фиг.17).



Фиг 17

Такъ называется кривая, описываемая нѣкоторой точкой М, неизмѣняемо соединенной съ плоскостью круга, катящагося безъ скольженiя по внутренней сторонѣ дуги другой окружности.

Очевидно, что при этомъ дiаметръ первой окружности долженъ быть меньше дiаметра второй. Введя соотвѣтствующiя обозначенiя отмѣченныя на фиг.15, можно дословно воспользоваться, для выполненiя построенiя, предыдущимъ описанiемъ построенiя эпициклоиды. Если радiусъ СО малъ то для раздѣленiя дуги Oo_6 (фиг.15) на равныя части слѣдуетъ въ цѣляхъ большей точности воспользоваться дугой большаго радiуса, раздѣливъ съ помощью ея уголъ OCo_6 на равныя части, а затѣмъ уже въ пересѣченiи съ радiусами получить точки o_1, o_2, o_3 .... на дугѣ радiуса СО.

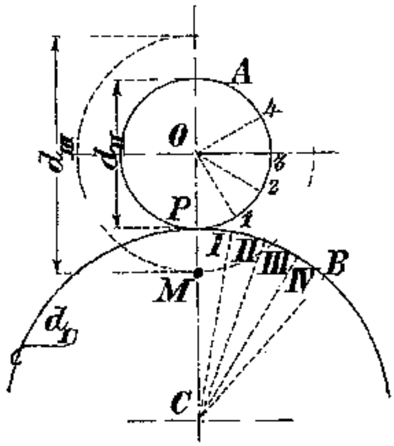
Всѣ указанiя, сдѣланныя относительно эпициклоиды остаются въ силѣ и примѣнительно къ гипоциклоидѣ

ЗАДАЮТСЯ d_I и $d_{II} < d_I$

16. ПОСТРОЕНIЕ ПРЕДЫДУЩИХЪ ТРЕХЪ ТИПОВЪ КРИВЫХЪ МЕТОДОМЪ ОГИБАЮЩИХЪ ОКРУЖНОСТЕЙ (фиг.18)

Въ виду полной аналогiи построенiй, разсмотримъ здѣсь только случай эпициклоиды, сохраняя въ общемъ предыдущiя обозначенія. Отмѣтивъ произвольно центральный уголъ MOA (для разнообразія предположено, что M находится въ положенiи ближайшемъ къ C) откладываемъ на неподвижной окружности дугу PB, равную дугѣ PA. Съ этой цѣлью строимъ центральный уголъ POB такъ, чтобы было соблюдено соотношенiе:

$$POB = POA \cdot \frac{d_{II}}{d_{I}} \quad ^{*})$$



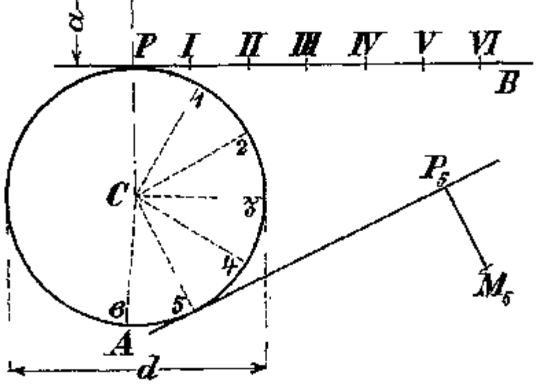
Фиг 18

Затѣмъ дѣлимъ дуги PA и PB на одинаковое число м е л к и х ъ частей (на черт. показано только четыре). Дѣленiя отмѣчены соотвѣтственно арабскими и римскими цифрами. Взявъ въ отверстiе циркуля длину M1, M2, M3 и т. д. описываютъ ими с о о т в ѣ т с т в е н н о изъ I, II, III и т.д., какъ центровъ, дуги окружностей такой длины, чтобы каждая изъ нихъ пересѣкалась съ двумя смѣжными. Если дѣленiя достаточно мелки, то форма искомой кривой выдѣлится вполнѣ ясно.

