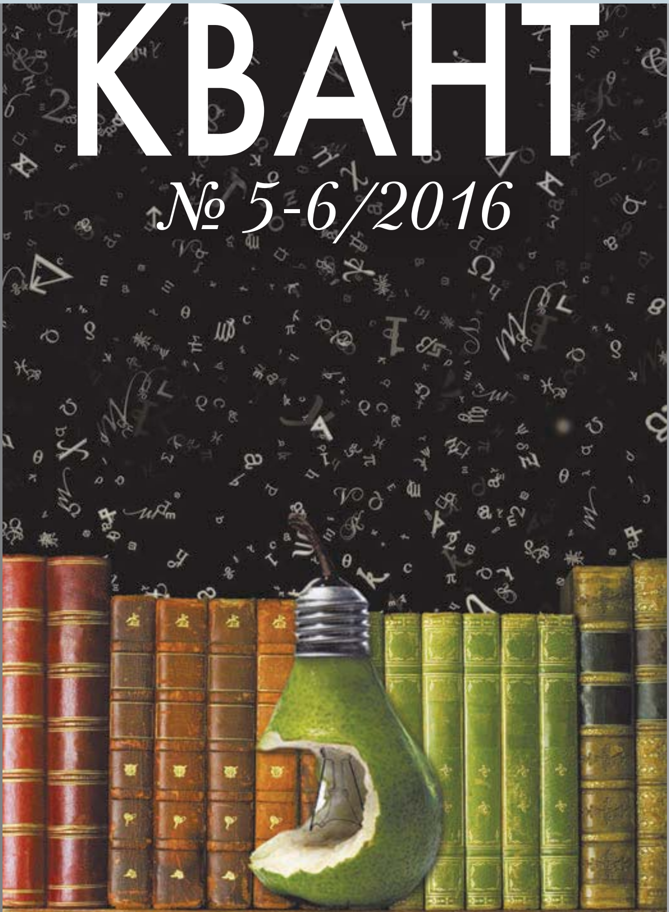
Приложение к журналу

КВАНТ

№ 5-6/2016



Экзаменационные материалы 2016 года

Приложение к журналу
«КВАНТ»
№5-6/2016

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ 2016 ГОДА

Составители
Е.М.Епифанов, В.А.Тихомирова

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 373.167.1:[51+53]
ББК 22.1я721+22.3я721
Э36

Приложение
к журналу «Квант»
№5-6/2016

Э36 **Экзаменационные материалы по математике и физике 2016 года** / Составители Е.М.Епифанов, В.А.Тихомирова. – М.: Издательство МЦНМО, 2016. – 264 с. (Приложение к журналу «Квант» №5-6/2016.)

ISBN 978-5-4439-1109-0

В книгу включены варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ) по физике, задачи олимпиад и вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы страны в 2016 году.

Книга адресована выпускникам средних школ, лицеев и гимназий, слушателям подготовительных отделений и курсов, а также всем тем, кто самостоятельно готовится к поступлению в вуз.

ISBN 978-5-4439-1109-0

9 785443 911090

ББК 22.1я721+22.3я721

12+

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом приложении к журналу «Квант» традиционно собраны материалы вступительных испытаний по математике и физике в вузы нашей страны за прошедший 2016 год.

Мы предлагаем школьникам и учителям как избранные варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ), так и задачи различных олимпиад, имеющих статус «вступительных». Победители и призеры таких олимпиад, включенных в федеральный список данного года, имеют право быть приравненными к лицам, набравшим максимальное количество баллов по единому государственному экзамену по конкретному предмету, при поступлении в любой вуз. (Отметим, что это не освобождает учащихся от сдачи ЕГЭ.) Кроме того, в сборнике представлены материалы вступительных испытаний в традиционной форме, в которых, в частности, могут участвовать абитуриенты, по каким-либо причинам освобожденные от сдачи ЕГЭ.

Мы надеемся, что предлагаемые вниманию читателей материалы будут полезны как для самостоятельной подготовки к экзаменам, так и для использования на уроках, факультативах, кружках и подготовительных курсах.

Желаем успехов!

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

На ЕГЭ по физике в 2016 году использовалась та же экзаменационная модель контрольных измерительных материалов (КИМ), что и в прошлом году, но был несколько расширен перечень заданий с кратким ответом. Кроме того, был использован более широкий спектр оригинальных задач высокого уровня сложности, для которых нужно было самостоятельно выбрать необходимую для решения физическую модель.

Каждый вариант экзаменационной работы состоял из двух частей и включал в себя 32 задания: 9 заданий с выбором одного верного ответа, 18 заданий с кратким ответом и 5 заданий с развернутым ответом.

Часть 1 содержала 24 задания: 9 заданий с кратким ответом в виде одной цифры, соответствующей номеру верного ответа, и 15 заданий с кратким ответом в виде числа или последовательности цифр. Отметим, что 22 задания этой части проверяли усвоение понятийного аппарата курса физики (в том числе применение знаний при объяснении физических явлений и использование законов и формул в несложных расчетных ситуациях), а последние два задания проверяли овладение методологическими умениями. Часть 2 была отведена решению задач. Она содержала 8 заданий: 3 задания с кратким ответом и 5 заданий, для которых необходимо было привести развернутый ответ. Эти задачи относились ко всем разделам физики и были разного уровня сложности. Они позволяли проверить умение применять физические законы и формулы как в типовых ситуациях, так и в нетрадиционных ситуациях.

Задания с кратким ответом в виде одной цифры, соответствующей номеру верного ответа, и в виде числа оценивались 1 баллом. Задания на установление соответствия и множественный выбор оценивались 2 баллами, если верно указаны оба элемента ответа, 1 баллом, если допущена ошибка в указании одного из элементов ответа, и 0 баллов, если допущено две ошибки. Задания с развернутым ответом оценивались двумя экспертами с учетом правильности и полноты ответа. Максимальный первичный балл за задания с развернутым ответом составлял 3 балла.

ЕГЭ по физике 2016 года представлен здесь двумя вариантами открытого сегмента КИМ. Первый вариант приводится полностью, со всеми справочными данными и указаниями. Во втором варианте справочные данные и указания изъяты, при его решении можно пользоваться данными и указаниями из первого варианта.

В 2017 году контрольные измерительные материалы по физике претерпели существенные изменения. Из вариантов исключены задания с выбором одного верного ответа и добавлены задания с кратким ответом. Часть 1 содержит 23 задания с кратким ответом, в том числе задания с самостоятельной записью ответа в виде числа, двух чисел или слова, а также задания на установление соответствия и множественный выбор, в которых ответы необходимо записать в виде последовательности цифр. Часть 2 содержит 8 заданий, объединенных общим видом деятельности – решением задач, из них 3 задания с кратким ответом и 5 заданий, для которых необходимо привести развернутый ответ.

ЕГЭ по физике 2017 года представлен здесь одним демонстрационным вариантом.

Вариант 1 (2016 год)

Ниже приведены справочные данные, которые могут понадобиться при выполнении работы.

Десятичные приставки

Наименование	Обозначение	Множитель
гига	Г	10^{9}
мега	М	10^{6}
кило	к	10^{3}
гекто	г	10^{2}
деци	д	10^{-1}
санти	с	10^{-2}
милли	м	10^{-3}
микро	мк	10^{-6}
нано	н	10^{-9}
пико	п	10^{-12}

Константы

число «пи»	$\pi = 3{,}14$
ускорение свободного падения на Земле	$g = 10\ \text{м/с}^2$
гравитационная постоянная	$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$
универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31\ \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}$
постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}$
постоянная Авогадро	$N_A = 6 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}$
скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^8\ \text{м/с}$
коэффициент пропорциональности в законе Кулона	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$
модуль заряда электрона (элементарный электрический заряд)	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}$
постоянная Планка	$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}$

Соотношение между различными единицами

температура	$0\ \text{К} = -273\ ^\circ\text{C}$
атомная единица массы	$1\ \text{а.е.м.} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}$
1 атомная единица массы эквивалентна	931,5 МэВ
1 электронвольт	$1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}$

Масса частиц

электрона	$9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{кг} \approx 5{,}5 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.
протона	$1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \text{кг} \approx 1{,}007$ а.е.м.
нейтрона	$1{,}675 \cdot 10^{-27}\ \text{кг} \approx 1{,}008$ а.е.м.

Плотность

воды	$1000\ \text{кг/м}^3$	подсолнечного масла	$900\ \text{кг/м}^3$
древесины (сосна)	$400\ \text{кг/м}^3$	алюминия	$2700\ \text{кг/м}^3$
керосина	$800\ \text{кг/м}^3$	железа	$7800\ \text{кг/м}^3$
		ртути	$13600\ \text{кг/м}^3$

Удельная теплоемкость

воды	$4{,}2 \cdot 10^3\ \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}$	алюминия	$900\ \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}$
льда	$2{,}1 \cdot 10^3\ \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}$	меди	$380\ \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}$

железа	460 Дж/(кг · К)	чугуна	500 Дж/(кг · К)
свинца	130 Дж/(кг · К)		

Удельная теплота

парообразования воды	$2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг
плавления свинца	$2{,}5 \cdot 10^4$ Дж/кг
плавления льда	$3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг

Нормальные условия: давление 10^5 Па, температура 0 °С

Молярная масса

азота	$28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	кислорода	$32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
аргона	$40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	лития	$6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
водорода	$2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	неона	$20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
воды	$18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	углекислого	
воздуха	$29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	газа	$44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
гелия	$4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль		

Часть 1

Ответами к заданиям 1–24 являются цифра, число или последовательность цифр. Запишите ответ в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

1. На рисунке 1 приведен график зависимости проекции скорости тела v_x от времени. Проекция ускорения этого тела

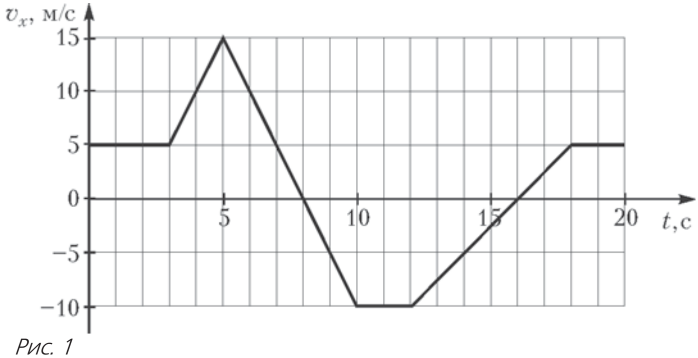


Рис. 1

a_x в интервале времени от 5 до 10 с представлена графиком (рис.2):

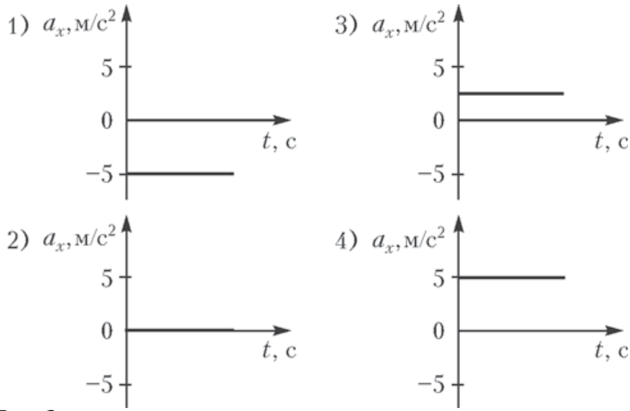


Рис. 2

2. Однородный куб опирается одним ребром на пол, другим – на вертикальную стену (рис.3). Плечо силы упругости $\vec{N}_2$ относительно оси, проходящей через точку O_3 перпендикулярно плоскости рисунка, равно:

1) 0; 2) O_1O_3 ; 3) OB; 4) AO_1 .

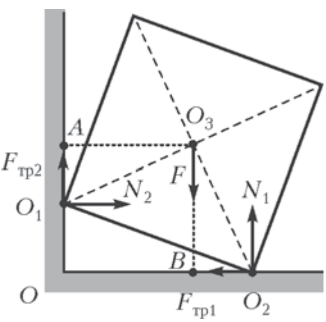


Рис. 3

3. Сила трения, действующая на скользящие по горизонтальной дороге стальные санки массой 8 кг, равна 16 Н. Каков коэффициент трения скольжения стали по льду?

4. В инерциальной системе отсчета тело массой 2 кг движется по прямой в одном направлении под действием постоянной силы, равной 3 Н. На сколько увеличится импульс тела за 5 с движения?

5. Скорость звука в воздухе 330 м/с. Длина звуковой волны 0,33 м. Какова частота колебаний источника звука?

6. Высота полета искусственного спутника над Землей увеличилась с 400 до 500 км. Как изменились в результате этого скорость спутника и его потенциальная энергия?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Скорость спутника	Потенциальная энергия спутника

7. На гладком горизонтальном столе брусок массой M, прикрепленный к вертикальной стене пружиной жесткостью k, совершает гармонические колебания с амплитудой A (рис.4).

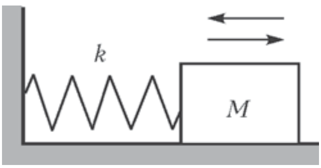


Рис. 4

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) амплитуда скорости груза	1) $A\sqrt{\dfrac{k}{M}}$
Б) период колебаний груза	2) $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$
	3) $A\sqrt{\dfrac{M}{k}}$
	4) $2\pi\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

8. Передача теплоты от тела с меньшей абсолютной температурой к телу с большей абсолютной температурой может происходить в процессе:

А) совершения работы;

Б) самопроизвольной теплопередачи.

Какое(-ие) из утверждений правильно(-ы):

1) только А; 2) только Б; 3) и А, и Б; 4) ни А, ни Б?

9. Ненасыщенный пар можно сделать насыщенным, если:

А) охладить пар при постоянном объеме и числе молекул;

Б) сжать пар при постоянном числе его молекул и постоянной температуре.

Какое(-ие) из утверждений правильно(-ы):

1) только А; 2) только Б; 3) и А, и Б; 4) ни А, ни Б?

10. В некотором процессе газ отдал окружающей среде количество теплоты, равное 10 кДж. При этом внутренняя энергия газа увеличилась на 30 кДж. Определите работу, которую совершили внешние силы, сжав газ.

11. В сосуде постоянного объема абсолютную температуру идеального газа увеличили в 2 раза, выпустив при этом половину газа из сосуда. Как изменились в результате этого давление газа в сосуде и его плотность?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Давление газа	Плотность газа

12. Одноатомный идеальный газ в количестве 4 моль помещают в герметичный закрытый сосуд объемом 83,1 л и начинают охлаждать. Масса газа в сосуде остается неизменной.

Установите соответствие между физическими величинами, характеризующими газ, и формулами, выражающими их зависимость от абсолютной температуры T газа в данных условиях (все значения величин в формулах указаны в единицах СИ).

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) внутренняя энергия газа $U(T)$	1) $\dfrac{400}{T}$
Б) давление газа $p(T)$	2) $49{,}86\ T$
	3) $400\ T$
	4) $\dfrac{49{,}86}{T}$

13. На рисунке 5 показаны два способа вращения прямоугольной металлической рамки в однородном магнитном поле. Ток в рамке:

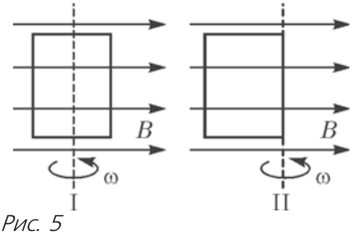


Рис. 5

1) не возникает ни при одном из способов;

2) возникает при обоих способах;

3) возникает только при втором способе;

4) возникает только при первом способе.

14. По двум прямым тонким длинным проводникам, параллельным друг другу, текут токи I (рис.6). В этом случае сила Ампера, действующая на проводник 2 со стороны проводника 1:

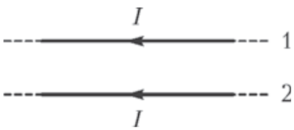


Рис. 6

1) направлена от нас $\otimes$;

2) направлена вверх $\uparrow$;

3) направлена вниз $\downarrow$;

4) равна нулю.

15. С какой силой взаимодействуют в вакууме два маленьких заряженных шарика, находящихся на расстоянии 4 м друг от друга? Заряд каждого шарика $8 \cdot 10^{-8}$ Кл.

16. В колебательном контуре (рис.7) напряжение между обкладками конденсатора меняется по закону $U_C = U_0 \cos \omega t$, где U_0 = 5 В, $\omega = 2000\pi$ с^1. Определите период колебаний напряжения.

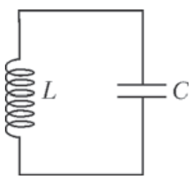


Рис. 7

17. Частица массой m, несущая заряд q, движется в однородном магнитном поле с индукцией B по окружности радиусом R со скоростью v. Что произойдет с радиусом орбиты и периодом обращения частицы, если ее скорость не изменится, а заряд увеличится?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Радиус орбиты частицы	Период обращения частицы

18. Пучок монохроматического света переходит из воды в воздух. Скорость света *в воде* v, скорость света *в воздухе* c, длина световой волны *в воде* λ.

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) показатель преломления воды относительно воздуха	1) $\dfrac{\lambda \cdot c}{v}$
Б) длина световой волны в воздухе	2) $\dfrac{v}{c}$
	3) $\dfrac{v \cdot \lambda}{c}$
	4) $\dfrac{c}{v}$

19. Ядро атома содержит 3 нейтрона и 4 протона, вокруг ядра обращаются 2 электрона. Эта система частиц является:

1) ионом лития ${}^{9}_{3}\mathrm{Li}$;

2) нейтральным атомом углерода ${}^{9}_{6}\mathrm{C}$;

3) нейтральным атомом бериллия ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$;

4) ионом бериллия ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}$.

20. В результате реакции ядра ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$ и α-частицы появились протон и ядро:

1) ${}^{28}_{14}\mathrm{Si}$; 2) ${}^{31}_{15}\mathrm{P}$; 3) ${}^{30}_{14}\mathrm{Si}$; 4) ${}^{32}_{16}\mathrm{S}$.

21. Длина волны красного света в 2 раза больше длины волны фиолетового света. Во сколько раз импульс фотона красного света меньше импульса фотона фиолетового света?

22. Как изменяются с уменьшением массового числа изотопов одного и того же элемента число нейтронов в ядре и число электронов в электронной оболочке соответствующего нейтрального атома?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Число нейтронов в ядре	Число электронов в электронной оболочке нейтрального атома

23. Ученик изучает свойства плоского конденсатора. Какую пару конденсаторов (рис.8) он должен выбрать, чтобы на опыте обнаружить зависимость емкости конденсатора от расстояния между его обкладками?

24. На рисунке 9 показана зависимость давления газа p от его

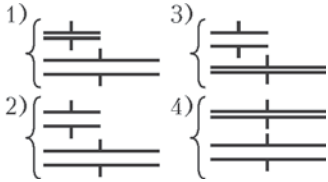


Рис. 8

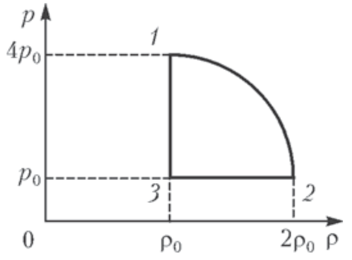


Рис. 9

плотности ρ в циклическом процессе, совершаемом идеальным газом в количестве 2 моль в идеальном тепловом двигателе. Цикл состоит из двух отрезков прямых и четверти окружности. На основании анализа этого циклического процесса выберите *два* верных утверждения:

1) в процессе *2–3* объем газа уменьшается;
2) в процессе *1–2* температура газа уменьшается;
3) в состоянии *3* температура газа максимальна;
4) работа газа в процессе *3–1* положительна;
5) отношение максимальной температуры к минимальной температуре в цикле равно 8.

Часть 2

Ответом к заданиям 25–27 является число. Запишите это число в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

25. Невесомый стержень, находящийся в ящике с гладкими дном и стенками, составляет угол $45°$ с вертикалью (рис.10). К середине стержня подвешен на нити шарик массой 1 кг. Каков модуль силы упругости $\vec{N}$, действующей на стержень со стороны левой стенки ящика?

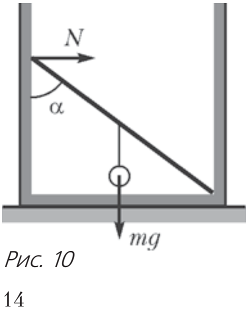


Рис. 10

26. Температура куска свинца массой 1 кг равна $37\ °C$. Какое количество теплоты надо передать ему, чтобы расплавилась половина его массы? Температура плавления свинца $327\ °C$.

Ответ выразите в килоджоулях (кДж). Тепловыми потерями пренебречь.

27. Когда на металлическую пластину падает электромагнитное излучение с длиной волны λ, максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов равна 4,5 эВ. Если длина волны падающего излучения равна 2λ, то максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов равна 1 эВ. Чему равна работа выхода электронов из металла?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов№1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи ответов на задания (28–32) используйте БЛАНК ОТВЕТОВ№2. Запишите сначала номер задания (28, 29 и т. д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.

28. На фотографии (рис.11) изображена электрическая цепь, состоящая из реостата, ключа, цифровых вольтметра, подключенного к батарее, и амперметра. Начертите принципиальную электрическую схему этой цепи. Как изменятся (увеличатся или уменьшатся) показания амперметра и вольтметра при перемещении движка реостата влево до конца? Ответ поясните, опираясь на законы электродинамики.

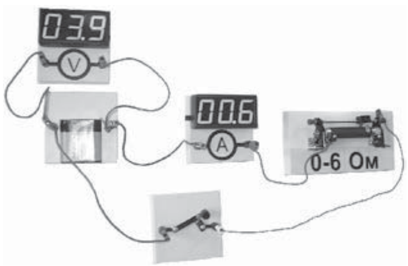


Рис. 11

Полное правильное решение каждой из задач 29–32 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и при необходимости рисунок, поясняющий решение.

29. В установке, изображенной на рисунке 12, масса грузика m подобрана так, что первоначально покоящаяся тележка после толчка вправо движется равномерно по поверхности трибометра. С каким ускорением будет двигаться тележка, если ее толкнуть влево? Масса грузика m в 9 раз меньше массы тележки M. Массами блока и нити пренебречь. Нить нерастяжима. Силу

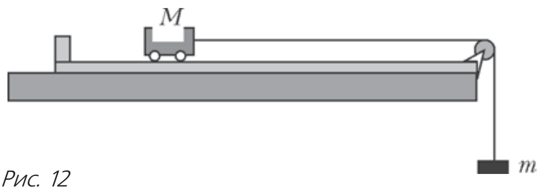


Рис. 12

сопротивления движению тележки считать постоянной и одинаковой в обоих случаях.

30. Воздушный шар объемом $2500\ м^3$ с массой оболочки 400 кг имеет внизу отверстие, через которое воздух в шаре нагревается горелкой до температуры $77\ °C$. Какой должна быть максимальная температура окружающего воздуха плотностью $1{,}2\ кг/м^3$, чтобы шар взлетел вместе с грузом (корзиной и воздухоплавателем) массой 200 кг? Оболочку шара считать нерастяжимой.

31. Протон влетает в электрическое поле конденсатора параллельно его пластинам в точке, находящейся посередине между пластинами (рис.13). Найдите минимальную скорость v, с которой протон должен влететь в конденсатор, чтобы затем вылететь из него. Длина пластин конденсатора 5 см, расстояние между пластинами 1 см, напряженность электрического поля конденсатора 5000 В/м. Поле внутри конденсатора считать однородным, силой тяжести пренебречь.

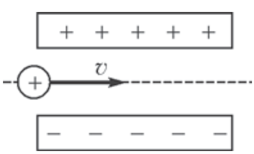


Рис. 13

32. Прямоугольная проводящая рамка, по которой течет постоянный ток $I = 0{,}5$ А, закреплена в однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции которого направлен параллельно плоскости рамки перпендикулярно одной из ее сторон (рис.14). Момент сил, действующих на рамку со стороны магнитного поля относительно оси OO_1, проходящей через центр рамки, $M = 1{,}5\ Н \cdot м$. Какой заряд q протечет по рамке, если после отключения тока повернуть ее на $180°$ вокруг оси OO_1? Сопротивление рамки $R = 10$ Ом.

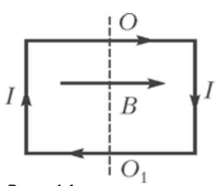


Рис. 14

Вариант 2 (2016 год)

Часть 1

1. Тело движется прямолинейно вдоль оси x так, что проекция его ускорения на эту ось постоянна и отрицательна. Какой из графиков (рис.15) зависимости проекции $v_x(t)$ скорости тела на эту ось соответствует такому движению?

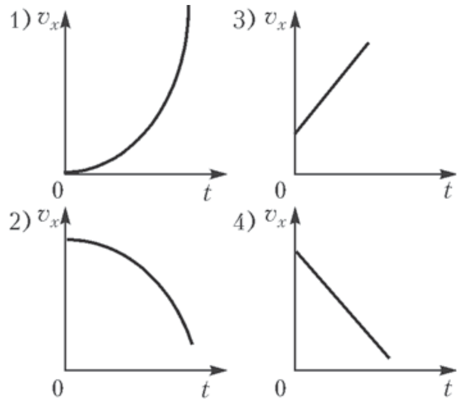


Рис. 15

2. На рисунке 16 представлены вектор равнодействующей $\vec{F}$ всех сил, действующих на тело, и вектор скорости этого тела $\vec{v}$ в инерциальной системе отсчета. Каково направление вектора ускорения тела в этой системе отсчета:

1) $\rightarrow$; 2) $\leftarrow$; 3) $\uparrow$; 4) $\nwarrow$?

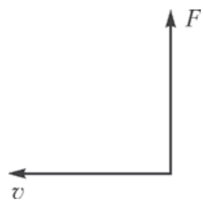


Рис. 16

3. Человек массой 80 кг с сумкой весом 100 Н стоит неподвижно на полу. Сила давления подошв его ботинок на пол равномерно распределена по площади $600\ \text{см}^2$. Какое давление человек оказывает на пол?

4. Тело массой 0,1 кг вращается в горизонтальной плоскости на нити длиной 1 м. Чему равна работа силы тяжести за один оборот вращения тела?

5. Через какое время после выстрела придет к охотнику эхо от звука выстрела, если расстояние до преграды, от которой отразится звук, равно 850 м? Скорость звука в воздухе считать равной 340 м/с.

6. Мальчик бросил стальной шарик вверх под углом к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, как меняются по мере приближения к земле модуль ускорения шарика и горизонтальная составляющая его скорости.

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Модуль ускорения шарика	Горизонтальная составляющая скорости шарика

7. Один конец легкой пружины жесткостью k прикреплен к бруску, а другой закреплен неподвижно. Брусок скользит по горизонтальной направляющей так, что его координата изменяется со временем по закону $x(t) = A\sin\omega t$.

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, выражающими их изменения во времени.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) потенциальная энергия пружины $E_п(t)$	1) $-kA\sin\omega t$
Б) проекция $F_x(t)$ равнодействующей силы на ось x	2) $-kA^2\sin^2\omega t$
	3) $kA^2\sin\omega t$
	4) $\dfrac{kA^2}{2}\sin^2\omega t$

8. Переход вещества из жидкого состояния в твердое при температуре его кристаллизации сопровождается:

1) уменьшением кинетической энергии теплового движения молекул вещества;

2) увеличением энергии взаимодействия молекул вещества;

3) уменьшением энергии взаимодействия молекул вещества;

4) увеличением кинетической энергии теплового движения молекул вещества.

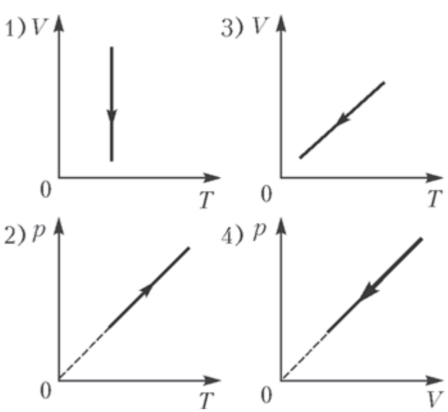


Рис. 17

9. Пустую пробирку, долго находившуюся в комнате, медленно погружают открытым концом вниз в воду комнатной температуры. В результате часть объема пробирки занимает вода. Какой график (рис.17) правильно описывает процесс, происходящий при этом с воздухом в пробирке?

10. На рисунке 18 показано, как менялось давление газа в зависимости от его объема при переходе из состояния *1* в состояние *2*, а затем в состояние *3*. Чему равно отношение работ газа $\frac{A_{12}}{A_{23}}$ при этих переходах?

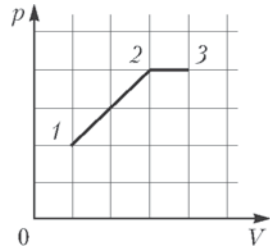


Рис. 18

11. Температуру нагревателя тепловой машины Карно увеличили, оставив температуру холодильника прежней. Количество теплоты, отданное газом холодильнику за цикл, не изменилось. Как изменились при этом КПД тепловой машины и количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя?

Для каждой величины определите соответствующий характер ее изменения:

1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

КПД тепловой машины	Количество теплоты, полученное газом от нагревателя за цикл работы

12. Установите соответствие между физическими процессами в идеальном газе неизменной массы и формулами, которыми эти процессы можно описать (N – число частиц, p – давление, V – объем, T – абсолютная температура).

К каждой позиции из первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите выбранные цифры под соответствующими буквами.

ПРОЦЕССЫ	ФОРМУЛЫ
А) изохорный процесс при N = const	1) $pV = \text{const}$
Б) изобарный процесс при N = const	2) $\frac{V}{T} = \text{const}$
	3) $VT = \text{const}$
	4) $\frac{p}{T} = \text{const}$

13. Два незаряженных медных шара, закрепленных на изолирующих подставках, соприкасаются между собой. Справа от них поместили отрицательно заряженное тело и затем раздвинули шары (рис.19). После удаления заряженного тела:

1) оба шара заряжены отрицательно;

2) шар 1 заряжен отрицательно, а шар 2 – положительно;

3) оба шара заряжены положительно;

4) шар 1 заряжен положительно, а шар 2 – отрицательно.

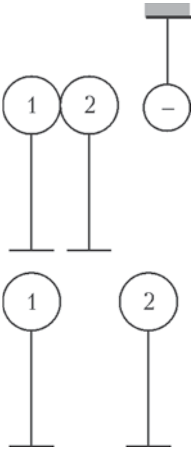


Рис. 19

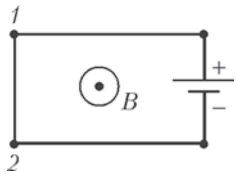


Рис. 20

14. Электрическая цепь, состоящая из прямолинейных горизонтальных проводников и источника постоянного тока, находится в однородном магнитном поле, вектор магнитной индукции $\vec{B}$ которого направлен перпендикулярно плоскости рисунка на нас (рис.20; вид сверху). Куда направлена вызванная этим полем сила Ампера, действующая на проводник *1–2*:

1) влево в плоскости рисунка $\leftarrow$;

2) вправо в плоскости рисунка $\rightarrow$;

3) перпендикулярно плоскости чертежа на нас $\odot$;

4) перпендикулярно плоскости чертежа от нас $\otimes$?

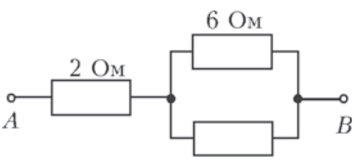


Рис. 21

15. Определите сопротивление участка цепи, изображенного на схеме (рис.21), между точками A и B.

16. Чему равна индуктивность катушки, если при силе тока $I = 4$ А энергия ее магнитного поля равна 0,01 Дж?

17. Протон в однородном поле между полюсами магнита движется по окружности радиусом r с частотой обращения ν и центростремительным ускорением $a_{цс}$. В этом же поле по окружности с таким же радиусом стала двигаться α-частица, обладающая такой же энергией, как и протон. Как изменились частота обращения в магнитном поле и центростремительное ускорение α-частицы по сравнению с протоном?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Частота обращения	Ускорение

18. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 22, подключена к аккумулятору. Напряжение на его клеммах равно U_0. Показания идеальных амперметра и вольтметра равны I и U соответственно.

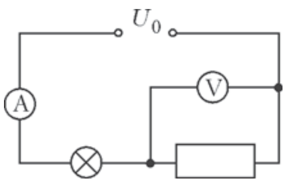


Рис. 22

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать. Внутренним сопротивлением аккумулятора пренебречь.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

А) мощность, потребляемая резистором

Б) сопротивление резистора

ФОРМУЛЫ

1) $\dfrac{U_0 - U}{I}$

2) $(U_0 - U)I$

3) UI

4) $\dfrac{U}{I}$

19. Ядро никеля $^{57}_{28}\mathrm{Ni}$ содержит:
1) 57 нейтронов и 28 электронов;
2) 28 протонов и 29 нейтронов;
3) 28 протонов и 57 нейтронов;
4) 57 протонов и 29 электронов.

20. В результате реакции синтеза $^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{9}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow ^{A}_{Z}\mathrm{X} + ^{1}_{0}n$ образуется ядро химического элемента $^{A}_{Z}\mathrm{X}$. Каковы зарядовое число образовавшегося ядра Z и его массовое число A:

1) Z = 5, A = 11; 2) Z = 5, A = 9; 3) Z = 4, A = 10; 4) Z = 5; A = 10?

21. Ядра полония $^{210}_{84}\mathrm{Po}$ испытывают α-распад с периодом полураспада 140 дней. В момент начала наблюдения в образце содержится $8 \cdot 10^{20}$ ядер полония. Через какую из точек (рис.23), кроме точки A, пройдет график зависимости от времени числа

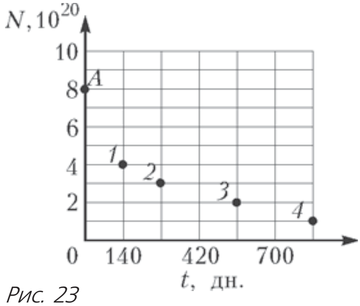


Рис. 23

ядер радиоактивного полония в образце?

22. При исследовании зависимости кинетической энергии фотоэлектронов от частоты падающего света фотоэлемент поочередно освещался через различные светофильтры. В первой серии опытов использовался светофильтр, пропускающий только фиолетовый свет, а во второй – пропускающий только зеленый. В каждом опыте наблюдали явление фотоэффекта и измеряли запирающее напряжение.

Как изменились частота падающей световой волны и запирающее напряжение при переходе от первой серии опытов ко второй?

Для каждой величины определите соответствующий характер ее изменения:

1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Частота света, падающего на фотоэлемент	Запирающее напряжение

Рис. 24

23. Чему равно давление воздуха в баллоне, если погрешность манометра $\Delta p = 3$ мм рт. ст. (рис.24):

1) 224 мм рт. ст.;

2) (224 ± 3) мм рт. ст.;

3) 236 мм рт. ст.;

4) (236 ± 3) мм рт. ст.?

24. На наклонной плоскости находится брусок массой 2 кг, для которого составили таблицу зависимости модуля силы трения $F_{тр}$ от угла наклона плоскости к горизонту α с погрешностью не более 0,01 Н:

α, рад	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$F_{тр}$, Н	0	1,0	2,0	3,86	3,76	3,63	3,46	3,25	3,01	2,75	2,45	2,13

Основываясь на данных, приведенных в таблице, и используя закон сухого трения, выберите *два* верных утверждения:

1) коэффициент трения скольжения равен 0,5;

2) при увеличении угла наклона от 0 до 0,1 рад сила трения покоя увеличивается;

3) брусок покоится, когда угол наклона плоскости составляет 0,6 рад;

4) в случае когда угол наклона плоскости составляет 0,1 рад, сила нормальной реакции больше 10 Н;

5) сила трения скольжения не зависит от угла наклона плоскости.

Часть 2

25. Снаряд, летящий со скоростью 100 м/с, разрывается на два осколка. Один из осколков летит под углом $90°$ к первоначальному направлению, а второй – под углом $60°$. Какова масса снаряда до разрыва, если второй осколок массой 1 кг имеет скорость 400 м/с? Массой взрывчатого вещества пренебречь.

26. В калориметре находятся в тепловом равновесии 50 г воды и 5 г льда. Какой должна быть минимальная масса болта, имеющего удельную теплоемкость $500\ Дж/(кг \cdot К)$ и температуру 339 К, чтобы после опускания его в калориметр весь лед растаял? Тепловыми потерями пренебречь.

27. Пороговая чувствительность сетчатки человеческого глаза к видимому свету составляет $1{,}65 \cdot 10^{-18}$ Вт, при этом на сетчатку глаза ежесекундно попадает 5 фотонов. Определите, какой длине волны это соответствует.

28. Две плоские пластины конденсатора, закрепленные на изолирующих штативах, расположили на небольшом расстоянии друг от друга и соединили одну пластину с заземленным корпусом, а другую со стержнем электрометра (рис.25). Затем пластину, соединенную со стержнем электрометра, зарядили. Объясните, опираясь на известные Вам законы, как изменяются показания электрометра при внесении между пластинами диэлектрической пластины. Отклонение стрелки электрометра пропорционально разности потенциалов между пластинами.

29. Маленький шарик массой $m = 0{,}3$ кг подвешен на легкой нерастяжимой нити длиной $l = 0{,}9$ м, которая разрывается

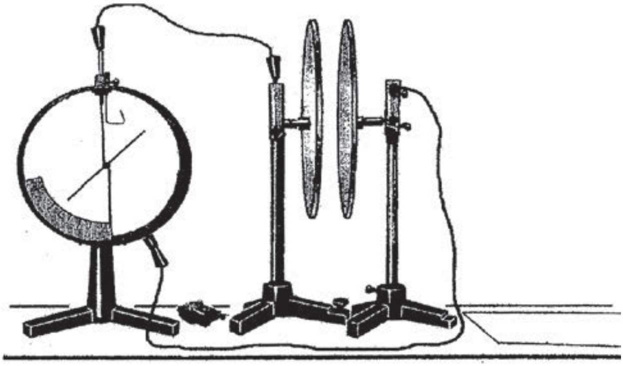


Рис. 25

при силе натяжения $T_0 = 6$ Н. Шарик отведен от положения равновесия (рис.26) и отпущен. Когда шарик проходит положение равновесия, нить обрывается и шарик тут же абсолютно неупруго сталкивается с бруском массой $M = 1{,}5$ кг, лежащим неподвижно на гладкой горизонтальной поверхности стола. Какова скорость u бруска после удара? Считать, что брусок после удара движется поступательно.

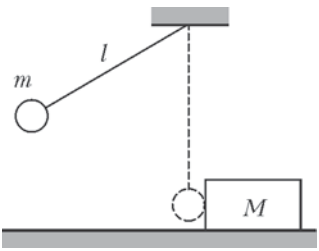


Рис. 26

30. В вертикальном цилиндре с гладкими стенками, открытом сверху, под поршнем находится одноатомный идеальный газ. В начальном состоянии поршень массой M и площадью основания S покоится на высоте h, опираясь на выступы (рис.27,*а*). Давление газа p_0 равно внешнему атмосферному. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу при медленном его

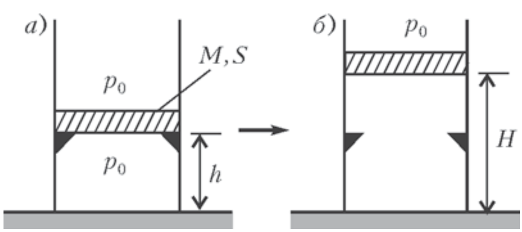


Рис. 27

нагревании, чтобы поршень оказался на высоте H (рис.27,*б*)? Тепловыми потерями пренебречь.

31. Электрическая цепь состоит из источника тока и реостата. ЭДС источника $\mathcal{E} = 6$ В. Максимальная мощность тока $P_{\max}$, выделяемая на реостате, достигается при промежуточном значении его сопротивления и равна 4,5 Вт. Чему равно внутреннее сопротивление источника?

32. В дно водоема глубиной 2 м вертикально вбита свая. На 1 м свая выступает из воды. Угол падения солнечных лучей на поверхность воды равен $30°$. Постройте ход лучей, формирующих тень от сваи на дне водоема, и определите ее длину. Показатель преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

Вариант 3 (2017 год)

Часть 1

Ответами к заданиям 1–23 являются цифра, слово, число или последовательность цифр или чисел. Запишите ответ в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

1. На рисунке 28 представлен график зависимости координаты x велосипедиста от времени t. Определите проекцию скорости велосипедиста на ось x в интервале времени от 10 до 20 с.

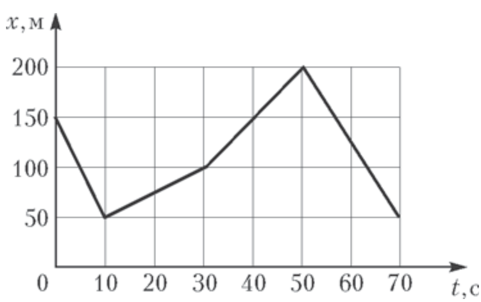


Рис. 28

2. При исследовании зависимости силы трения скольжения $F_{тр}$ деревянного бруска по горизонтальной поверхности стола от массы m бруска получен график, представленный на рисунке 29. Чему равен коэффициент трения в этом исследовании?

3. Шарик массой 200 г падает с высоты 20 м с начальной скоростью, равной нулю. Какова его кинетическая энергия в момент перед ударом о землю, если потеря энергии за счет сопротивления воздуха составила 4 Дж?

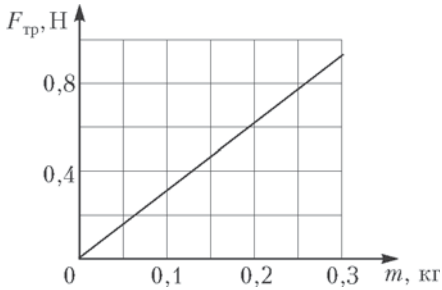


Рис. 29

4. Тело массой 0,3 кг подвешено к невесомому рычагу так, как показано на рисунке 30. Груз какой массы надо подвесить к третьей метке в правой части рычага для достижения равновесия?

5. Шарик катится по прямому желобу. Изменение координаты шарика с течением времени в инерциальной системе отсчета показано на графике (рис.31). На основании этого графика можно уверенно утверждать, что:

1) скорость шарика постоянно уменьшалась;

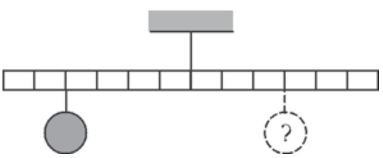


Рис. 30

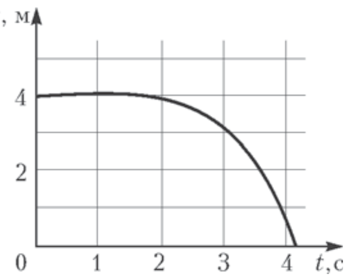


Рис. 31

2) на шарик действовала все увеличивающаяся сила;

3) первые 2 с равнодействующая всех сил, действующих на шарик, равна нулю;

4) первые 2 с скорость шарика не менялась, а затем ее модуль постепенно уменьшался;

5) первые 2 с шарик покоился, а затем двигался с увеличивающейся по модулю скоростью.

6. На поверхности воды плавает сплошной деревянный брусок. Как изменятся глубина погружения бруска и сила Архимеда, действующая на брусок, если его заменить сплошным бруском той же плотности и высоты, но большей массы?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Глубина погружения бруска	Сила Архимеда

7. После удара шайба массой m начала скользить со скоростью $\vec{v}_0$ вверх по плоскости, установленной под углом α к горизонту (рис.32). Коэффициент трения шайбы о плоскость равен μ.

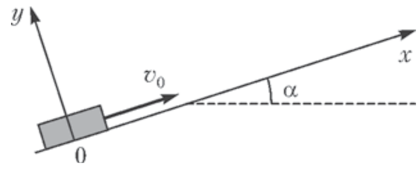


Рис. 32

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

А) модуль ускорения при движении шайбы вверх

Б) модуль силы трения

ФОРМУЛЫ

1) $g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

2) $\mu mg\cos\alpha$

3) $\mu mg\sin\alpha$

4) $g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$

8. На рисунке 33 изображено изменение состояния постоянной массы разреженного аргона. Температура газа в состоянии *1* равна $27\ ^\circ\mathrm{C}$. Какая температура соответствует состоянию *2*?

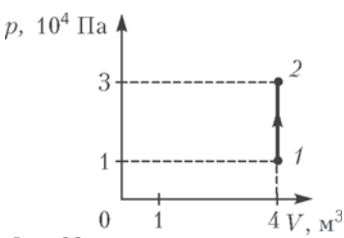


Рис. 33

9. Тепловая машина с КПД 40% за цикл работы отдает холодильнику количество теплоты, равное 60 Дж. Какое количество теплоты машина получает за цикл от нагревателя?

10. Какую работу совершает идеальный газ при переходе из состояния *1* в состояние *2* (рис.34)?

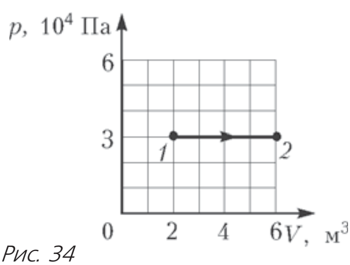


Рис. 34

11. Имеется два одинаковых баллона, оснащенных манометрами. В первом находится гелий, а во втором – водород при комнатной температуре. Показания манометра первого баллона составляют 100 кПа, а второго – 200 кПа. Баллоны соединяют коротким шлангом и открывают краны. Считая неизменной температуру газов, выберите из предложенного перечня *два* утверждения, которые соответствуют результатам проведенных экспериментальных наблюдений, и укажите их номера:

1) первоначально количество молей гелия в первом баллоне в 2 раза больше количества молей водорода во втором баллоне;

2) первоначально массы газов в баллонах равны;

3) после установления равновесия давление в первом баллоне увеличится в 1,5 раза;

4) после установления равновесия давление во втором баллоне уменьшится в 2 раза;

5) после открытия кранов давление в первом баллоне будет меньше, чем во втором.

12. Установите соответствие между графиками процессов, в которых участвует 1 моль идеального газа (рис.35), и значениями физических величин, характеризующих эти процессы (ΔU – изменение внутренней энергии, A – работа газа).

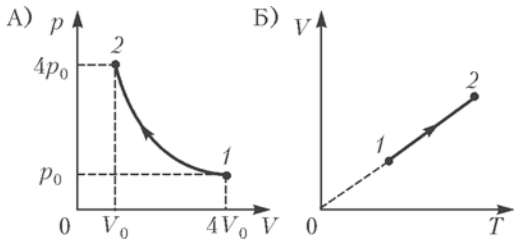


Рис. 35

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите выбранные цифры под соответствующими буквами.

ГРАФИКИ	ЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН
А)	1) $\Delta U = 0,\ A > 0$
	2) $\Delta U > 0,\ A > 0$
	3) $\Delta U > 0,\ A = 0$
	4) $\Delta U = 0,\ A < 0$
Б)	

13. Два параллельных длинных проводника с токами I_1 и I_2 расположены перпендикулярно плоскости чертежа (рис.36). Как направлен (*вверх, вниз, влево, вправо, от наблюдателя, к наблюдателю*) результирующий вектор магнитной индукции полей, создаваемых этими проводниками в точке A?

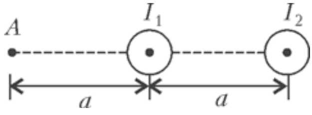


Рис. 36

14. Каким будет сопротивление участка цепи AB (рис.37), если ключ K замкнуть? Каждый из резисторов имеет сопротивление 5 Ом.

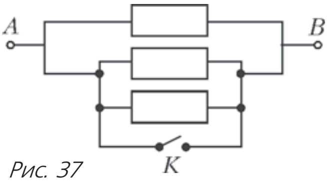


Рис. 37

15. На рисунке 38 приведен график зависимости силы тока от времени в электрической цепи, индуктивность которой 1 мГн. Определите модуль ЭДС самоиндукции в интервале времени от 5 до 10 с.

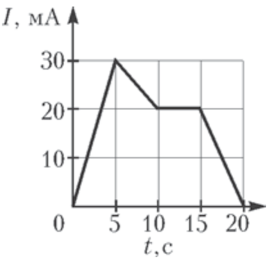


Рис. 38

16. На рисунке 39 изображены графики зависимости мощности лампы накаливания $P = P(T)$ и сопротивления ее спирали $R = R(T)$ от температуры. Выберите *два* верных утверждения, которые можно сделать, анализируя эти графики:

1) напряжение на спирали лампы при подводимой мощности $P = 200$ Вт меньше 150 В;

2) сопротивление спирали лампы при подводимой мощности $P = 100$ Вт равно 80 Ом;

3) с уменьшением мощности, подводимой к лампе, напряжение на ней падает;

4) напряжение на лампе возрастает пропорционально подводимой к ней мощности;

5) напряжение на спирали лампы при подводимой мощности $P = 100$ Вт равно 100 В.

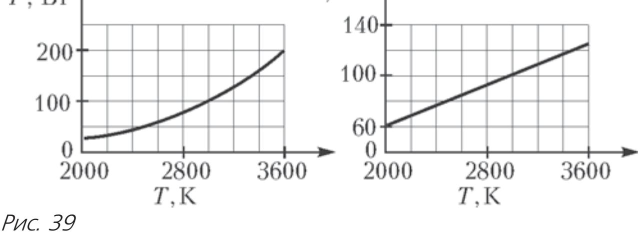


Рис. 39

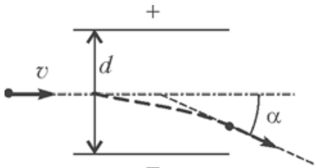


Рис. 40

17. Заряженная частица массой m, движущаяся со скоростью $\vec{v}$, влетает в поле плоского конденсатора (рис.40). Расстояние между пластинами конденсатора d, а напряженность электрического поля между пластинами E. Пролетев конденсатор, частица отклоняется от первоначального направления на угол α.

Как изменятся модуль скорости вылетевшей частицы и угол α, если уменьшить напряженность электрического поля между пластинами конденсатора?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Модуль скорости вылетевшей частицы	Угол отклонения α

18. Конденсатор колебательного контура подключен к источнику постоянного напряжения (рис.41). В момент $t = 0$ переключатель K переводят из положения *1* в положение *2*. Графики А и Б (рис.42) представляют изменения физических величин, характеризующих колебания в контуре после этого, T – период колебаний.

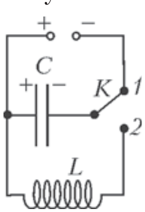


Рис. 41

Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут представлять.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите выбранные цифры под соответствующими буквами.

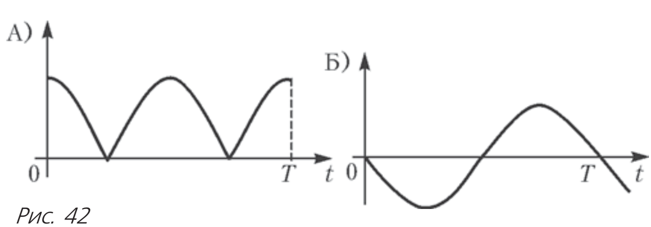


Рис. 42

ГРАФИКИ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

А)

1) сила тока в катушке
2) заряд левой обкладки конденсатора
3) энергия магнитного поля катушки
4) модуль напряжения на конденсаторе

Б)

19. На рисунке 43 представлен фрагмент Периодической системы элементов Д.И. Менделеева. Под названием каждого

2	II	**Li** 3 ЛИТИЙ 7_{93} $6_{7,4}$	**Be** 4 БЕРИЛЛИЙ 9_{100}	5 **B** БОР 11_{80} 10_{20}
3	III	**Na** 11 НАТРИЙ 23_{100}	**Mg** 12 МАГНИЙ 24_{79} 26_{11} 25_{10}	13 **Al** АЛЮМИНИЙ 27_{100}
4	IV	**K** 19 КАЛИЙ 39_{93} $41_{6,7}$	**Ca** 20 КАЛЬЦИЙ 40_{97} $44_{2,1}$	**Sc** 21 СКАНДИЙ 45_{100}
	V	29 **Cu** МЕДЬ 63_{69} 65_{31}	30 **Zn** ЦИНК 64_{49} 66_{28} 68_{19}	31 **Ga** ГАЛЛИЙ 69_{60} 71_{40}

Рис. 43

элемента приведены массовые числа его основных стабильных изотопов. При этом нижний индекс около массового числа указывает (в процентах) распространенность изотопа в природе. Укажите число протонов и число нейтронов в ядре наименее распространенного изотопа магния.

В бланк ответов №1 перенесите только числа, без пробелов и других дополнительных символов.

20. Образец радиоактивного радия находится в закрытом сосуде. Ядра радия $^{224}_{88}Ra$ испытывают α-распад с периодом полураспада 3,6 суток. Определите количество *гелия* (в моль) в сосуде через 3,6 суток, если в начальный момент времени образец содержал 1,8 моль радия-224.

21. На металлическую пластинку направили пучок света от лазера, вызвав фотоэффект. Интенсивность лазерного излучения плавно увеличивают, не меняя его частоты. Как меняются в результате этого число вылетающих в единицу времени фотоэлектронов и их максимальная кинетическая энергия?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не меняется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Число фотоэлектронов, вылетающих в единицу времени	Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов

Рис. 44

22. Ученик измерял силу тяжести, действующую на груз. Показания динамометра приведены на фотографии (рис.44). Погрешность изменения равна цене деления динамометра. Чему равна по результатам этих измерений сила тяжести? Запишите в ответ показания динамометра с учетом погрешности измерений.

В бланк ответов №1 перенесите только числа, без пробелов и других дополнительных символов.

23. Необходимо экспериментально изучить зависимость ускорения тела, скользящего по шероховатой наклонной плоскости, от массы груза (на всех представленных ниже вариантах рисунка 45: m – масса тела, α – угол наклона плоскости к горизонту, μ – коэффициент трения между бруском и плоскостью). Какие две установки следует использовать для проведения такого исследования?

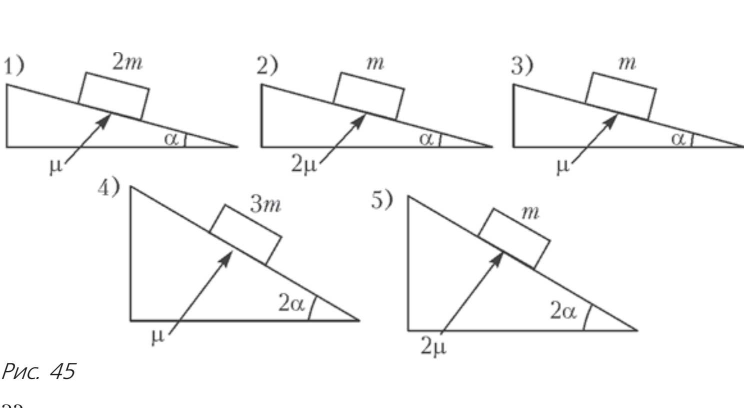


Рис. 45

Часть 2

Ответом к заданиям 24–26 является число. Запишите это число в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

24. Мяч брошен вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. Чему равно перемещение мяча за 3 с, считая от момента броска? Сопротивлением воздуха пренебречь.

25. В однородном магнитном поле по вертикальным направляющим без трения скользит прямой горизонтальный проводник массой 0,2 кг, по которому течет ток 2 А. Вектор магнитной индукции направлен горизонтально перпендикулярно проводнику (рис.46), $B = 2$ Тл. Чему равна длина проводника, если известно, что ускорение проводника направлено вниз и равно $2\ \text{м}/\text{с}^2$?

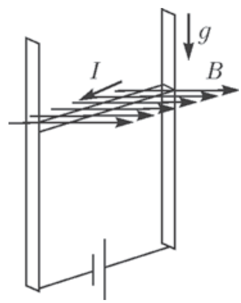


Рис. 46

26. На дифракционную решетку, имеющую 100 штрихов на 1 мм, перпендикулярно ее поверхности падает луч света, длина волны которого 650 нм. Каков максимальный порядок дифракционного максимума, доступного для наблюдения?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи ответов на задания (27–31) используйте БЛАНК ОТВЕТОВ№2. Запишите сначала номер задания (27, 28 и т. д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.

27. В вертикальном цилиндре с гладкими стенками под массивным металлическим поршнем находится идеальный газ. В первоначальном состоянии *1* поршень опирается на жесткие выступы на внутренней стороне стенок цилиндра (рис.47,*а*), а газ занимает объем V_0 и находится под давлением p_0 , равным внешнему атмосферному. Его температура в этом состоянии

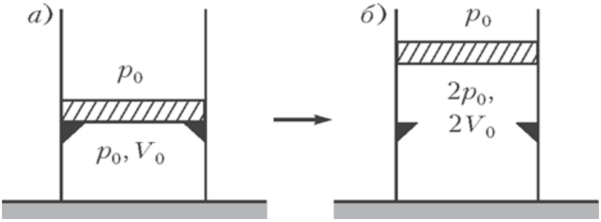


Рис. 47

равна T_0. Газ медленно нагревают, и он переходит из состояния *1* в состояние *2*, в котором давление газа равно $2p_0$, а его объем равен $2V_0$ (рис.47,*б*). Количество вещества газа при этом не меняется. Постройте график зависимости объема газа от его температуры при переходе из состояния *1* в состояние *2*. Ответ поясните, указав, какие явления и закономерности Вы использовали для объяснения.

Полное правильное решение каждой из задач 28–31 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и при необходимости рисунок, поясняющий решение.

28. Однородный тонкий стержень массой $m = 1$ кг одним концом шарнирно прикреплен к потолку, а другим концом опирается на массивную горизонтальную доску, образуя с ней угол $\alpha = 30°$. Под действием горизонтальной силы $\vec{F}$ доска движется поступательно влево с постоянной скоростью (рис.48). Стержень при этом неподвижен. Найдите F, если коэффициент трения стержня по доске $\mu = 0{,}2$. Трением доски по опоре и трением в шарнире пренебречь.

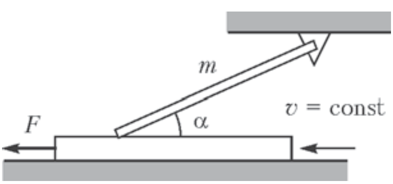


Рис. 48

29. Теплоизолированный горизонтальный сосуд разделен пористой перегородкой на две равные части. В начальный момент в левой части сосуда находится $\nu = 2$ моль гелия, а в правой – такое же количество аргона. Атомы гелия могут проникать через перегородку, а для атомов аргона перегородка непроницаема. Температура гелия равна температуре аргона $T = 300$ К. Определите отношение внутренних энергий газов по разные стороны перегородки после установления термодинамического равновесия.

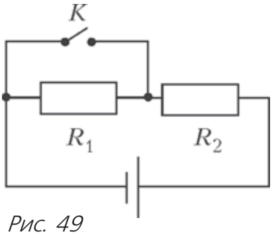


Рис. 49

30. Источник тока, два резистора и ключ включены в цепь, как показано на рисунке 49. При разомкнутом ключе на резисторе R_1 выделяется мощность $P_1 = 2$ Вт, а на резисторе R_2 – мощность $P_2 = 1$ Вт. Какая мощность будет выделяться на резисторе R_2 после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

31. В вакууме находятся два кальциевых электрода, к которым подключен конденсатор емкостью 4000 пФ. При длительном освещении катода светом фототок между электродами, возникший вначале, прекращается, а на конденсаторе появляется заряд $5{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл. «Красная граница» фотоэффекта для кальция $\lambda_0 = 450$ нм. Определите частоту световой волны, освещающей катод. Емкостью системы электродов пренебречь.

Публикацию подготовили М.Демидова, А.Черноуцан

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ВЫСШАЯ ПРОБА»

МАТЕМАТИКА

Отборочный этап

10 класс

1. В городе N каждый седьмой математик – философ, а каждый девятый философ – математик. Сколько математиков в городе не являются философами, если 360 философов не являются математиками?

2. На рисунке 1 изображены в некотором масштабе графики функций $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = 10 \cdot (x - 100)^2$. Оси координат не показаны. На сколько частей эти графики делят плоскость?

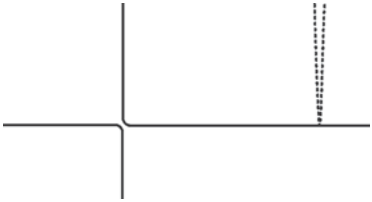


Рис. 1

3. В некоторый момент времени угол между часовой и минутной стрелками равен n градусам, причем известно, что $n < 90$. Ровно через 20 минут угол между часовой и минутной стрелками снова равен n градусам. Найдите n.

4. Все точки с целыми координатами на числовой прямой отметили либо красным, либо синим цветом, причем так, что любые два числа с разностью 7 закрашены одним цветом. Известно, что числа 74, 40 и 733 отмечены синим цветом, а числа 29, 142 и 86 – красным. Сколько существует различных раскрасок, удовлетворяющих всем перечисленным условиям?

5. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что $DC = 56$, $AD = 100$, $\angle BAC = \angle ADB$, а $\angle BAD = \angle ADC = 60°$. Найдите

AB. (Если ответ не целый, в поле ответов следует записывать его в виде десятичной дроби, отделяя целую часть от дробной части точкой.)

6. Вовочка выписал на доску в столбик 11 квадратных уравнений вида $x^2 + mx - 4 = 0$, где m пробегает все целые значения от 5 до −5. Во второй столбик он для каждого уравнения выписал наибольший из двух его корней. Чему равно произведение одиннадцати чисел во втором столбике? (Если ответ не целый, в поле ответов следует записывать его в виде десятичной дроби, отделяя целую часть от дробной части точкой.)

7. Петя решает задачу: *Из множества натуральных чисел от 1 до … включительно выбрано наугад одно число. Найти вероятность того, что это число будет делиться на 17.*

Петя решил задачу правильно и получил ответ 0.056. Какое наибольшее натуральное число могло стоять в условии задачи вместо многоточия?

8. Функция $f(x)$ определена при всех действительных x. При каждом x значение $f(x)$ равно наименьшему из чисел $5 + x - x^2$, $2 - x$. Найдите наибольшее значение функции $f(x)$. (Если ответ не целый, в поле ответов следует записывать его в виде десятичной дроби, отделяя целую часть от дробной части точкой.)

9. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Несколько (менее 100) островитян встретились, и каждый из них сказал про каждого из остальных, рыцарь тот или лжец. Фраза «Ты − лжец!» прозвучала ровно 286 раз. Сколько раз прозвучала фраза «Ты − рыцарь!»?

10. Деревянный брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, распилили тремя распилами, параллельными граням, на 8 маленьких брусков (рис.2). Чему равна площадь поверхности бруска с вершиной C_1, если площадь поверхности бруска с вершиной A составляет 78, с вершиной B − 42, C − 72, D − 126, A_1 − 110, B_1 − 62, D_1 − 170? (Если ответ не целый, в поле ответов следует записывать его в виде десятичной дроби, отделяя целую часть от дробной части точкой.)

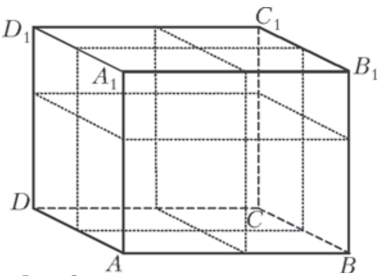


Рис. 2

11 класс

1 день

1. На ферму привезли корм, которого хватило бы уткам на 30 дней, гусям на 45 дней. На сколько дней хватит привезенного корма уткам и гусям вместе?

2. На рисунке 3 изображен график функции $y = a\sin bx + c$. Найдите значение выражения $ab + c$. (Если ответ не целый, в поле ответов отделяйте целую часть от дробной части точкой.)

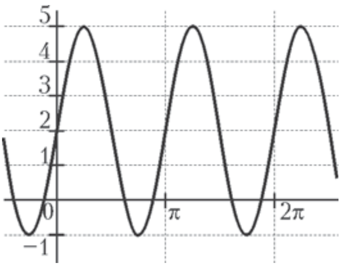


Рис. 3

3. Имеются часы, у которых минутная стрелка в два раза длиннее часовой (длина стрелки – расстояние от ее конца до центра часов, вокруг которого происходит вращение). В 12:00 часовая и минутная стрелки совмещаются, т.е. их концы и центр часов лежат на одной прямой. Через сколько минут после этого момента три точки – центр часов и концы стрелок – впервые окажутся вершинами прямоугольного треугольника?

(Если ответ не целый, в поле ответов запишите целую часть получившегося числа. Например, при ответе «через $\frac{47}{7}$ минут» в поле ответов следует записать число 6.)

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. См. задачу 5 для 10 класса.

6. Найдите сумму всех действительных корней всех уравнений вида $x^2 - 11x + m$, где m пробегает все целые значения от 1 до 2015.

7. См. задачу 7 для 10 класса.

8. Найдите значение параметра a, при котором вершина параболы $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 1$ находится на наименьшем расстоянии от начала координат. (Если ответ не целый, запишите его десятичной дробью, отделяя целую часть от дробной части точкой.)

9. У Васи есть мешок драгоценных камней. Он разложил все камни на две кучи равного веса. Пришел Коля и разложил все камни на две кучи так, что одна куча в 3 раза тяжелее другой. Затем пришел Петя и разложил все камни на две кучи так, что одна куча в 7 раз тяжелее другой. Известно, что в процессе деления каждый раз использовались все камни, при этом камни не разбивались на части. Какое наименьшее количество камней могло быть у Васи?

