



СФРИЯ ОСНОВАНА В 1976 ГОДУ

В. С. Бурдик

**АНАЛИЗ
ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**

Перевод с английского
Н. М. Гусева, В. А. Демиденко, Ю. Ф. Тарасюка



Ленинград
„Судостроение”
1988

ББК 32.875
Б91 (англ.)
УДК 681.883.062

Научный редактор д-р техн. наук, проф. Е. Л. Шендеров

Редакционная коллегия: А. В. Алексеев, В. И. Бабий, Е. А. Васильцов,
А. П. Евтютов, В. И. Ильичев, А. Е. Колесников, Е. А. Корепин,
А. П. Ляликов, В. Ф. Мартынюк, В. В. Ольшевский, Л. В. Орлов,
А. Л. Простаков, В. А. Сапрыкин, Г. М. Свердлин, П. К. Зубарев,
Ю. Ф. Тарасюк (ответственный редактор), В. И. Тимошенко

Бурдик В. С.

Б91 Анализ гидроакустических систем. Пер. с англ. —Л.: Судостроение, 1988.— 392 с.: ил. (Библиотека инженера-гидроакустика). — Пер. изд.: Хэмел Хэмпстед (Великобритания), 1984.

ISBN 5-7355-0043-0

Прослежен путь развития гидроакустических систем. Рассмотрены вопросы излучения, рефракции, отражения и приема акустических колебаний в неоднородных средах. Приведены данные об акустических преобразователях и антеннах. Особое внимание уделено применению аналоговых и дискретных методов Фурье для описания и обработки случайных процессов и пространственной фильтрации.

Для инженеров, конструкторов, научных сотрудников, занимающихся проектированием и эксплуатацией гидроакустических систем наблюдения и связи на судах.

Б $\frac{3605030000-056}{048(01)-88}$ 35—88

ББК 32.875

ISBN 0-13-936.716-0

ISBN 5-7355-0043-0

© Издательство «Судостроение», 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель книги — изложить основы гидроакустики с полнотой, достаточной для анализа характеристик гидроакустических систем. Книга предназначена в первую очередь для инженеров-разработчиков, занимающихся анализом гидроакустических систем, но может быть полезной студентам старших курсов различных учебных заведений. Гидроакустика имеет множество областей применения, включая гидроакустическую связь, обнаружение и определение координат подводных и надводных объектов, измерение глубин и сейсмопрофилирование дна океана. Хотя каждая область имеет свою специфику, используемые в них основные физические явления одни и те же. Поэтому анализ различных гидроакустических систем оказывается сходным.

Для анализа гидроакустических систем необходимо понимание особенностей излучения и распространения звуковых волн в океане с учетом граничных эффектов, возникающих на поверхности океана и дна. Эти вопросы рассмотрены в гл. 2 ... 5, исторический обзор дан в гл. 1. В главах 6 ... 9 кратко изложены методы Фурье, корреляционный анализ и теория случайных процессов.

Читатель, знакомый с анализом сигналов и шумов, может ограничиться лишь беглым просмотром этих глав для ознакомления с принятой системой обозначений и терминологией. Источники и характеристики окружающих шумов океана рассмотрены в гл. 10. Особое внимание уделено характеристикам шумовых полей и их влиянию на функцию пространственной корреляции.

Глава 11 посвящена вопросам формирования характеристик направленности антенн с позиций пространственной фильтрации, предназначенной для повышения качества обнаружения сосредоточенных в пространстве сигналов на фоне распределенных по пространству шумов. С учетом результатов, полученных в гл. 10, рассмотрено влияние как однородного, так и неоднородного шумовых полей на характеристики пространственного фильтра. Обнаружение объектов в воде зависит от излучаемой

ими акустической энергии для пассивных систем или от их отражающей способности в случае активных систем. В главе 12 изложены наиболее важные характеристики цели для обоих режимов наблюдения. Проанализировано появление сигнала на фоне рсверберации, влияющей на обнаружение объектов в активном режиме.

В главе 13 приведены основы расчета характеристик гидроакустических систем обнаружения с использованием статистических методов проверки гипотез. И, наконец, гл. 14 содержит избранные примеры анализа основных параметров гидроакустических систем с применением многих принципов, рассмотренных в предыдущих главах. Примеры относятся к прогнозированию обнаружения и оценке различных параметров пассивных и активных гидроакустических систем.

В основу этой книги положен материал лекций, читавшихся в течение ряда лет на курсах отделения морских систем фирмы «Рокуэлл Интернэшнл» (США).

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Первые шаги в гидроакустике

Истоки большинства современных областей техники прослеживаются в отдаленные от нас века, когда были сделаны важнейшие открытия науки и техники, составившие их фундамент. Следует отдать должное первопроходцам, чьи открытия оказались на стыке нескольких, ранее казавшихся не связанных между собой, областей науки.

Не многие могут сравниться с Леонардо да Винчи широтой деятельности и размахом творческой мысли. Более инженер, чем ученый, он предвидел исключительное число способов применения как существовавшей тогда, так и будущей технологии. Поразительный пример этому имеется в его заметках по акустике, представляющих особый интерес для тех, кто занимается подводными акустическими системами. В конце XV в. он писал [1]: «Если Вы остановите судно, возьмете длинную полую трубку и одним концом опустите в воду, а другим приложите к уху, то услышите корабли, находящиеся на большом расстоянии...».

Это выдающееся открытие включает все основные элементы современной пассивной гидролокационной системы и устанавливает, что движущееся судно, даже парусное или гребное, создает в воде звук, который затем распространяется на значительное расстояние. Описываемое приемное устройство (заполненная воздухом трубка) служит для преобразования акустических колебаний в воде в звук в воздухе и позволяет человеку воспринимать сигналы и идентифицировать типы удаленных судов. Отмечается в заметках и тот факт, что результаты улучшатся, если уменьшить собственные шумы судна (путем его остановки), которые приходят к приемнику одновременно со звуками отдаленных судов.

Открытие Леонардо да Винчи в настоящее время научно обосновано и получило развитие в виде усовершенствованной приемной аппаратуры.

Леонардо да Винчи открыл также, что звук распространяется с определенной скоростью: «Увидев вспышку молнии, можно с помощью слуха узнать расстояние до места удара грома».

В 1635 г. французский естествоиспытатель П. Гассенди использовал идею обратного преобразования для измерения скорости звука. Он определял интервалы времени между наблюдаемыми вспышками и последующими звуками выстрелов и установил, что скорость распространения звука 470,7 м/с [2]. Хотя полученное им значение отличается от истинного (330 м/с), это была одна из наиболее ранних попыток определения количественного значения акустических параметров. Почти в это же время другой французский ученый М. Мерсенн определил скорость распространения звука в воздухе путем измерения времени прихода эха. Погрешность его результата составила менее 10 % [3].

В 1687 г. И. Ньютон опубликовал «Математические принципы естествознания», которые содержали первое математическое рассмотрение теории звука. Ему удалось связать физическое представление о распространении звука в жидкостях с такими измеряемыми физическими величинами, как плотность и упругость. Теоретически он определил, что скорость звука в воздухе должна быть пропорциональна корню квадратному из отношения атмосферного давления к плотности. В действительности эта формула давала заниженные значения скорости звука. Позже она была откорректирована П. Лапласом с учетом отношения теплоемкостей воздуха [2]¹.

Дополнительно к ранним исследованиям теории звука математические разработки Ньютона были, конечно, очень важны для получения и решения математических выражений, описывающих волновые явления.

Многие теоретические работы XVIII—XIX вв. связаны с изучением высоты тона и качества звука, создаваемого музыкальными инструментами. Исследованиями в этой области занимались знаменитые ученые Ж. Даламбер, Ж. Лагранж, Д. Бернулли, Л. Эйлер. Действительно, гармонический анализ звука возник в связи с решением некоторых проблем по исследованию теплоты. Ж. Фурье использовал бесконечные тригонометрические ряды (которые теперь носят его имя), чтобы описать более сложные функции в своем трактате «Аналитическая теория теплоты» (1822 г.). В 1843 г. немецкий физик Г. Ом открыл, что сложные звуки можно раскладывать в ряды одиночных тональных колебаний и математически выразил это с использованием рядов Фурье, что было важно для исследования не только акустических, но и любых других сигналов.

Скорость звука в воде была измерена в 1827 г. швейцарским физиком Д. Колладоном и французским математиком Ш. Штурмом. В опытах на Женевском озере они использовали вспышку

¹ П. Лаплас учел адиабатический характер процессов, возникающих при изменении плотности воздуха в звуковой волне. *Ред.*

света, согласованную с ударом подводного колокола. При температуре воды 8°C скорость звука оказалась равной $1412,1$ м/с. Это значение практически совпадает с результатами современных измерений в пресной воде [2].

В 1877 г. лорд Рэлей (Дж. Стратт) опубликовал книгу «Теория звука» [4]. В этой фундаментальной работе вопросы излучения, распространения и приема звука рассмотрены в строгой математической форме. Излагая основы теории акустики в такой форме, в какой она существует в настоящее время, он описал упругие свойства твердых тел, жидкостей и газов.

1.2. Гидроакустика в период до первой мировой войны

В течение первой мировой войны разработка гидроакустических систем, за некоторыми примечательными исключениями, основывалась на создании электрических и электронных элементов и соответствующей технологии. Требовались устройства для излучения гидроакустических сигналов и преобразования акустических колебаний в более удобные — электрические. Для решения задачи обработки сигналов в гидроакустических системах (передача, усиление и др.) интенсивно использовали методы анализа и элементы из области электронных систем связи.

Особый интерес для возбуждения гидроакустических сигналов представили явления, связанные с образованием механических сил при действии электрических или магнитных полей. Сила воздействия на ферромагнитные материалы магнитного поля была известна очень давно. В 1819 г. Г. Эрстед показал, что вокруг проволоки, по которой протекает электрический ток, образуется магнитное поле. В 1831 г. М. Фарадей открыл индукцию электрического тока в проводе при протекании электрического тока в расположенной рядом катушке. В 1840 г. Дж. Джоуль количественно оценил магнитострикционный эффект, измерив размеры изменения магнитного материала при воздействии магнитного поля. В 1880 г. братья Кюри открыли пьезоэлектрический эффект, состоящий в появлении электрических зарядов на поверхности некоторых типов кристаллов при наличии механических напряжений [5]. Был открыт и обратный эффект, связанный с возникновением механической деформации кристаллов при воздействии на них электрического поля. Магнитострикция и пьезоэлектрический эффект, а также их воздействие на арматуру электромагнита стали основой для разработки конструкций большинства гидроакустических преобразователей.

В 1912 г. Р. Фессенден разработал первый гидроакустический излучатель большой мощности [6]. Осциллятор Фессендена возбуждался электрически на одной частоте и работал по принципу электродинамического громкоговорителя. В диапазоне

частот 500 ... 1000 Гц он мог работать в режиме гидроакустического приемника и излучателя. В 1914 г., находясь под впечатлением гибели «Титаника», Фессенден разработал и использовал прибор для демонстрации возможности эхолокации айсберга на расстоянии 2 миль¹. Благодаря простоте и надежности осциллятор Фессендена используют в качестве источника синусоидальных гидроакустических сигналов практически до настоящего времени.

Фессенден был также консультантом компании «Сабмарин Сигнал» (США), которая создала первую промышленную гидроакустическую аппаратуру. При одновременном излучении сигналов подводным колоколом и воздушной сиреной, находящихся на плавучем маяке, на судах, в соответствии с разработанным компанией методом определяли расстояния до этого маяка путем измерения разности времени прихода к судну воздушного и подводного акустических сигналов. Однако с появлением радио и внедрением радионавигации этот метод не получил широкого применения.

Создание в XIX в. телеграфных и телефонных систем связи стимулировало развитие элементной базы и методов анализа в целях совершенствования гидроакустической аппаратуры. В 1844 г. был впервые продемонстрирован телеграф Морзе. Он обеспечил необходимую достоверность передачи сообщений на значительные расстояния. Т. Эдисон и другие изобретатели предложили методы мультиплексной передачи сигналов, позволяющие уменьшить стоимость затрат.

В 1866 г. А. Белл получил патент на телефон. Хотя основную идею телефонной связи выдвигали многие разработчики, Белл первым создал практически работающий прибор для преобразования акустических речевых сигналов в электрические и последующего их обратного преобразования на приемном конце. Излучатель и приемник Белла идентичны. Каждый состоит из металлической диафрагмы, расположенной в поле электромагнита. Звуковые волны, достигая диафрагмы, вызывают ее колебания и, следовательно, приводят к изменениям тока в катушке электромагнита. На приемном конце он вызывает колебания магнитного поля, а затем и диафрагмы. Следовательно, воспроизводится первоначальный звук.

Развитие телефонной техники обуславливало разработку концепций анализа сигнала и сети. Анализом электрических схем впервые стал заниматься Г. Ом, установивший зависимость между током и напряжением в простом импедансном элементе, таком, как резистор. Работа была продолжена

¹ Л. Ричардсон получил британский патент на гидролокационное устройство в 1912 г., через 5 сут после гибели «Титаника». Однако Р. Фессенден был вероятно, первым, кто довел эту идею до практической реализации.

Г. Кирхгофом, открывшим знаменитые законы распределения токов и напряжений в более сложных электрических цепях.

Изобретение Ли де Форестом в 1907 г. вакуумной триодной лампы ознаменовало начало века современной электронной промышленности. Ламповые усилители позволили усилить слабые сигналы и гидроакустические системы перестали зависеть от чувствительности человеческого слуха.

1.3. Гидроакустическая техника в первую мировую войну

В годы первой мировой войны акустическую технику¹ использовали для обнаружения самолетов, дирижаблей и подводных лодок. Больших успехов достигли английские и французские исследователи в области обнаружения и определения координат самолетов противника по излучаемым ими акустическим сигналам. Их обнаруживали либо с использованием рупоров и слуховых трубок, связанных со слуховым аппаратом оператора, либо с помощью угольных микрофонов и телефонного приемника. Эти приборы были внедрены и в гидроакустике в целях поиска подводных лодок противника.

Рэлей своими ранними работами, а впоследствии и как консультант, внес значительный вклад в развитие акустики в Англии. В XIX в. предполагали, что бинауральная способность человека позволяет определять направление на источник звука за счет разности интенсивностей сигналов, принимаемых из окружающего пространства, когда направление акустической (звуковой) волны не совпадает с осью, лежащей в плоскости симметрии головы. При этом считалось, что разность интенсивностей звука образуется за счет экранирующего действия головы.

Рэлей предположил [8], что подобная точка зрения не объясняет нашей способности определять направление на источник низкочастотных колебаний, длины волн которых сравнимы с размерами головы. Например, на частоте 100 Гц длина акустической волны в воздухе составляет 3 м, поэтому голова не может вызвать заметного экранирования акустической волны. Рэлей сделал вывод, что дополнительно к определению разности интенсивности сигналов слух способен различать разность их фаз, т. е. чувствовать различия во времени прихода акустических колебаний к каждому уху.

Если направление на источник звука можно определять за счет разности фаз, то, очевидно, что точность такого определения будет тем выше, чем больше расстояние между приемниками.

¹ История разработки гидроакустической техники от первой мировой войны до 1950 г. рассмотрена в статье М. Ласки [7]. Статья содержит обширную библиографию.

Подобные наблюдения послужили поводом разработки устройств для определения направления на источник звука.

Типичное устройство для прослушивания шумов самолетов состоит из пары больших акустических рупоров. Каждый из них соединяют с ухом оператора с помощью трубки и стетоскопа. Меняя положение рупоров в пространстве, оператор добивается того, чтобы звук в ушах был одинаковой силы и таким образом определяет направление на его источник.

При разработке этой аппаратуры было замечено, что авиационные двигатели излучают звуки определенных тональных частот в диапазоне 80 ... 130 Гц. Для повышения качества работы аппаратуры в этом диапазоне были созданы резонансные и перестраиваемые фильтры, исключющие интерференцию акустических колебаний на других частотах. В неэлектрических звукоулавливающих системах такие фильтры представляли собой резонаторы Гельмгольца.

Акустические рупоры для обнаружения самолетов были длиной 1,2 м и отстояли друг от друга на расстоянии 2,3 м, соответствующем половине длины волны на частоте 80 Гц. Таким образом, если цель находилась в направлении, совпадающем с максимумом характеристики направленности, то в обоих рупорах сигналы частотой 80 Гц полностью взаимно уничтожались. Дополнительно к рупорам, закрепленным в горизонтальной плоскости, устанавливали два рупора по вертикали. Они позволяли определить угол наклона входящего сигнала.

Чтобы исключить необходимость механических поворотов четырех рупоров, было разработано приспособление, позволяющее оператору изменять эффективную длину трубки, подходящей к каждому уху. С помощью такого устройства менялась эффективная длина акустического волновода, что обеспечивало одинаковую силу звука в каждом ухе. Подобный компенсатор длины траектории распространения акустических колебаний был откалиброван так, чтобы направление на источник звука можно было определять непосредственно по положению регулятора длины трубки.

В 1915 г. в ответ на усиление угрозы немецких подводных лодок интенсифицировалась разработка средств обнаружения погруженных подводных лодок. Одновременно с акустическими рассматривались оптические, температурные, магнитные и электромагнитные датчики. Было установлено, что практическое применение могут найти только акустические устройства.

В Англии работа по созданию гидроакустических систем была проведена А. Вудом и его коллегами из отдела изобретений и научно-исследовательского отдела Британского адмиралтейства. В США первые работы в области создания пассивных шумопеленгаторов провел Х. Хафес (Нью-Лондонский испытательный полигон, в настоящее время Центр подводных систем ВМС).

Первой успешно работавшей системой пассивного обнаружения целей и определения их координат был прибор SC, созданный в США (рис. 1.1). Он копировал слуховую трубку Леонардо да Винчи. Только вместо одной трубки в воду были опущены две. Концы трубок с чувствительными приемниками отстояли на 1,5 м. Приемники присоединяли к ушам воздушными трубками с устройствами типа медицинского стетоскопа на концах трубок. Такая система позволяла оператору использовать бинауральный эффект. Прибор был особенно эффективен в диапазоне 500 Гц и обнаруживал как надводные корабли, так и подводные лодки.

Естественным усовершенствованием этого устройства стал прибор MB (рис. 1.2). На каждой стороне поворачиваемой вручную переключины размещалось по шесть резиновых приемников. Приемники с каждой стороны переключины соединены с соответствующей воздушной трубкой, согласованной с ним по акустическому импедансу, и заканчивающейся стетоскопом, как и в приборе SC. Для определения направления на источник звука оператор поворачивал ручную переключину до получения одинакового звучания в ушах. Новый прибор имел повышенную чувствительность и более высокую точность определения направления, чем SC.

Прослушивание устройства с опускаемой за борт поворотной антенной нельзя было использовать даже на малом ходу корабля. Для решения этой проблемы прибор MV, состоящий из резиновых баллонов-приемников, разместили заподлицо с корпусом корабля. Поворот оси ее характеристики направленности выполняли изменением длины линии каждого из каналов акустического компенсатора.

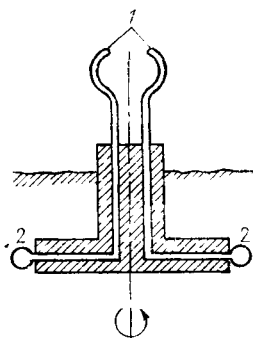


Рис. 1.1. Бинауральный прослушивающий прибор SC с воздушными трубками
1 — стетоскоп; 2 — резиновые приемники

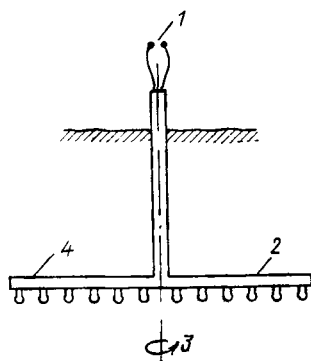


Рис. 1.2. Многоэлементный прибор MB с воздушными трубками:
1 — стетоскоп; 2, 4 — правая и левая часть антенны; 3 — направление вращения антенны

Шесть приемных элементов каждой части антенны были соединены вместе и после компенсации направления оси приемной характеристики сигналы от каждой части поступали к соответствующему уху. Поворотный штурвал на компенсаторе был ориентирован относительно шкалы, позволявшей оператору определять направление на цель.

Габариты прибора составляли 8,4 ... 12 м. Типовое размещение аппаратуры предусматривало установку по одной станции с каждой стороны носовой оконечности корабля. Экранирование сигналов корпусом корабля позволяло исключать неоднозначность определения направления прихода сигнала с правого или левого борта, характерную для любых линейных антенн.

Из использованной в первую мировую войну аппаратуры неэлектрического типа прибор MV был наиболее совершенным. Как сообщалось, он позволял осуществлять сопровождение подводной лодки на дистанции до 1,8 км при ее движении со скоростью 20 уз.

В годы первой мировой войны было хорошо известно вредное влияние собственных помех движущегося корабля на характеристики акустических приемников. В целях удаления приемника сигналов от источника собственных помех было разработано несколько типов буксируемых гидрофонов. Наиболее совершенный буксируемый прибор U-3 был разработан в 1918 г.

В гибком резиновом шланге длиной 12 м через равные промежутки было размещено 12 угольных кнопочных микрофонов, принимающих акустические колебания. Шланг был предварительно заполнен пресной водой для обеспечения нейтральной плавучести антенны в соленой воде, а его концы загерметизированы. Такая линейная гидрофонная антенна получила название «Угорь».

Прибор U-3 включал в себя две такие антенны, буксируемые на расстоянии 90 ... 150 м от кормы корабля. Расстояние между антеннами по горизонтали составляло 3,6 м. Электрические сигналы подавались на борт корабля по многожильному кабелю. Компенсация разности времени прихода сигналов к различным акустическим приемникам осуществлялась электрическим компенсатором. Он вводил собственную электрическую задержку в электрический тракт (канал) каждого гидрофона до суммирования. Как и при использовании антенны с воздушными трубками, новая антенна была разделена на две половины. Сигналы от шести гидрофонов каждой половины антенны суммировались и подавались соответственно на правый и левый наушники оператора.

Как и в более ранних станциях, оператор вращал компенсатор в целях получения в наушниках одинакового звучания.

Таким способом определялось направление на цель. Задача буксировки не одной, а двух разнесенных по горизонтали антенн состояла в обеспечении однозначного определения направления (правый — левый борт), с которого пришел сигнал.

Шесть гидрофонов от каждой из двух буксируемых антенн подключались к компенсатору, обеспечивающему выравнивание фаз двух сигналов. Это позволяло раздельно производить пеленгование сигнала относительно базовой (осевой) линии. Из схемы реализации этого метода (рис. 1.3) видно, что угол α , измеренный антенной правого борта, может оказаться в первом или втором квадранте. Угол β , измеренный первыми (в направлении движения корабля) секциями антенн правого и левого бортов, может оказаться в первом или четвертом квадранте. Используя измеренные значения углов α и β , можно заключить, что цель находится в первом квадранте.

Для увеличения отношения сигнал/помеха (ОСП) прибор У-3 был оборудован двумя электрическими фильтрами верхних частот со значениями 450 и 900 Гц. Фильтр с большим значением частоты использовался при увеличении скорости буксировки антенны для подавления низкочастотных шумов скорости потока.

Прибор У-3 работал эффективно совместно с аппаратурой MV, имеющей антенну, установленную на корпусе корабля. Дистанция до цели приближенно определялась при этом триангуляционным способом на основании пеленгов, измеряемых одновременно буксируемой и подкильной (установленной на корпусе) антеннами. Для определения расстояния оператор использовал простую номограмму, на которой прокладывал пеленги от двух названных систем.

Приборы SC, MV-и У-3 как шумопеленгаторные станции успешно применяли для обнаружения погруженных подводных лодок. Однако определять их координаты с точностью, необходимой для использования оружия, с помощью этих шумопеленгаторных станций было все еще трудно. Это привело к возникновению интереса к активным эхолокационным системам.

Известный французский физик П. Ланжевен после нескольких лет работы продемонстрировал в 1917 г. обнаружение подводной лодки с помощью активного гидролокатора. Он

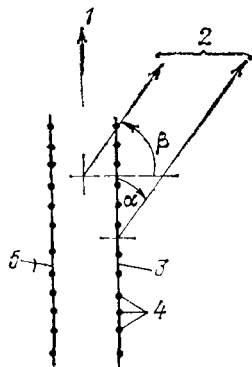


Рис. 1.3. Схема исключения неоднозначности при определении пеленга на цель:

1 — направление движения судна; 2 — направление на цель; 3, 5 — правая и левая антенны; 4 — гидрофоны

использовал задающий генератор радиопередатчика, работающий на частоте 38 кГц, для возбуждения акустического пьезоэлектрического преобразователя. Антенна гидролокатора имела достаточно большие габариты для формирования в воде узкой характеристики направленности акустической энергии. Это обеспечивало определение пеленга и дистанции до цели. По результатам работы Ланжевена Англия начала разрабатывать активные гидроакустические средства. Однако война закончилась до того, как эту аппаратуру стали использовать.

1.4. Разработка гидроакустической аппаратуры в период между войнами

К концу первой мировой войны темпы разработки гидроакустической аппаратуры заметно замедлились. В 1923 г. было образовано акустическое отделение научно-исследовательской лаборатории ВМС США. Его первым руководителем был Г. Хайес. К 1927 г. он и четыре других специалиста представляли полный штат подразделения.

В конце войны обе противоборствующие стороны интенсивно работали над снижением уровней акустических сигналов, излучаемых подводными лодками. Успехи в этой области вместе с положительными результатами экспериментов Ланжевена заставили США и Англию приложить после войны значительные усилия для разработки активных гидроакустических систем, независимых от шумов, излучаемых целью, и позволяющих быстро определять координаты цели.

В этот период частотный диапазон активных гидроакустических систем преимущественно составлял 10 ... 30 кГц. Это выше частотного диапазона большинства собственных шумов судна. Кроме этого, на таких частотах можно сформировать узкий луч излучаемой акустической энергии при умеренных линейных размерах антенны. В разработанных в Англии преобразователях использовали пьезоэлектрические элементы, аналогичные тем, которые применил Ланжевен. В США для излучения ультразвуковых импульсов применяли магнитострикционные преобразователи. По другим, входящим в состав гидроакустических систем элементам, системы, разрабатываемые в США и Англии, были аналогичными и основывались на принципах эхолокации, предложенных П. Ланжевенем. Конечно, быстрое развитие электровакуумной технологии, стимулированное бурным ростом радиопромышленности, привело к повышению надежности работы и улучшению технических характеристик электронных блоков гидроакустических систем.

Версальский договор ограничил Германию малым военноморским флотом без подводных лодок и авиации. В этих условиях немцы видели роль гидроакустики прежде всего в обороне,

а не в наступлении. В результате после войны их усилия были сосредоточены на разработке пассивных, а не активных гидроакустических систем. Придерживаясь оборонительной тактики, немецкие специалисты тщательно исследовали источники судовых шумов, включая шумы винтов, машин, обтекания водой носовой оконечности, и использовали полученные данные при создании новых судов. Расположение антенн шумопеленгаторов и их конструктивные параметры тщательно согласовывали с архитектурой судна в целях получения наилучших результатов. Впоследствии была реализована разработанная Г. Хайесом технология создания конформных антенн, обеспечивающая электронное сканирование характеристики направленности. Она была усовершенствована и обеспечила создание превосходной конформной антенны для шумопеленгаторных станций, установленной на кораблях и больших судах. Эта система, названная GNG, была установлена на немецком крейсере «Принц Евгений». В соответствии с расчетами она должна была обеспечивать безопасность крейсера в случае интенсивных торпедных атак.

Конформная антенна системы GNG имела эллиптическую форму и размещалась в носовой части корабля. На крейсере «Принц Евгений» в состав антенны шумопеленгаторной системы входило до 60 гидрофонов по каждому борту. Формирование характеристики направленности антенны осуществлялось с использованием широкополосной многоэлементной электрической линии задержки, соединенной с механическим устройством, которое, по существу, представляло собой геометрически уменьшенную копию антенны. Вращающиеся контакты соединяли антенну с линиями задержки, что обеспечивало введение соответствующего запаздывания сигнала во времени в канал каждого акустического приемника. Таким образом формировались характеристики направленности, ориентированные в требуемых направлениях. Устройство этой шумопеленгаторной станции было тщательно изучено специалистами-гидроакустиком США во время второй мировой войны. Результаты этой работы оказали значительное влияние на разработку последующих станций с конформными антеннами.

Более глубокие физические процессы распространения звука в море были изучены в 30-е гг. Научно-исследовательской лабораторией ВМС США было измерено поглощение звука в морской воде на ультразвуковых частотах. Результаты этих исследований позволили сделать вывод о законах поглощения во всем частотном диапазоне, представляющем интерес для гидроакустиков.

Исследования непредсказуемого, на первый взгляд, поведения океана как акустической среды начались в 1937 г. с изобретения А. Спилхаузом батитермографа. Это устройство позволило быстро и удобно измерять температуру морской воды в

зависимости от глубины. По этим данным можно было рассчитать вертикальное распределение значений скорости распространения звука. Было установлено, что даже незначительные вертикальные градиенты температуры воды вызывают рефракцию акустических лучей, а это существенно сказывается на характеристиках распространения гидроакустических сигналов.

К началу второй мировой войны корабли ВМС США были оборудованы батитермографами, позволяющими оценивать условия распространения звука в районе боевых действий. Такие же возможности были предоставлены подводным лодкам, в результате они получили дополнительную информацию, необходимую для принятия тактических решений.

Для развития системного подхода к конструированию и анализу гидроакустических систем было необходимо более глубокое изучение акустической среды. В довоенный период фундаментальные исследования, выполненные Х. Найквистом и Хартли, были направлены на анализ работы систем обработки информации. Разработанные теория и методы проверки статистических гипотез стали применять для решения идентификации маскируемых помехами полезных сигналов в системах связи. Эти исследования, направленные на полное понимание системы, были в ряду наиболее важных достижений.

1.5. Вторая мировая война и послевоенный период

После вступления США во вторую мировую войну был образован Научно-исследовательский комитет Министерства обороны, который возглавил В. Буш. Эта организация финансировала исследования и разработки, которые были жизненно необходимы для успешного ведения войны. В числе важных направлений были: разработка лабораторией излучений Массачусетского технологического института (МТИ) радиолокатора, проект «Манхеттен» по созданию атомной бомбы и обширная программа в области гидроакустики, предложенная 6-м отделением комитета.

Гидроакустические исследования выполнялись отделением военных исследований Калифорнийского университета, лабораторией электроники ВМС США в Сан-Диего и океанографическим институтом в Вудс Холле. Ценный вклад был сделан также лабораториями, связанными с Колумбийским и Гарвардским университетами, Массачусетским технологическим институтом, другими лабораториями ВМС США и организациями промышленности.

Цель работы этих групп заключалась в том, чтобы улучшить конструкцию и повысить эффективность использования гидроакустических систем. Ввиду сугубо практической направленности поставленных задач экспериментальные программы не всегда были нацелены на поиск ответов по фундаментальным в науч-

ном смысле, вопросам. Поэтому почти все эксперименты были проведены в области ультразвукового поддиапазона частот, представляющего в те годы интерес для создания активных гидролокационных систем. Однако благодаря высокой квалификации специалистов, выполнявших эти исследования, фундаментальные представления об особенностях распространения гидроакустических сигналов получили дальнейшее развитие.

К счастью, к концу войны накопленные в этой области знания удалось обобщить и опубликовать в виде серии отчетов под общим названием «Физика звука в море» [9]. В этих работах были сформулированы теоретические основы для описания распространения звука в море, реверберации и отражения сигналов от подводных лодок, надводных кораблей, во многом совпадающие с современными представлениями.

Приборы и методы измерений, разработанные во время второй мировой войны, стали этапом для создания программы океанографических исследований в последующие годы, которая должна была заполнить пробелы, допущенные в программах военных лет вследствие ограниченности их целей.

К концу войны факторы, вызывающие изменения скорости звука в океане, были изучены и систематизированы. Во всех районах Мирового океана были получены экспериментальные данные скорости распространения звука, охватывающие все сезоны года, различные погодные условия и разные глубины. С использованием на ранних этапах методов лучевой акустики было исследовано влияние вертикального профиля скорости звука на траектории распространения акустических лучей. Различные типы траекторий акустических лучей были идентифицированы и им присвоены наименования, существующие по настоящее время.

Используя взрывные источники сигналов, Г. Вулард, М. Эвинг и Дж. Ворцель исследовали сверхдальнее глубоководное распространение звука низкой частоты. Ими был открыт подводный звуковой канал, обеспечивающий прием излученного звука на дистанциях более 1000 миль.

Программа лаборатории излучений МТИ по созданию радиолокационной технологии обеспечила разработку схем, элементов и методов обработки сигналов, необходимых для формирования, излучения, приема и выделения микроволновых импульсов. Задача выделения слабых радиолокационных сигналов при наличии помех аналогична задаче обработки гидроакустических сигналов. Результаты работы в рамках вышеназванной программы были после войны оформлены в виде 28 томов отчетов МТИ под общим названием «Radiation Laboratory series». Издание финансировалось комитетом.

В этих отчетах особый интерес представляет том 24 — «Пороговые сигналы» Лаусона и Уленбека, посвященный общей

проблеме обработки сигналов при наличии помех. Эта книга одна из первых, где с единых позиций рассмотрены статистические и спектральные свойства сигналов и помех. Объединяя экспериментальные процедуры и методы теоретического анализа, авторы исследовали зависимости между отношением сигнал/помеха на выходе и характеристикой приемного фильтра. Была представлена аппроксимация оптимального фильтра. Описанный процесс обнаружения осуществлялся методом проверки гипотез, основанным на статистических свойствах колебаний на выходе фильтра при наличии и в отсутствие сигнала от цели.

Хотя примененный частный критерий (названный критерием идеального наблюдателя) был позже изменен, его введение было важным шагом в разработке статистической модели, представляющей собой систему обработки сигналов, работающую совместно с устройством принятия решения (часто эту роль выполняет человек-оператор).

Независимо от работ, выполняемых лабораторией излучений МТИ, важный вклад в понимание существа процесса обработки сигналов был сделан Н. Винером и С. Райсом. В 1942 г. Н. Винер написал классическую работу «Экстраполяция, интерполяция и сглаживание временных рядов», которая была впервые опубликована в качестве отчета комитета [10]. С помощью теории оценок он точно вычислил характеристики фильтра, который обеспечил наилучшее выделение требуемого сигнала на фоне помех.

В 1944—1945 гг. Райс опубликовал статью «Математический анализ случайного шума» [11]. В ней всесторонне охвачены вопросы статистических характеристик шумов и их влияния на результаты прохождения шума в трактах при различных режимах работы схем.

Приблизительно с 1945 по 1955 г. работы К. Шеннона [12] в США, Д. Габора [13] и П. Вудворда [14] в Англии сделали теорию информации вполне законченной научной дисциплиной. Габор и Вудворд, в частности, предложили новый подход к решению проблемы синтезирования формы сигнала, которая влияет на такие характеристики системы, как разрешающая способность обнаружения цели, определение дистанции до нее и скорость движения.

Начало холодной войны привело к резкому повышению активности по многим техническим направлениям. Такие организации, как Лаборатория излучений МТИ, отделение военных исследований Калифорнийского университета и другие фактически распространили сведения о своих достижениях по всей стране. В конечном итоге это привело к стремительному расширению технологической базы. В пятнадцать послевоенных лет зародились и получили быстрое развитие физика твердого тела, цифровые ЭВМ, ракетная техника, системы прецизион-

ного управления объектами на больших расстояниях, использование ядерной энергии в качестве основного источника движения на кораблях.

В гидроакустике были продолжены начатые в годы войны экспериментальные и теоретические работы. Они охватили весь звуковой, а также ультразвуковой поддиапазоны. В. Кнудсен [15], Г. Венц [16], Х. Марш [17], Р. Урик [18] и другие идентифицировали источники различных шумов океана и определили их характеристики. Дополнительные исследования причин поглощения звука в воде провели Л. Либерман [19] и Р. Леонард [20]. Они экспериментально определили коэффициенты поглощения звука в диапазоне частот от значений, меньше 100 Гц, до частот, превышающих 1 МГц [21 ... 23]. В различных районах Мирового океана были получены огромные массивы данных о параметрах распространения гидроакустических сигналов. Увеличивающиеся возможности универсальных ЭВМ сделали возможным анализ этих данных и разработку статистического представления об относительных изменениях частотных характеристик систем при различных условиях распространения звука. Цифровые машины позволили решать уравнения, описывающие распространение гидроакустических сигналов на основе стандартных процедур, что позволило легко сравнивать результаты расчетов и экспериментов. Это привело к созданию более точных и полных математических моделей, которые должны использоваться в системах синтеза и в расчетах характеристик.

Важной послевоенной разработкой стало введение цифровых методов в обработку сигналов. Первым их применением в гидроакустике была цифровая система ДИМУС [24] формирования и сканирования многолучевой характеристики направленности. В ней использовалось жесткое ограничение входных сигналов, подаваемых на сдвиговые регистры в целях получения задержек, необходимых для формирования характеристики направленности. Введение методов быстрого преобразования [25] вместе со снижением стоимости и одновременным ростом возможностей цифровых полупроводниковых элементов привело в конце 60-х и начале 70-х гг. к созданию полностью цифровых систем обработки данных.

Появление стратегического ядерного оружия после второй мировой войны постепенно изменило роль и конструкции гидроакустических систем. Требования к типовому гидролокатору во время второй мировой войны сводились к обнаружению подводной лодки вблизи конвоя в целях его обороны. Активные гидроакустические системы с малым радиусом действия хорошо решали эту задачу.

Создание атомных подводных лодок с баллистическими ракетами на борту существенно изменило ситуацию. Район,

который следовало оборонять, охватил теперь все континенты, с возможным расположением точек потенциального запуска ракет в любом районе Мирового океана. Обязательным требованием к гидроакустическим системам стало обнаружение и классификация подводных целей на больших дальностях. Это возродило интерес к шумопеленгаторным станциям, которые не имели недостатка, присущего активным гидролокаторам из-за удвоения потерь при распространении сигнала в прямом и обратном направлениях.

Требования к увеличению дальности действия обусловили переход ко все более низким частотам, чтобы уменьшить потери из-за поглощения звука. Более низкие частоты, в свою очередь, привели к увеличению габаритов антенн в целях обеспечения заданной точности определения направления на цель. Появилась необходимость в применении бортовых антенн максимально возможных размеров или гибких протяженных буксируемых антенн.