Если POA взять равнымъ 180°, то построенiе дальнѣйшей части кривой можетъ быть исполнено на основанiи закона симметрiи, какъ было указано на стр. 16.

ЗАДАЮТСЯ: d_I, d_{II}, d_{III}, при чемъ $d_I > d_{II}$ въ случаѣ гипоциклоиды.

17. ПОСТРОЕНIЕ ЭВОЛЬВЕНТЫ (развертки окружности) (фиг. 19).



Фиг. 19.

Такъ въ общемъ случаѣ называется кривая, описываемая точкой, неизмѣнямо соединенной съ прямою, катящейся безъ скольженiя по окружности.

За начальное положенiе прямой принимаемъ то,

---

*) *О нелѣпости иного прiема отложенiя равныхъ дугъ* *см. стр. 17*

при которомъ радіусъ соединяющій описывающую точку съ центромъ окружности, перпендикуляренъ прямой.

Взявъ произвольный отрѣзокъ PA дуги окружности, откладываемъ длину его отъ точки касанія прямой въ видѣ отрѣзка PB и дѣлимъ, какъ PA такъ и PB на одинаковое число равныхъ частей; точки дѣленія отмѣчены соотвѣтственно арабскими и римскими цифрами. Проведя въ одномъ изъ дѣленій окружности, напримѣръ 5, касательную къ окружности, откладываемъ отрѣзокъ $5.P_5$ - PV, а затѣмъ перпендикулярно $5.P_5$ строимъ P_5M_5 PV, такимъ образомъ получаемъ точку M_5 кривой.

Чѣмъ дальше удаляется точка M отъ центра C, тѣмъ мельче приходится брать дѣленія; для этого между намѣченными равными дѣленіями вставляются промежуточныя точки.

Такъ какъ качаніе прямой можно производить въ обѣ стороны, то очевидно, что кривая располагается симметрично относительно радіуса CM.

Если точка M находится по ту же сторону отъ прямой какъ и центръ C окружности и на разстояніи радіуса послѣдней, то она описываетъ Архимедову спираль, которая является, такимъ образомъ, частнымъ случаемъ эвольвенты.

При профилированіи зубчатыхъ колесъ употребляется эвольвента, описываемая точкой, лежащей на катящейся прямой, примѣнительно къ нашему чертежу это будетъ геометрическое мѣсто точекъ P. P_1... P_8, P_9.

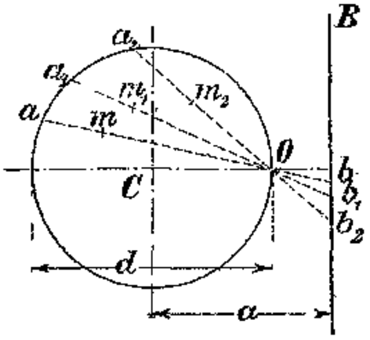
Эвольвенту легко построить методомъ огибающихъ окружностей. Взявъ въ отверстіе циркуля разстоянія MI, MII, MIII и т. д. проводимъ соотвѣтственно изъ точекъ 1, 2, 3, и т. д., какъ центровъ, отрѣзки дугъ достаточной длины чтобы каждая изъ нихъ пересѣкалась съ двумя смежными. При достаточномъ числѣ дѣленій форма кривой обрисуется вполнѣ ясно.