10. Деревянный брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, распилили тремя распилами, параллельными граням, на 8 маленьких брусков (см. рис.2). Чему равна площадь поверхности бруска с вершиной C, если площадь поверхности бруска с вершиной A составляет 130, с вершиной B − 184, D − 220, A_1 − 210, B_1 − 288, C_1 − 448, D_1 − 340? (Если ответ не целый, в поле ответов следует записывать его в виде десятичной дроби, отделяя целую часть от дробной части точкой.)

2 день

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. См. задачу 2 для 10 класса.

3. См. задачу 3 для 10 класса.

4. Известно, что число a при делении на 7 дает остаток 1, а при делении на 11 дает остаток 7. Найдите остаток от деления числа a на 77.

5. Внутри треугольника ABC взята точка D. Оказалось, что треугольник ACD − равнобедренный прямоугольный (прямой угол при вершине D), $\angle ABD = 17°$, $\angle DBC = 28°$. Найдите $\angle BCA$.

6. См. задачу 6 для 10 класса.

7. Сколько существует пар натуральных чисел (m,n) таких, что $\text{НОД}(m,n) = 3$, а $\text{НОК}(m,n) = 270$? (Пары, отличающиеся перестановкой, считаются различными, т.е., например, (1;2) и (2;1) − разные пары.)

8. См. задачу 8 для 10 класса.

9. См. задачу 9 для 10 класса.

10. Дан правильный тетраэдр $SABC$. Пусть U и V − середины ребер SA и BC соответственно. Прямая, проходящая через вершину S параллельно прямой UV, пересекает плоскость ABC в точке T. Найдите TV, если $AB = 18\sqrt{3}$. (Если ответ не целый, в поле ответов следует записывать его в виде десятичной дроби, отделяя целую часть от дробной части точкой.)

Заключительный этап

10 класс

1. Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три числа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?

2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

3. Каждый ход шахматного коня – перемещение на одну клетку по горизонтали и две по вертикали, либо наоборот – на одну по вертикали и две по горизонтали. (На рисунке 4 конь, отмеченный буквой K, может за один ход переместиться в любую из затемненных клеток.)

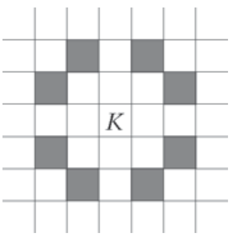


Рис. 4

В произвольной клетке прямоугольной доски размером 2×2016 клеток стоит шахматный конь. Перемещаясь по описанному правилу (и не выходя при этом за края доски), он может из этой клетки попасть в некоторые другие клетки доски, но не во все. Какое наименьшее количество клеток нужно добавить к доске, чтобы конь мог из любой клетки доски попасть во все остальные? (Добавление клетки происходит так, чтобы она имела общую сторону с одной из уже имеющихся. Добавлять можно любое количество клеток, получившаяся при этом доска не обязательно должна иметь прямоугольную форму.)

4. Функция $f(x)$, определенная при всех действительных x, является четной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство $f(x) + f(10 - x) = 4$.

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.

б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

5. Петя хочет проверить знания своего брата Коли – победителя олимпиады «Высшая проба» по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c и вычислил $x = \text{НОД}(a,b)$, $y = \text{НОД}(b,c)$, $z = \text{НОД}(c,a)$. Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

6, 8, 12, 18, 24

14, 20, 28, 44, 56

5, 15, 18, 27, 42

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 10 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ – количество таких расстановок. Например, $f(1) = 10$, $f(11) = 0$.

а) Что больше: $f(9)$ или $f(10)$?

б) Что больше: $f(5)$ или $f(6)$?

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.
2. См. задачу 2 для 10 класса.
3. См. задачу 4 для 10 класса.
4. См. задачу 5 для 10 класса.
5. Два коридора высотой и шириной в 1 м идут перпендикулярно друг другу по первому и по второму этажу здания. Разделяющее их перекрытие разобрано, образуя дыру 1×1 м в полу одного и потолке другого. Какова максимальная длина балки, которую можно передать из одного коридора в другой через дыру? (Балку считать негнущимся отрезком нулевой толщины. Толщина перекрытия также равна нулю, т.е. пол верхнего коридора и потолок нижнего коридора находятся в одной плоскости.)

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 2016 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ – количество таких расстановок. Например, $f(1) = 2016$, $f(2017) = 0$.

а) Что больше: $f(2015)$ или $f(2016)$?

б) Что больше: $f(1008)$ или $f(1009)$?

Публикацию подготовили Н.Курносов, Г.Мутафян

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ–2016»

МАТЕМАТИКА

В соответствии с Порядком проведения олимпиад школьников олимпиада «Ломоносов» по математике (а также по механике и математическому моделированию) проводилась в 2015/16 учебном году в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился в режиме онлайн и состоял из двух независимых друг от друга туров. Каждый школьник мог участвовать в любом из них или в обоих (в последнем случае засчитывался результат второго тура). Все задания публиковались на сайте олимпиады olymp.msu.ru.

К участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в марте 2016 года в Москве и ряде городов России, допускались только победители и призеры отборочного этапа.

Отборочный этап

Первый тур

1. Какое наибольшее количество подарков для детей можно собрать из 198 пряников, 462 конфет и 132 шоколадок, чтобы в каждом подарке было одинаковое количество пряников, одинаковое количество конфет и одинаковое количество шоколадок и чтобы все пряники, конфеты и шоколадки были использованы?

2. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)^{-1}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2},$$

если $a=\pi$, а b и c – корни уравнения $2015x^2-2015x+2=0$.

3. На окружности пытаются разместить 20 черных и 50 белых точек так, чтобы среди них можно было насчитать как можно больше всевозможных троек, являющихся вершинами прямоугольных треугольников с черными вершинами у прямых углов. Каково наибольшее количество таких троек?

4. Найдите все четырехзначные числа, которые уменьшаются в 16 раз после отбрасывания первой цифры. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

5. В треугольнике со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ на основании AC выбрана точка N так, что $AN : NC = 2 : 1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABN и CBN. При необходимости округлите результат до двух знаков после запятой.

6. Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{\frac{x+y}{2}} - \sqrt{xy}$, если известно, что $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2xy + \frac{1}{2}}$.

7. Решите уравнение

$$5\sin\left(2x + \arcsin\frac{4}{5}\right) + \sqrt{10}\cos\left(x - \arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = 7.$$

В ответе укажите сумму всех решений, принадлежащих промежутку $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}\right)$, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S ребро основания равно $a = 12\sqrt{2}$, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\arccos\frac{2}{3}$. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной AC и SD, причем так, что в это сечение можно вписать окружность. Найдите всевозможные значения радиусов этих окружностей. В ответ запишите сумму целых значений таких радиусов.

9. Найдите максимальное число, принадлежащее множеству значений функции

$$f(x) = 14115\sin^2 x + 10\cos^2 x + {}$$
$$+ 24180\sin 2x - 6048\cos x - 8064\sin x + 8050.$$

10. Найдите все значения y, при каждом из которых ровно два целых значения x удовлетворяют неравенству $\sqrt{y^2 - x^4} > x - y$. В ответе укажите сумму всех найденных целочисленных значений y.

Второй тур

1. В слове ЛОМОНОСОВ замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наибольшее возможное число, кратное 90.

2. Большие электронные часы на главной площади города показывают время от 00:00 до 23:59. Какова вероятность того, что в случайный момент времени в течение суток хотя бы одна из четырех цифр на часах окажется цифрой 0? Ответ дайте с точностью до двух знаков после запятой.

3. Решите неравенство $\sqrt{7+8\cos^2\left(\frac{\pi x}{18}\right)} > 4\sin^2\frac{\pi x}{18}$. В ответ впишите сумму всех целых решений, принадлежащих отрезку $[-18; 31]$.

4. Первый член и знаменатель геометрической прогрессии одинаковы и равняются 2^{k-2015}. Найдите все целые значения k, при которых сумма первых нескольких членов этой прогрессии может равняться 2016. В ответе укажите сумму всех таких значений k. Если таких значений нет, то в ответе укажите 0.

5. Найдите площадь выпуклого многоугольника с вершинами в точках, координаты $(x; y)$ которых являются целочисленными решениями уравнения $13x+48=13y+3xy$.

6. Даны 2015 уравнений:

$$x_1+x_2=-1007,\ x_2+x_3=-1006,\ \ldots,\ x_{1007}+x_{1008}=-1,$$
$$x_{1008}+x_{1009}=0,\ x_{1009}+x_{1010}=1,\ x_{1010}+x_{1011}=2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ x_{2014}+x_{2015}=1006,\ x_{2015}+x_1=1007.$$

Найдите x_{2014}.

7. На каждой из двух параллельных прямых, расстояние между которыми равно 2 см, отмечено по 10 точек с интервалом между соседними точками по 1 см. Из этих 20 точек нужно выбрать 9 так, чтобы каждые две из них отстояли друг от друга не менее чем на 2 см. Сколькими способами это можно сделать?

8. В треугольник ABC площади 25 вписана окружность с центром O, касающаяся сторон AB, BC и AC в точках L, M и N соответственно. При этом $AN:NC=3:7$. Найдите площадь треугольника AND, где D − точка пересечения прямых AO и NM. При необходимости округлите ответ до двух знаков после запятой.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственное число, одновременно удовлетворяющее неравенствам $(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0$ и $ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0$. Выберите среди этих значений a наибольшее и наименьшее и в ответе укажите расстояние между ними (если такое значение единственно, в ответе укажите 0), при необходимости округлив его до сотых.

10. В усеченной треугольной пирамиде $A_1B_1C_1ABC$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости большего основания ABC, $AB=AC=5$, $BC=6$ и $DD_1=\frac{20}{7}$, где D и D_1 − середины отрезков BC и B_1C_1 соответственно. Известно, что в эту усеченную пирамиду можно вписать шар. Найдите все возможные значения, которые может принимать радиус этого шара. В ответ впишите произведение этих значений, при необходимости округлив результат до двух знаков после запятой.

Заключительный этап

1. Незнайка прыгал от своего дома к дому Знайки. Три четверти пути он преодолел прыжками, длина которых равна двум его обычным шагам, а остальную четверть пути – прыжками, длина которых равна трем его обычным шагам. Оказалось, что прыжков в два шага оказалось на 350 больше, чем прыжков в три шага. Сколько обычных шагов от дома Знайки до дома Незнайки? Считаем, что все шаги у Незнайки одинаковые.

2. Найдите все решения уравнения $\operatorname{arcctg}^2 x = 3\operatorname{arctg}^2 x + \dfrac{\pi^2}{36}$.

3. Том Сойер, Сид Сойер и Гек Финн красили забор. Вначале Том красил один в течение времени, за которое Сид и Гек, работая вместе, могли бы покрасить половину забора. Затем красил один Сид в течение времени, за которое Том и Гек, работая вместе, могли бы покрасить $5/4$ всего забора. Потом красил один Гек в течение времени, за которое Том и Сид, работая вместе, могли бы покрасить четверть всего забора. В результате весь забор был покрашен. Во сколько раз быстрее они окончили бы работу, если бы с самого начала все время работали вместе? (Предполагается, что скорость работы каждого мальчика постоянна.)

4. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите длину стороны AC, если известно, что сумма векторов $3\cdot\overrightarrow{AA_1}+4\cdot\overrightarrow{BB_1}+5\cdot\overrightarrow{CC_1}$ равна вектору с координатами $(2;1)$.

5. Найдите все решения неравенства

$$\left(\log_{\frac{\pi}{6}}(2x-5)-\log_{\frac{\pi}{6}}(7-2x)\right)\times$$

$$\times\left(\cos\left(x+\frac{7}{4}\right)-\cos(2x-1)\right)\left(|x-4|-|2x-5|\right)\geq 0.$$

6. Найдите произведение всех значений x, при каждом из которых $\left(\sqrt{4-\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$, $2^{x^2-9x+11}$, $\left(\sqrt{4+\sqrt{11}}\right)^{x^2-9x+11}$ – арифметическая прогрессия.

7. Найдите наибольшее значение объема треугольной пирамиды, у которой противоположные ребра попарно равны, а сумма длин всех ребер равна $36\sqrt{2}$.

8. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из множества всех нечетных чисел, лежащих между 16 и 2016, чтобы ни одно из выбранных чисел не делилось ни на одно другое?

МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Некоторые задачи отборочного этапа

1. Два туриста – один на велосипеде параллельно берегу реки, другой на моторной лодке по реке – одновременно начали движение от пристани A, доехали до пристани B, развернулись и одновременно прибыли в исходный пункт своего маршрута, проехав при этом одинаковые расстояния. Велосипедист двигался со скоростью V = 12м/с, скорость течения реки u = 12,5 м/с. Найдите скорость моторной лодки в стоячей воде (в метрах в секунду), считая время, потраченное на развороты, одинаковым.

2. Гиря массой 200 граммов стоит на столе. Ее перевернули и поставили на стол другой гранью, площадь которой меньше на 15 см^2 . При этом давление на стол увеличилось на 1200 Па. Найдите площадь грани, на которой гиря стояла первоначально. Ответ дайте в см^2 , при необходимости округлите его до двух знаков после запятой.

3. Насос начинает набирать воду в 105-ведерную пустую бочку. В течение каждого нечетного часа он накачивает в бочку 15 ведер воды, а в течение каждого четного часа из бочки на огород выкачивает 10 с половиной ведер. Укажите номер часа (первый час имеет номер 1), в течение которого вода в бочке впервые польется через край.

4. Имеются две жидкости, массы которых одинаковы. В одной из них деревянный брусок плавает, погрузившись на 3/4 своего объема, а в другой — на 1/2 своего объема. Эти две жидкости тщательно перемешали (суммарный объем жидкостей при этом не изменился) и поместили в смесь тот же брусок. Какая часть объема бруска останется на поверхности смеси? При необходимости округлите ответ до сотых.

5. Населенные пункты Лисичанск, Оленевка и Медведьевка попарно соединены прямолинейными дорогами. К дороге между Лисичанском и Оленевкой примыкает квадратное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой. К дороге между Оленевкой и Медведьевкой примыкает прямоугольное поле, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая в 4 раза длиннее. К дороге между Лисичанском и Медведьевкой примыкает лес прямоугольной формы, одна сторона которого полностью совпадает с данной дорогой, а вторая сторона равна 12 км. При этом площадь леса на 45 кв. км больше суммы площадей полей. Найдите суммарную площадь леса и полей в квадратных километрах.

Заключительный этап

1. Расстояние от лежащей в горизонтальной плоскости точки до основания телевизионной башни равно 100 м. При этом из данной точки башня видна (от основания до верхушки) под углом 46°. Без использования таблиц, калькулятора и других вычислительных устройств определите, что больше: высота башни или 103,3 м?

2. На берегах имеющего форму круга (вид сверху) острова расположены города A, B, C и D. Прямолинейная асфальтовая дорога AC делит остров на две равные половины. Прямолинейная асфальтовая дорога BD короче дороги AC и пересекает ее. Скорость велосипедиста на любой асфальтовой дороге равна 15 км/ч. На острове имеются также прямолинейные грунтовые дороги AB, BC, CD и AD, скорость велосипедиста на которых одинакова. Велосипедист доезжает из пункта B до каждого из пунктов A, C и D по прямолинейной дороге за 2 часа. Найдите площадь, ограниченную четырехугольником $ABCD$.

3. Санная горка состоит из прямолинейного склона AB и горизонтального участка BC. Точка A находится на расстоянии 5 м от ближайшей к ней точки H горизонтальной земной поверхности. Расстояние HC равно 3 м, точка B лежит на отрезке HC. Найдите расстояние от точки H до точки B, чтобы время движения саней из состояния покоя по ломаной ABC было минимальным. Поле силы тяжести считать однородным, силой трения, сопротивлением воздуха и изменением модуля вектора скорости саней при прохождении точки сопряжения B пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным $10\ \text{м/с}^2$.

4. Один моль одноатомного идеального газа совершает циклический процесс $abca$. Диаграмма этого процесса в осях $p-T$ представляет собой криволинейный треугольник, сторона ab которого параллельна оси T, сторона bc – отрезок прямой, проходящей через начало координат, а сторона ca – дуга параболы, проходящей через начало координат, ось которой параллельна оси T. При этом в точках a и c температура газа одинакова и равна $T_0 = 320$ К, давление в точке a вдвое меньше давления в точке c. Определите работу, совершаемую газом за цикл.

5. Для перемещения между пунктами, расположенными на расстоянии сотен километров на земной поверхности, люди будущего, вероятно, будут прокапывать прямолинейные туннели, в которых капсулы будут перемещаться без трения исключительно под действием силы притяжения Земли. Пусть точки A, B и C лежат на одном меридиане, расстояние от A до B по поверхности относится к расстоянию от B до C по поверхности как $m : n$. Капсула проходит по туннелю AB примерно за 42 минуты. Оцените время движения по туннелю AC. Ответ дайте в минутах.

6. Кинофильм на пленке нужно перемотать с одной катушки на другую. Диаметры пустых катушек одинаковы и равны a. Найдите время, необходимое для перемотки. Считайте, что длина киноленты равна L, толщина кинопленки мала и равна S, а приемная катушка вращается с постоянной угловой скоростью ω.

ФИЗИКА

Отборочный этап

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 10 или 11 класса мог участвовать по собственному выбору в одном или двух турах, проводимых по единой форме и с равноценными заданиями. Задания олимпиады были размещены в интернете на сайте http://olymp.msu.ru. Доступ к условиям заданий был открыт для участников дважды: с 11 по 14 ноября 2015 года (первый тур) и с 29 ноября по 2 декабря 2015 года (второй тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением. Для учеников 7–9 классов отборочный этап проводился в один тур с 11 ноября по 2 декабря 2015 года.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

Ниже приводятся примеры заданий для участников отборочного этапа олимпиады.

7–9 классы

1. Желая определить массу m шарика объемом $V = 0{,}5\ \text{см}^3$, ученик подвесил его на легкой нити к концу тонкого однородного стержня массой $M = 4{,}5$ г и длиной $L = 5$ см. После этого он положил стержень на край тонкостенной кюветы с водой так, чтобы в воду погрузилась ровно половина шарика (рис.1).

Оказалось, что стержень находится в равновесии, если длина отрезка стержня от точки крепления нити до края кюветы равна $l = 2$ см. Определите массу шарика, считая плотность воды равной $\rho = 1\ г/см^3$. Ответ приведите в граммах, округлив до двух знаков после запятой.

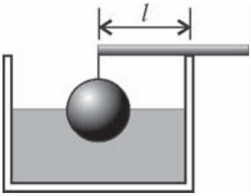


Рис. 1

2. Автомобиль трогается с места и, двигаясь равноускоренно по прямому горизонтальному шоссе, мокрому от дождя, проходит первые $s = 100$ м пути за время $\tau = 10$ с. Найдите скорость v капелек воды, которые отрываются в момент времени $t = \tau$ от поверхности шин автомобиля и летят в направлении его движения под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Считайте, что колеса автомобиля катятся по дороге без проскальзывания. Ответ округлите до одного знака после запятой.

3. Две пружинки, отрезанные от одной большой пружины, насчитывают $n_1 = 15$ и $n_2 = 20$ витков соответственно. Один конец первой пружинки соединен с осью подвижного блока, а другой ее конец свободен (рис.2). Вторая пружинка прикреплена одним концом к неподвижной опоре, а другим – к нити, перекинутой через неподвижный и подвижный блоки и привязанной к потолку. Когда к свободному концу первой пружины приложили некоторую силу, направленную вертикально вниз, он переместился на $\Delta l_0 = 16$ см. Какова сумма Δl возникших при этом растяжений обеих пружинок? Ответ приведите в сантиметрах, округлив до одного знака после запятой.

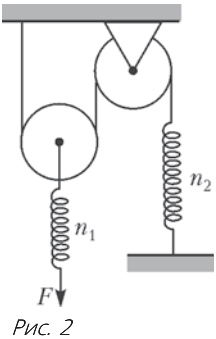


Рис. 2

4. Выполняя лабораторную работу по физике, ученик восьмого класса изучал процессы установления теплового равновесия. Для этого он смешивал в калориметре разные количества воды, взятой при некоторой положительной температуре, и льда, находящегося при некоторой отрицательной температуре. Выяснилось, что если масса льда в $k = 35$ раз превышает массу воды, то спустя некоторое время в калориметре оказывается только лед при нулевой температуре. Если же масса воды в 9 раз превышает массу льда, то после установления теплового равновесия содержимое калориметра представляет собой воду при нулевой температуре. При каком отношении n начальных масс льда и воды количество льда после установления теплового равновесия будет равно исходному его количеству?

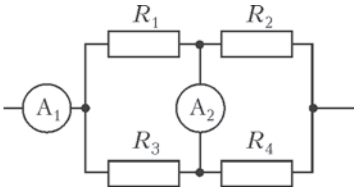


Рис. 3

Ответ округлите до одного знака после запятой.

5. В схеме, показанной на рисунке 3, использованы два идеальных амперметра A_1 и A_2. Отношение силы тока, текущего через амперметр A_1, к силе тока, текущего через амперметр A_2, равно n = 2,5. Определите сопротивление резистора R_1, если сопротивления остальных резисторов равны: R_2 = = 2 кОм, R_3 = 3 кОм, R_4 = 4 кОм. Ответ приведите в килоомах, округлив до двух знаков после запятой.

6. Изображение диапозитива на экране, полученное с помощью проекционного аппарата, оказалось не очень резким. В частности, изображение точки на экране имело вид круга. Не изменяя положения объектива, вплотную к нему прижали собирающую линзу с фокусным расстоянием F_1 = 10 см. При этом размер изображения точки не изменился. Найдите оптическую силу D_x линзы, которую надо было прижать к объективу, чтобы изображение стало резким. Ответ приведите в диоптриях, округлив до одного знака после запятой.

10—11 классы

Первый тур

1. С гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, с высоты H = 1 м соскальзывает небольшой шарик (рис.4). На высоте h = 55 см шарик отделяется от наклонной плоскости и после абсолютно упругого удара о пол продолжает движение в воздухе. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, какую начальную скорость v_0 надо сообщить шарику на вершине наклонной плоскости, чтобы он подпрыгнул на ту же высоту, с которой начал движение, т.е. на H. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до одного знака после запятой.

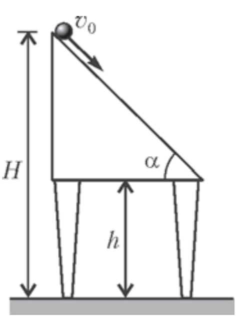


Рис. 4

2. Достаточно длинная доска массой M = 6 кг скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v = 0,6 м/с. На середину доски плавно опускают из состояния покоя небольшой брусок массой m = 2 кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}05$. После того как доска и брусок стали двигаться с одинаковой скоростью, доска резко остановилась, наткнувшись на препятствие. На каком расстоянии s от середины доски остановится брусок? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\ \text{м/с}^2$. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.

3. Холодильник, работающий по обратимому циклу, состоящему из двух адиабатных и двух изотермических процессов (цикл Карно), поддерживает в холодильной камере температуру $t_1 = -13\ °\text{C}$, отводя из нее за цикл работы количество теплоты $Q = 500$ Дж. Температура радиатора холодильника $t_2 = 26\ °\text{C}$. Определите среднюю мощность P, потребляемую холодильником, если длительность его цикла $\tau = 1{,}5$ с. Ответ выразите в ваттах, округлив до целых.

4. Два резистора сопротивлениями $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 200$ Ом и два конденсатора емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ подключены к источнику постоянного напряжения $U = 100$ В, как показано на рисунке 5. Какой заряд Δq протечет через проводник AB за достаточно большой промежуток времени после замыкания ключа, если конденсаторы были первоначально разряжены? Ответ приведите в микрокулонах, округлив до целых.

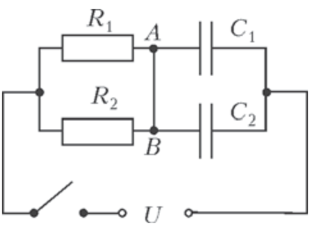


Рис. 5

5. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 10$ см и $F_2 = 20$ см расположены так, что их главные оптические оси совпадают. Расстояние между линзами $l = 40$ см. Определите увеличение Γ, даваемое этой системой линз для предмета, находящегося на расстоянии $d = 32$ см от первой линзы. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Второй тур

1. Подвижный клин с углом $\alpha = 30°$ при основании покоится на гладком горизонтальном столе (рис.6). На его гладкую наклонную поверхность кладут маленький брусочек и отпускают его с нулевой начальной скоростью, после чего оба тела приходят в движение. Пройдя расстояние $s = 20$ см, клин приобрел скорость $v = 40$ см/с, а брусочек к этому моменту времени опустился на

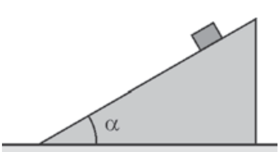


Рис. 6

h = 15 см. Найдите модуль $a_{\text{отн}}$ ускорения брусочка относительно клина. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

2. Грузик математического маятника совершает гармонические колебания, при которых максимальный угол отклонения нити от вертикали равен α_0 = 0,05 рад. Определите модуль угла φ_0 между вектором ускорения грузика и нитью спустя время, составляющее $1/8$ периода колебаний после прохождения грузиком положения равновесия. Ответ выразите в градусах, округлив до одного знака после запятой.

3. Расположенную вертикально трубку длиной l = 60 см, запаянную с одного конца, медленно погружают открытым концом вниз в достаточно глубокий сосуд с ртутью. На какую глубину x нужно погрузить нижний конец трубки, чтобы на внутренних стенках трубки выпала роса? Температуру воздуха в трубке считайте постоянной. Влажность атмосферного воздуха φ = 80%, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность ртути $\rho = 13{,}6\ \text{г/см}^3$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\ \text{м/с}^2$. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до одного знака после запятой.

4. Проволочная катушка с подсоединенным параллельно к ней резистором сопротивлением R = 100 Ом в течение достаточно длительного времени была подключена к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ = 10 В и внутренним сопротивлением r = 2 Ом (рис.7). После размыкания ключа через резистор протек заряд q = 5 мКл. Найдите индуктивность катушки L, считая, что ее сопротивление пренебрежимо мало. Ответ приведите в миллигенри, округлив до целых.

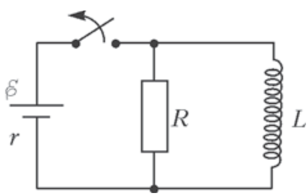


Рис. 7

5. Изучив законы геометрической оптики, любознательный школьник решил применить их на практике. С помощью собирающей линзы он получил на стене резкое изображение светящейся спирали настольной лампы. Переместив линзу к стене на Δl = 21 см, он получил на стене еще одно отчетливое изображение спирали. При этом второе изображение оказалось в n = 4 раза меньше первого. Определите расстояние L от лампы до стены. Ответ приведите в сантиметрах.

Заключительный этап

Проведение заключительного этапа олимпиады было назначено на 19 февраля 2016 года. Для учащихся всех классов этот этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ и на шести региональных площадках в городах Астана, Кисловодск, Саров, Смоленск, Уфа и Чебоксары.

Задание для учащихся 7–9 классов состояло из четырех задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10–11 классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2016 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание включало четыре различных раздела, состоящих из кратких вопросов по теории и дополняющих их задач. В первом разделе были помещены задания по механике, во втором разделе – задания по молекулярной физике и термодинамике, в третьем разделе – задания по электродинамике, в четвертом разделе – задания по оптике.

Ниже приводятся задания заключительного этапа олимпиады.

7–9 классы

1. Воинская колонна, совершающая пеший марш-бросок, растянулась при ходьбе на $L = 500$ м. Командир, находящийся во главе колонны, направил конного посыльного в хвост колонны с пакетом к своему заместителю. Посыльный поскакал навстречу колонне со скоростью $u = 36$ км/ч, вручил пакет заместителю командира и сразу же вернулся с той же скоростью к началу колонны, затратив на весь путь $t = 1$ мин 44 с. Найдите, с какой скоростью v двигалась колонна. Ответ приведите в м/с, округлив до целых.

2. Когда легковой автомобиль едет с постоянной скоростью по горизонтальному шоссе, расход бензина составляет $\mu_1 = 7$ л/100 км. Каков будет расход бензина μ_2, если этот автомобиль поедет с той же скоростью вверх по участку шоссе, уклон которого составляет 50 м на 1 км пути? Качество дорожного покрытия на горизонтальном и наклонном участках шоссе одинаково. Масса автомобиля $M = 1000$ кг, коэффициент полезного действия двигателя $\eta = 30\%$, удельная теплота сгорания бензина $q = 42$ МДж/кг, плотность бензина $\rho = 0{,}7$ кг/л. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ приведите в л/100 км, округлив до одного знака после запятой.

3. В цепи, схема которой показана на рисунке 8, сопротивление резистора $R = 500$ Ом, а между клеммами A и B поддерживается постоянное напряжение $U = 20$ В. Определите количе-

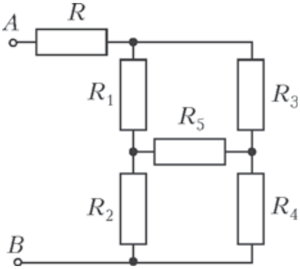


Рис. 8

ство теплоты Q, выделяющееся на этом резисторе за время $\tau = 5$ мин, если сопротивления остальных резисторов равны: $R_1 = 2R$, $R_2 = 4R$, $R_3 = R$, $R_4 = 2R$, $R_5 = R$. Ответ приведите в джоулях с точностью до одного знака после запятой.

4. Муха ползет по стене со скоростью $v = 3$ см/с. Плоское зеркало, параллельное стене, удаляется от стены со скоростью $u = 2$ см/с. С какой по модулю скоростью V движется изображение мухи в зеркале? Ответ приведите в см/с, округлив до целых.

10—11 классы

1. Дайте определение давления. Какие единицы измерения давления вы знаете?

Задача. На тележке, находящейся на горизонтальном столе, установлен сосуд в форме куба (рис.9). Сосуд доверху заполнен жидкостью, внутри которой в точках A, B, C закреплены три датчика давления. Треугольник ABC равнобедренный, основание BC вертикально и равно $2l = 0{,}5$ м, высота треугольника $AH = h = 0{,}5$ м. Когда тележку начали двигать влево с постоянным ускорением, часть жидкости вылилась, а ее свободная поверхность спустя достаточно большое время приняла установившееся наклонное положение. Какой угол α образует при этом поверхность жидкости с горизонтом, если все датчики давления остаются полностью погруженными в жидкость, а их показания равны $p_A = 100{,}6$ кПа, $p_B = 101$ кПа и $p_C = 106$ кПа соответственно?

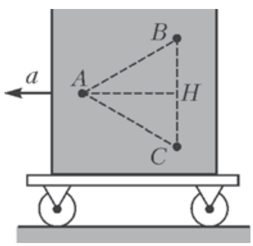


Рис. 9

2. Что такое внутренняя энергия термодинамической системы? Какими способами можно изменить внутреннюю энергию системы?

Задача. Над некоторым количеством гелия совершают циклический процесс, p–V-диаграмма которого показана на рисунке 10.

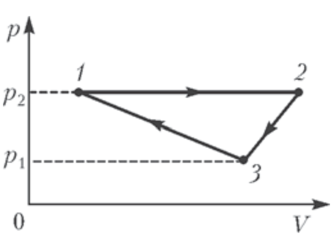


Рис. 10

Определите коэффициент полезного действия η цикла, если температура гелия при переходе из состояния *3* в состояние *1* монотонно падает, а отношение давлений $p_2/p_1 = n = 2$.

3. Сформулируйте закон Кулона. Чему равна напряженность электростатического поля точечного заряда?

Задача. Три тонкие проводящие концентричные сферы первоначально не заряжены, а первая и третья сферы соединены между собой тонким изолированным проводом, проходящим через малое отверстие во второй сфере (рис.11). Радиусы сфер $r_1 = R$, $r_2 = 2R$, $r_3 = 4R$. Какой заряд q_1 будет наведен на сфере радиусом r_1, если сообщить средней сфере заряд $q = 6$ нКл? Ответ выразите в нанокулонах, округлив до десятых.

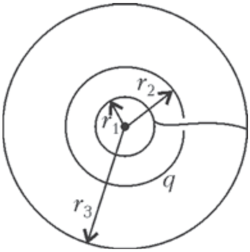


Рис. 11

4. Сформулируйте законы отражения света. Приведите пример построения изображения предмета в плоском зеркале.

Задача. На расстоянии $l = 20$ см от фокуса тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см расположена горящая свеча. Через некоторое время высота свечи уменьшилась на $\Delta h = 2$ см. Определите произошедшее при этом изменение ΔH высоты изображения свечи.

Публикацию по математике подготовили А.Зеленский, А.Козко, Л.Крицков, В.Панферов, А.Разборов, А.Савчук, И.Сергеев, И.Шейпак, М.Юмашев;
по механике и математическому моделированию – А.Зеленский, Е.Могилевский, М.Юмашев;
по физике – С.Чесноков

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

МАТЕМАТИКА

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» по математике в 2015/16 учебном году состояла из двух этапов: отборочного и заключительного. Отборочный этап проводился в ноябре – декабре 2015 года и состоял из блиц-тура (5 задач в онлайне, 3 часа на решение) и творческого задания (7 задач, решение которых нужно было отправить в течение недели). Победители и призеры отборочного этапа приглашались к участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в марте 2016 года в Москве и ряде городов России.

Отборочный этап

Блиц-тур

Каждый участник отборочного этапа получал свой набор задач, отличающийся от наборов задач других участников. Ниже приведен типичный набор из пяти задач.

1. Решите неравенство $\dfrac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8}\geq 1$. В ответе укажите сумму всех целочисленных значений x, удовлетворяющих данному неравенству и принадлежащих интервалу $(-70; 34)$.

2. Решите уравнение

$$\sin^4 x+5(x-2\pi)^2\cos x+5x^2+20\pi^2=20\pi x.$$

Найдите сумму его корней, принадлежащих отрезку $[-\pi; 6\pi]$, и укажите ее в ответе, при необходимости округлив до двух знаков после запятой.

3. Внутри прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC взята точка M так, что площади треугольников ABM и BCM составляют треть и четверть площади треугольника ABC соответственно. Найдите BM, если $AM = 60$ и $CM = 70$. В случае если ответ будет нецелым числом, округлите его до ближайшего целого.

4. Найдите наименьшее значение a, при котором система

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение. При необходимости округлите его до двух знаков после запятой. Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

5. Первая бригада рабочих кладет асфальт на одном участке дороги, а вторая бригада, в которой на 6 рабочих больше, – на другом, площадь которого втрое больше. Производительность всех рабочих одинакова. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде, если свою работу она выполнила быстрее? Если решений нет, то в ответе поставьте 0.

Творческое задание

1. На соревнованиях по бегу нужно пробежать дистанцию в 3 одинаковых круга, при этом круг содержит целое число километров. Тренер заметил, что второй круг спортсмен пробежал за 22 минуты. За сколько минут спортсмен пробежит всю дистанцию, если время прохождения им каждого километра, начиная со второго, увеличивается в арифметической прогрессии?

2. В подземелье у гномов в один ряд стоят 2016 сундуков с сокровищами: некоторые из них закрыты, некоторые – открыты. Гном по имени Открывай проходит вдоль ряда и открывает каждый сундук, который до этого был закрыт. Затем гном по имени Закрывай подходит к каждому второму сундуку и, если он открыт, закрывает его. Потом гном Открывай подходит к каждому третьему сундуку и, если он закрыт, открывает его. Затем гном Закрывай подходит к каждому четвертому сундуку и, если он открыт, закрывает его, и так далее. Всего гномы Закрывай и Открывай сделали 2016 проходов вдоль ряда. Сколько сундуков окажутся после всего этого закрытыми?

3. К равнобедренному треугольнику ABC с основанием AC достроили другой равнобедренный треугольник CBD с основанием CD так, что оба треугольника не имеют общих точек, кроме точек стороны BC. Точка E – точка пересечения прямой AD с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC. Найдите отношение основания CD к радиусу этой окружности, если $\cos\angle DCE = 6/7$ и $\angle CBD = 9/10$. В ответ запишите найденное отношение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

4. Определите, сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2016}.$$

5. Решите уравнение

$$(\cos x - 1)(2 + \sin x + 4\cos x) = 5(1 + \cos x)(2 - \sin x + 2\cos x).$$

В ответ запишите сумму всех корней на промежутке $[2016\pi; 2017\pi]$, при необходимости округлив ее до двух знаков после запятой.

6. Четырехугольная призма $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ с одинаковыми ребрами, равными a, вписана в пирамиду $SABC$ так, что точка S_1 лежит на ребре SA, точка P – на ребре SB, точка R – на ребре SC, а точка Q_1 принадлежит плоскости ABC. Найдите ребро SA пирамиды, если известно, что $SB = b$, $SC = c$. В ответе укажите найденное значение, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой ($a = 4$, $b = 13$, $c = 14$).

7. Назовем натуральное число m *замечательным*, если существует такое натуральное число k, не превосходящее 2015, что $m^2 - k + ([\cos m])^2 + 2m[\cos m]$ является полным квадратом (здесь $[\cos m]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $\cos m$). Найдите все замечательные числа. В ответ запишите их сумму.

Заключительный этап

Варианты, предлагавшиеся участникам заключительного этапа в разных городах России, отличались друг от друга. Здесь приводятся один из вариантов полностью и избранные задачи из других вариантов.

Вариант 1

1. Сравните числа $(\sin 1 + \cos 1)$ и $\dfrac{49}{36}$. Ответ обоснуйте.

2. Два мальчика в течение нескольких часов ходили кругами вокруг здания, оба по часовой стрелке, каждый с постоянной скоростью. Более быстрый проходил один круг за 5 минут, а более медленный – за некоторое целое число минут. При этом время между встречами тоже равнялось некоторому целому числу минут, причем оно было не меньше 12. За какое время более медленный мальчик проходил полный круг?

3. Найдите минимальное значение выражения $\sqrt{(x+6)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ при условии $2|x| + 3|y| = 6$.

4. Решите уравнение

$$\left[\log_2(\log_3 x)\right]^2 - 11\log_2\left(\left[\log_3 x\right]\right) + 18\log_2\left(\log_3\left(\left[x\right]\right)\right) = 0$$

(через $[t]$ обозначена целая часть числа t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

5. Боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ взаимно перпендикулярны. Точка D лежит на основании пирамиды ABC на расстоянии $\sqrt{5}$ от ребра SA, на расстоянии $\sqrt{13}$ от ребра SB и на расстоянии $\sqrt{10}$ от ребра SC. Какое наименьшее значение может иметь объем пирамиды $SABC$ при этих условиях?

Избранные задачи других вариантов

1. На соревнования по легкой атлетике ученики школы приехали на автобусе, вмещающем не более 40 человек. Каждый из них участвовал в одном из видов соревнований. При этом $1/7$ часть учеников завоевали золотые медали, $1/4$ часть – серебряные и еще $1/4$ – бронзовые. На обратном пути медалисты решили собрать деньги и купить по одному торту каждому из спортсменов, оставшемуся без медалей. Сколько тортов им придется покупать?

2. Футбольный мяч шьется из 32 кусочков кожи: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный кусочек граничит только с белыми кусочками, каждый белый кусочек граничит с тремя черными и тремя белыми. Сколько черных кусочков нужно для изготовления мяча?

3. В десятичной записи натурального числа, состоящей только из цифр 4 и 5, количество цифр 5 нечетно и на 17 больше количества цифр 4. Найдите все возможные остатки от деления этого числа на 9.

4. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 93, а сумма следующих 5 членов равна 2976. Найдите сумму первых 7 членов прогрессии.

5. Для бригады маляров-учеников была запланирована окраска 360 кв. м стен. Перед началом работы один из учеников заболел, и вместо него работал мастер, производительность которого в 3 раза больше производительности каждого из учеников. Поэтому каждый из учеников в действительности покрасил на 6 кв. м меньше, чем планировалось. Все ученики и мастер работали одинаковое время. Сколько учеников работало?

6. Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$8x^2 + y^3 = 2016.$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1 .$$

8. Какие значения может принимать выражение $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 – несовпадающие между собой корни уравнения $x^3 - 2015x + 2016 = 0$?

9. Решите уравнение

$$x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x - 7 = \left(\frac{3}{4} - \log_3 \sqrt{2}\right) \cdot \log_2 49 .$$

10. Решите неравенство

$$(1-x)^{\left(\log_{\sin 7} \sqrt{1-x}\right)^{-1}} > \log_{(-3x)} (1-x) - \cos^2 7 .$$

11. На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* расположены точки *M* и *N* соответственно. При этом *AM* : *MB* = 3 : 1, *CN* : *BN* = 1 : 7. Какой процент от площади четырехугольника *AMNC* составляет площадь треугольника *MBN*?

12. В окружность с центром *O* вписан четырехугольник *ABCD*, диагонали *AC* и *BD* которого пересекаются в точке *M*, причем *AM* = 4, *AB* = 6. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали *BD*, если известно, что стороны *AB* и *AD* равноудалены от точки *O*.

13. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды *SABC* равен $\operatorname{arctg} 3$. В каком отношении делит боковую сторону *SB* сфера, центр которой лежит в плоскости основания, если известно, что вершины основания принадлежат сфере?

14. Найдите сумму всех лежащих на отрезке $[-75; 5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1} \geq \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right) - \frac{x}{10} .$$

15. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2}\sin 3x + \sqrt{2 + \cos 3x}\right)\left(2\cos\left(\sqrt{2}\arcsin x\right) - 1\right) = 0 .$$

16. Найдите сумму первых ста положительных корней уравнения

$$\cos(8\pi x) + 2\cos(4\pi x) - \cos(2\pi x) + 2\sin(\pi x) + 3 = 0 .$$

17. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}(|x|+1)a = y+\cos x,\\ \sin^4 x + y^4 = 1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

18. При каких значениях a и b неравенство $b < 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} \le a$ выполняется для всех действительных x?

19. Укажите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+2y^2+2y(x-a)+a^2=0,\\ 2^{-2-y}\cdot\log_2 x < 1\end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

20. Найдите количество точек на координатной плоскости, через которые проходит как кривая $\left(4x^3-3x\right)^{15} = 1-\left(4y^3-3y\right)^{16}$, так и кривая $x^2 = 1-y^2$.

Публикацию подготовили В.Галатенко, А.Зеленский, А.Козко, Л.Крицков, В.Панферов, А.Разборов, И.Сергеев, И.Шейпак, М.Юмашев

ИНЖЕНЕРНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

В течение нескольких последних лет Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е.Алексеева, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П.Королева и Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» проводят необычную олимпиаду – Инженерную олимпиаду школьников. Задания этой олимпиады посвящены физике в технике, физике вокруг нас, физике в жизни человека. Многие задания олимпиады отвечают на вопрос «как это работает».

Инженерная олимпиада школьников входит в Перечень олимпиад как олимпиада второго уровня.

Ниже приводится задание заключительного тура олимпиады 2015/16 учебного года.

Заключительный тур

9–10 классы

1. На рисунке 1 показаны две схемы расположения барабанного тормоза автомобиля. Принцип работы тормоза заключается в следующем. На оси колес надеты цилиндрические барабаны, вращающиеся вместе с колесами. К торцевым стенкам барабана (которые вместе с барабаном не вращаются) прикреплены две тормозные колодки A и B (в точках 1, 2, 3 и 4). При нажатии на педаль тормоза возрастает давление жидкости в тормозных цилиндрах C, колодки прижимаются к внутренней поверхности барабана и тормозят его благодаря трению. Какая система – показанная на левом или на правом рисунке – тормозит более эффективно? Направление вращения барабана показано стрелкой. Ответ обоснуйте.

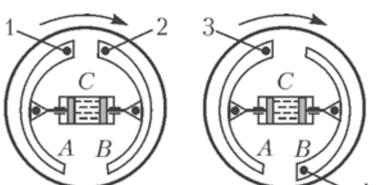


Рис. 1

2. В шахтный водосборник – резервуар для сбора шахтных вод перед их откачкой водоотливной установкой – равномерно поступает вода. Первоначально водосборник был пустой, а на откачку воды из камеры водосборника работал один насос. Насос не справлялся с водой, так что за время $t_1 = 6$ мин камера заполнилась наполовину. Тогда включили второй (точно такой же) насос, но вода продолжала прибывать – еще через $t_2 = 15$ мин камера была заполнена полностью. За какое время камера опустеет, если в момент ее полного заполнения включить третий (точно такой же) насос?

3. Найдите сопротивление цепи (рис.2). Сопротивления резисторов указаны на рисунке.

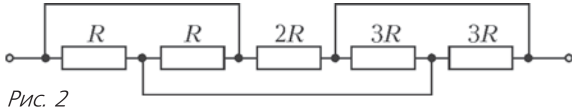


Рис. 2

4. В типографию завезли бумагу в рулоне. Во время работы рулон разматывают и используют бумагу для печати газет. Через 40 дней работы оказалось, что радиус оставшейся части рулона составляет $2/3$ от начального. На сколько дней работы хватит его оставшейся части? Считайте, что типография работает с одинаковой интенсивностью, бумага намотана до самой оси рулона.

5. Важным параметром любого жидкостного насоса является его напорно-расходная характеристика, которая показывает, какой перепад давлений Δp (напор) может обеспечить насос в зависимости от количества жидкости μ, которое он может прокачать в единицу времени (расход). Эта зависимость, как правило, является убывающей функцией: при большом расходе насос может обеспечить только маленький напор и наоборот. Два насоса с напорно-расходными характеристиками $\Delta p_1 = p_0 - \alpha\mu^2$ и $\Delta p_2 = p_0 - \beta\mu^2$, где p_0, α и β – известные числа с соответствующими размерностями, включены в трубопровод так, как показано на рисунке 3 (параллельно). Каким будет расход в системе насосов при напоре $\Delta p = p_0/2$? Какой напор обеспечит система насосов при расходе в трубопроводе μ_0?

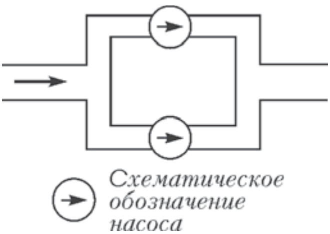


Рис. 3

6. Через помещение, в котором поддерживается постоянная температура $t = 15$ °C, проходит труба с горячей водой. Температура трубы в том месте, где она входит в помещение, равна $t_1 = 75$ °С, а в том месте, где выходит, – $t_2 = 30$ °С. Чему равна температура посередине трубы? Считайте, что теплообмен между тем или иным участком трубы и помещением пропорционален разности температур этого участка трубы и помещения.

11 класс

1. Для измерения угла склонения звезды или планеты над горизонтом используется секстант, идею которого предложил И.Ньютон. Секстант состоит из неподвижной рамы P с лимбом $Л$ и нанесенной на нем угловой шкалой (образующей $1/6$ полного угла – отсюда название прибора), подвижной радиальной планки – алидады A, имеющей шарнирное крепление в центре рамы, жестко связанного с алидадой в центре секстанта зеркала $З_1$, полупрозрачного неподвижного зеркала $З_2$, параллельного нулевому отсчету шкалы лимба, и зрительной трубы $ЗТ$. Посмотрите на рисунок 4 и опишите, как с помощью секстанта можно измерить угол склонения планеты над горизонтом. Что нужно измерять, чтобы найти угол склонения планеты? Секстант можно использовать и на палубе корабля при сильной качке. Объясните, почему качка «не мешает» проводить измерения.

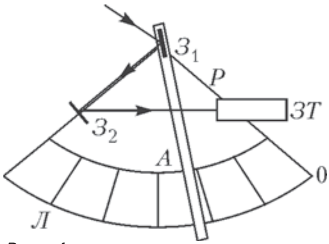


Рис. 4

2. Цепь из трех резисторов сопротивлениями $r_1 = R$, $r_2 = R$, $r_3 = 2R$ и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 (рис.5). Найдите среднюю тепловую мощность, которая будет выделяться на каждом резисторе за большое время. Идеальный диод проводит электрический ток в одном направлении – в направлении стрелочки в обозначении диода. Провода сопротивления не имеют.

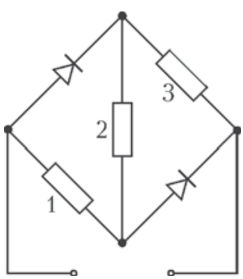


Рис. 5

3. В ряде случаев шлицы (углубления или пазы в головках крепежных изделий – винтов, болтов и т.д.) должны иметь нестандартную форму. Рассмотрим шлиц в виде прямоугольного треугольника с катетами a (AB) и $3a/2$ (BC) (рис.6). В шлиц вставлен ключ, зазоры между сторонами которого и сторонами шлица малы. К ручке ключа приложены две силы (пара сил), создающие момент M. Определите силы, с которыми ключ действует на грани шлица. Трением пренебречь.

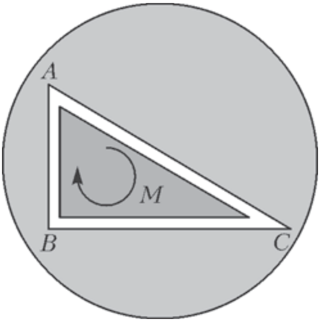


Рис. 6

4. См. задачу 5 для 9–10 классов.

5. В небольшое блюдце налили M = 20 г воды. Оцените, за какое время вода полностью испарится. Температура воды и воздуха $t = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, давление насыщенных паров воды при этой температуре $p = 2{,}4 \cdot 10^3$ Па, площадь блюдца $S = 100$ см^2, относительная влажность воздуха $\varphi = 70\%$. Считайте, что влажность воздуха одинакова во всем объеме помещения (в том числе и около поверхности) и не меняется в процессе испарения.

6. См. задачу 6 для 9–10 классов.

Публикацию подготовили М.Бушуева, Е.Изжеуров, Б.Комаров, А.Минина, С.Муравьев, А.Прунцев, В.Скрытный, И.Чостковская

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

МАТЕМАТИКА

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

11 класс

Вариант 1

1. Найдите какое-нибудь натуральное число, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 2016.

2. Решите уравнение $\left(x^2+3x+6\right)\left(x^2+7x+16\right)=41$.

3. Докажите, что для любого треугольника с длинами сторон a, b, c и углами α, β, γ (α – напротив стороны a, β – напротив b, γ – напротив c) выполняются равенства

$$a^2+b^2-2ab\cos(60^\circ+\gamma)=$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos(60^\circ+\alpha)=a^2+c^2-2ab\cos(60^\circ+\beta).$$

4. Две частицы находятся в вершинах правильного 2016-угольника. В начальный момент первая частица находится на расстоянии 45 сторон по часовой стрелке от второй. Затем одновременно они начинают совершать прыжки: вторая – против часовой стрелки через 100 сторон, а первая – по часовой стрелке через 83 стороны. Попадут ли они одновременно в одну вершину и если да, то через сколько прыжков?

5. На плоскости изображен квадрат $n\times n$ клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу («теплый пол») так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход – в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток.

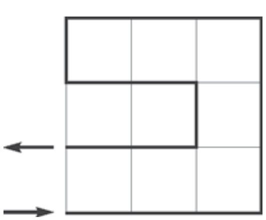


Рис. 1

На рисунке 1 изображен пример укладки трубы в квадрате 3×3. Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечетном значении n и невозможно ни при каком четном n.

6. Первый спортсмен начинает движение из пункта A в пункт B, держа в руке эстафетную палочку. Одновременно с ним из пункта B стартует второй спортсмен и совершает челночный бег между пунктами A и B со скоростью, в 10 раз большей, чем скорость первого спортсмена (т.е., добежав до A, второй спортсмен тут же разворачивается и бежит в B, оттуда снова в A и т.д.). При каждой встрече спортсмен, владеющий эстафетной палочкой, передает ее другому спортсмену. Найдите путь, который будет проделан эстафетной палочкой к тому моменту, когда первый спортсмен окажется в пункте B, если расстояние между пунктами A и B равно S.

7. Пусть x – действительное число. Обозначим символом $\|x\|$ расстояние на числовой прямой от x до ближайшего целого числа. (Например, $\|3,7\| = 0,3$.) Докажите, что найдется натуральное число k такое, что: 1) $k \le 999$ и 2) $\|k\sqrt{2}\| < \dfrac{1}{1000}$.

8. Найдите все пары натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству:

$$x^2 + y^2 = 100\,000.$$

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сравните числа: $5\cos^2 x + 4\sin x\cos x + \sin^2 x = 2$,
$\lg^3 16 + 3\lg^2 16 \cdot \lg 2 + 3\lg 16 \cdot \lg^2 2 + \lg^3 2$ и $(\log_4 8)^3$.

2. Решите уравнение

$$5\cos^2 x + 4\sin x\cos x + \sin^2 x = 2.$$

3. Решите уравнение

$$\left|3^x - 9\right| = 9^x + 3^{x+1} - 12.$$

4. Сумма первых шести членов возрастающей геометрической прогрессии в четыре раза больше суммы второго и пятого членов. Найдите знаменатель прогрессии.

5. После ремонта путей на участке в 100 км скорость поездов увеличилась на 15%, за счет чего время прохождения участка уменьшилось на 15 мин. За какое время поезда стали проходить этот участок?

6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота, делящая треугольник ABC на два треугольника, площади которых равны 4 и 16. Найдите длину гипотенузы треугольника ABC.

7. Решите неравенство

$$\frac{2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 2}} + 3x \leq 4x^2 + 1.$$

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_3(3x) + \log_3|x - 1| + \log_3 a = 0$$

имеет ровно одно решение?

ФИЗИКА

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

11 класс

Вариант 1

1 (5 баллов). Ромб составлен из жестких стержней длиной L. Стержни скреплены на концах шарнирами. В начальный момент два противоположных шарнира находятся рядом (очень близко) и имеют нулевые скорости. Один из этих шарниров закреплен. Второй начинают двигать с постоянным ускорением a. Найдите величину ускорения остальных шарниров ромба в тот момент, когда ромб превратится в квадрат, если все стержни двигаются, оставаясь в одной плоскости.

2 (3 б.). На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом $45°$ при основании (рис.2). По его наклонной грани может двигаться без трения небольшое тело массой m. Чему должна быть равна и куда (вправо или влево) направлена горизонтальная сила, приложенная к клину, чтобы ускорение тела массой m было направленно горизонтально? Клин не опрокидывается, ускорение свободного падения равно g.

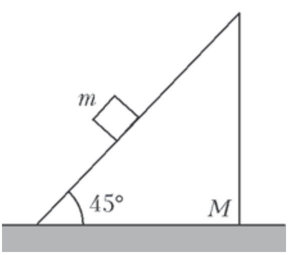


Рис. 2

3 (2 б.). Искусственный спутник Земли запущен в плоскости экватора так, что он движется по круговой орбите в направлении вращения земли («обгоняя» Землю). Во сколько раз η радиус орбиты спутника $R_с$ больше радиуса Земли $R_З$, если спутник периодически проходит над заданной точкой Земли ровно через $n =$ $= 2$ суток? Радиус Земли $R_З = 6400$ км.

4 (2 б.). По П-образной рамке, наклоненной под углом α к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать перемычка массой m. Длина перемычки l, ее сопротивление r, индукция поля B, коэффициент трения между перемычкой и рамкой μ. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

5 (3 б.). К точкам *1*, *2*, *3* электрической цепи, изображенной на рисунке 3, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами ρ, r и ρ соответственно. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, внутреннее сопротивление источника тока равно нулю, ЭДС батареи известна и равна $\mathcal{E}$.

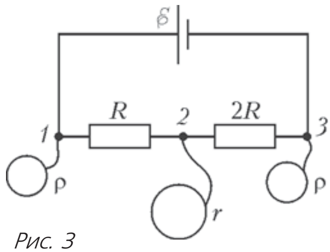


Рис. 3

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Электровоз массой m_0, движущийся со скоростью v, сталкивается с неподвижным вагоном массой m_1, после чего они движутся вместе. Найдите скорость их совместного движения.

2. Маленький шарик, подвешенный на шелковой нити, имеет заряд q. В горизонтальном электрическом поле с напряженностью E нить отклонилась от вертикали на угол α. Найдите массу шарика.

3. Гальванический элемент с ЭДС 15 В и внутренним сопротивлением 1 Ом замкнут на сопротивление 4 Ом. Найдите силу тока в цепи.

4. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл со скоростью $1{,}6 \cdot 10^7$ м/с, направленной перпендикулярно линиям индукции. Определите радиус (в мм) окружности, по которой движется электрон. Заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $9 \cdot 10^{-31}$ кг.

5. Камень брошен горизонтально. Через время T после броска вектор его скорости составил угол α с горизонтом. Найдите начальную скорость камня.

6. К одному концу резинового шнура прикрепили шарик массой m, другой его конец закрепили на горизонтальной гладкой поверхности и привели шарик во вращение по поверхности с угловой скоростью ω. Найдите удлинение шнура x, если его жесткость k, а первоначальная длина l_0.

7. Некоторое количество идеального одноатомного газа изохорно нагрели, сообщив ему количество теплоты Q. Затем газ изобарно охладили до первоначальной температуры. Сколько тепла было отобрано у газа при изобарном охлаждении?

8. Вдоль оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F расположен стержень так, что его середина находится на расстоянии a от линзы. Чему равна длина стержня, если его продольное увеличение равно K?

Примечание. В задачах, в которых даны числовые значения, необходимо сначала получить аналитический (буквенный) ответ и только потом использовать численные данные из условия задачи для получения численного ответа.

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

Заключительный этап

1 (8–9, 10 классы). На кодовом замке имеется круглый диск с нанесенными на равноотстоящих интервалах по его периметру числами от 1 до 12. Изначально диск установлен так, как показано на рисунке 4,*а*. Замок откроется, если диск окажется повернутым на 30° относительно своего первоначального положения (рис.4,*б*). Для изменения положения диска имеется

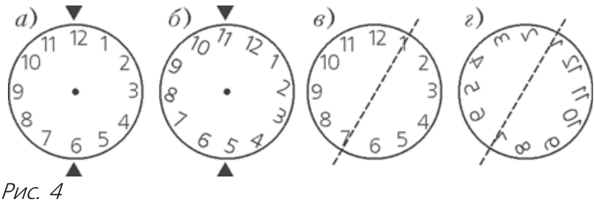
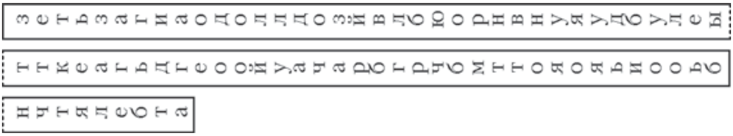


Рис. 4

специальный стержень, который можно продеть через два любых диаметрально противоположных числа (например, через 1 и 7; рис.4,*в*), а затем повернуть диск вокруг стержня на 180° (рис.4,*г*). Можно ли такими поворотами открыть замок и если да, то каким образом?

2 (8–9, 10 кл.). Для шифрования сообщений Катя и Антон использовали шифр Сцитала: на круглую палочку виток к витку без просветов и нахлестов наматывалась лента. При горизонтальном положении палочки на ленту по всей длине стержня построчно записывался текст сообщения без знаков препинания и пробелов. После этого лента с записанным на ней текстом посылалась адресату. Антон передал Кате ленту, на которой было написано вот что:



К сожалению, Катя свою палочку потеряла, но она видит, что лента исписана полностью, и знает, что при намотке ленты было сделано целое число оборотов. Помогите ей восстановить сообщение.

3 (11 кл.). Докажите, что существует натуральное число, кратное 2015, десятичная запись которого имеет вид 12351235...1235 (т.е. образована последовательным повторением фрагмента 1235).

4 (8–9, 10 кл.). Для зашифрования слова используется последовательность натуральных чисел $y_1, y_2, \ldots$, которая формируется так: y_1 выбирается произвольно, а остальные члены последовательности вычисляются по формуле $y_{n+1} = 4y_n + 23$, $n = 1, 2, \ldots$ Зашифрование производилось следующим образом. Первая буква слова заменялась числом согласно таблице:

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

и умножалась на y_1. Потом так же заменялась вторая буква и умножалась на y_2 и т.д. Затем все произведения были замены остатками от деления на 32. В результате получилось вот что:

8, 16, 24, 13, 22, 10, 9, 16, 0, 28, 24, 29.

Какое слово было зашифровано?

5 (10, 11 кл.). Для проверки корректности номера пластиковой карты, представляющего собой набор из 16 цифр $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16})$, вычисляются контрольные суммы A, B и C:

$$A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16},$$

$$B = x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 7x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{15},$$

$$C = x_1 + x_2 + x_4 + 7x_5 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + x_{14} + x_{16}.$$

Если все три суммы A, B и C кратны 10, то номер признается корректным. Каких корректных номеров больше и на сколько: у которых первые 4 цифры 0, 0, 0, 0 или у которых последние 4 цифры 0, 0, 0, 0?

6 (8–9, 10 кл.). На столе выложены 13 карточек в порядке возрастания их номеров (рис.5,*а*). Карточки разрешается перекладывать *тройками*, а именно: выбираем три любые карточки,

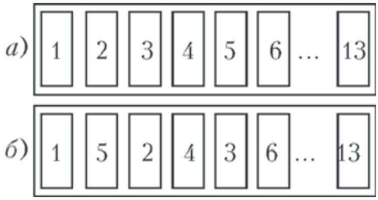


Рис. 5

например с номерами 2, 3 и 5. Затем крайняя левая карточка перемещается на место средней, средняя – на место крайней правой, а крайняя правая – на место крайней левой. Результат изображен на рисунке 5,*б*. Можно ли, перекладывая карточки указанным способом, уложить их, как на рисунке 5,*а*, но в порядке убывания номеров (карточка с номером 13 – первая, с номером 1 – последняя)?

7 (11 кл.). Рассмотрим множество всех точек плоскости, координаты которых имеют вид $(m + 2n, 3m - n)$, где m, n – целые числа. Докажите, что на прямой, проходящей через любые две точки указанного множества, лежит сторона некоторого квадрата, все четыре вершины которого принадлежат этому множеству. Укажите минимальную площадь такого квадрата.

8 (11 кл.) Число городов в Криптоландии равно 4^4. В качестве названий города имеют различные цифровые комбинации вида (a,b,c,d), где a, b, c и d – целые числа из множества {0,1,2,3}. Два города, названия которых отличаются одной цифрой, называются *соседними*. Например, города (3201) и (3001) – соседние, а (1111) и (3311) – нет. У каждого города есть флаг определенного цвета, причем флаги соседних городов всегда имеют несовпадающие цвета. Власти объявили конкурс на создание системы флагов для городов, имеющей наименьшее возможное число различных цветов. Найдите это наименьшее число. Ответ обоснуйте.

9 (8–9, 10, 11 кл.). *Треугольником Паскаля* называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел (рис.6). Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится: а) в строке с номером 256; б) в строке с номером 200?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
…

Рис. 6

10 (8–9 кл.). Докажите, что для каждого натурального $n \geq 5$ квадрат можно разрезать на n прямоугольников (не обязательно одинаковых), у каждого из которых одна сторона вдвое больше другой. Резать разрешается по линиям, параллельным сторонам исходного квадрата.

11 (11 кл.). Чтобы снять деньги с карточки, Алиса в банкомате вводит пин-код (ПК) x_1, x_2, x_3, x_4 – набор из 4 целых чисел ($0 \leq x_i \leq 9$, $i = 1, 2, 3, 4$). Банкомат зашифровывает введенный ПК по следующему правилу: он случайным образом выбирает целое число x_5 такое, что $10 \leq x_5 \leq 15$, а затем формирует зашифрованный пин-код (ЗПК) y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 по формулам

$$y_1 = f\left(r_{16}\left(x_1 + 3 \cdot y_0\right)\right), \ y_2 = f\left(r_{16}\left(x_2 + 3 \cdot y_1\right)\right),$$
$$y_3 = f\left(r_{16}\left(x_3 + 3 \cdot y_2\right)\right), \ y_4 = f\left(r_{16}\left(x_4 + 3 \cdot y_3\right)\right),$$
$$y_5 = f\left(r_{16}\left(x_5 + 3 \cdot y_4\right)\right),$$

где $y_0 = 2$, $r_{16}(x)$ – остаток от деления числа x на 16, а f – некоторое правило, по которому одно целое число от 0 до 15 заменяется на другое (возможно, то же самое) целое число от 0 до 15, причем разные числа заменяются разными. После этого ЗПК отправляется на сервер, где он расшифровывается (т.е. по присланным числам y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 вычисляются x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5), и если x_5 не удовлетворяет неравенству $10 \leq x_5 \leq 15$, то сервер выдает сообщение об ошибке. Известно, что для ПК Алисы был сформирован следующий ЗПК: 13,13,1,11,7. Известно также, что хакеры пытались отсылать на сервер (напрямую, минуя банкомат) в качестве y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 комбинации чисел

b / a	1	2	3	11	12	13
1	–	+	–	–	–	+
2	–	+	+	–	–	–
3	+	–	+	–	+	–
4	+	–	–	–	+	–
5	–	–	–	+	–	+
6	–	–	–	+	–	+
7	–	+	+	–	–	–
8	–	+	+	–	+	–
9	+	–	–	–	+	–
10	+	–	–	+	–	+

вида $0,0,0,a,b$. Результаты их попыток приведены в таблице (знак «+» – сервер не выдал сообщение об ошибке, знак «–» – выдал). Какой ПК у Алисы?