Основные эксперименты были проведены для измерения особенностей распространения низкочастотного звука на сверхбольшие расстояния и определения корреляционных свойств сигналов и шумов на низких частотах. Обнаружение и обработка узкополосных тональных составляющих сигналов цели были улучшены благодаря использованию преимуществ высокоскоростной цифровой техники. В то же время не прекращалась деятельность разработчиков и конструкторов кораблей по уменьшению излучаемой подводными лодками акустической энергии. По сравнению с общей энергией, вырабатываемой атомными подводными лодками, энергия излучаемых ею акустических колебаний исключительно мала.

С позиций решения классической проблемы обнаружения сигнала одиночной цели на фоне чисто случайных шумов с известным законом распределения, тактико-технические характеристики ГАС, полученные к 70-м гг., можно считать почти идеальными. В этих условиях достижение заданных параметров ограничивалось только возможностями апертур по пространству, времени, частоте и характеристиками среды. Однако, как только чувствительность обнаружения слабых сигналов повысилась, простая модель, описывающая поле шумов, стала неудовлетворительной.

Океан заполнен источниками шумов, аналогичных по характеристикам шумам цели. Эти источники могут иметь биологическое или производственное происхождение. Чем выше чувствительность приемных трактов шумопеленгаторов, тем больше число источников, влияющих на обнаружение цели. Поэтому возникает проблема классификации и выделения сигналов, поступающих от многих целей. Объем данных, создаваемых в

этих условиях современными ГАС с многолучевыми характеристиками направленности, оказывается очень большим.

Ключевой технической задачей стала разработка методов, с помощью которых эта информация должна обрабатываться для исключения помех и предоставления оператору-гидроакустику лишь существенной ее части.

Попытка разрешить эти проблемы, извлекая полезную информацию из больших объемов данных, привела к многочисленным вариантам автоматического обнаружения и классификации целей, адаптации системы к локальным окружающим условиям за счет управления ее техническими параметрами. Эти разработки стали возможными на основе использования полупроводниковой цифровой техники обработки информации. Развитие в этом направлении непрерывно продолжается.

1.6. Выводы

Современные специалисты-гидроакустики должны поражаться достижениям прошлых лет. Г. Хайес чувствовал бы себя как дома при обсуждении конструкций современных гидроакустических антенн и, возможно, дал бы ценные рекомендации. К первоначальному утверждению Леонардо да Винчи о том, что можно услышать звуки кораблей в воде, мы все еще ищем ответы на вопросы: сколько их, какого они типа, по каким направлениям и на каких дистанциях находятся?

С другой стороны, к тому, что было известно сотни лет тому назад, добавилась новая информация. Теперь мы понимаем, почему и при каких обстоятельствах слышны вдали звуки кораблей. Мы можем описать среду и наши системы в интересах прогнозирования, по крайней мере, в простой обстановке. Наконец, для повышения тактико-технических характеристик ГАС должны исследоваться остающиеся проблемы, ограничивающие понимание существа используемых физических явлений и сами параметры аппаратуры.

Список литературы

1. *MacCurdy E.* The Notebooks of Leonardo da Vinci. Garden City, N. Y.: Garden City Publishing Co., Inc., 1942, Chap. X.
2. *Sound.* The New Encyclopaedia Britannica. Vol. 17. Chicago: Encyclopaedia Britannica, Inc., 1974, P. 19
3. «*Sound*». Funk and Wagnalls New Encyclopedia, Vol. 22, New York: Funk & Wagnalls, Inc., 1975, P. 24.
4. *Strutt J. W.* (Lord Rayleigh), Theory of Sound, v. 1, II, New York: Dover Publications, Inc., 1945.
5. *Albers V. M.* Underwater Acoustics Handbook-II. University Park, Pa.: The Pennsylvania State University Press, 1965, Chap 10.
6. *Urlick R. J.* Principles of Underwater Sound for Engineers. New York: McGraw-Hill Book Company, 1967, Chap I.

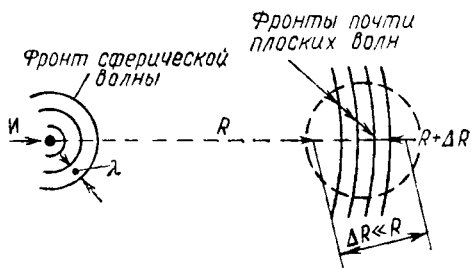
7. *Lasky M.* Review of Undersea Acoustics to 1950. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 61, No. 2, p. 283, Feb 1977.
8. *Rayleigh L.* On the Perception of the Direction of Sound. *Proc. R. Soc. A*, vol. 83. P. 61—64 (1909); or *Scientific Papers by Lord Rayleigh*, Vol. V. New York: Dover Publications, Inc., 1964. P. 522.
9. *Physics of Sound in the Sea*. Parts I—IV; originally issued as Division 6, Vol. 8, NDRC Summary Technical Reports; reprinted in 1969 by the Government Printing Office, Washington, D. C.
10. *Wiener N.* The Extrapolation and Smoothing of Stationary Time Series, NDRC Progress Report No. 19 to the Services, MIT, Feb. 1, 1942.
11. *Rice S. O.* Mathematical Analysis of Random Noise. *Bell Syst. Tech. J.*, Vols. 23 and 24 (1944—1945).
12. *Shannon C. E.* The Mathematical Theory of Communications, *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 27. P. 379—424 and 623—637 (July and Oct. 1948).
13. *Gabor D.* Theory of Communications. *J. Inst. Electr. Eng.*, Vol. 93(III). P. 429 (1946).
14. *Woodward P. M.* Probability and Information Theory with Applications to Radar. Elmsford, N. Y; Pergamon Press, Inc., 1955.
15. *Knudsen V. O., Alford R. S., Emling J. W.* Underwater Ambient Noise, *J. Mar. Res.*, Vol. 7. P. 410 (1948).
16. *Wenz G. M.* Acoustic Ambient Noise in the Ocean: Spectra and Sources. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 34. P. 1936 (1962).
17. *Marsk H. W.* Origin of the Knudsen Spectra. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 35. P. 409 (1963).
18. *Urlick R. J.* Some Directional Properties of Water Ambient Noise, Naval Research Laboratory Report 3796, 1951.
19. *Lieberman L. N.* Origin of Sound Absorption in Water and Sea Water. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 20. P. 868 (1948).
20. *Leonard R. W., Combs P. C., Skidmore L. R.* Attenuation of Sound in Synthetic Sea Water. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 21. P. 63 (1949).
21. *Urlick R. J.* Low Frequency Sound Attenuation in the Deep Ocean. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 35. P. 1413 (1963).
22. *Thorp W. H.* Deep Ocean Sound Attenuation in the Suband Low-Kilocycle-per-Second Region. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 38. P. 648 (1965).
23. *Sheehy M. J., Haley R.* Measurement of Attenuation of the Low-Frequency Underwater Sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 29. P. 464 (1957).
24. *Anderson V. C.* Digital Array Phasing. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 32. P. 867 (1960).
25. *Cooley J. W., Tukey J. W.* An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series. *Math. Comp.*, Vol. 19. P. 297—301 (Apr. 1965).
26. *Hunt F. V.* *Electroacoustics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1954, Chap I.

Глава 2.

АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В этой главе рассмотрена природа акустических волн в идеальной среде. В океане на распространение звука влияют такие факторы, как температура и химический состав воды, гидростатическое давление, а также неровности поверхности моря

Рис. 2.1. Распространение волн от точечного источника в однородной среде



и дна. Предполагают, что все свойства идеальной однородной среды неизменны в пространстве и во времени, а границы удалены настолько, что их влиянием можно пренебречь. Наконец, предполагают, что механические потери отсутствуют. Эти ограничения впоследствии снимаются или изменяются, но первоначально они представляют собой важные упрощения для вывода уравнений распространения акустических волн.

Распространение звука в воде представляет собой механический процесс, который определяется механическими свойствами жидкости, в частности инерциальными и упругими свойствами элементарного объема среды. Система сил, действующих на элемент объема, приводит к ускорению, противоположному силе инерции. В элементе объема создается механическое напряжение, связанное с приложенной силой и с упругостью среды.

Общая энергия, содержащаяся в этих механических эффектах, включает кинетическую энергию движения и запасенную внутренним напряжением потенциальную энергию.

Источник переменной механической силы производит несбалансированное воздействие на соседние элементы объема. Распространение фронта результирующего явления смещение — напряжение от источника происходит в виде *продольной волны сжатия*, которая передает механическую или акустическую энергию от точки излучения.

Волна, излучаемая осциллирующим источником, состоит из областей сжатия, где давление превышает равновесное значение, и области разрежения, в которой давление меньше равновесного. Эти области движутся (распространяются) от источника с постоянной скоростью, определяемой свойствами среды. На рис. 2.1. максимумы давления показаны в некоторые мгновенные значения времени, следующие от момента начала колебаний источника. Для однородной среды эти максимумы будут наблюдаться на поверхности концентрических сфер, располагающихся вокруг источника *И*. Для источника с синусоидальными колебаниями одной частоты сферы распределены в пространстве через одинаковые расстояния, равные длине *акустической волны* в воде.

Волны, распространяющиеся согласно сферической симметрии (см. рис. 2.1), называются *сферическими волнами*, а уравнения, описывающие их характеристики во времени и в пространстве, называются *уравнениями сферической волны*.

Рассмотрим удаленную от источника область пространства, размеры которой много меньше расстояния до источника. Как видно из рис. 2.1, в пределах этой области кривизна волновых фронтов мала. На больших расстояниях фронт сферической волны можно аппроксимировать плоскостью, считая, что размеры рассматриваемого участка ограничены. Уравнения сферической волны в этом случае упрощаются до *уравнений плоской волны*, описывающих распространения *акустических плоских волн*.

Очевидно, аппроксимация плоской волны не обеспечивает решения всех проблем распространения акустических колебаний. Однако для многих практических случаев такая аппроксимация оказывается достаточной и уравнения плоской волны дают простые соотношения между различными акустическими параметрами.

Обычная процедура состоит в том, чтобы получить обобщенное волновое уравнение. Уравнение плоской волны получается затем в виде частного случая обобщенного уравнения. Это подход детально проанализирован в замечательных работах [1 ... 3]. В этой главе рассмотрен прежде всего вывод простых соотношений между физическими свойствами среды и параметрами акустических колебаний, завершающийся решением уравнения плоской волны. Преимуществом такого подхода является возможность использования простых хорошо известных электрических аналогов, обеспечивающих идентификацию соответствующих соотношений между акустическими и электрическими параметрами.

Общее волновое уравнение выводится аналогично уравнению плоской волны. В этой главе рассмотрены используемые в гидроакустике единицы, стандартные величины и общепринятые обозначения в децибелах.

2.1. Электрический аналог распространения плоской волны

Прежде чем выводить уравнение акустической плоской волны, рассмотрим электрический аналог. На рис. 2.2 показана линия электрической передачи без потерь с распределенными последовательными индуктивностями и параллельными емкостями. Обозначения L и C соответствуют удельным значениям индуктивности и емкости на единицу длины линии.

Излучающий и приемный концы линии находятся в точках $x = 0$ и $x = l$. Напряжение и ток в любой точке линии явля-

ются функциями как x , так и t . Из элементарной теории цепей запишем соотношения между частными производными функции $v(t, x)$ по x и $i(t, x)$ по t и удельной индуктивностью в виде

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(t, x)}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) показывает, что напряжение, возникающее на индуктивности, зависит от скорости изменения тока в элементе и имеет знак, противоположный знаку этого изменения.

Аналогичным образом параллельная емкость противодействует изменению напряжения, отбирая ток из линии. Изменение тока в линии в зависимости от расстояния определяется соотношением

$$\frac{\partial i(t, x)}{\partial x} = -c \frac{\partial v(t, x)}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Дифференциальные уравнения в частных производных (2.1) и (2.2) могут быть решены для напряжения или для тока. Например, возьмем производную по x и t от соотношений (2.1) и (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -L \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial i}{\partial t}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2.3)$$

Аргументы функций v и i в этих уравнениях опущены. Уравнение (2.3) является хорошо известным дифференциальным уравнением, имеющим решение в виде

$$v(t, x) = v_1 [t - \sqrt{LC}(x + k_1)] + v_2 [t + \sqrt{LC}(x + k_2)]. \quad (2.4)$$

Чтобы понять характер функции v , приравняем k_1 нулю и изобразим для фиксированного значения x форму движения в волне в зависимости от t , а затем для фиксированного t — в зависимости от x .

Предположим, что $v = 0$ для неположительных значений аргумента и изменяется, как показано на рис. 2.3, а, при $x = 0$.

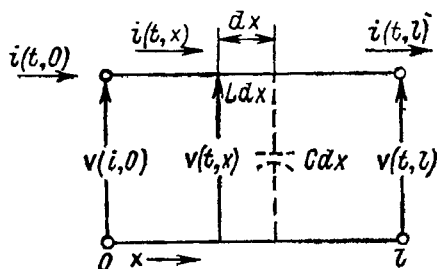


Рис. 2.2. Электрическая линия передачи без потерь с распределенными параметрами

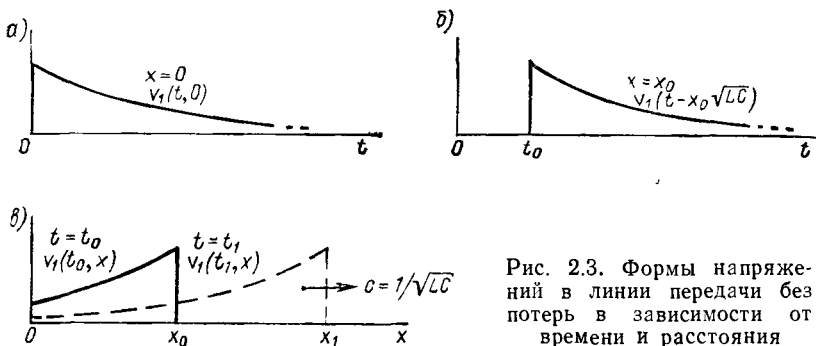


Рис. 2.3. Формы напряжений в линии передачи без потерь в зависимости от времени и расстояния

В другой точке линии при $x = x_0$ напряжение v_1 изменяется аналогично, но со сдвигом во времени на значение $t_0 = x_0 \sqrt{LC}$ (рис. 2.3, б).

Рассмотрим изменение напряжения в зависимости от *расстояния* вдоль линии в фиксированный момент времени t_0 . Функция $v_1(t_0, x)$ показана на рис. 2.3, в. Для $x \sqrt{LC} > t_0$ напряжение в линии равно нулю. В более поздний момент времени все точки волны сдвинуты вправо на значение $(t_1 - t_0) / \sqrt{LC}$.

Волна *перемещается вправо* или *распространяется со скоростью распространения*

$$c = 1/\sqrt{LC}. \quad (2.5)$$

Константа k_1 в формуле (2.4) определяет начало координат для функции v . При $k_1 = 0$ можно считать, что v_1 начинается в точке $x = 0$ и распространяется вправо со скоростью c . Величина v_1 представляет собой составляющую общего напряжения $v(t, x)$ и называется *бегущей волной, распространяющейся в прямом направлении*.

Аналогично можно показать, что $v_2(t, x)$ представляет собой *бегущую волну, распространяющуюся в обратном направлении* или в отрицательном направлении оси x . Линия передачи на рис. 2.2 существует лишь для положительных значений аргумента x . Следовательно, v_2 может существовать только в точках, расположенных справа от точки $x = 0$. А это возможно лишь в том случае, когда константа k_2 отрицательна и не равна нулю. Относительные значения амплитуд, знаки v_1 и v_2 , значение k_2 определяются с помощью граничных условий линии передачи (см. рис. 2.2).

Соотношение между напряжением и током, связанными с прямой и обратной волнами, является основным параметром линии передачи, называемым *импедансной характеристикой*.

Из соотношений (2.1) и (2.2) можно записать

$$(\partial v / \partial i)^2 = L/C. \quad (2.6)$$

Для прямой волны в точке $x = 0$

$$v_1(t - x/c) = + \sqrt{L/C} i_1(t - x/c) \quad (2.7)$$

и для обратной волны

$$v_2[t + (x + k_2)/c] = - \sqrt{L/C} i_2[t + (x + k_2)/c]. \quad (2.8)$$

Характеристический импеданс

$$Z_0 = \sqrt{L/C}. \quad (2.9)$$

Для линии передачи без потерь Z_0 представляет собой чисто резистивную величину.

Рассмотрим теперь линию передачи без потерь бесконечной длины в положительном направлении. Источник с единичным значением напряжения находится в точке $x = 0$. Прямая волна выходит из источника и распространяется в положительном направлении оси x . Так как линия передачи не имеет потерь, энергия прямой волны не исчезает при увеличении времени и расстояния. Поскольку другого источника энергии не существует, амплитуда обратной волны должна быть равна нулю.

Так как в бесконечной линии существует только прямая волна, отношение общего напряжения к общему току в любой точке линии равно характеристическому импедансу. В результате при $x = 0$ входное значение импеданса будет равно Z_0 . Это приводит к интересному выводу, что линия передачи конечной длины, нагруженная на входном конце импедансом, равным Z_0 , ведет себя так же, как и бесконечная линия. Прямая волна, возбужденная на излучающем конце, будет распространяться вдоль линии и должна поглощаться на нагрузке, равной характеристическому импедансу. Поскольку энергия прямой волны полностью поглощается в нагрузке, обратная волна не создается.

После рассмотрения бесконечной или конечной линии, нагруженной импедансом Z_0 , обсудим противоположный случай — характер поведения короткозамкнутой линии конечной длины. Короткое замыкание при $x = l$ соответствует граничному условию, требующему, чтобы напряжение на конце линии всегда было равно нулю. Это условие удовлетворяется при введении отраженной волны, равной по величине и противоположной по знаку падающей волне в точке короткого замыкания.

На рис. 2.4 отраженная волна показана как возбуждаемая воображаемым или мнимым источником. Он находится на

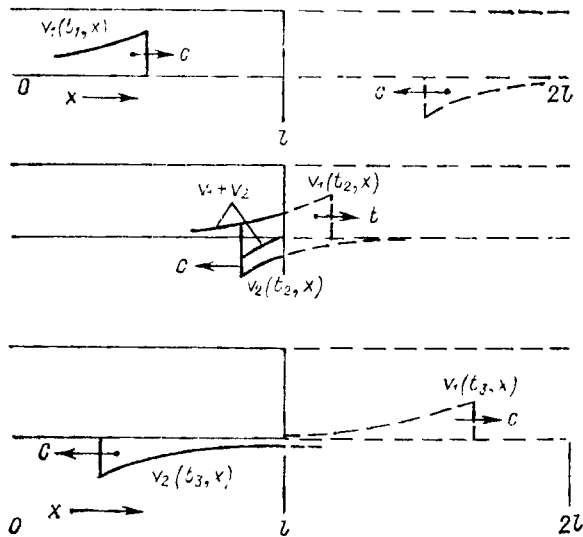


Рис. 2.4. Формы напряжения в короткозамкнутой электрической линии передачи

конце мнимой линии, расположенной справа от точки короткого замыкания. Длина мнимой линии равна длине реальной, поэтому $k_2 = -2l$. Таким образом, для $0 \leq x \leq l$

$$v(t, x) = v_1(t, x) + v_2(t, x) = v_1(t - x/c) - v_2[t + (x - 2l)/c].$$

Заметим, что для $x = l, v(t, x) = 0$ при всех значениях t .

Прямая волна проходит точку короткого замыкания и поступает в мнимую линию передачи, в то время как обратная волна v_2 появляется как реальная, двигающаяся в направлении исходного излучающего конца линии. Конец линии фактически преобразует прямую волну в обратную (противоположной полярности).

Очевидно, обратную волну в реальной линии передачи следует называть волной, отраженной от границы линии, где существует короткое замыкание. Если источник напряжения в этом примере имеет собственный импеданс, равный Z_0 , то v_2 не будет отражаться в точке расположения источника. Если импеданс источника не равен Z_0 , то будут происходить многочисленные отражения волны, распространяющейся между источником и точкой короткого замыкания во взаимнообратных направлениях.

Из уравнений (2.7) и (2.8) можно показать, что ток в точке короткого замыкания равен удвоенному току в прямой или обратной волне в этой точке.

Меняя местами напряжение и ток, можно определить влияние разомкнутого конца линии. В этом случае обратная волна имеет такую же полярность, как и прямая. Результат проявляется в удвоении напряжения на разомкнутом конце. Ток в этой точке, конечно, равен нулю.

Для исследования влияния других окончаний линий примем условия: сигнал синусоидальный, импеданс источника равен Z_0 , нагрузка конечности линии Z_l , возможно, комплексная. Удобно представить вещественный синусоидальный сигнал в комплексном экспоненциальном виде. При $t \geq 0$ комплексные напряжения в прямой и обратной волнах в любой точке имеют вид

$$v_1(t, x) = a_1 \exp[j\omega(t - x/c)]; \quad (2.10)$$

$$v_2(t, x) = a_2 \exp[j\omega(t + (x + k_2)/c)], \quad (2.11)$$

где a_1 , a_2 и k_2 — вещественные константы. Заметим, что действительные колебания описываются вещественными частями уравнений (2.10) и (2.11).

Импеданс конечности Z_l представляет собой отношение полного напряжения к полному току в точке $x = l$. Используя уравнения (2.7) и (2.8), можно записать для $x = l_1$

$$Z_l = [(v_1 + v_2)/(i_1 + i_2)] = Z_0 [(v_1 + v_2)/(v_1 - v_2)]. \quad (2.12)$$

Решая это уравнение относительно v_2 , получим

$$v_2 = v_1 [(Z_l - Z_0)/(Z_l + Z_0)] \quad (\text{для } x = l) \quad (2.13)$$

или

$$v_2(t, l) = a_1 [(Z_l - Z_0)/(Z_l + Z_0)] \exp[j\omega(t - l/c)]. \quad (2.14)$$

В общем случае при комплексном Z_l выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (2.14), является комплексным. Для вещественного R

$$[(Z_l - Z_0)/(Z_l + Z_0)] = R \exp(j\Phi).$$

Подстановка в формулу (2.14) дает

$$v_2(t, l) = Ra_1 \exp[j\omega(t - l/c + \Phi/\omega)] = a_2 \exp[j\omega(t + (l + k_2)/c)]. \quad (2.15)$$

В связи с тем, что a_1 , a_2 и R являются вещественными константами, имеем

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= Ra_1; \\ k_2 &= -2l + \Phi c/\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Значение напряжения в любой точке линии получается из уравнений (2.4), (2.15) и (2.16):

$$\begin{aligned} v(t, x) &= a_1 \exp[j\omega(t - x/c)] + Ra_1 \exp\left[j\omega\left(t + \frac{x - 2l + \Phi c}{c}\right)\right] = \\ &= a_1 \exp(j\omega t) \left\{ \exp\left(-j\frac{\omega x}{c}\right) + R \exp\left[j\omega\left(\frac{x - 2l}{c} + \frac{\Phi}{\omega}\right)\right] \right\}. \end{aligned}$$

После выполнения преобразований

$$\begin{aligned} v(t, x) &= a_1 \exp\left(-j\frac{\omega l}{c}\right) \left\{ \exp\left[+j\omega\left(\frac{l-x}{c}\right)\right] + \right. \\ &\quad \left. + R \exp\left[-j\omega\left(\frac{l-x}{c} + j\Phi\right)\right] \right\} \exp(j\omega t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Напряжение в линии, определяемое соотношением (2.17), является комплексной экспоненциальной функцией времени с комплексной амплитудой, которая изменяет свою фазу в зависимости от x . Оно представляет собой произведение функций, зависящих от времени и расстояния. Таким образом,

$$v(t, x) = V(x) \exp(j\omega t), \quad (2.18)$$

где $V(x)$ — комплексная амплитуда, зависящая от расстояния.

Так как амплитуда $V(x)$ не изменяется во времени (в предположении постоянных условий), то описываемая уравнением (2.18) волна является *стационарной волной* напряжения в линии передачи.

В качестве примера стоячей волны рассмотрим еще раз описанную ранее схему с коротким замыканием, для которой $Z_l = 0$, $R = 1$ и $\Phi = 0$. Уравнение (2.17) тогда принимает вид

$$\begin{aligned} v(t, x) &= a_1 \exp\left(-j\frac{\omega l}{c}\right) \left\{ \exp\left[+j\omega\left(\frac{l-x}{c}\right)\right] - \right. \\ &\quad \left. - \exp\left[j\omega\left(\frac{l-x}{c}\right)\right] \right\} \exp(j\omega t). \end{aligned}$$

Используя формулы Эйлера, запишем

$$v(t, x) = a_1 \exp\left(-j\frac{\omega l}{c}\right) \left[2j \sin \omega \left(\frac{l-x}{c}\right) \right] \exp(j\omega t). \quad (2.19)$$

Вещественная часть уравнения (2.19) имеет форму

$$\operatorname{Re}[v(t, x)] = -2a_1 \sin \left[\omega \left(\frac{l-x}{c}\right) \right] \sin \left[\omega \left(t - \frac{l}{c}\right) \right]. \quad (2.20)$$

При $x = l$ напряжение равно нулю, как и должно быть при коротком замыкании. Изменение значений напряжения в функции расстояния показано на рис. 2.5. Максимальное значение, равное $2a_1$, находится на расстоянии от точки короткого замыкания, определяемом из соотношения

$$\omega(l-x)/c = 2\pi f(l-x)/c = \pi/2. \quad (2.21)$$

Определяя длину λ электрической волны с помощью отношения c/f , получаем $x = l - \lambda/4$. Эта точка характеризует положение максимума напряжения, ближайшего к оконечной точке. Максимумы повторяются через полу-

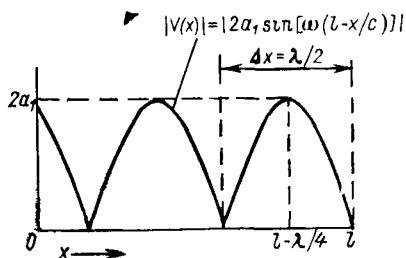


Рис. 2.5. Напряжение в стоячей волне в короткозамкнутой линии электрической передачи без потерь

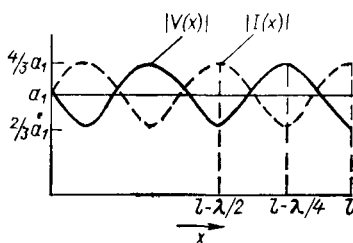


Рис. 2.6. Стоячие волны в электрической линии передачи без потерь для $Z_l = Z_0/2$

волновые интервалы. Нулевые значения напряжений также находятся друг от друга на расстоянии, равном половине длины волны.

На короткозамкнутой линии существует стоячая волна тока. Очевидно, ток должен иметь максимальное значение в точке короткого замыкания. Этот максимум повторится через полуволновые интервалы. В результате стоячие волны тока в пространстве сдвинуты на 90° по отношению к стоячим волнам напряжения.

Во всех точках линии ток и напряжение также сдвинуты на 90° . Следовательно, импеданс в каждой точке должен быть чисто реактивным или нулевым (в точках нулевого напряжения), либо равен бесконечности (в точках нулевого тока). Можно показать, что импеданс имеет индуктивный характер на расстояниях, менее $\lambda/4$ от точки короткого замыкания. Для $x/2 > l - x > \lambda/4$ импеданс имеет емкостной характер. Импеданс меняется от индуктивного до емкостного на интервалах линии, равных $1/4$ длины волны. Отметим, что точки линии с максимальным значением напряжения должны, очевидно, обозначаться как разомкнутые.

Другой пример. Пусть Z_l представляет собой чисто резистивную нагрузку и равно $Z_0/2$. В этом случае $R = -1/3$ и $\Phi = 0$. Подставляя эти значения в (2.17) и находя вещественную часть, получим

$$\operatorname{Re} [v(t, x)] = \frac{2a_1}{3} (\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha)^{1/2} \cos [\beta + \operatorname{arctg} (2 \operatorname{tg} \alpha)], \quad (2.22)$$

где $\alpha = 2\pi(l-x)/\lambda$; $\beta = \omega(t-l/c)$.

Заметим, что в этом примере фаза $\operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \alpha)$, связанная с изменяющейся во времени составляющей, является функцией расстояния. Значения напряжения стоячей волны, описанные выражением (2.22), вместе с соответствующими значениями тока показаны на рис. 2.6. При конечных значениях резистивности на конце линии ни напряжение, ни ток стоячей волны в любой точке линии не равны нулю. При чисто резистивной нагрузке линии минимум напряжения совпадает с максимумом тока и наоборот. В этих условиях максимумы и минимумы наблюдаются через интервалы, равные $1/4$ длины волны от оконечности линии.

При конечном значении импеданса на конце линии импеданс, измеренный в любой ее точке, будет комплексным даже

при чисто резистивной нагрузке. Общее выражение для импеданса в любой точке x линии, не имеющей потерь, будет

$$Z(x) = Z_0 \left[\frac{Z_l \cos \alpha + jZ_0 \sin \alpha}{Z_0 \cos \alpha + jZ_l \sin \alpha} \right], \quad (2.23)$$

где α определяется из (2.22). При $Z_l = Z_0$ выражение (2.23) приводится к Z_0 независимо от значений x .

Если на возбуждающем конце линии без потерь находится источник с постоянным средним значением мощности, то поток мощности для этого частного случая определяется просто. Так как потерь в линии нет, то мощность, поступающая к нагрузке, будет равна мощности, поступающей на вход. Следовательно, во всех точках мощность будет одинаковой. Это положение действительно для любой фиксированной конечности.

Для линии, нагруженной характеристическим импедансом, или для бесконечной линии, существует только прямая волна, а поток мощности в любой точке определяется простым соотношением

$$P = \langle v_1^2 \rangle / Z_0 = \langle i_1^2 \rangle Z_0, \quad (2.24)$$

где скобки $\langle \cdot \rangle$ означают осреднение.

Если конечный импеданс линии не равен Z_0 , то поток мощности через напряжение или ток в любой точке x можно выразить с помощью соотношения

$$P = \langle v_x^2 \rangle \operatorname{Re} [Y_x] = \langle i_x^2 \rangle \operatorname{Re} [Z_x], \quad (2.25)$$

где $\operatorname{Re} [Y_x] = \operatorname{Re} [1/Z_x]$ — вещественная часть проводимости в точке x ; $\operatorname{Re} [Z_x]$ — вещественная часть импеданса в точке x .

Значения мощности одинаковы во всех точках, даже если v_x , i_x , Z являются функциями x .

Из соотношения (2.25) следует, что мощность, подаваемая в линию с коротким замыканием или разомкнутую, равна нулю, так как вещественные части Z_x или Y_x равны нулю во всех точках. Таким образом, свойства электрической линии передачи без потерь определяются через приращения индуктивности и емкости на единицу длины и импеданс на конце. Входные воздействия могут вызывать волны, распространяющиеся в противоположных направлениях со скоростью $c = 1/\sqrt{LC}$. Импеданс, соответствующий распространяющейся в любом направлении волне, представляет собой характеристический импеданс $Z_0 = \sqrt{L/C}$.

Связь между прямой и обратной волнами определяется граничными условиями и на конце линии. Для линии бесконечной длины, либо ограниченной нагрузкой с импедансом Z_0 имеет место только прямая волна. Для любой другой конечности

возможны прямые и обратные волны. Напряжение и ток в любой точке линии получаются в результате суммирования прямой и обратной составляющих. Для непрерывного синусоидального источника колебаний с внутренним импедансом Z_0 сумма прямой и обратной волн дает стоячую волну напряжения и тока вдоль линии.

2.2. Акустические плоские волны в однородной среде

Вернемся к проблеме распространения звука в воде. Рассмотрим бесконечную однородную среду в равновесном состоянии с координатной системой, показанной на рис. 2.7. Рассмотрим силу по оси x , создающую давление $p(x_0, t)$, равномерное в вертикальной бесконечной плоскости, параллельной плоскости yOz на расстоянии x_0 от начала координат.

В целях идентификации терминологии и концепции сначала рассмотрим статический случай. Предположим, что справа от приложенной постоянной во времени силы находится плоская жесткая граница. Повышенное (по сравнению с равновесным) давление оказывается повсеместно одинаковым. Нет никаких дополнительных сил, воздействующих на любой маленький элемент объема водной среды между плоскостью в точке x_0 и жесткой границей. Следовательно, движение частиц отсутствует, а колебательная скорость $u(x, t)$ повсеместно равна нулю. Однако сила сжатия, действуя в положительном направлении по оси x против жесткой границы, приведет в точке x_0 к смещению частицы в направлении оси x . Это смещение уменьшается линейно по мере увеличения x и становится равным нулю на жесткой границе.

Рассмотрим малый элемент объема с начальной длиной dx и единичной площадью в плоскости приложенной силы. Равновесный объем V элемента равен, следовательно, dx . Приложенная сила сжатия изменяет объем элемента на значение

$$V' = dx + d\xi = dx + (\partial\xi/\partial x) dx.$$

Изменение объема

$$dV = V' - V = (\partial\xi/\partial x) dx.$$

Деформация, созданная в элементе объема, определяется как отношение изменения объема к равновесному значению, т. е.

$$\text{деформация} = \frac{dV}{V} = \frac{(\partial\xi/\partial x) dx}{dx} = \frac{\partial\xi}{\partial x}. \quad (2.26)$$

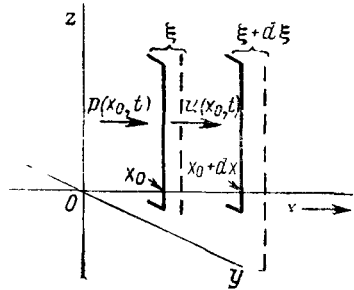


Рис 27. Плоская волна давления в бесконечной однородной среде

По закону Гука в упругой среде отношение напряжения к деформации есть величина постоянная. В этом случае напряжение (давление, производящее деформацию) представляет собой приложенное статическое давление, а названная константа — *модуль объемной упругости* B . При положительном давлении в направлении оси x деформация имеет отрицательное значение. Следовательно,

$$\frac{p(x)}{\partial \xi / \partial x} = -B; \quad (2.27)$$

$$p(x) = -B(\partial \xi / \partial x). \quad (2.28)$$

Возвратимся к более общему случаю с переменным во времени, а не статическим давлением. Значение давления является здесь функцией времени t и расстояния x . В общем случае должно иметь место приращение давления по элементу объема длиной dx , определяемое из выражения $dp = [\partial p(x, t) / \partial x] dx$.

Воздействие давления приводит к появлению ускорения движения элемента или частицы, определяемого вторым законом Ньютона:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} dx = -(\rho dx) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (2.29)$$

Отрицательный знак необходим потому, что действие ускорения вправо требует отрицательного значения направления в пространстве градиента давления. В уравнении (2.29) ρ — плотность среды и ρdx , следовательно, представляет собой массу элемента объема. Ускорение частицы определяется с помощью частной производной по времени колебательной скорости частицы $u(x, t)$.

Так как dx находится в правой и левой частях уравнения (2.29), можно записать, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.30)$$

где аргументы опущены для простоты. Это уравнение выражает хорошо известный факт, что *инерция частицы* препятствует изменению скорости под влиянием приложенной силы. Следует сравнить уравнение (2.30) с уравнением (2.1) для электрической линии передачи. В электрической системе *индуктивность* препятствует изменению тока под влиянием приложенного напряжения.

Если приложенное давление меняется во времени, деформация элемента объема также меняется. Второе дифференциальное уравнение получается из выражения (2.28) при взятии частной производной по времени

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right) = -B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \right). \quad (2.31)$$

Но колебательная скорость $u(x, t)$ определяется как скорость изменения смещения частицы во времени, т. е.

$$u(x, t) = \partial \xi(x, t) / \partial t. \quad (2.32)$$

Подставив это выражение в (2.31), после преобразований получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.33) связывает скорость изменения давления во времени с производной колебательной скорости точно таким же способом, как и для параметров электрической линии передачи. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{B}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (2.34)$$

Это одна из форм уравнения плоской акустической волны в частных производных. Очевидно, акустическая или механическая система, описанная уравнениями (2.30), (2.33) и (2.34), является механическим аналогом электрической линии передачи без потерь. Имеются следующие подобия электрических и механических параметров:

Электрические параметры	Механические параметры
Напряжение v	Давление p
Ток i	Колебательная скорость u
Индуктивность/ед. длины L	Плотность ρ
Емкость/ед. длины C	Обратное значение модуля объемной упругости B^{-1}

Указанные выше соотношения связывают решения для электрических и акустических систем. Так, решение уравнения (2.34) имеет вид

$$p(x, t) = p_1 [t - (x + k_1) \sqrt{\rho/B}] + p_2 [t + (x + k_2) \sqrt{\rho/B}]. \quad (2.35)$$

Функции p_1 и p_2 представляют соответственно прямые и обратные волны, распространяющиеся в воде со скоростью $c = \sqrt{B/\rho}$. Следует заметить, что скорость распространения волны давления нельзя смешивать с понятием колебательной скорости $u(t, x)$.

В продольной волне сжатия, такой как акустическая, не происходит поступательного движения частицы, или единичного элемента объема, если среда линейная и без потерь. Среднее значение смещения частиц равно нулю и значение колебательной скорости, осредненное за весь период времени, равно нулю. Скорость распространения звука c равна скорости движения максимума (или минимума) давления волны в направлении оси x . По мере того как волна проходит заданную точку,

частицы среды движутся вначале в одном направлении, а затем — в другом, возвращаясь в свое равновесное положение.

По аналогии с электрической системой характеристический акустический импеданс среды определяется отношением давления к колебательной скорости как для прямой, так и для обратной волны. Этот импеданс включает инерционные и упругие свойства среды. Он определяется выражением

$$Z_0 = \sqrt{\rho B}. \quad (2.36)$$

Для среды без потерь и плоской волны характеристический импеданс будет вещественной величиной.

Учитывая, что $B = \rho c^2$, получим

$$Z_0 = \sqrt{\rho(\rho c^2)} = \rho c. \quad (2.37)$$

Как видно из (2.37) характеристический импеданс представляет собой произведение плотности на скорость распространения звука.