-- o-----

III. РАЗЛИЧНЫЯ КРИВЫЯ.

18 ЦИССОИДА (фиг 20)

Дается окружность діаметра d и прямая B Опуская изъ центра C окружности перпендикуляръ на B находимъ точку O окружности. Изъ нея проводимъ рядъ лучей, пересѣкающихъ окружность въ точкахъ a, a_1, a_2 . и прямую въ точкахъ b, b_1, b_2



Фиг. 20

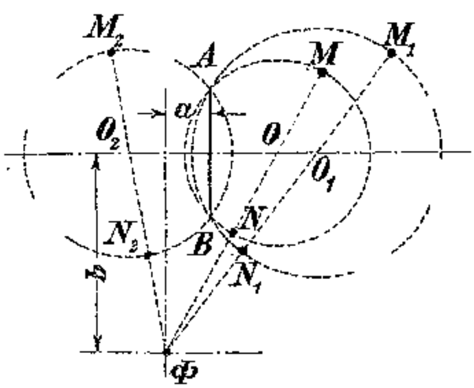
Отъ послѣднихъ откладываемъ на соотвѣтствующихъ лучахъ отрѣзки bm, b_1m_1, b_2m_2 соотвѣтственно равные по величинѣ и направленію хордамъ Oa, Oa_1, Oa_2... Точки m, m_1, m_2 будутъ точками искомой кривой. Можно условиться считать размѣръ a отрицательнымъ, если прямая B и точка O лежатъ по разныя стороны центра C. При этомъ условіи можно сказать, что кривая имѣетъ въ O кратную точку, если $3/2\, d > a > d/2$ и точку возврата, если $a = 3/2\, d$.

ПРИМѢЧАНІЕ. Замѣнивъ въ предыдущей схемѣ прямую B произвольно избранной окружностью и назвавъ буквой O произвольную точку плоскости (расположеніе фиг. 24) можно, пользуясь только что описанной схемой, получить весьма разнообразныя кривыя. При этомъ каждый лучъ, исходящій изъ O будетъ пересѣкать любую изъ окружностей въ двухъ точкахъ; принимая это въ соображеніе получимъ на каждомъ лучѣ, пересѣкающемъ обѣ окружности по четыре точки такой кривой, которая, однако, не будетъ уже циссоидой. Въ видѣ примѣра укажемъ слѣдующія данныя. $d_a = 45$, $d_b = 90$, $\rho = 22{,}5$; $\varphi = 270$, $m = 0$; $n = 35$. (см фиг 24).

ЗАДАЮТСЯ: d и a, послѣднее - положительнымъ или отрицательнымъ, иногда - m, n, ρ і φ

19 ФОКАЛЬНАЯ КРИВАЯ СЪ ДВУМЯ ВѢТВЯМИ (фиг. 21)

Дается отрѣзокъ AB прямой и точка Ф (координатами a и b). Построивъ прямую центровъ пучка окружностей, для которыхъ AB служитъ общей хордой, проводимъ изъ центровъ O, O_1, O_2... окружности через A и B. Затѣмъ изъ Ф проводимъ лучи черезъ центры соотвѣтствующихъ окружностей. Двѣ точки N и N_1 пересѣченія каждаго луча съ соотвѣтствующей окружностью будутъ точками искомой кривой. Одна вѣтвь послѣдней удаляется въ безконечность, другая образуетъ нѣчто въ родѣ неправильнаго овала. Кривая проходитъ черезъ точки А, В и Ф и основанiе перпендикуляра опущеннаго изъ Ф на АВ.



Фиг. 21

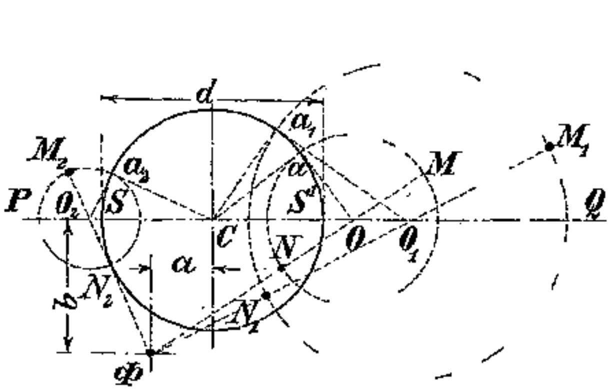
ЗАДАЮТСЯ: a, Ъ и хорда АВ, построенiе мало удобно, если $AB > 30$ м/м

20. ПЕТЛЕВИДНАЯ ФОКАЛЬНАЯ КРИВАЯ

Если въ предыдущей схемѣ длину хордъ АВ принять равнои нулю, то получимъ пучекъ окружностей имѣющихъ общую касательную. Общая точка всѣхъ окружностей будетъ кратной точкой кривой; кромѣ того кривая проходитъ через Ф и основанiе перпендикуляра опущеннаго изъ Ф на общую касательную ко всѣмъ окружностямъ Въ остальномъ построенiе остается то же.