Публикацию по математике подготовили С.Рамоданов, О.Шабанин; по физике – М.Алексеев, В.Попов; по криптографии – С.Рамоданов

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

ФИЗИКА

Олимпиада-2016

I тур

Вариант 1

1. Под каким углом α к горизонту следует бросить камень со скоростью $v = 14$ м/с, чтобы дальность его полета L была равна 10 м? Сопротивление воздуха не учитывать.

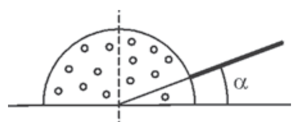


Рис. 1

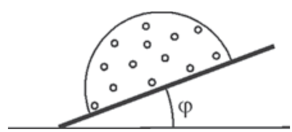


Рис. 2

2. Под каким углом α следует тянуть веревку, чтобы равномерно волочить тяжелый груз по горизонтальной плоскости с наименьшим усилием (рис.1)? При этом известно, что груз сам начнет соскальзывать с наклонной плоскости при угле наклона φ (рис.2). Груз считать материальной точкой.

3. Два одинаковых шарика связаны невесомой нитью, перекинутой через невесомый блок, причем один из шариков погружен в сосуд с жидкостью (рис.3). С какой установившейся скоростью v будут двигаться шарики, если известно, что установившаяся скорость падения одиночного шарика в той же жидкости равна v_0? Сила сопротивления жидкости пропорциональна скорости движения шарика. Плотность жидкости $\rho_ж$, плотность материала шариков ρ.

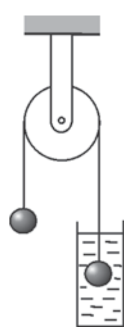


Рис. 3

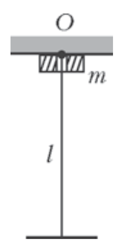


Рис. 4

4. Гладкая упругая нить длиной l и жесткостью k подвешена одним концом к точке O (рис.4). На нижнем конце имеется невесомый упор. Из точки O начала падать небольшая муфта массой m. Пренебрегая массой нити, найдите максимальное растяжение нити Δl.

5. В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится идеальный одноатомный газ. При нагревании газа первоначально покоящийся поршень начинает двигаться равноускоренно (рис.5). Найдите количество теплоты Q, подведенное к газу за промежуток времени τ, в течение которого поршень сместился в сосуде на расстояние L. Теплоемкостью сосуда и поршня, внешним давлением, а также трением пренебречь.

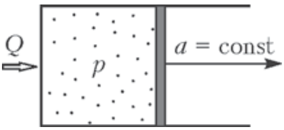


Рис. 5

6. Горизонтальная платформа совершает гармонические колебания в вертикальном направлении вместе с лежащим на ней грузом. Силы, с которыми груз давит на платформу в крайних нижнем и верхнем положениях, отличаются в $n = 2$ раза. Найдите амплитуду колебаний A, если их частота $\nu = 1{,}1$ Гц. Принять $g = 10\ \text{м/с}^2$.

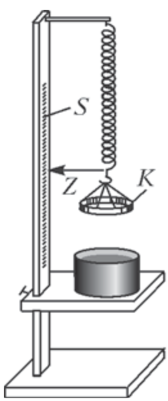


Рис. 6

7. Тонкое проволочное кольцо K диаметром $d = 34$ мм, подвешенное к пружине с указателем Z, погружают в сосуд с водой (рис.6). Отметив положение указателя на шкале S, медленно опускают подставку с сосудом. Пружина при этом растягивается. В момент отрыва кольца от жидкости вновь отмечают положение указателя на шкале. Какое значение коэффициента поверхностного натяжения воды получено, если пружина растянулась на $\Delta l = 32$ мм? Жесткость пружины $k = 0{,}005$ Н/см.

8. Три положительных точечных заряда $+q$, $+q$ и $+2q$ расположены в вершинах правильного треугольника со стороной a. Найдите работу сил электрического поля, которую они совершат, если заряды расположить вдоль прямой, как показано на рисунке 7.

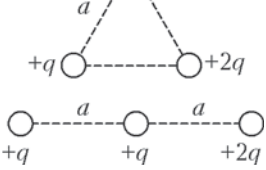


Рис. 7

9. К источнику тока с внутренним сопротивлением $r = 4$ Ом подключен реостат, сопротивление которого можно изменять в пределах от 1 Ом до 10 Ом. Максимальная мощность, выделяемая на реостате, равна $P = 49$ Вт. Чему равна ЭДС источника тока?

10. Тонкое проволочное кольцо площадью $S = 100$ см^2 , имеющее сопротивление $R = 0{,}01$ Ом, помещено в однородное магнитное поле. Изменение проекции вектора магнитной индукции этого поля B_x на ось x, перпендикулярную плоскости кольца, от времени представлено на графике (рис.8). Какое количество теплоты выделится в кольце за интервал времени от $t = 0$ до $t = 8$ с? Индуктивностью кольца пренебречь.

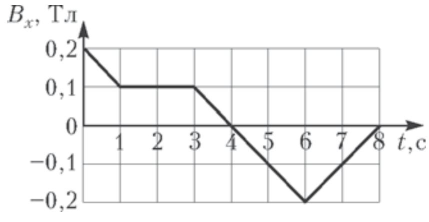


Рис. 8

Вариант 2

1. Тело совершает два последовательных одинаковых по длине перемещения: со скоростью $v_1 = 20$ м/с под углом $\alpha_1 = 60°$ к координатной оси x и со скоростью $v_2 = 40$ м/с под углом $\alpha_2 = 120°$ к тому же направлению. Найдите модуль средней скорости движения тела.

2. Проводящий контур, имеющий форму восьмерки, перемещается поступательно в магнитном поле тока, текущего по прямолинейному длинному проводнику (рис.9). Покажите на рисунке направление результирующей силы Ампера, действующей на контур, если контур удаляется от проводника. Электрический контакт в месте пересечения проводников (в точке A) отсутствует. Ответ поясните.

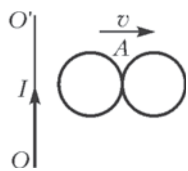


Рис. 9

3. С наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ горизонтом, с высоты H = 4 м, соскальзывает небольшая шайба (рис.10). В конце спуска, у основания наклонной плоскости, шайба испытывает абсолютно упругое соударение со стенкой и поднимается вверх по наклонной плоскости на высоту h = 2,4 м. Найдите коэффициент трения между шайбой и наклонной плоскостью.

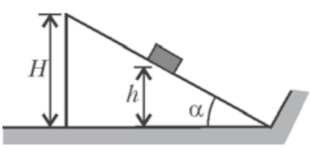


Рис. 10

4. На неподвижный груз массой m = 1 кг, лежащий на горизонтальном столе и прикрепленный к стенке пружиной жесткос-

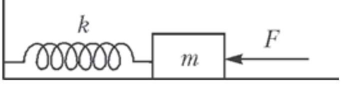


Рис. 11

тью $k = 9 \cdot 10^2$ Н/м, начинает действовать постоянная горизонтальная сила $F = 1$ Н (рис.11). Через некоторое время t действие силы прекращается. При каком значении t смещение груза будет равно нулю в момент прекращения действия силы? Силами сопротивления пренебречь.

5. В озеро, имеющее среднюю глубину h = 10 м и площадь поверхности $S = 20$ км^2, бросили кристаллик поваренной соли массой m = 0,01 г. Сколько молекул этой соли оказалось бы в наперстке воды объемом $V = 2$ см^3, зачерпнутой из озера, если полагать, что соль, растворившись, равномерно распределилась во всем объеме воды?

6. Замкнутый, вертикально расположенный цилиндрический сосуд сечением $S = 20$ см^2 разделен поршнем массой M = 5 кг на две части (рис.12). Нижняя часть цилиндра под поршнем целиком заполнена водой при начальной температуре $t_0 = 0$ °C, над поршнем – вакуум. Поршень связан с верхним основанием цилиндра пружиной жесткостью k = 15 Н/м. Вначале пружина не деформирована. Определите массу m пара под поршнем при нагревании воды до температуры $t = 100$ °C. Трением и массой пружины пренебречь.

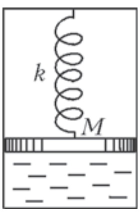


Рис. 12

7. Одноатомный идеальный газ участвует в процессе, для которого внутренняя энергия газа пропорциональна квадрату его объема: $U = \alpha V^2$, где α – постоянная. Найдите работу, совершенную газом в таком процессе, если известно количество теплоты Q, сообщенное газу.

8. Электрическое поле образовано внешним однородным электрическим полем и электрическим полем заряженной металлической пластины, которое вблизи пластины тоже можно считать однородным. Напряженность результирующего электрического поля слева от пластины $E_1 = 5 \cdot 10^4$ В/м, а справа от пластины $E_2 = 3 \cdot 10^4$ В/м (рис.13). Определите заряд пластины, если сила, действующая на пластину со стороны внешнего электрического поля, равна F = 0,7 Н.

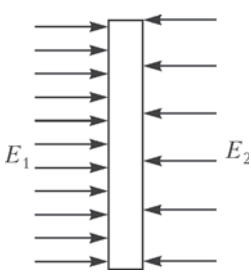


Рис. 13

9. Определите показание вольтметра, включенного между точками A и B в электрической цепи, изображенной на рисунке 14. ЭДС каждого элемента $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление r, сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

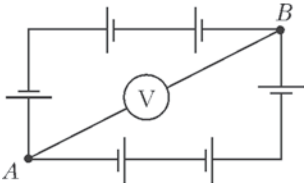


Рис. 14

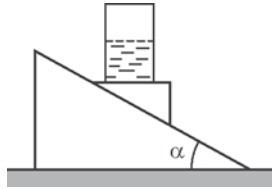


Рис. 15

10. Бак квадратного сечения со стороной $b = 1$м и высотой $2b$, заполненный водой наполовину, поставлен на клин, скользящий вниз по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 45°$ с горизонтом (рис.15). Дно бака расположено горизонтально. Коэффициент трения клина о наклонную плоскость $\mu = 0{,}278$. Найдите величину установившейся силы давления воды на заднюю по ходу движения стенку бака.

II тур

Вариант 1

1. Тело, движущееся равноускоренно с начальной скоростью $v_1 = 1$ м/с, пройдя некоторое расстояние l, приобретает скорость $v_2 = 7$ м/с. Найдите скорость этого тела на половине расстояния.

2. Через два маленьких неподвижных блока, оси которых находятся на одной высоте на расстоянии 90 см друг от друга, перекинута нить (рис.16). К концам и к середине нити привязаны три одинаковых груза. Средний груз поднимают так, чтобы нить была горизонтальной, а сам груз находился посередине между блоками, и отпускают, после чего средний груз опускается, а крайние поднимаются. С какой скоростью двигаются крайние грузы в тот момент, когда средние части нити между блоками образуют угол $2\alpha = 120°$? Трением пренебречь.

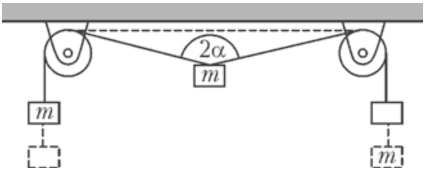


Рис. 16

3. Два одинаковых шара массой m каждый лежат на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, соприкасаясь друг с другом (рис.17; вид сверху). Третий шар таких же размеров, скользящий по той же плоскости, ударяется одновременно в

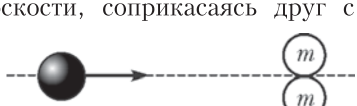


Рис. 17

оба шара. Считая удар абсолютно упругим, найдите массу налетающего шара, если после удара он отскакивает назад со скоростью, равной половине скорости этого шара до удара.

4. В сосуде с подвижным поршнем находится мыльный пузырь радиусом r. Медленным вдвиганием поршня воздух в сосуде сжимают так, что радиус пузыря уменьшается вдвое. Найдите давление воздуха в сосуде вне пузыря в этот момент, если давление воздуха в сосуде вне пузыря в исходном состоянии было p_0. Процесс считать изотермическим. Коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки равен σ.

5. В закрепленном теплоизолированном цилиндре, разделенном на две части неподвижной теплопроводящей перегородкой и закрытом слева подвижным поршнем, не проводящим тепло, в левой части находится газ аргон массой $m_1 = 20$ г, а в правой части – газ неон массой $m_2 = 40$ г (рис.18). Давление на поршень медленно увеличивают, начиная с некоторого начального значения. Найдите молярную теплоемкость газа в левой части цилиндра в данном процессе, считая, что температура газа в процессе сжатия в левой и правой частях цилиндра одинаковая. Трением пренебречь.

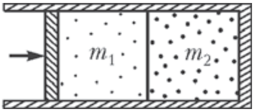


Рис. 18

6. Металлический шарик радиусом R с отрицательным зарядом $-2q$ находится внутри тонкостенной металлической сферы радиусом $2R$. Центры шарика и металлической сферы совпадают. Сфере сообщили положительный заряд $+q$. Шарик и сферу соединили тонким проводником ничтожной емкости и затем разъединили. Найдите разность потенциальных энергий конечного и начального состояний системы.

7. Определите заряды на конденсаторах в схеме, изображенной на рисунке 19. Параметры элементов цепи считать известными. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

8. Плоско-выпуклая тонкая линза с фокусным расстоянием $F = 40$ см плоской стороной вплотную прилегает к плоскому зеркалу (рис.20). На оптической

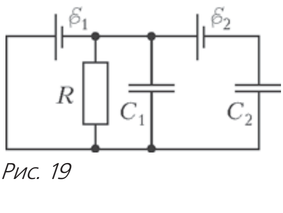


Рис. 19

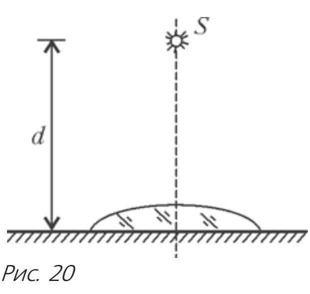


Рис. 20

оси линзы на расстоянии d = 10 см от зеркала находится светящаяся точка S. На каком расстоянии от зеркала расположено изображение точки?

9. Частица, выполненная в форме шарика радиусом R = = 0,6 мкм, полностью поглощает падающий на нее свет. Определите плотность материала частицы, при которой гравитационное притяжение ее к Солнцу на любом расстоянии от него будет компенсироваться силой светового давления. Суммарная мощность светового излучения Солнца $W = 4 \cdot 10^{26}$ Вт, масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг.

10. В системе, изображенной на рисунке 21, прикрепленные к невесомым пружинам грузики при помощи нитей удерживаются на расстояниях $L/2$ от стенок, к которым прикреплены концы

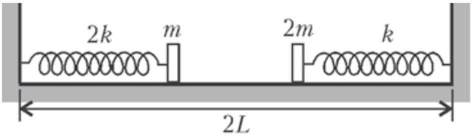


Рис. 21

пружин. Длины обеих пружин в недеформированном состоянии одинаковы и равны L. Нити одновременно пережигают, после чего грузики сталкиваются и слипаются. Найдите максимальную скорость, которую будут иметь грузики при колебаниях, возникших после этого столкновения. Удар при столкновении является центральным. Жесткости пружин и массы грузиков указаны на рисунке. Трением и размерами грузиков пренебречь.

Вариант 2

1. С какой силой T натянут трос AB, если на систему шарнирно скрепленных стержней действует вертикально направленная сила F (рис.22)? Сплошные стержни AE и BP шарнирно соединены посередине так, что $AC = CB = AD = DE = DB = DP = PQ = EQ$. Массой стержней и троса пренебречь.

2. На горизонтальном столе стоит замкнутый цилиндрический сосуд, заполненный до высоты H жидкостью плотностью ρ (рис.23). Пространство над жидкостью заполнено газом, дав-

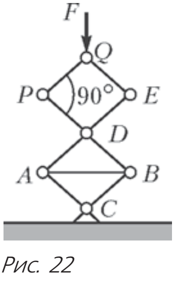


Рис. 22

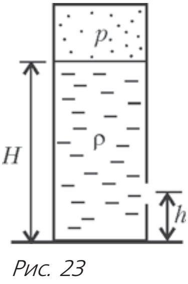


Рис. 23

ление которого равно p ($p > p_0$, где p_0 – атмосферное давление). В боковой стенке сосуда на расстоянии $h < H$ от его дна открывают отверстие площадью $S_{отв}$. Определите максимальное значение коэффициента трения μ между сосудом и поверхностью стола, при котором сосуд начнет двигаться после открытия отверстия. Площадь основания сосуда $S \gg S_{отв}$. Массами сосуда и газа, а также силами вязкого трения пренебречь.

3. В системе, изображенной на рисунке 24, массы грузов m, жесткость пружины k. Пружина и нить невесомые. Трение отсутствует. В начальный момент грузы неподвижны и система находится в равновесии. Затем, удерживая левый груз, смещают правый груз вниз на расстояние a, после чего их отпускают без начальной скорости. Найдите величину максимального импульса левого груза в процессе дальнейшего движения грузов, считая, что нити все время остаются натянутыми, а грузы не ударяются об остальные тела системы.

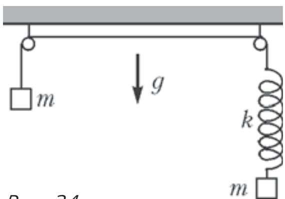


Рис. 24

4. Идеальный газ постоянной массы сжимается в процессе, для которого выполняется условие $pV^n = \text{const}$. При каких значениях показателя степени n температура газа в этом процессе повышается?

5. Один моль идеального одноатомного газа участвует в процессе, для которого давление газа пропорционально корню квадратному из его абсолютной температуры: $p \sim \sqrt{T}$. Определите молярную теплоемкость газа в этом процессе.

6. Капля ртути массой m = 1 г помещена между двумя параллельными горизонтальными стеклянными пластинками. Какую силу надо приложить к верхней пластинке, чтобы ртуть имела форму круглой лепешки радиусом $R = 5$ см? Коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}465$ Н/м . Считать, что ртуть совершенно не смачивает стекло, так что угол между свободной поверхностью ртути и стеклянной пластинкой равен нулю.

7. Незаряженный металлический брусок представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами d , b, c ($d \gg c$, $b \gg c$) (рис.25). Брусок движется в магнитном поле вдоль стороны d. Индукция магнитного поля B перпендикулярна основанию бруска со сто-

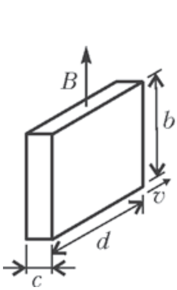


Рис. 25

ронами d и c. Определите скорость v движения бруска, если плотность электрических зарядов на боковых поверхностях параллелепипеда, образованных сторонами d и b, равна σ.

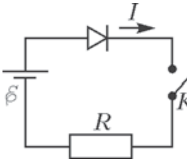


Рис. 26

8. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет электрический заряд q. В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q, причем $Q \gg q$. Определите силу упругости, возникающую в кольце.

9. При положительном напряжении U на диоде в схеме, изображенной на рисунке 26, проходящий через него ток равен $I = \alpha U^2$, где $\alpha = 0{,}5\ \text{А} \cdot \text{В}^{-2}$, а при отрицательном напряжении $I = 0$. Сопротивление $R = 1$ Ом, ЭДС батареи $\mathscr{E} = 10$ В. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся на диоде. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

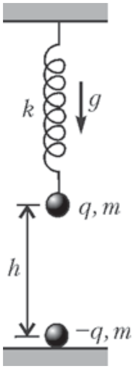


Рис. 27

10. Маленький шарик массой m подвешен на пружине жесткостью k и несет заряд q (рис.27). В начальный момент шарик удерживают так, что пружина не деформирована. Под шариком на расстоянии h лежит такой же шарик с зарядом $-q$. Верхний шарик отпускают. При каком минимальном значении q нижний шарик подпрыгнет?

Публикацию подготовил Ю.Струков

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИКА

Профильный экзамен

В 2016 профильный экзамен (дополнительное вступительное испытание) по физике в МГУ и его Севастопольском филиале проводился в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа.

Ниже приводятся примеры заданий профильного экзамена.

МЕХАНИКА

1. Как определяется импульс системы материальных точек? Сформулируйте закон сохранения импульса.

Задача. Снаряд массой m = 16 кг вылетел из пушки под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. В верхней точке траектории снаряд разорвался на две части, причем осколки снаряда упали на землю одновременно. Осколок массой m_1 = 4 кг упал почти на пушку, а другой осколок упал на землю на расстоянии s = 8 км от пушки. Пренебрегая сопротивлением воздуха и массой взрывчатого вещества в снаряде, найдите кинетическую энергию снаряда $E_к$ в момент вылета из пушки. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2 .

2. Сформулируйте закон Архимеда. Перечислите условия плавания тел.

Задача. В маленьком бассейне с вертикальными стенками плавает игрушечный плот, на котором лежат одинаковые игрушки. На стенке бассейна нанесена шкала для измерения высоты уровня воды. Когда ребенок перенес с плота на бортик бассейна одну игрушку, высота уровня воды изменилась на $\Delta h_1 = 6$ см. Он хотел перенести туда же и вторую игрушку, но уронил ее, и игрушка упала на дно. Высота уровня воды после этого изменилась еще на $\Delta h_2 = 1$ см. Во сколько раз плотность материала игрушки больше, чем плотность воды?

3. Дайте определение кинетической энергии материальной точки и системы материальных точек. Как связано приращение кинетической энергии тела с работой приложенных к телу сил?

Задача. Брусок массой $M = 100$ г, прикрепленный посредством пружины к неподвижной стенке, совершает гармонические колебания на гладком столе с амплитудой $A_0 = 5$ см. В момент прохождения бруском положения равновесия на него вертикально падает кусок пластилина массой $m = 56{,}25$ г и сразу прилипает к бруску. Определите установившуюся амплитуду A_1 колебаний бруска с прилипшим к нему пластилином.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

1. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории. Каковы по порядку величины масса и размеры молекул?

Задача. U-образную трубку постоянного сечения расположили вертикально, частично заполнили ртутью и отметили уровень ртути на ее стенках. Затем левое колено трубки герметично закрыли, а в открытое правое колено трубки долили некоторое количество ртути, в результате чего поверхность ртути в коленах сместилась от первоначального положения. Определите атмосферное давление p_0, если отношение смещений уровней ртути в правом и левом коленах от первоначального положения равно $n = 4$, а высота воздушного столба в левом колене $L = 25$ см. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба. Температуру воздуха считайте постоянной.

2. Сформулируйте первый закон термодинамики. Запишите формулы для теплоемкости идеального одноатомного газа в изохорном и изобарном процессах.

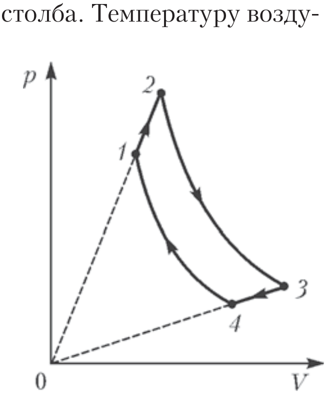


Рис. 1

Задача. Над идеальным газом проводится циклический процесс, состоящий из двух участков *1–2*, *3–4*, на которых давление пропорционально объему, и двух адиабат *2–3*, *4–1* (рис.1). Известно, что изменение температуры газа на участке *1–2* равно $\Delta T_1 = 20$ К, а модуль изменения температуры на участке *3–4* равен $\Delta T_2 = 15$ К. Найдите коэффициент полезного действия цикла η.

3. Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

Задача. Горизонтально расположенный цилиндр, герметично закрытый с обоих торцов, разделен поршнем на две равные части, длина каждой из которых $l = 30$ см. В каждой части цилиндра находится вода и ее пар при температуре $100\ ^\circ\text{C}$. При этом масса воды в каждой из частей в 5 раз меньше массы пара. Площадь поперечного сечения поршня $S = 20\ \text{см}^2$, а его масса $M = 200$ г. На какое расстояние h сместится поршень через достаточно большой промежуток времени, если цилиндр поставить вертикально, а температуру содержимого цилиндра поддерживать постоянной? Трение между поршнем и стенками цилиндра считайте пренебрежимо малым, модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10\ \text{м/с}^2$, а нормальное атмосферное давление – $p_0 = 10^5$ Па. Ответ приведите в миллиметрах, округлив до целых.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Что такое элементарный электрический заряд? Сформулируйте закон сохранения электрического заряда.

Задача. Три одинаковых точечных заряда $q = 10^{-8}$ Кл удерживают на одной прямой так, что расстояние между первым и вторым зарядами равно $3a$, а между первым и третьим зарядами – $7a$, где $a = 10$ см. Определите минимальную работу, которую нужно совершить, чтобы переместить эти заряды в вершины прямоугольного треугольника с катетами $3a$ и $4a$, преодолевая действие только электростатических сил, создаваемых этими зарядами. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

2. Дайте определение электроемкости. Запишите формулу для электроемкости плоского конденсатора.

Задача. В электрической схеме, представленной на рисунке 2, сопротивления резисторов $R_1 = R_2 = R_3 = 10$ Ом, электроемкость конденсатора $C = 2$ мкФ, ЭДС источников $\mathcal{E}_1 = 10$ В,

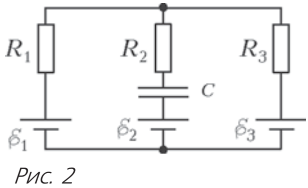


Рис. 2

$\mathscr{E}_2 = 8$ В, $\mathscr{E}_3 = 5$ В, их внутренние сопротивления пренебрежимо малы. Найдите заряд q на пластинах конденсатора.

3. Сформулируйте закон Ома для участка цепи. Дайте определение омического сопротивления проводника.

Задача. Ученик собрал электрическую цепь, состоящую из источника и подключенного к нему нагрузочного резистора. При этом сопротивление резистора ученик подобрал таким, чтобы в резисторе выделялась максимально возможная мощность. Во сколько раз n изменится коэффициент полезного действия (КПД) цепи, если к источнику вместо одного подключить два таких резистора, соединенных параллельно?

ОПТИКА

1. Изобразите ход лучей в призме. В чем состоит явление полного внутреннего отражения?

Задача. Плоское зеркало *З* движется поступательно с некоторой постоянной скоростью, вектор которой направлен перпендикулярно плоскости зеркала (рис.3). Предмет *П* движется со скоростью $v_1 = 1$ см/с под углом $\alpha = 30°$ к плоскости зеркала, а его изображение *И* движется под углом $\beta = 60°$ к плоскости зеркала. Найдите модуль u скорости зеркала.

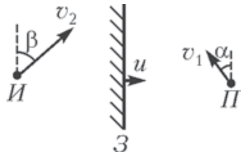


Рис. 3

2. Сформулируйте законы преломления света. Дайте определения абсолютного и относительного показателей преломления.

Задача. Источник света S, испускающий тонкий луч, движется горизонтально над поверхностью воды в бассейне, приближаясь к его стенке с постоянной скоростью $v_1 = 0{,}5$ м/с, вектор которой перпендикулярен стенке (рис.4). Луч направлен в воду так, что угол падения $\alpha = 30°$. С какой скоростью v_2 движется под водой по вертикальной стенке бассейна световое пятно от луча? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

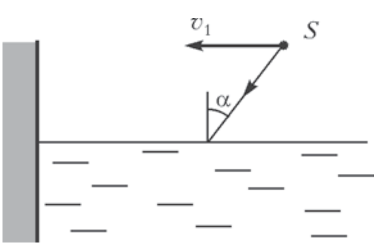


Рис. 4

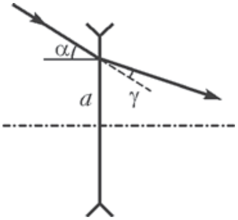


Рис. 5

3. Какие линзы называют тонкими? Дайте определения фокусного расстояния и оптической силы тонкой линзы.

Задача. На поверхность тонкой рассеивающей линзы падает луч света на расстоянии $a = 1$ см от центра линзы под углом $\alpha = 0{,}1$ рад к ее главной оптической оси (рис.5). Найдите модуль фокусного расстояния линзы F, если вышедший из линзы луч отклоняется от первоначального направления на угол $\gamma = 0{,}05$ рад. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианной мере, справедлива приближенная формула $\operatorname{tg} x \approx x$.

Публикацию подготовил С.Чесноков

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Олимпиада «Физтех-2016»

Физико-математическая олимпиада «Физтех» входит в Перечень олимпиад школьников, утвержденный Министерством образования и науки России.

Первый (отборочный) этап олимпиады 2015/16 учебного года проводился очно и заочно (дистанционно) с октября 2015 года по февраль 2016 года для учащихся 9–11 классов, раздельно по математике и физике.

Второй (заключительный) этап олимпиады проводился очно для учащихся 9–11 классов, раздельно по математике и физике, в более чем 50 городах РФ и стран СНГ. Ко второму этапу допускались победители и призеры первого этапа.

Победители и призеры олимпиады имели льготы, определяемые приемной комиссией вуза, в который подавались документы в 2016 году. В МФТИ победителям 11 класса по физике обеспечивалось поступление без вступительных испытаний, а призерам 11 класса по физике и победителям и призерам 11 класса по математике засчитывалось 100 баллов по соответствующему предмету. Результаты олимпиады можно было засчитать при условии получения по соответствующему предмету ЕГЭ не менее 75 баллов.

Ниже приводятся задания заключительного этапа олимпиады «Физтех-2016» по математике и физике.

МАТЕМАТИКА

11 класс

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_{\frac{x^2-2}{2x-3}}\left(\frac{\left(x^2-2\right)(2x-3)}{4}\right) \geq 1$.

2. Решите уравнение $(\cos x - 3\cos 4x)^2 = 16 + \sin^2 3x$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{x+2y}-2y=\dfrac{7}{2}, \\ x^2+x+2y-4y^2=\dfrac{27}{2}. \end{cases}$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причем $AB=BC=2$, $CD=1$, $DE=3$. Окружности Ω и ω, касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки A и E, а ω проходит через точки B и C. Найдите радиусы окружностей Ω и ω, если известно, что их центры и точка D лежат на одной прямой.

5. В числе 2*0*1*6*0*2 нужно заменить каждую из 6 звездочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(|y+9|+|x+2|-2\right)\left(x^2+y^2-3\right)=0, \\ (x+2)^2+(y+4)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Дана правильная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$. Плоскости α и β перпендикулярны B_1D и проходят через вершины A и D_1 соответственно. Пусть F и H соответственно – точки пересечения плоскостей α и β с диагональю B_1D, при этом $DF < DH$.

а) Найдите отношение $B_1H : DF$.

б) Пусть дополнительно известно, что некоторая сфера радиуса 3 касается всех боковых граней призмы, а также плоскостей α и β. Найдите отрезок B_1D и объем призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $\dfrac{2\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=5|\cos x|$.

2. Найдите все пары положительных чисел (x,y), удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} y-2\sqrt{xy}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}+2=0, \\ 3x^2y^2+y^4=84. \end{cases}$$

3. Решите неравенство $17^{\frac{5x-3}{3-x}} \cdot 2^{3-x} \le 68$.

4. Окружность ω радиуса 6 с центром O вписана в остроугольный треугольник CFM и касается его сторон CM и FM в точках P и K соответственно. Окружность Ω радиуса $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ с центром T описана около треугольника PKM.

а) Найдите OM.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника CFT к площади треугольника CFM равно $\frac{5}{8}$. Найдите длину биссектрисы MA треугольника CFM, а также его площадь.

5. В числе 2016****02** нужно заменить каждую из 6 звездочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \left|16+6x-x^2-y^2\right|+|6x|=16+12x-x^2-y^2, \\ (a+15)y+15x-a=0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром BC пересекает ребра AC и AB соответственно в точках P и Q, отличных от вершин призмы. Отрезки B_1P и C_1Q пересекаются в точке T, и при этом $B_1P=5$, $TQ=2$.

а) Найдите угол TPA.

б) Найдите отношение $AP : CP$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AC=3$. Найдите объем призмы.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\left(x^2-3x+3\right)^{4x^3+5x^2} \le \left(x^2-3x+3\right)^{2x^3+18x}.$$

2. Решите уравнение $\dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{\sin 4x+\sin 2x}=2|\sin 2x|$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке M. Окружность, построенная на отрезке BM как на диаметре, проходит через вершину C и касается прямой DE. Известно, что $CM = 4$. Найдите высоту AH треугольника ABC, угол CBD и площадь треугольника ABC.

5. В числе 2*0*1*6*0*2* нужно заменить каждую из 6 звездочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4\cos\dfrac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{15}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости $(x;\, y)$ множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система имеет ровно три решения.

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $r = \sqrt{\dfrac{35}{3}}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки K и L такие, что $KL \parallel AB$, а плоскости KBC и LA_1C_1 касаются сферы Ω. Найдите объем призмы и длину отрезка AK.

ФИЗИКА

9 класс

1. Камень брошен с поверхности земли под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. В верхней точке траектории скорость камня оказалась равной $v = 6$ м/с. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1) Найдите вертикальную составляющую скорости камня при броске.

2) Найдите время полета камня до верхней точки траектории.

2. На какой высоте, считая от поверхности Земли, ускорение свободного падения на 19% меньше, чем на поверхности? Радиус Земли равен R.

3. Автомобиль массой m при движении по выпуклому мосту давит на мост в верхней точке с силой $0{,}9mg$ С какой силой будет давить на мост в верхней точке этот же автомобиль при движении со скоростью в 2 раза большей?

4. Тонкая трубка запаяна с одного конца, заполнена жидкостью полностью ρ и закреплена на горизонтальной платформе (рис.1). Открытое колено трубки вертикально и заполнено жидкостью до высоты H. Платформа вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Вертикальное колено находится на расстоянии R, а конец горизонтального – на расстоянии $7R$ от оси вращения. Атмосферное давление p_0.

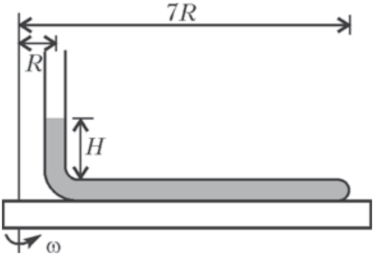


Рис. 1

1) Найдите давление жидкости в месте изгиба трубки.

2) Найдите давление жидкости в горизонтальном колене на расстоянии $2R$ от оси вращения.

5. Клин массой $M = 4m$ находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола (рис.2). Через блок, укрепленный на вершине клина, перекинута легкая нерастяжимая нить, связывающая грузы, массы которых $m_1 = 3m$ и $m_2 = m$. Грузы удерживают, затем отпускают. После этого грузы движутся, а клин покоится. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол α ($\sin\alpha = 0{,}8$).

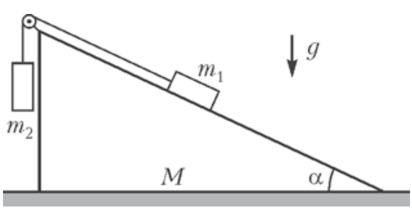


Рис. 2

1) Найдите ускорение грузов.

2) Найдите силу трения, действующую на клин со стороны стола.

10 класс

1. Бруски массами m, $2m$, $3m$ и $4m$, соединенные легкими пружинами и нитью (рис.3), удерживаются неподвижно с помощью упора на гладкой наклонной поверхности с углом наклона к горизонту α ($\sin\alpha = 1/6$).

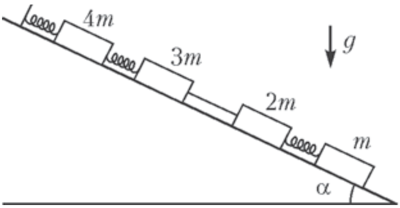


Рис. 3

1) Найдите силу натяжения нити.

2) Найдите ускорение (направление и модуль) бруска массой $2m$ сразу после пережигания нити.

2. Небольшой по размерам шарик массой m движется по окружности в горизонтальной плоскости, находясь от вертикальной оси вращения на расстоянии R. Шарик удерживается двумя нитями (рис.4), составляющими с осью вращения равные углы α ($\sin\alpha = 8/17$). Сила натяжения верхней нити в 5 раз больше, чем нижней.

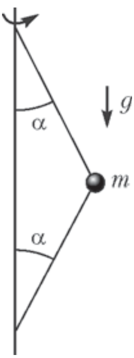


Рис. 4

1) Найдите силу натяжения нижней нити.

2) Найдите угловую скорость вращения.

3. Газообразный гелий совершает цикл, состоящий из изобарического расширения *1–2*, адиабатического процесса *2–3* и изотермического сжатия *3–1* (рис.5). КПД цикла равен η.

1) Найдите отношение работы газа за цикл к работе газа в процессе *2–3*.

2) Найдите отношение работы газа в процессе *2–3* к работе над газом при его сжатии.

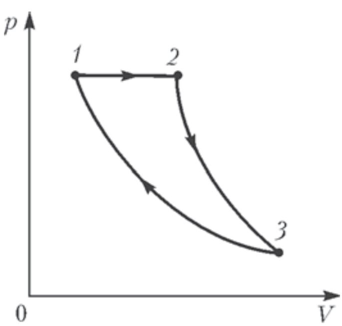


Рис. 5

4. Тонкая U-образная трубка постоянного внутреннего сечения с горизонтальным коленом длиной L и двумя одинаковыми вертикальными коленами, открытыми в атмосферу, заполнена водой не полностью (рис.6). В каждом вертикальном колене остается слой воздуха. Вода начинает выливаться, если трубку двигать вдоль горизонтального колена с постоянным ускорением, не меньшим чем $a_0 = g/8$.


Рис. 6

1) Найдите длину H слоя воздуха в одном вертикальном колене, когда трубка покоится.

2) Найдите длину l вылившегося слоя воды при движении с ускорением $a_1 = g/6$.

Горизонтальное колено остается всегда заполненным водой.

5. Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры T_0 в процессе, в котором молярная теплоемкость газа C зависит от температуры T по закону $C = \alpha R \dfrac{T}{T_0}$, где α – неизвестная численная константа.

1) Найдите α, если известно, что при нагревании до температуры $T_1 = 5T_0/4$ газ совершил работу, равную нулю.

2) Найдите температуру T_2, при достижении которой газ занимал минимальный объем в процессе нагревания.

11 класс

1. На гладком закрепленном бревне радиусом R висит массивный однородный канат массой m и длиной $l = 7R$, прикрепленный к бревну в точке E (рис.7). Точка E и ось O бревна находятся в одной горизонтальной плоскости.

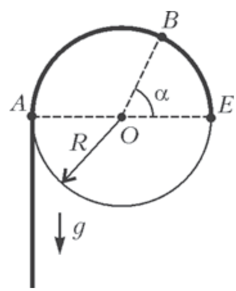


Рис. 7

1) Найдите силу натяжения каната в точке A.

2) Найдите силу натяжения каната в точке B такой, что угол EOB равен α ($\sin\alpha = 2/3$).

2. Гелий в количестве ν моль расширяется от температуры T_1 в процессе *1–2*, а затем – в процессе *2–3* с прямо пропорциональной зависимостью давления p от объема V (рис.8). Отношение объемов $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{3}{2}$.

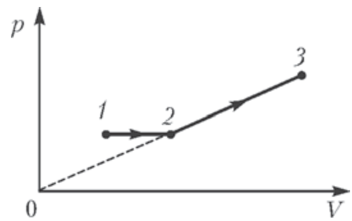


Рис. 8

1) Найдите температуры в состояниях *2* и *3*.

2) Найдите работу, совершенную газом в процессе *1–2–3*.

3) Найдите суммарное количество теплоты, полученное газом в процессе *1–2–3*.

3. Бусинка массой m с положительным зарядом q может скользить вдоль закрепленной

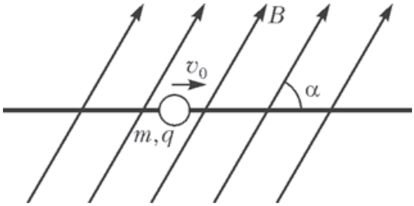


Рис. 9

длинной спицы (рис.9). Бусинка со спицей помещены в однородное магнитное поле с индукцией B. Угол между вектором индукции и спицей $\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$. Бусинке сообщают скорость v_0. Коэффициент трения между бусинкой и спицей μ. Действие силы тяжести не учитывать.

1) Найдите силу трения, действующую на бусинку в момент, когда ее скорость станет $v_0/2$.

2) На какое максимальное расстояние сместится бусинка вдоль спицы?

4. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке 10, все элементы идеальные, их параметры указаны, ключ замкнут, режим установился.

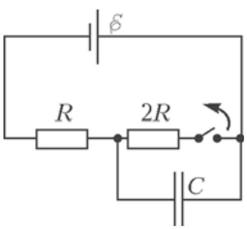


Рис. 10

1) Найдите напряжение на конденсаторе при замкнутом ключе.

2) Найдите ток через источник сразу после размыкания ключа.

3) Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

5. Тонкая собирающая линза создает на экране изображение стрелки, перпендикулярной ее главной оптической оси, с увеличением $\Gamma = 2$. Линзу перемещают, положение главной оптической оси остается неизменным, стрелку и экран не двигают. К моменту когда на экране вновь наблюдается четкое изображение, перемещение составило $s = 27$ см.

1) Сравните расстояние между стрелкой и линзой до перемещения линзы и расстояние между экраном и линзой после перемещения.

2) Найдите фокусное расстояние линзы.

Публикацию по математике подготовили С.Городецкий, О.Подлипский, М.Шабунин; по физике – В.Чивилёв

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

ФИЗИКА

Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике, физике и информатике, которые пользуются большой популярностью среди школьников Москвы и Московской области. Чтобы расширить круг участников, начиная с 2010 года олимпиада проводится в заочной форме, используя интернет-технологии.

Олимпиада по физике проходит под названием «Поверь в себя!» Она не содержит сверхсложных задач, которые могут решать только специально подготовленные школьники. Почти все задачи олимпиады допускают простые решения без громоздкой алгебры на основе знаний обычной школьной программы. Однако наряду с вполне стандартными задачами в заданиях олимпиады можно найти и новые, решения которых сразу не очевидны.

С 2015 года интернет-олимпиада «Поверь в себя» проходит в рамках цикла мероприятий для школьников «Ритм МИЭТ – России».

Ниже приводятся задачи первого и второго туров олимпиады для учащихся 10–11 классов.

Первый тур

Вариант 1

1. При торможении автомобиля на некотором участке пути его скорость снизилась от $v_1 = 70$ км/ч до $v_2 = 10$ км/ч. Считая движение автомобиля равнозамедленным, найдите его скорость v в середине пути.

2. Шар массой $m = 3$ кг, подвешенный на нити, раскрутили так, что он стал двигаться по окружности радиусом $R = 0{,}4$ м с постоянной скоростью и ускорением $a = 10\ \text{м}/\text{с}^2$ в горизонтальной плоскости. Вычислите кинетическую энергию шара.

3. Вычислите плотность ρ идеального газа, если его давление $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па, а средняя квадратичная скорость молекул газа $v_{\text{кв}} = 300$ м/с.

4. В двух вершинах правильного треугольника находятся одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды. Напряженность электрического поля в середине стороны, соединяющей заряды, равна $E_1 = 400\sqrt{3}$ В/м. Найдите модуль напряженности поля в центре треугольника.

5. Электрическая цепь состоит из аккумулятора с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом и внешнего сопротивления $R = 100$ Ом. Вольтметр, подключенный последовательно или параллельно сопротивлению, показывает одно и то же напряжение. Вычислите сопротивление вольтметра.

6. Ток I через катушку индуктивностью $L = 100$ мГн уменьшают до нуля в соответствии с графиком, приведенным на рисунке 1. Определите максимальное напряжение на катушке во время такого выключения тока. Сопротивлением провода катушки пренебречь.

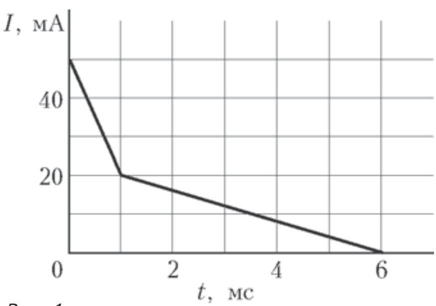


Рис. 1

7. Точечный источник света движется со скоростью $u = 1$ м/с перпендикулярно главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см. Найдите величину скорости изображения в тот момент, когда источник пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии 60 см от линзы.

Вариант 2

1. Камень, брошенный горизонтально с некоторой высоты с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с, упал на землю через $\tau = 2$ с. Определите расстояние s по прямой между точкой бросания и точкой приземления камня. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$.

2. Грузы *1* и *2* связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (рис.2). Масса каждого груза m, сила натяжения нити $(3/5)mg$. Определите коэффициент трения μ между грузом *1* и горизонтальной плоскостью. Массами блока и нити пренебречь. Трение в оси блока отсутствует.

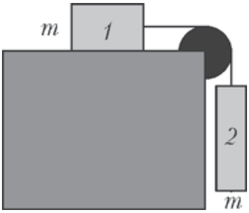


Рис. 2

3. В электрический чайник с устройством самовыключения налили $V = 1$ л воды при температуре $t = 20\ ^\circ\text{C}$. Через $\tau = 160$ с чайник отключился. Определите мощность нагревателя чайника. Теплообменом с окружающими телами пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К).

4. В вершинах равностороннего треугольника находятся точечные заряды $q = 4$ нКл, q, $-q$. Напряженность электрического поля в середине стороны, соединяющей положительные заряды, равна $E = 300$ В/м. Определите величину силы, действующей на каждый положительный заряд.

5. Проводящее кольцо подключено к источнику постоянного напряжения в точках A и B (рис.3). Тепловая мощность, выделяющаяся в кольце, равна $P_1 = 40$ Вт. Какая мощность P_2 будет выделяться в кольце, если точки подключения сделать диаметрально противоположными?

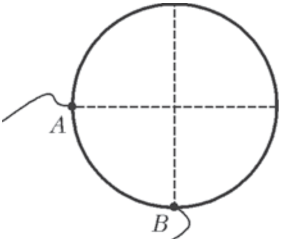


Рис. 3

6. Энергия магнитного поля катушки индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн равна $W = 50$ мДж. Определите величину ЭДС самоиндукции в катушке при равномерном уменьшении силы тока от I_0 до нуля за время $\tau = 0{,}1$ с.

7. Зеркало переместили в то место, где находилось первоначальное изображение предмета, создаваемого зеркалом. Во сколько раз увеличилось расстояние между предметом и его изображением? Предмет остается неподвижным.

Вариант 3

1. Два тела движутся вдоль оси x. На рисунке 4 приведены графики зависимости проекций скоростей этих тел на ось x от времени. Какое расстояние было между телами в момент времени $t = 0$, если минимальное

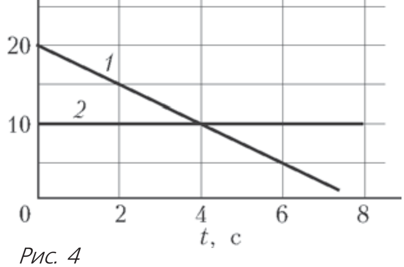


Рис. 4

расстояние между ними при таком движении составило L_{min} = 30 м?

2. Шарик массой m = 50 г тонет в жидкости. В некоторый момент времени его ускорение равно $a = 2$ м/с^2 и направлено вертикально вниз. С какой силой жидкость в этот момент действует на шарик? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. В вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем находится один моль идеального газа. Газ медленно нагревают, одновременно насыпая на поршень песок так, чтобы поршень оставался неподвижным. Определите массу песка, высыпаемого на поршень при увеличении температуры газа на каждый градус. Поршень находится на высоте h = 1 м от дна сосуда, трением между поршнем и сосудом пренебречь. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

4. Два заряженных конденсатора подключили друг к другу. В установившемся состоянии энергия первого конденсатора оказалась равной его первоначальной энергии, а энергия второго конденсатора уменьшилась в n = 9 раз. Определите отношение емкости первого конденсатора к емкости второго.

5. Обкладки заряженного до напряжения U = 100 В конденсатора емкостью C = 1 мкФ замкнули проводником, после чего конденсатор за время τ = 1 мкс практически полностью разрядился. Определите среднюю силу тока через проводник за это время.

6. При подключении катушки индуктивностью L = 90 мГн к источнику ЭДС ток через катушку за время τ = 0,015 с увеличился от нуля до I = 10 А. Определите среднюю величину ЭДС самоиндукции в катушке за это время.

7. На тонкую рассеивающую линзу падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси. После преломления в линзе эти лучи распространяются вдоль прямых, пересекающихся на расстоянии l = 40 см от плоскости линзы. Определите оптическую силу D линзы.

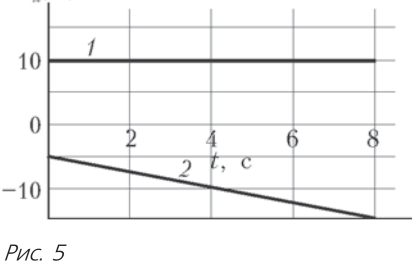


Рис. 5

Вариант 4

1. Два автомобиля движутся вдоль оси x. На рисунке 5 приведены графики зависимости проекций скоростей автомобилей на ось x от времени. Какое расстояние было между автомобилями в момент времени $t = 0$, если в момент времени $t = 4$ с автомобили встретились?

2. Груз массой $m = 100$ г, подвешенный на пружине жесткостью $k = 20$ Н/м, совершает вертикальные колебания. С каким ускорением движется шарик в момент времени, когда пружина растянута на $x = 2$ см? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. График зависимости объема V кислорода от его температуры T при постоянном давлении $p_1 = 70$ кПа совпадает с графиком зависимости V от T для азота при давлении $p_2 = 160$ кПа. Во сколько раз масса азота больше массы кислорода? Газы считать идеальными. Молярная масса кислорода $\mathrm{M}_1 = 32$ г/моль, молярная масса азота $\mathrm{M}_2 = 28$ г/моль.

4. Заряженный конденсатор подключили к источнику напряжения с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В. После перезарядки конденсатора его энергия оказалась равной первоначальной, а в цепи за время перезарядки выделилось количество теплоты $Q = 0{,}4$ мДж. Определите емкость конденсатора.

5. На резисторе сопротивлением $R = 8$ Ом, подключенном к батарейке с ЭДС $\mathcal{E} = 4{,}5$ В, каждую секунду выделяется количество теплоты $Q = 2$ Дж. Определите внутреннее сопротивление батарейки.

6. Катушка индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатор подключены параллельно к источнику постоянного напряжения. Сопротивление провода, которым намотана катушка, равно $R = 100$ Ом. При каком значении емкости конденсатора энергия магнитного поля катушки равна энергии электрического поля конденсатора?

7. Стеклянная призма с преломляющим углом $\varphi = 30°$ лежит на плоском зеркале (рис.6). При каком угле падения α луча на верхнюю грань призмы луч после отражения от зеркала сменит направление распространения на прямо противоположное? Показатель преломления стекла считайте равным $n = 1{,}7$.

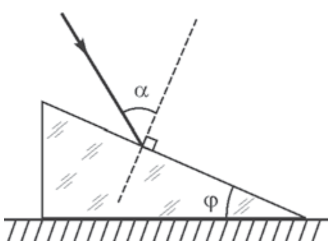


Рис. 6

Вариант 5

1. Тело брошено под углом к горизонту (рис.7). Известны проекции начальной скорости тела на вертикальную (y) и

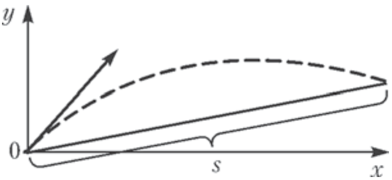


Рис. 7

горизонтальную (x) оси: $v_{0y} = 8$ м/с, $v_{0x} = 4$ м/с. На каком расстоянии от точки старта будет тело через секунду полета? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Тело массой $m = 0{,}5$ кг бросили с некоторой высоты. Когда потенциальная энергия тела уменьшилась на $\Delta E_п = 16$ Дж, его кинетическая энергия стала равной $E_к = 25$ Дж. С какой начальной скоростью брошено тело? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Изотерма кислорода при температуре $t_1 = 47$ °C совпадает с изотермой азота при температуре $t_2 = 7$ °C. Во сколько раз отличаются массы этих газов? Газы считать идеальными. Молярная масса кислорода $M_1 = 32$ г/моль, молярная масса азота $M_2 = 28$ г/моль.

4. Расстояние между пластинами плоского конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, увеличили в 2 раза. Затем, отключив конденсатор от источника, пластины вернули в начальное положение. Найдите отношение начальной энергии конденсатора к конечной.

5. К источнику ЭДС с внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом подключен резистор. При каком сопротивлении этого резистора напряжение на клеммах источника составляет 60% от ЭДС источника?

6. Замкнутый проволочный виток сопротивлением $R = 0{,}3$ Ом проносят мимо магнита. При этом магнитный поток Φ через поверхность, ограниченную витком, меняется, как показано на рисунке 8. В какой момент времени величина тока в контуре максимальна?

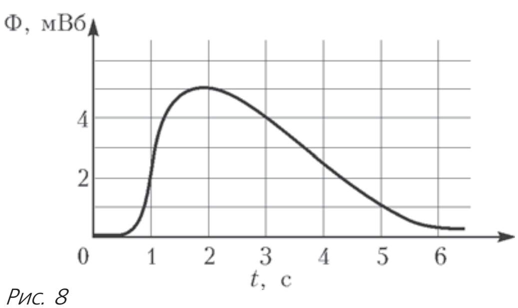


Рис. 8

7. Плоское зеркало движется со скоростью $v_1 = 2$ см/с, перпендикулярной плоскости зеркала, а точечный источник света S движется со скоростью $v_2 = 3$ см/с, параллельной плоскости зеркала (рис.9). Определите скорость движения изображения источника, создаваемого зеркалом. Все скорости определены в одной системе отсчета.

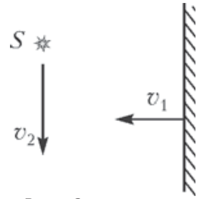


Рис. 9

Второй тур

Вариант 1

1. Рыбак уронил вблизи берега грузило в воду. По поверхности воды, скорость течения которой $u = 3$ м/с, начала распространяться волна, скорость которой в неподвижной воде $v = 5$ м/с. Спустя некоторое время волна, отразившись от противоположного берега реки, вновь вернулась к рыбаку. Найдите это время, если ширина реки $d = 60$ м.

2. Величина скорости материальной точки, движущейся по окружности, меняется со временем по закону $v = \alpha t$, где $\alpha = 4$ м/с^2. Определите величину a центростремительного ускорения точки в момент времени, когда она совершит один оборот по окружности после начала движения.

3. Цепочка состоит из очень большого числа шариков, жестко закрепленных на равных расстояниях друг от друга на легкой гибкой нерастяжимой нити. Масса цепочки m, длина в вытянутом состоянии L. Цепочку располагают вдоль прямой на гладком горизонтальном столе и плотно придвигают соседние шарики друг к другу. Длина такой сжатой цепочки становится равной l. Крайний шарик начинают тянуть с постоянной силой F, растягивая цепочку вдоль ее оси. Определите установившуюся скорость крайнего шарика.

4. В двух сосудах объемами $V_1 = 10$ л и $V_2 = 20$ л находится воздух при одной и той же температуре. Относительная влажность воздуха в первом сосуде $\varphi_1 = 60$ %. Определите относительную влажность φ_2 воздуха во втором сосуде, если после соединения сосудов установившаяся влажность воздуха в сосудах при неизменной температуре стала равной $\varphi = 20$ %.

5. Определите работу A, совершаемую одним молем идеального газа в изобарном процессе, если концентрация молекул газа в этом процессе уменьшается в $m = 2$ раза. Начальная температура газа $t_0 = 27$ °C.

6. Тонкая непроводящая спица наклонена под углом α к

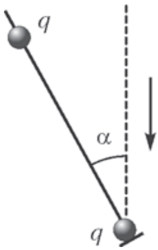


Рис. 10

вертикали (рис.10). Определите расстояние l между бусинками, если нижняя бусинка закреплена на спице, а верхняя может скользить без трения. Бусинки находятся в равновесии. Заряд каждой бусинки q, масса m, постоянная в законе Кулона k, ускорение свободного падения g.

7. В схеме, изображенной на рисунке 11, сопротивления всех резисторов одинаковы, ЭДС источника $\mathcal{E}$ = 1,5 В, амперметр показывает ток $I = 20$ мА. Найдите сопротивление R каждого резистора. Сопротивлениями амперметра и источника пренебречь.

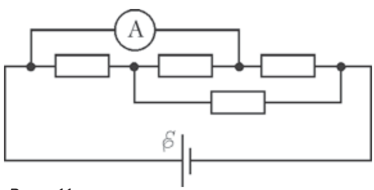


Рис. 11

8. С помощью линзы на экране получено изображение предмета с двукратным увеличением. Расстояние между предметом и экраном увеличили в 1,6 раза. С каким увеличением теперь может быть получено на экране изображение предмета?

Вариант 2

1. Зенитная пушка может стрелять под любым углом к горизонту (рис.12). На каком расстоянии r_m от пушки самолет на высоте $h = 2$ км войдет в зону возможного поражения, если

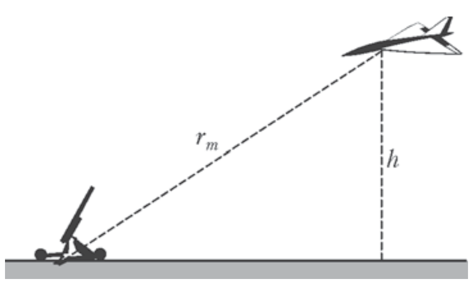


Рис. 12

максимальная горизонтальная дальность полета снаряда пушки $l = 5$ км? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Сплошной однородный шар, до половины погруженный в воду, лежит на дне сосуда и давит на него с силой, равной одной трети действующей на шар силы тяжести. Будет ли плавать этот шар в глубоком сосуде, заполненном водой? Ответ обоснуйте.

3. Через два невесомых неподвижных блока, оси которых горизонтальны и находятся на одной высоте на расстоянии l = = 90 см друг от друга, перекинута невесомая нить (рис.13). К концам и середине нити присоединены три одинаковых груза. Средний груз располагают так, чтобы нить была горизонтальна и чтобы он находился посередине между блоками, и отпускают. Какой путь пройдет средний груз при опускании, прежде чем он начнет подниматься?

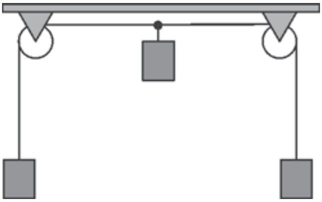


Рис. 13

4. Определите массу воздуха в пузырьке объемом $V = 0{,}083\ \text{см}^3$, который «прилип» к дну водоема на глубине h = 2 м. Температура воды $t = 17\ °\text{C}$. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м/с}^2$, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3\ \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}$, плотность воды $\rho = 1000\ \text{кг/м}^3$, молярная масса воздуха M = = 29 г/моль.

5. Свинцовая проволочка диаметром d_1 = 1 мм в предохранителе плавится при токе I_1 = 8 А. Определите, при каком токе I_2 расплавится проволочка диаметром d_2 = 2 мм. Считайте проволочку достаточно длинной, чтобы можно было пренебречь теплом, выделяемым у ее зажимов, и полагать, что потеря тепла проволочкой прямо пропорциональна площади ее боковой поверхности.

6. Точечные заряды q_1 = 1 нКл и q_2 = 4 нКл расположены в точках A и B, расстояние между которыми a = 30 см, а точечный заряд Q находится в середине отрезка AB. При каком Q электрические силы, действующие на заряды q_1 и q_2 в данной системе, будут равны по величине?

7. Постоянный ток I_1 = 300 мА для пальчиковой батарейки с ЭДС $\mathcal{E}$ = 1,6 В является предельным (при бóльших токах батарейка начинает нагреваться и работает нестабильно). Во сколько раз этот ток меньше тока короткого замыкания, если напряжение на выводах батарейки равно U_1 = 1,3 В? Чему равно внутреннее сопротивление r батарейки?

8. На каком расстоянии d от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F = 20 см нужно расположить перпендикулярно главной оптической оси предмет, чтобы получить его прямое и увеличенное более чем в n = 2 раза изображение? Ответ дайте в виде неравенства.

Публикацию подготовили Г.Гайдуков, И.Горбатый

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада «Росатом»

В течение 2015/16 учебного года Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» проводил Отраслевую физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада, в которой приняли участие около двадцати тысяч школьников, проходила в Москве и городах расположения объектов атомной отрасли (35 региональных площадок).

Олимпиада «Росатом» 2016/17 учебного года входит в Перечень олимпиад школьников (математика – 2 уровень, физика – 1 уровень), поэтому ее победители и призеры смогут воспользоваться особыми правами при поступлении в любые вузы РФ, в которых в качестве вступительных испытаний есть математика или физика.

Ниже приводятся задания олимпиады «Росатом» по математике и физике 2015/16 учебного года для учащихся 11 класса.

МАТЕМАТИКА

1. Сколько пар $(x;\,y)$ целых чисел, являющихся решениями уравнения $7x-5y=23$, удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\le 37$? Найдите пару $(x;\,y)$, для которой $x+y$ наибольшее.

2. Найдите x, при котором выражение $\left(\sin^2 x-\cos x-1/4\right)^2+$ $+\left(\cos 2x+\cos x\right)^2$ принимает наименьшее значение.

3. Для квадратного трехчлена $P_1(x)=x^2-x-6$ и натурального числа n определим многочлены $P_2(x)=P_1(2x)$, $P_3(x)=P_2(2x)$, …, $P_n(x)=P_{n-1}(2x)$. Решите уравнение $P_n(x)=$ $=0$ и найдите сумму корней многочлена $Q_n(x)=P_1(x)+$ $+P_2(x)+\ldots+P_n(x)$.

4. Петя и Вова играют в кости на фантики. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4, и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдает Вове 1 фантик, выиграв – получает от Вовы k фантиков. Игра считается справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равна нулю. Найдите значение k, при котором игра будет справедливой.

5. Функция $\chi(t)$ такова, что

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t > 0, \\ 0 & \text{при} \quad t \le 0. \end{cases}$$

При каких значениях система

$$\begin{cases} x \cdot \chi(x-a) + y \cdot \chi(y-2a) = 5a, \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD = 8$, $AB = 4$ расположены три круга K, K_1 и K_2. Круг K касается кругов K_1, K_2 внешним образом, а также касается прямых AD и BC. Круги K_1, K_2 касаются также сторон AD, AB и AD, CD соответственно. Найдите максимальное возможное значение суммы площадей трех кругов.

ФИЗИКА

1. Три точечных тела, заряженные разными зарядами, но имеющие одинаковые массы, представляют собой замкнутую систему. В некоторый момент времени тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение одного из них (неизвестно какого – крайнего или среднего) равно a, второго (тоже неизвестно какого) равно $3a$. Найдите ускорение третьего тела в этот момент. Между телами действуют только кулоновские силы.

2. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 1, два из трех резисторов одинаковы, третий отличается от них. Известно, что показания первого амперметра $I_1 = I$, второго $I_2 = 2I/3$. Известно также, что сопротивление первого резистора r. Найдите сопротивления второго и третьего резисторов. Считайте, что сопротивления амперметров равны нулю.

3. 2016 одинаковых стержней массой m каждый соединены шарнирно и подвешены за 2016-й стержень к потолку (рис.2). На нижний конец нижнего стержня действует горизонтальная

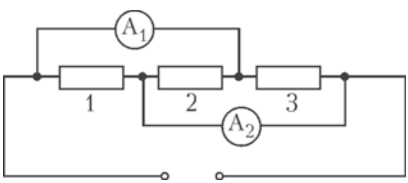


Рис. 1

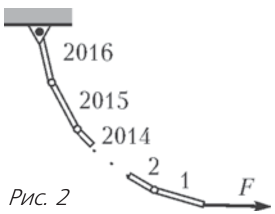


Рис. 2

сила F. Найдите угол между 2016-м стержнем и вертикалью в положении равновесия.

4. В теплоизолированном сосуде под массивным поршнем, на котором лежит куча песка, находится одноатомный идеальный газ (рис.3). Объем газа V, давление p. Песок (по одной песчинке) снимают с поршня, и объем газа медленно увеличивается вдвое. Какой была бы кинетическая энергия поршня в тот момент, когда объем газа вырос вдвое, если бы песок сняли с поршня весь сразу? Атмосферное давление отсутствует.

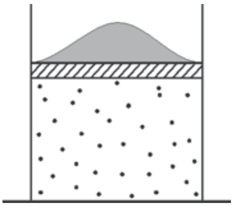


Рис. 3

Указание. В адиабатическом процессе давление и объем идеального газа связаны соотношением $pV^{\gamma} = \text{const}$, где γ – известное число ($\gamma > 1$).

5. Зеркало образовано вращением параболы $y = 2x^2$ вокруг оси y (параболическое зеркало). На зеркало параллельно оси падают два луча: один на некотором расстоянии x, второй – на расстоянии $2x$ от оси y (рис.4). Какой из лучей после отражения от поверхности зеркала пересечет ось y ближе к вершине параболы и на сколько? Найдите расстояние от вершины параболы до точки пересечения этого луча с осью y.

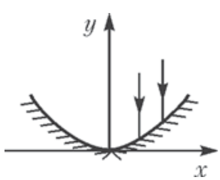


Рис. 4

Публикацию подготовили С.Гришин, С.Муравьев

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Увидев предупреждающий знак, водитель автомобиля, слегка нажав на педаль тормоза, стал сбавлять скорость. Затем, увидев пешехода, нажал на педаль тормоза сильнее и тормозил вплоть до остановки автомобиля. График зависимости ускорения автомобиля от времени показан на рисунке 1. Какое расстояние проехал автомобиль с момента начала торможения до остановки?