Связь между давлением и колебательной скоростью для прямой волны имеет вид

$$p_1 \left(t - \frac{x + k_1}{c} \right) = Z_0 u_1 \left(t - \frac{x + k_1}{c} \right); \quad (2.38)$$

для обратной волны

$$p_2 \left(t + \frac{x + k_2}{c} \right) = - Z_0 u_2 \left(t + \frac{x + k_2}{c} \right). \quad (2.39)$$

2.2.1. Интенсивность плоской акустической волны

Используя аналогию акустического давления с электрическим напряжением и колебательной скорости с током, выражения (2.38) и (2.39) можно считать акустическим законом Ома. Продолжая аналогию, можно определить скорость потока энергии в акустических системах. Кинетическая энергия в единице объема пропорциональна квадрату колебательной скорости. Это соответствует накопленной энергии магнитного поля (пропорционального квадрату тока) в электрической системе. Потенциальная энергия накапливается в элементе объема при воздействии механического напряжения. Она пропорциональна квадрату давления. Это соответствует накопленной энергии электрического поля (пропорционального квадрату электрического напряжения) в электрической системе.

Среднее значение потока энергии пропорционально произведению значения давления на колебательную скорость. Среднее значение потока энергии через единичную площадь есть средняя плотность мощности. Таким образом,

$$\frac{\text{акустическая мощность}}{\text{единица площади}} = \frac{P}{A} = \langle u p \rangle, \quad (2.40)$$

где скобки $\langle \cdot \rangle$ показывают операцию осреднения во времени. Для плоской волны в прямом направлении, используя (2.38), получим

$$A \langle u(Z_0, u) \rangle = Z_0 \langle u^2 \rangle, \quad (2.41)$$

или

$$P/A = \langle (p/Z_0) p \rangle = \langle p^2 \rangle / Z_0. \quad (2.42)$$

Мощность, приходящаяся на единицу площади в акустической волне, называется акустической интенсивностью I . Таким образом,

$$I = \langle p^2 \rangle / Z_0 = \langle u^2 \rangle Z_0. \quad (2.43)$$

В безграничной среде без потерь будет существовать единственная волна, распространяющаяся вправо от источника электрической линии передачи, то же самое будет иметь место в акустике, если среда имеет плоскую границу с таким акустическим импедансом, что отношение давления к колебательной скорости на этой границе равно Z_0 . В любом случае поток мощности в любой точке между источником и границей определяется по формуле (2.43). Заметим, что для плоской волны в однородной среде без потерь плотность мощности, или интенсивность, с расстоянием не уменьшается.

2.2.2. Влияние плоских границ

Представим, что справа от источника находится абсолютно жесткая или твердая плоская граница. В результате движение частицы по оси x на этой границе отсутствует. Следовательно, на границе $u = 0$. Сопоставляя колебательную скорость в акустической системе с током в электрической системе, можно заключить, что жесткая граница соответствует электрической цепи с разомкнутым концом. Прямая волна давления должна отразиться от жесткой границы без изменения полярности. Следовательно, на поверхности границы общее давление должно увеличиться точно в два раза по сравнению с давлением в этой точке в прямой или обратной волне.

В противоположность жесткой границе представим себе очень мягкую граничную поверхность. Граница этого типа представляет незначительное препятствие для движения частицы в направлении плоской волны. Передача звука из воды в воздух происходит через типичную мягкую границу. При абсолютно мягкой границе противодействие движению частицы равно нулю. Это эквивалентно нулевому импедансу схемы с короткозамкнутым концом. На мягкой границе давление должно быть равно нулю, так как любое давление, не равное нулю, будет приводить к бесконечной скорости частицы. Мягкую границу часто называют поверхностью, свободной от давления.

Амплитуда давления прямой волны при отражении от поверхности, свободной от давления, меняет знак. Как и в электрической системе, это эквивалентно обратной волне давления, равной по амплитуде, но противоположной по знаку прямой волне на границе.

При абсолютно жесткой и абсолютно мягкой границах мощность на таких оконечностях равна нулю. Следовательно, поток мощности в любой точке системы равен нулю. Считается, что для источника непрерывных синусоидальных колебаний с фиксированной частотой стоячие волны давления или колебательной скорости наблюдаются влево от границы в том же самом виде, как это показано на рис. 2.5 для электрической линии передачи.

При абсолютно жесткой или мягкой границе акустический импеданс в любой точке слева от нее является чисто реактивным. Он попеременно может иметь инерционный характер или характер, связанный с упругостью через интервалы в $1/4$ длины волны от границы.

В случае границы с импедансом Z_l акустический импеданс для плоской волны в любой точке слева от границы определяется по формуле

$$Z(x) = Z_0 \left[\frac{Z_l \cos \alpha + jZ_0 \sin \alpha}{Z_0 \cos \alpha + jZ_l \sin \alpha} \right], \quad (2.44)$$

где $\alpha = 2\pi(l - x)/\lambda$.

Формула (2.44) для акустического импеданса по форме идентична формуле (2.23) для электрического импеданса. При произвольном оконечном Z_l и при синусоидальных колебаниях на входе в среде существуют стоячие волны давления и колебательной скорости, за исключением случая, когда $Z_l = Z_0$. Если нагрузка равна характеристическому импедансу среды, то считается, что нагрузка согласована со средой.

2.2.3. Результирующие соотношения для плоской акустической волны

Закончим рассмотрение плоских акустических волн сводкой следующих, наиболее важных соотношений, определяющих параметры среды и акустических колебаний:

дифференциальное уравнение для давления в плоской волне

$$\partial^2 p / \partial t^2 = B \partial^2 p / (\rho \partial x^2);$$

скорость распространения плоской волны

$$c = \sqrt{B/\rho};$$

характеристический импеданс среды в плоской волне

$$Z_0 = \sqrt{\rho B} = \rho c;$$

связь давления со смещением частицы

$$p(t, x) = -B\partial\xi(t, x)/\partial x;$$

связь колебательной скорости со смещением

$$u(t, x) = \partial\xi(t, x)/\partial t;$$

акустическая интенсивность в любой точке в прямой плоской волне

$$I = \langle up \rangle = Z_0 \langle u^2 \rangle = \langle p^2 \rangle / Z_0.$$

2.3. Сферические акустические волны в однородной среде

Ранее (см. п. 2.2) считалось, что конечные значения давления существуют на всей бесконечной плоской поверхности. Такая ситуация физически невозможна, так как требует приложения бесконечно большой силы. Плоская волна является аппроксимацией, справедливой для ограниченной области.

При выводе уравнений плоской волны использовался градиент амплитуды давления в направлении приложенной силы. При простом поле силы и координатной системе, связанной с ее направлением, градиент давления плоской волны состоит из единственного члена $\partial p / \partial x$. В более общем случае градиент давления представляет собой вектор, который в прямоугольных координатах можно определить в виде

$$\text{grad } p = i \frac{\partial p}{\partial x} + j \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.45)$$

В случае плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , уравнение (2.45) упрощается, так как $\partial p / \partial y = 0$ и $\partial p / \partial z = 0$.

Как определено в (2.34), дифференциальное уравнение плоской волны включает изменение градиента давления в зависимости от x . Он выражается с помощью частной производной второго порядка по x от давления. В общем случае изменение вектора (градиента давления) следует представить в трехмерной системе координат. Это изменение называется *дивергенцией вектора*. В прямоугольных координатах

$$\text{div}(\text{grad } p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \quad (2.46)$$

Математическая операция (2.46) называется также *лапласианом* (∇^2) скалярного поля давления $p(x, y, z)$.

Уравнение плоской волны есть частный случай общего волнового уравнения

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (2.47)$$

где $\partial^2 p / \partial y^2 = 0$; $\partial^2 p / \partial z^2 = 0$.

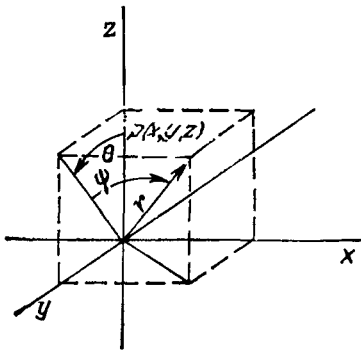


Рис 28 Система координат для сферически симметричного акустического поля

мени t . Аналогично смещения являются функциями r и t . Тогда лапласиан поля давления может быть записан следующим образом:

Рассмотрим сосредоточенную механическую силу, действующую в начале координат (рис. 2.8). Предположим, что эта сила действует равномерно по всем радиальным направлениям, т. е. на любом расстоянии от начала координат давление не зависит от значений углов ψ и θ . Таким образом, если источник, расположенный в начале координат, изменяет свою интенсивность во времени, то давление в любой точке пространства является функцией только радиального расстояния r от источника и време-

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2\partial p}{r\partial r}. \quad (2.48)$$

В таком случае уравнение сферической волны принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2\partial p}{r\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (2.49)$$

Уравнение (2.48) упрощается с учетом

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2\partial p}{r\partial r}; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2}. \quad (2.50)$$

Это уравнение идентично по форме уравнению плоской волны (2.34) с p , замененным на rp . Решение имеет вид

$$rp(t, r) = f_1\left(t - \frac{r+k_1}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r+k_2}{c}\right)$$

или

$$p(t, r) = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r+k_1}{c}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r+k_2}{c}\right). \quad (2.51)$$

Первый член справа представляет собой сферическую волну, исходящую из начала координат со скоростью c . В противоположность плоской волне амплитуда давления уменьшается обратно пропорционально расстоянию от источника.

Второй член в выражении (2.51) представляет собой распространяющуюся волну, сходящуюся к источнику. Ее ампли-

туда увеличивается до бесконечности по мере приближения r к нулю. Хотя эта часть решения формально возможна, в случае однородной среды следует рассматривать только расходящиеся волны. Сходящиеся акустические волны необходимо учитывать при исследовании акустических линз или при распространении волн в неоднородной среде, где из-за рефракции возникает эффект схождения лучей.

Даже для расходящейся волны при $r \rightarrow 0$ возникают трудности, так как амплитуда давления в выражении (2.51) стремится к бесконечности. Действительно, основные допущения, сделанные при выводе волновых уравнений, нарушаются, когда давление увеличивается бесконечно. По этой причине следует ограничиваться ситуациями, когда r является конечным и приращение его мало по сравнению со значением r .

2.3.1. Давление, колебательная скорость и смещение в сферических волнах

Ускорение частицы в сферических волнах связано с градиентом давления вторым, как и для плоских волн, законом Ньютона. Таким образом,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.52)$$

где u — колебательная скорость в радиальном направлении. Соотношение (2.52) используется для получения значения колебательной скорости из давления следующим образом:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial r} dr;$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{dr}{dt}.$$

Считая, что смещения частиц и скорости являются малыми, можно пренебречь членами второго порядка. Следовательно,

$$du \approx \frac{\partial u}{\partial t} dt = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) dt; \quad (2.53)$$

$$u(t, r) = -\frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^t \frac{\partial p(\tau, r)}{\partial r} d\tau. \quad (2.54)$$

Зная колебательную скорость, смещение частицы в радиальном направлении можно определить следующим образом. Обозначая

$$u(t, r) = \frac{\partial \xi(t, r)}{\partial t} = \frac{d\xi(t, r)}{dt},$$

получим

$$\xi(t, r) = \int_{-\infty}^t v(t, r) d\tau. \quad (2.55)$$

Соотношения (2.54) и (2.55) легко доказываются, если представить синусоидальную функцию давления в виде комплексной величины. Рассматривая только расходящуюся волну давления, получим

$$p(t, r) = \frac{p_{\max}}{r} \exp\left[j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right], \quad (2.56)$$

где p_{\max} — максимальное значение амплитуды давления при $r = 1$.

Для определения колебательной скорости требуется взять частную производную (2.56) по r . После элементарных преобразований

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\left(j\frac{\omega}{c} + \frac{1}{r}\right)p(t, r). \quad (2.57)$$

Подставив уравнения (2.56) и (2.57) в (2.54), получим

$$u(t, r) = +\left(j\frac{\omega}{c} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{p_{\max}}{\rho r}\right)\exp\left(-j\frac{\omega r}{c}\right)\int_{-\infty}^t \exp(j\omega\tau) d\tau$$

или

$$u(t, r) = +\left(\frac{1}{j\omega\rho}\right)\left(j\frac{\omega}{c} + \frac{1}{r}\right)p(t, r) = \frac{1}{\rho c}\left(1 - j\frac{c}{\omega r}\right)p(t, r). \quad (2.58)$$

2.3.2. Акустический импеданс в сферических волнах

Примем $\omega r/c = 2\pi r/\lambda$ и определим *акустический импеданс* как отношение давления к колебательной скорости:

$$Z = \frac{\rho c}{1 - j\lambda/2\pi r} = |Z| \exp(j\theta), \quad (2.59)$$

где $|Z| = \rho c [1 + (\lambda/(2\pi r))^2]^{-1/2}$; $\theta = \arctg \lambda/(2\pi r)$.

Используя выражение (2.59), преобразуем уравнение (2.58) к виду

$$p(t, r) = Zu(t, r). \quad (2.60)$$

Удобно разделить Z на вещественную и мнимую части:

$$\operatorname{Re}[Z] = \rho c \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2\right]^{-1}; \quad (2.61)$$

$$\operatorname{Im}[Z] = \rho c \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right) \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^2\right]^{-1}. \quad (2.62)$$

Теперь рассмотрим два граничных условия, представленных выражениями: область 1 — $2\pi r/\lambda \gg 1$, область 2 — $2\pi r/\lambda \ll 1$. В области 1 расстояние является большим по сравнению с длиной волны (большое расстояние и (или) малая длина волны). В области 2 расстояние является малым по сравнению с длиной волны.

Для области 1 выражения (2.61) и (2.62) показывают, что вещественная составляющая Z приближается к ρc (импеданс плоской волны), а мнимая — к нулю. Здесь сферическая волна во многом приближается по своим характеристикам к плоской, по крайней мере, для ограниченного интервала расстояний.

В области 2 вещественная составляющая Z приближается к нулю пропорционально r (или обратно пропорционально λ). Мнимый член приближается к нулю прямо пропорционально r и обратно пропорционально λ . Заметим, что знак мнимого члена — плюс. Он показывает, что реакция вызвана инерционными явлениями в среде. Реактивная и резистивная составляющие для всего диапазона переменной $2\pi r/\lambda$ показаны на рис. 2.9. В области $2\pi r/\lambda < 1$ импеданс определяется в основном реактивным членом. Для больших значений абсциссы отношение резистивности к реактивности увеличивается по мере уменьшения реактивности до нуля.

Уравнения (2.55) и (2.60) можно использовать для получения смещения частицы при комплексной синусоидальной волне давления:

$$\xi(t, r) = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^t p(\tau, r) d\tau = \frac{1}{j\omega Z} p(t, r) = \frac{u(t, r)}{j\omega}. \quad (2.63)$$

2.3.3. Акустическая интенсивность в сферических волнах

Акустическая интенсивность сферической (как и плоской) волны определяется в виде осредненного по времени произведения давления на колебательную скорость. Используя комплексные выражения давления и колебательной скорости для расчета интенсивности, следует быть крайне осторожным при получении произведения *вещественных составляющих* этих

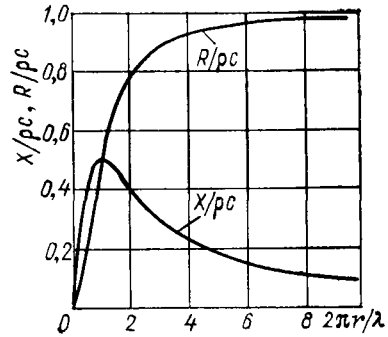


Рис 2.9 Вещественная и мнимая части акустического импеданса в сферической волне

членов Запишем

$$I = \frac{1}{T} \int_T \operatorname{Re} [p] \operatorname{Re} [u] dt. \quad (2.64)$$

Легко показать, что осреднение по времени должно давать выражение

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [p u^*], \quad (2.65)$$

где * означает комплексное сопряжение.

Используя выражения (2.56), (2.59) и (2.60), получим

$$I = \frac{[1 + (\lambda/2\pi r)^2]^{1/2}}{2\rho c} \left(\frac{p_{\max}^2}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (2.66)$$

Но $\cos \theta = [1 + (\lambda/(2\pi r))^2]^{1/2}$, поэтому

$$I = \frac{1}{r^2} \left(\frac{p_{\max}^2}{2\rho c} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{p_{\text{СКЗ}}^2}{\rho c} \right), \quad (2.67)$$

где $p_{\text{СКЗ}}$ — среднее квадратическое значение амплитуды вещественной составляющей волны давления при $r = 1$.

Формула (2.67) аналогична формуле (2.42) для плоской волны, за исключением того, что интенсивность сферической волны уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния. Этот вид уменьшения интенсивности с расстоянием называется *сферическими потерями*. *Общая мощность* на расстоянии r определяется как произведение интенсивности на площади сферы радиусом r :

$$P_{\text{общ}} = 4\pi r^2 I = 4\pi \left(\frac{p_{\max}^2}{2\rho c} \right). \quad (2.68)$$

Так как среда принята без потерь, общая мощность не зависит от расстояния.

2.4. Пульсирующий сферический источник

На примере пульсирующего сферического источника, находящегося в начале системы координат (рис. 2.10), рассмотрим применение соотношений, выведенных в предыдущем материале. Простые соотношения, которые используются для описания сферического излучателя, можно применять для получения характеристик излучателей более сложных форм.

2.4.1. Давление, колебательная скорость и смещение на сферической поверхности

Пусть радиус сферы изменяется по синусоидальному закону от равновесного значения a . При $r = a$ комплексное значение акустического давления определяется в виде

$$p(t, a) = (p_{\max}/a) \exp(j\omega t).$$

Из уравнений (2.60) и (2.63) радиальная колебательная скорость и смещение на поверхности сферы находятся по формулам:

$$\begin{aligned}
 u(t, a) &= \frac{p_{\max}}{aZ(a)} \exp(j\omega t) = \\
 &= u_{\max}(a) \exp(j\omega t - \theta); \\
 \xi(t, a) &= \frac{p_{\max}}{j\omega aZ(a)} \exp(j\omega t) = \\
 &= \xi_{\max}(a) \exp\left(j\omega t - \theta - \frac{\pi}{2}\right).
 \end{aligned}$$

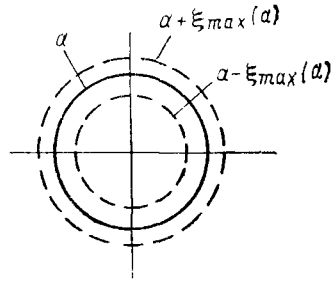


Рис 2.10 Пульсирующий сферический акустический излучатель

где $u_{\max}(a)$ и $\xi_{\max}(a)$ — максимальные значения колебательной скорости и смещения частицы на поверхности сферы; $Z(a)$ — акустический сферический импеданс.

Общая излучаемая этим источником акустическая мощность будет равна

$$P = 4\pi [p_{\max}^2 / (2\rho c)].$$

Для фиксированных значений радиуса и мощности источника изменения максимальных значений колебательной скорости и смещения частиц являются функциями длины волны. В частности,

$$\frac{u_{\max}(a)}{p_{\max}} = \frac{1}{a|Z(a)|} = \frac{[1 + (\lambda/2\pi a)^2]^{1/2}}{a\rho c}; \quad (2.69)$$

$$\frac{\xi_{\max}(a)}{p_{\max}} = \frac{1}{\omega a|Z(a)|} = \frac{\lambda [1 + (\lambda/2\pi a)^2]^{1/2}}{2\pi a\rho c^2}. \quad (2.70)$$

При $2\pi a/\lambda \gg 1$ и $r = a$ амплитуда колебательной скорости приблизительно равна амплитуде давления в этой точке, деленной на характеристический импеданс ρc . В области 1 это соотношение не зависит от частоты. Амплитуда смещения при $r = a$ приблизительно равна амплитуде давления, деленной на $\omega\rho c$. Таким образом, для того чтобы сохранить постоянными амплитуды звукового давления и колебательной скорости (а следовательно, и поток мощности) в области 1 при уменьшении частоты (увеличении λ), необходимо увеличивать амплитуду смещения. В области 1 упомянутые соотношения должны иметь вид

$$\left. \begin{aligned}
 u_{\max}(a) &\approx \left(\frac{p_{\max}}{a}\right) \frac{1}{\rho c}; \\
 \xi_{\max}(a) &\approx \left(\frac{p_{\max}}{a}\right) \frac{1}{\omega\rho c}.
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{область 1} \\ 2\pi a/\lambda \gg 1 \end{array} \quad (2.71)$$

Область 2, где $2\pi a/\lambda \ll 1$, также представляет практический интерес. Предположим, что мы хотим создать сферический акустический источник, работающий на частоте 50 Гц.

Пусть $c = 1500$ м/с, а $\lambda = 30$ м. Для области 1 $a \gg \lambda/(2\pi) = 4,78$ м. Таким образом, для выполнения условия (2.71) диаметр сферы должен быть значительно больше чем 9,56 м. Из-за непрактичности реализации сферического излучателя такого размера подобные источники низкочастотного диапазона в области 1 не используются.

Если $2\pi a/\lambda \ll 1$, выражения (2.69) и (2.70) в области 2 упрощаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_{\max}(a) &= \left(\frac{p_{\max}}{a}\right) \frac{\lambda}{2\pi a r c}; \\ \xi_{\max}(a) &= \left(\frac{p_{\max}}{a}\right) \frac{\lambda}{2\pi a \omega r c}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{область 2} \\ 2\pi a/\lambda \ll 1 \end{array} \quad (2.72)$$

2.4.2. Акустическая интенсивность на сферической поверхности

В области 1 давление и колебательная скорость находятся в фазе. В результате интенсивность равна произведению средних квадратических значений давления и колебательной скорости. В области 2 колебательная скорость не находится в фазе с давлением, поэтому интенсивность должна определяться как произведение средних квадратических значений давления и составляющей скорости, которая находится в фазе с давлением. В результате

$$I = \left(\frac{p_{\text{СКЗ}}}{a}\right) u_{\text{СКЗ}}(a) \cos \theta = \frac{p_{\text{СКЗ}}^2}{a^2 r c}, \quad (2.73)$$

где θ — фазовый угол, зависящий от рассмотренного ранее акустического импеданса.

Величину $\cos \theta$ можно назвать коэффициентом мощности, играющим такую же роль, как и коэффициент мощности электрической линии с резистивными и реактивными элементами.

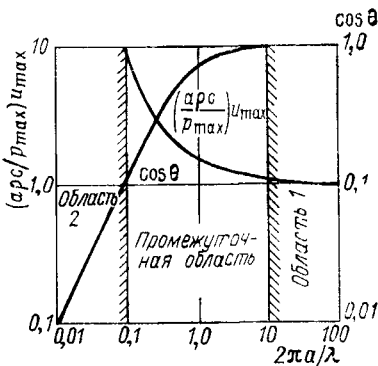


Рис. 2 11 Соотношения между амплитудами давления и колебательной скорости для сферического излучателя

Для обеспечения постоянной интенсивности излучения колебательная скорость должна увеличиваться при уменьшении коэффициента мощности. Однако возрастающая составляющая колебательной скорости сдвинута по фазе на 90° по отношению к давлению и, следовательно, не вносит вклада в полезную выходную мощность источника. Для обеспечения постоянной интенсивности составляющая колебательной скорости, нахо-

дящаяся в фазе с давлением, должна быть постоянной и не зависеть от коэффициента мощности.

Связь между скоростью частицы и амплитудой давления в зависимости от $2\lambda a/\lambda$ для фиксированного значения $p_{\max}/(\rho c)$ дана на рис. 2.11, где представлены также соответствующие зависимости для $\cos \theta$ в функции тех же аргументов

Области 1 и 2 определены для соотношений $2\lambda a/\lambda > 10$ или $< 0,1$. В области 1 коэффициент мощности превышает 0,99, а в области 2 он меньше 0,1. Очевидно, промежуточная область, соответствующая компромиссу между размерами источника и его эффективностью, представляет наибольший практический интерес.

2.4.3. Объемная колебательная скорость

Быстрое уменьшение коэффициента мощности по мере приближения $2\lambda a/\lambda$ к нулю обуславливает практические требования к размерам устройств, предназначенных для излучения соответствующей акустической мощности. В этой области для обеспечения пульсаций сферы должен быть задействован большой объем воды, поток которой перемещается в прямом и обратном направлениях, но только малая часть этих усилий превращается в полезную выходную мощность. Максимальная объемная колебательная скорость Q определяется в виде произведения максимального значения колебательной скорости, которая считается одинаковой по всей поверхности сферы, на площадь сферы. Таким образом,

$$Q = 4\pi a^2 u_{\max}(a) = \frac{4\pi a p_{\max}}{\rho c} \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi a} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.74)$$

Для области 2 это выражение упрощается:

$$Q = 2\lambda p_{\max}/(\rho c). \quad (2.75)$$

Значение $Q \rightarrow \infty$ при уменьшении частоты колебаний до нуля

Для такого излучателя, как пульсирующая сфера, полезно попытаться получить конструкционные ограничения, учитывающие диаметр сферы, общую выходную мощность, рабочую частоту. В этом направлении возможны только ориентировочные оценки, так как диапазоны возможных применений такого излучателя и его конструкционных ограничений весьма широки. Например, если требуется очень небольшая излучаемая акустическая мощность, то эффективность излучателя не имеет существенного значения и конструктор может выбрать устройство с небольшими габаритами, работающее вблизи границы области 2.

Для очень большой излучаемой мощности крайне важна эффективность излучателя. Поэтому выбирается источник больших габаритов, работающий вблизи границы области 1. Для

источника, предназначенного для излучения звука равномерно по всем направлениям, нежелательно, чтобы он работал далеко в области 1 из-за трудности возбуждения и поддержания колебаний всех элементов поверхности сферы в фазе.

Попытки заставить работать излучатель значительно ниже границы области 2 быстро создают невыполнимые условия. Например, при $a = 0,01$ м требуемый максимум смещения поверхности на частоте 100 Гц для выходной мощности излучения в 1 Вт должен быть равен радиусу сферы, а скорость потока объема воды должна быть в 2000 раз больше самого объема сферы. Еще задолго до достижения этих условий все основные допущения, принятые для расчетов по волновым уравнениям (таких, как малые смещения относительно состояния равновесия), нарушаются.

Максимальные значения смещения и колебательной скорости, которые могут поддерживаться в пульсирующем источнике, ограничиваются такими практическими условиями, как упругость материалов, температурные пределы задающего механизма, напряжение электрического пробоя и др. Сама среда также накладывает ограничение на интенсивность колебаний сферической поверхности. Максимальная амплитуда давления не может превышать давления в окружающей среде без создания вакуума в течение отрицательного полупериода (кавитация). Для излучателя, находящегося вблизи поверхности воды, максимальная амплитуда давления примерно равна атмосферному давлению. Ограничение мощности излучателя средой обсуждается в гл. 3.

2.5. Единицы измерений, эталоны и децибелы

2.5.1. Смешанная система СГС

Специалисты по использованию гидроакустических систем измеряют дальность в таких разных единицах, как ярды, мили, метры.

Рассмотрим вначале систему единиц, которая почти повсеместно использовалась до 1971 г. Уравнение для акустической интенсивности применялось в следующем виде: $I = \langle p^2 \rangle / (\rho c)$, где в системе СГС приняты следующие единицы измерения: p — дин/см²; ρ — г/см³; c — см/с, I — эрг/(с·см²).

Единица давления p называлась микробаром (мкбар)¹. Она равна 10⁻⁶ от значения стандартной атмосферы. Более удобной единицей является Вт/см², где 1 Вт = 1 Дж/с или 10⁷ эрг/с.

¹ Во многих публикациях эту величину называют баром, а не микробаром (или малым баром, в отличие от значения стандартной атмосферы, называемой «большим» баром) *Ред.*

Таким образом,

$$I (\text{Вт/см}^2) = 10^{-7} \langle p^2 \rangle / (\rho c). \quad (2.76)$$

В системе СГС плотность воды равна приблизительно 1 г/см^3 , а скорость звука — $1,5 \cdot 10^5 \text{ см/с}$. Численное значение акустического импеданса, следовательно, составляет

$$Z_0 = \rho c = 1,5 \cdot 10^5 \text{ г/(см}^2 \cdot \text{с)}, \quad (2.77)$$

В качестве примера возьмем среднее квадратическое значение давления, равное 1 мкбар. Результирующая интенсивность акустической волны в этом случае

$$I = \frac{(10^{-7}) (1)^2}{1,5 \cdot 10^5} = 0,667 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/см}^2. \quad (2.78)$$

Для однородной среды без потерь интенсивность акустического поля на расстоянии r , см, от точечного источника общей мощностью P , Вт, будет равна

$$I (\text{Вт/см}^2) = P / (4\pi r^2).$$

Преобразуя сантиметры в ярды, получим

$$I (\text{Вт/см}^2) = \frac{P}{4\pi (r (\text{ярд}) \cdot 91,4 \text{ см/ярд})^2} = \frac{0,952 \cdot 10^{-5} P}{r^2 (\text{ярд})}. \quad (2.79)$$

Для точечного источника мощностью 1 Вт интенсивность на расстоянии 1 ярд будет равна $0,952 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/см}^2$. На расстоянии 10 000 ярд этот же источник будет создавать интенсивность акустического поля $0,952 \cdot 10^{-13} \text{ Вт/см}^2$.

При анализе акустической системы принято использовать *децибельную* систему обозначения *уровня* различных величин относительно установленного опорного (эталонного) значения. Это удобный способ работы с большим динамическим диапазоном рассматриваемых параметров. Он упрощает расчеты, заменяя операции умножения сложением децибел. В системе СГС эталонным уровнем является интенсивность акустической волны при среднем квадратическом значении давления 1 мкбар. (Во многих случаях в качестве эталонного уровня берут значение $2 \cdot 10^{-4}$ мкбар, соответствующее порогу слышимости.) Из выражения (2.78):

$$I_{\text{эт}} = 0,667 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/см}^2. \quad (2.80)$$

По шкале децибел эталонная интенсивность находится на уровне 0 дБ. Уровень, связанный с любой другой интенсивностью I , соответствующей среднему квадратическому значению давления p , будет равен

$$\begin{aligned} \text{Уровень интенсивности} &= L = 10 \lg (I/I_{\text{эт}}) = \\ &= 10 \lg (p/p_{\text{эт}})^2 = 20 \lg (p/p_{\text{эт}}). \end{aligned} \quad (2.81)$$

В качестве примера определим уровень интенсивности, соответствующий 1 Вт/см²,

$$L = 10 \lg \left(\frac{I}{I_{\text{ст}}} \right) = 10 \lg \left(\frac{1}{0,667 \cdot 10^{-12}} \right) = 121,76 \text{ дБ.} \quad (2.82)$$

Среднеквадратическое значение давления, соответствующее этому уровню интенсивности,

$$p_{\text{скз}} = \text{antilg } 121,76/20 = 1,225 \cdot 10^6 \text{ мкбар.} \quad (2.83)$$

Таким образом, интенсивность 1 Вт/см² требует среднего квадратического значения давления, превышающего 1 ст. атм. Если эта интенсивность измеряется на расстоянии 1 ярд от точечного источника, то его общая мощность составит

$$P = 4\pi (1 \cdot 91,4 \text{ см/ярд})^2 (1 \text{ Вт/см}^2) = 105 \text{ Вт.}$$

В подводной акустике принято характеризовать силу источника в терминах интенсивности, создаваемой на фиксированном опорном расстоянии от источника. В смешанной системе единиц оно равно 1 ярд. В системе децибел интенсивность источника называется *уровнем излучения* (УИ). Таким образом, уровень точечного источника с общей мощностью P определяется в виде

$$\begin{aligned} \text{УИ} &= 10 \lg [I(1 \text{ ярд})/I_{\text{ст}}] = 10 \lg \left[\frac{0,952 \cdot 10^{-5} P}{(1 \text{ ярд})^2 (0,667 \cdot 10^{-12})} \right] = \\ &= 71,54 \text{ дБ} + 10 \lg P. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Точечный источник мощностью 1 Вт дает уровень на расстоянии 1 ярд, равный 71,54 дБ от давления в 1 мкбар. Из формулы (2.84) следует, что при $P = 1000 \text{ Вт}$

$$\text{УИ}(1000 \text{ Вт}) = 71,54 + 10 \lg(1000) = 71,54 + 30 = 101,54 \text{ дБ.}$$

Ниже даны примеры стандартных записей:

$$\text{УИ} = 101,54 \text{ дБ//мкбар/1 ярд}$$

или

УИ = 101,54 дБ относительно 1 мкбар на расстоянии 1 ярд. Они показывают, что данный УИ измерен на расстоянии в 1 ярд от источника и составляет 101,54 дБ относительно того уровня, который соответствует давлению со средним квадратическим значением 1 мкбар. Не следует смущаться видом единицы измерения за двойной наклонной чертой, так как децибельная система представляет безразмерные отношения.

Уровень излучения на любом расстоянии r от точечного источника в однородной непоглощающей среде находится следующим образом:

$$L(r) = 10 \lg \left[\frac{I(1 \text{ ярд})}{I_{\text{ст}}} \frac{(1 \text{ ярд})^2}{(r \text{ ярд})^2} \right] = \text{УИ} - 20 \lg \left[\frac{r(\text{ярд})}{1 \text{ ярд}} \right]. \quad (2.85)$$

Второй член уравнения (2.85) называется *потерями при передаче* или *потерями при распространении* (ПР).

В случае сферических волн, распространяющихся в непоглощающей среде, ПР обратно пропорциональны квадрату расстояния. В общем случае ПР могут быть сложной функцией дистанции, частоты и граничных условий. Для других (не сферических) условий расширения фронта волны ПР можно определить в графической или табличной форме. В любом частном случае интенсивность звука в децибелах $L(r)$ на расстоянии r от источника может быть определена из выражения

$$УИ(r) = УИ - ПР. \quad (2.86)$$

В смешанной системе ПР равны УИ на 1 ярд минус УИ на расстоянии r в ярдах. При сферическом расширении фронта волны ПР = 20 дБ при каждом увеличении r на порядок (в 10 раз). Следовательно, при $r = 10\,000$ ярд ПР = 80 дБ.

2.5.2. Система МКС

Для описания акустического давления в этой системе в качестве эталона для шкалы децибел используется 1 микроньютон на 1 м². Эта единица давления называется 1 мкПа (микрораскаль). Опорным расстоянием является 1 м.

Преобразование от микробар в микропаскаль производится следующим образом: 1 ньютон = 10⁵ дин; 1 м² = 10⁴ см², следовательно, 1 Н/м² = 10 дин/см² = 10 мкбар (или 1 Н/м² = 10 бар, если в правой части в качестве единицы измерения принят «малый» бар); 1 мкН/м² = 1 мкПа = 10⁻⁵ мкбар.

Микропаскаль меньше 1 мкбара в 10⁵ раз. Поэтому опорное значение интенсивности с использованием микропаскаля меньше в 10¹⁰ раз или на 100 дБ по сравнению с интенсивностью, где в качестве опорного значения используется 1 мкбар:

$$УИ//мкПа = УИ//мкбар + 100 \text{ дБ}. \quad (2.87)$$

Опорная интенсивность для среднеквадратичного давления 1 мкПа в 10¹⁰ раз (или на 100 дБ) меньше, чем для среднего квадратического давления в 1 мкбар. Таким образом, при $p = 1$ мкПа $I_{ст} = 0,667 \cdot 10^{-22}$ Вт/см² = $0,667 \cdot 10^{-18}$ Вт/м².

Уровень точечного источника мощностью P , Вт, в системе МКС получается в смешанной системе путем добавления 100 дБ (мкбар к мкПа) и вычитания 0,77 дБ для перехода от ярда к метру. Таким образом,

$$УИ//мкПа \text{ на расстоянии } 1 \text{ м} = УИ//мкбар \text{ на расстоянии } 1 \text{ ярд} + 99,23 \text{ дБ} = 71,54 + 99,23 + 10 \lg P = 170,77 \text{ дБ} + 10 \lg P. \quad (2.88)$$

Следовательно, источник мощностью 1 Вт в системе МКС имеет уровень 170,77 дБ//мкПа на расстоянии 1 м.

2.5.3. Уровни интенсивности широкополосных сигналов

Многие гидроакустические сигналы от различных целей или гидроакустические шумы являются непрерывными процессами, но их нельзя считать синусоидальными колебаниями. Такие сигналы и шумы в частотной области занимают широкую полосу.

Наиболее эффективное описание таких сигналов обеспечивается с помощью *спектральной плотности интенсивности*, показывающей среднее или ожидаемое распределение плотности мощности по полосе частот. Ордината такого графика представляет собой среднюю интенсивность, которая должна наблюдаться в очень узкой полосе на каждой частоте вдоль абсциссы. В гидроакустике в качестве стандартной для таких измерений используется полоса шириной 1 Гц.

На рис. 2.12 показан типичный график спектральной плотности интенсивности широкополосного сигнала. Ординатой в этом случае является *уровень* (в дБ) *интенсивности, измеренной в полосе шириной 1 Гц*. Если этот уровень относится к излучению точечного источника, то необходимо также определить и опорную (эталонную) дистанцию. Уровень, показанный на рис. 2.12, называется *спектральным уровнем* $SU//1$ мкПа/Гц на расстоянии 1 м.

Иногда обозначение дБ, используют для того, чтобы не указывать опорных значений параметров, относительно которых рассчитаны децибелы. Это позволяет избежать путаницы в результате из-за различных систем единиц и эталонов.

Полная интенсивность широкополосного сигнала, или уровень источника в полосе частот, равна интегралу от спектральной плотности интенсивности в этой полосе. Интегрирование должно быть выполнено с использованием фактической интенсивности, а не спектрального уровня в децибелах. Поскольку

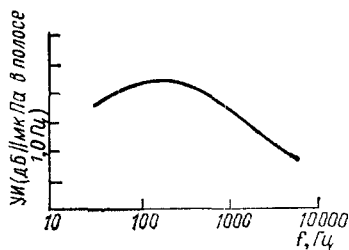


Рис. 2.12. Спектральный уровень типичного широкополосного акустического сигнала

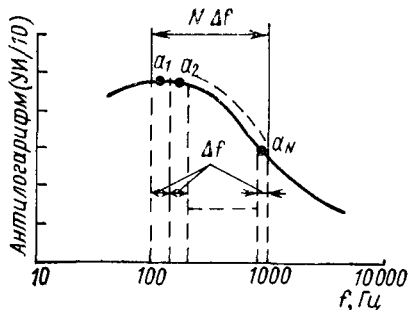


Рис. 2.13. Спектр интенсивности широкополосного акустического сигнала для иллюстрации метода численного интегрирования

сведения о спектральной плотности обычно представляются в графической или табличной форме, интегрирование часто выполняют численными методами. Пример такой операции показан на рис. 2.13. Обработываемая полоса делится на узкие трапеции равной ширины Δf . Уровень общей интенсивности для сигнала, имеющего полосу β , определяется выражением

$$\text{УИ (в полосе } \beta) = 10 \lg \left[\Delta f \sum_i a_i \right] = 10 \lg (\Delta f) + 10 \lg \left(\sum_i a_i \right), \quad (2.89)$$

где a_i = антилогарифм $(\text{УИ}_i/10) = I_i/I_{\text{эт}}$.