ЗАДАЮТСЯ a и Ъ

21 ФОКАЛЬНАЯ КРИВАЯ СЪ ОДНОЮ ВѢТВЬЮ, БЕЗЪ КРАТНЫХЪ ТОЧЕКЪ (фиг. 22).



Фиг. 22

Кромѣ пучка окружностей съ двумя и одною (двумя совпадающими) общими точками, существуетъ пучекъ окружностей пересѣкающихся въ двухъ мнимыхъ общихъ точкахъ, т.е. въ дѣйствительности ив пересѣкающихся Построенiе такого пучка совершается слѣдующимъ образомъ. Избравъ окружность дiаметра d, проводимъ через центръ ея прямую PQ, намѣчаемъ на ней центра O, O_1, O_2...окружностей пучка въ произвольномъ порядкѣ, напримѣръ, на равныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ. Изъ этихъ центровъ проводимъ касательныя къ окружности d, послѣднія можно проводить на глазъ, лишь бы опредѣлять точно точки касанія a, a_1, a_2 опуская изъ C перпендикуляры на касательныя. Отрѣзки Oa O_1a_1, O_2a_2 касательныхъ будутъ радіусами соотвѣтствующихъ окружностей пучка. Дальнѣйшее построеніе кривой исполняется такъ же, какъ и для предыдущихъ двухъ.

Кривая проходитъ черезъ точки S и S^1 пересѣченія прямой PQ съ окружностью d, черезъ точку Ф и черезъ основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ точки Ф на діаметръ окружности d, перпендикулярный PQ. Прямыя $ФS$ и $ФS^1$ будутъ касательными къ кривой въ S и S^1.

ЗАДАЮТСЯ a, b и d

22. КРАНІОИДА (фиг 23)

Фиг 23

Даются двѣ концентрическія окружности діаметровъ d_a и d_b и точка Ф на разстояніи C отъ ихъ общаго центра O; кромѣ того нѣкоторая величина r. Проведя изъ Ф произвольный лучъ, пересѣкающій окружность d_a въ точкѣ a, проводимъ радіусъ Oa, пересѣкающій вторую окружность d_b въ точкѣ b. Изъ послѣдней, какъ центра, проводимъ окружность даннымъ радіусомъ r, засѣкающую на лучъ Фa точки M_1 и M_2 кривой. Такъ какъ всякая прямая пересѣкаетъ окружность въ двухъ точкахъ, то для второй точки a' пересѣченія луча съ той же окружностью повторяемъ предыдущее построеніе и получаемъ на томъ же лучѣ еще двѣ точки M_3 и M_4 кривой.

Построеніе удобнѣе всего вести въ такомъ порядкѣ. Проведя изъ Ф двѣ касательныя къ окружности d_a, отмѣчаютъ точки A и B касанія; послѣднія легко могутъ быть получены какъ точки пересѣченія съ послѣдней другой окружности, построенной на OФ какъ на діаметрѣ. Большую дугу окружности d_a между точками A и B дѣлятъ на равныя части и въ точки дѣленія проводятъ лучи изъ Ф

Если Ф лежитъ внутри окружности d_a, то черезъ Ф проводимъ хорду $AB \perp O\Phi$ и дальше дѣйствуемъ такимъ же образомъ, лучи же исходящіе изъ Ф продолжаемъ по другую сторону послѣдней до пересѣченія съ окружностью d_a во второй точкѣ

Формы полученной кривой весьма разнообразны и повидимому мало изслѣдованы обоими пріемами анализа и геометріи. Какъ общее правило можно указать, что кривая состоитъ изъ двухъ самостоятельныхъ вѣтвей.