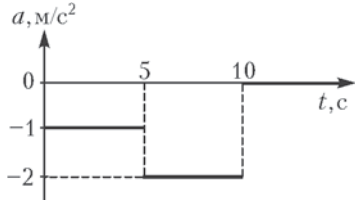


Рис. 1

2. Электрическая схема состоит из идеального источника напряжения, трех одинаковых резисторов, конденсатора и ключа (рис.2). В начальный момент времени ключ разомкнут, а система находится в равновесном состоянии. Во сколько раз изменится напряжение на конденсаторе, если ключ замкнуть и подождать достаточно длительное время, чтобы установилось равновесие?

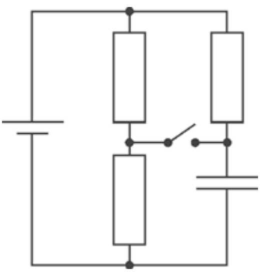


Рис. 2

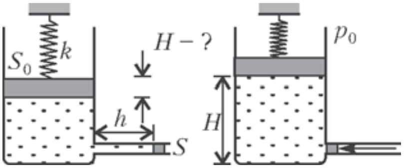


Рис. 3

3. Идеальный газ находится в цилиндрическом сосуде, закрытом невесомым поршнем площадью S_0 (рис.3). Пружина жесткостью k одним концом прикреплена к поршню, а другим –

к неподвижной опоре. Внизу сосуда имеется ответвление в форме трубки площадью S, также закрытой поршнем. Поршни могут свободно перемещаться без терния. В исходном положении система находится в равновесии, пружина не деформирована, поршень в трубке занимает положение на расстоянии h от места соединения трубки с сосудом. Весь газ из трубки выдавили в сосуд, медленно передвигая поршень в трубке. На какую высоту ΔH при этом переместился поршень с пружиной, если известно, что он оказался на высоте H над дном сосуда? Поршни перемещаются без трения, температура газа постоянная, атмосферное давление равно p_0 .

4. В однородном магнитном поле $\vec{B}$ далеко друг от друга находятся две системы зарядов (системы можно считать не взаимодействующими между собой и независимыми) (рис.4). Каждая из систем состоит из закрепленного положительного заряда и вращающейся вокруг него в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, частицы массой m с зарядом $-q$. При этом одна частица вращается по часовой стрелке, а другая – против. На какую величину $\Delta\omega$ должны отличаться абсолютные значения угловых скоростей вращения частиц, чтобы радиусы их орбит были одинаковы?

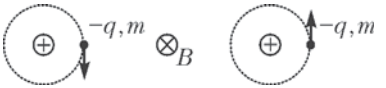


Рис. 4

5. Оцените, сколько воздушных шаров, наполненных гелием, следует взять человеку, чтобы взлететь. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Открытая межвузовская олимпиада школьников «Будущее Сибири»

I (отборочный) этап

8 класс

1. Пассажирские поезда «Аэроэкспресс» курсируют по маршруту «Аэропорт Шереметьево – Москва» и «Москва – Аэропорт Шереметьево». Поезда отходят от обоих пунктов одновременно через каждые полчаса, время в пути 38 мин. Сколько поездов встретит пассажир на маршруте?

Рис. 5

2. На одной чаше разноплечных весов лежат 5 одинаковых кубиков, а на другой – 5 одинаковых шариков (рис.5). Весы находятся в равновесии. С весов убирают 4 шарика, а 1 кубик перекладывают с одной чаши весов на другую. Весы снова оказываются в равновесии. Найдите отношение масс кубика и шарика.

3. Шар плавает в воде, погружаясь в воду наполовину. Если опустить такой шар в цилиндрический стакан с водой, то уровень воды в стакане поднимется на 10%. Найдите отношение объемов шара и воды в стакане.

4. На рисунке 6 изображен график изменения температуры воды в кастрюле, нагреваемой на электроплитке. В момент времени t_1 в кастрюлю бросили кусок льда с температурой $T_0 = 0$ °C. Определите время t_x, когда вода в кастрюле вновь нагреется от $T_1 = 20$ °C до $T_2 = 60$ °C. Масса воды в кастрюле $m_в = 1$ кг, $t_1 = 2$ мин, $t_2 = 2{,}5$ мин, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 336$ кДж/кг. Мощность электроплитки постоянна, теплообменом с окружающей средой пренебречь.

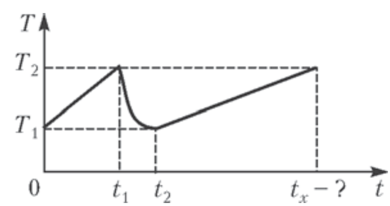


Рис. 6

9 класс

1. Пассажирские поезда «Аэроэкспресс» курсируют по маршруту «Аэропорт Шереметьево – Москва» и «Москва – Аэропорт Шереметьево». Поезда отходят от обоих пунктов одновременно через каждые полчаса, время в пути 38 мин. Планируется в результате реконструкции дороги сократить время в пути до 28 мин. Во сколько раз при этом уменьшится количество встречных поездов, наблюдаемых во время движения по маршруту?

2. Шесть одинаковых проводников соединили, как показано на рисунке 7. Один из проводников можно перерезать (убрать). Какой именно из шести проводников следует перере-

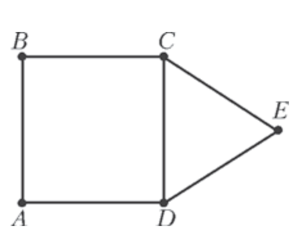


Рис. 7

зать, чтобы сопротивление получившейся схемы, измеряемое между точками B и E, было как можно больше?

3. Маленький мячик бросают вертикально вверх с некоторой начальной скоростью, и он возвращается в исходную точку через время T (рис.8). Затем на половине максимальной высоты его первоначальной траектории поместили горизонтальную доску. Мячик снова бросают вертикально вверх из той же точки с той же начальной скоростью. Через какое время t он вернется в исходную точку? Удар мячика о доску считать упругим. Влиянием воздуха пренебречь.

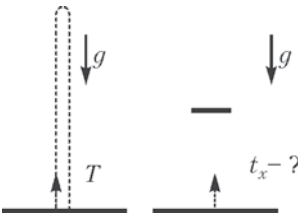


Рис. 8

4. На рисунке 9 изображен график изменения температуры воды в кастрюле, нагреваемой на электроплитке. В момент времени t_2 в кастрюлю бросили комок снега с температурой $T_0 = 0$ °C . Определите время, когда вода в кастрюле вновь нагреется до T_2 . Величины T_1 , T_2 , t_1 , t_2 , t_3 заданы. Удельная теплоемкость воды c, удельная теплота плавления снега λ . Мощность электроплитки постоянна, теплообменом с окружающей средой пренебречь.

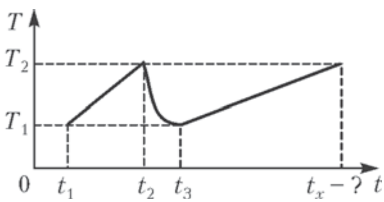


Рис. 9

10 класс

1. Длинный тротуар заполнен пешеходами. Половина идет в одну сторону, половина – в другую. Их скорости равны v. Школьник Петя торопился на занятия, но успел заметить, что за равные промежутки времени он обгоняет в 5 раз меньше пешеходов, чем попадается встречных. С какой скоростью двигался Петя вдоль тротуара, если известно, что он двигался равномерно?

2. Каскадер совершает прыжок на автомобиле через колонну стоящих друг за другом машин (рис.10). Для этого он разгоняется по горизон-

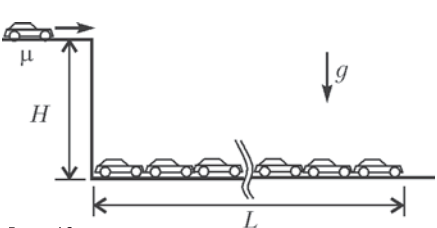


Рис. 10

тальной эстакаде высотой H, находящейся непосредственно перед колонной машин. Какой минимальный разгонный путь для этого необходим автомобилю? Длина колонны машин L. Коэффициент трения между эстакадой и автомобилем μ. Считать, что все колеса автомобиля ведущие. Влиянием воздуха пренебречь. Длину машины считать малой по сравнению с длиной колонны.

3. Тягач с помощью каната длиной L тянет груз массой m на эстакаду высотой h по наклонному настилу длины l так, что горизонтальная составляющая $F_г$ силы тягача постоянна (рис.11).

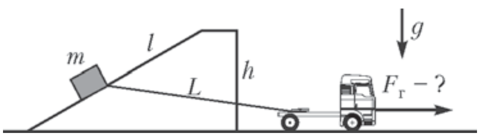


Рис. 11

При каком минимальном значении $F_г$ тягач затянет груз на вершину эстакады? Груз скользит по настилу без трения. Высотой тягача можно пренебречь, $L > l > \sqrt{2}h$. Ускорение свободного падения равно g.

4. У невесомого цилиндрического сосуда высотой H и сечением S с узким открытым цилиндрическим горлышком высотой h отсутствует дно. Сосуд поставили на стол и заполнили соленой водой плотностью ρ, а горлышко заполнили чистой водой плотностью ρ_0 так, чтобы эти две жидкости не были перемешаны (рис.12). Чтобы содержимое сосуда не выливалось, сосуд необходимо придавить грузом массой M. Какой минимальный груз нужно добавить, чтобы содержимое сосуда не вылилось после перемешивания жидкостей?

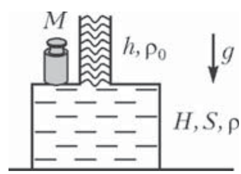


Рис. 12

11 класс

1. См. задачу 2 для 9 класса.

2. Школьник изучает движение бруска по горизонтальному столу. Он установил, что под действием одной и той же по величине силы брусок двигается с одним и тем же ускорением, если сила направлена вдоль стола и под углом $60°$ к поверхности стола. Чему равен коэффициент трения между бруском и столом?

3. Для производства газировки внутри герметичного сосуда

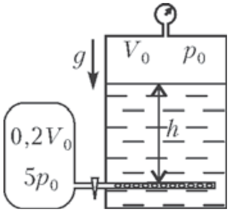


Рис. 13

с водой и углекислым газом CO_2 вставлена трубка с отверстиями, соединенная через вентиль с закрытым баллоном с CO_2 (рис.13). Перед открытием вентиля давление газа в сосуде было p_0 , а в баллоне – $5p_0$. Объем газа в сосуде в 5 раз больше, чем в баллоне. Расстояние от трубки до поверхности воды $h = 1$ м. После открытия вентиля установившееся давление в сосуде равно $1{,}6p_0$. Найдите долю массы CO_2 , растворившегося в воде, по отношению к массе всего CO_2 в системе, считая, что до открытия вентиля CO_2 в воде не было, и приняв $p_0 =$ $= 100$ кПа. Изменением плотности воды ($\rho = 1000$ кг/м^3) при растворении CO_2 пренебречь. Вода через мелкие отверстия в баллон не поступает. Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2 . Температура в системе поддерживается постоянной.

4. Показанная на рисунке 14 схема собрана из батареи, двух ключей и четырех попарно одинаковых незаряженных конденсаторов. Ключ K_1 замкнули, и к моменту наступления равновесия через него протек заряд Q_1 , а на конденсаторах установились напряжения U_1 и U_2 , как показано на рисунке. Затем, ключ K_1 разомкнули и замкнули ключ K_2 . Какой заряд Q_2 протечет через ключ K_2 к моменту установления равновесия?

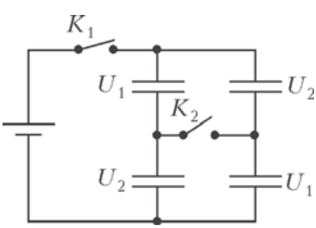


Рис. 14

II (заключительный) этап

8 класс

1. В теплоизолированный бак налили 9 литров воды с температурой $20\ ^\circ C$. Затем в бак с водой стали бросать нагретые до $200\ ^\circ C$ камни. Вода закипела ровно в тот момент, когда бак оказался наполненным до краев (все камни полностью погружены в воду). Найдите объем бака, если известно, что плотность камней в 2,5 раза больше плотности воды, а их удельная теплоемкость (на единицу массы) в 5 раз меньше удельной теплоемкости воды. Считайте, что перед бросанием каждого следующего камня успевает установиться тепловое равновесие. Потерями тепла пренебречь. Температура кипения воды $100\ ^\circ C$.

2. Человек, выгуливая собаку, идет по прямому тротуару с постоянной скоростью $u = 5$ км/ч. Собака стартует от него и бежит вперед на всю длину поводка с постоянной скоростью $v = 15$ км/ч. Когда поводок натягивается, собака разворачивается и бежит обратно к хозяину. Достигнув хозяина, собака повторяет свой маршрут. Какой путь пройдет человек, когда собака вернется к нему после $N = 100$ циклов? Длина поводка $l = 10$ м.

3. На противоположных концах легких разноплечных весов сидят Муха-Цокотуха и Комар (рис.15). У основания весов находится Паук. Известно, что масса Паука в 2 раза больше, чем масса Мухи, и в 4 раза больше, чем масса Комара. Изначально весы находились в равновесии в горизонтальном положении. Затем Муха и Комар начинают двигаться навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v. С какой скоростью и в каком направлении должен двигаться Паук, чтобы весы оставались горизонтальными?

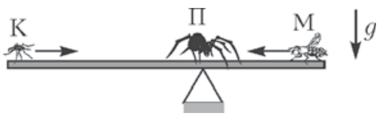


Рис. 15

4. В воде плавает цилиндрическая пробирка, к основанию которой прикреплены два одинаковых куска пластилина (рис.16). При этом расстояние от верхнего края пробирки до уровня воды равно H_1. Один кусок пластилина переместили внутрь пробирки, после чего расстояние от верхнего края пробирки до уровня воды стало равно H_2. Каким будет расстояние от верхнего края пробирки до уровня воды, если и второй кусок пластилина переместить внутрь пробирки?

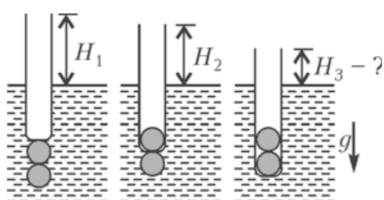


Рис. 16

9 класс

1. Деревня A одинаково удалена от деревни B и от железнодорожной станции C. Из пункта A в сторону станции в момент времени $t_1 = 10$ ч вышел точно знающий дорогу местный житель. В момент $t_2 = 12$ ч из пункта B на станцию отправился дачник. В момент $t_3 = 13$ ч они встретились в лесу, двигаясь перед встречей в перпендикулярных направлениях. После встречи дачник последовал за местным жителем, и в момент $t_4 = 15$ ч они пришли в пункт назначения. Во сколько раз дачник шел быстрее местного жителя до встречи с ним? Местный житель все время двигался прямолинейно с постоянной скоростью, дачник до встречи с местным жителем двигался прямолинейно с постоянной скоростью.

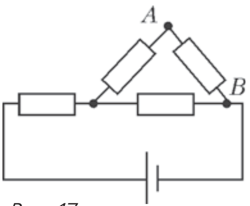


Рис. 17

2. У школьника Пети имеется набор из четырех резисторов с сопротивлениями 2, 0, 1 и 6 Ом и идеальная батарейка. Он собрал из них электрическую схему, показанную на рисунке 17. Определите, где стоит какое сопротивление, если известно, что напряжение между точками A и B максимально возможное в данной схеме. В качестве ответа нарисуйте схему и проставьте на ней необходимые значения сопротивлений, ответ обоснуйте.

3. С выступа высотой h бросили камень под углом к горизонту (рис.18). Определите, на сколько время подъема камня до верхней точки траектории меньше, чем время падения от верхней точки до земли, если известно, что камень находился в воздухе время T. Ускорение свободного падения равно g. Влиянием воздуха пренебречь.

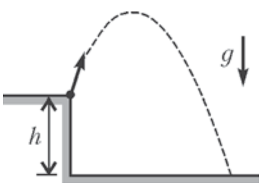


Рис. 18

4. В воде плавает цилиндрическая пробирка, внутри которой находится магнит, а снизу к пробирке прицепили друг за другом еще два одинаковых магнита (рис.19). При этом расстояние от нижнего края нижнего магнита до уровня воды равно H_1. Нижний магнит переместили в пробирку, после чего расстояние от нижнего края оставшегося в воде магнита до уровня воды стало равно H_2. Каким будет расстояние H_3 от дна пробирки до уровня воды, если оставшийся в воде магнит переместить внутрь пробирки?

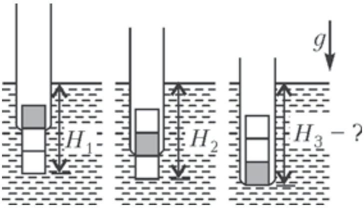


Рис. 19

5. Снабженный ракетным двигателем автомобиль с помощью трамплина прыжком из точки старта A попал в точку B на плоской вершине горы, приземлившись горизонтально со скоростью, равной по величине скорости, с которой он оторвался от трамплина (рис.20). Расстояние между пунктами A и B по горизонтали L, по вертикали H. Определите скорость, с которой автомобиль оторвался от трамплина. Двигатель автомобиля создавал направленную по горизонтали постоянную по величине тягу (обозначена горизонтальной стрелкой). Ускорение свободного падения равно g. Размерами автомобиля, изменением массы автомобиля и влиянием воздуха пренебречь.

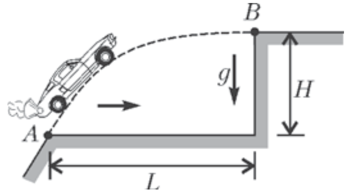


Рис. 20

10 класс

1. Найдите угловую скорость, до которой будет раскручен изначально не вращающийся круглый маховик радиусом R с помощью тонкой веревки длиной L, которую вытягивают с постоянным ускорением a (рис.21). Веревка не проскальзывает.

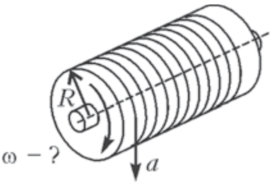


Рис. 21

2. На горизонтальном столе располагается система, состоящая из клина массой M с углом при основании α и лежащего на нем груза массой m (рис.22). Клин и груз соединены легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок (прямые отрезки веревки параллельны наклонной поверхности клина). При каком минимальном коэффициенте трения между клином и столом система будет находиться в покое? Трения между клином и грузом нет.

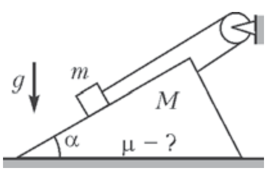


Рис. 22

3. Резистор изготавливают из непроводящего керамического цилиндра длиной $l = 1$ см и диаметром $d = 2$ мм, на который наносят тонкое проводящее покрытие и затем прорезают его тонкой спиральной непроводящей канавкой, а на торцы цилиндра напрессовывают контакты (рис.23). Если канавку не прорезать, то получится резистор сопротивлением $R_0 = 1$ Ом. Сколько витков должна иметь равномерная спиральная канавка, чтобы резистор имел сопротивление $R = 160$ Ом? Шириной канавки и вкладом приконтактных областей малого размера пренебречь. Ответ округлите до целого.

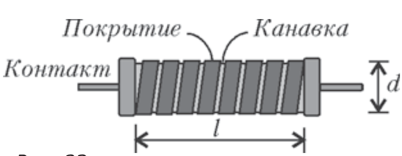


Рис. 23

4. На гладком горизонтальном столе лежат друг на друге два одинаковых бруска массой m каждый (рис.24). Коэффициент трения между ними равен μ. К верхнему бруску прикреплена легкая пружина. На эту конструкцию со стороны пружины налетает брусок массой M со скоростью v_0. При какой максимальной жесткости k пружины верхний брусок не сместится относительно нижнего? Пружина достаточно длинная, так что сжимается не полностью. Трения о поверхность стола нет. Ускорение свободного падения равно g.

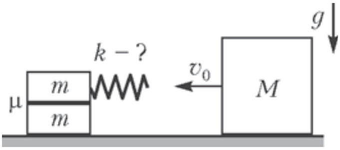


Рис. 24

5. Садовод-любитель поставил в пустой цилиндрический таз площадью $S_т = 500\ см^2$ пустую открытую банку массой m = 100 г, площадью дна $S_д = 50\ см^2$ и площадью горловины $S_г = 20\ см^2$ (рис.25). Пошел дождь – таз и банка стали наполняться водой. Через некоторое время стоявшая на дне банка начала вертикально всплывать. Определите, сколько осадков (высота выпавшего слоя воды в мм) выпало к этому моменту. Плотность воды $\rho = 1\ г/см^3$.

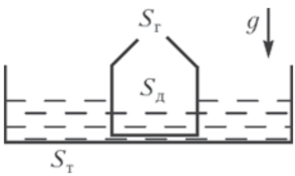


Рис. 25

11 класс

1. У одного динамометра шкала проградуирована в ньютонах, а у второго – в сантиметрах. Когда к первому динамометру подвесили вертикально второй, сцепив их пружинами, первый показал F_1, а второй – Δx_1 (рис.26). Когда, наоборот, ко второму динамометру подвесили первый, второй динамометр показал Δx_2. Какую силу F_2 показал при этом первый динамометр?

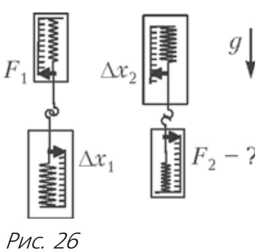


Рис. 26

2. На дне сосуда находится тонкая невесомая пластинка, под которую не подтекает вода (рис.27). К пластинке на нити привязан невесомый шарик. Если в сосуд медленно наливать воду, то пластинка начинает отрываться от дна, когда шарик оказывается наполовину погруженным в воду. В этот момент уровень воды в сосуде равен h. Если же до того,

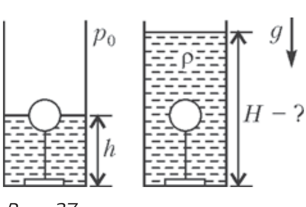


Рис. 27

как пластинка начнет отрываться, придержать шарик и налить в сосуд много воды, то пластинка перестает отрываться от дна, даже если шарик не придерживать. При каком минимальном уровне воды H в сосуде это возможно? Ускорение свободного падения g, атмосферное давление p_0 и плотность воды ρ известны.

3. Представленная на рисунке 28 схема состоит из идеальной батареи с ЭДС $\mathcal{E}$, двух резисторов сопротивлениями R_1 и R_2, конденсатора емкостью C, заряженного зарядом q (полярность показана на рисунке), и кнопки. Кнопку нажимают, замыкая сразу три контакта (отмечены маленькими кружками). Найдите отношение тока через резистор сопротивлением R_1, возникающего сразу после нажатия кнопки, к току, протекающему через этот резистор спустя достаточно длительное время, когда система выходит на установившийся (стационарный) режим.

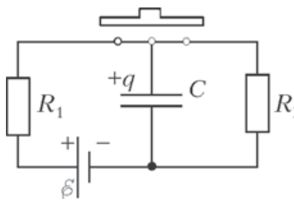


Рис. 28

4. Заряженная бусинка свободно надета на прямую неподвижную непроводящую спицу, рядом с которой закреплен точечный заряд (рис.29). Если бусинку прижимать к спице, между ними возникает трение (коэффициент трения постоянен). Бусинку запускают с большого расстояния слева от заряда со скоростью v_0. При этом на большом расстоянии справа от заряда ее скорость устанавливается равной $v_0/2$ и в дальнейшем практически не меняется. Какой будет установившаяся скорость v бусинки справа, если во время ее движения точечный заряд двигать влево с постоянной скоростью u, не меняя его расстояния от спицы? Силу тяжести не учитывайте.

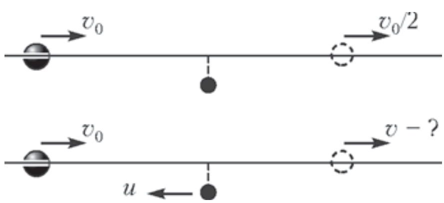


Рис. 29

5. Оцените электрическую мощность, вырабатываемую ветрогенератором изображенного на рисунке 30 типа в ветреную погоду. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать

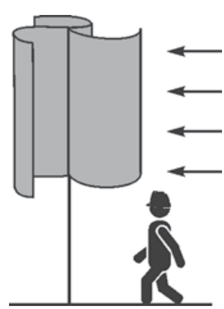


Рис. 30

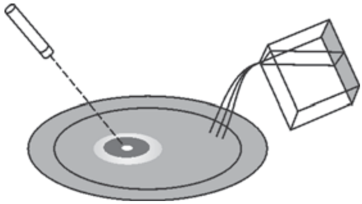


Рис. 31

необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

6. Задача-демонстрация (демонстрируется видеоролик). Если направить в блюдечко с водой узкий пучок света, то вокруг яркого центрального пятна наблюдается темное колечко с резкими границами (рис.31). Причем за внешней границей вновь видна светлая область. По мере наполнения блюдечка водой ширина темного колечка увеличивается. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовил Е.Жданов, М.Махмудиан, А.Погосов, Д.Похабов

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМЕНИ И.М.ГУБКИНА

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вступительный экзамен проводился для тех абитуриентов, которые имели право не сдавать ЕГЭ: для выпускников техникумов, выпускников школ прошлых лет, иностранцев и освобожденных от ЕГЭ по состоянию здоровья. Экзамен оценивался по 100-балльной шкале. Задачи В1-В12 в каждом варианте оценивались максимум в 5 баллов, задачи С1-С4 – максимум в 10 баллов.

Если в условии специально не оговорено, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным $10\ м/с^2$.

Вариант 1

В1. Первую половину пути автомобиль прошел со скоростью 40 км/ч, вторую – со скоростью 60 км/ч. Найдите (в км/ч) среднюю скорость автомобиля на всем пути.

В2. С какой максимальной скоростью автомобиль может проходить закругление дороги радиусом 225 м, если коэффициент трения между шинами автомобиля и дорогой равен 0,4?

В3. Груз начинают поднимать вертикально вверх с постоянным ускорением. Во сколько раз работа, совершенная за первую секунду движения, меньше работы, совершаемой за следующую, вторую секунду?

В4. Сжатая пружина жесткостью 40 кН/м обладает запасом потенциальной энергии 50 Дж. На сколько сантиметров сжата пружина?

В5. Сосуд кубической формы с ребром 20 см до краев заполнен водой. Определите силу давления воды на боковую грань сосуда. Атмосферное давление не учитывайте. Плотность воды $1000\ кг/м^3$.

B6. Открытую пробирку с воздухом при атмосферном давлении нагрели, затем герметически закрыли и охладили до $-13\ °C$. Давление в пробирке уменьшилось при этом втрое по сравнению с атмосферным. До какой температуры (в кельвинах) была нагрета пробирка?

B7. Пуля, летевшая со скоростью 400 м/с, пробивает стенку. Определите, на сколько градусов нагрелась пуля, если ее скорость уменьшилась до 200 м/с. На нагревание пули пошло 25% выделившегося количества теплоты. Удельная теплоемкость материала пули $200\ Дж/(кг \cdot К)$.

B8. В однородном электрическом поле, вектор напряженности которого направлен вертикально вверх, находится в равновесии пылинка массой 0,2 мг и зарядом 50 нКл. Определите напряженность поля.

B9. Каково внутреннее сопротивление источника тока, если на сопротивлении 20 Ом, подключенном к источнику тока, выделяется мощность 100 Вт, а во всей цепи – 130 Вт?

B10. Проводник длиной 2 м движется со скоростью 20 м/с в однородном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл, оставаясь перпендикулярным к линиям поля. Вектор скорости перпендикулярен к проводнику и образует с линиями индукции угол $30°$. Найдите ЭДС, индуцируемую в проводнике.

B11. Найдите период (в микросекундах) колебаний контура, излучающего электромагнитную волну, длина которой 600 м. Скорость света равна $3 \cdot 10^8$ м/с.

B12. Энергия фотонов, которыми облучается металл, в 5 раз больше работы выхода электронов из металла. Какую долю (в процентах) от энергии фотонов составляет максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из металла?

C1. Небольшой груз массой 5 кг подвешен к потолку лифта с помощью двух легких нерастяжимых нитей, одна длиной 30 см, другая длиной 40 см. Расстояние между точками крепления нитей к потолку равно 50 см. Лифт поднимается с ускорением $2\ м/с^2$. Найдите натяжение короткой нити.

C2. Невесомый стержень, на конце которого закреплен груз массой 0,5 кг, а в середине – груз массой 2 кг, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его свободный конец. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой он будет действовать на ось в момент прохождения нижнего положения?

C3. Для того чтобы превратить некоторое количество льда при температуре $-50\ °C$ в воду с температурой $+50\ °C$, требуется 1290 кДж энергии. Чему равна масса льда? Удельная теплоемкость воды $4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплоемкость льда $2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплота плавления льда $3{,}3 \cdot 10^8 \text{ Дж/кг}$.

C4. Груз, подвешенный на упругом резиновом шнуре, совершает гармонические колебания. Во сколько раз уменьшится период колебаний, если груз прикрепить к этому же шнуру, но сложенному вдвое?

Вариант 2

B1. Катер, переправляясь через реку шириной 600 м, двигался перпендикулярно течению реки со скоростью 4 м/с в системе отсчета, связанной с водой. На сколько метров будет снесен катер течением, если скорость течения 1,5 м/с?

B2. К невесомой нити длиной 1 м прикреплен шарик массой 200 г, который равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой минимальной угловой скорости вращения произойдет обрыв нити, если она выдерживает максимальную нагрузку 3,8 Н?

B3. Человек массой 60 кг, стоя на коньках, бросает перед собой горизонтально груз массой 3 кг со скоростью 4 м/с, а сам откатывается назад. Через сколько секунд после броска человек остановится, если коэффициент трения коньков о лед 0,01?

B4. С какой высоты падает без начальной скорости камень, если его скорость при падении на землю равна 18 м/с, а работа силы сопротивления воздуха равна (по модулю) 76 Дж? Масса камня 2 кг.

B5. В сообщающиеся сосуды налита ртуть. В один сосуд добавили воду, высота столба которой 12 см. Какой высоты (в см) должен быть столб некоторой жидкости в другом сосуде, чтобы уровень ртути в обоих сосудах был одинаков, если плотность жидкости в 1,25 раза меньше плотности воды?

B6. При уменьшении объема газа в 2 раза давление увеличилось на 24 кПа, а абсолютная температура возросла на 10%. Каково было первоначальное давление (в кПа) газа?

B7. Определите изменение внутренней энергии двух молей газа при изобарном нагревании от $5\,^\circ\text{C}$ до $10\,^\circ\text{C}$, если газу было сообщено количество теплоты 210 Дж. Универсальная газовая постоянная $8{,}3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$.

B8. Заряженная частица создает в вакууме в некоторой точке напряженность 50 В/м. Какая сила (в наноньютонах) будет действовать на заряд 3 нКл, помещенный в эту точку, если всю систему поместить в керосин, диэлектрическая проницаемость которого равна 2?

B9. Батарея состоит из 4 одинаковых последовательно соединенных элементов с ЭДС 3 В каждый. Чему равна полная мощность, выделяемая в цепи, если ток равен 4 А?

B10. При пропускании через катушку тока силой 5 А индукция магнитного поля в катушке оказалась равной 1 Тл. Определите индуктивность катушки, если площадь ее поперечного сечения $200\ \text{см}^2$, а число витков 2500.

B11. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и трех одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период собственных колебаний контура 0,24 с. Чему будет равен период (в миллисекундах), если конденсаторы включить последовательно?

B12. Чему равно задерживающее напряжение для фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла светом с энергией фотонов $9{,}2\cdot10^{-19}$ Дж, если работа выхода из этого металла $2{,}8\cdot10^{-19}$ Дж. Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

C1. Брусок массой 2 кг перемещают по стене вертикально вверх с помощью силы, направленной под углом α к вертикали. Найдите величину этой силы, если известно, что $\sin\alpha = 0{,}8$, коэффициент трения между стеной и бруском равен 0,15, а ускорение бруска равно $2\ \text{м/с}^2$.

C2. Невесомый стержень, на концах которого закреплены грузы массами 1,5 кг и 7,5 кг, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. Стержень удерживают так, что больший груз находится в верхней точке, а затем отпускают. С какой силой стержень будет действовать на ось в тот момент, когда большой груз проходит нижнюю точку?

C3. Тело соскальзывает с наклонной плоскости длиной 260 м. Коэффициент трения о плоскость равен 0,4. Определите, на сколько градусов повысится температура тела, если на его нагревание идет 75% выделившегося количества теплоты. Удельная теплоемкость материала, из которого сделано тело, равна $130\ \text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$. Угол наклона плоскости к горизонту 60°.

C4. Через сколько секунд от начала движения точка, совершающая колебания по закону $x = A\cos\omega t$, сместится от начального положения на половину амплитуды? Период колебаний составляет 24 с.

Вариант 3

В1. Два велосипедиста едут со скоростями 21,6 км/ч и 28,8 км/ч по взаимно перпендикулярным дорогам. Чему равна их относительная скорость?

В2. Небольшой шарик массой 200 г, прикрепленный к концу нити длиной 20 см, вращается в вертикальной плоскости. В нижней точке окружности скорость шарика равна 3 м/с. Чему равна в этот момент сила натяжения нити?

В3. Определите КПД (в процентах) транспортера, если за сутки он переносит груз массой 2400 т с уровня земли на высоту 3,6 м. Мощность двигателя 4 кВт.

В4. Пуля массой 4 г, летевшая горизонтально со скоростью 800 м/с, пробивает доску и вылетает из нее со скоростью 400 м/с. Найдите абсолютную величину работы, совершенной над пулей силой сопротивления со стороны доски.

В5. В полый куб налита доверху жидкость. Во сколько раз сила давления воды на дно больше силы давления на боковую стенку? Атмосферное давление не учитывайте.

В6. При нагревании газа при постоянном объеме на 1 К давление увеличилось на 0,4%. При какой начальной температуре (в кельвинах) находился газ?

В7. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Абсолютная температура нагревателя в 1,25 раза больше абсолютной температуры холодильника. Определите долю (в процентах) количества теплоты, отдаваемого холодильнику.

В8. Два точечных заряда взаимодействуют в вакууме на расстоянии 10 см с силой 10 мН, а в жидком диэлектрике на расстоянии 5 см – с силой 20 мН. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

В9. Какова полная мощность, развиваемая источником тока с внутренним сопротивлением 2 Ом при подключении к нему сопротивления 3 Ом, если напряжение на этом сопротивлении равно 9 В?

В10. Определите индуктивность катушки, если при равномерном изменении в ней силы тока за 2 с от 5 А до 10 А возникает ЭДС самоиндукции 10 В.

В11. Колебательный контур с емкостью 2 мкФ настроен на частоту 300 Гц. После подключения к нему параллельно другого конденсатора частота колебаний в контуре стала 150 Гц. Определите емкость (в микрофарадах) второго конденсатора.

В12. В реакции изотопа $^{27}_{13}Al$ и углерода $^{12}_{6}C$ образуется

α-частица, нейтрон и ядро некоторого изотопа. Определите количество нейтронов в образующемся ядре.

С1. Доска массой 6 кг находится на горизонтальной плоскости. На доске лежит брусок массой 2 кг. Коэффициент трения между доской и бруском и между доской и плоскостью равен 0,3. Какую минимальную горизонтальную силу надо приложить к доске, чтобы брусок начал с нее соскальзывать?

С2. Два бруска массами 700 г и 900 г, лежащие на гладком полу, соединены невесомой пружиной. Бруски удерживают так, что пружина сжата на 12 см. Сначала отпускают первый брусок, а в тот момент, когда пружина не будет деформирована, отпускают и второй. Найдите максимальную деформацию (в см) пружины в процессе дальнейшего движения.

С3. Два одинаковых шарика, сделанных из вещества с удельной теплоемкостью $150\ Дж/(кг\cdot К)$, движутся навстречу друг другу со скоростями 40 м/с и 20 м/с. Определите, на сколько градусов они нагреются в результате неупругого столкновения.

С4. При смещении точки от положения равновесия, равном 4 см, скорость точки равна 6 см/с, а при смещении, равном 3 см, скорость точки равна 8 см/с. Найдите амплитуду колебаний (в см).

Публикацию подготовил А.Черноуцан

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Политехническая олимпиада школьников

В 2015/16 учебном году в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете Петра Великого проводилась Политехническая олимпиада школьников по математике, физике и информатике. Олимпиада состояла из двух туров. Отборочный тур был проведен в виде двух интернет-сессий. В каждой сессии участники имели одну попытку продолжительностью 180 минут.

Школьники, преодолевшие отборочный рубеж, участвовали в решающем очном туре. На решение задач заключительного тура было отведено 180 мин.

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур

1 этап

1. Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt{3x^2+x-2}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3x^2-6x-9}\,.$$

2. Найдите наибольшее значение выражения $y-2x$, где $(x;\,y)$ – решение системы

$$\begin{cases}|x+2y|+|y-2x|=7,\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$$

3. Решите неравенство $\left(x^2-6x+8\right)\sqrt{x^2-9x+18}\le 0$. В ответе укажите сумму наименьшего и наибольшего положительных решений.

4. Найдите такое натуральное число n, что числа $n+7$ и $n+51$ являются квадратами натуральных чисел.

5. Класс выбирает старосту. Выдвинуты 3 кандидата. Каждый школьник в бюллетене для тайного голосования отмечает одного кандидата. Сколькими способами могут распределиться голоса, если в классе 28 школьников?

6. Из двух городов навстречу друг другу отправились поезда. Пройдя треть пути, первый поезд остановился на 45 мин. Возобновив движение, он через 6 мин встретил второй поезд. Поезда прибыли в пункты назначения одновременно. Сколько минут был в пути второй поезд?

7. Команды A и B набрали в сумме 20 очков, B и C – 12 очков, а сумма очков, набранных командами A и C, равна $30 - 2s$, где s – число очков, набранное командой D. Сколько очков в сумме набрали команды A и D?

8. Пусть S_n – сумма первых n членов арифметической прогрессии. Известно, что $S_3 = 81$ и $S_m = 9m^2$ при некотором натуральном значении $m > 3$. Найдите сумму первых девяти членов прогрессии.

9. В геометрической прогрессии сумма первых трех членов в 5 раз меньше суммы их квадратов. Найдите разность между суммой первого и третьего членов прогрессии и вторым членом прогрессии.

10. Найдите сумму всех значений параметра a, при которых уравнение $\log_2(x+1) + a = (4-2a)\log_{x+1} 2$ имеет единственное решение.

2 этап

1. Найдите центр симметрии графика функции

$$y = \frac{x^2 - 5x + 3}{x - 1}.$$

В ответе укажите сумму координат этой точки.

2. Пусть $[z]$ – целая часть числа z (наибольшее целое число, не превосходящее z). Найдите сумму значений a, для которых уравнение $2 - \frac{ax}{5\pi} = [\sin x]$ имеет ровно три различных корня на промежутке $[0; 8\pi]$.

3. Найдите количество решений неравенства $|\sin 3x - \sin 9x| + \sin 3x \cdot \sin 9x \le 0$ на промежутке $[0; \pi]$.

4. Радиусы описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника равны 32 и 7 соответственно. Найдите наибольшее возможное значение высоты этого треугольника.

5. Найдите $4\operatorname{tg} 4\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 6$.

6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Найдите сумму чисел x и y, если известно, что вектор $\vec{c} = (2x-2y)\vec{a} + (y+2)\vec{b}$ равен удвоенному вектору $\vec{d} = (x-2)\vec{a} + (x-y)\vec{b}$.

7. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро AA_1 равно 3, а сторона основания AB равна 2. Найдите объем пирамиды DBA_1C_1.

8. Найдите целое число – решение уравнения

$$2\operatorname{arctg}\frac{x}{3}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{5}{13}.$$

9. Сколько точек $(x;\ y)$ с целочисленными координатами содержится в множестве, заданном системой неравенств

$$\begin{cases} y\le 2,\\ x+y\ge 2,\\ x-y\le 2? \end{cases}$$

10. Найдите сумму корней уравнения

$$x\operatorname{arctg}x=(3-2x)\operatorname{arctg}(3-2x).$$

Заключительный тур

1. Дмитрию вдвое больше лет, чем Григорию было тогда, когда Дмитрию было столько лет, сколько Григорию теперь. Когда Григорию станет столько лет, сколько Дмитрию теперь, тогда сумма их возрастов будет равна 72 годам. Сколько лет Дмитрию?

2. В тесте есть 10 сложных и 20 простых задач. Для решения каждой сложной задачи требуется 40 мин, а для простой – 10 мин. За решение сложной задачи начисляется 3 балла, простой – 1 балл. Абитуриент решал задачи не более 190 мин и решил не более 10 задач. Какое максимальное число очков он мог получить?

3. Найдите рациональное число – значение выражения

$$4\sin^6\frac{\pi}{16}+4\sin^6\frac{9\pi}{16}-\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\lg(10x)}-\sqrt{\lg x}}-\sqrt{\lg x}=2.$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\sin 2x+2(\sin x+\cos x).$$

6. Отношение суммы n членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ к сумме величин, им обратных, равно $1/5$. Найдите произведение b_1b_n.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = \sqrt{|y|} - \sqrt{|x|}, \\ x^2 - 3xy = 16. \end{cases}$$

8. На сторонах BC, CA, AB правильного треугольника ABC со стороной 9 взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Известно, что $AC_1 = BA_1 = CB_1 = 4$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1.

9. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD = 4$, $CB = CD = 3$, а стороны AB и BC взаимно перпендикулярны. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Найдите объем V пирамиды, зная, что $V > 12$.

10. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = a\left(x^2 - 4x + 3\right)$ имеет ровно три различных решения?

ФИЗИКА

Отборочный тур

9–10 классы

1. Мистер и миссис Бобер решили к коронации подлатать плотину бобров, стоящую на Великой реке, что протекает по Нарнии. Бревна для ремонта пришлось брать в самой западной части рощи Фонарного столба выше по течению на расстоянии $L = 8$ км от запруды. Бобры заметили, что в рощу они плывут $t_1 = 4{,}1$ ч, а обратно быстрее – $t_2 = 2{,}4$ ч. Сколько времени будет плыть бревно от рощи до плотины? (10 баллов)

2. Вася Петров и Петя Васечкин изобретали Универсальный ускоритель брусков. Для этого они положили брусок на край доски длиною $L = 0{,}9$ м. Если поднимать этот конец доски, то при угле наклона $\alpha = 29°$ брусок начинает двигаться. Какую скорость приобретет брусок, соскользнув с доски, если она будет составлять угол $\beta = 54°$ с горизонтом? (10 баллов)

3. За 10 млн лет эволюции звезды PO281115 системы Хорус ее масса уменьшилась в $N_m = 1{,}3$ раза, а ускорение свободного падения на ее поверхности увеличилось в $N_g = 1{,}2$ раза. Во сколько раз увеличилась средняя плотность вещества родной звезды ромуландцев? (10 баллов)

4. В научной лаборатории звездолета Пегас профессор Селезнев и Алиса готовят газовую смесь для микроорганизмов, найденных на второй планете в системе Медузы. Известно, что микроорганизмы будут чувствовать себя комфортно, если для приготовления смеси взять $n_{\text{He}} = 66\%$ (по массе смеси) гелия, $n_{\text{N}_2} = 14\%$ азота и углекислый газ. Найдите молярную массу приготовляемой профессором смеси. (10 баллов)

5. Новогодняя елка в парке украшена игрушками. Прилетел воробей и сел на одну из игрушек, из-за чего ветка стала совершать малые колебания. Воробей испугался и улетел, а частота колебаний ветки увеличилась на x = 0,8%. Увы, но игрушка, на которой посидел воробей, отвязалась и упала на землю, а частота колебаний ветки после этого снова возросла – на y = 1,9%. Чему равна масса игрушки, если масса воробья M = 24 г? (10 баллов)

6. К Рождеству мужчины 26-го экипажа Международной космической станции решили приготовить Катерине Коулман, единственной женщине на корабле, подарок. На МКС нашлось только 4 бусинки, которые космонавты привязали на нитку на одинаковом расстоянии друг от друга так, что получилось ожерелье. За время изготовления ожерелья бусинки наэлектризовались, приобретя одинаковые по знаку заряды q, Nq, q, Nq. В результате висящее в невесомости ожерелье приняло форму ромба. Найдите отношение диагоналей этого ромба (большей к меньшей). (10 баллов)

7. Чтобы сэкономить, Кощей Бессмертный решил заменить в своем замке все лампы накаливания на светодиодные. Он насчитал в замке N_1 = 36 ламп мощностью P_1 = 40 Вт и N_2 = 59 ламп мощностью P_2 = 60 Вт. Аналогичные светодиодные лампы потребляют P_1' = 5 Вт и P_2' = 8 Вт соответственно, но стоят C = 190 руб. каждая. За сколько дней окупится покупка, если лампы горят в среднем $t = 6$ ч в день, а Змей Горыныч поставляет Кощею электроэнергию по $c_э = 4{,}49$ руб. за кВт · ч ? (10 баллов)

8. Ныряя в Москве-реке, Волька Костыльков обнаружил на дне прозрачный клин из неизвестного материала, возможно инопланетного происхождения. Посветив на него под водой лазерной указкой, направленной перпендикулярно боковой грани, Волька заметил, что луч отклонился на угол $\beta = 23°$ от своего первоначального направления. Вытащив клин из воды, Волька повторил свой опыт уже на воздухе. Оказалось, что отклонение луча опять равно $\beta = 23°$. Чему равен показатель преломления материала клина? Показатель преломления воды принять равным $n_{\text{в}} = 1{,}33$, показатель преломления воздуха – $n_{\text{возд}} = 1{,}00$. (10 баллов)

1. Диаметр колеса велосипеда (рис.1) D = 51 см, радиус ведущей (большой) «звездочки» r_2 = 15 см, ведомой (малой) r_1 = 4 см. Велосипедист крутит педали с частотой f = 31 об/мин. С какой скоростью движется относительно поверхности дороги нижняя (горизонтальная) часть велосипедной цепи? (10 баллов).

Рис. 1

2. Автоматический спутник боевого охранения Имперского Космофлота имеет на вооружении пушку Гаусса, стреляющую урановыми снарядами. При обнаружении корабля противника спутник должен выпустить в него один за другим *три* снаряда, каждый массой m = 40 кг. Масса спутника (без снарядов) M = 640 кг, снаряды после выстрела приобретают скорость v = 741 м/с *относительно* спутника. С какой скоростью будет лететь спутник, полностью израсходовав боезапас? (10 баллов).

3. Два бобра хотят попасть из точки A на одном берегу реки в прямо противоположную точку B на другом берегу. Первый бобер решил переплыть реку по прямой AB. Второй бобер стал плыть перпендикулярно течению, а расстояние, на которое его снесла река, прошел пешком по берегу. Несмотря на различные маршруты, оба бобра достигли точки встречи одновременно. Скорость каждого бобра в стоячей воде v = 2,1 м/с, скорость течения реки u = 1,3 м/с. С какой скоростью шел второй бобер по берегу? (10 баллов)

4. Два спутника летают по круговым орбитам, лежащим в одной общей плоскости, вокруг планеты G5-623 с орбитальными скоростями v_1 = 5,8 км/с и v_2 = 8,4 км/с, периодически сближаясь на минимальное расстояние h = 990 км. Радиус планеты R = 2,9 тыс.км. Найдите ускорение свободного падения на поверхности планеты G5-623. (10 баллов)

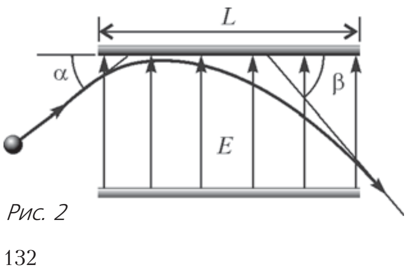


Рис. 2

5. Электрон влетает в плоский конденсатор длиной L = 4,5 см под углом α = 34°

к обкладкам, а вылетает под углом $\beta = 17°$ (рис.2). Напряженность электрического поля внутри конденсатора $E = 8{,}5$ кВ/м. Определите первоначальную (до попадания в конденсатор) энергию электрона. (10 баллов).

6. Однородное проволочное кольцо включено последовательно в электрическую цепь, в которой течет постоянный ток. Контакты делят длину кольца в отношении $n/m = 1/11$. В кольце при протекании тока выделяется тепловая мощность $P_1 = 45$ Вт. Какая мощность будет выделяться в кольце (при таком же токе во внешней цепи), если контакты расположить на нем в диаметрально противоположных точках? (10 баллов)

7. Длинная медная лента движется с постоянной скоростью в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}66$ Тл. Векторы скорости и магнитной индукции лежат в плоскости ленты и взаимно перпендикулярны (рис.3). На плоскостях ленты при ее движении возникает поверхностный электрический заряд, причем на каждый квадратный сантиметр отрицательно заряженной поверхности приходится $\Delta N/\Delta S = 8800$ дополнительных электронов. Найдите скорость движения ленты. (10 баллов)

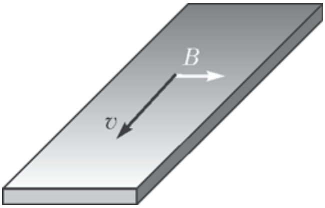


Рис. 3

8. В воздухе длина волны монохроматического света равна $\lambda_1 = 650$ нм. При переходе в некоторую прозрачную жидкость длина волны света становится равной $\lambda_2 = 443$ нм. Отраженный и преломленный лучи образуют между собой угол $\varphi = 95°$. Под каким углом падает луч света на плоскую границу раздела жидкость–воздух? (10 баллов)

Заключительный тур

9–10 классы

1. Турист Николай Петрович опоздал на $\Delta t = 5$ мин к отплытию своего теплохода, отправившегося вниз по реке. На счастье, хозяин быстроходного катера согласился помочь Николаю Петровичу. Догнав теплоход и высадив незадачливого туриста, катер тут же отправился в обратный путь. Сколько времени прошло с момента отплытия катера до его возвращения? Считайте, что скорость теплохода относительно воды в $k = 3$ раза больше скорости течения реки, а скорость катера больше в $n = 5$ раз. (10 баллов)

2. Чтобы повесить новогоднее украшение, Аня приставляет к гладкой стене лестницу так, что ее основание находится на максимально возможном расстоянии от стены. Коэффициент трения между лестницей и полом $\mu = 2/3$, масса Ани $M = 70$ кг, масса лестницы $m = 20$ кг. Длина лестницы L так же, как и высота потолка H, равна 5 м. Сможет ли Аня подняться по лестнице? Если да, то на какую высоту? (30 баллов)

3. Тонкостенный цилиндрический стакан, на $1/4$ наполненный кленовым сиропом, плавает в сосуде с водой, погрузившись до середины. Тот же стакан, но наполненный на $1/2$ водой, плавает в сосуде с сиропом, также погрузившись до середины. Какую часть стакана можно наполнить водой, чтобы он не утонул в воде? И какую часть стакана можно наполнить сиропом, чтобы он не утонул в сиропе? (15 баллов)

4. Для изготовления нагревателя высокотемпературной вакуумной печи взяли $m_{\mathrm{Pt}} = 140$ г платиновой проволоки. В печь поместили $m_{\mathrm{Ag}} = 400$ г серебра в легком тигле и нагрели от $t_1 = 20$ °C до $t_2 = 1000$ °C за $\tau = 8$ мин. Чтобы корпус печи не нагревался, он охлаждается протекающей внутри его стенок водой с расходом $F = 1{,}5$ л $\cdot$ мин$^{-1}$, температура воды на выходе на $\Delta t = 2$ °C больше, чем на входе. Печь питается от сети напряжением $U = 220$ В. Удельное сопротивление платины в работающем нагревателе $\rho = 6{,}90 \cdot 10^{-7}$ Ом $\cdot$ м, плотность платины $\rho_{\mathrm{Pt}} = 21{,}2 \cdot 10^3$ кг $\cdot$ м$^{-3}$, плотность воды $\rho_{\mathrm{H_2O}} = 10^3$ кг $\cdot$ м$^{-3}$, удельная теплоемкость воды $c_{\mathrm{H_2O}} = 4{,}19$ кДж $\cdot$ кг$^{-1}$ $\cdot$ К$^{-1}$, удельная теплота плавления серебра $\lambda_{\mathrm{Ag}} = 105$ кДж $\cdot$ кг$^{-1}$, удельная теплоемкость серебра $c_{\mathrm{Ag}} = 236$ кДж $\cdot$ кг$^{-1}$ $\cdot$ К$^{-1}$, температура плавления серебра $t_{\mathrm{Ag}} = 961{,}8$ °C. Чему равна длина проволоки нагревателя? (20 баллов)

5. Три маленьких металлических шарика, один радиусом R и два радиусом $2R$, заряжены одинаковыми зарядами $+q$ и находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной, значительно превышающей радиусы самих шариков. Шарики соединили проволокой, а затем проволоку убрали. Найдите отношение сил, действующих на маленький шарик до и после соединения. (10 баллов)

6. Под потолком на высоте $H = 2$ м висит электрическая лампочка. Под ней расположили горизонтально очки с оптической силой $D = +2$ дптр так, что на полу получились четкие изображения лампы. Расстояние между центрами линз в очках $a = 60$ мм. Найдите расстояние между изображениями лампы на полу. (15 баллов)

11 класс

1. Мяч уронили без начальной скорости с высоты H = 5 м. При каждом ударе о горизонтальный пол мяч теряет 9 процентов имеющейся у него к этому моменту энергии. Какой путь пройдет мяч до полной остановки? Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения в этой и последующих задачах считать равным $g = 10$ м/с^2 . (30 баллов)

2. Две гири с массами m_1 = 180 г и m_2 = 120 г висят на концах невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок. Первоначально гири находились на одном уровне. Гири отпустили, и они пришли в движение без начальной скорости. Каким будет расстояние по вертикали между гирями спустя Δt = 1,5 с после начала движения? Сопротивлением воздуха и трением в блоке можно пренебречь. (10 баллов)

3. В длинную тонкую трубку залили равные объемы двух несмешивающихся жидкостей с различными плотностями, заполнив ее наполовину. Трубку свернули в кольцо, расположив его в вертикальной плоскости (рис.4). Угол, который составляет с вертикалью отрезок, проходящий через границу раздела жидкостей и центр кольца, равен α. Найдите плотность легкой жидкости, если плотность тяжелой известна и равна ρ_1. (20 баллов)

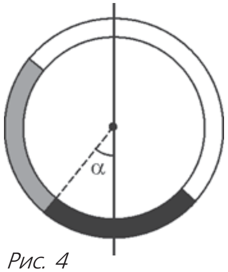


Рис. 4

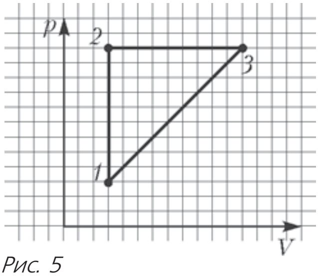


Рис. 5

4. Идеальный одноатомный газ является рабочим телом тепловой машины, работающей по термодинамическому циклу *1–2–3–1* (рис.5). Найдите коэффициент полезного действия этой тепловой машины, если известно, что максимальное и минимальное значения давления отличаются в k = 4 раза. (15 баллов)

5. Из восьми одинаковых отрезков однородной проволоки постоянного сечения спаяна четырехгранная правильная пирамида $ABCDF$ (рис.6). К ее вершинам A и B подключили

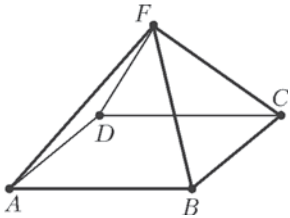


Рис. 6

источник постоянного напряжения. Найдите отношение тепловых мощностей, выделяющихся в ребрах AF и CF. (10 баллов)

6. На главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см на равных расстояниях $l = 120$ см слева и справа от нее расположены два точечных источника света. На какое расстояние надо сместить линзу, чтобы изображения источников совпали? (15 баллов)

ИНФОРМАТИКА

Отборочный тур

9–10 классы

1. В открытой папке находятся файлы TRO.MP3, TROLO.MP3, TROLOLO.MP3 и т.п. Сколько файлов в папке, если по шаблону T*LO??*.MP3 найдены 14 файлов?

2. КУКУЩЫХЮФ МАХЮФЬЧЩЫЭЗЭ ВБХЮФЩЫЗЩЫ ФПЧХИЬЪМОПЩЫХЮФ, ЭЗЭОТОЬЪЫЙ ТАЭЗЭ ГЬЪОМЭЗЭО ВОПЩЫХЮФ, ЧТО ГХЮФОХХЮФЩЫ ВСПЧХИ ТЕТЭЗЭЩЫ, ЩЫ ДОХХЮФЩЫ СПЧХИХЮФЕДЭЗЭЩЫ, ЩЫ СЫПАХЮФАСЬ ПЫХЮФЬ СО СТЬЪОПЩЫХЮФ.

Нет, это не белиберда и не чепуха! Всего-то надо все ПЧХИ заменить на Е, потом все ХЮФ – на Л, далее все ЬЪ – на Р, после все ЭЗЭ – на К. А потом останется еще все ЩЫ заменить на И, а все КУКУ – на Ж. В качестве ответа укажите фамилию автора этого произведения.

3. Известно, что результат поразрядной операции AND над двумя байтами на 77 меньше, чем результат OR над ними. Найдите результат поразрядной операции XOR над этими байтами.

4. Ученые-яблокоедоведы построили математическую модель численности популяции яблокоедов.

Входные данные:

P – численность популяции;

N – длительность периода моделирования в годах;

U[i], i=1..N – булевские переменные, значение Истина означает, что i-й год был урожайным на яблоки.

Алгоритм расчета приведен на рисунке 7. Когда яблокоедове-

```
Ввод P, N
Для i От 1 До N НЦ
  Если U[i] То P := P * A Иначе P := P * B
Все
КЦ
Вывод P
```

Рис. 7

ды ввели в модель текущую численность популяции и выданные коллегами-яблоковедами прогнозы урожайности яблок на 6 ближайших лет, результатом оказалось число 7000 – столько яблокоедов будет через 6 лет по мнению математической модели. Какова текущая численность популяции яблокоедов, если известно, что A и B – натуральные числа и A>B?

5. В состав многих языков программирования входят подпрограммы для рисования геометрических фигур. Предположим, нам доступны такие подпрограммы:

- Цвет (название цвета) – выбор цвета, которым будет выполняться рисование.
- Заливка (X, Y) – заливка всей одноцветной области, начиная с точки с координатами (X, Y).
- Точка (X, Y) – изображение точки с заданными координатами.
- Окружность (X, Y, R) – изображение окружности с центром (X, Y) и радиусом R.

Сколько белых точек на черном фоне будет на экране после выполнения программы (изначально экран пустой и черный), приведенной на рисунке 8?

```
Цвет (белый)
Заливка (30, 30)
Цвет (черный)
Окружность (100, 100, 3)
Окружность (100, 100, 5)
Заливка (100, 104)
Цвет (белый)
Для X От 2 До 198 Шаг 2 НЦ
  Для Y От 2 До 198 Шаг 2 НЦ
    Точка(X,Y)
  КЦ
КЦ
```

Рис. 8

1. Село Бинарное расположено на двух берегах реки Линейной. В селе 64 дома. В одном из них живет Вася Пупкин. После визита Васи на дискотеку в райцентр Неймановка с ответным визитом в Бинарное прибыл представитель Неймановского отделения полиции сержант Шеннон. Адреса Васи он не знал, задавать слишком конкретные вопросы не хотел. Поэтому он обратился к нескольким местным жителям с вопросом: «Вася Пупкин на левом берегу живет?» Однако местные ни ДА ни НЕТ не говорили, а всячески выделывались перед представителем органов внутренних дел. Ответы аборигенов Бинарного были такие:

- Любой ответ на Ваш вопрос принесет Вам 1 бит информации.
- Ответ «Нет» на Ваш вопрос даст Вам 3 бита информации.
- Ответ «Да» на этот вопрос несет ровно один бит информации.
- Ответ на этот вопрос в среднем несет в себе примерно 0,337 бита.
- Получив ответ «Да», Вы получите ровно 2 бита информации.
- Вы получите один бит информации, если на этот вопрос Вам ответят «Нет».
- В ответе «Да» на Ваш вопрос будет содержаться примерно 0,193 бита.
- Если Вам повезет и Вам ответят «Нет» – Вы получите целых 5 бит информации.

Сержант Шеннон честно протоколировал ответы, но что-то они не добавляли ему информации о том, где живет дебошир Вася.

– Что, милок, завис? – спросила у Шеннона подошедшая баба Нюра. – Да не бери в голову – врут они в основном. Только двое правду сказали.

После этого сержант Шеннон легко определил количество домов на каждом берегу. Но, увы, это не уменьшило неопределенность по поводу адреса Васи. Так сколько домов в Бинарном на левом берегу?

2. Код, в котором одинаковым символам соответствуют одинаковые коды, несложно расшифровать с помощью частотного анализа: выявить, каких букв больше всего, и поставить им в соответствие самые частые буквы алфавита. Иное дело, если буквы не перекодировали, а просто переставили в соответствии с каким-либо правилом.

В одном суперсверхсекретном учреждении применили такой способ перемешивания. Строку дополняют пробелами так, чтобы ее длина была кратна натуральному числу N>=3. Все символы текста нумеруют (с 0). Выбирают натуральное M, не превышающее N−1. Далее формируют новый текст: сначала последовательно записывают все буквы, номера которых дают при делении на N остаток M, потом – M+1, M+2,…, N−1, 0, 1,… …, M−1. К примеру, сообщение «ВЫХОДА_НЕТ.» после кодирования с N = 4, M = 2 превращается в «Х_.ОН_ВДЕЫАТ» (здесь пробелы заменены символами подчеркивания). Расшифруйте сообщение

ЕОООИПЛ_.З_НСВЕИК_АЗЧЬОР_В_ВПАИ_.ЕНАННК-ЛП_ШАС

Известно, что N и M равны, соответственно, последним двум цифрам года выпуска ЭВМ БЭСМ-1. Ответ – третье слово сообщения.

3. В программе, которую задали написать в Хогвартсе, используется связный неориентированный граф с N вершинами. Гарри Поттер использовал для представления графа матрицу смежности – двумерный булевский массив, в котором значение на пересечении i-й строки и j-го столбца означает наличие ребра, связывающего i-ю и j-ю вершины (кстати, булевская переменная в языке программирования H!!, применяемом в Хогвартсе, занимает 1 байт). Рон Уизли решил экономить память и предпочел другое представление – список ребер. Это двумерный байтовый массив из двух столбцов, где хранятся номера начальных и конечных вершин ребер (каждое ребро включается в список один раз, вершины в паре нумеруются в порядке возрастания). При таком способе объем занимаемой данными памяти обычно существенно меньше. Однако Гарри заявил, что даже в самом лучшем случае, при минимальном возможном количестве ребер, экономия памяти составит всего 362 байта – не стоит ради этого проигрывать в быстродействии программы. Сколько вершин в графе?

4. Делфтский яблокоед, как обычно, ползает по стеллажу (на этот раз стеллаж одномерный, из 60 ячеек с номерами от 1 до 60) и ест яблоки. За час он съедает все яблоки в ячейке и перемещается в следующую. В силу физиологических особенностей, внутри яблокоеда сохраняются яблоки, потребленные в течение последних 4 часов (т.е., например, покушав в ячейке 6, яблокоед несет в себе яблоки из ячеек 3 ,4, 5 и 6, а в ходе перемещения в 7-ю ячейку расстается с яблоками из 3-й). Если количество яблок в яблокоеде достигло или превысило Р, яблокоед дальше не ползет, а засыпает.

Лаборант Никита положил в каждую ячейку количество яблок, равное числу младших делителей номера ячейки, отличных от 1 (в ячейках с простыми номерами яблок, естественно, нет). В каких из указанных ниже ячейках яблокоед ни при каком Р не сможет заснуть? В качестве ответа введите соответствующие им буквы в алфавитном порядке без пробелов.

А) 8 Б) 13 В) 24 Г) 40 Д) 42 Е) 48 Ж) 56 З) 57

5. Вот описание математического фокуса.

• Задумайте трехзначное натуральное число и запишите его.

• Припишите к числу справа еще раз то же самое число.

• Полученное шестизначное число разделите нацело на А. Результат запишите.

• Полученное в п.3 число разделите нацело на В. Результат запишите.

• Число, полученное в п.4, разделите нацело на С. Результат запишите.

• Убедитесь, что у вас получилось именно то число, которое вы задумали.

Известно, что А,В и С – натуральные числа, причем А<В<С. Чему равно В? В качестве ответа введите число.

6. Известный кот-шулер Гатто Полосатто предлагал всем встречным сыграть в простую игру. Из пачки с кошачьим кормом (пачка у Гатто всегда с собой!) вытряхивается случайное количество хрустящих подушечек. Они выкладываются в ряд. А далее двое игроков по очереди съедают либо одну любую подушечку, либо две лежащие рядом (больше двух или лежащие не рядом – не ухватить). Побеждает тот, кто съедает последнюю подушечку. Побежденный выплачивает победителю 3 пачки корма.

Гатто, как владелец игрового инвентаря, всегда ходил первым. И всегда выигрывал! Так было, пока соперником Гатто не оказался Бейсик, виртуальный кот Академии информатики для школьников при Политехе. Проиграв 5 партий, Бейсик авторитетно заявил, что правила игры стоит пересмотреть. Он предложил Гатто сыграть турнир из нескольких партий по одному из предложенных вариантов правил:

1. Все, как раньше – но первым ходит Бейсик.