Если спектр является постоянным в рассматриваемой полосе на уровне $\text{УИ} = 10 \lg a$, то результат получается достаточно просто в виде $\sum_{i=1}^N a_i = Na$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{УИ (в полосе } \beta) &= 10 \lg [\Delta f Na] = 10 \lg (N\Delta f) + 10 \lg a = \\ &= 10 \lg (\beta) + L. \end{aligned} \quad (2.90)$$

2.5.4. Суммарные сведения о единицах и стандартах

В таблице приведены сведения о смешанной системе (СГС) и системе МКС.

Параметр	СГС (английская)	МКС
Эталон давления	1 мкбар (СКЗ)	1 мкПа (СКЗ) = 10^{-5} мкбар
Эталон интенсивности	$0,667 \cdot 10^{-12}$ Вт/см ²	$0,667 \cdot 10^{-18}$ Вт/м ²
Эталон расстояния	1 ярд	1 м
Эталон ширины полосы	1 Гц	1 Гц
$Z_0 = \rho c$	$1,5 \cdot 10^5$ г/(см ² ·с)	$1,5 \cdot 10^6$ кг/(м ² ·с)
Уровень источника излучения (относительно 1 Вт излучаемой мощности)	УИ = 71,54 дБ// 1 мкбар/1 ярд	УИ = 170,77 дБ//1 мкПа/1 м = = УИ//1 мкбар/ 1 ярд + 99,23 дБ
Потери при распространении	$\text{ПР} = 10 \lg \frac{l(1 \text{ ярд})}{l(r \text{ ярд})}$	$\text{ПР} = 10 \lg \frac{l(1 \text{ м})}{l(r \text{ м})}$ = ПР (ярд) - 0,77 дБ

2.6. Пульсирующий сферический излучатель

Пример. Примем следующие значения: радиус сферы $a = 0,1$ м; среднее значение рабочей частоты $f_0 = 2388$ Гц; длина волны $\lambda_0 = 0,628$ м.

Требуется определить следующие параметры.

1 Импеданс излучения Z на сферической поверхности для среднего значения рабочей частоты

2. Общий импеданс воды Z_w на сферической поверхности. Рассчитать и графически представить вещественную и мнимую части в функции частоты.

3. Эффективную массу, выраженную с помощью массы воды, которая определяется из выражения $X = \omega M_w$. Получить выражение для M_w и рассчитать значение для средней частоты.

4. Уровень источника излучения (УИ) в системах МКС и смешанной для мощности излучения 1000 Вт.

5. Рассчитать и графически представить амплитуду давления, колебательную скорость, изменение амплитуды в зависимости от расстояния от сферической поверхности для источника, излучающего 1000 Вт на средней рабочей частоте.

6. Рассчитать максимальное значение амплитуды силы, синусоидально действующей на поверхность сферы для излучения мощности 1000 Вт на средней рабочей частоте.

7. На поверхность сферы для создания с ее помощью акустических колебаний должно воздействовать некоторое механическое устройство. Предположим, что механический импеданс такого устройства определяется выражением

$$Z_m = R_m + j[\omega M_m - 1/(\omega S_m)],$$

где $R_m = 4 \cdot 10^4$ кг/с — механическое сопротивление, учитывающее потери мощности, вызываемые трением, и т. д.; M_m — масса возбуждающего (силового) механизма, включая корпус сферы ($M_m = 5$ кг); S_m — механическая податливость силового механизма. Она обратно пропорциональна модулю Юнга материала, ($S_m = 4 \cdot 10^{-10}$ с²/кг).

Суммарное сопротивление действующей силе определяется полным импедансом, представляющим собой сумму механического импеданса силового механизма и импеданса, создаваемого водой. Таким образом, $Z_r = Z_m + Z_w$.

Принимая, что действующая сила имеет синусоидальный характер, следует разработать схему эквивалентного контура, включая учет нагрузки в виде водной массы и механического силового механизма. Рассчитать и графически представить вещественную и мнимую части общего импеданса в функции частоты.

8. Принимая, что на входе механической системы действующая синусоидально изменяющаяся сила имеет постоянную амплитуду, рассчитать график уровня излучения источника на единицу силы в функции частоты

9. Определить среднеквадратичное значение силы на входе системы, требуемое для получения общей выходной мощности 1000 Вт на средней частоте.

10. Определить эффективность системы на средней частоте.

11. Определить ширину полосы на уровне 3 дБ для характеристики выходной мощности.

Решение

1. Импеданс излучения на сферической поверхности на центральной рабочей частоте определяется по формуле

$$Z = \rho c [1 - j(\lambda_0/2\pi a)]^{-1}.$$

В этом примере λ_0 и a выбирают так, чтобы $\lambda_0/(2\pi a) = 1,0$. Следовательно,

$$Z = \rho c [1 - j1]^{-1} = 1,5 \cdot 10^6 \cdot 0,707e^{i45^\circ} = 1,06 \cdot 10^6 e^{i45^\circ} \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

2. Общий импеданс Z_w , представляемый нагрузкой воды на сферу, равен отношению общей силы, действующей на сферическую поверхность, к результирующей скорости движения поверхности:

$$Z_w = f(t, a)/u(t, a).$$

Для простого сферического излучателя сила равна произведению давления на площадь поверхности сферы:

$$Z_w = (4\pi a^2) p(t, a) / u(t, a).$$

Отношение давления и скорости на поверхности сферы равно специфическому акустическому импедансу излучения. Поэтому

$$\begin{aligned} Z_w &= (4\pi a^2) Z = \\ &= \left[\frac{(4\pi a^2) \rho c}{1 + \lambda / (2\pi a^2)} \right] \left[1 + \frac{j\lambda}{2\pi a} \right]. \end{aligned}$$

Вещественная и мнимая части равны

$$\begin{aligned} R_w &= 4\pi a^2 \rho c \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi a} \right)^2 \right]^{-1} = (1,88 \cdot 10^5) (1 + 2,5\lambda^2)^{-1} \text{ кг/с}; \\ X_w &= \left(\frac{\lambda}{2\pi a} \right) (4\pi a^2 \rho c) \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi a} \right)^2 \right]^{-1} = \left(\frac{\lambda}{0,628} \right) \times \\ &\quad \times (1,88 \cdot 10^5) (1 + 2,5\lambda^2)^{-1} \text{ кг/с}. \end{aligned}$$

Результаты расчетов отражены на рис. 2.14.

3. Эффективная присоединенная масса воды

$$M_w = \frac{X_w}{\omega} = \left(\frac{\lambda^2 \rho a}{\pi} \right) \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2\pi a} \right)^2 \right]^{-1}.$$

На средней рабочей частоте

$$M_w = \frac{\lambda^2 \rho a}{(2\pi)} = \frac{0,394 \cdot 10^3 \cdot 10^{-1}}{6,28} = 6,28 \text{ кг}.$$

4. В системе МКС УИ = 170,77 + 10 lg P_T . Для $P_T = 1000$ Вт получим
УИ = 170,77 + 30 = 200,77 дБ//1 мкПа/1 м.

В смешанной системе

$$\text{УИ} = 71,54 + 10 \lg P_T = 101,54 \text{ дБ//мкбар/1 ярд}.$$

5. УИ (п. 4) СКЗ давления на расстоянии 1 м составит

$$p_{\text{СКЗ}} = \text{antilg}(200,77/20) = 1,1 \cdot 10^{10} \text{ мкПа} = 1,1 \cdot 10^4 \text{ Па или Н/м}^2.$$

Следовательно, максимальное давление на расстоянии 1 м составит

$$p_{\text{max}} = \sqrt{2} p_{\text{СКЗ}} = 1,55 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2.$$

Давление является функцией времени и расстояния:

$$p(t, r) = \frac{p_{\text{max}}}{r} \exp(j\omega t) = \frac{1,55 \cdot 10^4}{r} \exp(j\omega t), \text{ Н/м}^2.$$

Значения скорости и смещения частицы получают непосредственно из формулы давления

$$u(t, r) = \frac{p(t, r)}{Z(r)} = \frac{p_{\text{max}}}{r \rho c} \left(1 - \frac{j\lambda}{2\pi r} \right) \exp(j\omega t).$$

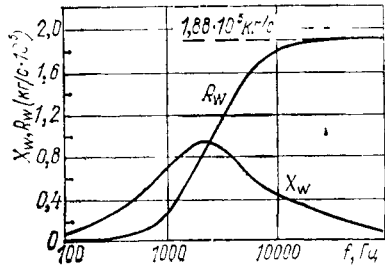


Рис. 2.14. Вещественная и мнимая части импеданса излучения для сферы диаметром 0,1 м

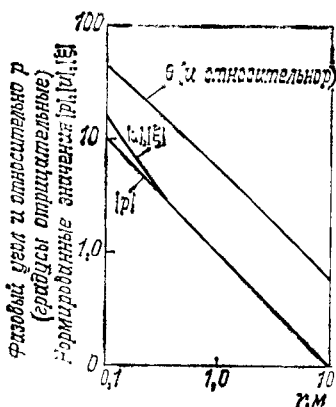


Рис. 2.15. Амплитуды давления, колебательной скорости и смещения в зависимости от расстояния (к примеру в п. 2.6)

Для среднего значения рабочей частоты имеем

$$u(t, r) = \left(\frac{1,037 \cdot 10^{-2}}{r} \right) \left[1 + \left(\frac{0,1}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \exp \left[j \operatorname{tg}^{-1} \left(- \frac{0,1}{r} \right) \right] \exp(j\omega t), \text{ м/с;}$$

$$\xi(t, r) = u(t, r) / j\omega.$$

На рис. 2.15 даны амплитуды давления, колебательной скорости смещения, нормированные к 1 м. Показаны также значения фазового сдвига скорости частицы относительно давления. Фаза смещения частицы отличается от фазы колебательной скорости на дополнительную величину 90° .

6. Общее значение силы, действующей на сферическую поверхность, является произведением давления на площадь:

$$f(t, a) = (4\pi a^2) p(t, a).$$

Для общей мощности 1000 Вт имеем

$$f(t, a) = \frac{4\pi (0,01) (1,55 \cdot 10^4)}{0,1} \exp(j\omega t) = (1,95 \cdot 10^4) \exp(j\omega t), \text{ Н.}$$

7. Полный импеданс представляет собой сумму механического импеданса и импеданса излучения:

$$Z_T = Z_m + Z_\omega = R_m + R_\omega + j[\omega(M_m + M_\omega) - 1/(\omega S_m)].$$

Эквивалентная схема этой системы показана на рис. 2.16. Вещественная часть Z_T получается в виде

$$\operatorname{Re}[Z_T] = R_m + R_\omega = (4 \cdot 10^4) + (1,88 \cdot 10^5) (1 + 2,5\lambda^2)^{-1}, \text{ кг/с.}$$

Аналогично

$$\operatorname{Im}[Z_T] = \omega M_m - 1/\omega S_\omega + X_\omega = 2\pi f(5) - \frac{10}{2\pi f(4)} + \left(\frac{\lambda}{0,628} \right) \times$$

$$\times (1,88 \cdot 10^5) (1 + 2,5\lambda^2)^{-1}, \text{ кг/с.}$$

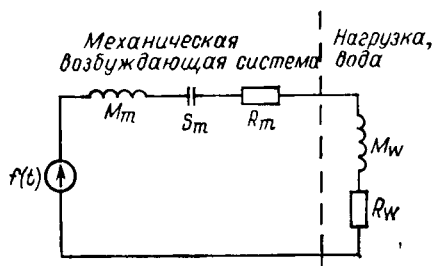


Рис. 2.16. Эквивалентная схема простого излучателя и водной нагрузки

Вещественные и мнимые части Z_T в зависимости от частоты представлены графически на рис. 2.17. Отметим, что суммарная инерционная нагрузка, связанная с присоединенной массой и массой силового механизма, точно сбалансирована реакцией упругости, связанной с деформациями управляющего механизма на средней частоте.

8. Акустическая мощность, излучаемая в воду, определяется произведением среднеквадратичного значения скорости колебаний поверхности на значение резистивной части водной нагрузки:

$$P_T = \langle u^2 \rangle R_w,$$

но

$$\langle u^2 \rangle = u_{\max}^2 / 2 = f_{\max}^2 / 2 |Z_T|^2,$$

где u_{\max} — максимальное значение скорости, f_{\max} — максимальное значение воздействующей силы.

Таким образом,

$$P_T = \frac{f_{\max}^2}{2 |Z_T|^2} R_w = \frac{f_{\text{СКЗ}}^2}{|Z_T|^2} R_w.$$

Пусть среднеквадратичное значение возбуждающего усилия равно 1Н тогда мощность на выходе на единицу силы будет равна

$$P / 1Н_{\text{СКЗ}} = R_N / |Z_T|^2.$$

Результирующее значение уровня источника на единицу приложенной силы составит

$$\text{УИ (на 1 Н)} = 170,77 + 10 \lg (P / 1Н_{\text{СКЗ}}) = 170,77 + 10 \lg (R_w / |Z_T|^2).$$

Значения R_w и $|Z_T|^2$ находятся из рис. 2.14 и 2.17. Уровень излучения относительно 1 Н в зависимости от частоты графически представлен на рис. 2.18.

9. Если преобразователь (излучатель) работает на средней частоте, УИ относительно среднеквадратичного значения приложенной силы в 1Н составляет 118,9 дБ/мкПа/1 м. При выходной мощности 1000 Вт УИ = 200,77 дБ. Требуемая входная сила для получения такого выходного уровня составляет $10 \lg f_{\text{СКЗ}}^2 = \text{УИ} (1000 \text{ Вт}) - \text{УИ} (1Н) = 200,77 - 117,9 = 82,87$ дБ, или $f_{\text{СКЗ}} (Н) = \text{антилогарифм} [82,87/20] = 1,39 \cdot 10^4 \text{ Н}$.

10. Эффективность системы определяется отношением полезной выходной мощности к полной мощности. Это просто отношение резистивной части

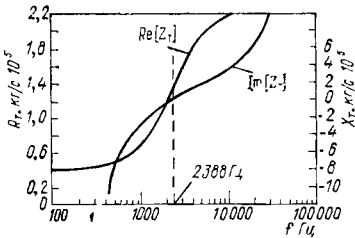


Рис. 2.17. Вещественная и мнимая части общего импеданса (к примеру в п. 2.6)

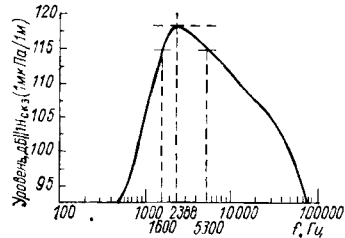


Рис. 2.18. Уровень источника в зависимости от частоты (к примеру в п. 2.6)

водной нагрузки к суммарному сопротивлению механического устройства и водной нагрузки.

$$\text{Эффективность} = \frac{R_w}{R_w + R_m} \cdot 100 \% = \frac{0,94}{0,94 + 0,4} \cdot 100 = 70 \%$$

Это эффективность только механической части системы. Она не включает электрические потери, которые должны учитываться при расчете процесса генерирования механической возбуждающей силы.

11. Ширина полосы по уровню 3 дБ для постоянного значения воздействующей силы находится непосредственно из рис. 2.18; она составляет 3700 Гц.

Задачи

2.1. Индуктивность и емкость на 0,3 м длины электрической линии передачи без потерь составляет 0,08 мкФ/Гн и 29,5 пФ соответственно. Рассчитать скорость распространения и характеристический импеданс для электромагнитной волны в этой линии.

2.2. Электрическая линия передачи без потерь с характеристическим импедансом Z_0 на приемном конце имеет нагрузку $(Z_0/2)(1 + j)$. Рассчитать и графически изобразить значение и фазу импеданса линии в зависимости от расстояния до точки приема.

2.3. Плоская акустическая волна в воде распространяется перпендикулярно к границе раздела воздух — вода. Предполагается, что акустический сигнал представляет собой непрерывную синусоиду. Требуется построить график значений давления на расстоянии 3 м от границы в зависимости от частоты в диапазоне от 100 до 1000 Гц. Предполагается, что скорость распространения акустической волны составляет 1500 м/с, а акустический импеданс воздуха равен нулю. Влияние всех других граничных поверхностей считается незначительным.

2.4. Акустическое давление и колебательная скорость в сферической волне, измеренные в воде, равны

$$p(t) = 10^9 \sin(2\pi ft), \text{ мкПа};$$

$$u(t) = 6,7 \cdot 10^{-4} \sin(2\pi ft - 10^\circ), \text{ м/с}.$$

При $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ и $c = 1500 \text{ м/с}$ для $f = 100 \text{ Гц}$ и 1000 Гц определите: уровень источника в дБ/мкПа на расстоянии 1 м, общую мощность, излучаемую источником, уровень интенсивности при $r = 100 \text{ м}$.

2.5. Уровень спектра широкополосного излучателя в дБ/мкПа на расстоянии 1 м в полосе 1 Гц дается ниже:

$f, \text{ Гц}$	100	300	300	400	500
УИ, дБ	130	133	130	127	123

Предположим, что уровень в каждой точке является постоянным для полосы шириной 100 Гц, с центром на каждой указанной частоте. Рассчитайте уровень интенсивности широкополосного сигнала в полосе от 50 до 550 Гц. Считая, что источник излучает равномерно по всем направлениям, рассчитайте общую излучаемую мощность.

2.6. Предположим, что плоская акустическая волна в воде с измеренной мощностью потока 100 Вт распространяется через прямоугольную площадку $0,2 \times 0,1 \text{ м}^2$. Пусть акустический сигнал будет синусоидальным с частотой 10 кГц, а $Z_0 = 1,5 \times 10^6 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}$. Определите следующее: акустическую интенсивность в Вт/м²; уровень интенсивности в дБ/мкПа и дБ/мкбар, УИ в дБ/мкПа на расстоянии 1 м и в дБ/мкбар на расстоянии 1 ярд и общую мощность источника в ваттах, считая, что плоская волна приближенно представляет собой сферическую волну, созданную на расстоянии 10 ярдов от точки измерений; максимальное и среднеквадратичное значения давления в мкПа в точке измерений; максимальную колебательную скорость и смещение частицы в точке измерений.

Список литературы

- 1 *Physics of Sound in the Sea, Part I. Transmission*; originally issued as Division 6, Vol. 8, NDRC Summary Technical Reports. Wakefield Printing Co., Wakefield, Mass; reprinted in 1969 by the U. S. Government Printing Office, Washington, D. C.
- 2 *Officer C. B. Introduction to the Theory of Sound Transmission*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1958.
- 3 *Kinsler L. E., Frey A. R. Fundamentals of Acoustics*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- 4 *Beyer T. T. Nonlinear Acoustics*. Washington D. C.: Government Printing Office, 1975, Stock No. 0-596-215

Глава 3.

ГИДРОАКУСТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Преобразователь представляет собой устройство для превращения одной формы энергии в другую. В гидроакустике такие функции выполняют взрывные заряды, посредством которых химическая энергия переходит в акустическую, и гидродинамические вибраторы, механически изменяющие давление жидкости в давление в акустической волне [1, 2]. Ниже основное внимание уделено специальному классу акустических преобразователей, преобразующих электрические сигналы в акустические и наоборот. В общем случае их можно моделировать в виде линейных устройств и, следовательно, они доступны для непосредственного анализа.

В гидроакустике преобразователь, предназначенный для создания электрического сигнала при воздействии акустических колебаний, называется *гидрофоном*. Он является основным приемным элементом *гидроакустических антенн* (ГА). Гидрофоны звукового диапазона частот работают в широкой полосе частот. Их габариты малы по сравнению с длиной акустической волны для наибольшего значения частоты. В ультразвуковом диапазоне размеры гидрофона соизмеримы с длиной волны.

Преобразователь, предназначенный для создания в воде гидроакустического сигнала при подаче на его вход электрической энергии, называется *излучателем*. Для эффективной работы излучателя его габариты должны быть соизмеримы с длиной волны. По сравнению с гидрофоном они работают в более узкой полосе частот.

В большинстве линейных акустических преобразователей используются пьезоэлектрические или магнитострикционные явления. Их описывают с помощью аналогичных по форме уравнений, учитывающих взаимосвязи между деформациями мате-

риалов и изменениями электрического либо магнитного полей. Ниже рассмотрен принцип действия простых пьезоэлектрических преобразователей, используемых как в качестве гидрофонов, так и излучателей.

Пьезоэлектрический эффект зависит от состояния вещества кристалла. При механической деформации материала на поверхностях кристалла появляются электрические заряды противоположного знака. Значения зарядов пропорциональны значению деформации, а полярность изменяется при смене сжатия на растяжение (и наоборот). Соответственно приложенное электрическое поле приводит к пропорциональной механической деформации кристалла, которая меняет свой знак с изменением полярности электрического поля. В первых образцах гидроакустических преобразователей, применявшихся как в качестве гидрофонов, так и излучателей, использовались пьезоэлектрические свойства кварца и кристаллов сегнетовой соли.

Керамические материалы также могут обладать пьезоэлектрическими свойствами. В естественном состоянии керамические материалы по структуре представляют собой поликристаллы и пьезоэлектрических свойств не проявляют. Условия меняются, если при высокой температуре керамический элемент поместить в статическое электрическое поле. Элемент при этом растягивается в направлении поляризации поля и сжимается в перпендикулярном направлении. Смещение сохраняется и после прекращения действия электрического поля. Последующие воздействия электрического поля той же полярности вызывают растяжение в этом направлении, а изменение полярности поля приводит к сжатию. Такое поведение имеет линейный характер, если значение приложенного поля меньше первоначального значения поля поляризации. Механическое сжатие вдоль линий поля создает электрическое напряжение некоторой полярности, а растяжение — противоположной. Отметим, что в случае линейного характера взаимодействия деформации не должны превосходить смещений, образуемых в направлении первоначальной поляризации. Поскольку керамическим материалам можно легко придавать различные формы, в гидроакустических преобразователях звукового и низкочастотного диапазонов они почти полностью заменили используемые ранее кристаллы.

В данной главе представлены эквивалентные схемы для простых форм гидрофонов и излучателей из пьезоэлектрических керамических материалов. Они удобны для оценки характеристик преобразователей гидроакустических антенн.

3.1. Продольные колебания простого стержня

Принципы работы гидроакустических преобразователей из пьезоэлектрических керамических материалов показаны на примере исследования электроакустических свойств простого

стержня. Хотя на практике в качестве преобразователей можно использовать более сложные формы, для иллюстрации существа их работы целесообразно рассмотреть прямоугольный стержень.

Рассмотрим керамический стержень с прямоугольным поперечным сечением (рис. 3.1) жестко закрепленный в сечении $x = l_x$, к которому в точке $x = 0$ приложена переменная сила, действующая вдоль оси x . Действие переменной приложенной силы на колебательную скорость и смещение в пределах стержня определяется с помощью уравнений, записанных в гл. 2, для плоских волн в воде.

Введем обозначения: $p(x, t) = f(x, t)/(l_y l_z)$ — акустическое давление; ρ_m — плотность керамического материала; s_m — податливость, равная обратному значению модуля Юнга по оси x ; $u(x, t) = d\xi/dt$ — колебательная скорость по оси x .

На основании изложенного

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho_m \frac{\partial u}{\partial t}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -S_m \frac{\partial p}{\partial t}; \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{1}{\rho_m S_m} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Распространение продольных волн в стержне происходит со скоростью $c_m = 1/\sqrt{\rho_m s_m}$; характеристический импеданс — $Z_{0m} = \sqrt{\rho_m/s_m}$.

Для стержня, жестко закрепленного при $x = l_x$, колебательная скорость считается равной нулю. Это аналогично (см. гл. 2) разомкнутой электрической линии передачи или жесткой границе для плоской акустической волны. В общем случае входной импеданс, представленный приложенной в начальной точке силой (изменяющейся по синусоидальному закону), определяется из соотношений (2.23) и (2.24) путем прямой аналогии

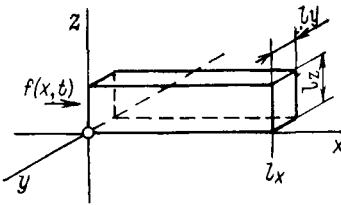


Рис. 3.1. Прямоугольный стержень керамического преобразователя

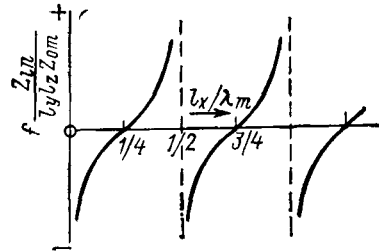


Рис. 3.2. Входной механический импеданс зажатого стержня

в виде

$$Z_{in} = l_y l_z Z_{0m} \left[\frac{Z_l \cos \alpha + j Z_{0m} \sin \alpha}{Z_{0m} \cos \alpha + j Z_l \sin \alpha} \right], \quad \alpha = (2\pi l_x) / \lambda_m, \quad (3.2)$$

где λ_m — длина акустической волны в материале, равная c_m/f_0 ; Z_{0m} — характеристический импеданс материала; Z_l — граничный импеданс при $x = l_x$; $l_y l_z$ — площадь конца стержня.

Для жестко закрепленного стержня значение Z_l является бесконечным, в результате

$$Z_{in} = -j l_y l_z Z_{0m} \operatorname{ctg} \alpha \quad (Z_l \rightarrow \infty). \quad (3.3)$$

Входной импеданс при $x = 0$ является чисто реактивным со знаком, определяемым знаком $\operatorname{ctg} \alpha$. Нормированное значение входного импеданса является функцией l_x / λ_m (рис. 3.2). Для $l_x < \lambda_m / 4$ реактивность является отрицательной. Это означает, что работа преобразователя определяется упругими свойствами материала. Для $\lambda_m / 2 > l_x > \lambda_m / 4$ импеданс является реактивным и положительным, что соответствует инерционным свойствам системы.

Составим механическую эквивалентную схему, включающую инерционную массу и упругие элементы, определяющие импеданс (3.3), во всем частотном диапазоне. Поскольку в выражение (3.3) входит $\operatorname{ctg} \alpha$, невозможно составить схему с элементами, параметры которых не зависят от частоты. Однако можно рассчитать эквивалентные схемы с фиксированными элементами, удовлетворительно аппроксимирующими процессы в ограниченных частотных диапазонах. Представляют интерес два диапазона: низкочастотный, где $l_x \ll \lambda_m / 4$, и диапазон, при котором входной импеданс становится равным нулю.

Рассмотрим низкочастотный диапазон. При $\alpha \rightarrow 0$ имеем $Z_{in} = -j l_z l_y Z_{0m} \operatorname{ctg} \alpha \simeq (j l_z l_y Z_{0m}) \alpha$. Подставляя значения Z_{0m} и α , получим

$$Z_{in} = -j \left(\frac{l_z l_y}{l_x S_m} \right) \frac{1}{2\pi f}. \quad (3.4)$$

Определяя общую механическую податливость стержня в виде

$$S_m = (l_x S_m) / (l_z l_y), \quad (3.5)$$

получим

$$Z_{in} = -j / (2\pi f S_m) \quad \text{при } l_x \ll \lambda_m / 4. \quad (3.6)$$

Механический импеданс в низкочастотной области представляет механический аналог емкости в электрических схемах.

Рассмотрим теперь область вблизи значения частоты, при которой $Z_{in} = 0$. Здесь импеданс представляет собой почти линейную функцию частоты, изменяясь по мере ее увеличения от отрицательного до положительного значения. Эквивалентную

схему в этой области можно аппроксимировать последовательной комбинацией инерционных и податливых элементов. Самое нижнее значение частоты, при котором значение импеданса входе обращается в нуль, определяется следующим образом:

$$\alpha_r = \pi/2 = 2\pi f_r l_x \sqrt{\rho_m s_m}$$

или

$$f_r = (4l_x \sqrt{\rho_m s_m})^{-1} = c_m/4l_x. \quad (3.7)$$

В области f_r получим

$$Z_{in} = -jl_x l_y Z_{0m} \operatorname{ctg} \alpha \approx -j \left[\frac{1}{2\pi f S_m} - 2\pi f M_m \right], \quad (3.8)$$

где f — частота, близкая к f_r ; S_m — эффективное общее значение податливости вблизи f_r ; M_m — общая эффективная масса вблизи f_r .

Подставляя выражение (3.7) вместо f в формулу (3.8), получим, согласно определению, что входной импеданс равен нулю. При этом

$$M_m S_m = 1/(4\pi^2 f_r^2) = (4l_x^2 \rho_m s_m)/\pi^2. \quad (3.9)$$

Наклон графика Z_{in} при $f = f_r$ можно определить из выражения (3.8) в виде

$$\left. \frac{dZ_{in}}{df} \right|_{f=f_r} = +jl_x l_y \sqrt{\frac{\rho_m}{S_m}} \left(\frac{\pi}{2f_r} \right) = +j \left(2\pi M_m + \frac{1}{2\pi f_r^2 S_m} \right). \quad (3.10)$$

Умножая обе части выражения (3.10) на f_m с учетом (3.7) и (3.9), получим

$$S_m = 8/\pi^2 [(l_x s_m)/(l_x l_y)]. \quad (3.11)$$

Отметим, что податливость, определяемая формулой (3.11), несколько меньше значения при низких частотах, определяемого из выражения (3.5).

Подстановка выражения (3.11) в (3.9) дает значение эффективной массы в области f_r . Таким образом,

$$M_m = (4l_x^2 \rho_m s_m)/(\pi^2 S_m) = (l_x l_y l_x \rho_m)/2, \quad (3.12)$$

т. е. эффективная масса равна половине действительной массы стержня. Это объясняется тем, что один конец стержня закреплен. В результате разные части стержня колеблются с неодинаковыми скоростями.

Здесь мы пренебрегаем механическими потерями в материале или конструкции, поддерживающей стержень. В общем случае эти потери являются малыми и для низкочастотных колебаний ими можно пренебречь. В области f_r реактивный импеданс близок к нулю, поэтому нельзя пренебрегать членом

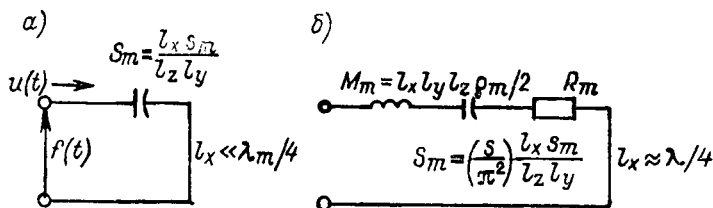


Рис. 3.3. Эквивалентные схемы керамического преобразователя для низкочастотных (а) и почти резонансных (б) колебаний

управления, учитывающим потери и описывающим механическое сопротивление. Входной импеданс на частотах, близких к f_r , принимает следующую форму:

$$Z_{in} = R_m - j[1/\omega S_m - \omega M_m], \quad (3.13)$$

где R_m — механическое сопротивление, обусловленное потерями в материале стержня и в конструкции, где он укреплен.

Теперь можно составить механические эквивалентные схемы (рис. 3.3). Схема на рис. 3.3, а полезна при анализе работы гидрофона, так как его габариты обычно малы по сравнению с длиной акустической волны. Излучатель представляет собой устройство для эффективного генерирования выходной акустической мощности, и его колебания должны происходить на частоте, близкой к резонансной (рис. 3.3, б).

3.2. Работа приемника

Для обеспечения приема акустических колебаний противоположные поверхности керамического стержня (рис. 3.4) выполняются токопроводящими. С помощью постоянного электрического поля, приложенного параллельно оси z , керамический материал поляризуется. Размеры материала под действием приложенного напряжения изменяются. Здесь рассматриваются изменения лишь по оси x . Предположим, стержень жестко закреплен в точке $x = l_x$ и полностью экранирован от внешнего акустического давления, за исключением открытого участка площадью $l_z l_y$.

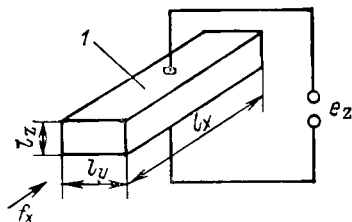


Рис. 3.4. Форма простого преобразователя:

1 — верхний электрод

При разомкнутых концах электродов приложим к открытой поверхности статическую силу f_x . Это приведет к появлению электрического заряда на проводя-

щих поверхностях. Его значение определяется из выражения

$$Q = -d [i_x / (l_y l_z)] l_x l_y = -d p_x l_x l_y, \quad (3.14)$$

где Q — электрический заряд, Кл; p_x — давление на поверхности yOz , Н/м²; d — пьезомодуль керамического материала, Кл/Н (или м/В), соответствующий направлению приложенной силы и поляризации.

Электрическое напряжение также возникает на проводящих поверхностях, если статическое напряжение e_z приложено к электродам. Значение заряда определяется по формуле

$$Q = \{\epsilon \epsilon_0 [l_x l_y / l_z]\} e_z, \quad (3.15)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость материала; ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость свободного пространства, равная $8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Выражение в фигурных скобках можно считать соотношением, определяющим емкость обычного конденсатора с плоскопараллельными пластинами площадью $l_x l_y$, имеющим толщину l_z и диэлектрическую постоянную ϵ .

При наличии приложенной силы и приложенного напряжения общее значение заряда можно определить из выражений (3.14) и (3.15) в виде

$$Q = \epsilon \epsilon_0 [l_x l_y / l_z] e_r - d p_x l_x l_y. \quad (3.16)$$

Под действием приложенного электрического напряжения обратный пьезоэлектрический эффект приводит к появлению механической деформации в материале, определяемой по формуле

$$\partial \xi / \partial x = e_z d / l_z - s_m p_x, \quad (3.17)$$

где $\partial \xi / \partial x$ — продольная деформация в направлении оси x ; d — пьезомодуль; s_m — податливость материала.

3.2.1. Эквивалентная схема гидрофона

Уравнения (3.16) и (3.17) определяют связи между акустическими (механическими) и электрическими процессами в гидрофоне. Их удобно представить в виде электроакустической эквивалентной схемы, один из возможных вариантов которой представлен на рис. 3.5. На акустической стороне заданы сила, скорость, а также механический импеданс Z_m . Электрическая и механическая части разделены с помощью трансформатора, имеющего коэффициент трансформации ϕ и преобразующего электрические величины в механические и наоборот. Электрическая часть состоит из параллельной проводимости Y_e , задан электрический ток и приложенное напряжение.

Эта эквивалентная схема аналогична той, которая используется для описания простого электрического трансформатора,

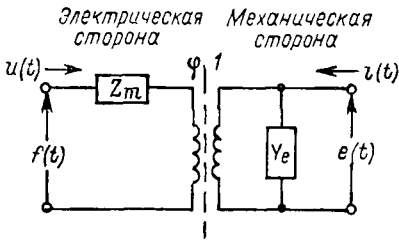


Рис 35 Эквивалентные схемы электроакустического преобразователя

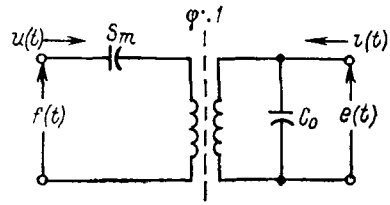


Рис 36 Электроакустическая эквивалентная схема гидрофона

$$S_m = l_x s_m / l_z l_y; \quad C_0 = \epsilon' \epsilon_0 (l_x l_y / l_z);$$

$$\epsilon' = \epsilon [1 - d^2 / (\epsilon \epsilon_0 s_m)]; \quad \Phi = dl_y / s_m$$

где Y , Φ и Z определяются последовательными измерениями параметров разомкнутой и замкнутой схем. Для напряжения, приложенного к схеме с проводимостью, отношение трансформации получается в результате деления значения напряжения на выходе разомкнутой схемы на значение приложенного напряжения. Проводимость Y представляет собой отношение входного тока к напряжению, приложенному на выходе разомкнутой схемы. Импеданс Z определяется путем короткого замыкания на стороне, содержащей проводимость Y , и измерения отношения приложенного напряжения к току на стороне, содержащей Z .

Эту же процедуру можно использовать для определения параметров эквивалентной схемы, представленной на рис. 3.5. Механический эквивалент разомкнутой схемы получается путем подстановки значения скорости $u(t) = 0$. Нулевое значение скорости означает, что механическая сторона зажата или заторможена, т. е. не может свободно перемещаться. Если элемент закреплен в равновесном положении, смещен и, следовательно, деформация в материале равны нулю. Это остается действительным для статического либо низкочастотного синусоидального напряжения (при $l_x \ll \lambda_m/4$).

Подставив в формулу (3.17) значение деформации, равное нулю, делением значения силы на выходе на значение приложенного напряжения получим коэффициент Φ . Таким образом, для $l_x \ll l_m/4$ получим $\partial \xi / \partial x = 0 = e_z(t) d / l_z - s_m p_x(t)$, откуда

$$\Phi = p_x(t) l_y l_z / e_z(t) = f_x(t) / e_z(t) = dl_y / s_m. \quad (3.18)$$

Величина, определяющая преобразование механической силы в электрическое напряжение, пропорциональна коэффициенту пьезоэлектрического сжатия и обратно пропорциональна податливости материала.

Для заторможенной механической стороны подстановкой $\nu_x(t)$ из формулы (3.18) в (3.16) получим

$$\begin{aligned} Q(t) &= \epsilon\epsilon_0 \left(\frac{l_x l_y}{l_z} \right) e_z(t) - \frac{d^2}{s_m} \left(\frac{l_x l_y}{l_z} \right) e_z(t) = \\ &= \epsilon\epsilon_0 \left(1 - \frac{d^2}{\epsilon\epsilon_0 s_m} \right) \left(\frac{l_x l_y}{l_z} \right) e_z(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Введем новую диэлектрическую константу

$$\epsilon' = \epsilon [1 - d^2 / (\epsilon\epsilon_0 s_m)] \quad (3.20)$$

и запишем

$$Q(t) = \epsilon' \epsilon_0 [l_x l_y / l_z] e_z(t). \quad (3.21)$$

Константа ϵ' представляет собой эффективную диэлектрическую постоянную материала при условии, что образец заторможен. Она называется диэлектрической постоянной материала, находящегося в заторможенном состоянии.