Изъ различныхъ частныхъ случаевъ можно указать слѣдующіе. Если точка Ф лежитъ на самой окружности d_a, то одна вѣтвь кривой превращается въ окружность съ центромъ въ Ф и съ радіусомъ r. Если $r = \pm\frac{d_b - d_a}{2}$ x), то одна вѣтвь кривой совпадаетъ съ окружностью d_a. Если $r = \pm\frac{2e - d_b}{2}$, то кривая имѣетъ точку возврата. Если r больше абсолютной величины послѣдняго выраженія, то кривая образуетъ петлю въ Ф. Кривая не проходитъ черезъ Ф, если r меньше указанной величины. Кромѣ этихъ случаевъ можно привести еще различные другіе. Въ видѣ примѣра можно предложить слѣдующія задачи (размѣръ въ мм)

	d_a	d_b	e	r		d_a	d_b	e	r
I	70	100	35	30	VII	100	70	50	35
II	70	100	60	35	VIII	100	70	75	25
III	60	100	50	18	IX	100	70	75	40
IV	40	110	30	32	X	100	60	20	10
V	60	100	37	18	XI	120	50	20	50
VI	60	100	15	25	XII	40	110	20	17

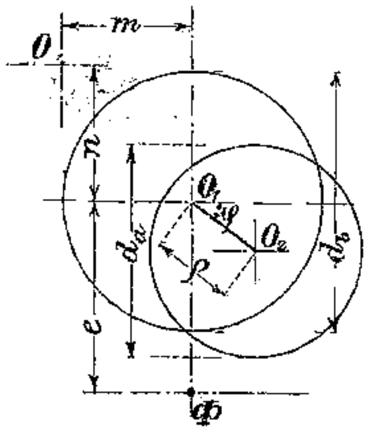
Слѣдуетъ имѣть въ виду, что если окружность радіуса r не пересѣкается съ соотвѣтствующимъ лучемъ, то пробами нужно подыскать тотъ лучъ, котораго соотвѣтствующая окружность касается. Въ этомъ случаѣ каждая изъ двухъ вѣтвей кривой заключается между двумя такими лучами.

ПРИМѢЧАНІЕ. По предыдущему описанію можно исполнить построенія кривыхъ еще болѣе разнообразныхъ, если назвать буквой

---

x) r — *величина всегда положительная, но можно задать* $d_b < d_a$

О произвольную точку плоскости, а объ окружности d_a и d_b взять



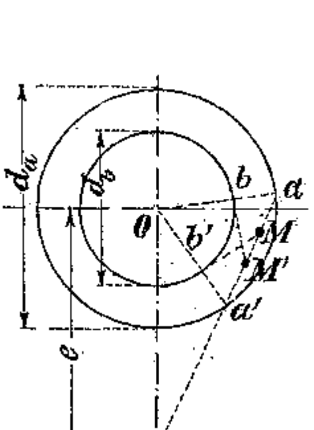
Фиг 24.

эксцентричными. Схему расположенія даетъ фиг.24; кромѣ данныхъ предыдущаго описанія необходимо дать еще значенія m, n, ρ и φ. Въ частномъ случаѣ, если центры O_1 и O_2 удаляются въ безконечность, а радіусы соотвѣтствующихъ окружностей становятся безконечно велики послѣднія замѣняются прямыми. Получаемыя по обобщенной схемѣ кривыя уже не носятъ названія краніоидъ.