2. Все, как раньше – но за один ход можно брать только одну подушечку.

3. Все, как раньше – но после каждого хода подушечки сдвигаются так, чтобы между ними не было просветов.

– Va bene, – согласился Гатто. – Будем играть по…

… И тут Бейсик понял, что по одному из вариантов Гатто все же будет чаще выигрывать, чем проигрывать. Какой из вариантов выберет Гатто (укажите номер)?

Заключительный тур

9–10 классы

1. Вам предложили разработать программу, которая получает на вход натуральное число N, не превышающее 10^9, и выводит наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равняется N, а если такого числа нет – выводится 0. Писать программу прямо сейчас не придется. Но если вы верно представили себе алгоритм – вы наверняка сможете подготовить тестовые значения.

1) Что выведет программа при N=100000000?

2) Найдите наименьшее N, не меньшее чем 125, для которого программа выведет 0.

2. Делфтский яблокоед перемещается по двумерному стеллажу, выполняя алгоритм, приведенный на рисунке 9, и используя

```
Пока ЯблокоедВнутриСтеллажа() НЦ
Записать (РасстояниеДоБлижайшейСтенки())
X:=ОчкиНаКубике()
Если X mod 2 = 0 То X:=-(X/2) Иначе X:=(X+1)/2
Y:=ОчкиНаКубике()
Если Y mod 2 = 0 То Y:=-(Y/2) Иначе Y:=(Y+1)/2
Переместиться (X,Y)
КЦ
```

Рис. 9

при этом 6-гранный кубик для игры в кости и листок с ручкой для записи чисел.

Процедура *Переместиться(X,Y)* прибавляет к текущим координатам яблокоеда X и Y соответственно (началом координат считаем левую верхнюю ячейку стеллажа, ось X вправо, ось Y вниз). Функция *РасстояниеДоБлижайшейСтенки()* работает в соответствии с названием: для крайних ячеек стеллажа она возвращает 0, для остальных – количество рядов ячеек между текущей ячейкой и ближайшей стенкой. Функция *Яблокоед ВнутриСтеллажа()* возвращает логическое значение в соответствии с названием, процедура *Записать()* записывает переданное в качестве параметра число в конец списка. Функция *ОчкиНаКубике()* возвращает целое число от 1 до 6.

Яблокоед начал движение с неизвестной ячейки. В ходе 5 первых итераций алгоритма на кубике выпадали числа 1, 2, 1, 5, 6, 2, 6, 6, 3, 6, а на листке были записаны числа 3, 3, 1, 2, 1. Определите минимальное возможное количество ячеек в стеллаже.

3. Формула из ячейки B2 растиражирована на все ячейки диапазона до К9, затем к этим ячейкам применено условное форматирование: нули нарисованы светло-серым по светлосерому, положительные значения – темно-серым по темно-серому (рис.10). Определите, какие числа написаны черным по черному в ячейках A2:A9. Ответ запишите в виде 8 чисел через запятую.

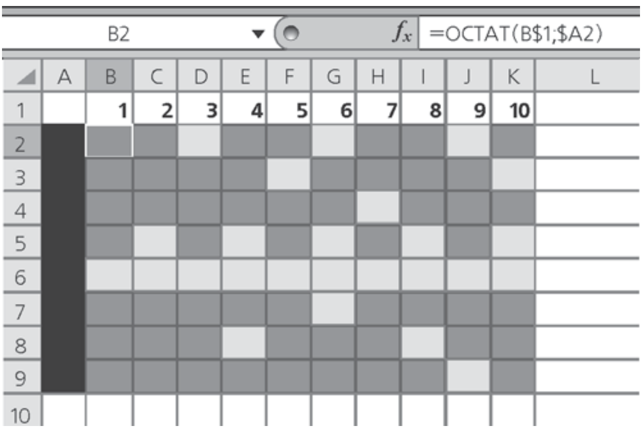


Рис. 10

4. Задумано натуральное число из интервала [33; 64]. Составьте из приведенных ниже высказываний логическое выражение, которое, будучи истинным, содержит в себе ровно 1 бит информации о задуманном числе. В выражении можно применять логические операции AND, OR и NOT, а также скобки. Выражение должно содержать минимальное количество высказываний.

Высказывания такие:

A={это число 50}

B={это простое число}

C={это число из двух одинаковых цифр}

D={первая цифра числа не меньше второй}

5. Специалист по распознаванию образов разделил буквы кириллицы (работал он с прописными буквами) на несколько групп. Буква Р оказалась в одной группе с Б (группа 1); З, И, М, П, С тоже были в одной группе (группа 2); еще одну группу образовали Е, У, Ц, Ш,Э… (группа 3); О составляла особую группу, Ж – тоже… Видимо, вы уже поняли принцип. Назовите еще 2 буквы кириллицы, которые могли бы войти в группу 3.

6. Имеется алгоритм (рис.11), описанный на псевдокоде. Найдите наибольшее N, при котором при A = = 100 и B = 999 ровно 2 раза будет выведено значение 1.

```
Цел A, B, N, M, K, R
Ввод N, A, B
Для K От A До B НЦ
  M := K
  R := 0
Пока M>0 НЦ
    R := R*10 + M mod N
    M := M div N
  КЦ
  Вывод R
КЦ
```

Рис. 11

11 класс

Задачи **1**, **2**, **4**, **5** совпадают с соответствующими задачами для 9–10 классов.

3. Вот фрагмент таблицы MS Excel (рис.12). Используется стиль ссылок R1C1, включен режим отображения формул. Для

	1	2	3
1		1	=R[-1]C*2
2	1	=НОК(RC1;R1C)-НОД(RC1;R1C)	=НОК(RC1;R1C)-НОД(RC1;R1C)
3	=R[-1]C*2	=НОК(RC1;R1C)-НОД(RC1;R1C)	=НОК(RC1;R1C)-НОД(RC1;R1C)
4	=R[-1]C*2	=НОК(RC1;R1C)-НОД(RC1;R1C)	=НОК(RC1;R1C)-НОД(RC1;R1C)

Рис. 12

справки: Rчисло, Cчисло – абсолютные ссылки на строку/столбец, R[число], C[число] – относительные ссылки (число в этом случае означает смещение), просто R или C – текущая строка (столбец).

Формулу из R1C3 растиражировали вправо, формулу из R3C1 растиражировали вниз. Потом формулу из C2R2 растиражировали вправо, а затем все полученные во 2-й строке формулы растиражировали вниз. Найдите наименьшее возможное произведение номеров строки и столбца, на пересечении которых в таблице находится число 448.

6. Студенту Васе на лабораторной работе по дискретной математике потребовалось вычислить количество корректных скобочных выражений из N пар скобок. Корректным скобочным выражением (КСВ) является () или КСВ КСВ или (КСВ). К примеру, корректными скобочными выражениями из двух пар скобок являются ()() и (()). Вывести формулу аналитически

```
1  Алг СчетСкобок
2   Цел N
3   Нач
4     Ввод N
5     Вывод ДобавитьСкобки(N)
6   Кон
7  Цел ДобавитьСкобки(Цел N)
8   Цел S, K
9   Нач
10   Если N<2 То Вернуть 1
11    S:=0
12   Для K От 0 До N-1 НЦ
13     S:=S+ДобавитьСкобки(K)+ДобавитьСкобки(N-K-1)
14   КЦ
15   Вернуть S
16 Кон
```

Рис. 13

Вася не сумел. Он решил написать программу, при этом используя рекурсию (раз уж сам способ описания корректных скобочных выражений рекурсивен). Написанная в точном соответствии с алгоритмом, представленным на рисунке 13, программа работала неверно. Найдите в алгоритме ошибку (ошибки). В ответе укажите номера неверных строк и необходимые исправления.

Публикацию по математик подготовили И.Комарчев, А.Моисеев, А.Одинцов, С.Преображенский; по физике – Т.Андреева, М.Коробков, С.Старовойтов; по информатике – Н.Иванова, Е.Крылова, А.Щукин

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ

Вариант 1 (2016 год)

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	4	0,2	15	1000	21	12	1	3	40	32	23	2	2	3,6

16	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
0,001	22	41	4	3	2	23	4	25	5	50,2	2,5

Решения избранных задач

27. Запишем два раза уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + E_1, \quad \frac{hc}{2\lambda} = A_{\text{вых}} + E_2.$$

Исключив λ, получим

$$A_{\text{вых}} = E_1 - 2E_2 = 2{,}5 \text{ эВ}.$$

28. Если считать амперметр и вольтметр идеальными, то внешняя цепь содержит только сопротивление реостата (рис.1), поэтому

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_{\text{р}}}.$$

При перемещении движка реостата влево сопротивление реостата уменьшается, ток увеличивается. Напряжение на зажимах источника равно

$$U = \mathcal{E} - Ir,$$

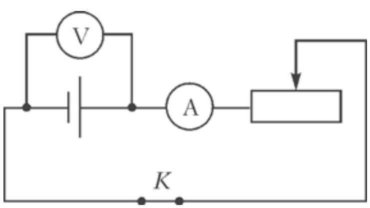


Рис. 1

и при увеличении тока напряжение уменьшается.

Замечание. Если не считать амперметр и вольтметр идеальными (в условии это не оговорено), то ответ останется таким же. Сопротивление внешней цепи находим из уравнения

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\text{в}}} + \frac{1}{R_{\text{р}} + R_{\text{а}}},$$

при уменьшении сопротивления реостата оно тоже уменьшается.

29. При движении тележки вправо выполняются следующие условия:

$$T_1 - F_{\text{с}} = 0\,,\ \ mg - T_1 = 0\,.$$

При движении тележки влево ее ускорение направлено вправо, а ускорение груза – вниз. Получаем

$$T_2 + F_{\text{с}} = Ma\,,\ \ mg - T_2 = ma\,.$$

После исключения T_1, T_2 и $F_{\text{с}}$ находим

$$a = \frac{2mg}{m+M} = \frac{2mg}{m+9m} = 0{,}2g = 2\ \text{м/с}^2\,.$$

30. Второй закон Ньютона для взлетающего шара имеет вид

$$F_{\text{А}} - m_{\text{гр}}g - m_{\text{об}}g - m_{\text{гор}}g = 0\,,$$

где $F_{\text{А}} = m_{\text{хол}}g = \rho_{\text{хол}}Vg$. Получаем

$$\rho_{\text{хол}}V - m_{\text{гр}} - m_{\text{об}} - m_{\text{гор}} = 0\,,$$

откуда выражаем массу горячего воздуха в шаре. Зная массу холодного и горячего воздуха, из уравнений Менделеева–Клапейрона

$$pV = \frac{m_{\text{хол}}}{\text{M}}RT_{\text{хол}}\,,\ \ pV = \frac{m_{\text{гор}}}{\text{M}}RT_{\text{гор}}$$

найдем температуру окружающего воздуха:

$$T_{\text{хол}} = \frac{m_{\text{гор}}}{m_{\text{хол}}}T_{\text{гор}} = 280\ \text{К}\,.$$

31. Направим ось x по начальной скорости протона, ось y – по напряженности поля. Вдоль оси x движение равномерное, вдоль оси y – равноускоренное с ускорением $a = eE/m$, поэтому

$$l = vt,\quad \frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}$$

(при минимальной скорости протон при вылете почти задевает за край пластины). Получаем

$$v = l\sqrt{\frac{eE}{md}} \approx 3{,}5\cdot 10^5\ \text{м/с}\,.$$

32. Момент сил Ампера, действующих на рамку, равен

$$M = 2F_{\text{А}}\frac{b}{2} = (IBa)b = IBS\,,$$

где a – длина стороны, параллельной OO_1, b – длина другой стороны. Заряд, прошедший через рамку при повороте на 180°, по модулю равен

$$q = \left|I_{\text{ср}}\right|\Delta t = \frac{\left|\mathcal{E}_{\text{ср}}\right|}{R}\Delta t = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}\frac{\Delta t}{R} = \frac{|\Delta\Phi|}{R} = \frac{BS}{R}\,.$$

Выражая BS из уравнения для момента сил, получаем

$$q = \frac{2M}{IR} = 0{,}6 \text{ Кл}.$$

Вариант 2 (2016 год)

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	3	15000	0	5	33	41	3	1	1,5	11	42	2	1	4

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1,25	22	34	2	4	1	22	2	24	2	50	600

Решения избранных задач

25. Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось, параллельную начальной скорости снаряда:

$$mv = 0 + m_2 v_2 \cos\alpha_2,$$

откуда получим

$$m = 2 \text{ кг}.$$

26. Запишем уравнение теплового баланса:

$$cm_б(0 - t_б) + \lambda m_л = 0,$$

откуда находим

$$t_б = 50 \text{ °C}.$$

28. Если предположить, что емкость электрометра гораздо меньше, чем емкость конденсатора (при малом расстоянии между обкладками конденсатора), то почти весь заряд будет сосредоточен на пластинах конденсатора (лучше было бы это оговорить в условии). Показания электрометра пропорциональны напряжению на конденсаторе.

При внесении диэлектрической пластины заряд конденсатора почти не меняется, а емкость конденсатора увеличивается, так как $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$. Напряжение на конденсаторе при этом уменьшается: $U = q/C$. Угол отклонения стрелки электрометра уменьшается.

Замечание. Ответ будет таким же и без упрощающего предположения о малости емкости электрометра. Конденсатор и электрометр представляют собой электроизолированную систему двух параллельно соединенных конденсаторов. При увеличении емкости одного из конденсаторов емкость системы увеличивается, а ее заряд не меняется. Напряжение на системе при этом уменьшается.

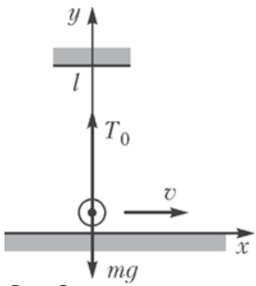


Рис. 2

29. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось y (рис.2) перед разрывом нити:

$$T_0 - mg = \frac{mv^2}{l}$$

и закон сохранения импульса в проекции на ось x:

$$mv = (m + M)u\,.$$

Отсюда получим

$$u = \frac{\sqrt{lm(T_0 - mg)}}{m + M} = 0{,}5\ \text{м/с}\,.$$

30. После отрыва поршня от выступов давление газа p будет оставаться постоянным. Его можно найти из условия равновесия:

$$pS - p_0S - Mg = 0\,,\ \ p = p_0 + \frac{Mg}{S}\,.$$

Изменение внутренней энергии за оба процесса равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}pV_2 - \frac{3}{2}p_0V_1 = \frac{3}{2}\left(\left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)SH - p_0Sh\right).$$

Работа газом совершается только в изобарном процессе (при подъеме поршня) и равна

$$A = p(V_2 - V_1) = \left(p_0 + \frac{Mg}{S}\right)S(H - h)\,.$$

Полученное количество теплоты равно

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}Mgh + \frac{5}{2}(Mg + p_0S)(H - h)\,.$$

31. Мощность, передаваемая источником во внешнюю цепь (в данном случае – выделяющаяся на реостате), равна разности между мощностью сторонних сил источника и тепловой мощностью, потерянной на внутреннем сопротивлении источника:

$$P = \mathcal{E}I - Ir^2\,.$$

Эта зависимость имеет вид параболы (рис.3), пересекающей ось абсцисс в точках $I_1 = 0$ и $I_2 = \mathcal{E}/r$ (ток короткого замы-

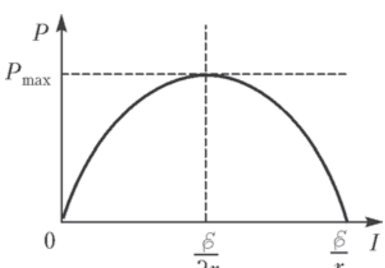


Рис. 3

кания) и имеющей максимум посередине между этими точками, т.е. при токе $I = \mathscr{E}/(2r)$. Максимальная мощность равна

$$P_{max} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r},$$

откуда получаем

$$r = \frac{\mathscr{E}^2}{4P_{max}} = 2 \text{ Ом}.$$

32. Из рисунка 4 видно, что длина тени равна $L = L_1 + L_2 = h\,\mathrm{tg}\,\alpha + H\,\mathrm{tg}\,\beta$, где β – угол преломления. По закону преломления, $\sin\beta = (\sin\alpha)/n = 3/8$. Получаем $\cos\beta = \sqrt{55}/8$, $\mathrm{tg}\,\beta = 3/\sqrt{55}$. Вычисляя L, находим

$$L \approx 1{,}4 \text{ м}.$$

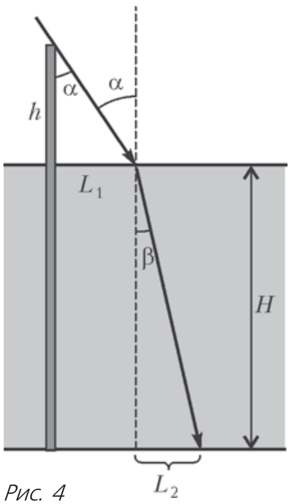


Рис. 4

Вариант 3 (2017 год)

За правильный ответ на каждое из заданий 1–4, 8–10, 13–15, 19, 20, 22–26 ставится по 1 баллу. Эти задания считаются выполненными верно, если правильно указаны требуемое число, два числа или слово.

Каждое из заданий 5–7, 11, 12, 16–18 и 21 оценивается в 2 балла, если верно указаны оба элемента ответа; в 1 балл, если допущена одна ошибка; в 0 баллов, если оба элемента указаны неверно. Если указано более двух элементов (в том числе, возможно, и правильные) или ответ отсутствует – 0 баллов.

Ответы

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
2,5	0,32	36	0,4	35 или 36	31	42	900	100	120	23 или 32

12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
42	вниз	0	2	35 или 53	22	41	1231	0,9	13	1,60,1

23	**24**	**25**	**26**
13 или 31	15	0,4	15

Решения избранных задач

27. После того как поршень оторвется от выступов, из второго закона Ньютона следует, что давление будет оставаться постоян-

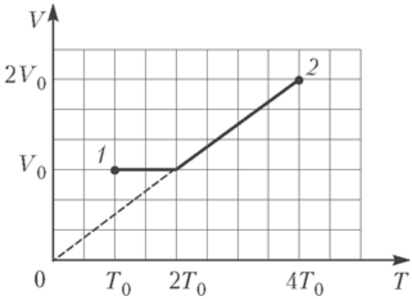


Рис. 5

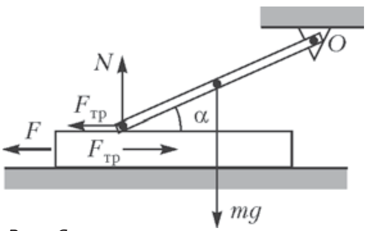


Рис. 6

ным и равным $2p_0$. До отрыва поршня от выступов газ нагревается изохорно. Из уравнений Менделеева–Клаперона

$$p_0V_0 = \nu RT_0,$$

$$(2p_0)V_0 = \nu RT_1,$$

$$(2p_0)(2V_0) = \nu RT_2$$

следует, что $T_1 = 2T_0$, $T_2 = 4T_0$. График процесса в координатах V, T изображен на рисунке 5.

28. Запишем второй закон Ньютона для доски в проекции на горизонтальную ось (рис.6):

$$F - F_{тр} = 0$$

и уравнение моментов относительно шарнира для стержня:

$$Nl\cos\alpha + F_{тр}l\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\cos\alpha = 0.$$

Подставив $F_{тр} = \mu N$ и исключив N, получим

$$F = \frac{\mu mg}{2(1+\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha)} \approx 0{,}9\ \text{Н}.$$

29. После установления равновесия в левой половине сосуда будет находиться $\nu_1 = 1$ моль гелия, а в правой половине – $\nu_2 = 1$ моль гелия и $\nu_3 = 2$ моль аргона. Температуры газов будут одинаковы. Внутренние энергии газов слева и справа от перегородки равны, соответственно,

$$U_л = \frac{3}{2}\nu_1RT' \text{ и } U_п = \frac{3}{2}\nu_2RT' + \frac{3}{2}\nu_3RT'.$$

Получаем

$$\frac{U_л}{U_п} = \frac{\nu_1}{\nu_2+\nu_3} = \frac{1}{3}.$$

(Из закона сохранения энергии следует, что $T' = T$, но для ответа это не существенно.)

30. При разомкнутом ключе через сопротивления R_1 и R_2 течет одинаковый ток I, и выделяемые мощности равны $P_1 = I^2R_1$

и $P_2 = I^2 R_2$, откуда находим отношение сопротивлений:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{P_1}{P_2}.$$

При замкнутом ключе ток через R_1 не течет, к источнику подключено только сопротивление R_2. Из законов Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} \text{ и } I' = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$

находим отношение токов:

$$\frac{I'}{I} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{P_1}{P_2},$$

а затем и отношение мощностей:

$$\frac{P_2'}{P_2} = \frac{I'^2 R_2}{I^2 R_2} = \left(1 + \frac{P_1}{P_2}\right)^2.$$

Отсюда получаем

$$P_2' = P_2 \left(1 + \frac{P_1}{P_2}\right)^2 = 9 \text{ Вт}.$$

31. Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{к}},$$

с учетом того, что $A_{\text{вых}} = hc/\lambda_0$, $E_{\text{к}} = eU = eq/C$, получим

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0} + \frac{eq}{Ch} \approx 10^{15} \text{ Гц}.$$

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ВЫСШАЯ ПРОБА»

МАТЕМАТИКА

Отборочный этап

10 класс

1. 270. **2.** 7. **3.** 55. **4.** 4. **5.** 44. **6.** 2048. **7.** 250. **8.** 3. **9.** 266. **10.** 104.

11 класс

1 день

1. 18. **2.** 8. **3.** 10. **6.** 330. **8.** −0.5. **9.** 4. **10.** 304.

2 день

4. 29. **5.** 73. **7.** 8. **10.** 27.

Заключительный этап

10 класс

1. Могут.

Рассмотрим геометрическую прогрессию 1, q, q^2, q^3. Выберем q так, чтобы числа 1, q, q^3 образовывали арифметическую прогрессию. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство $1+q^3=2q \Leftrightarrow \left(q^2+q-1\right)(q-1)=0$. Один из корней этого уравнения равен $q=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. При таком значении q числа 1, q, q^3 удовлетворяют условию задачи.

2. По теореме об угле между касательной и хордой имеем $\angle ACB_1=\angle CAB_1=\angle ABC=60^\circ$, т.е. треугольник AB_1C – равносторонний. Тогда $AA_0=AC=AB_1$, т.е. треугольник A_0AB_1 равнобедренный. Если обозначить $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\beta$, то получим $\angle AB_1A_0=\dfrac{180-(60+\alpha)}{2}=\dfrac{120-\alpha}{2}$. Отсюда, в частно-

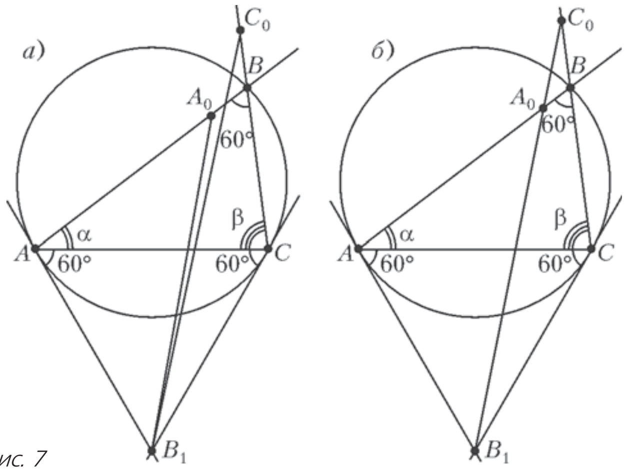


Рис. 7

сти, следует, что $\angle AB_1A_0<60^\circ$, т.е. точка A_0 расположена внутри угла $\angle AB_1C$ (рис.7,*а*). Аналогично, ΔC_0CB_1 равнобедренный, и $\angle CB_1C_0=\dfrac{120-\beta}{2}$. Сумма этих углов равна

$$\angle AB_1A_0+\angle CB_1C_0=\frac{240-(\alpha+\beta)}{2}.$$

Учитывая, что $\alpha+\beta=120^\circ$, получаем $\angle AB_1A_0+\angle CB_1C_0=60^\circ=$

$= \angle AB_1C$, следовательно, лучи B_1A_0 и B_1C_0 совпадают (рис.7,*б*), что и требовалось.

3. 2.

Занумеруем клетки, как показано на рисунке 8. Конь может из любой клетки попасть в любую клетку с таким же номером и

2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	…	
1	4	2	3	1	4	2	3	1	4	…	

Рис. 8

не может попасть в другие. Таким образом, все клетки разбились на 4 множества, так что конь не может перескочить из одного множества в другое, но может свободно перемещаться внутри одного множества.

Добавим две клетки, как на рисунке 9. Докажем, что теперь конь может попасть из любой клетки в любую другую. Клетка А

A		B									
2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	…	
1	4	2	3	1	4	2	3	1	4	…	

Рис. 9

«соединяет» закрашенные клетки, т.е. через нее можно из множества 1 перескочить в множество 4. (Находясь в любой клетке с номером 1, можно прийти в закрашенную клетку с номером 1, затем через А попасть в закрашенную клетку с номером 4 и из нее – в любую клетку с номером 4. В итоге из любой клетки с номером 1 можно с помощью А попасть в любую клетку с номером 4.)

Клетка В соединяет клетки, отмеченные штриховкой, т.е. через нее можно из любого из множеств 2, 3, 4 перескочить также в любое из этих множеств.

В итоге, сочетая клетки А,В, можно из любого множества попасть в любое другое. Например, чтобы попасть из множества 1 в множество 2, вначале с помощью А попадаем из 1 в 4, затем с помощью В попадаем из 4 в 2.

	A	A	B	B	…					…	B	B	A	A	
A	2	3	1	4	2	3	1	4	2	3	…		1	4	A
A	1	4	2	3	1	4	2	3	1	4	…		2	3	A
	A	A	B	B	…					…	B	B	A	A	

Рис. 10

Осталось убедиться, что одной клетки не хватит. Из рисунка 10 видно, что все добавляемые клетки разбиваются на два вида: в клетки A можно попасть не больше чем из 3 клеток доски, в клетки B можно попасть из 4-х клеток, но среди них всегда есть две из одного множества (отмеченные одинаковой цифрой). Таким образом, клетки, в которую можно попасть из всех четырех множеств, не существует.

4. а) Например, $f(x)=2+\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)$. Четность очевидна, проверим второе условие:

$$f(x)+f(10-x)=$$

$$=4+\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)+\cos\left(\frac{\pi(10-x)}{10}\right)=4+\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi x}{10}\right)=0,$$

так как $\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)$.

б) Из четности получаем $f(10-x)=f(x-10)$, т.е.

$$f(x)+f(x-10)=4$$

при любом x. Подставив сюда $x+10$ и $x+20$ вместо x, получим

$$f(x+10)+f(x)=4,$$

$$f(x+20)+f(x+10)=4.$$

Вычитая из второго первое, получаем $f(x+20)-f(x)=0$ при любом x, т.е. функция периодична с периодом 20.

5. $x = 8$, $y = 14$, $z = 18$.

Мы будем использовать следующее **утверждение**: *Если два из чисел x, y, z делятся на некоторое натуральное число m, то и третье делится на m.*

Доказательство. Пусть, например, x и y делятся на m. Тогда

$$\begin{cases} x \vdots m \Rightarrow a \vdots m, & b \vdots m \\ y \vdots m \Rightarrow b \vdots m, & c \vdots m. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots m \\ c \vdots m \end{cases} \Rightarrow z \vdots m.$$

Следствие. *Если одно из чисел x, y, z не делится на m, то из оставшихся двух хотя бы одно тоже не делится на m.*

Рассмотрим теперь данные в задаче числа:

6, 8, 12, 18, 24

14, 20, 28, 44, 56

5, 15, 18, 27, 42

Заметим, что в первых двух строках все числа четные, т.е. $x \vdots 2$, $y \vdots 2 \Rightarrow z \vdots 2 \Rightarrow z=18$ или $z = 42$. Далее, оба числа 18 и 42 делятся на 3, т.е. $z \vdots 3$. Во второй строке нет чисел, делящихся на 3, т.е. $y \not\vdots 3 \Rightarrow x \not\vdots 3 \Rightarrow x=8$. Далее, $x \vdots 4$, $z \not\vdots 4 \Rightarrow y \not\vdots 4 \Rightarrow y=14$. Наконец, $y \vdots 7$, $x \not\vdots 7 \Rightarrow z \not\vdots 7 \Rightarrow z = 18$. Значения $x = 8$, $y = 14$, $z = 18$ возможны, например, при $a = 72$, $b = 56$, $c = 126$.

6. а) $f(9) > f(10)$; б) $f(6) > f(5)$.

Обозначим через S_n множество всех требуемых расстановок для таблицы $n \times n$. Тогда $f(n)$ по определению равно количеству элементов в множестве S_n.

Введем операцию g над таблицей, заключающуюся в удалении последнего (крайнего правого) столбца и последней (крайней нижней) строки таблицы. Пример приведен на рисунке 11.

$$t = \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 2 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 6 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad g(t) = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 10 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 11

Очевидно, если $t \in S_n$, то $g(t) \in S_{n-1}$.

а) Мы докажем, что отображение g: $S_{10} \to S_9$ является инъективным (смысл термина будет разъяснен далее) и при этом его образ не покрывает всего множества S_9. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 1. *Пусть дана таблица $y \in S_9$. Тогда существует не более одной таблицы $x \in S_{10}$ такой, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Будем восстанавливать таблицу x по известной таблице $y = g(x)$. Для наглядности изобразим обе таблицы так, как показано на рисунке 12. Здесь последний столбец таблицы x содержит неизвестные числа $a_1, \ldots, a_9$, c, а последняя строка содержит неизвестные числа $b_1, \ldots, b_9$, c.

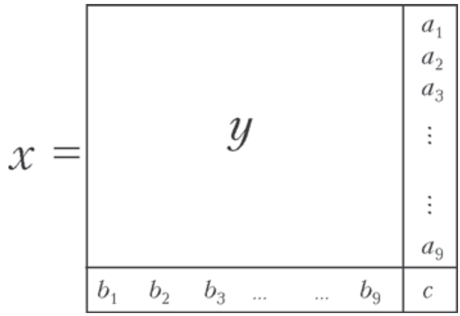


Рис. 12

Число a_i должно отличаться от всех чисел в строке с номером i таблицы y. Но в любой строке таблицы y стоят 9 различных чисел из множества $\{1, 2, \ldots, 10\}$, т.е. для a_i остается единственное возможное значение. Следовательно все числа $a_1, \ldots, a_9$ однозначно определяются по таблице y. Аналогично, рассматривая столбцы, однозначно восстанавливаем числа b_j.

Если среди восстановленных чисел $a_1, \ldots, a_9$ есть одинаковые, получаем противоречие с условием, и, следовательно, таблицы x, удовлетворяющей равенству $g(x) = y$, не существует. Если же все a_i различны и все b_j различны, то число c должно отличаться от них всех, и такое число тоже единственно.

Итак, если таблица x существует, то она единственна, что и требовалось.

Следствие. Если $x_1, x_2 \in S_{10}$ и $x_1 \neq x_2$, то $g(x_1) \neq g(x_2)$. (Отображение g с таким свойством в математике называется *инъективным.*)

Утверждение 2. *Существует таблица* $y \in S_9$ *такая, что* $\forall x \in S_{10} : g(x) \neq y$.

Доказательство. Рассмотрим таблицу $y \in S_9$, в первой строке которой написаны подряд числа 1, 2, …, 9, а в следующих строках – те же числа, сдвигаемые по циклу каждый раз на 1 (рис.13).

$$y = \begin{array}{|ccccccc|} \hline 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 & 2105 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 \\ 2014 & 9 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ \hline \end{array}$$

Рис. 13

Восстанавливая по ней таблицу x так же, как это сделано выше, мы получаем $a_1 = a_2 = \ldots = a_9 = 10$, что противоречит условию. Следовательно, искомой таблицы x не существует.

Из доказанных утверждений следует, что в множестве S_9 больше элементов, чем в S_{10}, т.е. $f(9) > f(10)$.

Проиллюстрируем наглядно последний шаг рассуждения. Предположим, что мы выписали в ряд все возможные таблицы $x_1, \ldots, x_K$ из множества S_{10}. Рассмотрим следующую диаграмму отображения g:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & g(x_4) & g(x_5) \end{array}$$

В множестве S_{10} ровно K элементов, и все они выписаны в верхнем ряду. В нижнем ряду для каждой таблицы x выписана соответствующая таблица $g(x)$, а также построенная в утверждении 2 таблица y.

Все таблицы в нижнем ряду принадлежат множеству S_9, и все они по доказанному различны. Следовательно, количество таблиц в множестве S_9 больше, чем в S_{10}.

б) Докажем, что при отображении g: $S_6 \to S_5$ в каждую таблицу множества S_5 отображается более одной таблицы множества S_6. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 3. *Пусть дана таблица* $y \in S_5$. *Тогда существует не менее 4 различных таблиц* $x \in S_6$ *таких, что* $g(x) = y$.

Доказательство. Так же, как в п. а), изобразим наглядно равенство $g(x) = y$ (рис.14).

Покажем, как для заданной таблицы $y \in S_5$ построить не менее 4 различных таблиц x, удовлетворяющих равенству $g(x) = y$.

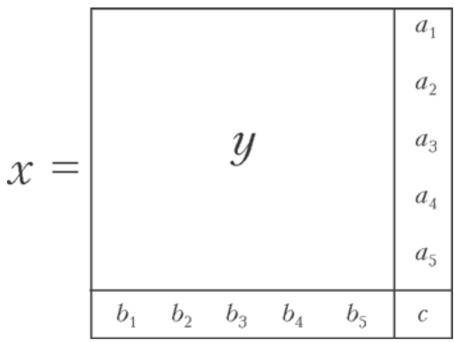


Рис. 14

В объединении первой строки и первого столбца таблицы y написано 9 чисел (не обязательно все различные), поэтому существует число из множества $\{1, 2, \ldots, 10\}$, которого нет ни в первой строке, ни в первом столбце таблицы y. Положим a_1 и b_1 равными этому числу. Согласно нашему выбору, $a_1 = b_1$.

Для $i = 2, 3, \ldots, 5$ будем последовательно выбирать числа a_i так, чтобы число a_i не равнялось ни одному из чисел в i-й строке таблицы y, а также не равнялось уже выбранным числам $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Такой выбор всегда существует, так как «запрещенными» оказываются всегда не более 5 + 4 = 9 чисел.

Аналогично, для $j = 2, 3, \ldots, 5$ будем последовательно выбирать числа b_j так, чтобы число b_j не равнялось ни одному из чисел в j-м столбце таблицы y, а также не равнялось числам $b_1, \ldots, b_{j-1}$.

Мы изначально выбрали $a_1 = b_1$, поэтому среди чисел a_i, b_j, $i, j = 1, \ldots, 5$, не более 9 различных. Поэтому можно выбрать число c отличным от них всех и тем самым завершить построение таблицы x. Построенная таблица x удовлетворяет всем условиям задачи и принадлежит множеству S_6, при этом $g(x) = y$.

Заметим, что при выборе числа a_2 запрещенными были не более 6 чисел (числа во второй строке таблицы y и число a_1). Поэтому имелось не менее 4 способов выбрать число a_2, и все они привели бы к различным таблицам x. Следовательно, таких таблиц x, для которых $g(x) = y$, не менее 4, что и требовалось доказать.

5. $\frac{1}{2}\cdot\left(2+\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Пусть A и B – концы балки, причем B – нижний конец, который первым попадает в нижний коридор (считаем, что балку передают из верхнего коридора в нижний). Обозначим для краткости $d=\frac{1}{2}\cdot\left(2+\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ – указанную в ответе длину балки, $PQRS$ – квадрат, образующий дыру.

Решение будет состоять из двух частей: **I** – мы покажем, как передать балку указанной в ответе длины, и **II** – докажем, что балку большей длины нельзя передать никаким способом.

I. Нам понадобятся следующие дополнительные обозначения. Стена верхнего коридора, проходящая через точки Q, R, пересекается с потолком верхнего коридора по прямой a (рис.15).

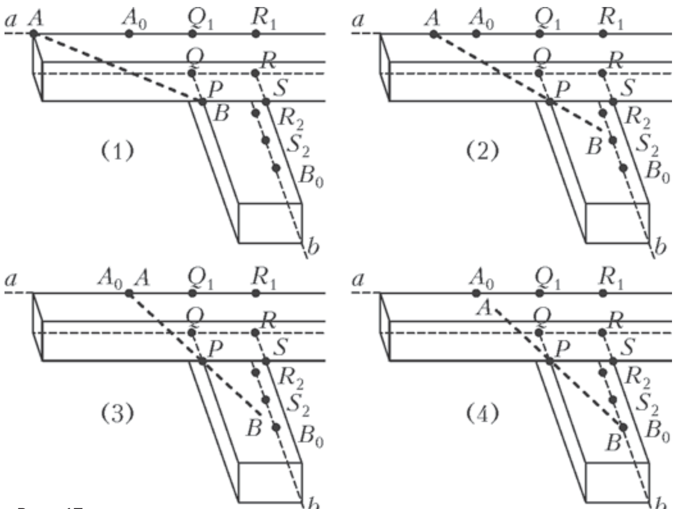


Рис. 15

Стена нижнего коридора, содержащая точки R, S, пересекается с полом нижнего коридора по прямой b; Q_1, R_1 – ортогональные проекции точек Q, R на прямую a, R_2, S_2 – ортогональные проекции точек R, S на прямую b; A_0, B_0 – точки на прямых a, b соответственно такие, что $\overrightarrow{A_0Q_1}=\overrightarrow{Q_1R_1}$ и $\overrightarrow{B_0S_2}=\overrightarrow{S_2R_2}$. Отрезки PA_0 и PB_0 параллельны отрезку Q_1S, поэтому точки P, A_0, B_0 лежат вдоль одной прямой, причем $PA_0=PB_0=\sqrt{3}$.

Перемещение балки будет состоять из следующих шагов (см. рис.15, (1)–(4)).

(1) Расположим балку так, чтобы ее конец A лежал на прямой a, а конец B находился в точке P.

(2) Будем перемещать ее конец A вдоль прямой a, так чтобы сама балка все время проходила через точку P.

(3) Такое перемещение будем продолжать до тех пор, пока точка A не совпадет с A_0. В этот момент балка расположится вдоль прямой A_0B_0.

(4) Затем будем двигать балку вдоль прямой A_0B_0 до тех пор, пока точка B не совпадет с B_0.

(5) Наконец, будем двигать точку B вдоль прямой b так, чтобы вся балка по-прежнему проходила через P, до тех пор, пока вся балка не окажется в нижнем коридоре.

Ключевой факт, который нужно проверить, – что такое перемещение осуществимо, т.е. что балка все время будет находиться целиком внутри коридоров. Очевидно, достаточно проверить его только для шагов **(1)–(3).**

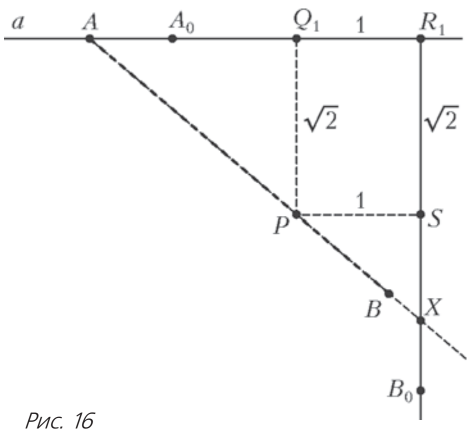


Рис. 16

Проведем плоскость δ через прямую a и точку P. На протяжении всех шагов **(1)–(4)** балка находится внутри плоскости δ, следовательно, можно исследовать движение балки отдельно в этой плоскости (рис.16). Пусть $AQ_1 = x$. Продлим прямую AP до пересечения со стеной нижнего коридора в точке X. Тогда из подобия треугольников APQ_1 и AXR_1 несложно найти $AX = \frac{x+1}{x} \cdot \sqrt{2+x^2}$. Производная этой функции равна $\frac{x^3-2}{x^2\sqrt{2+x^2}}$. Отсюда видно, что минимум функции достигается при $x = \sqrt[3]{2}$. Подставляя это значение в выражение для AX, получаем после преобразований $\min(AX) = d$ (напомним, d обозначает число, указанное в ответе). Таким образом, длина AX все время не меньше длины балки (в частности, при

$x = 1$ имеем $AX = 2\sqrt{3} > d$), т.е. точка B никогда не выходит за пределы отрезка AX, а значит, и за пределы коридоров, что и требовалось.

II. Теперь докажем, что балку длины больше d невозможно передать из одного коридора в другой никаким способом. Пусть O − точка балки, делящая ее в отношении $AO : OB = \sqrt[3]{2} : 1$. Поскольку движение балки непрерывно, при любом способе передачи возникнет момент, когда точка O окажется в плоскости $PQRS$. Покажем, что в этот момент длина балки не может быть больше d.

Пусть α и β − вертикальные плоскости, проходящие через O параллельно осям верхнего и нижнего коридора соответственно, z_A − расстояние от A до плоскости $PQRS$, x_A − расстояние от A до α , y_A − расстояние от A до β , z_B , x_B , y_B − аналогичные расстояния для точки B. (На рисунке 17 изображен вид сверху в проекции на плоскость $PQRS$, плоскости α и β проецируются в прямые, отрезки z_A и z_B не видны, так как проецируются в точки A и B соответственно. Точка O находится в плоскости $PQRS$.)

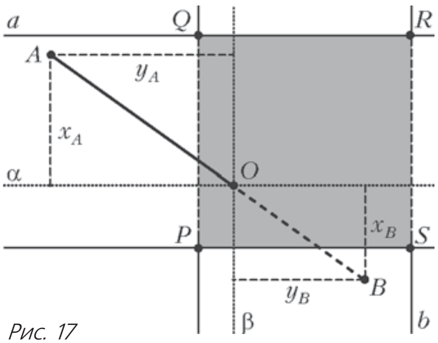


Рис. 17

Очевидно, $z_A : z_B = x_A : x_B = y_A : y_B = \sqrt[3]{2} : 1$. Кроме того, $x_A \le 1$, $y_B \le 1$, $z_A \le 1$. Тогда длина всей балки

$$AB = \left(1 + \sqrt[3]{2}\right) \cdot \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} =$$

$$= \left(1 + \sqrt[3]{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{x_A^2}{\sqrt[3]{4}} + y_B^2 + \frac{z_A^2}{\sqrt[3]{4}}} \le \left(1 + \sqrt[3]{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} = d\ .$$

6. а) $f(2015) > f(2016)$; б) $f(1009) > f(1008)$.

Обозначим через S_n множество всех требуемых расстановок для таблицы $n \times n$. Тогда $f(n)$ по определению равно количеству элементов в множестве S_n .

Введем операцию g над таблицей, заключающуюся в удалении последнего (крайнего правого) столбца и последней (крайней нижней) строки таблицы. Пример приведен на рисунке 18. Очевидно, если $t \in S_n$, то $g(t) \in S_{n-1}$.

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 3 & 17 \\ 2015 & 17 & 1 & 8 \\ 100 & 2 & 101 & 56 \\ 101 & 4 & 6 & 12 \end{bmatrix} \qquad g(t) = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 2015 & 17 & 1 \\ 100 & 2 & 101 \end{bmatrix}$$

Рис. 18

а) Мы докажем, что отображение g: $S_{2016} \to S_{2015}$ является инъективным (смысл термина будет разъяснен далее) и при этом его образ не покрывает всего множества S_{2015}. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 1. *Пусть дана таблица $y \in S_{2015}$. Тогда существует не более одной таблицы $x \in S_{2016}$ такой, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Будем восстанавливать таблицу x по известной таблице $y = g(x)$. Для наглядности изобразим обе таблицы так, как показано на рисунке 19. Здесь последний столбец таблицы x содержит неизвестные числа $a_1, \ldots, a_{2015}$, c, а последняя строка содержит неизвестные числа $b_1, \ldots, b_{2015}$, c.

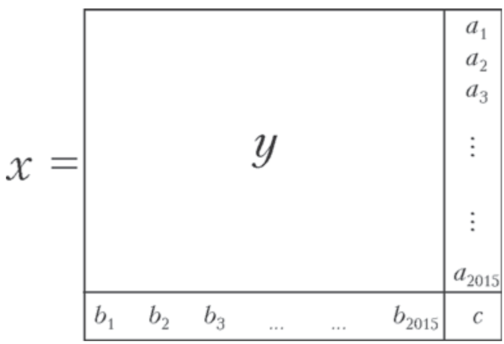


Рис. 19

Число a_i должно отличаться от всех чисел в строке с номером i таблицы y. Но в любой строке таблицы y стоят 2015 различных чисел из множества $\{1, 2, \ldots, 2016\}$, т.е. для a_i остается единственное возможное значение. Следовательно, все числа $a_1, \ldots, a_{2015}$ однозначно определяются по таблице y. Аналогично, рассматривая столбцы, однозначно восстанавливаем числа b_j.

Если среди восстановленных чисел $a_1, \ldots, a_{2015}$ есть одинаковые, получаем противоречие с условием, и, следовательно, таблицы x, удовлетворяющей равенству $g(x) = y$, не существует. Если же все a_i различны и все b_j различны, то число c должно отличаться от них всех, и такое число тоже единственно.

Итак, если таблица x существует, то она единственна, что и требовалось.

Следствие. Если $x_1, x_2 \in S_{2016}$ и $x_1 \neq x_2$, то $g(x_1) \neq g(x_2)$. (Отображение g с таким свойством в математике называется *инъективным.*)

Утверждение 2. *Существует таблица* $y \in S_{2015}$ *такая, что* $\forall x \in S_{2016} : g(x) \neq y$.

Доказательство. Рассмотрим таблицу $y \in S_{2015}$, в первой строке которой написаны подряд числа 1, 2, …, 2015, а в следующих строках – те же числа, сдвигаемые по циклу каждый раз на 1 (рис.20).

$$y = \boxed{\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 & 2015 \\ 2015 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 \\ 2014 & 2015 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \end{array}}$$

Рис. 20

Восстанавливая по ней таблицу x так же, как это сделано выше, мы получаем $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2015} = 2016$, что противоречит условию. Следовательно, искомой таблицы x не существует.

Из доказанных утверждений следует, что в множестве S_{2015} больше элементов, чем в S_{2016} , т.е. $f(2015) > f(2016)$.

Проиллюстрируем наглядно последний шаг рассуждения. Предположим, что мы выписали в ряд все возможные таблицы $x_1, \ldots, x_K$ из множества S_{2016} . Рассмотрим следующую диаграмму отображения g:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_K \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & \ldots & g(x_K) \end{array}$$

В множестве S_{2016} ровно K элементов, и все они выписаны в верхнем ряду. В нижнем ряду для каждой таблицы x выписана соответствующая таблица $g(x)$, а также построенная в утверждении 2 таблица y. Все таблицы в нижнем ряду принадлежат множеству S_{2015} , и все они по доказанному различны. Следовательно, количество таблиц в множестве S_{2015} больше, чем в S_{2016} .

б) Докажем, что при отображении g: $S_{1009} \to S_{1008}$ в каждую таблицу множества S_{1008} отображается более одной таблицы множества S_{1009} . Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 3. *Пусть дана таблица* $y \in S_{1008}$. *Тогда существует не менее 1007 различных таблиц* $x \in S_{1009}$ *таких, что* $g(x) = y$.

Доказательство. Так же, как в п. а), изобразим наглядно равенство $g(x) = y$ (рис.21).

Покажем, как для заданной таблицы $y \in S_{1008}$ построить не

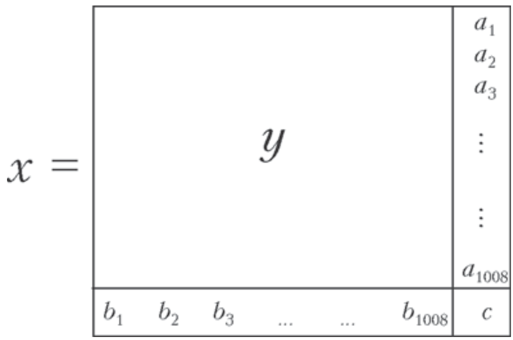


Рис. 21

менее 1007 различных таблиц x, удовлетворяющих равенству $g(x) = y$.

В объединении первой строки и первого столбца таблицы y написано 2015 чисел (не обязательно все различные), поэтому существует число из множества {1, 2, …, 2016}, которого нет ни в первой строке, ни в первом столбце таблицы y. Положим a_1 и b_1 равными этому числу. Согласно нашему выбору, $a_1 = b_1$.

Для i = 2, 3, …, 1008 будем последовательно выбирать числа a_i так, чтобы число a_i не равнялось ни одному из чисел в i-й строке таблицы y, а также не равнялось уже выбранным числам $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Такой выбор всегда существует, так как «запрещенными» оказываются всегда не более 1008 + 1007 = 2015 чисел.

Аналогично, для j = 2, 3, …, 1008 будем последовательно выбирать числа b_j так, чтобы число b_j не равнялось ни одному из чисел в j-м столбце таблицы y, а также не равнялось числам $b_1, \ldots, b_{j-1}$.

Мы изначально выбрали $a_1 = b_1$, поэтому среди чисел a_i, b_j, i, j = 1, …, 1008, не более 2015 различных. Поэтому можно выбрать число c отличным от них всех и тем самым завершить построение таблицы x. Построенная таблица x удовлетворяет всем условиям задачи и принадлежит множеству S_{1009}, при этом $g(x) = y$.

Заметим, что при выборе числа a_2 запрещенными были не более 1009 чисел (числа во второй строке таблицы y и число a_1). Поэтому имелось не менее 1007 способов выбрать число a_2, и все они привели бы к различным таблицам x. Следовательно, таких таблиц x, для которых $g(x) = y$, не менее 1007, что и требовалось доказать.

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ–2015»

МАТЕМАТИКА

Отборочный этап

Первый тур

1. 66.

Так как $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$, $198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$ и $462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, то наибольшее количество подарков равно $\text{НОД}\ (132,\ 198,\ 462) = 2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$ (подарков).

2. 503,75.

Вычисляем по очереди:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)^{-1} = \frac{a+b+c}{a(b+c)} : \frac{b+c-a}{a(b+c)} = \frac{a+b+c}{b+c-a};$$

$$1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Поэтому при всех допустимых значениях переменных выражение равно

$$\frac{(a+b+c)^2(b+c-a)}{2bc(b+c-a)(a+b+c)^2} = \frac{1}{2bc}.$$

Так как по теореме Виета $bc = \frac{2}{2015}$, то получаем ответ: $\frac{2015}{4} = 503{,}75$.

3. 680.

Треугольник прямоугольный, если его сторона проходит через центр окружности. Чтобы получить максимум треугольников, нужно, чтобы все 70 вершин разбились на пары диаметрально противоположных. Пусть среди них оказалось m пар разноцветных вершин, тогда $m = 2x$ – четно (если оно равно $m = 2x - 1$, то увеличим его на 1, отчего число искомых треугольников только увеличится) и разобьем все остальные вершины на пары одноцветных: $(20-2x)/2 = 10-x$ черных и $(50-2x)/2 = 25-x$ белых. Третьей вершиной может быть любая из оставшихся черных, поэтому число искомых треугольников: $2x \cdot (20-1) + (10-x) \cdot (20-2) + (25-x) \cdot 20 = 680$.

4. 19200.

Обозначим первую цифру данного четырехзначного числа через x, а остающееся после отбрасывания этой цифры трехзначное число – через y. Тогда по условию $1000x + y = 16y$, или $200x = 3y$. Поэтому возможны варианты: $x = 3$, $y = 200$; $x = 6$, $y = 400$; $x = 9$, $y = 600$. Получающиеся числа: 3200, 6400, 9600.

5. 3,09.

Из теоремы синусов для треугольников ABN и CBN следует, что радиусы указанных описанных окружностей равны. Обозначим центры этих окружностей через O_1 и O_2 соответственно, а их радиусы – через R.

Четырехугольник O_1BO_2N – ромб со стороной R и углом при вершине B, равным углу при вершине исходного треугольника (так как $\angle BO_1O_2$ равен половине центрального угла и равен $\angle A$, а $\angle BO_2O_1$ равен половине центрального угла и равен $\angle C$). Треугольники ABC и O_1BO_2 подобны.

Отрезок BN находится из теоремы косинусов для треугольника ABN $\left(\cos\angle A = \frac{3}{5}\right)$: $BN = \sqrt{17}$. Из подобия треугольников или с использованием тригонометрических функций $\left(\operatorname{ctg}\angle A = \frac{3}{4}\right)$ получаем ответ: $O_1O_2 = BN \cdot \operatorname{ctg}\angle A = \frac{3\sqrt{17}}{4} \approx 3{,}09$.

6. 0,5.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2xy + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge y \ge 0, \\ x + y - 2\sqrt{xy} = 2xy + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Уравнение $x + y - 2\sqrt{xy} = 2xy + \frac{1}{2}$ равносильно

$$\frac{x+y}{2} = xy + \sqrt{xy} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \left(\sqrt{xy} + \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+y}{2}} = \sqrt{xy} + \frac{1}{2},$$

поэтому

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}.$$

7. 6,28.

Так как

$$\sin\left(2x + \arcsin\frac{4}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \arccos\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \cos\left(2\left(x - \arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right),$$

то, обозначив $\alpha = x - \arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$, получим $5\cos 2\alpha + \sqrt{10}\cos\alpha = 7$ или $10\cos^2\alpha + \sqrt{10}\cos\alpha - 12 = 0$. Отсюда $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ или $\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{10}}{10}$ (что невозможно, так как $-\frac{4\sqrt{10}}{10} < -1$). Поэтому $\cos\left(x - \arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, откуда получаются решения: $x = 2\pi n$, $2\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10} + 2\pi n$. При этом в указанный в условии промежуток попадает только 2π, так как

$$2\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10} > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sin\left(2\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}.$$

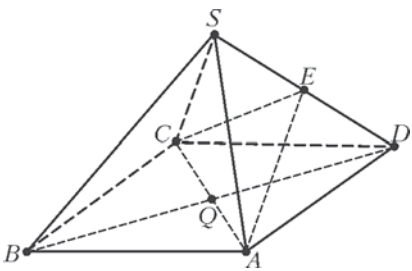


Рис. 22

8. 12.

Ребра оснований равны $12\sqrt{2}$, диагональ основания равна $AC = BD = 24$, поэтому $BQ = 12$ и боковые ребра равны 18.

1) Рассмотрим серию указанных сечений, пересекающих ребра AD и DC (рис.22). Все эти сечения – треугольники, подобные треугольнику AEC, причем $QE \parallel BS$, QE – средняя линия в ΔBSD, поэтому

$$QE = 9,\ AE = \sqrt{QE^2 + AQ^2} = \sqrt{81 + 144} = 15.$$

Радиус вписанной в ΔAEC окружности равен отношению площади этого треугольника к его полупериметру: $r = \frac{12 \cdot 9}{12 + 15} = 4$. Значит, возможные значения радиусов окружностей, вписанных в треугольные сечения: $0 < r < 4$. Отметим, что само значение $r = 4$ здесь исключено, так как сечение AEC проходит через AC, а не параллельно AC, как требуется по условию.

2) Рассмотрим теперь серию указанных сечений, пересекающих ребра AB и BC (рис.23). Все эти сечения – пятиугольники. Пусть сечение проходит через точку T, лежащую на BQ, и $BT = x$ $(0 < x < 12)$. Тогда $FR \parallel GH \parallel SB$ и, так как $AC \perp SB$, то $FR \perp GF$.

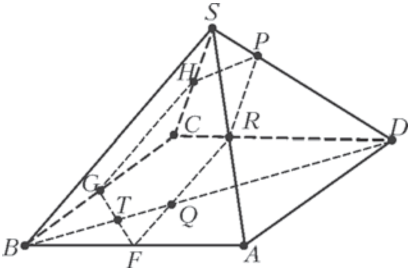


Рис. 23

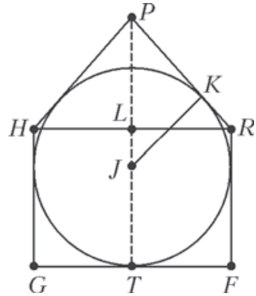


Рис. 24

Таким образом, каждый такой пятиугольник $GFRPH$ представляет собой прямоугольник $GFRH$ с равнобедренной треугольной «крышкой» RPH (рис.24).

Из ΔABS:

$$\frac{FR}{BS}=\frac{AF}{AB},\ \frac{FR}{18}=\frac{(12-x)\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}=1-\frac{x}{12}\Rightarrow FR=18-\frac{3x}{2}.$$

Из подобия ΔSBD и ΔPTD:

$$\frac{TP}{SB}=\frac{TD}{BD},\ \frac{TP}{18}=\frac{24-x}{24}\Rightarrow TP=18-\frac{3x}{4}.$$

Поэтому $LP=\frac{3x}{4}$, и так как $HR = GF = 2x$, то $PR=\frac{5x}{4}$ и

$$\sin\angle LPR=\frac{4}{5}.$$

Из ΔPKJ:

$$\sin\angle LPR=\frac{JK}{JP}=\frac{x}{18-\frac{3x}{4}-x}=\frac{4x}{72-7x}=\frac{4}{5},$$

откуда $x = 6$ и $r = 6$. Таким образом, $r\in(0;\,4)\cup 6$ и сумма целых значений равна 1 + 2 + 3 + 6 = 12.

9. 50380.

Если сделать замену $t=3\cos x+4\sin x\in[-5;\,5]$ и учесть, что $t^2=7\sin^2 x+12\sin 2x+9$, то задача сводится к исследованию множества значений функции $g(t)=2015\cdot t^2-2016\cdot t-5\cdot 2015$ при $t\in[-5;\,5]$. Минимум функции $g(t)$ достигается в точке $t_0=\frac{1008}{2015}\in[-5;5]$, а максимум – в точке $t = -5$. Значит, $f_{\max}=$ $=g(-5)=50380$.

10. −104.

Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y > x, \\ |y| \ge x^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y \le x, \\ 2xy > x^4 + x^2. \end{cases}$$

Первая из них равносильна совокупности

$$\begin{cases} y > x, \\ y \ge x^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y > x, \\ y \le -x^2. \end{cases}$$

Введем функцию $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 + x\right)$, тогда вторая система приводит к совокупности

$$\begin{cases} y \le x, \\ x > 0, \\ y > f(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y \le x, \\ x < 0, \\ y < f(x). \end{cases}$$

При этом функция $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 + x\right)$ нечетная, возрастает на всей числовой прямой и $x^2 < f(x) < x$ при $x \in (0; 1)$; $f(x) > x^2$ при $x > 1$.

Все эти совокупности для наглядности можно изобразить на плоскости Oxy. При этом получается, что при $y > 1$ неравенство имеет, по крайней мере, 3 целочисленных решения: $x = -1, 0, 1$; при $y = 1$ – целочисленных решений два: $x = -1, 0$; при $y \in (0; 1)$ – целочисленное решение одно: $x = 0$; при $y \in [-1; 0]$ – целых решений нет. При $y < -1$ – целочисленные решения с ростом $|y|$ появляются «по очереди»: $x = -1$, $x = -2$, … Подставляя эти значения в исходное неравенство, получим, что $x = -1$ является корнем при $y < -1$, $x = -2$ – при $y < -5$, $x = -3$ – при $y < -15$. Таким образом, ровно два целочисленных решения будет при $y \in [-15; -5) \cup \{1\}$. Искомая сумма равна $-15 - 14 - 13 - \ldots - 7 - 6 + 1 = -104$.

Второй тур

1. 987858180.

Для делимости на 90 необходимо и достаточно, чтобы число оканчивалось на ноль (В = 0), а сумма всех цифр числа делилась на 9. Начинаем слева: Л = 9, О = 8, М = 7, доходим до буквы Н. Если Н = 6, то решений не оказывается. Если Н = 5, то получаем ответ: 987858180.

2. 0,63.

На первых двух позициях цифра 0 встречается в 00 – 09, 10, 20 часов – всего 12 раз, при любом числе минут, а в течение каждого из 12 оставшихся часов на последних двух позициях цифра 0 встречается в 00 – 09, 10, 20, …, 50 минут – всего 15 раз. Поэтому среди всех (равновероятных) показаний часов цифра 0 встретится с вероятностью

$$\frac{12\cdot 60+15\cdot 12}{24\cdot 60}=\frac{5}{8}=0,625\approx 0,63\,.$$

3. 136.

Сделаем замену $t=\sin^2\frac{\pi x}{18}$. Тогда

$$\sqrt{7+8-8t}>4t \Leftrightarrow \begin{cases} t\in[0;1],\\ 15-8t>16t^2\end{cases} \Leftrightarrow t\in\left[0;\frac{3}{4}\right).$$

Поэтому

$$\sin\frac{\pi x}{18}\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Leftrightarrow \frac{\pi x}{18}\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right),$$

$$k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\in(-6+18k;6+18k)=[-5+18k;5+18k],\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Решения на отрезке $[-18;18]$ симметричны, и их сумма равна нулю. В ответ войдет сумма 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 31 = 136.

4. 2015.

Обозначим $k-2015=p$. При положительных p рассмотрим уравнение

$$\frac{2^p\left(2^{pn}-1\right)}{2^p-1}=2016=2^5\cdot 63\,.$$

При $p\in[1;4]$ получим $2^{pn}-1=2^{5-p}\cdot 63\cdot\left(2^p-1\right)$ – левая часть уравнения нечетная, правая – четная. При p = 5 получаем $2^{5n}=63\cdot 31+1=1954$ – целых решений нет. При $p\ge 6$ получим $2^{p-5}\left(2^{pn}-1\right)=63\cdot\left(2^p-1\right)$ – левая часть уравнения четная, правая – нечетная. При $p\le -1$ сумма прогрессии не превышает $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots<1$. И только при p = 0 (т.е. при k = 2015) все члены прогрессии равны 1 и сумма первых 2016 членов равна 2016.

5. 48.

Преобразуем уравнение:

$$13x+48=13y+3xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(13-3y)=13y-48 \Leftrightarrow x=-\frac{13y-48}{3y-13}=-\frac{13}{3}-\frac{25}{3(3y-13)},$$

поэтому $3x = -13 - \dfrac{25}{3y-13}$. Значит, $(3y-13)$ должно быть делителем числа 25. Составим таблицу:

$3y-13$	1	5	25	−1	−5	−25
$3y$	14	18	38	12	8	−12
y	–	6	–	4	–	−4
$3x$	–	−18	–	12	–	−12
x	–	−6	–	4	–	−4

Таким образом, решения уравнения: $(-4; -4)$; $(-6; 6)$; $(4; 4)$. Обозначим вершины получившегося треугольника: $A\ (-4; -4)$; $B\ (-6; 6)$; $C\ (4; 4)$. Так как точки A и C лежат на биссектрисе первого и третьего координатного углов, а точка B – на биссектрисе второго координатного угла, то $BO \perp AC$. Очевидно, что $AO = OC$. Поэтому ΔABC – равнобедренный, и его площадь равна $\dfrac{AC \cdot BO}{2} = 4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 48$.

6. −1.

Сложив все уравнения, получим

$$2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014} + x_{2015}) = 0,$$

откуда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014} + x_{2015} = 0.$$

Сложив 1-е, 3-е, 5-е, ..., 2013-е уравнения, получим

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2014} = -1007 - 1005 - \ldots + 1003 + 1005 = -1007.$$

Следовательно, $x_{2015} = 1007$. Тогда из уравнения $x_{2014} + x_{2015} = 1006$ находим, что $x_{2014} = -1$.

7. 420.

Пусть N = 10 – количество отмеченных точек на одной прямой. В силу требования задачи на одной прямой нельзя выбрать более чем n точек, где $n = N/2$, если N четно, и $n = (N+1)/2$, если N нечетно (в данном варианте $n = 5$). Так как всего выбирается 9 точек, то на одной прямой будет 5 точек, а на другой – 4.

Выясним, сколькими способами можно выбрать k точек из отмеченных N на одной прямой. Описанный способ выбора, по сути, означает разбиение отрезка длины N – 1 на k + 1 отрезков целочисленной длины, среди которых k – 1 средних должны быть не короче 2 см. Иными словами, надо найти количество решений уравнения $x_1 + x_2 \ldots + x_k + x_{k+1} = N - 1$ в целых числах, причем $x_1, x_{k+1} \geq 0$, $x_2, \ldots, x_k \geq 2$.

Положим $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 - 1$, $\ldots$, $y_k = x_k - 1$, $y_{k+1} = x_{k+1} + 1$. Тогда задача сводится к нахождению количества решений уравнения $y_1 + y_2 + \ldots + y_k + y_{k+1} = N - k + 1$ в натуральных числах. Эта задача равносильна, например, выставлению k перегородок между $N - k + 1$ лежащими на одной прямой шарами – число решений равно C_{N-k+1}^k.

В данной задаче число решений равно

$$2C_7^4 \cdot C_6^5 = 2 \cdot 35 \cdot 6 = 420.$$

8. 3,75.