Ток определяется как скорость изменения заряда во времени. Таким образом, при заторможенной механической системе имеем

$$i(t) = \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \epsilon' \epsilon_0 \left(\frac{l_x l_y}{l_z} \right) \frac{\partial e_z(t)}{\partial t}; \quad (3.22)$$

$$i(t) = C_0 \frac{\partial e_z(t)}{\partial t}, \quad (3.23)$$

где C_0 — емкость заторможенного элемента. Следовательно, проводимость электрической части представляет собой проводимость конденсатора C_0 , включенного параллельно входным клеммам. Она определяется по формуле

$$Y_e = j\omega C_0. \quad (3.24)$$

Предполагается, что частота является очень низкой и поэтому влиянием индуктивности на электрическую часть можно пренебречь. Незначительным считается и влияние диэлектрических потерь в керамических материалах при действии переменного электрического поля. Такие потери мало влияют на работу гидрофонов в звуковом и нижнем ультразвуковом диапазонах частот.

Для определения импеданса механической части схемы оценивается значение отношения приложенной силы к входной скорости. При этом считается, что поверхность элемента на другом конце заторможена, а электрическая сторона замкнута накоротко. Полученный таким образом входной импеданс идентичен рассмотренному в п. 3.2. Для стержня без потерь, зажатого на одном конце, согласно выражению (3.3), имеем $Z_m = -j l_z l_y Z_{0m} \operatorname{ctg} \alpha$.

При использовании гидрофона принимается, что $l_x \ll \lambda_m/4$, поэтому

$$Z_m = -j/2\pi f S_m, \quad (3.25)$$

где $S_m = l_x s_m / (l_z l_y)$.

Эквивалентную схему, изображенную на рис. 3.5, можно преобразовать в схему, представленную на рис. 3.6.

3.2.2. Чувствительность гидрофона

Для определения характеристик гидрофона удобно преобразовать элементы акустической стороны к элементам электрической стороны и получить полностью электрическую эквивалентную схему. Из выражения (3.18) напряжение, эквивалентное приложенной механической силе, рассчитывается делением значения силы на коэффициент трансформации. Чтобы получить эквивалентную электрическую емкость C_m , значение механической податливости S_m следует умножить на квадрат коэффициента φ , так как импеданс трансформатора определяется через квадрат коэффициента трансформации. Полученная схема показана на рис. 3.7.

С помощью эквивалентной схемы напряжение на выходе разомкнутого контура для заданной входной силы определяется по формуле

$$e_0(t) = \left[\frac{f(t)}{\varphi} \right] \frac{C_m/C_0}{1 + C_m/C_0}. \quad (3.26)$$

Преобразуя приложенную силу в эквивалентное деление плоской волны, действующей на плоскость $l_y l_z$, запишем

$$\frac{e_0(t)}{p(t)} = \left(\frac{l_y l_z}{\varphi} \right) \frac{C_m/C_0}{1 + C_m/C_0}. \quad (3.27)$$

Уравнение (3.27) определяет чувствительность гидрофона в режиме холостого хода через выходное напряжение, соответствующее единичному входному давлению. С помощью выражений, определяющих значения C_m , C_0 и φ , соотношение (3.27) можно записать в виде

$$e_0/p = (l_z d) / (\epsilon \epsilon_0) = (l_x l_y) d / C, \quad (3.28)$$

где

$$C = [(l_x l_y) \epsilon \epsilon_0] / l_z. \quad (3.29)$$

Емкость C в этом уравнении представляет собой емкость незажатого элемента. Чувствительность гидрофона зависит от пьезомодуля диэлектрической постоянной и размеров гидрофона.

Выражения (3.28) и (3.29) показывают, что характеристики гидрофона улучшаются при увеличении расстояния между проводящими электродами, т. е. при уменьшении электрической емко-

сти элемента. Следует помнить, что эти уравнения определяют чувствительность гидрофона в режиме холостого хода.

Гидрофон должен быть соединен с другими элементами электронной схемы, которые усиливают сигнал и передают его по назначению. Эти дополнительные схемы, соединенные с электрическими клеммами гидрофона, представляют собой параллельную нагрузку которая должна быть включена в оценку фактически достижимой чувствительности. Увеличение чувствительности гидрофона (работающего в режиме холостого хода) за счет уменьшения электрической емкости приводит к увеличению внутреннего импеданса гидрофона как источника сигнала. Характеристики гидрофона, соединенного с последующими электронными схемами приведены в пп. 3.3.4.

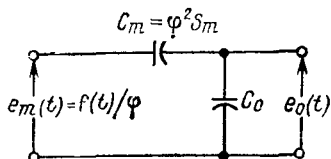


Рис. 3.7. Электрическая эквивалентная схема гидрофона

3.2.3 Гидрофоны с цилиндрическими элементами

Рассмотренный прямоугольный стержень представляет собой простую модель для иллюстрации основных соотношений между электрическими и механическими свойствами материала. Однако более практичными (по крайней мере, в звуковом диапазоне) оказались гидрофоны других конфигураций. В звуковом и низком ультразвуковом диапазонах частот применяют в основном керамические преобразователи цилиндрической формы. На рис. 3.8 представлены три цилиндрических гидрофона с возможными режимами работы.

Цилиндрический гидрофон (рис. 3.8, а) работает в режиме *радиальных колебаний*. Внутренние и внешние поверхности цилиндра покрыты проводящим материалом. Между этими поверх-

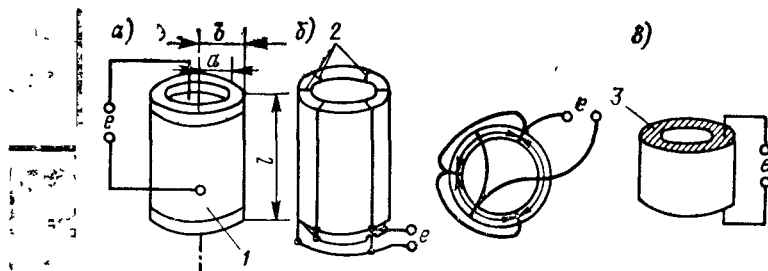


Рис. 3.8 Оболочки цилиндрических керамических гидрофонов, работающих на модах радиальных (а), тангенциальных (б) и продольных (в) колебаний:

1—наружный электрод (внутри и снаружи), 2—электроды, разделяющие цилиндрические сегменты, 3—верхний электрод

ностями приложено электрическое напряжение. В режиме радиальных колебаний, а также в других режимах, которые будут рассмотрены ниже, внутренняя поверхность цилиндра экранирована от приложенного акустического поля. Преобразователь характеризуется умеренной чувствительностью и большим значением выходной емкости. Поэтому такую конструкцию можно подключать непосредственно к кабелям большой длины без значительной потери чувствительности.

Преобразователь, приведенный на рис. 3.8, б, работает в режиме *тангенциальных колебаний*. Проводящие полосы, образованные на поверхности керамического преобразователя делят цилиндр на четное число изогнутых сегментов (клепка у тарных бочек). Чередующиеся полосы соединены электрически. Электрическое поле приложено по направлениям, показанным стрелками. Таким образом, сегменты электрически соединены параллельно, а механически — последовательно. Эта конструкция характеризуется высокой чувствительностью и низкой емкостью. Из-за малой емкости выходной импеданс получается большим, поэтому подключение такого гидрофона к длинному кабелю неэффективно. Зато это превосходная конструкция для получения высокой чувствительности.

Преобразователь, представленный на рис. 3.8, в, работает в режиме *продольных колебаний*. На торцы керамического цилиндра нанесено проводящее покрытие. Направление поляризации совпадает с направлением оси. При этом гидрофон имеет большую чувствительность, чем в режиме радиальных колебаний. Однако электрический импеданс гидрофона также высок.

При обсуждении работы простого прямоугольного продольного стержня мы ввели в рассмотрение пьезомодуль d , связывающий механическое напряжение вдоль оси x с приложенным по направлению оси z полем. Действительно, приложенное в направлении z поле создает деформацию по оси z , а также в направлениях, перпендикулярных к этой оси. В простом стержневом гидрофоне не учитывались деформации по всем остальным направлениям, кроме оси x . При данной аппроксимации предполагалось, что длина стержня l_x по оси x гораздо больше его габаритов l_y или l_z .

Для гидрофонов, выполненных в форме цилиндров, необходимо учитывать напряжения как в направлении приложенного электрического поля, так и в перпендикулярном. В общем случае пьезомодули по этим направлениям различаются и имеют противоположные знаки. Таким образом, напряжение, приложенное к прямоугольному стержню по оси z , поляризованному в направлении этой оси, вызывает *растяжение* материала по оси z и его *сжатие* по осям x и y . Пьезомодули по этим ортогональным направлениям определяются следующим образом: d_{33} — пьезомодуль в направлении, совпадающем с направлением поляриза-

ции; d_{31} — пьезомодуль в направлении ортогональном направлению поляризации.

При анализе параметров гидрофона, выполненного в виде простого прямоугольного стержня, в случае, если направления приложенного поля и действующей силы ортогональны, в формулах (3.28) и (3.29) следует использовать пьезомодуль d_{31} .

Чувствительности гидрофонов из керамических цилиндров, работающих в трех различных режимах колебаний, рассмотрены Р. Ланжевром [3]. Его анализ предполагает, что рабочая частота гидрофона находится ниже всех резонансных частот механических колебаний цилиндра. В качестве примера определения характеристики гидрофона с использованием соотношений Ланжевона дается расчет чувствительности цилиндра, работающего в режимах тангенциальных и радиальных колебаний. В обоих случаях предполагается, что внутренние поверхности и торцы цилиндров полностью экранированы от акустического поля.

Чувствительность по напряжению для радиально поляризованного керамического цилиндра определяется по формуле

$$\frac{e}{p} = b \left[\frac{d_{33}}{\epsilon \epsilon_0} \left(\frac{b-a}{b+a} \right) + \frac{d_{31}}{\epsilon \epsilon_0} \right], \quad (3.30)$$

где a и b — внутренний и наружный радиусы цилиндра.

Из формул (3.28) и (3.30) видно, что в обоих случаях чувствительность определяется пьезомодулем, диэлектрической константой и линейными размерами элемента.

В качестве керамических материалов для приемников и излучателей применяют титанат бария и соединение цирконата свинца и цирконата титаната свинца (ЦТС). В приведенном ниже примере расчет чувствительности гидрофона из керамики ЦТС-5А хрятся следующие значения параметров: $d_{33} = 374 \times 10^{-12}$ Кл/Н; $d_{31} = -171 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н; $\epsilon = 1700$.

Рассмотрим радиально поляризованный керамический цилиндр с наружным диаметром 25,4 мм, длиной 25,4 мм и толщиной корпуса 1,59 мм. Преобразовывая эти значения в метры и подставляя в формулу (3.30), получим $e/p = -1,23 \cdot 10^{-4}$ В/Па = $= -1,23 \cdot 10^{-10}$ В · мкПа.

Чувствительность гидрофона принято обычно выражать в дБ/1В, принимая за единицу акустического давления среднеквадратичное значение 1 мкПа. Этот уровень получается преобразованием квадрата отношения напряжения к давлению в децибелах.

Таким образом, для приведенного выше примера чувствительность гидрофона

$$H = 10 \lg (e/p)^2 = 20 \lg (e/p) = 198,2 \text{ дБ/В/ мкПа}. \quad (3.31)$$

Электрический выходной импеданс керамического цилиндра определяется емкостью свободного (т. е. незажатого) элемента

на электрических клеммах. Для случая, когда внутренние и внешние поверхности цилиндра полностью покрыты проводящими электродами, емкость определяется выражением

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(b/a)} = - \frac{2\pi \cdot 1700 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,0254}{\ln(0,0127/0,0111)} = 0,0176 \text{ мкФ}. \quad (3.32)$$

Предположим, что рассмотренный выше керамический цилиндр разделен на шесть сегментов (см. рис. 3.8. б) и работает в режиме тангенциальных колебаний.

По формуле Ланжевена чувствительность гидрофона из N сегментов определяется как

$$\frac{e}{p} = \frac{1}{N} \frac{2\pi b}{\ln(b/a)} \left[\frac{d_{31}}{\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{b+a} \right) + \frac{d_{33}}{\epsilon\epsilon_0} \right]. \quad (3.33)$$

Подстановка упомянутых выше численных значений дает $e/p = -2,39 \cdot 10^{-9}$ В/мкПа или $H = 20 \lg(2,39 \cdot 10^{-9}) = -172,4$ дБ/В/мкПа.

Видно, что в тангенциальном режиме колебаний чувствительность гидрофона на 26 дБ выше, чем в радиальном. Однако для качественного сравнения необходимо рассмотреть также выходной импеданс двух устройств. Для тангенциального поляризованного и разделенного на сегменты цилиндра выходная емкость представляет собой параллельную комбинацию емкостей всех шести сегментов. Результирующая емкость

$$C = \frac{N^2(b-a)l\epsilon\epsilon_0}{2\pi b} = \frac{36 \cdot 1,59 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0254 \cdot 1700 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{6,28 \cdot 0,0127} = 0,000274 \text{ мкФ}. \quad (3.34)$$

Из выражений (3.32) и (3.34) видно, что эффективная емкость устройств с тангенциальной поляризацией в 64 раза меньше емкости устройства с радиальной поляризацией. Для получения чувствительности по формуле (3.33) необходимо быть уверенным, что последующая электронная схема имеет высокий импеданс по сравнению с импедансом, определяемым значением емкости в формуле (3.34).

3.2.4. Гидрофон как элемент системы

Эквивалентная схема гидрофона, учитывающая его соединение электрическим кабелем с электронным усилителем, показана на рис. 3.9. Гидрофон характеризуется напряжением холостого хода e_m и внутренним импедансом, определяемым емкостью C свободного элемента. В звуковом диапазоне частот электрический кабель является коротким по сравнению с электрической длиной волны, поэтому его можно представить с помощью включенного параллельно конденсатора C_L . Входной импеданс усилителя можно представить в виде конденсатора C_u

и резистора R_a , включенных параллельно. Напряжение на входе усилителя зависит от величины сигнала e_a , поступающего от гидрофона. На входе усилителя имеется дополнительное напряжение в виде собственной электрической помехи. Функция усилителя состоит в том, чтобы увеличить напряжение до необходимого значения и обеспечить согласование с любой последующей схемой при малом значении импеданса преобразователя.

Предположим, что на вход поступает синусоидальный сигнал, тогда сигнал на клеммах усилителя будет иметь вид

$$e_a = e_{in} [1/(1 + ZY)], \quad (3.35)$$

где $Z = 1/j\omega C$; $Y = j\omega(C_l + C_a) + 1/R_a$.

Рассмотрим сначала случай, когда $R_a \rightarrow \infty$. Тогда характеристика не зависит от частоты (в диапазоне частот, много ниже частоты любого механического резонанса керамического элемента) и определяется по формуле

$$e_a = e_{in} \left[\frac{C}{C + C_l + C_a} \right]. \quad (3.36)$$

Для сохранения чувствительности, соответствующей режиму холостого хода и определяемой формулами (3.30) и (3.33), значение емкости гидрофона должно существенно превышать сумму значений емкости кабеля и емкости на входе усилителя.

Кабели, которые используются для подключения гидрофонов, могут быть либо коаксиальными, либо двухжильными экранированными. Значения емкости на единицу длины составляют для них от $5 \cdot 10^{-11}$ до $3 \cdot 10^{-10}$ Ф/м для коаксиальных кабелей и двухжильных проводов соответственно. У высококачественных усилителей с большим значением импеданса емкость на входе обычно составляет $20 \cdot 10^{-12}$ Ф.

Рассмотрим теперь радиально поляризованный керамический элемент (см. пп. 3.2.3). Чувствительность в режиме холостого хода составляет 198,2 дБ//В/мкПа, а емкость — 0,0176 мкФ. Предположим, что емкость кабеля равна $3,33 \cdot 10^{-10}$ Ф/м, а усилителя — $20 \cdot 10^{-12}$ Ф. Уменьшение напряжения, обусловленное емкостью на входе усилителя и емкостью кабеля, определяется по формуле

$$\begin{aligned} e_a/e_{in} &= C/(C + C_l + C_a) = \\ &= 0,0176/(0,0176 + 0,0001l), \end{aligned} \quad (3.37)$$

где l — длина кабеля. Например, при длине кабеля 6 м чувствительность уменьшается на 1 дБ, а при 22 м — на 3 дБ. Конструктор системы может

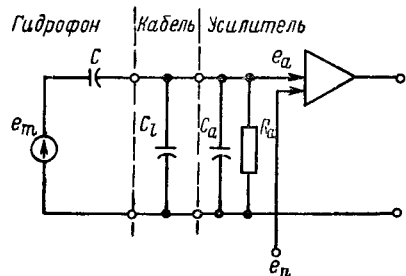


Рис. 3.9. Эквивалентная схема, включающая гидрофон, соединительный кабель и усилитель

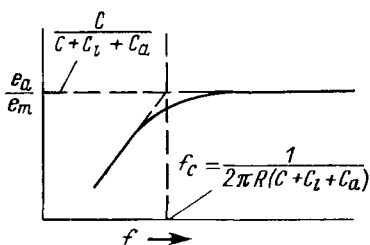


Рис. 3.10 Частотная характеристика схемы, включающей гидрофон, соединительный кабель и усилитель

$20 \cdot 10^{-12}$ Ф. Из формулы (3.37) следует затухание $l_a/e_{in} = 0,000274 / (0,000924 + 0,00015l)$.

При нулевой длине кабеля потеря чувствительности составит 0,6 дБ по сравнению со значением для режима холостого хода. Длина кабеля 1,8 м дает потерю чувствительности 3 дБ. Очевидно, что для сохранения чувствительности этого типа гидрофона усилитель должен быть расположен как можно ближе к пьезокерамике.

Возвратимся к выражению (3.35) и примем, что R_a имеет конечное значение. Частотная характеристика напряжения на выходе, отнесенная к напряжению на входе, будет иметь вид

$$e_a/e_{in} = (j\omega R_a C) / [1 + j\omega R_a (C + C_l + C_a)]. \quad (3.38)$$

Эта зависимость показана на рис. 3.10. Шунтирующее сопротивление вызывает спад на низких частотах. Значение частоты f_c на изгибе графика определяется по формуле

$$f_c = 1 / [2R_a\pi (C + C_l + C_a)]. \quad (3.39)$$

Шунтирующее сопротивление определяется в этом случае входным импедансом усилителя. Любые дополнительные источники утечки, приводящие к изменению сопротивления в кабеле или гидрофоне, следует учитывать при определении характеристики приемника в области низких частот.

Типовой высококачественный усилитель с большим значением входного импеданса может иметь $R_a \geq 100$ МОм. Очевидно, что для получения такого результата следует предпринимать меры по перекрытию путей утечки тока

3.2.5. Влияние шумов усилителя

В результате усиления сигнал на выходе устройства представляет собой линейную комбинацию входного сигнала от гидрофона и электрической помехи, связанной с входным шумом усилителя. Устройство должно обеспечивать превышение сиг-

увеличить длину кабеля, подбирая тип, обладающий меньшей емкостью, или выбирая гидрофон большей емкости (увеличение длины керамического цилиндра вдвое дает удвоение C).

Для тангенциально поляризованного элемента (см. п. 3.2.3) его емкость составляет 0,000275 мкФ, а чувствительность — 174,4 дБ/В/мкПа. В этом случае емкость коаксиального кабеля предполагается равной 5×10^{-11} Ф/м, а входа усилителя —

нала над электрической помехой. Минимальное значение отношения сигнал/помеха (ОСП) зависит от назначения устройства. Обычно принимается, что превышение уровня сигнала над уровнем помехи должно составлять не менее 10 дБ.

Изготовители малошумных усилителей (или предусилителей), пригодных для использования гидрофонов с керамическими элементами, обеспечивают уровни помех, определяемые по графикам на рис. 3.11. Среднеквадратичные значения уровня помехи по ординате определены в полосе 1 Гц и выражены в децибелах относительно СКЗ напряжения в 1В. Для получения действительного значения напряжения помехи необходимо разделить значение ординаты на 20 и взять антилогарифм. Уровень помехи быстро увеличивается по мере уменьшения емкости источника или частоты сигнала.

Влияние импеданса источника на уровень электрической помехи усилителя должно рассматриваться при сравнении характеристик системы с гидрофонами, работающими в режимах радиальных и тангенциальных колебаний. Для фиксированной амплитуды СКЗ синусоидального давления входного сигнала, равной 1 мкПа, отношение (в децибелах) мощности сигнала к мощности электрической помехи на входных клеммах ОСП определяется разностью между значениями чувствительности гидрофона H на входе усилителя и уровня помехи (см. рис. 3.11), т. е.

$$\text{ОСП} = H - N_a, \text{ дБ/мкПа.} \quad (3.40)$$

Для получения значения ОСП при любом другом уровне давления входного сигнала следует прибавить уровень интенсивности сигнала на входе, вычисленный относительно эталонного

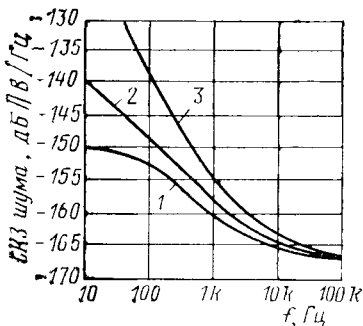


Рис 3.11. Входной шум предварительного усилителя гидрофона, при коротком замыкании (1), а также с подключенной емкостью 10^{-9} Ф (2) и 10^{-10} Ф (3)

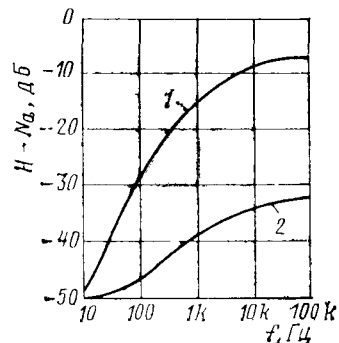


Рис 3.12. Отношение сигнал/электрический шум в полосе 1 Гц при среднеквадратичном значении акустического сигнала на входе 1 мкПа при тангенциальных (1) и радиальных (2) колебаниях преобразователя

ля

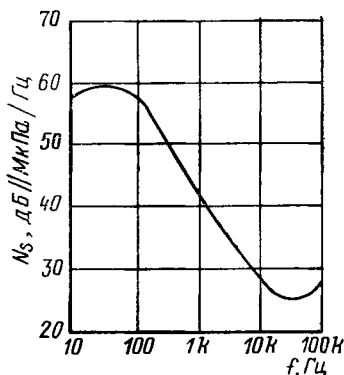


Рис. 3.13. Минимальное ожидаемое значение уровня акустического шума

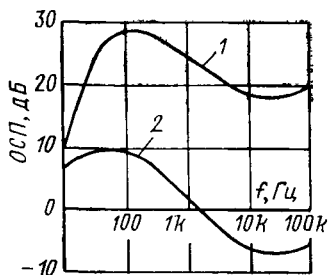


Рис. 3.14. Отношение минимального значения уровня окружающего шума к электрической помехе усилителя при тангенциальных (1) и радиальных (2) колебаниях

уровня в 1 мкПа. Значения ОСП для радиального и тангенциального режимов колебаний гидрофона, вычисленные по формуле (3.40), показаны на рис. 3.12 и в предыдущих примерах. Предполагается, что оба керамических элемента соединены непосредственно с клеммами усилителя, а шум усилителя определяется по графикам на рис. 3.11, откуда снимаются также приближенные значения помех для значений емкости 0,000274 и 0,0176 мкФ. Заметим, что на частотах ниже 10 Гц преимущество, связанное с большей чувствительностью гидрофона, работающего в тангенциальном режиме, уменьшается из-за увеличения уровня электрической помехи.

Нижняя граница ожидаемого уровня входного сигнала обычно определяется по минимальной величине *окружающего шума океана*, характеристики которого подробно рассмотрены в гл. 10. Однако следует отметить, что случайные флуктуации давления охватывают широкий частотный диапазон и зависят от целого ряда причин. Характеристики окружающего шума описывают с помощью графиков интенсивности спектральной плотности (см. пп. 2.5.3).

Предположим, что значение уровня окружающего шума определяется графиком на рис. 3.13. Цель разработки системы заключается в выборе таких гидрофонов и усилителей, чтобы при их сочетании обеспечивалось для любого значения частотного диапазона превышение выходного сигнала усилителя при подаче на его вход напряжения, соответствующего окружающему шуму (см. рис. 3.13), над выходным сигналом, когда на входе усилителя имеется только электрическая помеха. Отношение значений уровней сигнала и электрической помехи на выходе опре-

деляется путем добавления в формулу (3.40) величины N_s , снимаемой с графика на рис. 3.13, т. е.

$$\text{ОСП (выход)} = N_s + H - N_a, \text{ дБ.} \quad (3.41)$$

Значения ОСП на выходе для радиального и тангенциального режимов колебаний гидрофона показаны на рис. 3.14. Для выбранных условий гидрофон с радиальным режимом колебаний будет работать достаточно удовлетворительно на частотах до 1 кГц и неудовлетворительно в диапазоне выше 1 кГц. Тангенциальный режим колебаний обеспечивает удовлетворительные условия работы гидрофона во всем диапазоне. Рабочая характеристика гидрофона с радиальными колебаниями может быть улучшена за счет увеличения диаметра цилиндра. Например, при увеличении диаметра вдвое ОСП на выходе возрастет приблизительно на 6 дБ. Следовательно, значительно расширится и рабочий диапазон частот.

3.2.6 Верхняя граничная частота цилиндрического гидрофона

Частотная характеристика цилиндрического элемента гидрофона является постоянной на частотах ниже минимального значения резонансной частоты цилиндра. На резонансной частоте имеет место увеличение сигнала на выходе гидрофона. Однако на более высоких частотах происходит быстрый спад.

Существует три возможных типа колебаний керамической цилиндрической оболочки: *радиальный* (изменяется среднее значение радиуса); *продольный* (меняется длина) и *толщинный* (меняется толщина стенки).

При резонансных колебаниях радиального типа длина средней окружности цилиндра приблизительно равна длине волны, соответствующей скорости распространения звука в керамическом материале цилиндра. Таким образом, если D — средний диаметр цилиндра, а c — скорость продольных волн в керамике, резонансная частота этого типа колебаний определяется по формуле

$$f_r = c/\pi D. \quad (3.42)$$

Аналогичным образом для резонансных колебаний по длине и толщине цилиндра требуется, чтобы эти размеры составляли соответственно половину длины волны с учетом соответствующего значения скорости звука в керамике. В типичных случаях самое нижнее значение естественной резонансной частоты цилиндра получается в режиме радиальных колебаний¹.

¹ Только для осесимметричных колебаний. *Ред.*

Для оценки колебаний керамического цилиндра в предыдущих примерах примем следующие значения основных параметров: плотность $\rho = 7,75 \cdot 10^3$ кг/м³; податливость материала в направлении, перпендикулярном вектору поля поляризации в режиме холостого хода, $s_{11} = 14,4 \cdot 10^{-12}$ м²/Н; диаметр $D = 0,0238$ м.

Скорость звука в материале $c = \sqrt{1/\rho s_{11}} \approx 3000$ м/с. Следовательно, $f_r = 3000/0,0238\pi \approx 40\,000$ Гц. На этой резонансной частоте длина волны в воде будет равна приблизительно 0,04 м, поэтому элемент гидрофона не может считаться малым по сравнению с длиной волны.

3.3. Работа излучателя

При работе преобразователя в режиме излучения простые эквивалентные схемы на рис. 3.6 и 3.7 уже несправедливы. Акустическую мощность, передаваемую в среду, следует определять с учетом импеданса излучения на активной поверхности излучателя. Для того чтобы происходило эффективное излучение звука, керамический элемент не должен быть малым по сравнению с длиной волны. В эквивалентную схему следует включить элементы, учитывающие влияние инерции и жесткости. Наконец, для определения общей эффективности нужно учитывать механические и электрические потери в материале преобразователя и крепежной конструкции.

В качестве примера рассмотрим простой прямоугольный стержень (см. рис. 3.4). Один конец стержня жестко закреплен, а другой погружен в воду. Все другие поверхности изолированы от акустического поля в воде. На электроды стержня подается переменное напряжение, вызывающее продольные колебания, создающие акустическое поле в воде.

Электроакустическая эквивалентная схема простого излучателя, работающего вблизи резонансной частоты, дана на рис. 3.15. На электрической стороне входная проводимость определяется путем параллельного подключения емкости зажатого преобразователя C_0 и сопротивления R_0 , представляющего электрические потери. Значение C_0 рассчитывают по формуле, приведенной в подписи к рис. 3.6. Сопротивление R_0 является результатом потерь в диэлектрическом материале при наличии приложенного переменного электрического поля. Потери, которые связаны с диэлектрическими материалами, называются *тангенсом потерь* (ТП). Они находятся для заданного значения частоты, обычно равной 1 кГц, применительно к параллельной эквивалентной электрической схеме (см. рис. 3.14) по приближенной формуле

$$\text{ТП} = \text{tg } \delta = 1/(2\pi f R_0 C), \quad (3.43)$$

где $f = 1000$ Гц; C — емкость свободного элемента; R — параллельный резистор, представляющий диэлектрические потери.

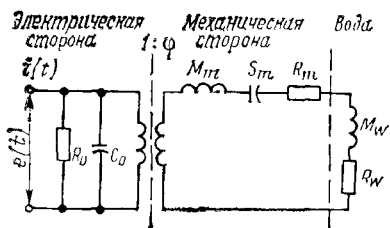


Рис. 3.15. Эквивалентная схема излучателя

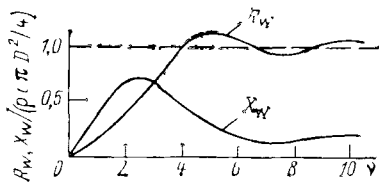


Рис. 3.16. Импеданс излучения для круглого поршневого преобразователя

Для керамических материалов, применяемых в излучателях, $ТП = 0,004 - 0,04$. Для примера примем, что $C = 0,002$ мкФ, а $ТП = 0,01$, тогда R_0 при $f = 1000$ Гц будет

$$R_0 = \frac{10^6}{(2000\pi)(0,002)(0,01)} = \frac{10^8}{4\pi} \approx 8 \text{ МОм.}$$

Потери, связанные с R_0 , в этом случае должны быть малы.

Для работы в области резонанса стержня значения S_m , M_m и φ находят соответственно из формул (3.11), (3.12) и (3.18). Для удобства они повторяются ниже:

$$S_m = (8/\pi^2) [(l_x s_m)/(l_z l_y)],$$

$$M_m = (l_z l_y l_x \rho_m)/2; \quad \varphi = dl_y/s_m.$$

Элемент R_m учитывает механические потери, возникающие при колебаниях системы, в керамическом элементе и в поддерживающей конструкции. Они характеризуются механической добротностью

$$Q_m = (2\pi f_r M_m)/R_m, \quad (3.44)$$

где f_r — резонансная частота стержня.

Для типичных керамических материалов излучателей $Q_m = 100 \dots 500$. Подстановка f_r и M_m из соотношений (3.7) и (3.12) дает

$$R_m = \pi/4 (A/Q_m) Z_{0m}, \quad (3.45)$$

где A — площадь поперечного сечения стержня; $Z_{0m} = \sqrt{\rho_m/s_m}$ — характеристический импеданс керамики.

Механические потери в конструкции, крепящей преобразователь и в области ее соединения с керамикой следует учитывать наравне с потерями в керамическом материале. Для точного учета всех потерь в общем случае необходимо проведение экспериментальных работ для каждой механической конструкции преобразователя.

Импеданс, связанный с воздействием окружающей жидкости на активную поверхность излучателя, зависит от особенностей

геометрии преобразователя. Для простой пульсирующей сферы, рассмотренной в пп. 2.4 и 2.6, импеданс определяется как произведение акустического импеданса на поверхности сферы на ее площадь. Графики действительной и мнимой частей этого импеданса показаны на рис. 2.9 и 2.14.

Для преобразователя несферической формы движение каждого элемента поверхности влияет на звуковое давление во всех остальных точках поверхности. Сила реакции должна быть получена путем интегрирования распределения результирующего давления по всей поверхности. Это представляет собой трудную математическую задачу для большинства типов преобразователей, за исключением преобразователей простых геометрических форм. Плоский круглый диск или поршневой преобразователь — это одна из простых форм, которая представляет практический интерес и где импеданс, вызванный действием жидкости (импеданс излучения), легко вычисляется. Но даже в этом случае активная (резистивная) и реактивная составляющие импеданса излучения математически должны выражаться в форме бесконечных рядов. Для расчета поверхности круглого поршневого преобразователя диаметром D активный и реактивный член уравнения, определяющего импеданс, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R_w &= \frac{\rho c \pi D^2}{4} \left(\frac{v^2}{2 \cdot 4} - \frac{v^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{v^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots \right); \\ X_w &= \frac{\rho c \pi D^2}{4} \left(\frac{4}{\pi} \right) \left(\frac{v}{3} - \frac{v^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{v^5}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

где $v = 2\pi D/\lambda$. Эти функции графически представлены на рис. 3.16.

Отметим, что функции, определяющие импеданс поршневого излучателя, очень похожи на функции, характеризующие импеданс сферического преобразователя, приведенные на рис. 2.9. Для больших значений $2\pi D/\lambda$ резистивная составляющая становится постоянной, равной произведению площади поршня на значение импеданса жидкости. В этом же случае реактивная составляющая стремится к нулю. Для $2\pi D \ll 1$ активная составляющая пропорциональна квадрату аргумента, а реактивная часть представляет собой линейную функцию аргумента.

3.3.1. Пример

Рассмотрим излучатель в виде стержня прямоугольной формы, имеющего следующие характеристики: $l_y = l_z = 0,02$ м; $l_x = 0,1$ м; $d = -123 \cdot 10^{12}$ м/В; $s_m = 10,9 \cdot 10^{-12}$ м²/Н; $\epsilon = 1300$; $\rho_m = 7,5 \cdot 10^3$ кг/м³; $\text{tg } \delta = 0,07$; $Q_m = 100$.

Примем, что активная поверхность излучателя имеет форму круглого поршня диаметром $D = 0,028$. Необходимо определить параметры эквивалентной электроакустической схемы, работающей вблизи резонансной частоты системы, и электрической эквивалентной схемы. Также следует определить и графически представить входную проводимость в области резонанса,

ширину полосы, эффективность и выходную акустическую мощность в зависимости от частоты.

Рассчитаем вначале скорость распространения звука и характеристический импеданс керамического материала, т. е.

$$c_m = \sqrt{1/(\rho_m s_m)} = 3497 \text{ м/с};$$

$$Z_{0m} = \rho_m c_m = 7500 \cdot 3497 = 2,62 \cdot 10^7 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}.$$

Из выражения (3.7) значение резонансной частоты колебаний стержня, закрепленного на одном конце, будет

$$f_r = 1/(4l_x \sqrt{\rho_m s_m}) = c_m/4l_x = 8742 \text{ Гц}.$$

Рассчитаем значения различных элементов эквивалентной схемы. Электрическая емкость свободного преобразователя $C = \epsilon \epsilon_0 l_x l_y / l_z = 1150 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$. Электрическое сопротивление диэлектрических потерь на частоте 1000 Гц $R_0 = 1/(2\pi f C \operatorname{tg} \delta) = 15,8 \cdot 10^6 \text{ Ом}$. Емкость зажатого преобразователя $C_0 = \epsilon \epsilon_0 (1 - d^2/(\epsilon \epsilon_0 s_m)) l_x l_y / l_z = 1011 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$. Механическая податливость из формулы (3.11) $S_m = (8/\pi^2) (l_x s_m) / (l_z l_y) = 2209 \cdot 10^{-12} \text{ м/Н}$. Эффективная масса $M_m = l_x l_y l_z \rho_m / 2 = 0,15 \text{ кг}$. Сопротивление механических потерь в керамике $R_m = 2\pi f_r M_m / Q_M = 82,3 \text{ кг/с}$.

Импеданс излучения для резонансной частоты механических колебаний керамического элемента рассчитывается по формуле (3.46). Длина акустической волны в воде на резонансной частоте $\lambda_r = c/f_r = 1500/8742 = 0,17 \text{ м}$.

Отсюда

$$v = (2\pi D)/\lambda_r = 1,03;$$

$$R_w = (\rho \pi D^2)/4 (v^2/8 - \dots) = 122 \text{ кг/с};$$

$$X_w = (\rho \pi D^2)/4 (4v/3\pi - \dots) = 403 \text{ кг/с};$$

$$M_w = X_w/(2\pi \cdot 8742) = 0,007 \text{ кг}.$$

Это завершает определение значений элементов эквивалентной схемы на рис. 3.15. Используя коэффициент трансформации φ , получаем значение элементов электрической схемы на рис. 3.17 в виде $\varphi = dl_y/s_m = 0,026$; $L_m = M_m/\varphi = 2,94 \text{ Н}$.

Проводимость на входных клеммах электрической эквивалентной схемы находится достаточно просто:

$$Y_m = \underbrace{\left(\frac{1}{R_0} + j\omega C_0 \right)}_{\text{Электрическая ветвь}} + \underbrace{\frac{1}{R_M + R_w + j[\omega(L_M + L_w) - 1/\omega C_M]}}_{\text{Механическая ветвь}} \quad (3.47)$$

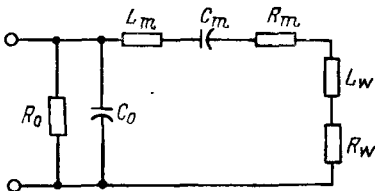


Рис. 3.17. Электрическая эквивалентная схема излучателя

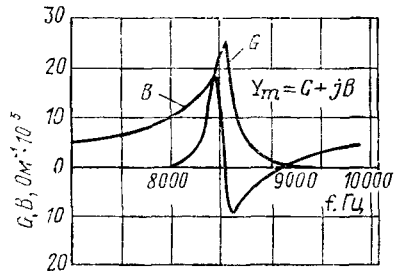


Рис. 3.18. Входная проводимость для стержневого преобразователя

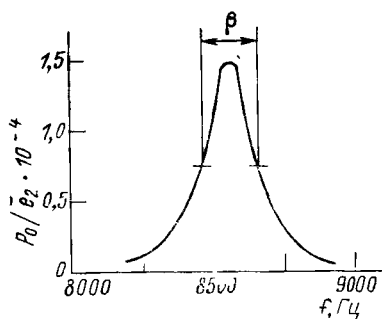


Рис. 3.19. Нормированное значение выходной акустической мощности простого излучателя

и ведет себя как слагаемое, представляющее индуктивность в узком диапазоне выше значения резонансной частоты. Для значений частот, далеких от резонанса, $G \rightarrow 0$, а B определяется значением C_0 .