ДОБАВОЧНО ЗАДАЮТСЯ m, n, ρ, и $\angle\varphi$

23. КАПРИКОРНОИДА (фиг. 25)

Точно такъ же, какъ и при построеніи краніоиды даются двѣ концентрическія окружности d_a и d_b и центръ лучей Ф; послѣдніе проводить лучше всего въ порядкѣ указанномъ для краніоиды. Опредѣливъ точки a и a' пересѣченія любого луча съ окружностью d_a, соединяютъ послѣднія радіусами съ центромъ О и въ пересѣченіи послѣднихъ съ окружностью d_b получаютъ точки b и b'. Касательныя къ окружности d_b въ точкахъ b и b', пересѣкаясь съ лучемъ Фа опредѣляютъ на немъ двѣ точки M и M' кривой



Фиг. 25

Кривая касается окружности d_b въ концахъ діаметра ФО, распадается на двѣ вѣтви обѣ удаляющіяся въ безконечность, если Ф лежитъ внѣ окружности d_a, и проходитъ дважды черезъ Ф, образуя въ ней петлю, если послѣдняя лежитъ внѣ d_b

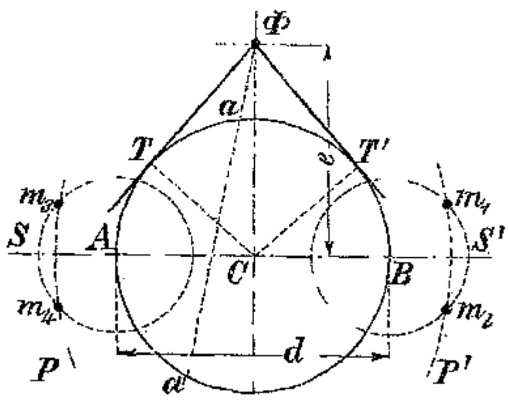
Діаметръ d_b можно задавать какъ меньше, такъ и больше d_a. Если $d_a = d_b$, то кривая превращается въ окружность d_b если Ф лежитъ внутри d_b, то мало отъ нея отличается. Если Ф лежитъ на окружности d_a, то одна вѣтвь кривой превращается въ прямую. Касательныя проведенныя изъ Ф къ окружности d_a касаются каприкорноиды въ безконечности, образуя такъ называемыя а с с и м п т о т ы

Въ видѣ примѣра можно построить кривую по слѣдующимъ даннымъ

	d_a	d_b	e		d_a	d_b	e
I	100	40	50	V	40	100	25
II	100	40	40	VI	80	100	70
III	100	40	7[illegible]	VII	40	100	20
IV	100	0	40	VIII	60	120	25

ПРИМѢЧАНІЕ. Назвавъ буквою О любую точку плоскости и принявъ расположеніе окружностей по фиг.24, можно получить, примѣняя предыдущее описаніе, болѣе разнообразныя формы кривыхъ, которыя, однако, уже не будутъ каприкорноидами,

24. ОВАЛЪ КАССИНИ (фиг 26)



Фиг.26.

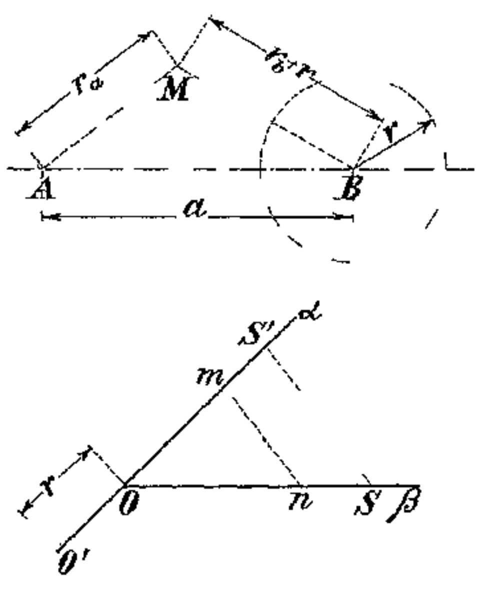
Дается окружность діаметра d и точка Ф, внѣ ея лежащая. Соединяемъ Ф прямою съ центромъ С окружности и проводимъ діаметръ АВ, перпендикулярный ФС. Изъ точки Ф проводимъ произвольный лучъ, пересѣкающій окружность въ двухъ точкахъ a и a' Взявъ отрѣзки Фа и Фа въ отверстіе циркуля проводимъ изъ точекъ А и В какъ центровъ окружности S, S', P, P' Четыре точки пересѣченія этихъ окружностей будутъ четырьмя точками искомой кривой. Построеніе лучей лучше всего вести въ порядкѣ указанномъ въ аналогичномъ случаѣ для краніоиды, т.е найти точки касанія Т и Т' касательныхъ изъ Ф и большую изъ дугъ ТТ' раздѣлить на равныя части.