Пусть EF – средняя линия треугольника ABC (E лежит на AB, F – на BC). Пусть P – точка пересечения NM и этой средней линии. Обозначим $CM = CN = x$, $AL = AN = y$, $BL = BM = z$. Тогда $FP = FM$ (из подобия треугольников MFP и $MCN =$ $= \dfrac{z + x}{2} - z = \dfrac{x - z}{2}$. Значит,

$$EP = EF - FP = \frac{x + y}{2} - \frac{x - z}{2} = \frac{y + z}{2} = \frac{AB}{2}.$$

Поэтому $\angle EPA = \angle EAP$ (углы в равнобедренном треугольнике EAP); $\angle EPA = \angle PAN$ (параллельность EP и AC). Значит, AP – биссектриса, т.е. AO и NM пересекаются в точке P, лежащей на средней линии.

Таким образом, высота треугольника AND равна половине высоты треугольника ABC. Значит, его площадь относится к площади ABC как $\dfrac{3}{3+7} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{20}$.

9. 2,08.

Множество решений каждого из этих двух неравенств может представлять собой отрезок, объединение двух замкнутых непересекающихся лучей, замкнутый луч, прямую, точку или пустое множество. Значит, по условию задачи возможны две ситуации.

1) Решение одного из неравенств единственное, и оно удовлетворяет второму неравенству. Здесь, в свою очередь, возможны два случая.

а) $a^2 - (a-1)(a+4) = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{3}$. Тогда $x = -4$. При этом значении a второе неравенство имеет решения (два непересекающихся луча), и $x = -4$ входит в это решение.

б) $(a+1)^2 - a(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Тогда $x = 0$, но первое неравенство не выполнено.

2) Множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, т.е. система

$$\begin{cases}(a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0,\\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0\end{cases}$$

имеет решения. Вычитая почленно из второго уравнения первое, получаем

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1,\\ x = -3.\end{array}\right.$$

Если $x = -3$, то $9a - 2(a+1)3 + a + 1 = 0$, т.е. $a = \frac{5}{4}$. При этом значении a решения системы: $-7 \le x \le -3$.

Если $x = 1$, то $a + 2(a+1) + a + 1 = 0$, т.е. $a = -\frac{3}{4}$. При этом значении a система имеет единственное решение $x = 1$

3) Можно еще отдельно проверить $a = 0$ и $a = 1$, они условию не удовлетворяют.

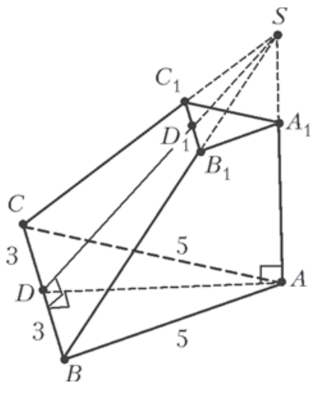


Рис. 25

Окончательно получаем $a = -\frac{3}{4}$ и $a = \frac{4}{3}$. Искомая величина: $\frac{4}{3} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{25}{12} \approx 2{,}08$.

10. 1,21.

Продлим ребра усеченной пирамиды до пирамиды $SABC$ (рис.25). Обозначим $h = SA$. Тогда шар, вписанный в усеченную пирамиду, также вписан и в пирамиду $SABC$. Поэтому

$$V = \frac{1}{3}h \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}r \cdot S_{\text{полн.пов.}}. \quad (1)$$

Поскольку $S_{\Delta ABC} = 12$, то

$$S_{\text{полн. пов.}} = S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SAC} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta ABC} = 5h + 3\cdot\sqrt{4^2 + h^2} + 12.$$

Значит, равенство (1) равносильно

$$12h = r\cdot\left(5h + 3\cdot\sqrt{4^2 + h^2} + 12\right). \quad (2)$$

Из точки D_1 опустим перпендикуляр D_1E на плоскость основания ABC (рис.26). Обозначим $\alpha = \angle D_1DA$. Из ΔSDA следует, что $\sin\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+4^2}}$. Тогда из ΔD_1ED находим

$$D_1E = 2r = \frac{20}{7}\sin\alpha = \frac{20h}{7\sqrt{h^2+4^2}}.$$

Подставляя в (2) значение для r, получаем

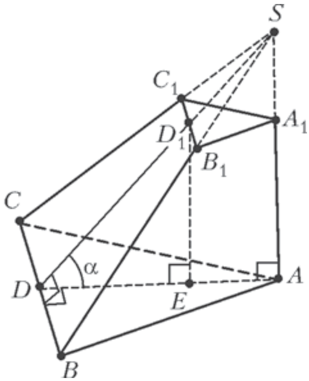


Рис. 26

$$12h = 12h = \frac{10h}{7\sqrt{h^2+4^2}}\cdot\left(5h+3\cdot\sqrt{4^2+h^2}+12\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{5}{7\sqrt{h^2+4^2}}\cdot\left(5h+3\cdot\sqrt{4^2+h^2}+12\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 42\sqrt{h^2+4^2} = 25h+15\cdot\sqrt{4^2+h^2}+60 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27\sqrt{h^2+4^2} = 25h+60 \Leftrightarrow 104h^2-3000h+8064=0.$$

Отсюда

$$h = 3 \text{ или } h = \frac{336}{13}.$$

Используя равенство $r = \dfrac{10h}{7\sqrt{h^2+4^2}}$, находим $r_1 = 6/7$ или $r_2 = 24/17$.

Искомое произведение равно $r_1\cdot r_2 = \dfrac{144}{119} \approx 1,21$.

Заключительный этап

1. 1200.

Пусть искомое расстояние равно S шагов, тогда количество прыжков в 2 и 3 шага равно $\dfrac{3S}{4\cdot 2}$ и $\dfrac{S}{4\cdot 3}$ соответственно. Получаем соотношение $\dfrac{3S}{8}-\dfrac{S}{12} = 350 \Leftrightarrow \dfrac{7S}{24} = 350 \Leftrightarrow S = 1200$ (шагов).

2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Положим $t = \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2 = 3t^2 + \frac{\pi^2}{36} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2t^2 + \pi t - \frac{2\pi^2}{9} = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $t_2 = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. В 3 раза.

Обозначим всю работу по окраске забора через 1, производительность Тома, Сида и Гека через x, y и z соответственно, промежутки времени, в которые Том, Сид и Гек работали по одному, через t_1, t_2 и t_3 соответственно. Тогда по условию $(y+z)t_1 = \frac{1}{2}$, $(x+z)t_2 = \frac{5}{4}$, $(x+y)t_3 = \frac{1}{4}$, $xt_1 + yt_2 + zt_3 = 1$. При этом найти надо величину

$$(t_1 + t_2 + t_3) : \frac{1}{x+y+z} = (x+y+z)(t_1+t_2+t_3).$$

Раскрывая скобки, получим

$$xt_1 + (y+z)t_1 + yt_2 + (x+z)t_2 + zt_3 + (x+y)t_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4} = 3.$$

4. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Поскольку $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (0; 0)$, то $\overrightarrow{BB_1} + 2\cdot\overrightarrow{CC_1} = (2; 1)$. Так как $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB_1}$ (здесь O – точка пересечения медиан треугольника), то $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CC_1} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{3}\cdot(2; 1)$. Значит, $\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\cdot(2; 1)$, и $|\overrightarrow{CA}| = \frac{2\sqrt{2^2+1^2}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

5. $x \in \left(\frac{5}{2}; \frac{11}{4}\right] \cup \{3\}$.

При $x \in \left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$, во-первых, модули раскрываются однозначно, во-вторых, входящие в неравенство косинусы – монотонно возрастающие функции, так как их аргументы находятся в промежутке $(\pi; 2\pi)$:

$$\pi < \frac{17}{4} = \frac{5}{2} + \frac{7}{4} < x + \frac{7}{4} < \frac{7}{2} + \frac{7}{4} = \frac{21}{4} < 2\pi,$$

$$\pi < 4 = 5 - 1 < 2x - 1 < 7 - 1 = 6 < 2\pi.$$

Кроме того, $\log_{\frac{\pi}{6}} t$ монотонно убывает. Поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$(2x-5-7+2x)(-1)\left(x+\frac{7}{4}-2x+1\right)(4-x-2x+5)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(x-\frac{11}{4}\right)\leq 0.$$

6. 99.

Так как это арифметическая прогрессия, то получается уравнение

$$\sqrt{4-\sqrt{11}}^{\,x^2-9x+11}+\sqrt{4+\sqrt{11}}^{\,x^2-9x+11}=2\cdot 2^{x^2-9x+11}.$$

Это уравнение, если обозначить $f(t)=t^{\frac{x^2-9x+11}{2}}$, равносильно соотношению $\dfrac{f(t_1)+f(t_2)}{2}=f\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right)$. Но функция t^{α} при $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 1$ либо строго выпукла вверх, либо строго выпукла вниз (любая ненулевая хорда лежит либо выше, либо ниже дуги графика, которую она стягивает). Поэтому либо $x^2-9x+11=0$, либо $x^2-9x+11=2$. Оба уравнения очевидно имеют корни. По теореме Виета произведение корней равно $11\cdot 9=99$.

7. 72.

Если провести через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную противоположному ребру, то получится три пары параллельных плоскостей. При их пересечении образуется параллелепипед, называемый описанным (или сопровождающим пирамиду). При этом из условия задачи следует, что в каждой грани диагонали равны между собой, т.е. грани – прямоугольники. Значит, этот параллелепипед прямоугольный (рис. 27).

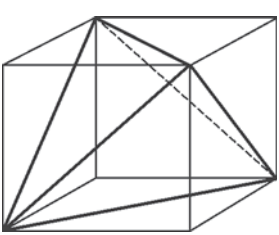


Рис. 27

Пусть ребра сопровождающего параллелепипеда равны a, b и c. Объем пирамиды составляет $1/3$ от объема этого параллелепипеда, т.е. $V=\dfrac{abc}{3}$.

Так как $x^2+y^2\geq 2xy$ и $\dfrac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}$ (при этом равенство в каждом из этих неравенств достигается тогда и только тогда, когда $x = y$ и $x = y = z$ соответственно), то

$$18\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq$$

$$\geq 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}}{3} \geq 3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3V}.$$

Отсюда $V \leq \frac{6^3}{3} = 72$, причем это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a = b = c$.

8. 672.

Выберем все нечетные числа от 673 до 2015, их количество равно $\frac{2015 - 671}{2} = 672$. Ни одно из этих чисел не делится на другое, так как при делении должно было бы получиться нечетное число, которое не меньше 3, но $673 \cdot 3 > 2015$.

Покажем, что больше 672 чисел, удовлетворяющих условию задачи, выбрать нельзя. В самом деле, разобьем все нечетные числа от 17 до 2015 на 672 кучки, порожденные выбранными выше числами и включающие порождающее число и все его делители, при делении на которые получаются степени тройки: {2015}, {2013, 671}, {2011}, {2009}, {2007, 669, 223}, ..., {675, 225, 75, 25}, {673}. Если выбрать больше, чем 672 числа, то по принципу Дирихле хотя бы два из них окажутся в одной кучке, а значит, одно из них будет делиться на другое.

Заметим, что выбранный вначале набор из 672 чисел не единственный. Например, если в нем заменить число $2013 = 671 \cdot 3$ на 671, то новый набор тоже будет удовлетворять условию задачи.

МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Некоторые задачи отборочного этапа

1. 12,5.

Велосипедист затратит время $\frac{2S}{V}$, а турист в лодке – $\frac{S}{W - U} + \frac{S}{W + U}$, где через W обозначена искомая скорость моторной лодки. Отсюда получаем квадратное уравнение $W^2 - VW - U^2 = 0$, положительный корень которого определяется формулой $W = \frac{V + \sqrt{V^2 + (2U)^2}}{2}$. Подставив числовые данные, получаем ответ: 12,5 (м/с).

2. 25.

После перевода в единицы СИ получается $\frac{2}{S-1{,}5\cdot 10^{-3}}-\frac{2}{S}=1200 \Leftrightarrow 4\cdot 10^5 S^2-600S-1=0$. После замены $x=200S$ уравнение примет вид $10x^2-3x-1=0$. Отсюда $x=\frac{1}{2}$, $S=25$ (см^2).

3. 43.

Количество воды в бочке после k-го часа зависит от того, четное или нечетное k, и равно $V_{2n-1}=15+4{,}5\cdot(n-1)$, $V_{2n}=4{,}5\cdot n$.

Так как первое переполнение может возникнуть только на нечетном часе, то условие $V > 105$ дает

$$15+4{,}5\cdot(n-1)>105 \Leftrightarrow (n-1)>\frac{90}{4{,}5}\text{, т.е. } n>21.$$

Значит, $n = 22$, $k = 2n - 1 = 43$.

4. 0,38.

Обозначим через ρ_0, ρ_1, ρ_2 плотности бруска, первой и второй жидкостей соответственно, а через V – объем бруска. Тогда условия плавания бруска в первой и второй жидкости будут следующими: $V\rho_0=\frac{3}{4}V\rho_1=\frac{1}{2}V\rho_2$.

При смешивании равных масс двух жидкостей плотность смеси ρ равна среднему гармоническому плотностей компонент смеси: $\rho=\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$.

Тогда из условия плавания бруска в смеси $V\rho_0=V'\rho$, выражая плотности из предыдущей формулы, для объема погруженной части бруска V' получим $V'=\frac{5}{8}V$. Поэтому $\frac{V-V'}{V}=\frac{3}{8}\approx 0{,}38$.

5. 135.

Если расстояние между Лисичанском и Оленевкой равно x, между Оленевкой и Медведьевкой – y, между Лисичанском и Медведьевкой – z, то имеем заданное в условии уравнение и неравенство (неравенство треугольника): $x^2+4y^2=z\cdot 12-45$, $x+y\geq z$.

Из первого уравнения следует $z=\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}+\frac{15}{4}$, поэтому $x+y\geq\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}+\frac{15}{4}$, или $12x+12y\geq x^2+4y^2+45$. Последнее соотношение равносильно $(x-6)^2+(2y-3)^2\le 0$, т.е. $x = 6$, $y=\frac{3}{2}$. Следовательно, $z=\frac{15}{2}$. Поэтому все поселки лежат на прямолинейной дороге, по одну сторону от которой находятся поля, а по другую – лес. Площади полей: $x^2=36$ кв. км, $4y^2=9$ кв. км, площадь леса: $z\cdot 12=90$ кв. км. Искомая суммарная площадь: 135 кв. км.

Заключительный этап

1. Высота башни больше.

Высота башни равна

$$H=100\cdot\operatorname{tg}46^\circ=100\cdot\operatorname{tg}(45^\circ+1^\circ)=$$

$$=100\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}1^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}1^\circ}=100\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}}.$$

Так как при $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\operatorname{tg}x>x$ и так как $\pi>3$, то

$$H>100\frac{1+\frac{\pi}{180}}{1-\frac{\pi}{180}}=100\frac{180+\pi}{180-\pi}>100\frac{180+3}{180-3}=\frac{6100}{59}>103{,}3.$$

Можно было дать и более точную оценку: так как $\pi>3{,}14$, то

$$H>100\frac{180+\pi}{180-\pi}>100\frac{180+3{,}14}{180-3{,}14}>103{,}55.$$

Приведенное решение строгое и не использует приближенных вычислений. Возможен также примерный подсчет высоты башни: так как при малых углах $\operatorname{tg}x\approx x$, то

$$H=100\cdot\operatorname{tg}46^\circ\approx 100\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}}\approx 100\frac{1+\frac{\pi}{180}}{1-\frac{\pi}{180}}=$$

$$=100\frac{180+\pi}{180-\pi}\approx 100\frac{180+3{,}14}{180-3{,}14}\approx 103{,}55 \text{ м}.$$

Это довольно точный результат (заметим, что вычисление по таблицам дает $100\cdot\operatorname{tg}46^\circ\approx 103{,}5530$), но такое решение нельзя признать безупречным, если не делается оценка точности вычислений.

2. 450 кв. км.

Условие задачи означает, что дан четырехугольник $ABCD$, у которого углы B и D – прямые (опираются на диаметр), $AB = BC$ (обе дороги грунтовые, и велосипедист проезжает их за одинаковое время), $BD = 15\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot 2\ \text{ч} = 30\ \text{км}$. Опустим из точки B два перпендикуляра: BM – на прямую AD и BN – на прямую CD. Тогда $\Delta BMA = \Delta BNC$ (оба прямоугольные, гипотенузы равны, $\angle BCN = \angle BAM$ – каждый из этих углов в сумме с $\angle BAD$ дает 180°). Поэтому четырехугольник $MBND$ равновелик четырехугольнику $ABCD$. При этом $MBND$ – квадрат, у которого известна диагональ BD. Поэтому его площадь равна $\frac{30^2}{2} = 450$ (кв. км).

3. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ м.

Пусть S – расстояние HC, H – расстояние AH, x – искомое расстояние. Тогда время падения $t_{AH} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, время спуска из точки A в точку B равно $t_{AB} = \frac{t_{AH}}{\sin\angle ABH}$, при этом $\sin\angle ABH = \frac{H}{\sqrt{H^2+x^2}}$, а скорость в точке B равна $V = \sqrt{2gH}$. Поэтому время движения саней равняется

$$t_{ABC} = t_{AB} + t_{BC} = \frac{2\sqrt{H^2+x^2} + S - x}{\sqrt{2gH}}.$$

Требуется найти минимум функции $f(x) = 2\sqrt{H^2+x^2} - x$. Производная этой функции $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{H^2+x^2}} - 1$ равна 0, поэтому $2x = \sqrt{H^2+x^2} \Rightarrow 4x^2 = H^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{H}{\sqrt{3}}$. Несложно показать, что это будет точка минимума. При $H = 5$ получаем $x = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

4. 664 Дж.

Процесс ab – изобара, процесс bc – изохора, процесс ca описывается уравнением $T = p(d - kp)$, где d, k – некоторые константы. Несложно видеть, что в таком процессе объем оказывается линейной функцией давления, т.е. в осях $p - V$ данный циклический процесс изображается прямоугольным треугольником с катетами ab и bc.

Пусть p_0, V_0 – параметры газа в точке b. Тогда параметры газа в точке a: p_0, $2V_0$, в точке c: $2p_0$, V_0. Отсюда находим

$$\frac{1}{2}p_0V_0 = \frac{1}{4}RT_0 = 664 \quad (\text{Дж}).$$

5. 42 мин.

Пусть точка O – центр Земли. Оценим время движения от A до B. Для этого рассмотрим треугольник AOB. Можно считать, что угол $\alpha = 90° - \angle ABO$ очень мал, так что $\sin\alpha \approx \alpha$. Так как точка в туннеле AB притягивается к центру силой тяготения F, то в проекции на направление движения получим силу $F\sin\alpha \approx F\alpha$. Под действием этой силы тело по каналу будет двигаться с ускорением $a \approx R\ddot{\alpha}$. Тогда модель движения точки от A до B можно рассматривать как модель математического маятника, для которого период не зависит от расстояния от B до A. Это значит, что время движения будет одинаковым.

6. $T = \dfrac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2 + \dfrac{4SL}{\pi}} - a\right).$

За каждый оборот приемной катушки на нее наматывается 1 виток пленки, значит, радиус увеличивается на S. Один оборот катушка совершает за время $t_0 = \dfrac{2\pi}{\omega}$. За время t катушка совершит $n = \dfrac{t}{t_0}$ оборотов. Тогда за время t радиус увеличится на величину $\Delta r = Sn$. Значит, радиус приемной катушки меняется со временем по закону $r(t) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{S\omega}{2\pi}t$. Для скорости v намотки пленки получим следующее соотношение: $v = \omega\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{S\omega}{2\pi}t\right).$

Таким образом, пленка движется равноускоренно, и время T, необходимое для прохождения всей пленки длиной L, будет определяться из уравнения

$$\frac{L}{\omega} = \frac{S\omega}{4\pi}T^2 + \frac{aT}{2}.$$

В данном случае у уравнения один положительный корень, который и есть ответ в задаче:

$$T = \frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2 + \frac{4SL}{\pi}} - a\right).$$

ФИЗИКА

Отборочный этап

7–9 классы

1. На шарик действует сила тяжести mg, архимедова сила $F_A = \frac{1}{2}\rho V g$ и сила натяжения нити T. Поскольку шарик находится в равновесии, то $T = mg - \frac{1}{2}\rho V g$. Сила тяжести Mg, действующая на стержень, приложена к середине стержня. Используя правило моментов, получим условие равновесия стержня: $Mg\left(\frac{L}{2} - l\right) = Tl$. Из записанных равенств находим

$$m = \frac{1}{2}\rho V + M\left(\frac{L}{2l} - 1\right) = 1{,}38 \text{ г}.$$

2. Модуль перемещения автомобиля за первые τ секунд равен $s = a\tau^2/2$. Скорость движения автомобиля (поступательного движения оси колеса) $v_0 = a\tau$. В неподвижной системе отсчета скорость точек на поверхности колеса при качении без проскальзывания может быть найдена по закону сложения скоростей (рис.28). Линейная скорость $v_{отн}$ точек на поверхности колеса относительно движущейся системы отсчета, связанной с автомобилем (например, с осью его колеса), равна по модулю v_0. Скорости капелек, которые отрываются от поверхности колеса в точке A, равны $v_A = 2v_0 \cos\alpha$, где α – угол, который вектор этой скорости составляет с горизонтом. В результате совместного решения уравнений получаем

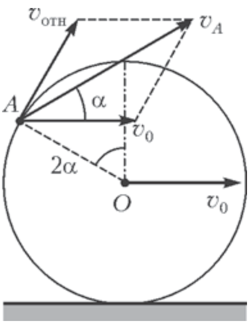


Рис. 28

$$v = \frac{4s}{\tau}\cos\alpha = 34{,}6 \text{ м/с}.$$

3. Силы упругости, возникающие в первой и второй пружинках, отличаются в 2 раза: $F_{упр1} = 2F_{упр2}$. Силы, растягивающие каждый виток этих пружин, тоже отличаются вдвое, значит, каждый виток первой пружины растягивается в 2 раза больше, чем каждый виток второй пружины. Поэтому $\frac{\Delta l_1}{n_1} = 2\frac{\Delta l_2}{n_2}$. Кроме того, $\Delta l_1 = \Delta l_0 - \frac{\Delta l_2}{2}$. Отсюда находим

$$\Delta l_1 = \frac{4n_1}{4n_1 + n_2}\Delta l_0, \ \Delta l_2 = \frac{2n_2}{4n_1 + n_2}\Delta l_0,$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{4n_1 + 2n_2}{4n_1 + n_2}\Delta l_0 = 20{,}0 \text{ см}.$$

4. Пусть в калориметре смешивают воду массой m при температуре t и лед массой M при температуре $-\tau$. После установления теплового равновесия в калориметре окажется только лед при нулевой температуре, если выполнено соотношение $c_в mt + \lambda m = c_л M\tau$, где $c_в$ и $c_л$ – удельные теплоемкости воды и льда соответственно, λ – удельная теплота плавления льда. Поскольку начальное количество льда, при котором это произойдет, составляет $M = km$, из условия задачи следует уравнение $c_в t + \lambda = kc_л\tau$. В калориметре окажется вода при нулевой температуре, если выполнено равенство $c_в mt = \lambda M + c_л M\tau$. Учитывая, что это произойдет при $m = 9M$, получаем еще одно уравнение $\lambda + c_л\tau = 9c_в t$. Решая систему двух уравнений, находим $\frac{c_в t}{c_л\tau} = \frac{k+1}{10}$. Количество льда при тепловом равновесии будет равно исходному его количеству, если $c_в mt = c_л M\tau$, откуда получаем

$$n = \frac{M}{m} = \frac{c_в t}{c_л\tau} = \frac{k+1}{10} = 3{,}6.$$

5. Пусть ток I_5 через амперметр A_2 течет в сторону, показанную на рисунке 29. С учетом обозначений на рисунке имеем $I = I_1 + I_3 = I_2 + I_4$, $I_1 + I_5 = I_2$, $I_3 = I_4 + I_5$. Поскольку амперметр A_2 по условию является идеальным, то $I_1R_1 = I_3R_3$, $I_2R_2 = I_4R_4$. Из записанных равенств находим $I_1 = I\frac{R_3}{R_1 + R_3}$, $I_2 = I\frac{R_4}{R_2 + R_4}$ и $I_5 = I_2 - I_1 = I\frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$. По условию, $\frac{I}{I_5} = n$, откуда следует

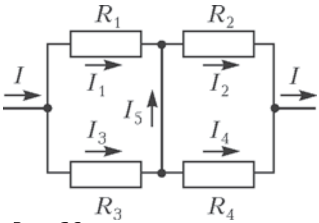


Рис. 29

$$R_1 = R_3\frac{R_2(n+1) + R_4}{R_4(n-1) - R_2} = 8{,}25 \text{ кОм}.$$

Замечание. Если выбрать направление тока I_5 в противоположную сторону, то получим, что $R_1 < 0$, а потому этот случай не имеет физического смысла.

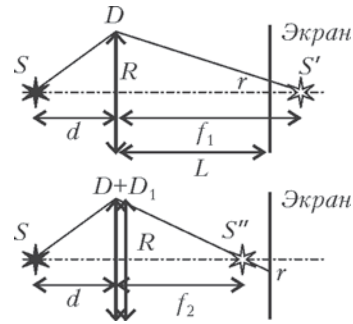


Рис. 30

6. Из условия задачи следует, что экран находится ближе к проектору, чем четкое изображение диапозитива, иначе после установки добавочной линзы размер изображения точки увеличился бы. Ход лучей для первого и второго случаев, указанных в условии, изображен на рисунке 30, где введены следующие обозначения: D – оптическая сила объектива, $D_1 = 1/F_1$ – оптическая сила добавочной линзы, d – расстояние от диапозитива до объектива, f_1 и f_2 – расстояния от объектива до изображения, L – расстояние от объектива до экрана, R – радиус линзы и r – радиус пятна на экране. Из рисунка видно, что $\frac{r}{R} = \frac{f_1 - L}{f_1} = \frac{L - f_2}{f_2}$. Отсюда $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{2}{L}$. Формула тонкой линзы, примененная для обоих случаев, дает $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = D$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{f_2} = D + D_1$. Сложив эти равенства, получаем $\frac{2}{d} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = 2D + D_1$, или, с учетом ранее полученного соотношения, $2\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{L}\right) = 2D + D_1$. Изображение диапозитива на экране будет резким, если выполняется равенство $\frac{1}{d} + \frac{1}{L} = D + D_x$. Сопоставив последние два выражения, находим

$$D_x = \frac{1}{2F_1} = 5 \text{ дптр}.$$

10–11 классы

Первый тур

1. По закону сохранения энергии, $mgH + \frac{mv_0^2}{2} = mgH + \frac{mv_{\text{гор}}^2}{2}$, где m – масса шарика, $v_{\text{гор}}$ – горизонтальная составляющая скорости шарика в верхней точке траектории после удара о пол. Из этой формулы следует, что $v_0 = v_{\text{гор}}$. Таким образом, необходимо найти $v_{\text{гор}}$. Учтем, что после того как шарик соскользнет с наклонной плоскости, горизонтальная составляющая его скорости не изменится. Скорость v в момент отрыва от плоскости найдем, снова применив закон сохранения энергии: $mgH + \frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{2g(H-h) + v_0^2}$. Учитывая, что $v_{\text{гор}} = v_0 \cos\alpha$, получаем уравнение

$$v_0 = \sqrt{2g(H-h) + v_0^2}\cos\alpha,$$

откуда находим

$$v_0 = \sqrt{2g(H-h)}\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 3{,}0\ \text{м/с}.$$

2. По закону сохранения импульса, $Mv = (M+m)u$. Отсюда находим установившуюся скорость доски с бруском, одинаковую для обоих тел: $u = \frac{Mv}{M+m}$. Потеря механической энергии при этом равна работе против силы трения: $\Delta E = \frac{Mv^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2} = \mu mgs_1$. Отсюда находим расстояние s_1, которое брусок проскользил вдоль доски до тех пор, пока не установилась общая скорость: $s_1 = \frac{Mv^2}{2(M+m)\mu g}$. После остановки доски брусок проскользил вдоль доски путь s_2, который также можно найти с помощью закона изменения механической энергии, а именно: $\frac{mu^2}{2} = \mu mgs_2$, откуда $s_2 = \frac{M^2v^2}{2(M+m)^2\mu g}$. Необходимо учесть, что до остановки доски и после ее остановки брусок скользил относительно доски в противоположных направлениях. Поэтому искомое расстояние будет равно

$$s = |s_2 - s_1| = \frac{Mmv^2}{2(M+m)^2\mu g} = 7\ \text{см},$$

причем брусок остановится, не достигнув середины доски.

3. КПД тепловой машины равен $\eta = \frac{A}{A+Q_{\text{х}}}$, где A – работа, совершаемая машиной за цикл, а $Q_{\text{х}}$ – количество теплоты, переданное холодильнику за то же время. Для цикла Карно $\eta = \frac{T_{\text{н}} - T_{\text{х}}}{T_{\text{н}}}$, где $T_{\text{н}}$ – температура нагревателя, $T_{\text{х}}$ – температура холодильника. Так как цикл Карно обратим, то соотношение

$\dfrac{A}{A+Q_х} = \dfrac{T_н - T_х}{T_н}$ выполняется и для холодильника. Учитывая, что $A = P\tau$, $T_н = t_2 + 273 = 299$ К, $T_х = t_1 + 273 = 260$ К, $Q_х = Q$, после алгебраических преобразований получаем

$$P = \frac{Q}{\tau}\left(\frac{t_2 + 273}{t_1 + 273} - 1\right) = 50 \text{ Вт}.$$

4. После окончания зарядки на параллельно соединенных конденсаторах накопятся заряды C_1U и C_2U, значит, через сопротивления протечет суммарный заряд $q = (C_1 + C_2)U$, а через параллельно соединенные сопротивления протекут заряды $q_1 = \dfrac{qR_2}{R_1 + R_2}$ и $q_2 = \dfrac{qR_1}{R_1 + R_2}$ соответственно. Значит, в направлении от точки A к точке B через проводник протечет заряд

$$\Delta q = q_1 - C_1U = C_2U - q_2 = \frac{C_2R_2 - C_1R_1}{R_1 + R_2}U = 100 \text{ мкКл}.$$

5. Построение изображений предмета показано на рисунке 31. Из формулы линзы $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{F_1}$ следует, что увеличение,

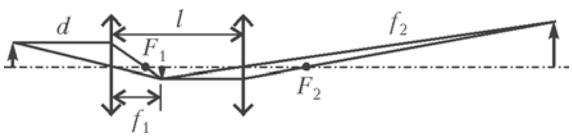


Рис. 31

даваемое первой линзой, равно

$$\Gamma_1 = \frac{f_1}{d} = \frac{F_1}{d - F_1}.$$

Для второй линзы можно записать $\dfrac{1}{l - f_1} + \dfrac{1}{f_2} = \dfrac{1}{F_2}$. Отсюда увеличение, даваемое второй линзой, равно

$$\Gamma_2 = \frac{f_2}{l - f_1} = \frac{F_2}{l - f_1 - F_2} = \frac{F_2}{l - \dfrac{F_1 d}{d - F_1} - F_2}.$$

Тогда увеличение, даваемое системой линз, равно

$$\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2 = \frac{F_1F_2}{l(d - F_1) - d(F_1 + F_2) + F_1F_2} = 1{,}67.$$

1. Обозначим через a модуль ускорения клина. Тогда $s = \frac{at_0^2}{2}$, $v = at_0$. Исключая из этих равенств время t_0, находим $a = \frac{v^2}{2s}$. Проекция относительного ускорения брусочка на вертикальное направление по модулю равна $a_{\text{отн}} \sin\alpha$. Следовательно, $h = \frac{a_{\text{отн}} \sin\alpha \cdot t_0^2}{2}$. Из записанных равенств находим

$$\frac{s}{h} = \frac{a}{a_{\text{отн}} \sin\alpha}, \text{ и } a_{\text{отн}} = \frac{v^2 h}{2s^2 \sin\alpha} = 0{,}60 \text{ м/с}^2 .$$

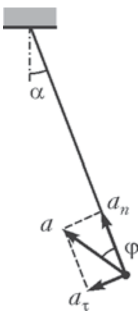


Рис. 32

2. Обозначим через L длину нити маятника. Пусть в момент времени $t = 0$ грузик проходит положение равновесия, а угол α отклонения нити от вертикали положителен (рис.32). Тогда $\alpha(t) = \alpha_0 \sin\omega t$, угловая скорость нити $\Omega(t) = \alpha'(t) = \alpha_0\omega\cos\omega t$, а ее угловое ускорение $\varepsilon(t) = \Omega'(t) = -\alpha_0\omega^2 \sin\omega t$. Здесь $\omega = \frac{2\pi}{T}$ круговая частота колебаний, T – период колебаний. Центростремительное, т.е. нормальное, ускорение грузика равно $a_n(t) = \Omega^2(t)L$, а его тангенциальное ускорение равно $a_\tau(t) = \varepsilon(t)L$. Поэтому $\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{a_\tau(t)}{a_n(t)} = -\frac{\sin\omega t}{\alpha_0 \cos^2\omega t}$. По условию, $\omega t = \frac{\pi}{4}$. Таким образом,

$$|\operatorname{tg}\varphi_0| = \frac{\sin(\pi/4)}{\alpha_0 \cos^2(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_0}, \text{ и } \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\alpha_0} = 88{,}0° .$$

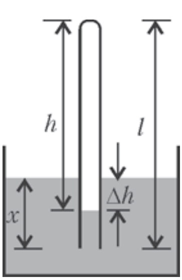


Рис. 33

3. Роса на внутренних стенках трубки выступит в тот момент, когда водяной пар при сжатии достигнет насыщения. При этом находящийся в трубке влажный воздух вплоть до этого момента можно считать идеальным газом. Обозначив через h высоту столба воздуха в погруженной в ртуть трубке (рис.33), а через p – давление воздуха в ней, по закону Бойля–Мариотта имеем $p_0 lS = phS$, где S – площадь сечения трубки. Для достижения насыщения водяного пара объем воздуха в трубке нужно уменьшить в $1/\varphi$ раз, где $\varphi = 0,8$. Таким образом, $h = l\varphi$ и $p = \frac{p_0}{\varphi}$. С другой стороны, $p = p_0 + \rho g \Delta h$, где Δh − разность уровней ртути в сосуде и трубке. Из записанных равенств получаем $\Delta h = \frac{p_0}{\rho g}\frac{1-\varphi}{\varphi}$. Из рисунка 33 видно, что искомая величина $x = l - h + \Delta h$. Следовательно,

$$x = (1-\varphi)\left(l + \frac{p_0}{\rho g \varphi}\right) = 30,4 \text{ см}.$$

4. Поскольку сопротивление катушки пренебрежимо мало, при замкнутом ключе ток через резистор не течет. Поэтому ток в цепи катушки и источника равен $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{r}$. После размыкания ключа напряжение на катушке, по закону электромагнитной индукции, $U_L = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. По закону Ома, напряжение на резисторе $U_R = IR$. Поэтому в каждый момент времени справедливо равенство $L\frac{\Delta I}{\Delta t} = -IR$. Учитывая, что $I\Delta t = \Delta q$, имеем $L\Delta I = -R\Delta q$. Поскольку коэффициенты L и R постоянны, такое же соотношение справедливо и для конечных приращений тока и заряда. По истечении достаточно большого времени ток через катушку прекратится, поэтому $\Delta I = -I_0$, $\Delta q = q$. Окончательно находим

$$L = \frac{Rq}{I_0} = \frac{rRq}{\mathscr{E}} = 100 \text{ мГн}.$$

5. При фиксированном расстоянии между лампой и стеной, превышающем $4F$, где F − фокусное расстояние линзы, существуют два положения линзы, при которых она дает на экране изображение спирали. Это следует из того, что формула тонкой линзы $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, связывающая расстояние от предмета до линзы d, расстояние от линзы до изображения f и фокусное расстояние линзы F, симметрична относительно d и f: при замене $d_1 = f$, $f_1 = d$ эта формула остается

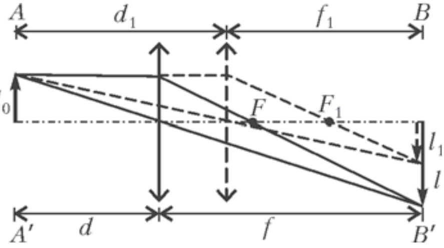


Рис. 34

справедливой. Построение изображения спирали лампы показано на рисунке 34, где упомянутые положения линзы изображены сплошной и штриховой линиями, а через AA' и BB' обозначены плоскости объекта и изображения соответственно. Видно, что когда линза занимает ближнее к лампе положение, она дает увеличенное изображение спирали (сплошные линии), а если дальнее от лампы, то уменьшенное изображение (штриховые линии). Имеем $\frac{l}{l_0}=\frac{f}{d}$, $\frac{l_1}{l_0}=\frac{f_1}{d_1}=\frac{d}{f}$. Из этих соотношений следует, что $n=\frac{l}{l_1}=\frac{f^2}{d^2}$. Из уравнений $f-d=\Delta l$ и $f=d\sqrt{n}$ находим $d=\frac{\Delta l}{\sqrt{n}-1}$, $f=\frac{\Delta l\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$. Поскольку $L=d+f$, то

$$L=\frac{\Delta l\left(\sqrt{n}+1\right)}{\sqrt{n}-1}=63\text{ см}.$$

Заключительный этап

7—9 классы

1. В системе отсчета, связанной с движущейся колонной, относительная скорость посыльного при его движении навстречу колонне равна $u+v$, а при попутном его движении равна $u-v$. Поэтому полное время движения посыльного к хвосту колонны и обратно равно $t=\frac{L}{u+v}+\frac{L}{u-v}=\frac{2Lu}{u^2-v^2}$. Выражая из этого равенства скорость v, находим

$$v=\sqrt{u^2-\frac{2Lu}{t}}\approx 2\text{ м/с}.$$

2. Пусть F – модуль результирующей всех сил сопротивления движению автомобиля. При перемещении автомобиля на расстояние l работа, совершенная двигателем, равна произведению количества теплоты, выделившейся при сгорании топлива, на коэффициент полезного действия двигателя: $A=\mu l\rho q\frac{\eta}{100\%}$. На горизонтальном участке шоссе длиной l эта работа равна по величине работе сил сопротивления $A_c=Fl$, т.е. $A_1=\mu_1\rho q\frac{\eta}{100\%}l=Fl$. На наклонном участке шоссе с той же длиной работа двигателя равна сумме работы сил сопротивления $A_c=Fl$ и приращения потенциальной энергии автомобиля в поле силы тяготения $\Delta E_{\text{п}} = 0{,}05Mgl$, т.е. $A_2 = \mu_2 \rho q \dfrac{\eta}{100\%} l = Fl + 0{,}05Mgl$. Объединяя эти равенства, находим

$$\mu_2 = \mu_1 + \frac{0{,}05Mg \cdot 100\%}{\rho q \eta} \approx 12{,}6 \text{ л/100 км}.$$

Замечание. При подстановке числовых данных из условия задачи получаем, что последнее слагаемое в ответе имеет размерность л/м. Чтобы преобразовать его к требуемой размерности (л/100 км), нужно умножить его на 10^5.

3. Исходя из условия задачи легко установить, что справедливо равенство $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_4}$, откуда следует, что напряжение на резисторе R_5 равно нулю. (Покажите это самостоятельно.) Учитывая, что резистор R_5 можно мысленно удалить, находим сопротивление между клеммами A и B: $R_0 = R + \dfrac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)} = 3R$. По закону Ома сила тока, текущего через резистор сопротивлением R, равна $I = \dfrac{U}{R_0} = \dfrac{U}{3R}$. Согласно закону Джоуля–Ленца,

$$Q = RI^2\tau = \frac{U^2}{9R}\tau \approx 26{,}7 \text{ Дж}.$$

4. На рисунке 35 M – муха, M' – ее изображение в зеркале. Изображение неподвижной точки в зеркале, удаляющемся от нее скоростью u, движется со скоростью $2u$. По закону сложения скоростей, $V = \vec{v} + 2\vec{u}$, и

$$V = \sqrt{v^2 + (2u)^2} = 5 \text{ см/с}.$$

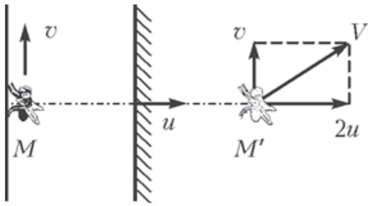


Рис. 35

10–11 классы

1. Разность давлений в точках C и B, находящихся на одной вертикали на расстоянии $2l$ друг от друга, равна $p_C - p_B = 2\rho gl$. Посередине между ними, т.е. в точке H, давление равно p_H, причем $p_C - p_H = \rho gl$. Точки A и H лежат на одной горизонтали, поэтому $p_H - p_A = \rho ah$, где a – модуль ускорения тележки. Решая полученную систему уравнений, находим

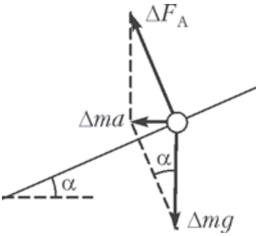


Рис. 36

$\frac{a}{g}=\frac{l}{h}\frac{p_B+p_C-2p_A}{p_C-p_B}$. Рассмотрим малый элемент жидкости массой Δm, находящийся вблизи ее свободной поверхности. Этот элемент движется с ускорением $\vec{a}$ под действием силы тяжести $\Delta m\vec{g}$ и архимедовой силы $\Delta\vec{F}_A$, которая перпендикулярна поверхности жидкости (рис.36). Из рисунка видно, что искомый угол определяется соотношением $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{g}$. Поэтому

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{l}{h}\frac{p_B+p_C-2p_A}{p_C-p_B}\right)=\operatorname{arctg}0{,}58\approx 30^\circ .$$

2. При изобарном расширении на участке *1–2* гелий совершает положительную работу и его температура возрастает. На двух остальных участках газ совершает отрицательную работу и его температура падает. Поэтому гелий получает от нагревателя количество теплоты $Q_н=\frac{5}{2}\nu R(T_2-T_1)=\frac{5}{2}(p_2V_2-p_2V_1)$, где ν – число молей гелия, R – универсальная газовая постоянная, T_1 и T_2 – абсолютные температуры, а V_1 и V_2 – объемы гелия в точках *1* и *2.* Работа гелия за цикл численно равна площади треугольника *123*, т.е. $A=\frac{1}{2}(V_2-V_1)(p_2-p_1)$. Учитывая это, находим КПД цикла:

$$\eta=\frac{A}{Q_н}=\frac{1}{5}\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)=\frac{n-1}{5n}\cdot 100\%=10\% .$$

3. В исходном состоянии потенциалы всех сфер равны нулю, так как на них нет электрических зарядов. После сообщения второй сфере заряда q должно произойти перераспределение зарядов между первой и третьей сферами. Пусть заряд первой сферы установится равным q_1. Тогда на третью сферу перетечет заряд $-q_1$. Пренебрегая зарядом на тонком проводе и влиянием малого отверстия во второй сфере, можно утверждать, что модуль напряженности электростатического поля в пространстве между первой и второй сферами равен $E_{1-2}(r)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, в пространстве между второй и третьей сферами – $E_{2-3}(r)=\frac{q_1+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Следовательно, разность потенциалов между первой и второй сферами будет равна $\varphi_{1-2}(r_1)-\varphi_{1-2}(r_2)=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$, а между второй и третьей должна стать равной $\varphi_{2-3}(r_2)-\varphi_{2-3}(r_3)=$ $=\dfrac{q_1+q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_3}\right)$. Ток в проводнике, соединяющем первую и третью сферы, прекратится, когда разность потенциалов между ними станет равной нулю, т.е.

$$\varphi_{1-2}(r_1)-\varphi_{1-2}(r_2)+\varphi_{2-3}(r_2)-\varphi_{2-3}(r_3)=0\,.$$

Из этого равенства находим

$$q_1=-q\frac{r_1(r_3-r_2)}{r_2(r_3-r_1)}=-\frac{q}{3}=-2\text{ нКл}\,.$$

4. На рисунке 37 показаны два возможных случая расположения свечи высотой h относительно линзы $Л$. В случае а)

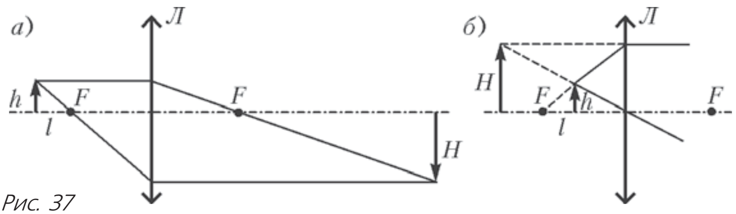


Рис. 37

изображение свечи является действительным, а в случае б) – мнимым. Однако в обоих случаях отношение размера свечи h к размеру ее изображения H равно $\dfrac{l}{F}$. Поэтому в обоих случаях при уменьшении размера свечи на Δh размер ее изображения уменьшится на

$$\Delta H=F\frac{\Delta h}{l}=5\text{ см}\,.$$

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

МАТЕМАТИКА

Отборочный этап

Блиц-тур

1. 526.

Обозначив $2^{1+\sqrt{x-1}}=t$, получим $\dfrac{2t-24}{t-8}\ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{t-16}{t-8}\ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t\in(-\infty;8)\cup[16;+\infty)$. Отсюда либо $2^{1+\sqrt{x-1}}<2^3$, $\sqrt{x-1}<2$,

$x \in [1;5)$, либо $2^{1+\sqrt{x-1}} \geq 2^4$, $\sqrt{x-1} \geq 3$, $x \in [10;+\infty)$. Таким образом, решение неравенства: $x \in [1;5) \cup [10;+\infty)$. Искомая сумма

$$1+2+3+4+(10+11+12+\ldots+33)=10+\frac{10+33}{2}\cdot 24=526.$$

2. 31,42.

Исходное уравнение равносильно уравнению $\sin^4 x + 5(x-2\pi)^2(\cos x+1)=0$, левая часть которого неотрицательна. Поэтому $\sin x = 0$ и $(x-2\pi)^2(\cos x+1)=0$. Значит, решение уравнения: $x=2\pi$ и $x=\pi+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. На отрезок $[-\pi; 6\pi]$ попадают значения $-\pi$, π, 2π, 3π, 5π, сумма которых равна $10\pi \approx 31{,}4159\ldots$ В ответ записываем 31,42.

3. 38.

Обозначив $AB = c$, $BC = a$, получим $\left(c-\frac{c}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2=60^2$, $\left(\frac{c}{4}\right)^2+\left(a-\frac{a}{3}\right)^2=70^2$. Решаем систему и находим $BM^2=\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{4}\right)^2=\frac{100^2}{7}$. Поэтому $BM=\frac{100}{\sqrt{7}}\approx 37{,}796\ldots$ В ответ записываем ближайшее целое.

4. $-1{,}41$.

Так как $2y=a-x$, то из первого уравнения получим $x^2+(a-x)^2=1 \Leftrightarrow 2x^2-2ax+a^2-1=0$. Это уравнение имеет единственное решение при $\frac{D}{4}=2-a^2=0$. Значит, $a=\pm\sqrt{2}$, наименьшее значение равно $-\sqrt{2}\approx -1{,}4142\ldots$

5. 4.

Если в первой бригаде n рабочих, площадь первого участка равна S, а производительность одного рабочего равна x, то условие задачи запишется в виде $\frac{S}{nx}<\frac{3S}{(n+6)x}$, откуда следует $\frac{1}{n}<\frac{3}{n+6} \Rightarrow n>3$. Таким образом, наименьшим возможным n является 4.

Творческое задание

1. 66.

Указание. Докажите, что время, за которое спортсмен пробежит первый и третий круги, в два раза больше времени, за которое он пробежит второй круг.

2. 1008.

Поскольку все нечетные сундуки после первого прохода были открытыми, гном Закрывай к ним не прикасается – они и останутся открытыми. А четные сундуки гном Закрывай, интересующийся только сундукам с четными номерами, все закроет, так как он их посетит последним. Таким образом, ответ на вопрос задачи – количество четных чисел в наборе 1, 2, 3, … …, 2016.

3. 0,77.

Обозначим $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle CBD = \beta$ (рис.38). Тогда $\angle AEC = 2\alpha$. Теперь, используя то, что угол $\angle ABC$ – центральный для вписанного угла $\angle ADC$, получим, что $\angle ADC = \alpha$. Следовательно, $\angle DCE = \alpha$, и отсюда треугольники AOB и CED подобны.

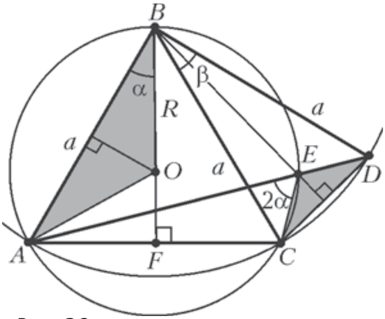


Рис. 38

Перемножая равенства $\sin\beta/2 = CD/(2\alpha)$ (из треугольника CBD) и $\cos\alpha = a/(2R)$ (из треугольника AOB), получим $CD/(4R) = \cos\alpha\sin\beta/2$. При данных в условии числовых значениях найдем, что искомое отношение равно $\dfrac{12}{7\sqrt{5}} = 0{,}76665\ldots \approx 0{,}77$.

4. 13.

Учтем, что $2016 = 14\cdot 144$. Докажем, что решения уравнения имеют вид $x = a^2\cdot 14$, $y = b^2\cdot 14$, где a, b – целые неотрицательные числа. Действительно, предположим, что, например, y нельзя представить таким образом. Тогда число $\sqrt{14y}$ иррационально, и, следовательно,

$$\sqrt{x} = 12\sqrt{14} - \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 2016 + y - 24\sqrt{14y},$$

т.е. x иррационально. Таким образом, исходное уравнение равносильно соотношению $a + b = 12$. При различных целых $a \in [0;12]$ получается 13 решений.

5. 6335,75.

Положив $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, используя формулы $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, получим уравнение

$$t^4 - t^3 - 3t^2 + 5t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left(t^2-5\right)\left(t^2-t+2\right) = 0.$$

Так как уравнение $t^2 - t + 2 = 0$ решений не имеет, то $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{5}$. Значит, $x = \pm 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\right) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Сумма всех корней на отрезке $[2016\pi; 2017\pi]$ равна

$$2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{5}\right) + 2016\pi \approx 6335{,}75.$$

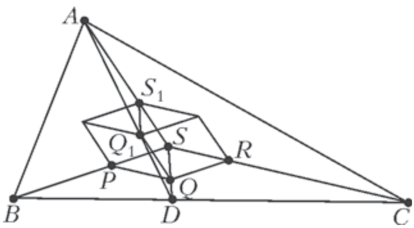


Рис. 39

6. 9,84.

Положим $AS_1 = x$. Точку пересечения продолжения отрезка AQ_1 с ребром BC обозначим через D (рис.39). Из теоремы косинусов найдем диагональ в ромбе при угле величины φ: $S_1Q_1 = 2a\cos(\varphi/2)$. Поскольку SD – биссектриса угла $\angle BSC$, то $SD = 2bc\cos(\varphi/2)/(b+c)$. Далее из подобия вытекает

$$\frac{x+a}{x} = \frac{SD}{S_1Q_1} = \frac{2bc\cos(\varphi/2)}{2a(b+c)\cos(\varphi/2)} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{bc}{a(c+b)} - 1.$$

Отсюда находим $SA = x + a = \dfrac{abc}{bc - ac - ab}$. При данных a, b и c получаем ответ: $SA = 9{,}8378\ldots \approx 9{,}84$.

7. 509542.

Положим $g(m) = m + [\cos m]$. Тогда по условию задачи полным квадратом должно быть число $g^2(m) - k$. Иными словами, должно существовать натуральное число n, для которого

$$n^2 = g^2(m) - k \Leftrightarrow k = \left(g(m) - n\right)\left(g(m) + n\right).$$

Докажем, что последовательность $g(m)$ не убывает. Действительно, $g(m+1) - g(m) = 1 + \left[\cos(m+1)\right] - [\cos m] \geq 0$, поскольку $[\cos m]$ может принимать только значения 0 или −1 (так как m натуральное, в частности $m \neq 0$, то значения 1 это выражение не принимает).

При фиксированном m функция $g^2(m) - n^2$ убывает по n. Если $n \geq g(m)$, то k – неположительное число. Выясним, для каких натуральных m число $n = g(m) - 1$ также натуральное число, т.е. $g(m) \geq 2$. Так как $g(1) = g(2) = 1$, $g(m) \geq 2$, то $m \geq 3$.

Если $n = g(m) - 1$, то $k = 2g(m) - 1$ и, в силу монотонности, это значение n соответствует минимальному значению k. Остается, тем самым, выяснить, при каких m выполнено неравенство

$$1 \le 2g(m) - 1 \le 2015 \Leftrightarrow 1 \le g(m) \le 1008.$$

Правое неравенство выполнено очевидным образом при всех $m \le 1008$. При $m = 1009$: $g(1009) = 1008$. Если же $m \ge 1010$, то $g(m) \ge 1009$.

Выясним, удовлетворяют ли значения $m = 1$ и $m = 2$ условию задачи. При этих m функция $g(m) = 1 - k$. Но уравнение $1 - k = n^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Таким образом, замечательными являются все целые числа от 3 до 1009 включительно. Их сумма: $\dfrac{3 + 1009}{2} \cdot 1007 = 509542$.

Заключительный этап

Вариант 1

1. Первое число больше.

Функция $f(x) = \sin x + \cos x$ убывает на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (монотонность можно обосновать, например, с помощью равенства $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ или при помощи производной). Значит, $\sin 1 + \cos 1 > \sin\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Остается убедиться в справедливости оценки:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} > \frac{49}{36} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3} > \frac{49}{18} \Leftrightarrow \sqrt{3} > \frac{31}{18} \Leftrightarrow 3 > \frac{961}{324}.$$

2. 6 минут.

Обозначим через n время в минутах, за которое проходит круг более медленный мальчик. Тогда $n > 5$, $n \in \mathbb{N}$. Скорость, с которой более быстрый мальчик догоняет медленного, равна $\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-5}{5n}$ (круг/мин), поэтому время между встречами составляет $\dfrac{5n}{n-5} = \dfrac{5(n-5)+25}{n-5} = 5 + \dfrac{25}{n-5}$ (мин), а поскольку это целое число, то $(n-5)$ делит 25. Натуральные делители 25 – числа 1 (тогда $n = 6$), 5 (тогда $n = 10$) и 25 (тогда $n = 30$). Эти значения соответствуют времени между встречами 30 минут, 10 минут и 6 минут. Поскольку время между встречами не менее 12 минут, заданному условию удовлетворяет только $n = 6$.

3. $2\sqrt{\frac{205}{13}}$.

Так как величина $\sqrt{(x+6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}$ равна сумме расстояний от точки (x,y) до точек с координатами $(-6;0)$ и $(0;4)$, а геометрическое место решений уравнения $2|x|+3|y|=$ $=6$ на плоскости есть ромб с вершинами $(3;0)$, $(0;-2)$, $(-3;0)$ и $(0;2)$, то задача равносильна поиску минимума суммы расстояний от точки, лежащей на указанном ромбе, до точек с координатами $(-6;0)$ и $(0;4)$ (рис.40).

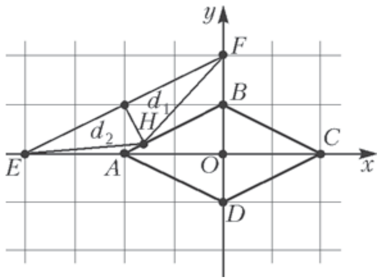


Рис. 40

Докажем, что минимум этой суммы достигается в точке, лежащей на стороне ромба и равноудаленной от точек $(-6;0)$ и $(0;4)$. Пусть точка G лежит на прямой l, параллельной EF и удаленной от прямой EF на расстояние h (рис.41). Пусть также точка H на прямой l такова, что $EH = HF$, а точка F' симметрична точке F относительно прямой l. Тогда получим $EG+FG \geq EH+$ $+HF' = EH+HF$, причем неравенство обращается в равенство лишь при совпадении точек G и H.

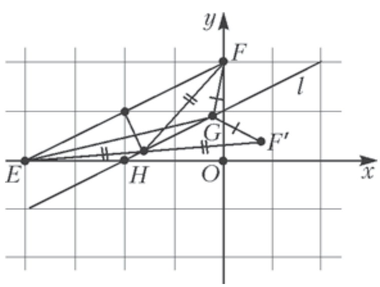


Рис. 41

В нашем случае сторона ромба AB параллельна EF, а точка H прямой AB, для которой $EH = FH$, лежит на стороне ромба. Сумма расстояний от любой другой точки ромба до точек E и F превосходит $EH + FH$. Остается найти EF и расстояние между прямыми EF и AB. Применяя теорему Пифагора, получим $EF = 2\sqrt{13}$. Расстояние h между прямыми равно расстоянию от начала координат до прямой AB (например, это следует из подобия прямоугольных треугольников), поэтому $h \cdot AB = AO \cdot BO \Rightarrow h = \frac{6}{\sqrt{13}}$. Таким образом,

$$EH + HF = 2\sqrt{\frac{36}{13}+13} = 2\sqrt{\frac{205}{13}} .$$

4. $x \in [3;4)$.

Уравнение имеет смысл при $[\log_3 x] > 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. При всех таких x справедливо неравенство $\log_3 [x] \geq [\log_3 x]$, так как для этих значений x существует такое натуральное число k, что $x \in \left[3^k; 3^{k+1}\right)$, а тогда $[x] \in \left[3^k; 3^{k+1}\right)$, поэтому $\log_3 [x] \geq k = [\log_3 x]$. Следовательно,

$$\left[\log_2(\log_3 x)\right]^2 - 11\log_2([\log_3 x]) + 18\log_2\left(\log_3([x])\right) \geq$$

$$\geq \left[\log_2(\log_3 x)\right]^2 + 7\log_2([\log_3 x]) \geq 7\log_2([\log_3 x]) \geq 0.$$

При $x \geq 9$ получим $\left[\log_2(\log_3 x)\right] \geq 1 > 0$, поэтому здесь решений нет. На полуинтервале $[4;9)$ имеем $\log_2([\log_3 x]) = 0 < \log_2\left(\log_3([x])\right)$, поэтому на этом промежутке решений также нет. Наконец, любое число из полуинтервала $[3;4)$ является решением.

5. 27.

Опустим перпендикуляры DD_1, DD_2, DD_3 из точки D на плоскости SBC, SAC и SAB соответственно (рис.42). Обозначим $DD_1 = x$, $DD_2 = y$, $DD_3 = z$. По условию, $y^2 + z^2 = 5$, $x^2 + z^2 = 13$, $x^2 + y^2 = 10$. Отсюда $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$.

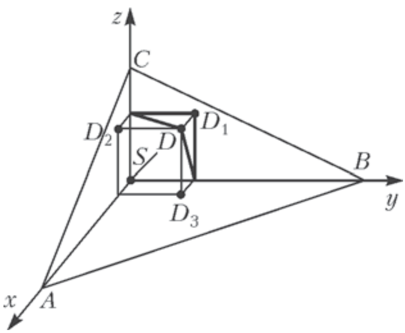


Рис. 42

Обозначим длины ребер SA, SB и SC через a, b и c соответственно. Так как точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, то выполняется соотношение $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1$.

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим получаем

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{3}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{2}{c}} = \sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right)^3 \geq \frac{6 \cdot 27}{abc} \Leftrightarrow abc \geq 6 \cdot 27,$$

причем равенство имеет место при $\frac{3}{a} = \frac{1}{b} = \frac{2}{c} = \frac{1}{3}$. Так как объем пирамиды $V = \dfrac{abc}{6}$, то $V \geq 27$. Равенство имеет место при $a = 9$, $b = 3$, $c = 6$.

Избранные задачи других вариантов

1. 10.

Общее число учеников школы должно делиться на 7 и на 4, а значит, на 28. Так как по условию это число не более 40, то всего было 28 спортсменов. Призерами стали $\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)\cdot 28 = 18$ человек. Значит, остались без медалей 10.

2. 12.

Если черных кусочков x, то белых $32 - x$. Так как каждый черный кусочек (пятиугольный) граничит только с белыми, то границ черных и белых кусочков будет $5 \cdot x$. С другой стороны, таких границ $3 \cdot (32 - x)$. Из уравнения $5x = 3(32 - x)$ получаем $8x = 3 \cdot 32$, $x = 12$.

3. 4.

Пусть N – натуральное число из условия задачи. Из условия вытекает, что количество четверок в числе N равно $2m$, а количество пятерок равно $2m + 17$. Так как сумма цифр числа N равна $4 \cdot 2m + 5(2m + 17) = 18m + 5 \cdot 17$, а остаток при делении на 9 натурального числа равен остатку при делении на 9 суммы его цифр, то этот остаток равен остатку от деления на 9 числа $5 \cdot 17 = 85$. При делении получается 9 и 4 в остатке.

4. 381.

Из условия получаем систему

$$\begin{cases} b_1\left(1 + q + \ldots + q^4\right) = 93, \\ b_1 q^6\left(1 + q + \ldots + q^4\right) = 2976, \end{cases}$$

откуда $q^5 = \dfrac{2976}{93} = 32$, $q = 2$, $b_1 = 3$, $S_7 = \dfrac{3\left(2^7 - 1\right)}{2 - 1} = 381$.

5. 9.

Пусть нужно покрасить N кв. м стен, x – плановое количество учеников, v – производительность каждого ученика, t_1 – время, за которое должна быть выполнена работа. Тогда $xvt_1 = N$, и каждый ученик должен был покрасить $vt_1 = \dfrac{N}{x}$ кв. м.

Если производительность мастера больше производительности каждого ученика в k раз ($k > 1$) и один из учеников заболел, а его заменил мастер, то $\left((x-1)v+kv\right)t_2 = N$, где t_2 – время, за которое выполнена работа. Тогда $vt_2 = \dfrac{N}{x+k-1}$ кв. м.

Условие, что каждый оставшийся ученик покрасил на a кв. м меньше, равносильно уравнению

$$\frac{N}{x}-\frac{N}{x+k-1}=a \Leftrightarrow (x+k-1)x=\frac{N(k-1)}{a}.$$

При $N = 360$, $k = 3$, $a = 6$ получаем $(x+2)x = 120 \Rightarrow x = 10$. Значит, работало 9 учеников.

6. $x = 6$, $y = 12$; $x = 15$, $y = 6$.

Из условия следует, что y четно, т.е. $y = 2p$. Поэтому $8x^2+8p^3 = 2016 \Leftrightarrow x^2+p^3 = 252$. Далее перебираем значения p от 1 до 6, подходят две пары: $p = 3$, $x = 15$; $p = 6$, $x = 6$.

7. $\dfrac{1}{4}$.

Уравнение равносильно системе $x > 0$, $x \neq 1$, $\log_x \sqrt{2x} > 0$, $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0$. Последнее уравнение получено после возведения исходного в квадрат и простых преобразований. Отсюда $\log_2 x = -2$, $x = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$.

8. 2015.

Так как $x_1^3 - 2015x_1 + 2016 = 0$ и $x_2^3 - 2015x_2 + 2016 = 0$, то $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)\cdot 2015$. Значит, $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 2015$.

Можно также воспользоваться теоремой Виета (но тогда нужно обосновать наличие трех разных корней): $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -2016$. Поэтому

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - x_1x_2 =$$

$$= (-x_3)^2 + \frac{2016}{x_3} = \frac{x_3^3+2016}{x_3} = \frac{2015x_3}{x_3} = 2015.$$

9. 7.

Исходное уравнение равносильно уравнению

$$x + \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x = 7 + \log_2 7 - \log_3 7 + \log_4 7.$$

Поскольку функция

$$f(x) = \log_2 x - \log_3 x + \log_4 x =$$

$$= \log_2 x\left(1 - \log_3 2 + \frac{1}{2}\right) = \log_2 x \cdot \log_3\left(\frac{3^{3/2}}{2}\right)$$

монотонно возрастает при $x > 0$, то функция $x + f(x)$ также монотонно возрастает на области определения. Следовательно, решение $x = 7$ является единственным решением данного уравнения.

10. $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}; 0\right)$.

ОДЗ неравенства: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}; 0\right)$. Левая часть неравенства равна $(1-x)^{\log_{\sqrt{1-x}} \sin 7} = (1-x)^{\log_{1-x} \sin^2 7} = \sin^2 7$. Поэтому получаем $\log_{(-3x)}(1-x) < 1$, что на ОДЗ равносильно

$$\frac{1-x-(-3x)}{-3x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3x+1} > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Откуда, с учетом области допустимых значений исходного неравенства, получаем ответ.

11. 28%.

Отношение площади треугольника MBN к площади треугольника ABC равно $\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{7}{8} = \dfrac{7}{32}$. Поэтому отношение площади четырехугольника $AMNC$ к площади треугольника ABC равно $1 - \dfrac{7}{32} = \dfrac{25}{32}$. Искомое отношение равно $\dfrac{7}{25} \cdot 100\% = 28\%$.

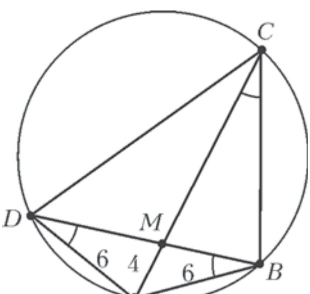


Рис. 43

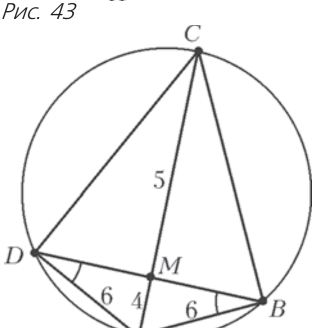


Рис. 44

12. $4\sqrt{5}$.