Акустическая мощность, излучаемая в воду, равна произведению значения сопротивления излучения на среднееквадратичное значение тока в механическом элементе, т. е.

$$P_0 = \overline{i_M^2} R_W = \overline{e^2} |Y_M|^2 R_W. \quad (3.48)$$

Значения выходной мощности при СКЗ напряжения 1 В в зависимости от частоты показаны на рис. 3.19. Ширина полосы на уровне половины значения максимальной мощности составляет примерно 200 Гц. Эта полоса представляет также отношение резонансной частоты и Q для последовательной ветви схемы, т. е.

$$Q = 1 / [2\pi f_r C_M (R_M + R_W)]; \quad (3.49)$$

$$\beta = f_r / Q = 8569 / 41,4 = 206 \text{ Гц}. \quad (3.50)$$

Эффективность (или КПД) устройства определяется отношением акустической мощности на выходе к общей мощности на входе. Пренебрегая очень малыми электрическими потерями в диэлектрике, общую мощность на входе, нормированную относительно 1 В, можно определить по формуле

$$P_T / \overline{e^2} = |Y_M|^2 (R_W + R_M). \quad (3.51)$$

Из этого выражения эффективность или КПД $= R_W / (R_W + R_M) = 2389 / 4000 = 0,6$ или 60 %.

3.3.2. Конструкции излучателей

Как и для приемников цилиндрическая форма принимается за основу для ряда конструкций излучателей. Например, керамический кольцевой излучатель имеет сегментную цилиндрическую форму (см. рис. 3.8, б). Керамические сегменты отделяются друг от друга проводящей поверхностью. Сегменты имеют тангенциальную поляризацию и плотно прижаты друг к другу.

В очень распространенной конструкции излучателя используется набор цилиндрических элементов с продольной поляризацией

Подстановка численных значений, определяемых для каждого члена в выражении (3.47), позволяет рассчитать и построить графики параметров G и B входной проводимости $Y_m = G + jB$ в резонансной области, показанные на рис. 3.18. Виден резкий максимум для члена, описывающего вещественную часть проводимости на резонансной частоте системы, равной 8569 Гц. Значение электрической проводимости в области резонанса определяется поведением члена, описывающего механическую часть системы. Последовательный резонанс механической части приводит к быстрому изменению значения мнимой части в области резонансной частоты. Для рассматриваемого частного случая B меняет знак на обратный и

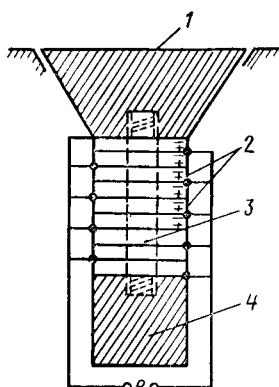
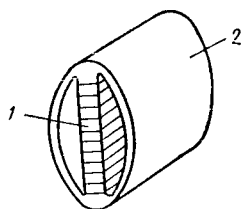


Рис. 3.21. Изгибный преобразователь:
1 — керамический стержень; 2 — алюминиевая эллиптическая оболочка



← Рис. 3.20. Конструкция излучателя:
1 — внешняя поверхность головной части круглого поршневого излучателя; 2 — цилиндрические керамические элементы, поляризованные в продольном направлении; 3 — стальной армирующий стержень, 4 — хвостовая масса излучателя

(см. рис. 3.8, в). Конструкция излучателя такого типа (преобразователь Тонпилза) показана на рис. 3.20. Пьезокерамические элементы составного стержня подбирают так, чтобы в соседних элементах направления поляризации электрического поля были противоположными. Поэтому электрические элементы соединяются параллельно, а механические колебания происходят последовательно. Такой принцип позволяет конструктору достаточно точно выбирать входной электрический импеданс устройства.

Механический стержень, проходящий внутри керамических колец, соединяет основание излучателя (масса, присоединенная к преобразователю) с колеблющейся поверхностью и обеспечивает плотное сжатие элементов. Активная поверхность излучателя (передняя масса) представляет собой толстую металлическую пластину в виде круглого поршня с плоской поверхностью. Значение массы перед преобразователем должно определяться при расчете резонансной частоты колебаний системы с учетом эффективной массы пьезокерамических элементов и нагрузки окружающей жидкости.

Детальные электроакустические эквивалентные схемы для излучателей, состоящих из набора керамических дисков с продольной поляризацией, разработаны Мартином [4...6]. Механические характеристики каждого диска моделируются с помощью Т-образных участков схемы, когда каждый элемент представлен с помощью набора индивидуальных Т-элементов. Электрическое питание подается на все элементы, соединенные параллельно. Очевидно, что работа такой системы сложнее ранее описанных эквивалентных схем. Однако в области резонанса поведение системы часто адекватно и описывается с использованием эквивалентной схемы, изображенной на рис. 3.15, при условии, что параметры элементов соответственно выполнены заново или определены экспериментально.

Излучатель другого типа, составленный из продольно поляризованных керамических элементов, называется *изгибным пульсирующим* [7]. Его конструкция показана на рис. 3.21. Элементы располагаются вдоль большой оси металлической оболочки, выполненной в виде эллипса. Для их установки эллипс сжимается вдоль малой оси при растяжении большой. Набор керамических элементов с несколько большими габаритами, чем длина главной оси эллипса, вставляется внутрь каркаса, что обеспечивает постоянную сжимающую (армирующую силу, действующую вдоль керамического элемента). Для получения требуемого значения силы сжатия на оконечностях набора керамических элементов устанавливают прокладки.

В излучателе изгибного пульсирующего типа оболочка эллиптической формы действует как механический преобразователь импеданса. Небольшая скорость колебаний оконечностей набора керамических элементов дает большую скорость колебаний основных поверхностей эллипса. В результате преобразования увеличиваются сопротивление излучения и эффективная масса водной нагрузки. Это позволяет разработчику улучшить согласование импедансов между излучателем и соприкасающейся жидкостью в целях повышения КПД и увеличения ширины полосы частот.

3.3.3. Кавитация

Максимум излучаемой акустической мощности ограничивается обычными температурными, механическими и электрическими пределами. Пиковое значение напряжения ограничивается диэлектрическими параметрами керамики и электрическими соединениями. При очень сильном возбуждении излучателя внутренние механические и диэлектрические потери приводят к возрастанию температуры до неприемлемой. Дополнительные ограничения возникают из-за кавитации воды при колебаниях поверхности излучателя. На малых глубинах кавитация может ограничивать излучаемую мощность в гораздо большей степени, чем действие других факторов.

Переменное акустическое давление, создаваемое в воде поверхностью излучателя, накладывается на статическое давление окружающей среды. При разрежении значение акустического давления становится меньше окружающего давления. При увеличении акустического давления абсолютное значение статического давления окружающей среды может уменьшиться до нуля или стать отрицательным. Тогда среда в буквальном смысле разрывается, образуя большое число пузырьков из растворенных в воде газов. *Кавитацией* называется процесс образования и захлопывания пузырьков.

При наличии кавитации появляется несколько нежелательных эффектов. Большое число пузырьков вблизи поверхности из-

лучателя действует как полностью огражающая граница и, следовательно, существенно уменьшает импеданс. Этот эффект ограничивает излучаемую акустическую мощность на уровне появления кавитации. При дальнейшем увеличении мощности на входе излучателя выходная акустическая мощность может уменьшаться фактически за счет быстрого роста внутренних потерь.

Вблизи порога кавитации образование пузырьков при отрицательном полупериоде колебаний приводит к образованию второй гармоники акустической волны. Это искажение становится заметным до того, как появление пузырьков можно наблюдать невооруженным глазом. Следовательно, данный эффект можно использовать как индикатор для предсказания кавитации.

Сильное воздействие колеблющихся и захлопывающихся пузырьков при кавитации может приводить к разрушению поверхности преобразователя. Наконец, коллапсирующие пузырьки создают значительный акустический шум, который мешает излучателю.

Интенсивность акустического излучения при пороге кавитации является функцией прежде всего глубины расположения излучателя (гидростатического давления), хотя можно учитывать зависимости и от многих других факторов. На поверхности моря абсолютное значение давления уменьшается до нуля, если максимум акустического давления равен 1 атм (10^5 Н/м²). Определим значение интенсивности излучения T для порога кавитации в этих условиях:

$$T = \frac{p^2 m}{2\rho c} = \frac{(10^5)^2}{2(1,5 \cdot 10^6)} = 0,33 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2 = 0,33 \text{ Вт/см}^2.$$

Если поршневой преобразователь диаметром 152 мм работает вблизи поверхности воды, то максимальное значение излучаемой акустической мощности вследствие кавитации ограничивается значением 60 Вт. Так как порог кавитации пропорционален квадрату окружающего давления, то значение излучаемой акустической мощности быстро увеличивается с глубиной. На горизонте 30 м давление составляет около 4 атм. При такой глубине преобразователь может излучать 960 Вт, т. е. в 16 раз больше, чем на поверхности.

Предположим, что при кавитации общая излучаемая акустическая мощность P распределена равномерно по эффективной поверхности преобразователя A . При пороговом значении T на поверхности моря значение максимальной излучаемой акустической мощности в зависимости от глубины можно определить по формуле

$$P = AT(1 + h/33)^2, \quad (3.52)$$

где h — глубина в футах (1 фут = 0,3 м).

Порог кавитации понижается при наличии в воде чрезмерного количества растворенных газов или микроскопических

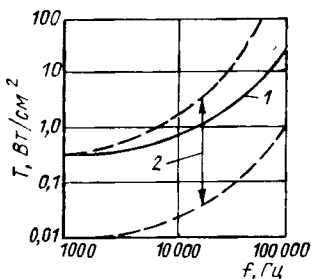


Рис. 3.22. Порог кавитации преобразователя в зависимости от частоты в пресной воде при давлении 1 атм по результатам работ [12, 13]: 1 — среднее значение; 2 — пределы по опубликованным данным

пузырьков. Это затрудняет точное определение порога кавитации преобразователя, работающего вблизи поверхности океана. Проблема усложняется также тем, что акустическая мощность может распределяться по колеблющейся поверхности неравномерно. Локальные «горячие» точки на поверхности излучателя могут вызывать кавитацию даже тогда, когда среднее значение излучаемой мощности гораздо ниже порога кавитации.

Процесс образования пузырьков при кавитации является конечным во времени. При увеличении частоты колебаний время, соответствующее отрицательным полупериодам акустического давления, уменьшается. Это приводит к тому, что для создания кавитации требуется гораздо большее значение звукового давления.

На рис. 3.22 даны графики значений порога кавитации на поверхности пресной воды в зависимости от частоты, из которых видно его быстрое увеличение на частотах более 10 кГц. На частоте 30 кГц среднее значение порога кавитации составляет примерно 1 Вт/см². Однако следует отметить широкий диапазон разброса приведенных средних значений. Он является следствием изменений параметров морской воды из-за наличия растворенных газов и воздушных пузырьков, применения различных критериев оценки результатов измерений и методов исследований.

При использовании посылок импульсов конечной длительностью 5 мс порог кавитации увеличивается, причем при уменьшении длительности импульса пороговое значение кавитации растет.

Задачи

3.1. В качестве материала преобразователей часто используют титанат бария, имеющий плотность $5,55 \cdot 10^3$ кг/м³ и податливость $8,3 \cdot 10^{-12}$ м²/Н. Рассчитайте характеристический импеданс и скорость распространения продольных волн. Сравните их с соответствующими параметрами для воды.

3.2. Стержень из титаната бария жестко закреплен на одном конце. Продольная сила синусоидального характера приложена к его другому концу. Предполагается, что наименьшее значение частоты, при которой входной импеданс равен нулю, составляет 30 кГц. Определите длину стержня.

3.3. Диэлектрическая постоянная титаната бария равна 1200, а пьезомодуль составляет $54 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н. Используя характеристики материала ЦТС-5, приведенные в пп. 3.2.3, сравните чувствительность гидрофонов в режиме холостого хода, выполненных в виде простого продольного стержня из двух разных названных выше материалов.

3.4. Гидрофон в виде цилиндра с радиальной поляризацией имеет электрическую емкость свободного от напряжений элемента 0,02 мкФ и собственную резонансную частоту колебаний 25 кГц. Принимая длину цилиндра

из керамики ЦТС-5А равной 50,8 мм, определите его диаметр и толщину стенок, а также чувствительность гидрофона в режиме холостого хода.

3.5. Гидрофон в задаче 3.4 соединен с предусилителем посредством кабеля, имеющего емкость $16,7 \cdot 10^{-11}$ Ф/м. Считая входную емкость предусилителя равной $20 \cdot 10^{-12}$ Ф, определите длину кабеля, который снизит эффективную чувствительность гидрофона на 1 дБ.

3.6. Цилиндрический гидрофон из ЦТС-5А с радиальным режимом колебаний имеет резонансную частоту 10 кГц. Считая толщину стенок малой по сравнению с диаметром цилиндра, определите максимально возможное значение чувствительности данной конструкции.

3.7. Используя выражение (3.33), можно показать, что чувствительность цилиндрического гидрофона с тангенциальным режимом колебаний стремится к бесконечности, когда b/a приближается к единице. Однако емкость гидрофона приближается к нулю при том же условии. В результате значение внутреннего импеданса стремится к бесконечности. Более полезное описание условий преобразования энергии для гидрофона тангенциального типа определяется путем умножения чувствительности из формулы (3.33) на емкость из уравнения (3.34). Определите форму этого произведения, когда $b/a \rightarrow 1$, используя аппроксимацию.

3.8. Цилиндрический гидрофон, работающий в тангенциальном режиме, имеет резонансную частоту 30 кГц. Емкость устройства принимается равной 10-кратному значению входной емкости предусилителя, составляющей $20 \cdot 10^{-12}$ Ф. Используя результаты расчета задачи 3.7, определите предельное значение чувствительности гидрофона для керамики ЦТС-5А; $N = 6$ и $l = 2b$.

3.9. В соответствии с рис. 3.9 предположим, что $C = 0,015$ мкФ; $C_l + C_a = 0,005$ мкФ, $e_n = 3 \cdot 10^{-8}$ В (СКЗ) в полосе 1 Гц. При спектральном уровне акустической помехи на входе, равном 60 дБ/1 мкПа/Гц, определите требуемую чувствительность гидрофона в режиме холостого хода для получения ОСП = +10 дБ на входе предусилителя. При коэффициенте усиления предусилителя 20 дБ определите СКЗ напряжения в полосе 1 Гц на выходе усилителя.

3.10. Ненаправленный излучатель, работающий на частоте 30 кГц, имеет эффективную площадь поверхности 30 см². Для порога кавитации 1 Вт/см² определите минимальную глубину, на которой будет нормально работать в докавитационном режиме излучатель с уровнем 195 дБ/1 мкПа/м. Определите требуемую площадь излучающей поверхности, при которой начнется кавитация на глубине 6 м.

Список литературы

1. *Weston D. E.* Underwater Explosions as Acoustic Sources. Proc. Phys. Soc. Lond., 1960, vol. 76, (Pt. 2). P. 233.
2. *Bouyoucos J. V.* Self-Excited Hydrodynamic Oscillators. Acoustic Research Laboratory Harvard University, 1955, TM No. 36, July 31.
3. *Langevin R. A.* The Electro-acoustic Sensitivity of Cylindrical Ceramic Tubes. J. Acoustic. Soc. Am., May 1954, vol. 26, No. 1, P. 421.
4. *Martin G. E.* Vibrations of Longitudinally Polarized Ferroelectric Cylindrical Tubes, Apr. 1963, J. Acoust. Soc. Am., vol. 35, No. 4, P. 510—521.
5. *Martin G. E.* On the Theory of Segmented Electromechanical Systems. J. Acoustic. Soc. Am., July 1964, vol. 36, No. 7. P. 1366—1370
6. *Martin G. E.* Vibrations of Coaxially Segmented Electromechanical Systems. J. Acoust. Soc. Am., Aug. 1964, vol. 36, No. 8.
7. *Toulis W. J.* Design Problems for High Power Flexensional Transducer. U. S. Navy J. Underwater Acoust., Apr. 1965, vol. 15, No. 2, Pt. III, Appendix D.
8. *Urick R. J.* Principles of Underwater Sound for Engineers 1975, 2nd ed. New York: Mc Graw-Hill Book Company, Chap. 4.

9. *Albers V. M.* Underwater Acoustics Handbook — II, 1965, University park, Pa.: The Pennsylvania State University Press, Chaps. 10—12.

10. *Woollett R. S.* Ultrasonic Transducers. Part. 2, Underwater Sound Transducers. Ultrasonics, Oct. 1970, vol. 3, P. 243—253.

11. *Hueter T. F.* Twenty Years in Underwater Acoustics: Generation and Reception. J. Acoust. Soc. Am., 1972, vol. 51, No. 3 (Pt. 2). P. 1025—1040.

12. *Flynn H. G.* Physics of Acoustic Cavitation in Liquids, in Physical Acoustics, 1964, vol. 1, Part B, W. P. Mason, Ed. Academic Press, Inc, New York. P. 57—172.

13. *Esche R.* Schwingungskavitation in Flüssigkeiten, Akust. Beih. (Acustica), 1952, vol. 4.

Глава 4.

ОТРАЖЕНИЕ, РАСПРОСТРАНЕНИЕ И РЕФРАКЦИЯ

В главе 2 были приведены уравнения, определяющие распространение плоских и сферических акустических волн в идеальной однородной среде. В действительности факторы, влияющие на распространение акустических волн в океане, изменяются в пространстве по всем трем направлениям и могут меняться во времени. Наиболее важные изменения акустических параметров среды происходят при изменении глубины. В океанической среде возможно формирование горизонтальной слоистой структуры, начиная с границы раздела воздух — вода на поверхности моря и заканчивая осадками и коренными породами дна океана.

В этой главе рассмотрено влияние границ раздела между слоями жидкости с различными характеристиками на распространение плоской акустической волны. В общем случае часть энергии плоской волны отражается от границы раздела, а часть проходит через нее. При этом возможно изменение направления движения фронта волны, называемое рефракцией. Особое влияние на распространение акустической энергии на большие расстояния оказывают потери, происходящие при отражении от поверхности и дна океана. В качестве введения в проблему определения особенностей распространения траекторий акустических лучей в океане рассматривается рефракция, возникающая в случае, если скорость звука является линейной функцией глубины. Целью этого анализа является построение акустических лучевых картин, определяющих изменение интенсивности акустического поля при изменении глубины и расстояния.

4.1. Нормальное падение звука

Предположим, что среда состоит из двух слоев жидкости (рис. 4.1). Акустическими характеристиками, необходимыми для определения характеристических импедансов Z_1 и Z_2 , соответствующих плоским волнам, являются плотности слоев и скорости распространения звука.

Плоская акустическая волна с давлением p_i распространяется в положительном направлении по оси z (вниз) перпендикулярно границе раздела жидкости. При $Z_1 \neq Z_2$ отраженная волна с давлением p_r , образующаяся на границе раздела жидкости, распространяется по оси z в отрицательном направлении. Часть энергии падающей волны попадает в слой жидкости 2, образуя прошедшую волну с давлением p_t , распространяющуюся по оси z в положительном направлении. Определим соотношения между p_i , p_r и p_t с использованием характеристических импедансов Z_1 и Z_2 .

Запишем формулы для определения давления с использованием комплексных синусоидальных функций времени и расстояния:

$$\left. \begin{aligned} p_i(t, z) &= A_1 \exp[j\omega(t - z/c_1)]; \\ p_r(t, z) &= B_1 \exp[j\omega(t + z/c_1)]; \\ p_t(t, z) &= A_2 \exp[j\omega(t - z/c_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Фактические значения давлений определяются с помощью вещественных частей выражений (4.1).

Соотношения между A_1 , A_2 и B_1 определяются из физических условий, которые удовлетворяются на границе раздела жидкостей. На границе раздела двух жидкостей акустическое давление и составляющая колебательной скорости, перпендикулярная этой границе, должны быть непрерывны.

Таким образом, для $z = 0$ можно записать

$$p_i(t, 0) + p_r(t, 0) = p_t(t, 0). \quad (4.2)$$

Аналогичным образом результирующее значение колебательной скорости в жидкости 1 по направлению оси z должно быть равно колебательной скорости в жидкости 2 при $z=0$:

$$u_i(t, 0) + u_r(t, 0) = u(t, 0). \quad (4.3)$$

Из уравнений (4.2) и (4.1) при $z=0$ получаем

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (4.4)$$

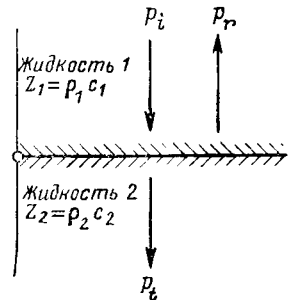


Рис. 4.1. Направление плоских волн, перпендикулярных границе

В главе 2 было показано, что давление в плоской акустической волне и колебательная скорость связаны через характеристический импеданс [см. формулы (2.38) и (2.39)]. Следовательно, при $z = 0$ имеем

$$\left. \begin{aligned} u_i(t) &= -p_i(t)/Z_1; & u_r(t) &= -p_r(t)/Z_2; \\ u_t(t) &= \frac{p_t(t)}{Z_2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Подставляя соотношение (4.5) в (4.3), получим $[p_i(t) - p_r(t)]/Z_1 = p(t)/Z_2$ или

$$(A_1 - B_1)/Z_1 = A_2/Z_2. \quad (4.6)$$

Используя формулу (4.4), исключим A_2 в выражении (4.6) и получим следующее соотношение между A_1 и B_1 :

$$B_1/A_1 = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1) = (\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1)/(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1). \quad (4.7)$$

Заметим, что последняя формула, определяющая отношение амплитуд давлений отраженной и падающей волн, аналогична выражению (2.13), которое описывает отношение амплитуд напряжений отраженной и падающей волн в электрической линии передачи.

Уравнение (4.4) можно также использовать для того, чтобы исключить B_1 из выражения (4.6) и получить соотношение между амплитудами давлений падающей и прошедшей волн. Таким образом,

$$A_2/A_1 = 2Z_2/(Z_2 + Z_1). \quad (4.8)$$

Коэффициенты отражения и прохождения, определяемые с помощью соотношений (4.7) и (4.8), являются вещественными величинами, так как характеристические импедансы являются вещественными. Заметим, однако, что отношение, определяемое выражением (4.7), может быть положительным или отрицательным в зависимости от отношений Z_1 и Z_2 .

Если $Z_2 > Z_1$, то коэффициент отражения является положительным, а давления падающей и отраженной волн суммируются на поверхности раздела. В пределе, когда Z_2 приближается к бесконечности, коэффициент отражения стремится к единице. В результате давление на поверхности раздела удваивается по отношению к давлению в падающей волне. Такой результат аналогичен соотношениям для разомкнутого конца электрической линии передачи.

Если $Z_2 < Z_1$, то коэффициент отражения является отрицательным и давления в падающей и отраженной волнах сдвинуты относительно друг друга на 180° . При Z_2 , стремящемся к нулю, коэффициент отражения приближается к -1 , что соот-

ведствует полной взаимной компенсации в падающей и отраженной волнах на границе раздела. Это соответствует короткозамкнутой электрической линии передачи с нулевым значением напряжения на клеммах замкнутого конца.

Результирующее давление в любой точке выше границы раздела (см. рис. 4.1) получается в виде суммы падающей и отраженной волн. Из соотношений (4.1) и (4.7) для $z < 0$ можно записать $p(t, z) = p_i + p_r = A_1 \{ \exp[j\omega(t + z/c_1)] \}$, где $R = B_1/A_1 = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$. Вещественная часть этого выражения имеет следующий вид:

$$\text{Re} [p(t, z)] = \pm A_1 [(1 + R)^2 \cos^2(\omega z/c_1) + (1 - R)^2 \sin^2(\omega z/c_1)]^{1/2} \times \times \cos \{ \omega t + \text{tg}^{-1} [(1 - R)/(1 + R) \text{tg}(\omega z/c_1)] \}. \quad (4.9)$$

Пусть $R = +1$, что соответствует очень жесткой границе раздела ($Z_2 \gg Z_1$). Из формулы (4.9) в этом случае получим $\text{Re} [p(t, z)] = A_1 [2 \cos(\omega z/c_1)] \cos \omega t = A_1 [2 \cos(2\pi z/\lambda)] \cos \omega t$, (4.10) где $\lambda = c_1/f$.

Выражение (4.10) описывает давление в стоячей волне выше границы раздела, аналогичное напряжению в стоячей волне в линии передачи, действующей в режиме холостого хода (см. п. 2.1). Давление имеет максимальное значение $|2A_1|$ на границе раздела и в других точках, где z кратно значению $\lambda/2$, т. е.

$$|p(t, z)| = |2A_1| \text{ при } z = n\lambda/4, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Давление равно нулю для z , кратных нечетному числу значений $\lambda/4$:

$$p(t, z) = 0 \text{ при } z = m\lambda/4, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (4.12)$$

Для значения $R = -1$, соответствующего акустически мягкой или свободной поверхности ($Z_2 \ll Z_1$), получается выражение, аналогичное (4.10), за исключением того, что давление равно нулю на границе раздела. Таким образом, для $R = -1$ получим

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} [p(t, z)] &= A_1 [2 \sin(2\pi z/\lambda)] \sin \omega t; \\ p(t, z) &= 0 \text{ при } z = n\lambda/2, \quad n = 0, 1, 2 \dots; \\ |p(t, z)| &= |2A_1| \text{ при } z = m\lambda/4, \quad m = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Распределение давления в стоячей волне для мягкой и жесткой поверхностей показано на рис. 4.2.

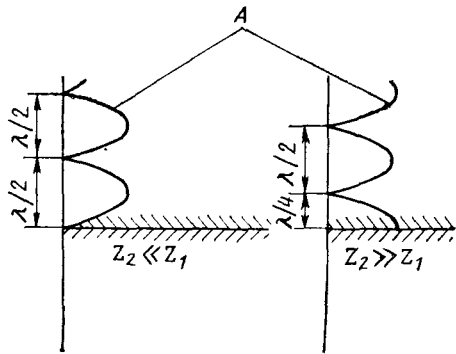


Рис. 4.2. Давление стоячих волн выше отражающей границы ($Z_2 \ll Z_1$) и мягкой границы раздела ($Z_2 \gg Z_1$)

4.1.1. Нормальные моды колебаний

Рассмотрим стоячую волну, возникающую вблизи жесткой поверхности. Амплитуда давления в стоячей волне равна нулю в точке, расположенной на расстоянии четверти длины волны от отражающей поверхности. Следовательно, в этой точке импеданс равен нулю. Поэтому в плоскости, параллельной отражающей поверхности и находящейся на указанном расстоянии от нее, граничное условие будет соответствовать условию на акустически мягкой поверхности.

Тот же результат должен сохраняться и на расстояниях $3\lambda/4$, $5\lambda/4$... выше отражающей поверхности. С другой стороны, если отражающая свободная поверхность расположена в любой другой точке, то невозможно одновременно удовлетворить граничные условия на верхней и нижней границах, используя полученные распределения амплитуд давления в стоячих волнах. Ситуация при наличии двух границ показана на рис. 4.3.

Модель с двумя границами аналогична ситуации, наблюдаемой в океане. Верхняя граница представляет поверхность раздела вода — воздух, а нижняя — дно. Представляя дно океана в качестве абсолютно жесткой поверхности, мы допускаем слишком большое упрощение, которое делает полученные результаты практически бесполезными.

Обозначим L глубину слоя жидкости. Найдем допустимые значения длин волн, которые будут совпадать с распределением амплитуды давления в стоячей волне. Они определяются по формуле

$$\lambda_j = 4L/j \quad j = 1, 3, 5, \dots \quad (4.14)$$

Допустимые стационарные состояния называются *нормальными модами колебаний* для канала глубиной L и заданными граничными условиями. Для j -й моды с давлением, определяемым по формуле $p_j(t, z) = A \{2 \cos [(2\pi z)/\lambda_j]\} \sin \omega t$, зависящая от z часть выражения называется *характеристической функцией*.

Для предложенных граничных условий характеристическая функция определяется в виде

$$\Psi_j(z) = 2 \cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda_j} \right), \quad j = 1, 3, 5, \dots \quad (4.15)$$

Теперь мы должны показать, что характеристическая функция получается в виде стационарных решений уравнения плоской волны при условии распространения сину-

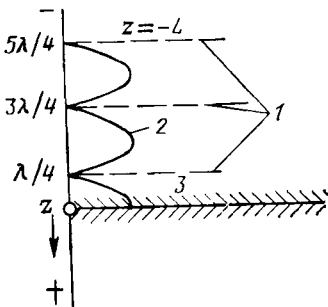


Рис. 4.3 Распределение давления между жесткой и мягкой поверхностями;

1 — отражающая граница, 2 — стоячая волна, 3 — жесткая граница

сондальной плоской волны перпендикулярно к границам. Принимаем, что распределение давления определяется выражением

$$p(t, z) = \Psi(Z) \cos(\omega t - \Theta), \quad (4.16)$$

где Ψ — произвольная функция z , а Θ — произвольная фаза. Сформулированные граничные условия требуют, чтобы амплитуда давления была максимальной на дне и равной нулю на поверхности.

Пусть вертикальным координатам дна и поверхности соответствуют значения $z = 0$ и $z = L$, тогда

$$\Psi(0) = \Psi_{\max} \quad \text{и} \quad \Psi(-L) = 0. \quad (4.17)$$

Уравнение плоской волны при распространении вдоль оси будет иметь вид

$$\partial^2 p / \partial t^2 = c^2 \partial^2 p / \partial z^2. \quad (4.18)$$

Дважды дифференцируя выражение (4.16) по t и z , получим

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 p / \partial t^2 &= -\omega^2 \Psi(z) \cos(\omega t - \Theta); \\ \partial^2 p / \partial z^2 &= \partial^2 \Psi / \partial z^2 \cos(\omega t - \Theta). \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Подстановка (4.19) в (4.18) позволяет получить $\partial^2 \Psi / \partial z^2 + (\omega^2 / c^2) \Psi = 0$.

Заменяя ω / c на $2\pi / \lambda$, запишем

$$\partial^2 \Psi / \partial z^2 + (4\pi^2 / \lambda^2) \Psi = 0. \quad (4.20)$$

Формула (4.20) представляет собой хорошо известное дифференциальное уравнение простого гармонического движения с общим решением вида

$$\Psi(z) = a \cos(2\pi z / \lambda) + b \sin(2\pi z / \lambda). \quad (4.21)$$

Принимая $\Psi(0) = \Psi_{\max}$, получим

$$\Psi_{\max} = a. \quad (4.22)$$

Так как максимальное значение Ψ также равно $(a^2 + b^2)^{1/2}$, то получается, что $b = 0$. Следовательно,

$$\Psi(z) = \Psi_{\max} \cos(2\pi z / \lambda). \quad (4.23)$$

Для частного случая Ψ_{\max} равно удвоенному значению амплитуды падающей либо отраженной волны.

Требование $\Psi(-L) = 0$ означает, что выражение (4.23) может быть собственным решением, только если

$$2\pi L / \lambda = j\pi / 2, \quad j = 1, 3, 5, \dots \quad (4.24)$$

или

$$\lambda_j = 4L / j.$$

Такое решение идентично соотношению (4.14).

Поскольку каждая нормальная мода удовлетворяет граничным условиям, сумма двух или более нормальных мод также

представляет стационарное решение. Таким образом, произвольное распределение давления может быть выражено в виде бесконечной суммы нормальных мод. Для граничных условий, представленных на рис. 4.3, общим решением будет

$$p(t, z) = \sum_i a_i \cos(2\pi z/\lambda_i) \cos(2\pi f_i t - \theta_i). \quad (4.25)$$

Для других граничных условий характеристические функции могут включать как синусоидальные, так и косинусоидальные составляющие (4.21). Произвольные константы, связанные с разложением в ряд нормальных мод, вычисляются с помощью методов, связанных с разложением функций в ряд Фурье, рассмотренным в гл. 6.

Разложение функции, определяющей поле акустического давления, в бесконечный ряд нормальных волн представляет собой очень полезный аналитический прием, особенно когда длина волны не мала по сравнению с глубиной воды. Обсуждение метода нормальных мод в этом разделе касается только очень простого и ограниченного случая (т. е. плоской волны, перпендикулярной к поверхности и дну моря с очень простыми граничными условиями). В общем случае для разложения функции по нормальным модам в качестве исходного соотношения используется волновое уравнение для трехмерной области поля с произвольными граничными условиями.

Теория нормальных мод подробно освещена в работе [2].

4.2. Наклонное падение звука

Рассмотрим падение плоской акустической волны на жидкую границу под произвольным углом θ_i к плоскости (рис. 4.4). В оптике углы в общем случае измеряются относительно перпендикуляра к границе. В акустике океана основные границы являются горизонтальными и

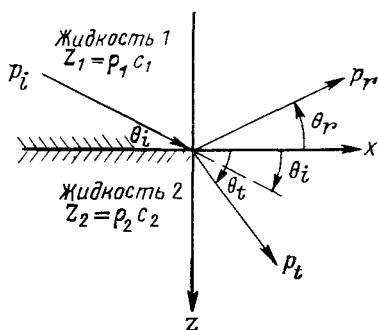


Рис. 4.4. Распространение волн через границу при наклонном падении

распространение акустических волн происходит приблизительно в горизонтальном направлении. Поэтому более удобно измерять углы направлений распространения акустических волн относительно горизонтали. Принято, что положительные углы относятся к распространению волны в нижнюю полусферу, а отрицательные — в верхнюю. Соответственно за положительное направление оси z принято направление вниз.

Для плоской волны, распространяющейся в направлении θ_i относительно оси x , расстояние s в направлении распространения можно определить по формуле $s = x \cos \theta_i + z \sin \theta_i$.

Следовательно, выражение для падающей волны можно представить в следующем комплексном виде:

$$p_i(t, x, z) = A_1 \exp \left\{ j\omega \left[t - \frac{(x \cos \theta_i + z \sin \theta_i)}{c_1} \right] \right\}.$$

Аналогично давления в отраженной и прошедшей через границу волнах будут иметь вид

$$p_r(t, x, z) = B_1 \exp \left\{ j\omega \left[t - \frac{(x \cos \theta_r + z \sin \theta_r)}{c_1} \right] \right\}, \quad (4.26)$$

$$p_t(t, x, z) = A_2 \exp \left\{ j\omega \left[t - \frac{(x \cos \theta_t + z \sin \theta_t)}{c_2} \right] \right\}. \quad (4.27)$$

На жидкой границе давление должно быть непрерывным. Таким образом, $p_i + p_r = p_t$ (при $z = 0$) или

$$\begin{aligned} A_1 \exp \left(\frac{-j\omega x \cos \theta_i}{c_1} \right) + B_1 \exp \left(\frac{-j\omega x \cos \theta_r}{c_1} \right) &= \\ &= A_2 \exp \left(\frac{-j\omega x \cos \theta_t}{c_2} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

В качестве дополнительного граничного условия примем, что колебательная скорость в направлении оси z является непрерывной. Это приводит к соотношению

$$U_i \sin \theta_i + U_r \sin \theta_r = U_t \sin \theta_t, \quad (4.29)$$

$$\text{где } U_i = A_1/Z_1; \quad U_r = B_1/Z_1; \quad U_t = A_2/Z_2.$$

При определении отношения на границе жидкости между падающей, отраженной и проходящей (преломленной) волнами полезно использовать два результата из оптики. Первый — угол отражения равен отрицательному значению угла падения¹:

$$\theta_r = -\theta_i. \quad (4.30)$$

Второй — закон Снелиуса. Он связывает углы падения и преломления (рефракции) через скорости звука в двух средах:

$$\cos \theta_i/c_1 = \cos \theta_t/c_2. \quad (4.31)$$

Подставляя (4.31) в (4.28), получим

$$\cos \theta_i/c_1 = \cos \theta_r/c_1 = \cos \theta_t/c_2. \quad (4.32)$$

Следовательно, экспоненты в выражении (4.28) равны и

$$A_1 + B_1 = A_2. \quad (4.33)$$

¹ Углы на рис. 4.4 называют углами скольжения, а не падения. *Ред.*

Аналогичным образом, подставив выражения (4.30) и (4.33) в (4.29), можем записать

$$(U_i - U_r) \sin \theta_i = U_t \sin \theta_t$$

или

$$(A_1/Z_1 - B_1/Z_1) \sin \theta_i = (A_2/Z_2) \sin \theta_t = [(A_1 + B_1)/Z_2] \sin \theta_t.$$

Отношение амплитуд отраженной и падающей волн будет

$$B_1/A_1 + (Z_2 \sin \theta_i - Z_1 \sin \theta_t)/(Z_2 \sin \theta_i + Z_1 \sin \theta_t). \quad (4.34)$$

4.2.1. Условия, при которых отсутствует отражение

Коэффициент отражения, определяемый из формулы (4.34), равен нулю, если и только если

$$Z_2 \sin \theta_i = Z_1 \sin \theta_t$$

или

$$\rho_2 c_2 \sin \theta_i = \rho_1 c_1 \sin \theta_t. \quad (4.35)$$

Отметим, что если $Z_1 = Z_2$, то отражение отсутствует только при нормальном падении. Если $Z_1 \neq Z_2$, то может существовать угол, при котором отражение не происходит. Используя закон Снелиуса (4.35), можно определить условия, необходимые для отсутствия отражения. Угол падения в этом случае определяется по формуле

$$\sin^2 \theta_i = \frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1}. \quad (4.36)$$

Угол падения, определяемый из выражения (4.36), если он существует, называется *углом полного прохождения*. Так как квадрат синуса должен находиться между 0 и +1, то такой угол будет существовать, только если числитель и знаменатель в формуле (4.36) будут иметь одинаковые знаки и знаменатель равен или больше числителя по абсолютному значению. Согласно этим условиям требуется, чтобы

$$\rho_2/\rho_1 \geq c_1/c_2 \geq 1 \quad \text{или} \quad \rho_2/\rho_1 \leq c_1/c_2 \leq 1. \quad (4.37)$$

Тривиальный случай имеет место при $\rho_1 = \rho_2$ и $c_1 = c_2$. Тогда оба условия (4.37) удовлетворяются. В этом случае обе жидкости акустически идентичны. Поэтому никакой границы между ними фактически не существует и отражение не будет происходить ни при каких условиях.