Кривая превращается въ лемнискату, если $e = \frac{d\sqrt{2}}{2}$ и распадается на двѣ вѣтви, если $e < \frac{d\sqrt{2}}{2}$ Если $e = \frac{d}{2}$, то кривая превращается въ двѣ изолированныя точки A и B, если $e < \frac{d}{2}$, то точки кривой сливаются съ діаметромъ AB

Не трудно замѣтить, что построенная такимъ образомъ кривая есть геометрическое мѣсто точекъ, произведеніе разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ - величина постоянная

ЗАДАЮТСЯ d и $e > d/2$

25. ОВАЛЪ ДЕКАРТА (фиг 27)



Фиг. 27

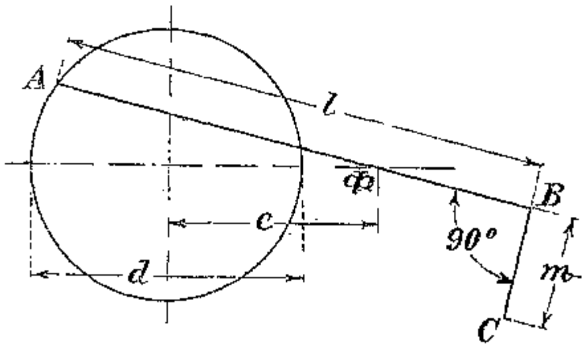
Такъ называется кривая, точки которой находятся отъ данной точки A и данной окружности съ центромъ въ B и радіусомъ r на разстояніяхъ r_a и r_b, отношеніе которыхъ есть величина постоянная

Задавшись отношеніемъ $r_a : r_b = q$, на сторонѣ $O\beta$ произвольно избраннаго угла $\alpha O \beta$ откладываемъ нѣкоторую длину OS а на другой его сторонѣ - длину $OS = q.OS'$ и проводимъ прямую SS' Всякая прямая mn, параллельная SS', отсѣчетъ на сторонахъ угла отрѣзки On и Om, которые, соотвѣтственно, можно принять за r_a и r_b. Если M точка кривой, то разстояніе ея отъ центра B окружности $BM = r_b + r$. Отложивъ на продолженіи стороны $O\alpha$ отрѣзокъ $OO' = r$, находимъ $On = r_a = AM$, $O'm = r + Om = r + r_b = BM$ Положеніе точки M опредѣлится, такимъ образомъ, пересѣченіе двухъ дугъ окружностей, описанныхъ изъ A и B, какъ центровъ

ЗАДАЮТСЯ a, r и q

26 КОНХОИДА (фиг 28)

Такъ называется кривая, описываемая точкой неизмѣняемой прямой проходящей все время черезъ данную точку Ф, а въ то время, какъ другая ея точка А описываетъ окружность Если точка Ф взята на самой окружности то кривая носитъ названіе у л и т к я П а с к а л я. Кривая имѣетъ въ Ф к р а т н у ю т о ч к у, если по абсолютной величинѣ е + +d/2 > l > е -d/2. Построеніе точекъ кривой ясно изъ ея опредѣленія; лучи, исходящіе изъ Ф удобнѣе всего откладывать въ порядкѣ, указанномъ для кранioиды. На каждомъ лучѣ найдемъ двѣ точки кривой.