Из равноудаленности сторон AB и AD от точки O вытекает их равенство. Следовательно, равны углы: $\angle ACB = \angle ADB = \angle ABD$ (рис.43). Таким образом, треугольники ABM и ACB подобны. Из подобия следует $AB^2 = AM \cdot AC$, т.е. $AC = 9$, а значит, $MC = 5$. Так как $DM \cdot MB = CM \cdot MA = 5 \cdot 4$, то $DM = 5x$, $MB = \dfrac{4}{x}$. Следовательно,

$$BD = 5x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{5x \cdot \frac{4}{x}} = 4\sqrt{5}.$$

Остается заметить, что данный случай реализуется, когда AC проходит через центр окружности (рис.44).

13. 5 : 8.

Центр сферы совпадает с центром O треугольника ABC. Если сфера пересекает ребро SB в точке P, то $OP = OB$ и перпендикуляр OQ к ребру SB является медианой треугольника POB. Обозначим сторону основания через a, а данный двугранный угол − через $\alpha = \operatorname{arctg} 3$.

Пусть M − основание перпендикуляра, проведенного из точки B на сторону AC. Находим $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Прямоугольные треугольники SOB и OQB подобны: $\dfrac{BQ}{BO} = \dfrac{BO}{SB}$. Получаем

$$\frac{BQ}{SB} = \frac{BO^2}{SB^2} = \frac{4}{4+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\frac{SP}{PB} = \left(1 - 2\frac{BQ}{SB}\right) : 2\frac{BQ}{SB} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 4}{8} = \frac{5}{8}.$$

14. −12.

Правая часть неравенства равна нулю при $|x| \le 10$ (при остальных x она не определена). Обозначив $\dfrac{\pi x}{2} = 2\alpha$, получим

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \ge 0, \\ \sin\alpha \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} \ge 0, \\ \operatorname{tg}\alpha \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha \in [-1;0) \cup (0;1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \pi k\right) \cup \left(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right).$$

Поэтому $x \in [-1+4k; 4k) \cup (4k; 1+4k)$. На отрезке $[-10;10]$ находятся целые числа −9, −5, −1, 3, 7, из которых на заданном в условии отрезке находятся числа −9, −5, −1, 3, сумма которых равна −12.

15. $-\dfrac{\pi}{6}$, $-\dfrac{2\pi}{9}$, $\pm\sin\dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

О.Д.З. данного уравнения $x \in [-1; 1]$.

1) $\sqrt{2}\sin 3x + \sqrt{2+\cos 3x} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 3x = 2 + \cos 3x, \\ \sin 3x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0, \\ \cos 3x = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \sin 3x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 3x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \\ x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \end{array}\right. \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

На отрезок $x \in [-1; 1]$ попадают корни $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{2\pi}{9}$.

2) $\cos\left(\sqrt{2}\arcsin x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\arcsin x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \arcsin x = \pm\frac{\pi}{3\sqrt{2}} + \sqrt{2}\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как по определению $\arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то подходит только значение $k = 0$. Поэтому $\arcsin x = \pm\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$, и $x = \pm\sin\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

16. 5050.

Обозначим $\alpha = \pi x$. Тогда

$$\cos 8\alpha + 2\cos 4\alpha - \cos 2\alpha + 2\sin\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4\alpha - 1 + 2\cos 4\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Значит,

$$\begin{cases} \cos 4\alpha = -\frac{1}{2}, \\ \sin\alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Следовательно, $x = -\frac{1}{6} + 2m$; $x = -\frac{5}{6} + 2n$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Сумма первых двух положительных корней равна $1\frac{1}{6} + 1\frac{5}{6} = 3$. Сумма следующих двух положительных корней больше на 4, т.е. равна 7, и так далее. Искомая сумма равна

$$3 + 7 + 11 + \ldots + (3 + 4 \cdot 49) =$$

$$= \frac{3 + (3 + 4 \cdot 49)}{2} \cdot 50 = (3 + 98) \cdot 50 = 5050.$$

17. 2.

Система четна относительно x. Следовательно, для единственности решения необходимо $x = 0$. Тогда $a = y + 1$, $y = \pm 1$, откуда $a = 0$ или $a = 2$.

При $a = 0$ решениями системы, например, являются $x = 2\pi n$

$(n \in \mathbb{Z})$, $y = -1$, т.е. решение не единственно. При $a = 2$ система приобретает вид $\begin{cases} y = (|x|+1)2 - \cos x, \\ \sin^4 x + y^4 = 1. \end{cases}$ Так как $|\cos x| \le 1$, то из первого уравнения системы следует $y = 2 + 2|x| - \cos x \ge 1$, из второго уравнения следует $y \le 1$, а поэтому решение $y = 1$, $x = 0$ единственно.

18. $a \ge 2$, $b < \frac{1}{2}$.

Пусть $t = 2x - 1$. Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{t}{t^2+4}$. Так как $t^2 + 4 \ge 2\sqrt{4t^2} = 4|t|$, то $-\frac{1}{4} \le \frac{t}{t^2+2} \le \frac{1}{4}$. Значения $\pm\frac{1}{4}$ достигаются при $t = \pm 2$. Следовательно, множество значений функции $g(t) = 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} = 16^{\frac{t}{t^2+4}}$ есть отрезок $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Поэтому $a \ge 2$, $b < \frac{1}{2}$.

19. $x = -a$; $y = a$ при $a \in (-2; 0)$.

Первое уравнение приводится к виду $(x+y)^2 + (y-a)^2 = 0$, откуда получаем $x = -y = -a$. Подстановка в неравенство дает $2^{-2-a} \cdot \log_2(-a) < 1 \Leftrightarrow \log_2(-a) < 2^{2+a}$. Равенство достигается при $a = -2$, и ввиду монотонности получаем $a \in (-2; 0)$.

20. 9.

После замены $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ второе уравнение выполнено, а первое запишется в виде $\cos^{15} 3\alpha + \sin^{16} 3\alpha = 1$. Из цепочки $1 = \cos^{15} 3\alpha + \sin^{16} 3\alpha \le \cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha = 1$ следует, что $\cos^{15} 3\alpha = \cos^2 3\alpha$ и $\sin^{16} 3\alpha = \sin^2 3\alpha$. Значит, либо $3\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, либо $3\alpha = 2\pi n$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ или $\alpha = \frac{2\pi n}{3}$. Получается 9 пар решений $(x; y)$: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0; \pm 1)$; $(1; 0)$.

ИНЖЕНЕРНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный тур

9–10 классы

1. При торможении на барабан со стороны колодок и (по третьему закону Ньютона) со стороны барабана на колодки действуют силы трения (рис.45).

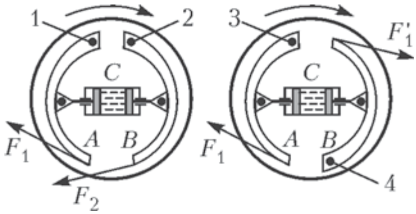


Рис. 45

Для левого барабана силы трения, действующие на колодки, создают моменты, стремящиеся развернуть их относительно точек крепления по часовой стрелке. Это приводит к увеличению силы реакции между барабаном и левой колодкой (эффект заклинивания) и к уменьшению силы реакции между барабаном и правой колодкой. Следовательно, сила трения между барабаном и левой колодкой при торможении возрастает, а между барабаном и правой колодкой убывает. Таким образом, для левой колодки возникает эффект заклинивания, что приводит к увеличению трения, для правой – нет.

При торможении с помощью барабана, приведенного на правом рисунке, силы трения заклинивают обе тормозные колодки. Это значит, что торможение правым барабаном более эффективно.

2. Пусть в резервуар каждую секунду поступает масса воды m, каждый насос откачивает в секунду массу воды μ, масса воды в заполненном водосборнике равна M. Тогда для наполнения половины водосборника при работе одного насоса имеем

$$mt_1 - \mu t_1 = \frac{M}{2}.$$

Для заполнения второй половины водосборника при работе двух насосов имеем

$$mt_2 - \mu t_2 = \frac{M}{2}.$$

Решая систему уравнений относительно m и μ, получим

$$m = \frac{M(2t_2 - t_1)}{2t_1t_2},\ \ \mu = \frac{M(t_2 - t_1)}{2t_1t_2}.$$

Теперь можно рассмотреть работу трех насосов:

$$3\mu t_3 - mt_3 = M,$$

откуда находим

$$t_3 = \frac{M}{3\mu - m} = \frac{2t_1t_2}{t_2 - 2t_1} = 60 \text{ мин}.$$

3. Данная в условии электрическая цепь может быть преобразована к виду, изображенному на рисунке 46. Ее сопротивление равно

$$R_{\text{общ}} = R\,.$$

4. Очевидно, что отношение количества дней, которые типография работала на первой и второй порциях бумаги, равно отношению объемов этих порций:

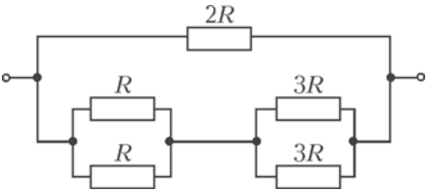


Рис. 46

$$\frac{n_{2/3}}{40} = \frac{V_{2/3}}{V_{1/3}}\,,$$

где $n_{2/3}$ – количество дней, на которые хватит остатка рулона, $V_{2/3}$ – его объем, $V_{1/3}$ – объем первой порции рулона, которая израсходована за 40 дней. Находя объемы первой и второй порций:

$$V_{1/3} = \pi\left(R^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^2\right)h = \frac{5}{9}\pi R^2 h\,,\quad V_{2/3} = \left(\frac{2R}{3}\right)^2 h = \frac{4}{9}\pi R^2 h\,,$$

где R – радиус неразмотанного рулона, h – его высота, получим

$$n_{2/3} = 40\frac{V_{2/3}}{V_{1/3}} = 32 \text{ дня.}$$

5. Понятно, что при параллельном соединении насосов каждый из них работает при одинаковом напоре Δp (разность давлений жидкости после и до насоса). А вот расходы, которые обеспечивают насосы, складываются. Используя напорно-расходные характеристики первого и второго насосов, найдем расход при напоре $\Delta p = p_0/2$:

$$\mu\left(\frac{p_0}{2}\right) = \sqrt{\frac{p_0}{2\alpha}} + \frac{p_0}{2\beta}\,.$$

При заданном расходе μ_0 системы насосов расход жидкости через насосы распределяется так, чтобы напор первого и второго насосов был одинаковым:

$$\mu_0 = \mu_1 + \mu_2\,,$$

$$p_0 - \alpha\mu_1^2 = p_0 - \beta\mu_2\,.$$

Отсюда находим

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta}{2\alpha}\,.$$

Подставляя теперь это значение в напорно-расходную характеристику, получаем

$$\Delta p = p_0 - \alpha\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta}{2\alpha}\right)^2 .$$

Отметим, что можно провести аналогию между течением жидкости в трубопроводе и электрическим током: расход – электрический ток, напор – разность потенциалов, насос – источник ЭДС.

6. Пусть в единицу времени через сечение трубы протекает масса воды Δm. Обозначим температуру воды посередине трубы t_x. Тогда первая половина трубы теряет в единицу времени количество теплоты $c\Delta m(t_1 - t_x)$, вторая половина трубы – $c\Delta m(t_x - t_2)$. С другой стороны, эти количества теплоты уходят в помещение через боковые стенки труб, причем поток тепла в разных точках трубы будет разным, поскольку различной является разность температур между каждой точкой и помещением. Однако полный поток тепла от каждой половины трубы должен быть пропорционален разности между температурой какой-то ее точки, например начала трубы, и температурой помещения. Поэтому для потока тепла Q_1 между первой половиной трубы и помещением можно записать

$$Q_1 = \eta(t_1 - t),$$

где коэффициент пропорциональности η зависит от «геометрии» трубы, от точки, в которой мы взяли температуру t_1 (но не от температуры). А поскольку «геометрия» второй половины трубы точно такая же, как у первой, то для потока тепла Q_2 от второй половины трубы имеем

$$Q_2 = \eta(t_x - t).$$

Таким образом,

$$c\Delta m(t_1 - t_x) = \eta(t_1 - t),$$

$$c\Delta m(t_x - t_2) = \eta(t_x - t).$$

Деля эти соотношения друг на друга, получим квадратное уравнение

$$t_x^2 - 2tt_x + t_2 t + t_1 t - t_2 t_1 = 0,$$

откуда найдем искомую температуру t_x:

$$t_x = t + \sqrt{(t - t_2)(t - t_1)} = 45\ ^\circ\text{C}.$$

1. Секстант работает следующим образом (рис.47). Необходимо в зрительную трубу видеть линию горизонта (через полупрозрачное зеркало $З_2$) и, вращая алидаду, добиться такого положения, что изображение звезды, угол склонения α которой над горизонтом надо измерить, в двух зеркалах попадает точно на линию горизонта. Докажем, что угол β между алидадой и нулевым отсчетом шкалы лимба – угол $СЗ_10$, или, что то же самое, угол $З_2СЗ_1$ – равен половине угла α. Действительно, чтобы через полупрозрачное зеркало $З_2$ можно было видеть линию горизонта (при горизонтальном расположении зрительной трубы и при том, что угол раствора секстанта равен $60°$), оно должно быть установлено так, чтобы все углы равнялись $\gamma = 60°$. Далее, из закона отражения заключаем, что пара углов δ – между зеркалом $З_1$ и отраженным от него лучом и между зеркалом $З_1$ и продолжением падающего луча – равны друг другу. Из треугольника $З_1СЗ_2С$ имеем

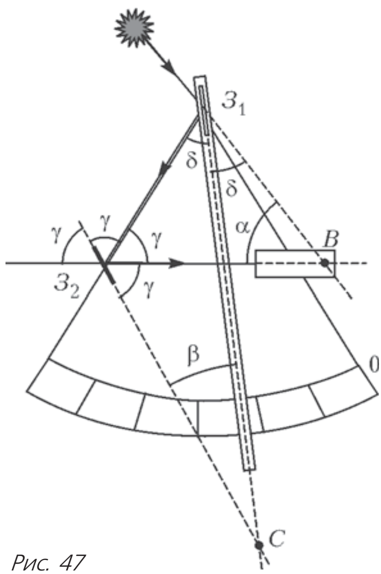


Рис. 47

$$120° + \beta + \delta = 180°\text{, или } \beta + \delta = 60°.$$

С другой стороны, из треугольника $З_1З_2B$ имеем

$$60° + 2\delta + \alpha = 180°\text{, или } 2\delta + \alpha = 120°.$$

Отсюда получаем

$$\alpha = 2\beta.$$

Таким образом, измеряя по шкале лимба угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы и умножая его на 2, получаем угол склонения звезды над горизонтом.

На палубе корабля при сильной качке зрительную трубу трудно навести на горизонт, но в ней какие-то моменты видно линию горизонта. Медленно вращая алидаду, добиваемся такого положения, чтобы именно в те моменты, когда труба проходит через линию горизонта, отражение звезды в двух зеркалах попадало точно на эту линию. В этом положении измеряем угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы лимба и умножаем на 2.

2. В зависимости от полярности приложенного напряжения данная цепь имеет вид, показанный на рисунке 48 либо слева,

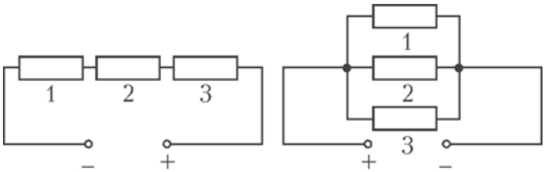


Рис. 48

либо справа: при закрытых диодах резисторы соединены последовательно, при открытых – параллельно. Поэтому в течение половины времени, отвечающей левому рисунку, на резисторах будут выделяться мощности

$$P_{11} = \frac{U^2 r_1}{2(r_1 + r_2 + r_3)^2} = \frac{U^2}{32R}, \quad P_{21} = \frac{U^2 r_2}{2(r_1 + r_2 + r_3)^2} = \frac{U^2}{32R},$$

$$P_{31} = \frac{U^2 r_3}{2(r_1 + r_2 + r_3)^2} = \frac{U^2}{16R}$$

(двойка в знаменателе связана с необходимостью использовать действующее значение напряжения). В течение второй половины времени (правый рисунок) на резисторах выделяются мощности

$$P_{12} = \frac{U^2}{2R}, \quad P_{22} = \frac{U^2}{2R}, \quad P_{32} = \frac{U^2}{4R}.$$

Поэтому за большое время средние мощности будут такими:

$$P_{1\text{ср}} = \frac{P_{11} + P_{12}}{2} = \frac{17U^2}{64R}, \quad P_{2\text{ср}} = \frac{P_{21} + P_{22}}{2} = \frac{17U^2}{64R},$$

$$P_{3\text{ср}} = \frac{P_{31} + P_{32}}{2} = \frac{5U^2}{32R}.$$

3. Силы, с которыми стенки полости действуют на грани ключа, и точки их приложения показаны на рисунке 49. Из-за отсутствия трения эти силы перпендикулярны граням шлица и ключа. Поскольку сумма сил, действующих на ключ, равна нулю, а сумма двух сил, создающих момент M, также равна нулю (пара сил), должна быть равна нулю сумма сил $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$. Это значит, что эти силы образуют треугольник, причем, из-за перпендикулярности сил граням ключа, подобный сечению ключа. Из соотношений подобия заключаем, что

$$\frac{F_B}{F_C} = \frac{a}{b} .$$

С другой стороны, условие моментов сил относительно вершины A дает

$$F_B a + F_C b = M .$$

Из этих двух уравнений находим силы F_B и F_C:

$$F_B = \frac{4M}{13a}, \quad F_C = \frac{6M}{13a} ,$$

а затем по теореме Пифагора находим силу F_A:

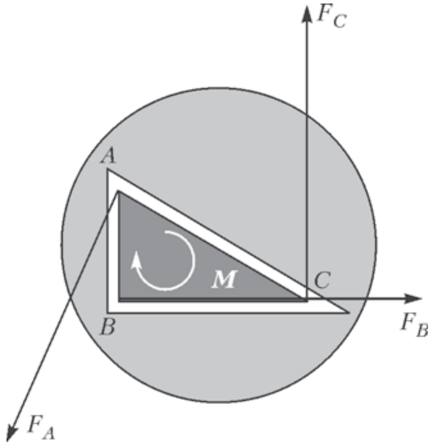


Рис. 49

$$F_A = \frac{2M}{\sqrt{13}a} .$$

5. Если бы пар был насыщенным, то скорости испарения и конденсации совпадали бы. Другими словами, количество молекул, покидающих жидкость, равнялось бы числу молекул, попадающих в жидкость из пара. Последнюю величину можно вычислить так же, как вычисляют число столкновений молекул идеального газа со стенкой сосуда (считая для оценки, что каждая молекула, попадающая из пара на поверхность жидкости, становится молекулой жидкости). Число молекул, сталкивающихся с площадкой площадью ΔS за время Δt, равно

$$\Delta N = \frac{1}{6} n v \Delta S \Delta t ,$$

где n – концентрация молекул газа, v – средняя скорость. Умножая это выражение на массу одной молекулы, находим массу воды, конденсирующейся на этой площадке:

$$\Delta M = \frac{1}{6} \rho v \Delta S \Delta t ,$$

где ρ – плотность пара. Поскольку $p = nkT = \frac{1}{3} nmv^2 = \frac{1}{3} \rho v^2$, то $v = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$, откуда

$$\Delta M = \frac{1}{6} \sqrt{3p\rho} \Delta S \Delta t .$$

Используя закон Клапейрона–Менделеева в виде $\rho = \frac{p\mathrm{M}}{RT}$, где

$\mathrm{M} = 18$ г/моль – молярная масса воды, R – универсальная газовая постоянная, найдем скорость конденсации пара на единицу площади жидкости:

$$v_{\text{к}} = \frac{1}{6} p \sqrt{\frac{3\mathrm{M}}{RT}}.$$

Если бы пар был насыщенным, то ровно столько воды и испарялось бы. Учитывая, что наш пар имеет относительную влажность 70 %, заключаем, что семьдесят процентов испарившейся воды конденсируется назад, поэтому результирующая скорость испарения равна

$$v_{\text{и}} = \frac{0,3}{6} p \sqrt{\frac{3\mathrm{M}}{RT}} = 0,6 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

Отсюда находим время испарения:

$$t = \frac{M}{S v_{\text{и}}} = 3 \text{ с}.$$

Полученный результат парадоксален – время испарения воды из блюдца, как говорит нам наш бытовой опыт, должно составить порядка суток. Однако этот результат легко объяснить, если вспомнить, что мы можем очень сильно увеличить скорость испарения воды, «сдувая» пар, образовавшийся над водой в результате испарения. Это значит, что вблизи поверхности пар является почти насыщенным независимо от того, какова его относительная влажность во всем помещении. Поэтому наша оценка, основанная на предположении об одинаковости относительной влажности во всем помещении, является очень неточной. А правильная оценка времени испарения сильно зависит от внешних условий – даже небольшое движения воздуха над поверхностью жидкости будет сильно менять время испарения.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

МАТЕМАТИКА

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

11 класс

Вариант 1

1. $17 \cdot 13 \cdot 7 = 1547$ (один из возможных ответов).

Сумма делителей числа $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ равна $\left(1 + p_1 + p_1^2 + \dots p_1^{k_1}\right) \cdot \left(1 + p_2 + p_2^2 + \dots p_2^{k_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + p_s + p_s^2 + \dots p_s^{k_s}\right)$, где p_i – простые числа. Разложим число 2016 на простые множители: $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Тогда произведение чисел $2 \cdot 3^2 = 18$, $2 \cdot 7 = 14$ и $2^3 = 8$ равно 2016, и при этом эти числа могут быть представлены: 18 = 1 + 17, 14 = 1 + 13 и 8 = 1 + 7.

2. $\dfrac{-5 \pm \sqrt{-11 + 4\sqrt{26}}}{2}$.

Перемножаемые трехчлены имеют одинаковые дискриминанты. Значит, модуль разности корней первого трехчлена (хотя они и мнимые) равен модулю разности корней второго. Это позволяет с успехом применить определенную «центрирующую» замену:

$$\left((x+1{,}5)^2 + 3{,}75\right)\left((x+3{,}5)^2 + 3{,}75\right) = 41.$$

Заменим $x = y - 2{,}5$. Тогда

$$\left((y-1)^2 + 3{,}75\right)\left((y+1)^2 + 3{,}75\right) = 41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(y^2 + 4{,}75\right) - 2y\right)\left(\left(y^2 + 4{,}75\right) + 2y\right) = 41 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y^2 + 4{,}75\right)^2 - 4y^2 = 41.$$

Получившееся биквадратное уравнение решается затем стандартным образом.

3. Докажем первое равенство

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \gamma) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(60° + \alpha).$$

Преобразуем косинус суммы:

$$a^2 + b^2 - ab\left(\cos\gamma - \sqrt{3}\sin\gamma\right) = b^2 + c^2 - bc\left(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha\right).$$

Слагаемые $\sqrt{3}ab\sin\gamma$ и $\sqrt{3}bc\sin\alpha$ равны друг другу (так как оба равны удвоенной площади треугольника, умноженной на $\sqrt{3}$) и, следовательно, сокращаются. Остается доказать, что

$$a^2 - ab\cos\gamma = c^2 - bc\cos\alpha.$$

Последнее очевидно, поскольку, по теореме косинусов,

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 \text{ и } 2bc\cos\alpha = c^2 + b^2 - a^2.$$

Первое равенство доказано. Второе доказывается аналогично.

4. 165.

Пусть первая частица прыгает через s сторон по часовой стрелке, вторая – через t сторон против часовой стрелки. Первоначально первая частица находится на расстоянии d сто-

Рис. 50

рон по часовой стрелке от второй. Перейдем в систему отсчета, связанную со второй частицей (рис.50). Таким образом, вторая частица неподвижна, а первая совершает прыжки через $s + t$ ребер по часовой стрелки. Заметим, что расстояние между частицами, отсчитываемое по часовой стрелке от первой ко второй, составляет $2016 - d$ сторон. Занумеруем вершины многоугольника целыми числами от 0 до 2015 таким образом, что первоначально первая частица находится в вершине с номером 0, а вторая – в вершине с номером $2016 - d$. Пусть n – искомое количество прыжков. Тогда, чтобы первая частица попала в вершину $2016 - d$, должно выполняться соотношение $n(s+t) \equiv 2016 - d \,(\mathrm{mod}\, 2016)) \Leftrightarrow \ \exists k \in N : n(s+t) + d = 2016k$. Итак, надо найти натуральное n, для которого существует натуральное k такое, что $n = \dfrac{2016k - d}{s+t} = \dfrac{2016k - 45}{183}$. Число 2016 дает остаток 3 при делении на 183. Следовательно, чтобы числитель давал остаток ноль при делении на 183, достаточно взять $k = 15$. Тогда $n = 165$.

5. Если n – нечетное, то, например, возможна укладка «змейкой» по аналогии с рисунком в условии задачи. Если n – четное, то количество узлов равно $(n+1)\times(n+1)$ – нечетное число. Раскрасим узлы в черный и белый цвета так, чтобы соседние узлы имели разные цвета. Тогда маршрут начинается узлом одного цвета, а заканчивается узлом другого цвета. Но такой маршрут имеет четную длину (количество пройденных узлов). Следовательно, невозможно построить соответствующий маршрут.

6. $\dfrac{61}{11} S$.

Нарисуем график зависимости от времени координат спортсменов относительно пункта A (рис.51), затем выделим те части прямых, когда соответствующий спортсмен владел эстафетной палочкой. Прямую для первого спортсмена обозначим как L, участки прямых для второго спортсмена – как $L_1, \ldots, L_{10}$. Точки передачи эстафетной палочки (они же точки пересечения соответствующих прямых) обозначим как $A_1, \ldots, A_{10}$. Тогда искомая величина S_0 представляет собой сумму проекций выделенных

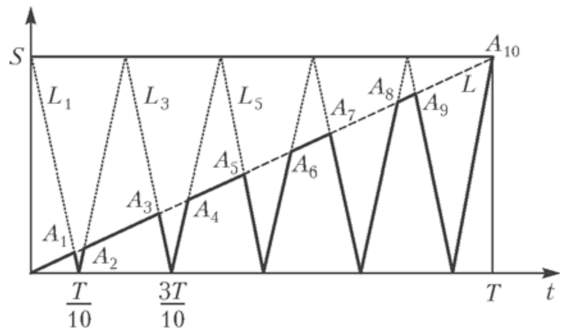


Рис. 51

фрагментов на ось ординат, а именно

$$S_0 = y(A_1) + y(A_1) + y(A_2) + \left[y(A_3) - y(A_2)\right] + y(A_3) +$$

$$+y(A_4) + \left[y(A_5) - y(A_4)\right] + \ldots + y(A_9) + y(A_{10}) =$$

$$= 2\left[y(A_1) + y(A_3) + y(A_5) + y(A_7) + y(A_9)\right] + S.$$

Уравнение прямой L имеет вид $y = \frac{S}{T}x$.

Уравнение прямой L_1 имеет вид $y = -\frac{10S}{T}x + S$ (его можно найти, например, подставив в уравнение прямой $y = kx + b$ координаты двух крайних точек отрезка и решив систему относительно k и b).

Составив систему из уравнений для прямых L и L_1, найдем ординату точки A_1:

$$\begin{cases} y = \frac{S}{T}x, \\ y = -\frac{10S}{T}x + S \end{cases} \Rightarrow y(A_1) = \frac{S}{11}.$$

Аналогично получаем $y(A_1) = \frac{3S}{11}$. Нетрудно увидеть, что для всех интересующих нас точек $y(A_{2n+1}) = \frac{(2n+1)S}{11}$. Поэтому $S_0 = 2 \cdot \frac{S}{11}(1 + 3 + 5 + 7 + 9) + S = \frac{61}{11}S$.

7. Разобьем отрезок от 0 до 1 на 1000 одинаковых подотрезков и отметим на нем точки $x_1 = \left\{1 \cdot \sqrt{2}\right\}$, $x_2 = \left\{2 \cdot \sqrt{2}\right\}, \ldots$ $\ldots, x_{999} = \left\{999 \cdot \sqrt{2}\right\}$ (рис.52). Здесь фигурные скобки { } обо-

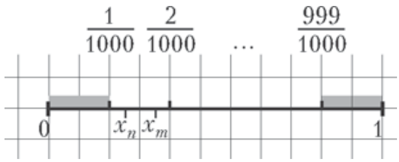


Рис. 52

значают дробную часть числа. В силу того что число $\sqrt{2}$ иррационально, ни одна точка x_i не может совпасть с концом подотрезка. Ясно также, что если хоть одна из этих точек попала на подотрезок, отмеченный серым, то наше утверждение доказано. Поэтому предположим, что ни одна точка на эти крайние подотрезки не попала. Тогда получается, что наши 999 точек должны разместиться на 998 оставшихся подотрезках. Значит, существует хотя бы один подотрезок, внутрь которого попадут по крайней мере две точки x_m и x_n, $m > n$. Тогда $\left\|(m-n)\cdot\sqrt{2}\right\| < \dfrac{1}{1000}$. Утверждение доказано.

8. (12, 316), (100, 300), (180, 260), (260, 180), (300, 100), (316, 12).

Равенство $x^2 + y^2 = 100\,000$ перепишем в виде

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 10,$$

где $z = 100$. Обозначив еще $p = x/z$, $q = y/z$, получим уравнение

$$p^2 + q^2 = 10, \quad p, q \in \mathbb{Q}. \qquad (1)$$

Задача сведена, таким образом, к поиску точек с положительными рациональными координатами (со знаменателем 100) на окружности радиуса $\sqrt{10}$ с центром в начале координат. Уравнению (1) удовлетворяют, например, числа $p_0 = 3$, $q_0 = 1$. Остальные рациональные точки будем искать следующим образом: через точку с координатами $p_0 = 3$, $q_0 = 1$ будем проводить всевозможные прямые

$$p = k(q - q_0) + p_0, \qquad (2)$$

а коэффициент k подбирать так, чтобы точка пересечения прямой (2) и окружности (1) (отличная от $p_0 = 3$, $q_0 = 1$) имела рациональные координаты. Подставив (2) в (1), получим

$$\left(k(q-1)+3\right)^2 + q^2 = 10 \Leftrightarrow k^2(q-1)^2 + 6k(q-1) + q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2(q-1) + 6k + q + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad q = \frac{k^2 - 6k - 1}{1 + k^2}.$$

Подставляя полученное выражение для q в (2), найдем

$$p = \frac{-3k^2 - 2k + 3}{1 + k^2}.$$

Поскольку p_0, q_0 рациональны, а в точке пересечения рациональными должны быть еще и p, q, то, как следует из (2), коэффициент k также рационален. Полагая $k = m/n$, $m/n \in \mathbb{Z}$, выражения для p и q перепишем в виде

$$p = \frac{3\left(n^2 - m^2\right) - 2mn}{n^2 + m^2}, \quad q = \frac{m^2 - 6mn - n^2}{n^2 + m^2}.$$

Таким образом, искомые числа равны

$$x = 3\left(n^2 - m^2\right) - 2mn, \quad y = m^2 - 6mn - n^2, \text{ где } m^2 + n^2 = 100.$$

Последнее уравнение решается перебором:

$$\left(|m| = 10; |n| = 0\right), \ \left(|m| = 0; |n| = 10\right),$$
$$\left(|m| = 8; |n| = 6\right), \ \left(|m| = 6; |n| = 8\right).$$

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Первое число больше. **2.** $\operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{5}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. 1. **4.** $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$. **5.** $\dfrac{5}{3}$ ч. **6.** 10.

7. $(-\infty; 0] \cup \left[\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$. **8.** $\left(0; \dfrac{4}{3}\right)$.

ФИЗИКА

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

11 класс

Вариант 1

1. Для удобства рассмотрения пронумеруем вершины ромба так, как показано на рисунке 53. Поскольку характер движения вершин 2 и 4 одинаков, будем рассматривать только вершину 2. В момент времени, когда ромб превратится в квадрат, двигающаяся с ускорением a вершина 3 будет иметь скорость v, а вершина 2 сместится в направлении движения вершины 3 на вдвое меньшее расстояние, чем прошла вершина 3. Значит, проекции скорости и ускорения вершины 2 на направление движения вершины 3 будут равны $v/2$ и $a/2$ соответственно. К рассмат-

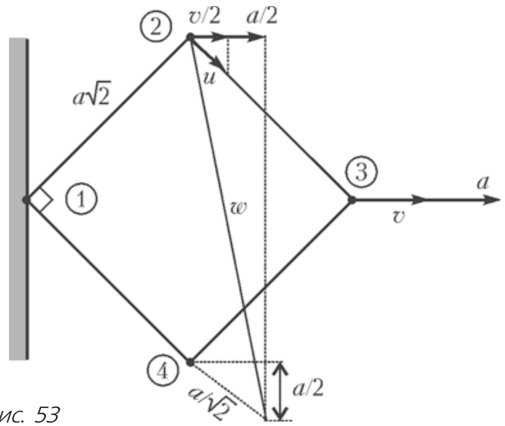


Рис. 53

риваемому моменту времени вершина 3 пройдет путь $s = L\sqrt{2}$, поэтому $v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2aL\sqrt{2}} = 2^{3/4}\sqrt{aL}$.

Так как стержни жесткие, то вершина 2 все время движется по окружности радиусом L с центром в вершине 1, поэтому скорость u вершины 2 направлена по касательной к этой окружности и равна $u = \dfrac{v/2}{\cos(\pi/4)} = \dfrac{v}{\sqrt{2}} = 2^{1/4}\sqrt{aL}$, а ее центростремительное ускорение равно $\dfrac{u^2}{L} = a\sqrt{2}$.

Мы нашли проекции ускорения вершины 2 на два различных направления. Полное ускорение можно найти, нарисовав соответствующим образом направленные векторы компонентов ускорения, имеющие длины $a/2$ и $a\sqrt{2}$, восстановив перпендикуляры к ним. Точка пересечения этих перпендикуляров позволит определить направление и величину вектора ускорения вершины 2. Чертеж удобно построить следующим образом. Выберем масштаб так, чтобы вектор $a/2$ на чертеже имел длину, равную четверти диагонали нашего квадрата. Тогда вектор $a\sqrt{2}$ будет иметь длину, равную стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора получим

$$w = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{13}{2}}.$$

2. Сила должна быть направлена влево и равна $F = (M + m)g$.

3. $\eta = \dfrac{R_с}{R_З} = \sqrt[3]{\dfrac{T^2 g n^2}{4\pi^2 R_З (n+1)^2}} = 5$ (здесь $T = 1$ сутки).

4. $v = \dfrac{mgr(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{B^2l^2}$.

5. $Q_1 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\mathcal{E}\rho(r+3\rho)}{3r}$, $Q_2 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\mathcal{E}\rho(3\rho-2r)}{3r}$, $Q_3 = -4\pi\varepsilon_0\mathcal{E}\rho$.

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $v_{\text{совм}} = \dfrac{m_0 v}{m_0 + m_1}$. **2.** $m = \dfrac{qE}{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.

3. $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r} = 3$ А. **4.** $R = \dfrac{mv}{eB} = 9$ мм. **5.** $v_0 = gT\mathrm{ctg}\,\alpha$.

6. $x = \dfrac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$. **7.** $Q_{\text{от}} = \dfrac{5}{3}Q$. **8.** $l = 2\sqrt{(a-F)^2 - \dfrac{F^2}{K}}$.

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

Заключительный этап

1. Нет.

2. Зову тебя не для того, чтоб укорять людей, чья злоба убила друга моего, иль чтоб изведать тайны гроба.

3. *Указание.* Натуральное число делится на 2015 нацело в том и только том случае, когда оно делится на 5 и на 403.

4. КРИПТОГРАФИЯ.

5. В первом случае корректных номеров больше, чем во втором, на $10^{10} - 10^9$.

6. Можно. **7.** Минимальная площадь равна 49.

8. 4. **9.** а) 0; б) 168.

10. *Указание.* Достаточно показать, что квадрат можно разрезать на 5, 6 и 7 прямоугольников указанного типа.

11. ПК Алисы: 7, 6, 1, 9.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

ФИЗИКА

Олимпиада-2016

I тур

Вариант 1

1. $\alpha = 15^\circ$ и $\alpha = 75^\circ$. **2.** $\alpha = \varphi$. **3.** $v = v_0\dfrac{\rho_{\text{ж}}}{\rho - \rho_{\text{ж}}}$.

4. $\Delta l = \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2kl}{mg}}\right)\dfrac{mg}{k}$. **5.** $Q = \dfrac{5ML^2}{\tau^2}$.

6. $A = \frac{n-1}{n+1}\frac{g}{4\pi^2\nu^2} = 6{,}8 \cdot 10^{-2}$ м .

7. $\sigma = \frac{k\Delta l}{2\pi d} = 7{,}5 \cdot 10^{-2}$ Н/м .

8. $A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$ (работа электрических сил равна убыли потенциальной энергии взаимодействия зарядов).

9. $\mathcal{E} = \sqrt{4rP} = 28$ В (мощность максимальна при равенстве сопротивления реостата и внутреннего сопротивления источника).

10. $Q = \frac{S^2}{R}\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \Delta t = \frac{\left(10^{-2}\right)^2}{10^{-2}}\left(10^{-1}\right)^2 \cdot 6$ Дж $= 6 \cdot 10^{-4}$ Дж (ЭДС индукции, а значит, и ток в контуре остаются постоянными в течение $\Delta t = 6$ с).

Вариант 2

1. $v_{\text{ср}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ м/с ≈ 23 м/с .

2. Сила Ампера направлена влево перпендикулярно прямолинейному проводнику.

3. $\mu = \frac{H-h}{H+h}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}14$ (изменение механической энергии шайбы равно работе против силы трения на всем пути шайбы).

4. $t = nT$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}21$ с .

5. $N = nV = \frac{(m/\mathrm{M})N_\text{А}}{hS}V = 10^6$ (здесь $\mathrm{M} = 0{,}058$ кг/моль – молярная масса поваренной соли, $N_\text{А} = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро).

6. $m = \frac{p_0\mathrm{M}S\left(p_0S - Mg\right)}{kR\left(t + 273\right)} = 11{,}7$ г (здесь $\mathrm{M} = 0{,}018$ кг/моль – молярная масса водяного пара, $p_0 = 10^5$ Па – нормальное атмосферное давление).

7. $A = \frac{1}{4}Q$ (в данном процессе давление газа линейно зависит от его объема).

8. $|q| = \frac{2F}{E_1 - E_2} = 7 \cdot 10^{-5}$ Кл (воспользуйтесь принципом суперпозиции полей).

9. $U = \varphi_A - \varphi_B = 0$.

10. $F = 1{,}6 \cdot 10^3$ Н (бак вместе с клином съезжает с наклонной плоскости с ускорением $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, свободная поверхность воды в баке при его движении параллельна наклонной плоскости).

II тур

Вариант 1

1. $v = \sqrt{\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{2}} = 5$ м/с.

2. $v = 0{,}63$ м/с (воспользуйтесь законом сохранения механической энергии и нерастяжимостью нити).

3. $M = \dfrac{1}{2}m$ (воспользуйтесь законами сохранения механической энергии и импульса).

4. $p = 8p_0 + \dfrac{24\sigma}{r}$ (внутри мыльного пузыря давление больше на величину избыточного давления $\Delta p = \dfrac{4\sigma}{r}$ за счет сил поверхностного натяжения).

5. $C_1 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{m_2 \mathrm{M}_1}{m_1 \mathrm{M}_2}R = -49{,}8$ Дж/(моль $\cdot$ К) (здесь M_1 и M_2 – молярные массы аргона и неона соответственно; теплоемкость отрицательна, поскольку газ в левой части сосуда отдает тепло газу в правой части сосуда).

6. В начале потенциальная энергия системы заряженных тел складывается из собственных энергий каждого тела и энергии их взаимодействия. При соединении шарика и сферы проводником заряд шарика перетечет на сферу, поэтому после разъединения потенциальной энергией будет обладать только сфера. В результате потенциальная энергия системы уменьшится на $\Delta W = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

7. $q_1 = C_1\mathcal{E}_1$, $q_2 = C_2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$.

8. Оптическая сила системы линза–зеркало–линза равна $D = \dfrac{2}{F}$. В соответствии с формулой линзы изображение будет мнимым и расположенным на расстоянии $f = \dfrac{d}{1 - dD} = 0{,}2$ м от зеркала.

9. $\rho = \dfrac{3W}{16\pi GcRM} = 10^3$ кг/м^3 (здесь G – гравитационная постоянная, c – скорость света).

10. В момент столкновения грузики будут иметь координаты $x_0 = \frac{L}{4}$ и скорости v_1 и $v_2 = -\frac{v_1}{2}$. Сразу после столкновения скорость грузиков равна нулю, а затем, слипшись, они будут совершать колебания с амплитудой x_0 и частотой $\omega = \sqrt{\frac{k+2k}{m+2m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$, так что их максимальная скорость будет равна $v_{\max} = \omega x_0 = \frac{L}{4}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Вариант 2

1. $T = 2F$.

2. $\mu = \frac{2S_{\text{отв}}}{\rho HgS}\left((p - p_0) + \rho g(H - h)\right)$ (сосуд начнет двигаться при равенстве сил трения и реакции вытекающей из отверстия струи жидкости).

3. $p_{\max} = mv_{\max} = m \cdot a\sqrt{\frac{k}{2m}} = a\sqrt{\frac{km}{2}}$. **4.** $n > 1$. **5.** $C = 2R$.

6. $F = \frac{2\sigma\pi R^2}{d} = 780\ \text{Н}$, где $d = \frac{m}{\rho\pi R^2}$ – высота ртутной лепешки.

7. $v = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 B}$ (при движении в магнитном поле в бруске возникает электрическое поле).

8. $F_{\text{упр}} = \frac{Qq}{8\pi^2\varepsilon_0 R^2}$ (для каждого малого элемента кольца силы упругости кольца уравновешивают электрическую силу со стороны заряда Q).

9. Из закона Ома $\sqrt{\frac{I}{\alpha}} + IR = \mathcal{E}$ находим ток I. Напряжение на диоде равно $U = \sqrt{\frac{I}{\alpha}}$, а мощность тепловых потерь на нем составляет $P_{\text{тепл}} = IU = \sqrt{\frac{I^3}{\alpha}} = 0{,}43\ \text{Вт}$.

10. $q_{\min} = h\frac{kh - 2mg}{kh + 2mg}\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}$ (нижний шарик подпрыгнет при условии $mg = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$, где l – наименьшее расстояние между шариками после отпускания верхнего шарика, которое можно найти из закона сохранения энергии).

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИКА

Профильный экзамен

Механика

1. Траектория снаряда до разрыва и траектории осколков после разрыва изображены на рисунке 54. Если бы снаряд не разорвался, то дальность его полета была бы равна $s_1 = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$, где v_0 – начальная скорость снаряда. Поскольку осколки упали на землю одновременно, то после разрыва снаряда их скорости были направлены горизонтально, а их центр масс, двигаясь по воображаемой траектории неразорвавшегося снаряда, упал бы в точке C на расстоянии s_1 от пушки. Обозначим через s_2 расстояние от точки падения центра масс до точки падения второго осколка. В соответствии с определением центра масс, $\frac{s_1}{s_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{m - m_1}{m_1} = 3$, следовательно, $s = s_1 + s_2 = \frac{4v_0^2 \sin 2\alpha}{3g}$. Отсюда получаем $v_0^2 = \frac{3gs}{4\sin 2\alpha}$ и

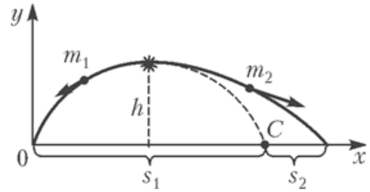


Рис. 54

$$E_к = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{3}{8}\frac{mgs}{\sin 2\alpha} \approx 0{,}55 \text{ МДж}.$$

2. Когда одна игрушка массой m оказалась на бортике, масса плота с игрушками стала меньше на величину m и уровень воды понизился на $\Delta h_1 = \frac{m}{\rho_0 S}$, где ρ_0 – плотность воды, S – площадь дна бассейна. Когда вторую игрушку сняли с плота, уровень воды понизился еще на $\frac{m}{\rho_0 S}$, а когда после этого игрушка упала в воду, уровень воды поднялся на $\frac{m}{\rho S}$, где ρ – плотность материала игрушки. Таким образом,

$$\Delta h_2 = \frac{m}{\rho_0 S} - \frac{m}{\rho S} = \frac{m}{\rho_0 S}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) = \Delta h_1\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right),$$

и

$$n=\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1}{1-\Delta h_2/\Delta h_1}=1{,}2\,.$$

3. Обозначим через v_0 скорость бруска при прохождении положения равновесия до прилипания пластилина, а через v_1 – скорость бруска сразу после прилипания к нему пластилина. По закону сохранения импульса, в момент прилипания пластилина к бруску имеем $Mv_0=(M+m)v_1$. Следовательно, максимальная скорость бруска с прилипшим пластилином равна $v_1=\dfrac{Mv_0}{M+m}$. Из закона сохранения энергии следуют уравнения $\dfrac{kA_0^2}{2}=\dfrac{Mv_0^2}{2}$ и $\dfrac{kA_1^2}{2}=\dfrac{(M+m)v_1^2}{2}$, где k – жесткость пружины. Отсюда находим

$$A_1=A_0\sqrt{\frac{M}{M+m}}=4\ \text{см}\,.$$

Молекулярная физика и термодинамика

1. Обозначим через H высоту слоя ртути, которую налили в правое колено, а через h – смещение ртути в левом колене от исходного уровня. Тогда изменение уровня ртути в правом колене будет $H - h$, а давление воздуха в левом колене будет $p=p_0+\rho g(H-2h)$, где ρ – плотность ртути, g – ускорение свободного падения. По закону Бойля–Мариотта, $pLS=p_0(L+h)S$, где S – площадь сечения трубки. Из этих уравнений находим

$$p_0=\frac{\rho g(H-2h)L}{h}=\rho gL(n-1)=750\ \text{мм рт.ст.}$$

2. Газ получает тепло от нагревателя на участке *1–2* и отдает тепло холодильнику на участке *3–4*. КПД цикла по определению равен $\eta=\dfrac{A}{Q_{12}}$, где A – работа, совершаемая газом за цикл. Поскольку изменение внутренней энергии газа в циклическом процессе равно нулю, из первого закона термодинамики следует, что работа газа равна алгебраической сумме количеств теплоты, которыми газ обменивается с окружающими телами: $A=Q_{12}-|Q_{34}|$. Кроме того, $Q_{12}=C(T_2-T_1)=C\Delta T_1$, $Q_{34}=C(T_4-T_3)=-C\Delta T_2$, где C – теплоемкость газа в процессе, в котором давление пропорционально объему. Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в том, что теплоемкость ν

молей одноатомного идеального газа в таком процессе равна $C = 2\nu R$, где R – универсальная газовая постоянная. Итак,

$$\eta = \left(1 - \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) \cdot 100\% = 25\% .$$

3. В горизонтально расположенном цилиндре пар является насыщенным и его давление равно p_0. Когда цилиндр ставят вертикально, поршень начинает опускаться, пар в нижней части цилиндра конденсируется, а вода в верхней части испаряется. Если в нижней части цилиндра не весь пар сконденсировался, а в верхней части цилиндра вся вода испарилась, то при равновесии поршня давление ненасыщенного пара в верхней части цилиндра уменьшилось до величины $p_1 = p_0 - \frac{Mg}{S}$. Если число молей пара в каждой из частей горизонтально расположенного цилиндра обозначить через ν, то число молей воды в этих частях по условию будет равно $\nu/5$. Поэтому согласно уравнению Менделеева–Клапейрона давление в горизонтально расположенном цилиндре должно удовлетворять соотношению $p_0 S l = \nu RT$, а в верхней части вертикального цилиндра установившееся давление p_1 будет удовлетворять соотношению $p_1 S(l + h) = 1{,}2\nu RT$. Из записанных соотношений находим

$$h = l\frac{(p_0 S/5) + Mg}{p_0 S - Mg} \approx 64 \text{ мм}.$$

Электродинамика

1. Потенциал точки, находящейся на расстоянии r от точечного заряда q, относительно бесконечно удаленной от него точки равен $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Согласно принципу суперпозиции электростатических полей потенциал, создаваемый первым и вторым зарядами в точке *3*, где удерживают третий заряд, равен $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{7a} + \frac{1}{4a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{11}{28a}$, а потенциал вершины прямоугольного треугольника с основанием $3a$ и высотой $4a$ (точки *3′* на рисунке 55), в крайних точках основания которого находятся точечные заряды q, равен $\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4a} + \frac{1}{5a}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{9}{20a}$. По-

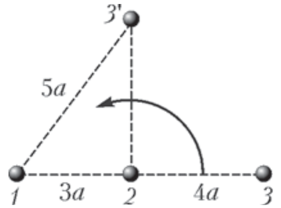


Рис. 55

этому искомая работа равна

$$A = q(\varphi_3 - \varphi_1) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{9}{20} - \frac{11}{28}\right) = \frac{q^2}{70\pi\varepsilon_0 a} \approx 5{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

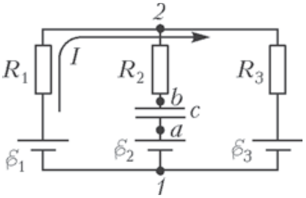


Рис. 56

2. По цепи течет постоянный ток I, направление которого указано на рисунке 56 стрелкой. По закону Ома для полной цепи, $I = \dfrac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3}{R_1 + R_3}$. Разность потенциалов между точками *1* и *2* находим из закона Ома для неоднородного участка цепи: $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathscr{E}_1 - IR_1$, а разность потенциалов между обкладками конденсатора равна $\varphi_a - \varphi_b = \varphi_1 + \mathscr{E}_2 - \varphi_2 = IR_1 - \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$. Следовательно, заряд на конденсаторе равен

$$q = C(\varphi_a - \varphi_b) = C\left(\frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_3}{R_1 + R_3} R_1 - \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2\right) = 10^{-6} \text{ Кл} = 1 \text{ мкКл}.$$

3. Используя закон Ома для полной цепи и закон Джоуля–Ленца, находим, что мощность, выделяющаяся в резисторе сопротивлением R, равна $P = \dfrac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}$, где $\mathscr{E}$ – ЭДС источника, r – его внутреннее сопротивление. Анализ этого выражения показывает, что оно достигает максимума при $R = r$. Например, находя производную от P по R, а именно $P' = \dfrac{\mathscr{E}^2\left((R+r)^2 - 2(R+r)R\right)}{(R+r)^4}$, и приравнивая ее нулю, приходим к записанному выше условию. КПД цепи, определяемый как $\eta = \dfrac{P}{P_{\text{полн}}}$, где $P_{\text{полн}} = \dfrac{\mathscr{E}^2}{R+r}$ – мощность, развиваемая источником, равен $\eta = \dfrac{R}{R+r}$. Поэтому в первом случае $\eta_1 = \dfrac{r}{r+r} = \dfrac{1}{2}$, а во втором случае $\eta_2 = \dfrac{r/2}{(r/2)+r} = \dfrac{1}{3}$. Искомое отношение равно $n = \dfrac{\eta_2}{\eta_1} = \dfrac{2}{3}$, т.е. КПД уменьшится в полтора раза.

Оптика

1. Поскольку проекции скоростей предмета и изображения на направление, параллельное зеркалу, равны, то $v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta$, или $v_2 = v_1 \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. Введем неподвижную координатную систему, направив ось x перпендикулярно зеркалу, а начало координат совместив с плоскостью зеркала в некоторый момент времени $t = 0$. Если l – расстояние от предмета до зеркала при $t = 0$, то в момент времени t координаты предмета и изображения станут $x_п = l - v_1 t \sin\alpha$ и $x_и = -l + v_2 t \sin\beta$ соответственно. Поскольку зеркало находится посередине между предметом и изображением, то его координата в момент времени t будет $x_з = \dfrac{x_п + x_и}{2}$. Следовательно, модуль скорости зеркала равен

$$u = \frac{x_з}{t} = \frac{v_2 \sin\beta - v_1 \sin\alpha}{2} = v_1 \frac{\cos\alpha \operatorname{tg}\beta - \sin\alpha}{2} = 0{,}5 \text{ см/с}.$$

2. Ход луча, преломленного на границе раздела воздуха и воды, изображен на рисунке 57 при двух положениях источника. Видно, что горизонтальное перемещение Δx источника и вертикальное перемещение Δy светлого пятна на стенке бассейна связаны соотношением $\Delta y = \dfrac{\Delta x}{\operatorname{tg}\beta}$, где β – угол преломления. По закону преломления, $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$. При равномерном движении за время Δt источник сместится на $\Delta x = v_1 \Delta t$, а светлое пятно на стенке бассейна сместится на $\Delta y = v_2 \Delta t$. Окончательно получим

$$v_2 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} v_1 \approx 1{,}2 \text{ м/с},$$

причем пятно движется по стенке вверх.

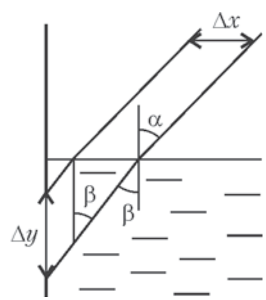


Рис. 57

3. Ход лучей изображен на рисунке 58. При построении преломленного в линзе луча использован вспомогательный луч DO, параллельный падающему и проходящий через оптический центр линзы O без преломления. Согласно известному свой-

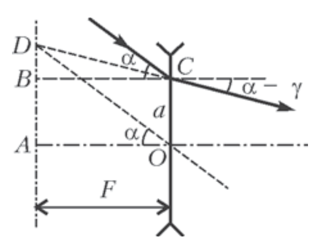


Рис. 58

ству тонкой рассеивающей линзы, продолжения всех параллельных лучей, падающих на нее, пересекаются в фокальной плоскости. С учетом того, что фокусное расстояние рассеивающей линзы отрицательно, из треугольников AOD и BCD находим $F\operatorname{tg}\alpha = a + F\operatorname{tg}(\alpha-\gamma)$, откуда

$$F = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}(\alpha-\gamma)} \approx \frac{a}{\gamma} = 20\text{ см}.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Олимпиада «Физтех-2016»

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right).$

ОДЗ неравенства задается условиями $\frac{x^2-2}{2x-3} > 0$, $\frac{x^2-2}{2x-3} \neq 1$ (тогда подлогарифмическое выражение также положительно), откуда $x \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, $x \neq 1$.

Воспользуемся методом рационализации. На ОДЗ знак разности $\log_{\frac{x^2-2}{2x-3}}\left(\frac{\left(x^2-2\right)(2x-3)}{4}\right) - 1$ совпадает со знаком выражения $\left(\frac{x^2-2}{2x-3} - 1\right)\left(\frac{\left(x^2-2\right)(2x-3)}{4} - \frac{x^2-2}{2x-3}\right)$, поэтому данное неравенство равносильно каждому из следующих неравенств:

$$\left(\frac{x^2-2}{2x-3} - 1\right)\left(\frac{\left(x^2-2\right)(2x-3)}{4} - \frac{x^2-2}{2x-3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{2x-3} \cdot \frac{\left(x^2-2\right)\left((2x-3)^2-4\right)}{4(2x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(2x-5)(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right).$$

С учетом ОДЗ получаем $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

2. $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что при любых x выполняется неравенство $-4 \le \cos x - 3\cos 4x \le 4$, откуда следует, что левая часть уравнения не превосходит 16. В то же время, правая часть уравнения не меньше 16. Следовательно, равенство может достигаться только при одновременном выполнении условий $(\cos x - 3\cos 4x)^2 = 16$ и $16 + \sin^2 3x = 16$, откуда $|\cos x - 3\cos 4x| = 4$, $\sin 3x = 0$.

Из второго уравнения получаем $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Подстановкой в первое уравнение убеждаемся, что подходит только $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (Для этого рассматриваем 6 возможных случаев: $x = 2k\pi$, $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ и т.д. Каждое из этих значений x подставляем в первое уравнение, период $2k\pi$ при этом можно отбросить.)

3. $\left(\frac{19}{4}; \frac{17}{8}\right)$.

Обозначим $\sqrt{x + 2y} = u$, $x - 2y = v$, где $u \ge 0$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u + v = \frac{7}{2}, \\ u^2 v + u^2 = \frac{27}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{7}{2} - u, \\ u^2\left(\frac{7}{2} - u\right) + u^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $2u^3 - 9u^2 + 27 = 0$. Подбирая целый корень $u = 3$ и выделяя множитель $(u - 3)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u - 3)\left(2u^2 - 3u - 9\right) = 0$, откуда $u = 3$ или $u = -\frac{3}{2}$. Значение $u = -\frac{3}{2}$ не подходит. При $u = 3$ получаем $v = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} x + 2y = 9, \\ x - 2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{19}{2}, \\ 4y = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{4}, \\ y = \frac{17}{8}. \end{cases}$$

4. $R = 8\sqrt{\frac{3}{11}}$, $r = 5\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Обозначим центры окружностей Ω и ω через O и Q соответственно. Поскольку C – середина хорды AE окружности Ω, то отрезок OC перпендикулярен OE. Опустим из точки Q перпендикуляр QH на прямую AE. Тогда $BH = HC = 1$ (диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам).

Пусть $OC = x$, а радиусы окружностей Ω и ω равны R и r соответственно. Тогда $QH = 2x$ (так как OC – средняя линия треугольника DHQ), $r = QB = \sqrt{QH^2 + BH^2} = \sqrt{4x^2+1}$, $R = OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{x^2+16}$. Выразим двумя способами отрезок OQ. С одной стороны, так как окружности касаются внутренним образом, расстояние между их центрами равно разности радиусов, т.е. $OQ = R - r$. С другой стороны, из прямоугольной трапеции $CHQO$ получаем, что $OQ^2 = CH^2 + (QH - OC)^2 = 1 + x^2$.

Значит, $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{4x^2+1} = \sqrt{x^2+16}$, откуда

$$5x^2 + 2 + 2\sqrt{4x^4+5x^2+1} = x^2 + 16 \Leftrightarrow \sqrt{4x^4+5x^2+1} = 7 - 2x^2.$$

При условии $7 - 2x^2 \geq 0$ последнее уравнение равносильно следующему: $4x^4 + 5x^2 + 1 = 49 - 28x^2 + 4x^4$, $x^2 = \dfrac{16}{11}$. Тогда получаем, что $R = 8\sqrt{\dfrac{3}{11}}$, $r = 5\sqrt{\dfrac{3}{11}}$.

5. 13122.

Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Теперь на оставшиеся пять мест нужно расставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 9. Для этого выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберем так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0, 1, 2, \ldots, 8$) и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом (например, если сумма всех цифр кроме последней равна 50, то в качестве последней цифры выбираем 4, чтобы итоговая сумма цифр делилась на 9).

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 13122$ способа.

6. $a = 9$, $a = 23 + 4\sqrt{15}$.

Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $\|y+9\|+\|x+2\|=2$ и $x^2+y^2=3$. Первое из них задает квадрат G с центром $(-2;-9)$, диагонали которого равны 4 и параллельны осям координат. Второе задает окружность S с центром $(0;0)$ радиуса $\sqrt{3}$. Заметим, что G и S не имеют общих точек.

Второе уравнение исходной системы при $a>0$ задает окружность Ω с центром $(-2;-4)$ радиуса $R=\sqrt{a}$ (при $a<0$ дает пустое множество, при $a=0$ – одну точку; в этих случаях трех решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R=\sqrt{20}\pm\sqrt{3}$, две общие точки при $R\in\left(\sqrt{20}-\sqrt{3};\sqrt{20}+\right.$ $\left.+\sqrt{3}\right)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R=3$ или $R=7$, две общие точки при $R\in(3;7)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R=\sqrt{20}+\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (поскольку $3<\sqrt{20}-\sqrt{3}<7$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R=\sqrt{20}-\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (поскольку $\sqrt{20}-\sqrt{3}<3$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R=3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (поскольку $\sqrt{20}-\sqrt{3}<3<$ $<\sqrt{20}+\sqrt{3}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R=7$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (поскольку $7>\sqrt{20}+\sqrt{3}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R=3$ и $R=\sqrt{20}+\sqrt{3}$. Тогда $a=9$ и $a=23+4\sqrt{15}$.

7. а) $2:1$; б) $B_1D=3\left(1+\sqrt{13}\right)$, $V=108\sqrt{6+2\sqrt{13}}$.

а) Из соображений симметрии (относительно плоскости BDD_1B_1) плоскость α проходит через точку C и, значит, через центр O грани $ABCD$. Отрезки B_1H и DF – проекции параллельных отрезков B_1D_1 и DO на прямую B_1D, причем $B_1D_1=2DO$. Значит, $B_1H:DF=2$.

б) Поскольку сфера касается всех боковых граней призмы, ее проекция на основание есть окружность, вписанная в это основание. Значит, $AB = 2r = 6$. Кроме того, α и β – это две параллельные плоскости, касающиеся сферы, поэтому расстояние между ними равно диаметру сферы, т.е. 6. Так как $B_1D \perp \alpha$, этим расстоянием является отрезок HF, поэтому $HF = 6$.

Обозначим $B_1D = d$. Поскольку D_1H – высота прямоугольного треугольника B_1D_1D, то $B_1H \cdot B_1D = B_1D_1^2 = 72$ и, следовательно, $B_1H = \dfrac{72}{d}$. Тогда $DF = \dfrac{1}{2}B_1H = \dfrac{36}{d}$ и $HF = B_1D - B_1H - DF = d - \dfrac{72}{d} - \dfrac{36}{d}$. Получаем уравнение $6 = d - \dfrac{108}{d}$, откуда $d^2 - 6d - 108 = 0$, $d = 3 + 3\sqrt{13}$ (поскольку $d > 0$).

Наконец, высота призмы равна

$$h = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{9\left(14 + 2\sqrt{13}\right) - 72} = 3\sqrt{6 + 2\sqrt{13}};$$

тогда объем призмы равен $V = AB^2 \cdot h = 108\sqrt{6 + 2\sqrt{13}}$.

Вариант 2

1. $x = \pm\arccos\dfrac{1}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Данное уравнение при условии $\cos x \sin x \neq 0$ равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)}{\sin x} - \frac{\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right)}{\cos x} = 5|\cos x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 - 8\sin^2 x - 4\cos^2 x + 3 = 5|\cos x| \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 5|\cos x| + 1 = 0.$$

Решая последнее уравнение как квадратное относительно $|\cos x|$, получаем, что $|\cos x| = 1$ или $|\cos x| = \dfrac{1}{4}$. Первый случай не удовлетворяет ОДЗ (если $|\cos x| = 1$, то $\sin x = 0$). Из второго уравнения находим, что $x = \pm\arccos\dfrac{1}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$, $\left(\sqrt[4]{\dfrac{21}{76}}; 4 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{21}{76}}\right)$.

Обозначим $\sqrt{\dfrac{y}{x}} = u$, $\sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0$, $v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\dfrac{y}{x}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{y^2} = |y| = y$, $\quad \dfrac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv - 2v - u + 2 = 0, \\ 3v^4 + u^4v^4 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-1)(u-2) = 0, \\ 3v^4 + u^4v^4 = 84. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 1$ или $u = 2$.

Если $v = 1$, то $3 + u^4 = 84$, откуда $u = 3$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}$, $y = uv = 3$.

Если $u = 2$, то $3v^4 + 16v^4 = 84$, откуда $v = \sqrt[4]{\frac{84}{19}}$; тогда $x = \frac{v}{u} = \sqrt[4]{\frac{21}{76}}$, $y = 4x = 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{21}{76}}$.

3. $x \in [3 - 6\log_2 17; 1] \cup (3; +\infty)$.

Логарифмируя обе части неравенства по основанию 2, получаем

$$\frac{5x-3}{3-x}\log_2 17 + (3-x) \le 2 + \log_2 17 \Leftrightarrow \frac{6x-6}{3-x}\log_2 17 + (1-x) \le$$

$$\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(6\log_2 17 - 3 + x)}{3-x} \le 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим, что $x \in [3 - 6\log_2 17; 1] \cup (3; +\infty)$.

4. а) $OM = 5\sqrt{13}$; б) $MA = \frac{20\sqrt{13}}{3}$, $S = 204$.

а) Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, поэтому углы OKM и OPM прямые, т.е. из точек K и P отрезок OM виден под прямым углом. Следовательно, окружность, построенная на отрезке OM как на диаметре, проходит также через точки K и P, значит, это окружность Ω. Отрезок OM равен удвоенному радиусу этой окружности, т.е. $OM = 5\sqrt{13}$.

б) Обозначим точку касания окружности со стороной CF через B, высоту треугольника, проведенную из вершины M, через MH. Пусть $\angle AMH = \gamma$. Центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому $O \in MA$. Из треугольника POM находим, что $PM = \sqrt{OM^2 - OP^2} = 17$.

Поскольку у треугольников CFT и CFM общее основание CF, то их площади относятся как высоты, проведенные к этому основанию, а отношение этих высот равно $TA : MA$. Отсюда получаем $\dfrac{5}{8}=\dfrac{TA}{MA}=\dfrac{MA-MT}{MA}$, $5MA=8MA-8MT$,

$MA=\dfrac{8}{3}MT=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{5\sqrt{13}}{2}=\dfrac{20\sqrt{13}}{3}$, $AO=AM-OM=\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$.