4.2.2. Другие условия

На рис. 4.4 угол преломления $\theta_t > \theta_i$, что соответствует положительной рефракции. По закону Снелиуса это условие реализуется при $c_1 > c_2$, т. е.

$$\cos \theta_i = (c_1/c_2) \cos \theta_t. \quad (4.38)$$

Следовательно, $\cos \theta_i > \cos \theta_t$ при $c_1/c_2 > 1$.

Отношение скоростей звука c_1/c_2 является *показателем преломления* второй жидкости относительно первой. В общем случае показатель преломления может изменяться от 0 до 1. В пределе, когда в выражении (4.38) отношение c_1/c_2 приближается к бесконечности, угол θ_t должен достигать 90° или направления, перпендикулярного к границе.

Предположим, что жидкость 1 — вода, а жидкость 2 — воздух. Показатель преломления воздуха относительно воды приблизительно равен 5. Поэтому при изменении θ_i в воде от 0 до 90° изменения угла θ_t в воздухе ограничены диапазоном $78 \dots 90^\circ$.

Для наблюдателя в погруженной подводной лодке источник звука, создаваемого снаружи прочного корпуса в воде, всегда кажется расположенным по направлению, перпендикулярному к корпусу, независимо от действительного направления на источник. Это и есть непосредственный результат действия большого показателя преломления в воздухе внутри прочного корпуса относительно воды снаружи. Из-за большого рассогласования импедансов на границе раздела воздух — вода энергия, излучаемая из воды в воздух, является малой частью от общей. Отражение в воде происходит почти полностью при всех углах падения.

Примем теперь $c_1 < c_2$. Из формулы (4.38) видно, что угол $\theta_t < \theta_i$, что означает отрицательную рефракцию. Так как θ_t не может быть меньше нуля, имеется критическое значение θ_i , меньше которого передача энергии в следующий слой жидкости будет равна нулю. Косинус критического угла падения равен показателю преломления, т. е.

$$\cos \theta_c = (c_2/c_1) \cos \theta_t = c_1/c_2 \quad \text{при} \quad \theta_t = 0. \quad (4.39)$$

Для $\theta_i < \theta_c$ отражение от границы является полным.

4.2.3. Коэффициент прохождения при наклонном падении

Уравнения (4.29), (4.30) и (4.33) можно использовать для получения отношения амплитуд давления проходящей и падающей волн:

$$A_2/A_1 = (2Z_2 \sin \theta_i)/(Z_2 \sin \theta_i + Z_1 \sin \theta_t). \quad (4.40)$$

4.3. Задача о прохождении звука через слоистую среду

Процессы, связанные с распространением и отражением звука в многослойной среде, являются значительно более сложными, чем в однослойной. Ниже (рис. 4.5) рассматривается

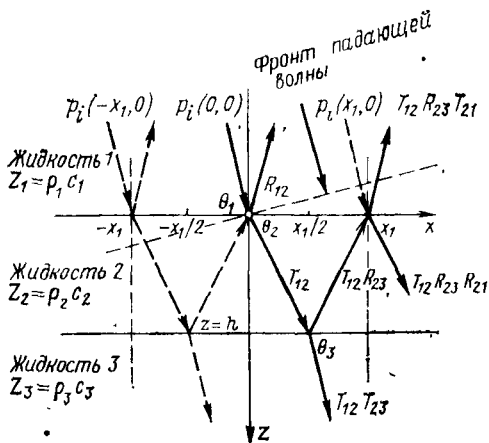


Рис. 4.5. Распространение и отражение волн при наличии двух параллельных границ

среда с двумя границами. Они разделяют три слоя жидкости с характеристическими импедансами Z_1 , Z_2 и Z_3 . Средний слой жидкости толщиной h разделяет верхнее и нижнее полупространства.

На границе между жидкостями (слоями) 1 и 2 определим коэффициенты отражения и прохождения звука для падающей из слоя 1 плоской волны по формулам

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= (Z_2 \sin \theta_1 - Z_1 \sin \theta_2) / (Z_2 \sin \theta_1 + Z_1 \sin \theta_2); \\ T_{12} &= (2Z_2 \sin \theta_1) / (Z_2 \sin \theta_1 + Z_1 \sin \theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Нас интересует отражение и передача плоской волны из жидкости 2, падающей на границу между жидкостями 1 и 2. Путем несложных рассуждений можно получить, что

$$\left. \begin{aligned} R_{21} &= -R_{12}; \\ T_{21} &= 2Z_1 \sin \theta_2 / (Z_2 \sin \theta_1 + Z_1 \sin \theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Коэффициенты отражения и передачи связаны соотношением

$$T_{12} T_{21} = 1 - R_{12}^2. \quad (4.43)$$

Аналогичные выражения могут быть получены для R_{23} и T_{23} , характеризующих границу раздела между жидкостями 2 и 3.

Определим давления в падающей, отраженной и прошедшей волнах в точках $x = 0, z = 0$; $x = x_1/2, z = h$ и $x = x_1, z = 0$ при давлении в падающей волне в начале координат, равном p_i .

Для слоя 1 примем следующее комплексное выражение:

$$p_i(t, x, z) = \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1}{c_1} \right) \right]. \quad (4.44)$$

Давления в отраженной и прошедшей волнах определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} p_{r_{12}} &= R_{12} \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x \cos \theta_1 - z \sin \theta_1}{c_1} \right) \right]; \\ p_{t_{12}} &= T_{12} \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2}{c_2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Прошедшая волна распространяется в слое 2, пересекая нижнюю границу при $x = x_1/2$ и $z = h$. На этом уровне давления в отраженной и прошедшей волнах будут

$$\left. \begin{aligned} p_{r_{23}} &= T_{12} R_{23} \exp \left\{ j\omega \left[t - \frac{x \cos \theta_2}{c_2} - \frac{(2h - z) \sin \theta_2}{c_2} \right] \right\}; \\ p_{t_{23}} &= T_{12} T_{23} \exp \left\{ j\omega \left[t - \frac{x \cos \theta_3}{c_3} - \frac{z \sin \theta_3}{c_3} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - h \left(\frac{\sin \theta_2}{c_2} - \frac{\sin \theta_3}{c_3} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

Отраженная волна из этой точки распространяется вверх, пересекая верхнюю границу при $x = x_1$ и $z = 0$. В этой точке

$$\left. \begin{aligned} p_{r_{21}} &= T_{12} R_{23} R_{21} \exp \left\{ j\omega \left[t - \frac{x \cos \theta_2}{c_2} - \frac{(2h + z) \sin \theta_2}{c_2} \right] \right\}; \\ p_{t_{21}} &= T_{12} T_{21} R_{23} \exp \left\{ j\omega \left[t - \frac{x \cos \theta_1}{c_1} + \frac{z \sin \theta_1}{c_1} - \frac{2h \sin \theta_2}{c_2} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Получим теперь выражение для давления $p_{t_{21}}$ в волне, распространяющейся вверх в слое 1. Из выражения (4.44) следует, что

$$p_i(t, x_1, 0) = \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x_1 \cos \theta_1}{c_1} \right) \right]. \quad (4.48)$$

Принимая $x = x_1$ и $z = 0$, значение $p_{t_{21}}$ можно определить следующим образом:

$$p_{t_{21}}(t, x_1, 0) = T_{12} T_{21} R_{23} \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x \cos \theta_1}{c_1} - \frac{2h \sin \theta_2}{c_2} \right) \right], \quad (4.49)$$

откуда

$$\frac{p_{t_{21}}(x_1, 0)}{p_i(x_1, 0)} = T_{12} T_{21} R_{23} \exp \left(-j \frac{\omega 2h \sin \theta_2}{c_2} \right). \quad (4.50)$$

Выражение (4.50) показывает, что задержка по фазе между давлением в падающей волне в точке x_1 и давлением в волне, приходящей в ту же точку после однократного отражения в середине слоя, является функцией толщины слоя h , частоты колебаний и угла θ_2 .

Отметим, что для точки ($x = x_1, z = 0$) кроме волны $p_{t_{21}}$, распространяющейся вверх, имеется прямая отраженная волна $p_r(x_1, 0)$ с коэффициентом отражения R_{12} . Таким образом, на

верхней границе имеется бесконечное число распространяющихся вверх составляющих, приходящих в результате многократных отражений в среднем слое при $z = 0$, $x = x_1$; 0 ; $-x_1$; $-2x_1$, Относительные значения амплитуд и фаз этих членов получаются таким же способом, как и при выводе выражения (4.50). Отношение суммы этих членов в любой заданной точке к давлению в падающей волне в этой же точке определяется как *результрующий коэффициент отражения* R_{13} . Это относится к случаю непрерывной синусоидальной падающей волны в стационарных условиях. Таким образом,

$$R_{13} = R_{12} + T_{12}T_{21}R_{23} \exp(-j2\varphi_2) + T_{12}T_{21}R_{23}^2R_{21} \exp(-j4\varphi_2) + \dots, \quad (4.51)$$

где $\varphi_2 = (\omega h \sin \theta_2)/c_2$.

Ряд (4.51) представляет собой геометрическую прогрессию. Суммируя ее с учетом выражений (4.42) и (4.43), получим решение в замкнутом виде

$$R_{13} = \frac{R_{12} + R_{23} \exp(-j2\varphi_2)}{1 + R_{12}R_{23} \exp(-j2\varphi_2)}. \quad (4.52)$$

Аналогичным образом *результрующий коэффициент прохождения* T_{13} волны из слоя 1 в слой 3 может быть определен в виде

$$T_{13} = \frac{T_{12}T_{23} \exp(-j\varphi_2)}{1 + R_{12}R_{23} \exp(-j2\varphi_2)}. \quad (4.53)$$

В отличие от случая, соответствующего одиночной границе, коэффициенты отражения и прохождения в вещественной форме для системы слоев являются комплексными величинами. Модуль и фаза величин R_{13} и T_{13} являются функциями частоты и толщины среднего слоя, а также угла θ_2 .

Рассмотрим пример, в котором верхняя и нижняя среды на рис. 4.5 являются водой, а слой 2 имеет характеристический импеданс и скорость звука, равные $2/3$ от соответствующих значений для воды, т. е.

$$Z_1 = Z_2 = 1,5Z_3; \quad c_1 = c_2 = 1,5c_3. \quad (4.54)$$

Рассмотрим нормальное падение волны ($\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$). При этом

$$\left. \begin{aligned} R_{12} &= (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1) = -0,2; \quad R_{23} = (Z_3 - Z_2)/(Z_3 + Z_2) = +0,2; \\ T_{12} &= 2Z_2/(Z_2 + Z_1) = 0,8; \quad T_{23} = 2Z_3/(Z_3 + Z_2) = 1,2. \end{aligned} \right\} \quad (4.55)$$

Напомним, что эти коэффициенты представляют собой отношение давлений, так что вполне возможно для T получить значение больше единицы без нарушения принципа сохранения энергии.

Подставив выражение (4.55) в (4.52) и (4.53), получим

$$\left. \begin{aligned} R_{13} &= \frac{0,2 [\exp(-j2\varphi_2) - 1]}{1 - 0,04 \exp(-j2\varphi_2)}, \\ T_{13} &= \frac{0,96 \exp(-j\varphi_2)}{1 - 0,04 \exp(-j2\varphi_2)}, \end{aligned} \right\} (4.56)$$

где $\varphi_2 = \omega h/c_2 = 2\pi h/\lambda_2$.

Коэффициент передачи T_{13} максимален при минимальном знаменателе. Требуется, чтобы

$$\exp(-j2\varphi_2) = \exp\left(\frac{-j4\pi h}{\lambda_2}\right) = +1;$$

$$\frac{4\pi h}{\lambda_2} = 2\pi h; \quad h = \frac{n\lambda_2}{2}. \quad (4.57)$$

При максимальном прохождении звука коэффициент отражения будет минимальным. В данном примере он равен нулю. Значения R и T показаны графически на рис. 4.6 в функции h/λ_2 .

Повторяя процедуры, которые использовались для получения T_{13} и R_{13} , можно определить особенности отражения и передачи звука через границы раздела в многослойном пространстве. В общем случае результаты свидетельствуют о более сложной зависимости R и T от частоты сигнала и толщин различных слоев. Один из интересных результатов получается, когда имеет место полное отражение от данного слоя. Если во всех слоях нет вязких потерь, то из закона сохранения энергии следует, что модуль результирующего коэффициента отражения в верхнем слое равен единице. Сдвиг фазы изменяется в зависимости от частоты сигнала и угла падения фронта волны [5].

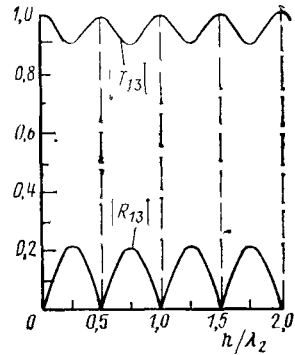


Рис. 4.6. Коэффициенты отражения и передачи при наличии двух границ ($Z_1 = Z_3 = 1,5Z_2$; $c_1 = c_3 = 1,5c_2$)

4.4. Лучевая акустика.

Рефракция при постоянном градиенте скорости звука

В предыдущем материале направления распространения плоской волны обозначены стрелками. Они были перпендикулярны к фронту волны там, где он определялся как линия (или плоскость), соединяющая точки с равными значениями фазы в распространяющейся волне. В случае плоской волны одиночная ориентированная стрелка или луч являются достаточными для определения направления потока акустической энергии. Для иллюстрации акустической интенсивности можно использовать дополнительные параллельные лучи. В случае плоских волн интервалы между лучами одинаковы и обратно пропорциональны интенсивности поля.

Рассмотрим точечный источник, излучающий акустическую энергию равномерно по всем направлениям в бесконечной однородной среде (рис. 4.7). Здесь энергия распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью, поэтому в любой момент фронт волны представляет собой сферическую поверхность. На рис. 4.7 лучи нарисованы перпендикулярно фронту волны и, следовательно, представляют собой прямые линии, выходящие из источника с равными угловыми расстояниями между ними.

Число лучей, выходящих из источника, пропорционально общей акустической мощности. На некотором эталонном расстоянии (например, 1 м) от источника число лучей, проходящих через сферическую поверхность, пропорционально акустической интенсивности на этой дистанции. Так как площадь сферы увеличивается пропорционально квадрату расстояния, число лучей на единицу площади на расстоянии r уменьшается по сравнению с числом лучей на эталонном расстоянии по закону $1/r^2$.

Таким образом, для простой сферической акустической волны *лучевая картина*, представленная на рис. 4.7, является полезной моделью, определяющей изменение интенсивности звука.

На рис. 4.8 показан точечный источник, который излучает акустическую энергию равномерно по всем направлениям в неоднородной среде. В рассматриваемом случае скорость звука с глубиной уменьшается. Из источника лучи выходят с одинаковым угловым расстоянием. Однако из-за распространения разных участков фронта волны с разными скоростями по разным направлениям точки равной фазы будут находиться на несферической поверхности. Отдельные лучи, всегда перпендикулярные локальному участку фронта волны, должны следовать по искривленным траекториям, имеющим разные радиусы кривизны. Это приводит к тому, что плотность распределения лу-

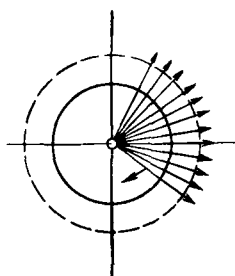


Рис. 4.7. Точечный источник с равномерным излучением в однородной среде

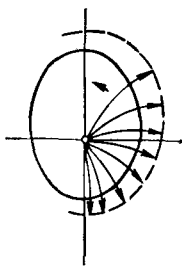


Рис. 4.8. Точечный источник с равномерным излучением в неоднородной среде

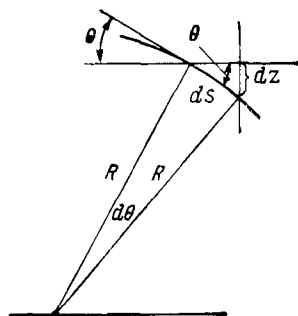


Рис. 4.9. Вертикальное перемещение точки, движущейся по дуге окружности

чей по поверхности расширяющегося фронта волны будет непостоянной. Однако плотность лучей все еще будет являться мерой локальной интенсивности акустического поля. Задача лучевой акустики состоит в том, чтобы описать математически траектории выбранных лучей и обеспечить расчет локальной интенсивности акустического поля в любой точке среды.

В п. 4.2 рассмотрена рефракция луча на плоской границе между двумя жидкостями с различными скоростями звука. Он испытывает дискретное изменение направления на границе жидкого слоя, продолжая двигаться по прямолинейной траектории в новом слое под новым углом. Определим рефракцию акустических лучей в среде, где скорость звука является линейной функцией глубины. Предположим, что на фиксированной глубине значение скорости звука не зависит от расположения точки вдоль горизонтальной линии. Следовательно, скорость звука может быть представлена выражением

$$c(z) = c_0 + gz, \quad (4.58)$$

где c_0 — скорость звука на эталонной (опорной) глубине ($z=0$); g — градиент скорости звука; z — глубина ниже эталонного уровня.

Без потери общности можно выбрать эталонную глубину, соответствующую точке, в которой луч становится горизонтальным. Тогда по закону Снелиуса угол в любой другой точке вдоль луча определяется выражением

$$\cos \theta / c = \cos \theta_0 / c_0 = 1 / c_0 \quad (4.59)$$

или

$$\cos \theta = c / c_0.$$

Таким образом, в любой точке среды угол между лучевой траекторией и горизонтальной плоскостью равен арккосинусу отношения локальной скорости звука к скорости звука на глубине, где луч является горизонтальным. Отсюда следует, что локальное значение скорости звука *всегда меньше* c_0 , так как акустический луч должен всегда искривляться в направлении области с меньшей скоростью звука.

Дифференцируя выражение (4.59), получим соотношение между приращением скорости звука и приращением угла:

$$dc / c_0 = - \sin \theta d\theta. \quad (4.60)$$

Дифференцируя выражение (4.58), получим

$$dc = g dz. \quad (4.61)$$

Подстановка выражения (4.61) в (4.60) дает

$$g dz / c_0 = - \sin \theta d\theta \quad \text{или} \quad dz = - (c_0 / g) \sin \theta d\theta. \quad (4.62)$$

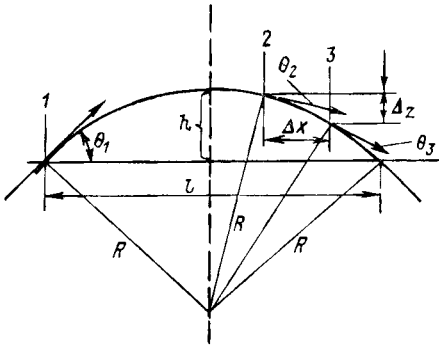


Рис. 4.10. Траектория акустического луча в виде дуги окружности в среде с отрицательным градиентом скорости звука

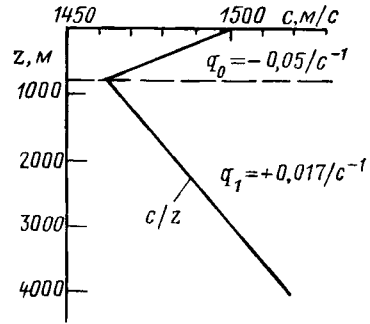


Рис. 4.11. График вертикального профиля скорости звука

Уравнение (4.62) определяет тип кривой траектории акустического луча в среде с постоянным градиентом скорости звука. Для определения траектории рассмотрим вертикальное перемещение точки, движущейся по дуге радиуса R (рис. 4.9). Соотношением между значением угла θ , приращением ds длины дуги и изменением глубины определяется по формуле $dz = \sin \theta ds$. Но $ds = R d\theta$, поэтому

$$dz = R \sin \theta d\theta. \quad (4.63)$$

Сравнивая уравнения (4.62) и (4.63), получим

$$R = -c_0/g = -c/(g \cos \theta). \quad (4.64)$$

Следовательно, траектория акустического луча представляет собой дугу окружности, определяемую уравнением (4.64). Знак (минус или плюс) в этом уравнении определяет направление искривления луча (вниз или вверх). Если градиент g отрицательный (скорость звука уменьшается с глубиной), то радиус R кривизны положительный и траектория луча искривляется вниз. При положительном градиенте скорости звука R отрицательный и траектория луча искривляется вверх.

Геометрические свойства окружности позволяют записать полезные соотношения, посредством которых можно упростить построение траекторий лучей в среде с постоянным градиентом скорости звука. На рис. 4.10 показана часть дуги, представляющая собой траекторию луча в области отрицательного градиента.

Для луча, выходящего из точки 1 вверх под углом θ_1 , максимально достижимая высота h над начальной точкой (точка перегиба) определяется по формуле

$$h = R(1 - \cos \theta_1), \quad (4.65)$$

где $R = -c_1/(g \cos \theta_1)$.

Длина хорды l , равная горизонтальному расстоянию до точки прихода луча на первоначальный горизонт, находится из выражения $l = 2R \sin \theta_1$.

Для произвольных точек 2 и 3 имеем

$$\Delta z = R (\cos \theta_2 - \cos \theta_3) = (c_3 - c_2)/g; \quad (4.67)$$

$$\Delta x = R (\sin \theta_3 - \sin \theta_2). \quad (4.68)$$

4.4.1. Пример построения траектории луча

Для определения траектории луча в среде с линейным профилем скорости звука c используем график, представленный на рис. 4.11. Этот профиль включает слой с отрицательным градиентом скорости звука $g_0 = -0,05 \text{ с}^{-1}$ от поверхности до глубины $z = 750 \text{ м}$ и слой с положительным градиентом $g_1 = +0,017 \text{ с}^{-1}$ от $z = 750 \text{ м}$ до дна

Предположим, что источник является ненаправленным и находится на глубине 100 м. Определим теперь необходимую информацию для построения лучевой картины для луча, выходящего из источника под начальным углом $\theta_0 = 0$. При отрицательном градиенте скорости звука траектории лучей будут искривляться вниз с радиусом кривизны $R_0 = -c_0/g_0$, где c_0 — скорость звука на глубине 100 м, а g_0 — градиент в верхнем слое.

Из выражения (4.58) следует, что $c_0 = 1500 - (0,05 \cdot 100) = 1495 \text{ м/с}$; из уравнения (4.64) — $R_0 = 1495/0,05 = 29\,900 \text{ м}$.

Траектория луча в верхнем слое является дугой окружности радиусом R_0 до глубины 750 м. Угол θ_1 , под которым луч приходит на границу слоев, определяется по формуле $\cos \theta_1 = c_1/c_0$, где c_1 — скорость звука на глубине 750 м, имеющая значение $c_1 = 1500 - (0,05 \cdot 750) = 1462,5 \text{ м/с}$.

Следовательно, $\cos \theta_1 = 1462,5/1495 = 0,97826$; $\theta_1 = 11,97^\circ$.

Горизонтальное расстояние, которое проходит луч до глубины 750 м можно рассчитать по формуле (4.68): $x_1 = R_0 (\sin \theta_1 - \sin \theta_0) = R_0 \sin \theta_1 = 29,9 \sin (11,97^\circ) = 6200 \text{ м}$.

В нижнем слое градиент скорости звука положительный. Траектория акустического луча искривляется вверх. Радиус кривизны луча в нижнем слое определяется по формуле $R_1 = c_1/g_1$ или $c_1/g_1 \cos \theta_1 = -1495/0,017 = -88\,000 \text{ м}$

Акустический луч представляет собой дугу окружности с отрицательным радиусом R_1 до максимальной глубины, определяемой точкой, где скорость звука равна такому же значению на глубине источника 100 м. В этой точке по закону Снелиуса требуется, чтобы угол θ_2 относительно горизонтали был равен углу на глубине источника, т.е. нулю, поскольку $\cos \theta_2 = (c_2/c_0) \cos \theta_0 = 1$

Глубина может быть определена по формуле $c_2 = c_0 = 1495 = c_1 + (0,017)(z_2 - 750) = 1462 + (0,017)(z_2 - 750)$, откуда $z_2 = 2662 \text{ м}$.

Горизонтальное расстояние от источника до точки максимальной глубины рассчитывают с помощью формулы (4.68)

Из-за симметрии луч должен возвратиться на глубину источника расстоянием $2x_2$ по траектории, идентичной лучу, который распространяется от источника до

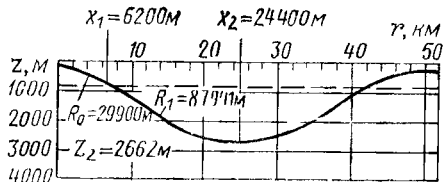


Рис. 4.12 Траектория акустического луча в среде с отрицательным градиентом скорости звука, находящейся над слоем с положительным градиентом

точки максимальной глубины. Один полный цикл для такого луча показан на рис. 4.12. Глубина z и расстояние r на нем для большей наглядности представлены в разных масштабах. Отметим, что действительная глубина поворота луча составляет только 5 % от интервала горизонтального расстояния, которое захватывает полный цикл траектории луча. Если характеристики среды по трассе распространения звука будут везде одинаковыми, то цикл траектории луча (см. рис. 4.12) будет в горизонтальном направлении последовательно повторяться, начиная от точки излучения

4.4.2. Использование лучевой картины для расчета интенсивности акустического поля

Ранее рассматривался одинокий луч. Основная цель построения лучевой картины заключается в получении наглядного изображения значения интенсивности акустического поля в разных точках пространства. Траектории лучей, выходящих из источника, строят через малые равные угловые интервалы. Интенсивность поля в некоторой точке среды определяется по расстоянию между соседними лучами. Для двух лучей с начальным угловым интервалом $\Delta\theta$ можно показать, что потери при распространении (ПР) на расстоянии r определяются по формуле

$$\text{ПР} = 10 \lg(r \Delta h / \Delta\theta), \quad (4.69)$$

где Δh — вертикальное расстояние между лучами на расстоянии r .

При отсутствии рефракции формула (4.69) упрощается и превращается в сферический закон, так как распространение звука происходит по прямой линии и $\Delta h \simeq r\Delta\theta$. В слое с постоянным градиентом скорости звука потери не должны существенно отличаться от значений, определяемых по сферическому закону, если можно пренебречь влиянием границ.

Наличие многих слоев, имеющих положительные и отрицательные градиенты скорости звука, может вызвать появление в пространстве областей схождения (конвергенции) и расхождения (дивергенции) лучей. В этих областях значение интенсивности акустического поля резко отличается от значений, определяемых сферическим законом. Например, рассмотренные в пп. 4.4.1 лучи, выходящие из источника I с малыми угловыми интервалами, будут затем пересекаться (рис. 4.13, а). В точке пересечения, согласно лучевой теории, интенсивность акустического поля будет приближаться к бесконечности. В действительности такой интенсивности, конечно, не существует. В подобных случаях для определения интенсивности акустического поля следует использовать более точные решения волнового уравнения. Однако области конвергенции имеют интенсивность, значительно превышающую значения для условий сферического распространения звука.

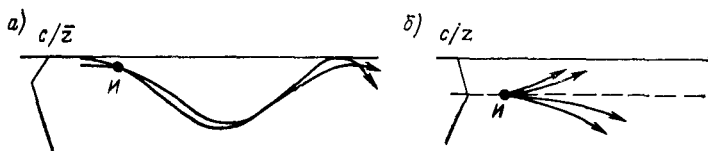


Рис. 4.13. Профили вертикального распределения скорости звука c , вызывающие конvergенцию и дивергенцию акустических лучей

На рис. 4.13, б верхний слой имеет положительный градиент, который меняется на отрицательный в нижнем слое. В результате наблюдаем область дивергенции лучей на горизонте изменения знака градиента. Пренебрегая влиянием отражения звука границами, можно считать, что интенсивность акустического поля в этом случае будет много меньше, чем в случае сферического распространения.

Кроме эффектов, связанных с преломлением лучей в среде с переменной скоростью звука c , на интенсивность поля существенно влияют поверхность и дно. Общее значение интенсивности в любой точке может включать интенсивность, передаваемую непосредственно по одной или нескольким рефрагирующим трассам в водном слое, и по лучам, имеющим одно или более отражений от поверхности и (или) дна моря. В некоторых случаях наличие границ, а также переменной скорости звука исключает возможность прямого распространения акустической энергии в отдельные области среды. В этих условиях отраженные лучи являются единственными путями, по которым распространяется звук. Интенсивность акустического поля в любой точке сильно зависит от акустических характеристик границ.

Математические методы, предназначенные для расчета интенсивности поля, основаны на определении плотности лучей в любой точке среды с использованием данных о скорости звука и граничных условиях. Расчеты требуют больших затрат и лучше всего их выполнять на ЭВМ.

4.4.3. Ограничения лучевого метода

Так как методы лучевой акустики не дают точных решений волнового уравнения, нужно сказать несколько слов о достоверности использования такого подхода. В оптике лучевой подход вообще не применим, когда размеры освещаемого объекта сравнимы с длиной волны света. Это правило действительно и для акустических волн. Так как длины акустических волн изменяются от сотен до долей метров, то очевидно, что практически лучевые акустические методы являются менее точными, чем оптические.

Лучевая акустика требует уточнения в следующих случаях.

1. Размеры акустического волновода невелики по сравнению с длиной акустической волны.

2. Скорость звука значительно меняется на расстоянии одной (или части) длины волны.

3. Расчеты по лучевой теории дают большие изменения интенсивности акустического поля на расстояниях, меньших длины волны.

Если требуется получить точные численные результаты, а имеет место любая из перечисленных ситуаций, то следует применять более точные методы, используя решения в виде нормальных волн или их эквивалентов. Имеются программы для расчета интенсивности акустического поля с использованием комбинаций лучевых и волновых методов, позволяющие реализовать преимущества каждого из них, а также программы, способные в некоторых частных случаях уменьшать ошибки лучевых методов за счет ввода поправок.

Несмотря на очевидные ограничения, лучевой метод оказывается очень полезным для визуализации особенностей распределения акустической энергии в среде. Задаваясь профилем скорости звука и характеристиками поверхности и дна океана, можно достаточно быстро определить лучевым методом главные особенности распространения звука в рассматриваемом районе.

Задачи

4.1. Предположим, что плоская волна в воде распространяется перпендикулярно к поверхности вода — сталь. Плотность стали 7700 кг/м^3 , а $c = 6000 \text{ м/с}$. Толщина стального слоя бесконечна. Плотность воды 1000 кг/м^3 ; $c = 1500 \text{ м/с}$. Определите коэффициенты отражения и прохождения звука.

4.2. Верхний слой жидкости имеет плотность 1400 кг/м^3 и $c = 1400 \text{ м/с}$. Рассчитайте и постройте график коэффициента отражения акустической плоской волны в среде в зависимости от угла скольжения луча θ_i . Рассчитайте углы θ_i и θ_t , при которых отражение отсутствует.

4.3. Пластина из стали толщиной $0,01 \text{ м}$ разделяет два слоя воды. Плоская акустическая волна частотой 1000 Гц падает перпендикулярно на границу раздела вода — сталь. Определите коэффициент прохождения T_{13} при распространении звука через стальную пластину.

4.4. Простая акустическая линза может быть получена путем заполнения тонкой сферической оболочки жидкостью, имеющей показатель преломления больше единицы. Акустические лучи в плоской волне, падающей на поверхность, будут сходиться за счет рефракции внутри сферы.

Путем выбора значения показателя преломления лучи можно заставить сходиться в небольшой области на поверхности линзы или внутри сферы. Интенсивность акустического поля в такой локальной области будет превышать интенсивность в падающей волне.

По рис. 4.14 определите требуемое значение показателя преломления для обеспечения прохождения рефрагирующего луча

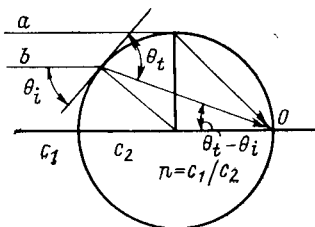


Рис. 4.14. Простая жидкостная линза с постоянным значением показателя преломления

a через точку *O* на поверхности линзы в зависимости от угла падения. Повторите операцию для луча *b* при углах $\theta_1 = 30$ и 60° . Для постоянного значения показателя преломления, равного 1,8, постройте лучевую картину скольжения 30 и 60° . Считайте, что закон Снелиуса действует для углов измеренных относительно касательной к поверхности сферы в точке, где луч ее пересекает.

Список литературы

1. *Physics of Sound in the Sea, Part 1: Transmission*; originally issued as Division 6, Vol. 8, NDRS Summary Technical Reports. Wakefield, Mass.; reprinted in 1969 by the U. S. Government Printing Office, Washington, D. C.
2. *Tolstoy I., Clay C. S. Ocean Acoustics*. New York: Mc Graw-Hill Book Company, 1966.
3. *Officer C. B. Introduction to the Theory of Sound Transmission*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1958.
4. *Kinsler L. E., Frey A. R. Fundamentals of Acoustics*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
5. *Clay C. S., Medwin H. Acoustical Oceanography*. New York: John Wiley & Sons, 1977.
6. *Urlick R. J. Principles of Underwater Sound for Engineers*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1975. Chap. 5.

Глава 5.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ОКЕАНЕ

Характеристики океанской среды и границы океана, оказывающие влияние на распространение звука, сложным образом зависят от многих параметров. Так, скорость звука является функцией температуры, глубины и солёности. Температура в свою очередь определяется глубиной, временем, районом и погодными условиями. Поверхность может быть идеально гладким отражателем или чрезвычайно неровной, рассеивающей звук случайным образом. Существенное влияние на распространение оказывают состав грунта, наклон дна и его структура. Совокупность факторов, зависящих от скорости звука, характеристик дна и поверхности, в конечном итоге и определяет характеристики распространения звука.

Несмотря на большой диапазон вариаций параметров океанической среды, существует реальная возможность прогнозирования их ожидаемых значений на основе погодных условий и географического района. Для многих районов известны характерные профили скорости звука, а также экспериментальные и теоретические значения потерь при отражении от границ для

всех возможных диапазонов скорости ветра, углов скольжения, характеристик дна и частот. При наличии такой информации и алгоритмов прогнозирования, использующих методы лучевой акустики или более сложные процедуры, можно определить ожидаемые характеристики распространения для заданных условий. Результаты этих расчетов в основном совпадают с измеренными данными. Для получения более точных характеристик распространения в районе испытаний необходимо в ходе проведения эксперимента тщательно измерять профиль скорости звука, определять состояние поверхности моря и параметры дна.

Ниже рассмотрены примеры наиболее характерных гидроакустических условий. Важнейшие характеристики акустического поля в этих примерах поясняются лучевыми картинками, а также оценивается влияние потерь при отражении от поверхности и дна.

5.1. Скорость звука в океане

Как показано в гл. 2, скорость звука в воде зависит от плотности и модуля объемной упругости. В частности $c = \sqrt{B/\rho_0}$. В океане, однако, ни модуль объемной упругости, ни плотность не являются постоянными. Плотность изменяется в некоторых пределах в зависимости от химического состава, а модуль объемной упругости зависит от температуры и давления. Наибольшее значение имеют вариации модуля объемной упругости.

На основании экспериментальных и теоретических исследований получено несколько выражений для расчета скорости звука в функции температуры, солёности и глубины (давления) [1 ... 3]. В качестве примера рассмотрим выражение, приведенное в работе [4]:

$$c = 1449 + 4,6T - 0,055T^2 + 0,0003T^3 + (1,39 - 0,012T) \times \\ \times (S - 35) + 0,017z, \quad (5.1)$$

где c — скорость звука, м/с; T — температура, °C; S — солёность, ‰; z — глубина, м.

Температура в этом выражении — функция глубины, и ее значения у поверхности приблизительно соответствуют температуре воздуха, а на глубине нескольких тысяч метров она близка к температуре замерзания.

В районах, удаленных от устьев рек или других источников пресной воды, солёность редко изменяется более, чем на доли промилле по всей глубине от поверхности до дна. Обычно средняя солёность в океане предполагается равной 35‰ и в этом случае слагаемое в формуле (5.1), зависящее от солёности, не влияет на скорость звука. Действительная солёность в океане и прилегающих морях может отличаться на несколько промилле

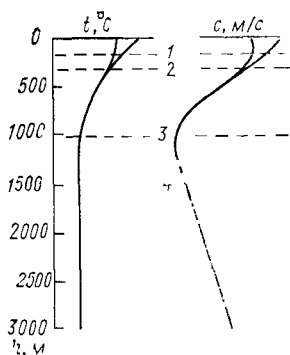


Рис. 5.1. Типичный для средних широт профиль скорости звука:

1—приповерхностный слой; 2—сезонный термоклин; 3—основной термоклин; 4—глубоководный изотермический слой

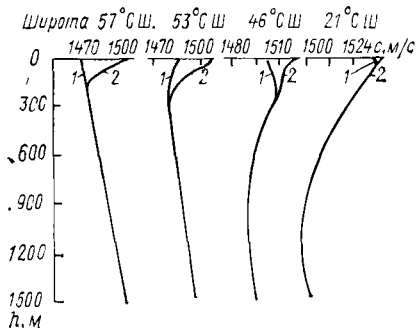


Рис. 5.2. Профили скорости звука, характерные для различных широт северной части Атлантического океана [6]

1—зима; 2—лето

от среднего значения 35‰, приводя к некоторому отличию скорости от значения, полученного в пренебрежении членом, учитывающим соленость. Вблизи устьев рек и тающего льда соленость изменяется в широких пределах и может существенно влиять на скорость звука. В дальнейшем предполагается, что влиянием солености можно пренебречь и основными факторами, определяющими скорость звука, будут глубина и температура.

Диапазон значений скорости звука в зависимости от глубины лучше всего рассматривать с учетом слоистой структуры океана (рис. 5.1). Глубина и толщина слоев, существенным образом зависят от широты места и других факторов [5]. Профиль скорости звука на рис. 5.1 характерен для средних широт северной части Атлантического океана.