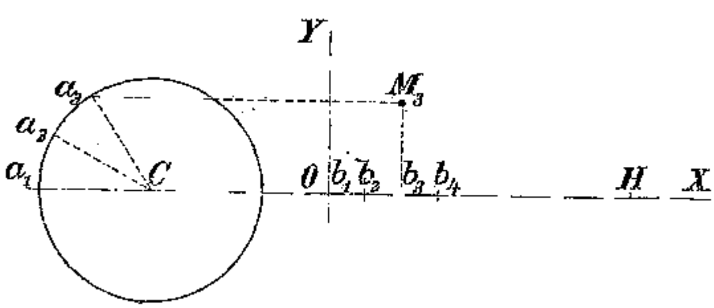
Фиг 28.

ПРИМѢЧАНІЕ Въ видѣ обобщенія можно построить кривую, вычерчиваемую нѣкоторой точкой С, не лежащей на прямой, но неизмѣняемо съ ней связанной, послѣдній типъ кривыхъ не называется уже конхоидами. Наконецъ, точку Ф можно замѣнить окружностью, которой прямая АВ все время должна касаться. въ послѣднемъ случаѣ необходимо принять во вниманіе, что изъ всякой точки, внѣ окружности, могутъ быть проведены къ послѣдней д в ѣ касательныя.

ЗАДАЮТСЯ: d, е и l, иногда m

27. СИНУСОИДА (фиг 29).

Такъ называется кривая, которая въ аналитической геометріи въ прямоугольныхъ осяхъ координатъ изображается уравненіемъ



Фиг. 29

$$y = a \sin mx$$

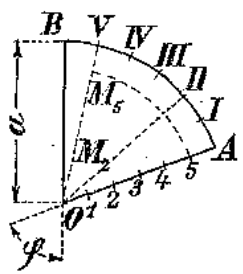
Предполагая, что оси координатъ будутъ ОХ и ОУ построеніе можно вести въ слѣдующемъ порядкѣ.

Намѣтивъ на оси X произвольную точку O, описываютъ изъ нея, какъ центра, окружность радіуса a, которую дѣлятъ на произвольное число равныхъ частей, точки дѣленія отмѣчены буквами a_1, a_2, a_3. Отъ точки O откладываютъ по оси X отрѣзокъ $OH = \frac{2\pi}{m}$ въ тѣхъ же единицахъ длины, въ которыхъ отложенъ радіусъ окружности и дѣлятъ настолько же частей, на сколько раздѣлена была окружность. Точки дѣленія соотвѣтственно будутъ b_1, b_2, b_3 Отмѣтивъ двѣ точки a и b съ одинаковыми индексами изъ первой проводятъ параллель къ OX изъ другой — къ Oy и въ пересѣченіи ихъ получаютъ точку кривой. На чертежѣ (фиг 29) построеніе выполнено для дѣленій a_3 и b_3 найдена точка M_3.

ПРИМѢЧАНІЕ: Съ точки зрѣнія расположенія точекъ чертежа удобно задавать m въ предѣлахъ отъ $^1/a$ до $^5/2a$.

ЗАДАЮТСЯ a и m

28. АРХИМЕДОВА СПИРАЛЬ (фиг.30).



Фиг 30.

Дается круговой секторъ радіуса a съ центральнымъ угломъ φ; послѣдній можетъ содержать число градусовъ и выше 360 Дуга AB сектора и одинъ изъ крайнихъ радіусовъ дѣлятся на одинаковое число равныхъ частей, которыя соотвѣтственно занумерованы римскими и арабскими цифрами. Соединяя любое дѣленіе дуги сектора прямою съ центромъ ея, и проводя концентрическую съ ней дугу черезъ одноименное дѣленіе на радіусѣ, въ пересѣченіи ихъ опредѣляемъ точку кривой. На чертежѣ найдены точки M_2 и M_5 кривой

ЗАДАЮТСЯ a и φ

---ooooOOooo- -