Поскольку $OB\parallel MH$, $\angle AOB=\angle AMH=\gamma$; из треугольника AOB получаем, что $\cos\gamma=\dfrac{BO}{AO}=\dfrac{18}{5\sqrt{13}}$. Из треугольника AMH находим, что $MH=MA\cos\gamma=24$.

Выразим площадь треугольника CMF двумя способами. С одной стороны, $S_{CMF}=\dfrac{1}{2}\cdot CF\cdot MH=12\cdot CF$. С другой стороны, $S_{CMF}=pr$, где $r=6$ – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. В силу того, что $FB=FK$, $MK=$ $=MP$, $CB=CP$, получаем, что $p=FB+CB+MP=CF+$ $+MP=CF+17$, $S_{CMF}=6(CF+17)$. Получаем уравнение $12\cdot CF=6(CF+17)$, откуда $SF=17$, $S_{CMF}=12\cdot CF=204$.

5. 5184.

Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6\cdot6$ способами), а пятую цифру подберем так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7), и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=5184$ способа.

6. а) $25\pi-25\arcsin 0{,}8+12$; б) $a=-20$, $a=-12$.

а) Заметим, что равенство $|a|+|b|=a+b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}16+6x-x^2-y^2\ge 0,\\ 6x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+y^2\le 25,\\ x\ge 0.\end{cases}$$

Первое неравенство задает круг радиуса 5 с центром $B(3;0)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости

$x \geq 0$. При этом окружность, ограничивающая круг, пересекается с осью ординат в точках $M(0; 4)$ и $P(0; -4)$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $x \leq 0$.

Площадь отсеченного сегмента можно определить как разность площадей сектора BMP и треугольника BMP. Чтобы найти величину центрального угла сектора BMP, опускаем из центра окружности перпендикуляр BO на хорду MP. Тогда $\angle MBP = 2\angle OBP = 2\arcsin 0,8$. Следовательно, площадь отсеченного сегмента равна $25\arcsin 0,8 - \frac{1}{2}BO \cdot MP = 25\arcsin 0,8 - 12$. Тогда искомая площадь S равна $25\pi - 25\arcsin 0,8 + 12$.

б) Рассмотрим второе уравнение исходной системы. Перепишем его в виде $a(y-1) + 15x + 15y = 0$. Если подставить в него $y = 1$, то получим, что $x = -1$. Таким образом, это уравнение задает прямую, проходящую через точку $(-1; 1)$. Эта точка лежит в отсеченном от окружности сегменте.

Значит, система имеет ровно одно решение тогда, когда прямая проходит через одну из «вершин» сегмента – точку $M(0; 4)$ или точку $P(0; -4)$. Подставляя координаты точек в уравнение прямой, получаем

$$M(0; 4) \to 4(a+15) - a = 0 \Leftrightarrow a = -20;$$

$$P(0; -4) \to -4(a+15) - a = 0 \Leftrightarrow a = -12.$$

7. а) $90°$; б) $2:1$; в) $V = 15$.

а) Точки P и Q лежат на окружности с диаметром BC; значит, $\angle BPC = 90°$, $\angle BQC = 90°$ (т.е. BP и CQ – высоты треугольника ABC). Прямая BP – это проекция прямой B_1P на плоскость основания, при этом $BP \perp PA$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $B_1P \perp PA$, значит, $\angle TPA = 90°$.

б) Поскольку прямые B_1P и C_1Q пересекаются, то все четыре точки B_1, C_1, P и Q лежат в одной плоскости – назовем ее α. Значит, прямые PQ и B_1C_1 лежат в одной плоскости α, а так как они не пересекаются (поскольку лежат в параллельных друг другу основаниях призмы), то $PQ \parallel B_1C_1$. Значит, $PQ \parallel BC$. Трапеция $PQBC$ вписана в окружность (сечение сферы плоскостью основания), следовательно, она равнобокая, тогда углы при ее основании BC равны, и поэтому треугольник ABC равнобедренный ($AB = AC$).

Треугольники B_1C_1T и PQT подобны по двум углам. Из равенства треугольников CC_1Q и BB_1P следует, что $B_1P = C_1Q$, поэтому оба треугольника B_1C_1T и PQT равнобедренные с основаниями B_1C_1 и PQ соответственно. Значит,

$$PQ : BC = PQ : B_1C_1 = TQ : TC_1 =$$

$$= TQ : (QC_1 - TQ) = TQ : (B_1P - TQ) = 2 : 3,$$

откуда

$$\frac{CP}{AP} = \frac{AC - AP}{AP} = \frac{AC}{AP} - 1 = \frac{BC}{PQ} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

в) Если $AC = 3$, то $CP = 1$, $AP = 2$, $AB = 3$; $BP = \sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{5}$; $BB_1 = \sqrt{B_1P^2 - BP^2} = 2\sqrt{5}$. Значит, площадь основания призмы равна $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BP = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, объем призмы равен $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = 15$.

Вариант 3

1. $x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; 1] \cup \{2\}$.

Основание степени положительно при всех x, поэтому знак разности $\left(x^2 - 3x + 3\right)^{4x^3+5x^2} - \left(x^2 - 3x + 3\right)^{2x^3+18x}$ совпадает со знаком выражения $\left(\left(x^2 - 3x + 3\right) - 1\right)\left(\left(4x^3 + 5x^2\right) - \left(2x^3 + 18x\right)\right)$, и данное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\left(x^2 - 3x + 3\right) - 1\right)\left(\left(4x^3 + 5x^2\right) - \left(2x^3 + 18x\right)\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)x\left(2x^2 + 5x - 18\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 x(2x+9) \le 0,$$

откуда методом интервалов находим, что

$$x \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; 1] \cup \{2\}.$$

2. $x = -\arccos\frac{\sqrt{13} - 1}{4} + 2k\pi$, $x = -\arccos\frac{1 - \sqrt{13}}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

На ОДЗ данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{2\sin x \sin 6x}{2\sin 3x \cos x} = 2|\sin 2x| \Leftrightarrow \frac{2\sin x \sin 3x \cos 3x}{\sin 3x \cos x} = 2|\sin 2x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x \cos 3x}{\cos x} = 2|\sin x \cos x| \Leftrightarrow \sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = 2|\sin x \cos x|.$$

Заметим, что на ОДЗ $\sin x \cos x \neq 0$ (иначе $\sin 2x = 0$, $\sin 4x = 0$, и знаменатель обращается в ноль).

Рассмотрим два случая.

а) $\sin x \cos x > 0$ (т.е. угол x лежит в первой или третьей четверти). Тогда получаем $\sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = 2\sin x \cos x$, откуда $4\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$, так как $\sin x \neq 0$. Следовательно, $\cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение $\cos x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{4}$ не имеет решений, так как правая часть больше единицы, а из уравнения $\cos x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{4}$, учитывая ограничение, получаем $x = -\arccos\dfrac{1-\sqrt{13}}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin x \cos x < 0$ (т.е. угол x лежит во второй или четвертой четверти). Тогда получаем $\sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = -2\sin x \cos x$, откуда $4\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$. Следовательно, $\cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}$. Уравнение $\cos x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{4}$ не имеет решений, так как правая часть меньше минус единицы, а из уравнения $\cos x = \dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$, учитывая ограничение, получаем $x = -\arccos\dfrac{\sqrt{13}-1}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $(-4; -1)$.

Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x+y) - 2(x+y) + 10 = 0, \\ xy\left(x^2 - y^2\right) - 2\left(x^2 - y^2\right) - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-2)(x+y) = -10, \\ (xy-2)(x-y)(x+y) = 30. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое (это можно сделать, так как правые части обоих уравнений отличны от нуля), получаем $x - y = -3$, откуда $y = x + 3$. Подставляем это в первое уравнение: $\left(x^2 + 3x - 2\right)(2x+3) = -10$, $2x^3 + 9x^2 + 5x + 4 = 0$.

Подбирая целый корень $x = -4$ и выделяя множитель $(x+4)$, получаем $(x+4)\left(2x^2 + x + 1\right) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = -4$. Тогда $y = -1$, и пара чисел $(-4; -1)$ является единственным решением системы.

4. $AH = 12$, $\angle CBD = 30°$, $S_{ABC} = 24\sqrt{3}$.

Обозначим центр окружности через O, точку касания прямой DE с окружностью через T, а радиус окружности через R.

Поскольку медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины, то $DM = \frac{1}{2}BM = R$, $CE = \frac{3}{2}CM = 6$. Заметим, что в прямоугольном треугольнике ODT катет $OT = R$, а гипотенуза $OD = 2R$. Следовательно, $\angle TDO = 30^\circ$. Отрезок DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$, $\angle CBD = \angle MBC = \angle MDE = 30^\circ$. Из треугольника BMC находим, что $BC = MC \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}$.

Высота AH исходного треугольника вдвое больше, чем CE (так как CE – средняя линия треугольника ABH). Значит, $AH = 12$. Тогда площадь треугольника равна $\frac{1}{2}BC \cdot AH = 24\sqrt{3}$.

5. 2592.

Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того чтобы выполнилась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберем так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7), и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 2592$ способа.

6. а) 60; б) $a = -36$, $a = 32$.

Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 15x \ge 0, \\ 8y \ge 0, \\ 120 - 15x - 8y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 15x + 8y \le 120. \end{cases}$$

Эта система задает на плоскости треугольник (с внутренней частью) с вершинами $E(8;0)$, $G(0;15)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 60.

Второе уравнение исходной системы задает окружность с центром $O\left(4\cos\frac{a\pi}{2}; \frac{15}{2}\right)$ радиуса $\frac{|a+2|}{4}$ (или точку при $a = -2$).

Система может иметь ровно три решения только в одном случае: когда окружность, задаваемая вторым уравнением, описана около треугольника EGN. Центр M окружности, описанной около прямоугольного треугольника, – это середина гипотенузы EG, а ее радиус равен половине гипотенузы. Точка M имеет координаты $\left(4; \frac{15}{2}\right)$, откуда получаем

$$4\cos\frac{a\pi}{2} = 4\,,\ \left(\frac{a+2}{4}\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2.$$

Второе уравнение задает два значения параметра: $a = -36$ и $a = 32$. Подстановкой убеждаемся, что оба они удовлетворяют первому уравнению.

7. $V = 420\sqrt{3}$, $AK = 8$ или $AK = 4$.

Поскольку сфера Ω радиуса r касается всех боковых граней призмы, то в основания призмы можно вписать окружности того же самого радиуса r. Значит, сторона основания равна $2r\sqrt{3} = 2\sqrt{35}$, площадь основания $S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{35}\right)^2 = 35\sqrt{3}$, объем призмы $V = Sh = 35\sqrt{3}\cdot 12 = 420\sqrt{3}$.

Из того, что призма правильная, а сфера касается всех ее граней, следует, что плоскость LAC также касается сферы; при этом точки касания сферы с плоскостями LAC и LA_1C_1 лежат на отрезках LQ и LQ_1, где точки Q и Q_1 – середины ребер AC и A_1C_1.

Рассмотрим плоскость прямоугольника BB_1Q_1Q. Обозначим центр окружности ω, получающейся в сечении сферы данной плоскостью, через O, а точки касания отрезков LQ_1, LQ и QQ_1 с окружностью – G, P и J соответственно. Высота LH треугольника LQQ_1 равна высоте треугольника, лежащего в основании призмы, т.е. $LH = 3r$.

Запишем площадь S_0 треугольника LQQ_1 двумя способами: $S_0 = pr$ и $S_0 = \frac{1}{2}LH\cdot QQ_1 = \frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 12 = 18r$, где p – полупериметр треугольника LQQ_1. Следовательно, $p = 18$. Обозначим $QJ = x$; тогда $Q_1G = Q_1J = 12 - x$, $PQ = x$, $LG = LP = \frac{1}{2}\big(36 - 2x - 2(12 - x)\big) = 6$.

Итак, $QQ_1 = 12$, $QL = 6 + x$, $Q_1L = 18 - x$. Тогда формула Герона дает, что $S_0 = \sqrt{18\cdot 6\cdot x\cdot(12 - x)}$, откуда $\sqrt{18\cdot 6\cdot x\cdot(12 - x)} = 18r$, $x(12 - x) = 3r^2$. Подставляя значение радиуса из условия, получаем уравнение $x^2 - 12x + 35 = 0$, следовательно, $x = 5$ или $x = 7$.

Тогда $QL = 13$ или $QL = 11$, а так как $BL = \sqrt{QL^2 - BQ^2} = \sqrt{QL^2 - 9r^2} = \sqrt{QL^2 - 105}$, то $BL = 4$ или $BL = 8$. Остается заметить, что $AK = BL = QH$.

ФИЗИКА

9 класс

1. 1) Горизонтальная составляющая скорости не изменяется: $v_x = v$, $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$, $v_y = \sqrt{v_0^2 - v^2} = 8$ м/с.

2) $t = \dfrac{v_y}{g} = 0{,}8$ с.

2. Для тела массой m, согласно второму закону Ньютона, $mg = G\dfrac{Mm}{R^2}$ и $m \cdot 0{,}81g = G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$. Отсюда находим $h = \dfrac{1}{9}R$.

3. По второму закону Ньютона, $\dfrac{mv^2}{R} = mg - N_1$ и $\dfrac{m(2v)^2}{R} = mg - N_2$, где $N_1 = 0{,}9mg$. Отсюда получаем

$$N_2 = 0{,}6mg.$$

4. 1) $p_1 = p_0 + \rho gH$.

2) Ускорение центра масс горизонтального столбика жидкости длиной R (считая от места изгиба) равно $a = \omega^2 \cdot \dfrac{3}{2}R$. По второму закону Ньютона, $(p_2 - p_1)S = \rho SR \cdot a$. Окончатеьно находим

$$p_2 = p_1 + \frac{3}{2}\rho\omega^2R^2 = p_0 + \rho gH + \frac{3}{2}\rho\omega^2R^2.$$

5. 1) Грузы движутся с ускорением $a = g\dfrac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{7}{20}g$, причем ускорение левого груза направлено вверх.

2) Сила натяжения нити равна $T = m_2(g - a) = \dfrac{27}{20}mg$. На клин действуют две силы натяжения нити (через блок), сила нормального давления со стороны правого груза, равная $3mg\cos\alpha$, сила тяжести клина, сила реакции опоры и сила трения со стороны стола. Сумма проекций всех сил на горизонтальное направление равна нулю:

$$F_{\text{тр}} + T\cos\alpha - 3mg\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Окончательно получаем, что сила трения равна $F_{тр} = \dfrac{63}{100} mg$ и направлена вправо.

10 класс

1. 1) $T = (2m + m) g \sin\alpha = \dfrac{1}{2} mg$.

2) Ускорение равно $a = \dfrac{mg\sin\alpha + 2mg\sin\alpha}{2m} = \dfrac{3g\sin\alpha}{2} = \dfrac{g}{4}$ и направлено вниз вдоль наклонной поверхности.

2. 1) Из условия равновесия $T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\alpha - mg = 0$, где $T_1 = 5T_2$, получаем $T_2 = \dfrac{7}{60} mg$.

2) Согласно второму закону Ньютона, $T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\alpha = m\omega^2 R$, откуда находим $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{5R}}$.

3. В соответствии с условием задачи, $U_2 - U_1 = \dfrac{3}{2} A_{12}$, $Q_{12} = \dfrac{5}{2} A_{12}$, $0 = U_1 - U_2 + A_{23}$, $\eta = \dfrac{A}{Q_{12}}$, $A = A_{12} + A_{23} + A_{31}$, $x_1 = \dfrac{A}{A_{23}}$, $x_2 = \dfrac{A_{23}}{-A_{31}}$. Отсюда находим: 1) $x_1 = \dfrac{5}{3}\eta$; 2) $x_2 = \dfrac{3}{5(1-\eta)}$.

4. 1) При движении с ускорением a_0 разность давлений в местах изгиба трубки равна $\rho g \cdot 2H$. Для стобика длинной L, по второму закону Ньютона, $\rho g \cdot 2HS = \rho L S a_0$. Отсюда получаем $H = \dfrac{L}{16}$.

2) При движении с ускорением a_1 разность давлений в местах изгиба трубки равна $\rho g (2H + l)$. Для столбика длиной L, по второму закону Ньютона, $\rho g (2H + l) S = \rho L S a_1$, где $H = \dfrac{L}{16}$. Отсюда находим, что выльется слой длиной $l = \dfrac{L}{24}$.

5. Для малых приращений можно записать $\nu C \Delta T = \nu C_V \Delta T + \Delta A$, или $\nu (C - C_V) \Delta T = \Delta A$.

Для случая 1): $\nu\alpha R \dfrac{T}{T_0} \Delta T = \nu \cdot \dfrac{3}{2} R \Delta T + \Delta A$, или $\nu\alpha R \dfrac{1}{T_0} \cdot \dfrac{1}{2} \Delta\left(T^2\right) = \nu \cdot \dfrac{3}{2} R \Delta T + \Delta A$; после суммирования получим

$\frac{1}{2}\nu\alpha R\frac{1}{T_0}\left(T_1^2-T_0^2\right)=\frac{3}{2}\nu R\left(T_1-T_0\right)+\Sigma\Delta A$, где $\Sigma\Delta A=0$ и $T_1=\frac{5}{4}T_0$; окончательно находим $\alpha=\frac{4}{3}$.

Для случая 2): $\Delta A=0$ и $\nu\left(C-C_V\right)\Delta T=0$, т.е. $C=C_V=\frac{3}{2}R$, или $\frac{4}{3}R\frac{T_2}{T_0}=\frac{3}{2}R$. Отсюда находим $T_2=\frac{9}{8}T_0$.

11 класс

1. 1) $T_A=mg\frac{l-\pi R}{l}=\frac{7-\pi}{7}mg$.

2) Мысленно переместим участок AB на малое расстояние x. Работа всех сил над этим участком равна изменению его потенциальной энергии: $T_Bx-T_Ax=\frac{m}{l}xgR\sin\alpha$. Отсюда получаем

$$T_B=T_A+\frac{2}{21}mg=\frac{23-3\pi}{21}mg.$$

2. Поскольку $V_2=\frac{3}{2}V_1$, $V_3=\frac{9}{4}V_1$, $p_2=\frac{3}{2}p_1$, то:

1) $T_2=\frac{3}{2}T_1$, $T_3=\frac{27}{8}T_1$;

2) $A_{12}=\frac{1}{2}\nu RT_1$, $A_{23}=\frac{15}{16}\nu RT_1$, и $A_{123}=A_{12}+A_{23}=\frac{23}{16}\nu RT_1$;

3) $Q=\nu\cdot\frac{3}{2}R\left(T_3-T_1\right)+A_{123}=5\nu RT_1$.

3. Сила Лоренца равна $F=qvB\sin\alpha$, где v – скорость. Сила трения равна $F_{\text{тр}}=\mu F=\mu qvB\sin\alpha$. Тогда:

1) $F_{\text{тр}1}=\mu q\frac{v_0}{2}B\sin\alpha=0,3\mu qv_0B$;

2) $-\mu qvB\sin\alpha=m\frac{\Delta v}{\Delta t}$, $-\mu qv\Delta tB\sin\alpha=m\Delta v$,

$-\mu q\Delta xB\sin\alpha=m\Delta v$, и $s_{\max}=\frac{5mv_0}{3\mu qB}$.

4. 1) $U=\frac{2}{3}\mathcal{E}$.

2) $I=\frac{\mathcal{E}}{3R}$.

3) В установившемся режиме после размыкания ключа напряжение на конденсаторе равно $\mathcal{E}$. Изменение энергии конден-

сатора равно $\Delta W_C = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{CU^2}{2} = \frac{5}{18}C\mathcal{E}^2$. Работа источника равна $A = (C\mathcal{E} - CU)\mathcal{E} = \frac{C\mathcal{E}^2}{3}$. По закону сохранения энергии, $Q = A - \Delta W_C = \frac{1}{18}C\mathcal{E}^2$.

5. 1) Расстояния (d) равны.

2) $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+s} = \frac{1}{F}$, $\frac{d+s}{d} = \Gamma = 2$, и $F = \frac{2}{3}s = 18$ см.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

ФИЗИКА

Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»

Первый тур

Вариант 1

1. v = 50 км/ч. **2.** $E_к = 3$ Дж. **3.** $\rho = 5$ кг/м^3.
4. $E_0 = 450$ В/м. **5.** $R_в = 10$ кОм. **6.** $U_{max} = 3$ В.
7. v = 0,5 м/с.

Вариант 2

1. s = 28 м. **2.** $\mu = 0{,}2$. **3.** P = 2100 Вт.
4. F = 0,9 мкН. **5.** P_2 = 30 Вт. **6.** $\mathcal{E}_с$ = 1 В. **7.** 2.

Вариант 3

1. L = 50 м. **2.** F = 0,4 Н. **3.** m = 830 г.
4. $C_1 : C_2 = 1$. **5.** $I_{ср}$ = 100 А. **6.** $\mathcal{E}_{ср}$ = 60 В.
7. D = −2,5 дптр.

Вариант 4

1. l = 70 м. **2.** $a = 6$ м/с^2. **3.** $\frac{m_а}{m_к} = 2$.
4. C = 2 мкФ. **5.** r = 1 Ом. **6.** C = 10 мкФ.
7. $\alpha = 60°$.

Вариант 5

1. s = 5 м. **2.** $v_0 = 6$ м/с. **3.** $m_к : m_а = 1$.
4. $E_н : E_к = 4$. **5.** R = 3 Ом. **6.** $\tau = 1$ с.
7. $v_{из} = 5$ см/с.

Второй тур

Вариант 1

1. $t = \dfrac{2d}{\sqrt{v^2 - u^2}} = 0{,}5$ мин . **2.** $a = 4\pi\alpha \approx 50{,}3\ \text{м/с}^2$.

3. $v = \sqrt{\dfrac{F(L-l)}{m}}$. **4.** $\varphi_2 = \varphi + (\varphi - \varphi_1)\dfrac{V_1}{V_2} = 0$.

5. $A = \nu R T_0 (m-1) = 2490$ Дж , где $\nu = 1$ моль.

6. $l = \sqrt{\dfrac{kq^2}{mg\cos\alpha}}$. **7.** $R = \dfrac{4\mathcal{E}}{3I} = 100$ Ом .

8. $\Gamma_2^2 - 5{,}2\Gamma_2 + 1 = 0$, $\Gamma_2 = 5$ или $\Gamma_2 = \dfrac{1}{5}$.

Вариант 2

1. $r_m = l - h = 3$ км . **2.** $\rho_\text{ш} = (3/4)\rho_\text{в}$ – шар будет плавать.

3. $s = (2/3)l = 60$ см . **4.** $m = \dfrac{(p_0 + \rho g h)MV}{RT} = 0{,}12$ мг .

5. $I_2 = I_1\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^{3/2} = 23$ А . **6.** $Q = -0{,}4$ нКл.

7. $\dfrac{I_\text{кз}}{I_1} = \dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{E} - U_1} \approx 5{,}3$, $r = \dfrac{\mathcal{E} - U_1}{I_1} = 1$ Ом .

8. $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)F < d < F$, 10 см < d < 20 см.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада «Росатом»

МАТЕМАТИКА

1. 1) 2 пары; 2) $(4; 1)$.

Общее решение уравнения можно записать как

$$\begin{cases} x = -1 + 5t, \\ y = -6 + 7t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z} .$$

Эти решения удовлетворяют неравенству

$$(5t-1)^2 + (7t-6)^2 \le 37 \Rightarrow 37t^2 - 47t \le 0 \Rightarrow t \in [0; 47/37] \Rightarrow t_1 = 0, \\ t_2 = 1 .$$

Допустимые пары: $(-1;-6)$ и $(4;1)$. Во второй паре значение $x+y$ наибольшее.

2. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Найдем x, при котором каждая из скобок равна нулю:

$$\sin^2 x - \cos x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right.$$

$$\cos 2x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi - x + 2\pi m, \\ 2x = -\pi + x + 2\pi l \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3}, \\ x_4 = -\pi + 2\pi l. \end{array}\right.$$

Пересечением серий $x_1 \cap x_3$ является x_1, т.е. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ – решение.

Пересечения серий $x_1 \cap x_4$ и $x_2 \cap x_4$ пустые.

Найдем пересечение серий $x_2 \cap x_3$:

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3} \Rightarrow m = 3n - 1,$$

т.е. серия x_2 входит в серию x_3 и поэтому является решением.

3. 1) $x_n^1 = 3/2^{n-1}$, $x_n^2 = -1/2^{n-2}$; 2) $\frac{3(2^n - 1)}{4^n - 1}$.

Корни многочлена $P_1(x) = x^2 - x - 6$ равны $x_1^1 = 3$, $x_1^2 = -2$. Корни многочлена $P_2(x) = P_1(x)$ равны $x_2^1 = 3/2$, $x_2^2 = -2/2 = -1$. Предполагаем, что корни многочлена $P_k(x)$ равны $x_k^1 = 3/2^{k-1}$, $x_k^2 = -2/2^{k-1} = -1/2^{k-2}$. Тогда многочлен $P_{k+1}(x) = P_k(2x)$ будет иметь корни $x_{k+1}^1 = x_k^1/2 = 3/2^k$, $x_{k+1}^2 = x_k^2/2 = -1/2^{k-1}$, т.е. $x_n^1 = 3/2^{n-1}$, $x_n^2 = -1/2^{n-2}$.

Многочлен $P_k(x)$ имеет вид $P_k(x) = 4^{k-1}x^2 - 2^{k-1}x - 6$, а многочлен $Q_n(x)$ –

$$Q_n(x) = (1 + 4 + \ldots + 4^{n-1})x^2 - (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1})x - 6n =$$

$$= \frac{4^n - 1}{3}x^2 - (2^n - 1)x - 6n.$$

Дискриминант многочлена $Q_n(x)$ равен $D/4 = (2^n - 1)^2 +$

$+8n\left(4^n-1\right)>0$, поэтому действительные корни есть. По теореме Виета их сумма равна $\dfrac{3\left(2^n-1\right)}{4^n-1}$.

4. 5 фантиков.

Вероятность выигрыша Пети $p=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ (общее число исходов опыта $n=6\cdot 6=36$, из них благоприятствуют выигрышу 6 исходов: $(1;1)$, $(1;2)$, $(1;3)$, $(2;1)$, $(2;2)$, $(3;1)$). Пусть ξ – случайная величина выигрыша Пети. Она принимает значение k с вероятностью $\dfrac{1}{6}$ и значение -1 с вероятностью $\dfrac{5}{6}$. Тогда среднее значение выигрыша $M\xi=k\cdot\dfrac{1}{6}-1\cdot\dfrac{5}{6}=0\Rightarrow k=5$.

5. $a\in\left[\dfrac{2}{11};\dfrac{2}{9}\right)\cup\left[\dfrac{2}{7};+\infty\right)$.

В области $A\left(x>a,\ y>2a\right)$ система примет вид

$$\begin{cases}x+y=5a,\\ x+2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=10a-2,\\ y_1=2-5a.\end{cases}$$

Это решение принадлежит области A, если

$$\begin{cases}10a-2>a,\\ 2-5a>2a\end{cases}\Rightarrow a\in\left(\frac{2}{9};\frac{2}{7}\right).$$

В области $B\left(x>a,\ y\le 2a\right)$ система примет вид

$$\begin{cases}x=5a,\\ x+2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=5a,\\ y_2=(2-5a)/2.\end{cases}$$

Ее решение принадлежит области B, если

$$\begin{cases}5a>a,\\ (2-5a)/2\le 2a\end{cases}\Rightarrow a\in\left[\frac{2}{9};+\infty\right).$$

В области $C\left(x\le a,\ y\le 2a\right)$ система может иметь решения только при $a=0$ и имеет вид

$$\begin{cases}0=5a,\\ x+2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=2-2t,\\ y_3=t,\ t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Условия принадлежности решения к области C приводит к неравенствам

$$\begin{cases}2-2t\le 0,\\ t\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge 1,\\ t\le 0.\end{cases}$$

Последнее показывает, что в области C система несовместна при любых a. В области $D(x \le a,\ y > 2a)$ система примет вид

$$\begin{cases} y = 5a, \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 - 10a, \\ y_3 = 5a. \end{cases}$$

Это решение принадлежит области D, если

$$\begin{cases} 2 - 10a \le a, \\ 2 - 5a > 2a \end{cases} \Rightarrow a \in \left[\frac{2}{11}; \frac{2}{7}\right).$$

На рисунке 59 на трех числовых осях параметра a указаны интервалы существования решений. Верхний интервал соответ-

Рис. 59

ствует значениям, при которых существуют решения $(x_1; y_1)$, полуось в середине – решениям $(x_2; y_2)$, а внизу – решениям $(x_3; y_3)$. Единственное решение бывает при

$$a \in \left[\frac{2}{11}; \frac{2}{9}\right) \cup \left[\frac{2}{7}; +\infty\right).$$

6. $\dfrac{\pi}{4}\left(\left(\sqrt{2a} - \sqrt{b}\right)^4 + 6\left(3 - 2\sqrt{2}\right)b^2\right) = 4\pi\left(19 - 12\sqrt{2}\right) \approx 25{,}5$.

Пусть ρ, r, R – радиусы окружностей K_1, K_2, K (рис.60) $b = 2R$, $AE = x$ – переменная, $x \in [R; a - R]$, $TE = PN = x - \rho =$

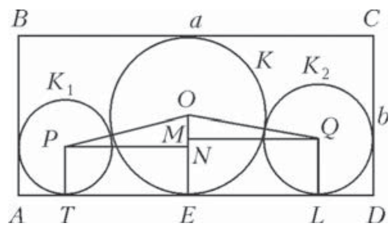


Рис. 60

$= 2\sqrt{R\rho}$. Тогда $EL = QM = 2\sqrt{Rr} = a - x - r$, $OP = R + \rho$, $OQ = R + r$, $OM = R - r$, $ON = R - \rho$.

Условия

$$\begin{cases} \rho + 2\sqrt{R}\cdot\sqrt{\rho} - x = 0, \\ r + 2\sqrt{R}\cdot\sqrt{r} - a + x = 0, \\ \rho^2 + r^2 \to \max \end{cases}$$

приводят к зависимости r и ρ от x в виде

$$\begin{cases} \rho = \left(\sqrt{x+R} - \sqrt{R}\right)^2, \\ \rho = \left(\sqrt{a-x+R} - \sqrt{R}\right)^2. \end{cases}$$

Обозначая $\varphi(x) = \left(\sqrt{x+R} - \sqrt{R}\right)^4$, приходим к тому, что $\rho^2 + r^2 = \varphi(x) + \varphi(a-x)$.

Свойства функции $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x)\uparrow$ на отрезке $[R; a-R]$;

2) $\varphi'(x) = \dfrac{2\left(\sqrt{x+R} - \sqrt{R}\right)^3}{\sqrt{x+R}} > 0$, $x \in [R; a-R]$;

3) $\varphi''(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x+R} - \sqrt{R}\right)^2\left(2\sqrt{x+R} + \sqrt{R}\right)}{\left(\sqrt{x+R}\right)^3} > 0$,

$x \in [R; a-R]$, т.е. функция $\varphi'(x)\uparrow$ на отрезке $[R; a-R]$.

Критические точки функции:

$$\left(\rho^2 + r^2\right)' = \varphi'(x) - \varphi'(a-x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = \varphi'(a-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = a - x \Rightarrow x^* = \frac{a}{2}.$$

На концах отрезка значения функции $\rho^2 + r^2 = \varphi(x) + \varphi(a-x)$ одинаковы и равны

$$\varphi(R) + \varphi(a-R) =$$

$$= \left(\sqrt{2R} - \sqrt{R}\right)^4 + \left(\sqrt{a} - \sqrt{R}\right)^4 = \frac{b^2}{4}\left(\sqrt{2} - 1\right)^4 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{2a} - \sqrt{b}\right)^4.$$

Это значение наибольшее для $\rho^2 + r^2$ при $b \le a \le 2b$. При этих же условиях минимальное значение $\rho^2 + r^2$ достигается при $x = a/2$, оно равно $2\varphi\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right)^4}{2}$. Тогда наибольшее значение суммы площадей кругов равно

$$S_{\max} = \pi\left(R^2 + \rho^2 + r^2\right)_{\max} = \frac{\pi}{4}\left(6\left(3 - 2\sqrt{2}\right)b^2 + \left(\sqrt{2a} - \sqrt{b}\right)^4\right),$$

а наименьшее –

$$S_{\min} = \pi\left(R^2 + \rho^2 + r^2\right) = \pi\left(\frac{b^2}{4} + \frac{\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right)^4}{2}\right).$$

ФИЗИКА

1. Поскольку система замкнута, то сумма сил, действующих на все тела системы, равна нулю. А так как массы тел одинаковы, то равна нулю и векторная сумма их ускорений. В рассматриваемый момент тела находятся на одной прямой, поэтому силы могут действовать только вдоль этой прямой. Значит, и ускорения тел могут быть направлены только вдоль этой прямой. Условию задачи не противоречат два случая направления заданных в условии ускорений: эти ускорения направлены одинаково или противоположно.

В первом случае вектор ускорения третьего тела направлен противоположно ускорениям первых двух тел и равен по величине $4a$. Во втором случае ускорение третьего тела равно $2a$ и направлено так же, как вектор ускорения $\vec{a}$ (и противоположно вектору $3\vec{a}$).

Заметим, что полученный результат не зависит от знаков и величин зарядов, а также от расстояний между телами.

2. Если бы совпадали сопротивления крайних резисторов, токи через амперметры были бы одинаковыми. Поэтому есть две возможности – равны друг другу сопротивления второго и третьего резисторов: $r_2 = r_3$ (а сопротивление первого от них отличается) или равны друг другу сопротивления первого и второго резисторов: $r_1 = r_2$ (а отличным от них является третье сопротивление).

Поскольку амперметры не имеют сопротивлений, резисторы включены в цепь параллельно источнику, причем амперметр A_1 измеряет ток, текущий через второй и третий резисторы, а амперметр A_2 – через первый и второй (рис.61). Поэтому

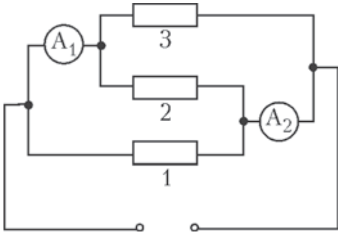


Рис. 61

$$i_2 + i_3 = I_1 = I\ ,$$

$$i_1 + i_2 = I_2 = \frac{2}{3}I\ ,$$

где i_1, i_2, и i_3 – токи, текущие через первый, второй и третий резисторы соответственно. Учитывая, что в первом случае $i_2 = i_3$, получаем

$$i_2 = i_3 = \frac{I}{2}, \ i_1 = \frac{I}{6}.$$

Тогда в этом случае

$$r_2 = r_3 = \frac{r}{3}.$$

Во втором случае ($i_1 = i_2$) находим

$$i_1 = i_2 = \frac{I}{3}, \ i_3 = \frac{2I}{3}$$

и, следовательно,

$$r_2 = r, \ r_3 = \frac{r}{2}.$$

Таким образом, с данными условия совместимы два ответа:

$$r_2 = r_3 = \frac{r}{3}; \ r_2 = r, \ r_3 = \frac{r}{2}.$$

3. Условие равновесия самого нижнего стержня (условие равенства моментов относительно шарнира) дает (рис.62)

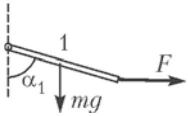


Рис. 62

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha_1 = Fl = \cos\alpha,$$

где l – длина стержня, α_1 – угол между первым стержнем и вертикалью. Отсюда находим

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2F}{mg}.$$

Рассмотрим теперь условие равновесия двух нижних стержней (рис.63). В качестве внешних сил на них действуют две силы тяжести, сила реакции второго шарнира (которым второй стержень связан с третьим) и сила $\vec{F}$. Используем далее условие равенства моментов относительно второго шарнира. При этом заметим, что плечо силы $\vec{F}$ относительно второго шарнира больше плеча силы $\vec{F}$ относительно первого на величину $l\cos\alpha_2$, а плечо силы тяжести первого стержня больше на величину $l\sin\alpha_2$. Поэтому условие равновесия дает

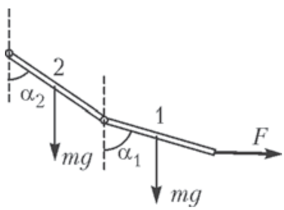


Рис. 63

$$mg\left(\frac{l}{2}\sin\alpha_1 + l\sin\alpha_2\right) + mg\frac{l}{2}\sin\alpha_2 = F\left(l\cos\alpha_1 + l\cos\alpha_2\right).$$

Отсюда, с учетом первого условия равновесия, находим

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2F}{3mg}.$$

Теперь ясно, как будут находиться следующие углы – в знаменателе будет появляться нечетное число $2k - 1$, где k – номер стержня, угол наклона которого исследуется. Поэтому для 2016-го стержня имеем

$$\operatorname{tg}\alpha_{2016} = \frac{2F}{4031mg}.$$

4. Конечное давление газа в первом случае найдем по закону адиабатического процесса:

$$pV^\gamma = p_1(2V)^\gamma, \text{ и } p_1 = \frac{p}{2^\gamma}.$$

Работа, совершенная газом в этом процессе, равна уменьшению его внутренней энергии:

$$A = U_1 - U_2 = \frac{3}{2}(pV - p\cdot 2V) = \frac{3}{2}pV\left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right).$$

Во втором процессе газ совершит ту же работу. Но если в первом случае она тратилась на увеличение потенциальной энергии поршня и песчинок, которые оказались на разных высотах, то теперь она будет потрачена на изменение потенциальной и кинетической энергии самого поршня:

$$A = (2Mgh - Mgh) + E_к,$$

где M – масса поршня, h – высота расположения поршня над дном сосуда в начальном состоянии, $E_к$ – искомая кинетическая энергия. С другой стороны, давление газа после снятия песка теперь равно давлению поршня:

$$p_1 = \frac{Mg}{S},$$

где S – площадь сечения сосуда. Поэтому предыдущую формулу можно привести к виду

$$A = (p_1\cdot 2V - p_1V) + E_к = p_1V + E_к = \frac{pV}{2^\gamma} + E_к.$$

Отсюда находим

$$E_к = A - \frac{pV}{2^\gamma} = \frac{3}{2}pV\left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right) - \frac{pV}{2^\gamma} =$$

$$= pV\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2^\gamma} - \frac{1}{2^\gamma}\right) = pV\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^\gamma}\right).$$

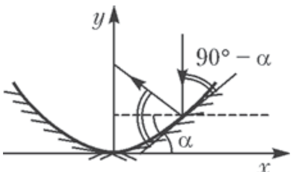


Рис. 64

5. Рассмотрим отражение от поверхности зеркала луча, имеющего (до отражения) координату x. Введем систему координат, как показано на рисунке 64. Тогда тангенс угла наклона поверхности зеркала в точке падения луча к оси x определяется производной нашей параболы:

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = 4x$$

(углы α отмечены на рисунке одной дугой). Геометрически очевидно, что угол между отраженным лучом и зеркалом в точке падения равен $90° - \alpha$ (отмечен на рисунке двумя дугами). Поэтому угол между отраженным лучом и осью x равен $90° - 2\alpha$. Следовательно, координата точки пересечения отраженного луча и оси y определяется соотношением

$$y = 2x^2 + x\operatorname{tg}(90° - 2\alpha) = 2x^2 + \frac{x}{\operatorname{tg}2\alpha}.$$

Используя далее известную формулу для тангенса двойного угла и соотношение для $\operatorname{tg}\alpha$, получим

$$y = 2x^2 + \frac{x\left(1 - \operatorname{tg}^2\alpha\right)}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, расстояние от вершины параболы до точки пересечения рассматриваемого луча и оси y не зависит от луча. Это значит, что все лучи придут в точку, лежащую на расстоянии $1/8$ от вершины параболы.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $L = \dfrac{a_1\Delta t_1^2}{2} + a_1\Delta t_1\Delta t_2 + \dfrac{a_2\Delta t_2^2}{2} = 87{,}5$ м (см. рисунок к условию).

2. $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{2}{3}$. **3.** $\Delta H = \dfrac{h}{1 + \left(kH/(p_0S_0)\right)}\dfrac{S}{S_0}$. **4.** $\Delta\omega = \dfrac{qB}{m}$.

5. $N = \dfrac{m}{\text{М}_\text{в}\dfrac{V}{V_0} - \text{М}_\text{г}\dfrac{V}{V_0} - m_\text{ш}} = 800$ (здесь $m = 80$ кг – масса человека, $M_в = 29$ г/моль − молярная масса воздуха, $M_г = 4$ г/моль − молярная масса гелия, $V = 5$ л − объем одного шарика, $V_0 = 22{,}4$ л − объем идеального газа при нормальных условиях, $m_ш = 5$ г − масса оболочки одного шарика).

Открытая межвузовская олимпиада школьников «Будущее Сибири»

I (отборочный) этап

8 класс

1. 3. **2.** $\dfrac{m_к}{m_ш} = 3$. **3.** $\dfrac{V_ш}{V_в} = \dfrac{1}{5}$.

4. $t_x = 5{,}5$ мин (на участке от t_1 до t_2 происходило плавление льда, охлаждение воды, находившейся в стакане, и нагрев растаявшей воды).

9 класс

1. В 3 раза. **2.** Проводник BC.

3. $t = T\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (наличие доски «убирает» часть траектории шарика выше точки $H_{max}/2$).

4. $t_x = t_2 + (t_3 - t_1)\left(1 + \dfrac{c(T_2 - T_1)}{\lambda + c(T_1 - T_0)}\right)$.

10 класс

1. $u = \dfrac{3}{2}v$. **2.** $l = \dfrac{L^2}{2\mu H}$.

3. $F_г = \dfrac{mgh}{\sqrt{l^2 - h^2} + \sqrt{L^2 - h^2} - L}$ (сила минимальна, если кинетическая энергия груза в верхней точке равна нулю).

4. $m = M\dfrac{(\rho/\rho_0) - 1}{1 + (h/H) - (M/(\rho_0 SH))}$.

11 класс

2. $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **3.** $\dfrac{\Delta m}{m} = 0{,}03 = 3\%$.

4. $Q_2 = Q_1\dfrac{U_2 - U_1}{U_1 + U_2}$.

II (заключительный) этап

8 класс

1. $V = V_{\text{в}}\left(1 + \frac{c_{\text{в}}}{c_{\text{к}}}\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{к}}}\frac{T_{\text{кип}} - T_{\text{в}}}{T_{\text{к}} - T_{\text{кип}}}\right) = 21$ л .

2. $L = \frac{2Nlvu}{v^2 - u^2} = 750$ м .

3. Паук должен двигаться в сторону Мухи со скоростью $v_{\text{П}} = \frac{v}{4}$.

4. $H_3 = 2H_2 - H_1$.

9 класс

1. $\frac{v_{\text{д}}}{v_{\text{ж}}} = \frac{\sqrt{(t_4 - t_1)^2 - (t_3 - t_1)^2}}{t_3 - t_2} = 4$.

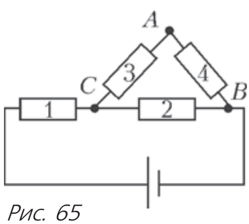


Рис. 65

2. $R_1 = 0$, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 6$ Ом (см. рис.65).

3. $T_{\text{пад}} - T_{\text{под}} = \frac{2h}{gT}$.

4. $H_3 = 2H_2 - H_1$.

5. $v = \sqrt{\frac{gH}{2}\left(\frac{L}{H} + \frac{H}{L}\right)}$.

10 класс

1. $\omega = \frac{\sqrt{2aL}}{R}$. **2.** $\mu = \frac{\sin 2\alpha}{(M/m) + \cos 2\alpha}$.

3. $N \approx \frac{l}{\pi d}\sqrt{\frac{R}{R_0}} \approx 20$. **4.** $k = 4\left(\frac{\mu g}{v_0}\right)^2 m\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{M}\right)$.

5. $h = \frac{m}{\rho S_{\text{т}}}\frac{S_{\text{т}} - S_{\text{д}}}{S_{\text{д}} - S_{\text{г}}} \approx 3$ см $= 30$ мм .

11 класс

1. $F_2 = F_1\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ (силы, действующие на пружины сцепленных динамометров, одинаковы).

2. $H = \frac{p_0}{\rho g} + 2h$.

3. $\frac{I_{\text{нач}}}{I_{\text{уст}}} = \frac{\mathcal{E} - (q/C)}{\mathcal{E}}\frac{R_1 + R_2}{R_1}$ (сразу после нажатия кнопки заряд на конденсаторе остается прежним, а в установившемся режиме заряд конденсатора перестает меняться).

4. $v=\sqrt{\left(v_0+u\right)^2-\dfrac{3v_0^2}{4}}-u$ (в результате прохождения бусинки мимо точечного заряда часть ее кинетической энергии тратится на преодоление трения, причем работа силы трения в обоих случаях одна и та же).

5. Ветрогенератор преобразует кинетическую энергию потока воздуха в электроэнергию. Мощность потока воздуха равна $P=\dfrac{1}{2}\rho S v^3$, где $\rho=1$ кг/м^3 – плотность воздуха, $S=5$ м^2 – площадь, захватываемая лопастями, v = 10 м/с – скорость ветра. Принимая для оценки, что вырабатываемая электрическая мощность составляет примерно $P/2$, получим, что $P_{\text{эл}}\approx 1$ кВт.

6. Освещенные области дна блюдечка являются источником рассеянного во все стороны света. Глаз видит эти области дна слегка приближенными из-за слоя воды, действующего как плоскопараллельная пластина.

Какие же области дна освещены? Заметим, что не имеет смысла учитывать многократные отражения, так как яркость быстро убывает для каждого последующего отражения. Очевидно, что освещена область, в которую после первого же преломления попадает узкий пучок света, например от лазерной указки, – область A на рисунке 66. Лучи, рассеянные из области A под

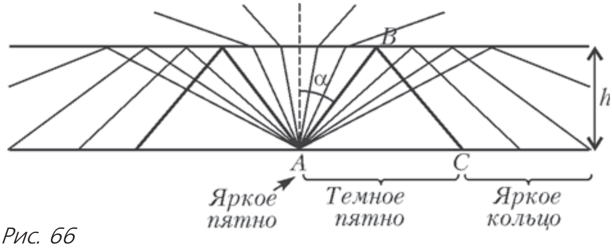


Рис. 66

малыми углами к вертикали, практически полностью выходят из воды в воздух. По-другому ведут себя лучи, рассеянные из области A под углами, превышающими угол полного внутреннего отражения, – они полностью отражаются вниз от поверхности воды. Поэтому ближайшая к области A освещенная точка дна есть точка C, в которую попадает луч, рассеянный под углом полного внутреннего отражения α. Лучи, выходящие под бóльшими углами, попадают на дно в точках, лежащих от области A

на расстояниях, бо́льших AC. Они образуют освещенную область с резкой внутренней границей в виде окружности радиусом AC, а область внутри этой окружности является темной (естественно, за исключением центрального яркого пятна). Радиус темного кольца зависит от угла полного внутреннего отражения α и толщины слоя воды h, а именно $AC = 2h\,\mathrm{tg}\alpha$. Как видно, AC растет с увеличением h, вот почему при доливании воды ширина темного колечка увеличивается.

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМЕНИ И.М.ГУБКИНА

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
48 км/ч	30 м/с	3	5 см	40 Па	780 К
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
75 К	40 В/м	6 Ом	4 В	2 мкс	80%
C1	**C2**	**C3**	**C4**		
48 Н	70 Н	2 кг	2		

Вариант 2

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
225 м	3 $с^{-1}$	2 с	20 м	15 см	20 кПа
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
127 Дж	75 нН	48 Вт	10 Гн	80 мс	4 В
C1	**C2**	**C3**	**C4**		
50 Н	245 Н	3 К	4 с		

Вариант 3

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
10 км/ч	11 Н	25%	960 Дж	2	250 К
B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
80%	2	45 Вт	4 Гн	6 мкФ	17
C1	**C2**	**C3**	**C4**		
48 Н	9 см	3 К	5 см		

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Политехническая олимпиада школьников

МАТЕМАТИКА

Отборочный тур

1 этап

1. 5. **2.** 4. **3.** 8. **4.** 93. **5.** 435. **6.** 135. **7.** 19. **8.** 729. **9.** 5. **10.** 6.

2 этап

1. −2. **2.** 12. **3.** 4. **4.** 63. **5.** 3. **6.** 6. **7.** 4. **8.** 2. **9.** 9. **10.** 4.

Заключительный тур

1. 32.

Пусть возраст Дмитрия − x лет, а возраст Григория − y лет. Из условия следует, что Дмитрий старше Григория, разность их возрастов равна $x - y$. Значит, $x - y$ лет тому назад Дмитрию было столько лет, сколько теперь Григорию, а Григорию было, соответственно, $y - (x - y) = 2y - x$ лет. По условию $x = 2(2y - x)$, т.е. $3x = 4y$. Через $x - y$ лет Григорию станет столько лет, сколько Дмитрию теперь, т.е. x лет, Дмитрию будет $2x - y$ лет. Известно, что $x + (2x - y) = 72$, т.е. $3x - y = 72$. Получена система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ 3x - y = 72. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, получаем $3y = 72$, $y = 24$. Первое уравнение дает $x = 32$.

2. 16.

За 40 минут можно решить одну сложную задачу и получить 3 балла или решить четыре простые задачи и получить 4 балла. Видим, что лучше решать простые задачи. За 190 минут можно решить 19 простых задач. Но абитуриент решил не более 10 задач. В такой ситуации целесообразно решить несколько сложных задач. Если все 10 задач выбрать простыми, то потребуется 100 минут. Замена простой задачи на сложную увеличивает продолжительность работы на 30 мин и дает 2 дополнительных балла. Мы имеем запас времени 90 мин. Следует заменить три простые задачи сложными. Решение 7 простых и 3 сложных задач даст $7 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 16$ баллов.

3. $5/2$.

Проведем следующие преобразования:

$$4\sin^6\frac{\pi}{16}+4\sin^6\frac{9\pi}{16}=4\sin^6\frac{\pi}{16}+4\cos^6\frac{\pi}{16}=$$

$$=4\left(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16}\right)\left(\sin^4\frac{\pi}{16}-\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}+\cos^4\frac{\pi}{16}\right)=$$

$$=4\left(\left(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16}\right)^2-3\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16}\right)=$$

$$=4\left(1-\frac{3}{4}\sin^2\frac{\pi}{8}\right)=4-3\sin^2\frac{\pi}{8}=$$

$$=4-\frac{3}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)=4-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Мы приходим к выводу, что

$$4\sin^6\frac{\pi}{16}+4\sin^6\frac{9\pi}{16}-\frac{3\sqrt{2}}{4}=\frac{5}{2}.$$

4. 1000.

Положим $y=\lg x$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}}-\sqrt{y}=2.$$

Умножая числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{y+1}+\sqrt{y}$, получаем $\sqrt{y}=2$, $\sqrt{y+1}+\sqrt{y}-\sqrt{y+1}=2$, $y+1=4$, $y=3$.

Для неизвестного x получается значение $x=10^3=1000$.

5. −2.

Положим $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Множеством значений переменной t является отрезок $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Заметим, что

$$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x.$$

Для функции y получается выражение $y=t^2+2t-1$. Квадратный трехчлен $t^2+2t-1=(t+1)^2-2$ принимает при $t=-1$ свое наименьшее значение, а именно −2. Значение −1 для переменной t является возможным. Наименьшее значение функции y равно −2.

6. $1/5$.

Обозначим через q знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$. Сумма ее n членов равна

$$S_n = b_1\left(1+q+\cdots+q^{n-1}\right).$$

Числа $\frac{1}{b_n}$ тоже образуют геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{1}{b_1}$ и знаменателем $\frac{1}{q}$. Сумма ее n членов равна

$$T_n = \frac{1}{b_1}\left(1+\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q^{n-1}}\right)=$$

$$= \frac{1}{b_1q^{n-1}}\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+1\right)=\frac{1}{b_n}\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+1\right).$$

По условию, $5S_n = T_n$. Поэтому $5b_1 = \frac{1}{b_n}$, $b_1b_n = \frac{1}{5}$.

7. $\pm(2;\ -2)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 + \sqrt{t}$, определенную для $t \ge 0$. Эта функция строго возрастает. Первое уравнение системы можно записать в виде $f(|x|) = f(|y|)$. С учетом строгого возрастания функции получаем равенство $|x| = |y|$, $y = \pm x$. Если взять $y = x$, то второе уравнение приводит нас к $x^2 - 3x^2 = 16$, $-2x^2 = 16$, $x^2 = -8$, что невозможно. Поэтому принимаем $y = -x$. Из второго уравнения получаем $x^2 + 3x^2 = 16$, $4x^2 = 16$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$, $y = \mp 2$.

8. 61.

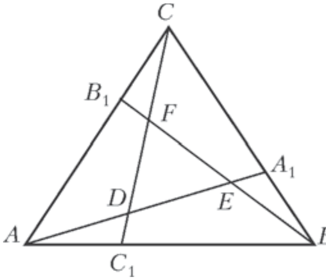


Рис. 67

Треугольники ABA_1, BCB_1, CAC_1 (рис.67) равны по двум сторонам и углу между ними, треугольники ADC_1, BEA_1, CFB_1 равны по стороне и углам. Треугольник ADC_1 подобен ABA_1 по двум углам, значит, треугольник ABC подобен ΔDEF. Обозначим $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{ABA_1}$, $S_2 = S_{AC_1D}$, $S_0 = S_{DEF}$. Тогда

$$AA_1 = \sqrt{AB^2 + BA_1^2 - 2AB\cdot BA_1\cos 60^\circ} = \sqrt{81+16-36} = \sqrt{61},$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{AC_1}{AA_1}\right)^2 = \frac{16}{61},\quad \frac{S_1}{S} = \frac{BA_1}{BC} = \frac{4}{9},$$

$$S_0 = S - 3S_1 + 3S_2 = S - 3\cdot\frac{4}{9}S + 3\cdot\frac{16}{61}\cdot\frac{4}{9}S = \frac{S}{61},\quad \frac{S}{S_0} = 61.$$

9. 48.

В основании пирамиды лежит четырехугольник, составленный из двух равных прямоугольных треугольников. Площадь основания равна $S = 4 \cdot 3 = 12$. Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то вершина пирамиды проектируется на плоскость основания в точку, одинаково удаленную от прямых AB, BC, CD, DA. Вершина может проектироваться в центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, или в центр вневписанной окружности. В первом случае обозначим через r радиус вписанной окружности и заметим, что площадь основания $S = pr$, где p − полупериметр основания, $p = AB + BC = 4 + 3 = 7$. Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{12}{7}$. Высота пирамиды $H = r \operatorname{tg} 45° = \frac{12}{7}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} 12 \cdot \frac{12}{7} = \frac{48}{7} < 12$. Поэтому мы должны рассматривать второй случай с вневписаннной окружностью. Пусть r_1 − радиус вневписанной окружности. На этот раз

$$S = \frac{1}{2}(AB - BC - CD + DA) r_1, \ r_1 = 12.$$

Как и в первом случае, $H = r_1 \operatorname{tg} 45° = 12$, $V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} 12 \cdot 12 = 48 > 12$.

10. −1; 8; 24.

Заметим, что

$$x^4 - 10x^2 + 9 = \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 1\right) =$$

$$= (x-3)(x+3)(x-1)(x+1) = \left(x^2 - 4x + 3\right)\left(x^2 + 4x + 3\right).$$

Уравнение можно записать в виде

$$\left(x^2 - 4x + 3\right)\left(x^2 + 4x + 3 - a\right) = 0.$$

Решениями нашего уравнения будут корни квадратного уравнения

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

т.е. числа $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, и корни квадратного уравнения

$$x^2 + 4x + 3 - a = 0.$$

Общее число решений окажется равным трем, если последнее уравнение имеет один корень x_3, причем $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$, или это уравнение имеет два корня x_3, x_4, один из которых совпадает с x_1 или x_2.

Уравнение $x^2+4x+3-a=0$ имеет единственный корень, если $a=-1$, этот корень $x_3=-2$ отличен от x_1 и от x_2.

Число x_1 является корнем уравнения $x^2+4x+3-a=0$, если $1^2+4\cdot 1+3-a=0$, т.е. $a=8$. В такой ситуации мы получаем уравнение $x^2+4x-5=0$, имеющее корни $x_1=1$ и $x_3=-5$. При $a=8$ исходное уравнение имеет в точности три корня.

Число x_2 является корнем уравнения $x^2+4x+3-a=0$, если $3^2+4\cdot 3+3-a=0$, т.е. $a=24$. В такой ситуации мы получаем уравнение $x^2+4x-21=0$, имеющее корни $x_2=3$ и $x_3=-7$. При $a=24$ исходное уравнение имеет в точности три корня.

ФИЗИКА

Отборочный тур

9–10 классы

1. $t=\dfrac{2t_1t_2}{t_1-t_2}\approx 11{,}6$ ч. **2.** $v=\sqrt{2gL\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}}=2{,}9$ м/с.

3. $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=N_g\sqrt{N_gN_m}=1{,}5$.

4. $\mathrm{M}=\left(\dfrac{n_{\mathrm{He}}}{\mathrm{M}_{\mathrm{He}}}+\dfrac{n_{\mathrm{N_2}}}{\mathrm{M}_{\mathrm{N_2}}}+\dfrac{1-n_{\mathrm{He}}-n_{\mathrm{N_2}}}{\mathrm{M}_{\mathrm{CO_2}}}\right)^{-1}=5{,}7$ г/моль.

5. $m=M\dfrac{y^2+2y}{\left(x^2+2x\right)\left(y+1\right)^2}\approx 55$ г. **6.** $\dfrac{L_1}{L_2}=\dfrac{N^2}{3}$.

7. $N=\dfrac{(N_1+N_2)C}{t\left(N_1(P_1-P_1')+N_2(P_2-P_2')\right)c_{\text{э}}}=155$ дней.

8. $n_{\text{кл}}=2\dfrac{n_{\text{в}}n_{\text{возд}}}{n_{\text{в}}+n_{\text{возд}}}\cos\beta=1{,}05$.

11 класс

1. $v=2\pi fr_2\left(\dfrac{D}{2r_1}-1\right)=262$ см/с.

2. $v_{\text{сп}}=mv\left(\dfrac{1}{M+m}+\dfrac{1}{M+2m}+\dfrac{1}{M+3m}\right)=124$ м/с.

3. $v_2 = u\dfrac{\sqrt{v^2-u^2}}{v-\sqrt{v^2-u^2}} = 4{,}8$ м/с .

4. $g = \dfrac{h}{R^2}\left(\dfrac{1}{v_1^2}-\dfrac{1}{v_2^2}\right)^{-1} = 7{,}6$ м/с^2 .

5. $W = \dfrac{eEL}{2\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)} = 284$ эВ .

6. $P_2 = P_1\dfrac{(n+m)^2}{4nm} = 147$ Вт .   **7.** $v = \dfrac{e}{\varepsilon_0 B}\dfrac{\Delta N}{\Delta S} = 241$ см/с .

8. $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\lambda_1\sin\varphi}{\lambda_2-\lambda_1\cos\varphi}\right) = 52°$.

Заключительный тур

9—10 классы

1. $t = 5\Delta t = 25$ мин .
2. Сможет, $H_{max} = 1{,}5$ м .

3. $\dfrac{V_x}{V} = \dfrac{\rho_в V - \dfrac{\rho_в}{6}V}{\rho_{кл}V} = \dfrac{5}{8}$, $\dfrac{V_y}{V} = \dfrac{\rho_{кл}V - \dfrac{3}{4}\rho_{кл}\cdot\dfrac{1}{6}V}{\rho_{кл}V} = \dfrac{7}{8}$ (здесь $\rho_{кл} = \dfrac{4}{3}\rho_в$).

4. $l \approx 31$ м .   **5.** $\dfrac{F}{F_0} = \dfrac{18}{25}$.   **6.** $b = 12$ см .

11 класс

1. $s = \dfrac{2-\eta}{\eta}H \approx 106{,}1$ м (здесь $\eta = 0{,}09$).

2. $\Delta h = \dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g\Delta t^2 = 4{,}5$ м .   **3.** $\rho_2 = \rho_1\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

4. $\eta = \dfrac{k-1}{5k+3} = 0{,}13 = 13\%$.   **5.** $\dfrac{P_{AF}}{P_{CF}} = 16$.

6. $\Delta x = \sqrt{l^2 - Fl} \approx 91{,}7$ см .

ИНФОРМАТИКА

Отборочный тур

9—10 классы

1. 16. **2.** Лир. **3.** 77. **4.** 7. **5.** 12.

11 класс

1. 56. **2.** ПИВО. **3.** 20. **4.** БВГЕЖ. **5.** 11. **6.** 3.

Заключительный тур

9—10 классы

1. 45555555588; 127. **2.** 72. **3.** 3, 5, 7, 2, 1, 6, 4, 9.
4. D AND NOT A. **5.** Т, Ч. **6.** 5.

11 класс

3. 88. **6.** В строке 10 заменить 1 на N, в строке 13 заменить сложение умножением.

Приложение к журналу «Квант» №5-6/2016

Экзаменационные материалы
по математике и физике 2016 года

Составители *Е.М.Епифанов, В.А.Тихомирова*

Редакторы *Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова*
Обложка *А.Е.Пацхверия*
Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*
Компьютерная группа *М.Н.Грицук, Е.А.Митченко*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская
Печать офсетная. Объем 8,25 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.
Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»
Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Тел.: 8(495)363-48-86, http://capitalpress.ru

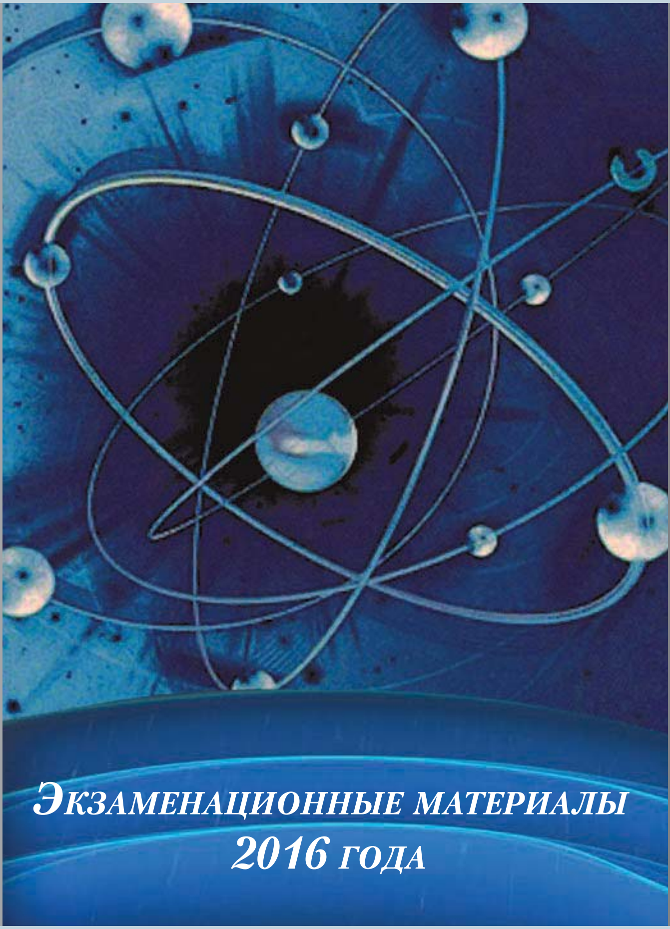
ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

(с 1993 по 2016 г.)

85. *Г.Гамов.* Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов.* Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак.* Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий.* Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли.* Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко.* Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин.* Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот.* Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов.* Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох.* Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров.* Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак.* Арифметика
103. *Я.А.Смородинский.* Температура (3-е изд.)
104. *А.Н.Васильев.* История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич.* Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын.* Макро- и микромиры и гармония
108. *П.С.Александров.* Введение в теорию групп (2-е изд.)
109. *А.В.Спивак.* Арифметика-2
110. *П.Г.Крюков.* Лазер – новый источник света
111. *А.Б.Сосинский.* Узлы. Хронология одной математической теории
112. *А.П.Пятаков, П.П.Григал.* Лаборатория на коленке
113. *А.А.Заславский.* Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
114. *С.В.Коновалихин.* Сборник качественных задач по физике
115. *Е.Я.Гик.* Математика и шахматы
116. *Л.К.Белопухов.* Физика внезапного
117. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1

118. Задачник «Кванта». Физика. Часть 1
119. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 2
120. Задачник «Кванта». Физика. Часть 2
121. *Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.Л.Тоом*. Заочные математические олимпиады
122. *А.З.Долгинов*. Строение материи: от атомов до Вселенной
123. Задачник «Кванта». Физика. Часть 3
124. *А.Толпыго*. 130 нестандартных задач
125. *Н.Б.Васильев*. Статьи из журнала «Квант». Часть 1
126. *Н.Б.Васильев*. Статьи из журнала «Квант». Часть 2
127. *Г.Е.Горелик*. Новые слова науки – от маятника Галилея до квантовой гравитации
128. *Е.Я.Гик*. Компьютерные шахматы
129. *М.И.Каганов*. Физика глазами физика. Часть 1
130. *М.И.Каганов*. Физика глазами физика. Часть 2
131. Колмогоровской школе – пятьдесят. Сборник статей. Часть 1
132. Колмогоровской школе – пятьдесят. Сборник статей. Часть 2
133. *К.Ю.Богданов*. Физик в гостях у биолога
134. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина (2010–2014)
135. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей (3-е изд.)
136. *Л.А.Ашкинази*. Рекорды и пределы, или Введение в экстремальное материаловедение

Индекс 90964



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№ 5-6/2016