Толщина приповерхностного слоя может достигать 150 м. Параметры этого слоя сильно зависят от погодных условий и даже от времени дня. В тихую погоду температура воды резко падает с глубиной, образуя большой отрицательный градиент скорости звука. В штормовую погоду вода в слое перемешивается, температура выравнивается и образуется изотермический слой. В результате за счет увеличения давления с глубиной возникает небольшой положительный градиент скорости звука, равный $0,017 \text{ с}^{-1}$. Будучи однажды перемешанным, приповерхностный слой довольно долго может оставаться в этом изотермическом состоянии.

В спокойную погоду в верхнем слое толщиной около 10 м скорость звука изменяется в течение суток. Под влиянием солнечного тепла после полудня появляется отрицательный градиент температуры и скорости. Ночью в результате перемешивания

вания воды под влиянием волнения моря и излучения тепла поверхностью отрицательный градиент значительно уменьшается или вовсе исчезает.

Температура слоя, находящегося ниже приповерхностного, значительно меньше подвержена таким скоротечным процессам, как шторм или суточный цикл, однако заметно изменяется от сезона к сезону. Этот слой, получивший название сезонного термоклина, простирается до глубин около 300 м и в средних широтах характеризуется отрицательным температурным градиентом.

Третий слой, называемый главным термоклином, имеет устойчивый отрицательный градиент. С увеличением глубины отрицательный градиент уменьшается до тех пор, пока температура воды не достигнет своего минимума вблизи точки замерзания. Скорость звука в этом слое также уменьшается до минимального значения в точке, где уменьшение скорости за счет снижения температуры не уравновесится возрастанием, вызванным увеличением глубины. В средних широтах это происходит обычно на верхней границе нижнего слоя на глубине около 1000 м. Нижний слой в связи с практически постоянной температурой называют глубоководным изотермическим слоем. В нем скорость звука возрастает по мере увеличения глубины с положительным градиентом, который асимптотически приближается к значению $+0,017 \text{ с}^{-1}$.

Глубина минимальной скорости звука уменьшается с увеличением широты места. В Атлантическом океане, севернее 55° с. ш., вне районов Гольфстрима скорость звука минимальна вблизи или на поверхности океана, а изотермический слой воды, за исключением сезонных изменений, простирается до дна. На рис. 5.2 показан ряд профилей скорости звука, относящихся к различным широтам северной части Атлантического океана, отражающий суть явления, связанного с изменением широты места. Вместе с тем течения и другие природные факторы могут существенно искажать «типичные» характеристики, показанные на рис. 5.2.

5.2. Потери при отражении от поверхности

На рис. 5.3, *a* показано отражение луча от гладкой границы раздела воздух — вода. Вследствие большой разницы в импедансе на границе раздела коэффициент отражения близок к единице. Акустический сигнал, попадающий в точку R при отражении от границы раздела, можно представить вышедшим из мнимой точки. Амплитуда его равна амплитуде действительного сигнала, а фаза противоположна. Очевидно, при гладкой поверхности потери для мнимого источника при отражении отсутствуют.

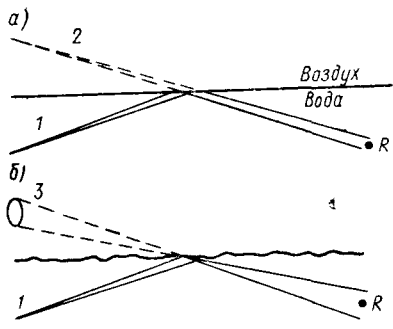


Рис. 5.3. Отражения от гладкой (а) и неровной (б) поверхностей: 1 — источники; 2 — мнимый источник; 3 — размазанный мнимый источник

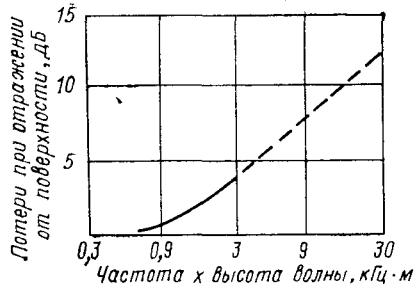


Рис. 5.4. Потери при отражении от поверхности для малых углов скольжения [8]

На рис. 5.3, б поверхность неровная. Лучи отражаются по случайным направлениям, в результате чего мнимый источник кажется распределенным по некоторой области, а интенсивность в точке R по сравнению с отражением от гладкой поверхности уменьшается. По мере возрастания неровности увеличивается доля диффузного отражения и падает интенсивность сигнала в точке R.

Для дальнейшего рассмотрения необходимо определить, какую поверхность можно считать гладкой, а какую неровной. Интуитивно ясно, что поверхность, для которой отклонения точек от плоскости малы по сравнению с длиной волны, можно считать гладкой, если же отклонения велики — неровной. В соответствии с критерием Рэлея поверхность считается гладкой, если $h \sin \Theta < \lambda/8$, где h — амплитуда отклонения; Θ — угол скольжения; λ — длина волны. Кроме этих экстремальных значений существует ряд промежуточных состояний, зависящих от скорости, постоянства, продолжительности и длительности ветра, глубины моря и даже размеров бассейна. Важно также различие в направлениях движения волн и распространения звука.

На практике сложные математические модели, включающие все возможные характеристики поверхности, оказывающие влияние на условия распространения звука, могут оказаться бесполезными. Рэлей исследовал рассеяние звука при нормальном падении на простую (синусоидальную) поверхность. В работах [7, 8] продолжены эти исследования применительно к отражению от случайной неровной поверхности.

Важнейшие статистические характеристики поверхности моря, к которым относятся средняя квадратическая высота волны и средняя высота волны относительно поверхности, а также их зависимость от скорости ветра для некоторых стан-

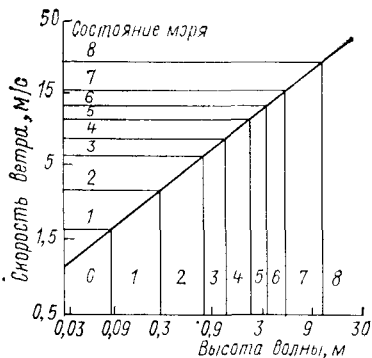


Рис. 5.5. Соотношение между состоянием моря, скоростью ветра и высотой волны

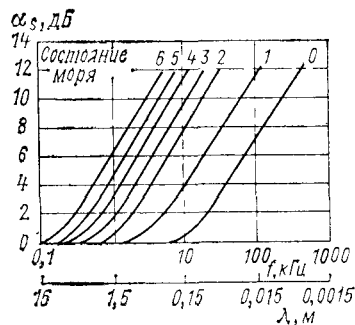


Рис. 5.6. Потери при отражении от поверхности в зависимости от скорости ветра, высоты волны, состояния моря и частоты

дартных условий определены на основе океанографических исследований.

В работе [8] приведено следующее выражение для определения акустических потерь при отражении от поверхности в функции произведения высоты волны и частоты:

$$\alpha_s = 10 \lg [1 - 0,1391 (fH)^{0,2}], \quad (5.2)$$

где α_s — потери при отражении от поверхности, дБ; f — частота сигнала, кГц; H — средняя высота волны относительно поверхности, м.

Выражение (5.2) выведено для малых углов скольжения и его можно использовать, если потери не превосходят 3 дБ. Акустические потери при однократном отражении от поверхности с учетом членов более высоких порядков, которые опущены в формуле (5.2), приведены на рис. 5.4. Так, для частоты 5 кГц и высоты волны 0,9 м в соответствии с рис. 5.4 потери при одном отражении составляют около 5,5 дБ. На частоте 600 Гц, когда длина волны сигнала велика по сравнению с высотой морской волны, потери при отражении практически равны нулю. Из формулы (5.2) следует, что при высоте волны, меньшей половины длины волны сигнала, потери меньше 0,5 дБ.

При постоянной скорости и направлении ветра в течение длительного времени над большим (много миль) участком открытого моря состояние моря удобно определять в зависимости от скорости ветра. На рис. 5.5 показана зависимость высоты волны от скорости ветра¹. Здесь же приведены границы, определяющие состояние моря. Так, при скорости ветра от 3,5 до

¹ Баллы, определяющие волнение и скорость ветра, приведены в соответствии с 8-балльной шкалой. *Ред.*

5,5 м/с волнение моря считается легким с высотой волны не более 0,9 м и соответствует состоянию моря 2 балла.

На рис. 5.6 на основе объединения данных рис. 5.4 и 5.5 приведены зависимости потерь при однократном отражении от поверхности скорости ветра, высоты волны, состояния моря и частоты. На практике вследствие непрерывного волнения поверхности моря и широкого диапазона вариаций отраженной от поверхности интенсивности акустической волны, а также скоротечности и сложности происходящих процессов измерение потерь при отражении от поверхности и определение их зависимости от параметров ветра и моря являются чрезвычайно трудной задачей.

5.3. Потери при отражении от дна

Сложность определения потерь при отражении от поверхности обусловлена прежде всего неровностью этой поверхности и ее непрерывным изменением во времени, хотя сам процесс отражения на границе раздела вода — воздух описывается весьма просто из-за резкого различия импедансов. Если поверхность гладкая, акустическая энергия отражается полностью.

В противоположность этому процесс отражения звука от дна, даже если оно ровное, чрезвычайно сложен. Различие в импедансе между водой и грунтом существенно меньше, чем между водой и воздухом. При падении на дно часть акустической энергии проникает в грунт, а часть отражается. Проникшая в грунт энергия проходит через слои с различной плотностью и частично отражается на каждой из границ раздела. Акустическая волна, отраженная от внутренних границ грунта, возвращается в воду и интерферирует с той частью энергии, которая непосредственно отражается от границы вода — грунт. Как упоминалось в п. 4.3, результирующий коэффициент отражения от дна со слоистой структурой включает потери по амплитуде и изменение фазы относительно падающей волны. Слоистая структура донных осадков — причина зависимости комплексного коэффициента отражения от частоты и угла падения. Состав грунтов в различных районах океана чрезвычайно разнообразен. Однако для наших целей удобно пользоваться упрощенной классификацией службы гидрографии ВМС США. В основном грунт содержит частицы $d < 0,062$ мм:

Ил	$\geq 90\%$	Песок — ил	10 50%
Ил — песок	50 90%	Песок	< 10%

Частиц $d < 2$ мм песок содержит 90%. Камень состоит в основном из гальки и булыжника, скала — из обломков скалы или валунов.

Обычно ровное песчаное дно характерно для сравнительно мелководных районов, таких как Северное море и континен-

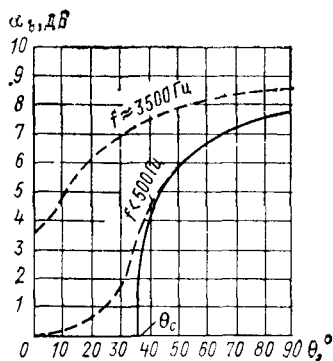


Рис. 5.7. Потери при отражении от ровного песчаного дна: — теоретические потери; --- эффект поглощения

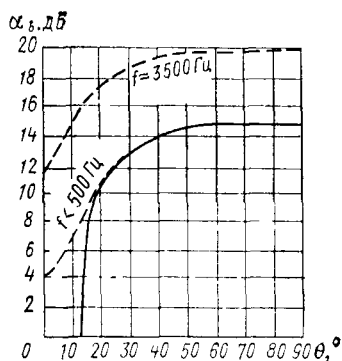


Рис. 5.8. Потери при отражении от илистого дна: — теоретические потери при отражении от непоглощающего дна; --- эффект поглощения

тальный шельф. Плотность песчаного грунта и скорость звука в нем больше, чем в воде. Плотность крупного песка приблизительно в два раза больше плотности воды, а скорость звука около 1830 м/с. Акустический импеданс такого песка приблизительно в 2,4 раза больше, чем морской воды.

Для однородного песчаного дна (без слоев) в соответствии с формулой (4.34) коэффициент отражения

$$R = \frac{(Z_2/Z_1) \sin \theta_t - \sin \theta_i}{(Z_2/Z_1) \sin \theta_t + \sin \theta_i},$$

где Z_2/Z_1 — отношение волновых (характеристических) импедансов песка и воды. При отношении импедансов, равном 2,4, и нормальном падении

$$R = \frac{2,4 - 1}{2,4 + 1} = 0,4118.$$

Потери при отражении

$$\alpha_b = -20 \lg R = 7,7 \text{ дБ}. \quad (5.3)$$

Поскольку скорость звука в воде меньше скорости звука в грунте, существует критический угол скольжения, при котором происходит полное отражение и потери теоретически отсутствуют. В соответствии с выражением (4.39) критический угол

$$\theta_c = \arccos(c_1/c_2),$$

где c_1/c_2 — отношение скоростей звука в воде и грунте. Для крупного песка $\theta_c \approx 35^\circ$. Теоретические графики, определяющие потери для гладкого песчаного дна, показаны на рис. 5.7.

Для практического применения теоретическую кривую необходимо исправить с учетом потерь в грунте и возможной не-

ровности дна относительно длины акустической волны. Влияние этих факторов на значение потерь возрастает с увеличением частоты, соответственно растут и реальные донные потери по сравнению с теоретическими, показанными сплошной кривой. Как видно из рисунка, донные потери есть даже при малых углах скольжения. Штриховыми линиями на рисунке показан диапазон ожидаемых потерь для гладкого песчаного дна и частот ниже 500 Гц до частоты приблизительно 3,5 кГц. Необходимо обратить внимание на то, что наиболее ясно отличие реальных потерь от теоретических в грунте выражено при малых углах скольжения.

Плотность грунта илистого дна лишь немногим больше плотности воды, а скорость звука в грунте изменяется от значения слегка выше до значения слегка ниже скорости звука в воде. Так, при плотности грунта 1400 кг/м^3 и скорости звука 1535 м/с для грунта и 1500 м/с для воды отношение импедансов будет 1,433. По аналогии с предыдущим примером коэффициент отражения, донные потери при нормальном падении и критический угол будут

$$R = (1,433 - 1)/(1,433 + 1) = 0,178;$$

$$\alpha_b = -20 \lg(0,178) \approx 15 \text{ дБ}; \quad \theta_c = \arccos(1500/1535) = 12^\circ.$$

На рис. 5.8 показана зависимость от угла скольжения донных потерь для илистого грунта. Как видно, для всех углов

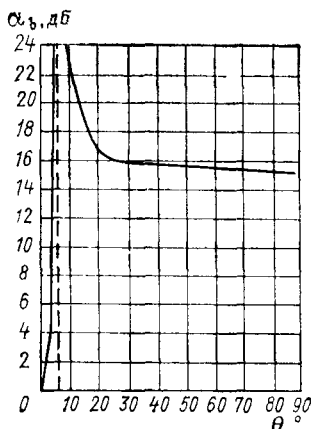


Рис. 5.9. Потери при отражении от дна, характеризующиеся наличием угла поглощения

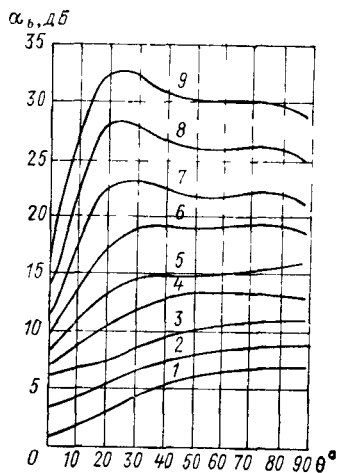


Рис. 5.10. Потери при однократном отражении от дна на частоте 1 кГц для грунтов типов 1...9 в соответствии с классификацией вычислительного метеорологического центра ВМС США [9]

скольжения донные потери существенно больше, чем при песчаном дне.

Скорость звука для некоторых типов дна из мягкого ила бывает несколько меньше скорости звука в воде, что создает возможность появления углов поглощения. Пусть плотность грунта составляет 1420 кг/м^3 и скорость звука 1490 м/с . Тогда при нормальном падении

$$R = (1,41 - 1)/(1,41 + 1) = 0,17; \quad \alpha_b = -20 \lg(0,17) = 15,4 \text{ дБ};$$

$$\theta_i = \arcsin \left[\frac{(c_1/c_2)^2 - 1}{(\rho_2/\rho_1)^2 - 1} \right]^{1/2} = 6,6^\circ.$$

В данном случае коэффициент отражения равен нулю, а донные потери — бесконечности. На рис. 5.9 показана зависимость общего значения донных потерь от угла скольжения.

Для анализа акустических характеристик дно можно классифицировать и упорядочить в соответствии с ростом потерь при отражении. По классификации вычислительного центра метеорологической службы ВМС США (FNWC) различается девять типов дна, начиная с песчаного дна с минимальными потерями, которому присвоен номер один. На рис. 5.10 приведены графики зависимости величины потерь при отражении для этих девяти типов на частоте 1 кГц .

Океанографические руководства содержат описания состава грунтов, достаточные для определения акустического типа дна. Необходимо помнить, что объединение столь широкого диапазона характеристик грунтов в ограниченное число типов дна неизбежно приводит к потере точности прогноза распространения, особенно для случаев, когда звук отражается от дна. Однако зачастую точность прогноза вполне удовлетворяет практическим надобностям и применение более точных данных не требуется, особенно в случае, когда характеристики дна не являются определяющим фактором акустического распространения.

5.4. Поглощение звука в океане

До сих пор предполагалось, что водная среда не поглощает энергию звука, т. е. общая акустическая интенсивность в пределах любой замкнутой поверхности, включающей источник звука, остается постоянной независимо от расстояния до источника звука. В действительности в каждом элементе объема, который подвергся сжатию и расширению при прохождении через него акустической волны, часть энергии теряется в виде тепла. Легко показать, что если потери энергии в каждом единичном объеме составляют постоянную долю энергии, заключенной в этом объеме, то потери поглощения будут экспоненциальной функцией расстояния. Для однородной среды с поглощением ин-

тенсивность в сферической волне на расстоянии r от источника

$$I(r) = I_0 r^{-2} \exp(-br), \quad (5.4)$$

где I_0 — интенсивность на единичном расстоянии в среде без поглощения; b — коэффициент пространственного затухания. Потери распространения ПР = $I_0/I(r)$ в логарифмическом виде

$$\text{ПР} = 10 \lg [I_0/I(r)] = 20 \lg r + 10 \lg [\exp(br)],$$

т. е. это обычные потери при сферическом распространении волны $20 \lg r$ плюс коэффициент пространственного затухания. Обычно коэффициент пространственного затухания представляется как

$$10 \lg [\exp(br)] = \alpha_a 10^{-3}, \quad (5.5)$$

где α_a — коэффициент пространственного затухания, дБ/км, равный $(b \cdot 10^{-3}) 10 \lg e$; r — расстояние, м; e — основание натурального логарифма.

Хорошо известны некоторые из причин, вызывающие поглощение. Измеренные потери в пресной воде объясняются ее вязкостью. Потери в морской воде на частотах ниже 100 кГц существенно превышают величину, обусловленную одной вязкостью. Найдено, что ионная релаксация сульфата магния вносит существенный вклад для частот ниже 100 кГц. Процесс заключается в распадении и воссоединении ионов сульфата магния под влиянием давления в акустической волне.

На частотах ниже 5 кГц аналогичный эффект вызывают ионы борной кислоты. На частотах ниже 100 Гц величина потерь также превосходит значения, обусловленные вязкостью,

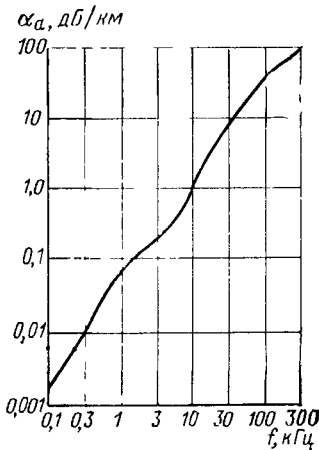


Рис. 5.11. Потери при поглощении в океане (по В. Г. Топу [10])

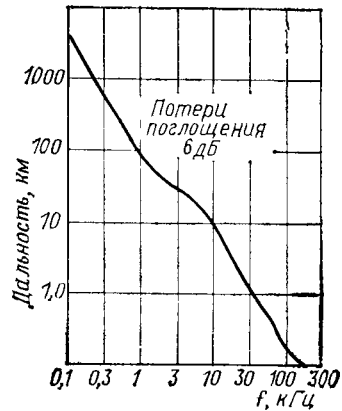


Рис. 5.12. Граница 6 дБ потерь при поглощении в зависимости от частоты

однако причины этого явления до сих пор неизвестны. На рис. 5.11 приведена зависимость коэффициента затухания от частоты, полученная В. Х. Торпом [10] на основе обработки данных измерений различных исследователей. Характерная особенность потерь, вызванных поглощением, заключается в том, что как только они становятся ощутимыми по сравнению с потерями вследствие сферического расширения фронта волны, они в дальнейшем доминируют. Пусть на расстоянии r потери, связанные с поглощением, составляют 6 дБ, тогда на расстоянии $10r$ они будут равны 60 дБ. На этом же интервале дальности потери, вызванные сферическим расширением волны, увеличатся только на 20 дБ. На рис. 5.12 приведена зависимость расстояния от частоты, полученная при условии, что коэффициент затухания составляет 6 дБ. С его помощью можно ориентироваться при выборе рабочей частоты для различных приложений. Кривая, приведенная на рис. 5.12, хотя и не является жесткой границей, все же показывает, что для случаев, когда требуется обеспечить большие дальности (сотни миль), необходимо применять очень низкие частоты. В то же время частотный диапазон выше 30 кГц не следует использовать, если только не потребуются дистанция порядка 1 км или еще меньше.

5.5. Акустические характеристики приповерхностного слоя

Наиболее широкий диапазон изменчивости скорости звука характерен для приповерхностного слоя и здесь же чаще всего располагают приемные и излучающие системы гидроакустических станций. Приповерхностный слой может обладать положительным или отрицательным градиентом, а в мелком море характеристики слоя могут оставаться постоянными до дна.

5.5.1. Отрицательный градиент

Рассмотрим распространение звука при постоянном отрицательном градиенте (рис. 5.13). Так как градиент отрицателен, все лучи изгибаются вниз. Для источника на глубине d существует такой луч, который, выйдя из него под углом θ_m к горизонтали, касается поверхности. На основании выражения (4.65)

$$\theta_m = \arccos(1 + dg/c_0), \quad (5.6)$$

где c_0 — скорость звука у поверхности; g — градиент скорости звука (в данном случае отрицательный).

Любой другой луч, который выйдет из источника под большим, чем θ_m , углом будет падать на поверхность и отражаться в направлении дна. Как видно из рисунка, ни один из лучей не может непосредственно попасть в зону тени справа от предель-

ного луча. В соответствии с лучевой теорией зона тени будет областью с нулевой акустической интенсивностью. Сюда может попасть лишь энергия за счет отражения от неровной поверхности или дна. В действительности более строгое решение волнового уравнения показывает, что интенсивность на границе зоны тени не сразу падает до нуля. Тем не менее в глубоком море в зоне тени интенсивность может уменьшаться на величину от 10 до 60 дБ.

Горизонтальное расстояние от источника до зоны тени на основании формулы (4.66)

$$r_m = - (2c_0/g) \sin \theta_m. \quad (5.7)$$

В глубоком море очень трудно обнаружить сигнал от источника, находящегося на одном горизонте с приемником на расстоянии, превышающем r_m . В качестве примера рассчитаем угол θ для предельного луча и расстояние r_m при следующих исходных данных: $c = 1500$ м/с; $g = -0,21$ /с; $d = 122$ м. На основании выражений (5.6) и (5.7) получим

$$\theta_m = \arccos [1 - 120 (0,2/1500)] = 10,26^\circ;$$

$$r_m = 2 (1500/0,2) \sin 10,26^\circ = 2673 \text{ м},$$

т. е. для источника и приемника, находящихся на одной глубине, обнаружение будет ограничено дальностью около 2700 м. На расстояниях, меньших r_m , потери при распространении будут весьма близко следовать сферическому закону.

Определим влияние донных отражений на интенсивность сигнала в области, непосредственно примыкающей к границе зоны тени, при расположении источника и приемника на одинаковой глубине, равной 4500 м (рис. 5.14). Пусть частота сигнала 3 кГц, а дно — с умеренным поглощением. Для больших углов скольжения в соответствии с геометрией рисунка потери при отражении от дна могут быть около 14 дБ. Кроме этого, необходимо учесть потери, связанные с поглощением и составляющие приблизительно 0,2 дБ/км.

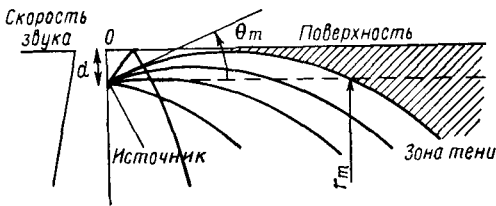


Рис. 5.13. Распространение в приповерхностном слое с отрицательным градиентом

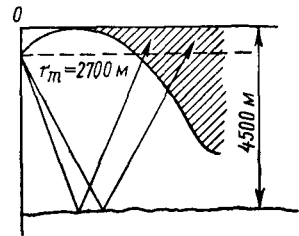


Рис. 5.14. Траектории лучей, отраженных от дна в глубоком море

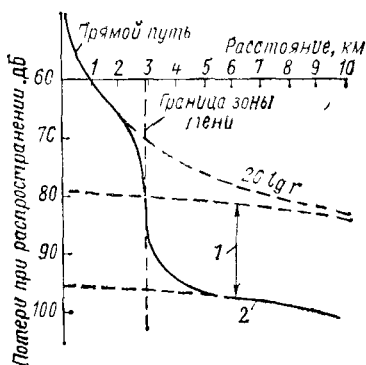


Рис 5.15 Расчетные потери при распространении в зоне тени с учетом донных отражений в глубоком море (глубина источника и приемника 120 м, глубина моря 4500 м):

1 — влияние потерь при отражении от дна и распространении; 2 — потери при работе методом донных отражений

мым сигналом на расстояниях, меньших r_m , отраженный сигнал пренебрежимо мал.

Для простоты предположим, что лучи, отражающиеся от дна, распространяются по прямолинейным траекториям. Тогда длина траектории отраженного луча, выходящего на горизонт источника на расстоянии r_m , составит 9167 м. Потери при распространении по сферическому закону составят 79,2 дБ, а суммарные потери, включая донные и поглощения, — 95,2 дБ. Следует отметить, что на горизонтальных расстояниях, меньших двойной глубины моря, потери распространения для отраженных от дна сигналов изменяются очень медленно. При горизонтальном расстоянии 9000 м длина пути отраженного от дна луча составит 12560 м, а общие потери при распространении будут $82 + 2,5 + 14 = 98,5$ дБ.

На рис. 5.15 приведен график общих потерь при распространении в виде комбинации потерь при прямом распространении на дистанции до 2700 м и потерь при распространении с отражением от дна. Резкая граница между зоной освещенности и зоной тени, соответствующая лучевой теории, видоизменена таким образом, чтобы дать более реальную картину.

В мелком море отрицательный градиент может сохраняться до самого дна и в этом случае донные потери при распространении звука окажутся доминирующим фактором. На рис. 5.16 показана картина распространения звука от ненаправленного источника на глубине d в канале глубиной h . Лучи, выходящие из источника под углом $\pm\theta_m$, касаются поверхности и отражаются от дна с интервалом r_s . Допустим, глубина моря мала

Потери при распространении от источника до зоны тени на рис. 5.15 соответствуют потерям, определяемым расширением фронта волны. Интенсивность прямых лучей на границе зоны в соответствии с лучевой теорией падает до нуля.

Рассмотрим теперь сигнал, отраженный от дна. До выхода на горизонт источника при нормальном падении сигнал проходит расстояние 8760 м. С учетом сферического закона распространения потери составят 78,9 дБ. К ним необходимо прибавить донные потери (14 дБ) и потери при поглощении (2 дБ). Общие потери при распространении составят 94,9 дБ. По сравнению с пря-

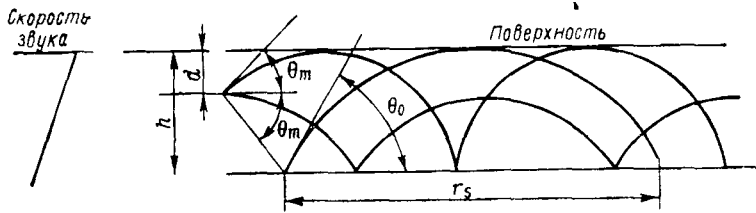


Рис. 5.16 Распространение звука в мелководном канале с отрицательным температурным градиентом

по сравнению с радиусом кривизны для обоих предельных лучей θ_m и θ_0 (максимальный угол предельного луча). Воспользовавшись аппроксимацией для малых углов и упростив выражения, приведенные в п. 4.4, получим следующие соотношения [5]:

$$\left. \begin{aligned} \theta_m &= (2d/R)^{1/2} \text{ рад}; & \theta_0 &= (2h/R)^{1/2} \text{ рад}; \\ r_s &= (8hR)^{1/2}; & R &= -c_0/g. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Все лучи, выходящие из источника под углом, меньшим $\pm\theta_m$, не достигают поверхности и последовательно отражаются от дна с интервалом, меньшим r_s . Лучи, угол выхода которых превышает θ_m , отражаются от дна и поверхности с интервалом, который быстро уменьшается по мере увеличения угла выхода.

Вследствие потерь при отражении от дна и поверхности эти лучи с углом выхода вне диапазона $\pm\theta_m$ быстро затухают, а на большие расстояния распространяется лишь энергия, которая заключена в пределах $\pm\theta_m$. Интенсивность на единичном расстоянии от источника обратно пропорциональна площади единичной сферы в пределах угла $2\theta_m$. Легко показать, что эта площадь равна $4\pi \sin^2 \theta_m$. Энергия, проходящая через указанную поверхность, распространяется в радиальных направлениях от источника звука и по достижении границ поверхности и дна распределяется по поверхности цилиндра с высотой h . Площадь цилиндра на большом расстоянии равна $2\pi r h$. Уменьшение интенсивности звука при распространении на расстояние r по сравнению с единичным расстоянием без учета донных потерь и потерь при поглощении пропорционально отношению площадей. Таким образом,

$$\text{ПР} = 10 \lg \left(\frac{2\pi r h}{4\pi \sin^2 \theta_m} \right) = 10 \lg \left(\frac{r h}{2 \sin^2 \theta_m} \right). \quad (5.9)$$

Назовем r_0 переходным расстоянием, равным

$$r_0 = h/(2 \sin^2 \theta_m). \quad (5.10)$$

Тогда выражение (5.9) можно переписать в виде

$$\text{ПР} = 10 \lg (r r_0) = 10 \lg r_0 + 10 \lg r. \quad (5.11)$$

Из равенства (5.11) следует, что на расстоянии $r > r_0$ интенсивность уменьшается обратно пропорционально r , а не r^2 , т. е. подчиняется цилиндрическому закону распространения.

На расстоянии $r = r_0$ потери обратно пропорциональны r^2 . Общие потери при распространении будут суммой потерь при сферическом распространении до переходного расстояния и потерь при цилиндрическом распространении на расстояниях, больших переходного.

Теперь необходимо учесть донные потери и потери при поглощении, добавив их к потерям, определяемым равенством (5.11). Количество отражений от дна для предельного поверхностного луча на расстоянии r :

$$n \approx r/r_s = r/(8hR)^{1/2}. \quad (5.12)$$

Положив скорость звука, равной 1500 м/с, представим выражение (5.12) в виде

$$n = 9,13r10^{-3}(-g/h)^{1/2}, \quad (5.13)$$

где r и h измеряются в метрах. Лучи, выходящие из источника под углом, меньшим θ_m , отражаются от дна большее число раз, чем это определено выражением (5.13). Используя это выражение, можно определить минимальные потери при распространении в мелководном канале на расстояниях, больших r_0 :

$$ПР = 10 \lg r_0 + 10 \lg r + 10^{-3}(\alpha_a + 9,13\alpha_b \sqrt{-g/h})r, \quad (5.14)$$

где r_0 — переходное расстояние, м; r — расстояние, м;

α_a — коэффициент пространственного затухания, дБ/км;

α_b — донные потери при однократном отражении, дБ;

g — градиент скорости звука; h — глубина, м.

В качестве примера рассмотрим канал глубиной 120 м с глубиной источника 60 м, градиентом скорости звука $0,2 \text{ с}^{-1}$ и скоростью звука у поверхности 1500 м. Используя формулы (5.8) и (5.10), получим $\theta_m = 0,1265 \text{ рад} = 7,25^\circ$; $r_0 = 476 \text{ м}$. С учетом полученных значений θ_m и r_0 выражение (5.14) принимает вид

$$ПР = 10 \lg 476 + 10 \lg r + 10^{-3}(\alpha_a + 0,373\alpha_b)r.$$

На рис. 5.17 приведены графики потерь при распространении на частотах 1 и 3 кГц для следующих значений α_a и α_b : $\alpha_a = 0,077 \text{ дБ/км}$, $f = 1 \text{ кГц}$; $\alpha_a = 0,22 \text{ дБ/км}$, $f = 3 \text{ кГц}$; $\alpha_b = 0,5 \text{ дБ/1 отражение}$, $f = 1 \text{ кГц}$; $\alpha_b = 3 \text{ дБ/1 отражение}$, $f = 3 \text{ кГц}$.

Необходимо обратить внимание на существенную частотную зависимость, вызванную донными потерями. На частоте 1 кГц потери при распространении становятся больше потерь для сферического закона на расстоянии около 90 км, в то время как на частоте 3 кГц — уже на расстоянии 9 км. На частотах ниже

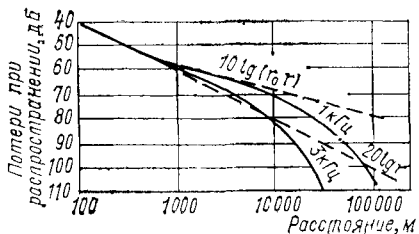


Рис. 5.17. Потери при распространении в мелководном канале с отрицательным градиентом скорости звука

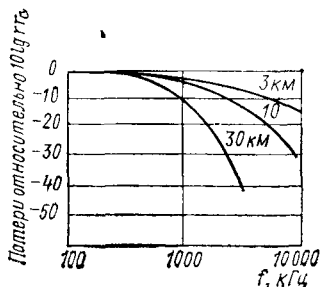


Рис. 5.18. Частотная характеристика мелководного канала с отрицательным градиентом

500 Гц донные потери становятся пренебрежимо малыми, и звук распространяется по цилиндрическому закону. Вместе с тем применение методов лучевой акустики для расчета интенсивности в мелководном канале не совсем правомерно. Интенсивность, полученная с помощью нормальных мод, может существенно отличаться от закона цилиндрического распространения, показанного на рис. 5.17.

На рис. 5.18 приведена частотная характеристика рассмотренного выше мелководного канала при цилиндрическом распространении для нескольких расстояний. Как видно, мелководный канал подобен фильтру нижних частот с частотой среза, уменьшающейся по мере увеличения расстояния до источника. Очевидно, в случае широкополосного источника мелководный канал приведет к изменению огибающей спектра, причем степень изменения формы будет зависеть от расстояния.

Частота, при которой начинается завал частотной характеристикой мелководного канала, уменьшается при уменьшении глубины моря, увеличении отрицательного градиента или донных потерь. Для получения точных результатов с учетом большого диапазона изменений характеристик дна необходимо с особой тщательностью относиться к выбору величины донных потерь. Если есть возможность, целесообразно провести измерения на месте, чтобы убедиться в правильности сделанного выбора.

5.5.2. Положительный градиент в приповерхностном слое

Во многих районах Мирового океана над слоем с отрицательным градиентом часто наблюдается изотермический слой. В северной части Атлантического океана такое явление существует приблизительно в течение 50 % зимнего сезона при глубине слоя около 60 м [5]. Характерный случай показан на рис. 5.19, где дана лучевая картина распространения звука от источника, расположенного в слое. При постоянстве температуры в слое

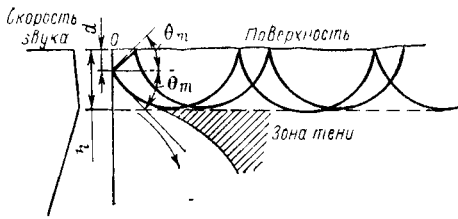
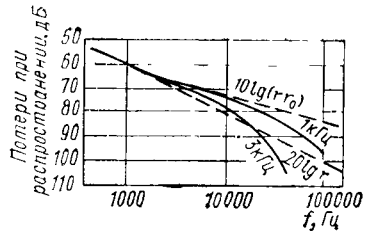


Рис. 5.19. Распространение звука в приповерхностном слое, ниже которого находится слой с отрицательным градиентом



Рисо. 5.20. Потери при распространении в приповерхностном слое

градиент скорости звука равен $+0,017 \text{ с}^{-1}$. Из рисунка видно, что лучи, выходящие из источника под углом, большим θ_m , или сначала отражаются от поверхности или непосредственно рефракгируют в сторону дна.

Необходимо обратить внимание на зону тени, образующуюся под слоем на расстоянии, большем точки касания границы слоя первого предельного (расщепившегося) луча. Если приповерхностный слой полностью захватывает энергию, излученную источником в пределах угла $\pm\theta_m$, потери при распространении подчиняются цилиндрическому закону в соответствии с формулой (5.11). Как и в случае отрицательного градиента, существует несколько факторов, приводящих к нарушению характеристик цилиндрического закона распространения: потери при отражении от поверхности и потери, связанные с поглощением и утечкой звука из слоя через нижнюю границу раздела вследствие наличия в ней нерегулярностей. Кроме того, описание свойств приповерхностного канала методами лучевой акустики может оказаться неадекватным на низких частотах при длине волны, сравнимой с толщиной слоя.

Потери при отражении от поверхности приводят к частотно-зависимым характеристикам распространения, аналогичным характеристике мелководного канала с отрицательным градиентом. Однако вследствие очень большого радиуса кривизны в изотермическом слое число отражений на 1 км значительно меньше, чем при большом отрицательном градиенте.

Для изотермического слоя глубиной 120 м и источником на глубине 60 м на основании формул (5.8) и (5.10)

$$R = \frac{1500}{0,017} = 88235 \text{ м}; \quad \theta_m = \left[\frac{2(h-d)}{R} \right]^{1/2} = 0,037 \text{ рад} = 2,1^\circ;$$

$$r_s = 9200 \text{ м}; \quad r_0 = 1640 \text{ м}.$$

Поскольку число отражений обратно пропорционально r_s , выражение для минимального значения потерь при распространении в приповерхностном слое принимает вид

$$\text{ПР} = 10 \lg 1640 + 10 \lg r + 10^{-4} r a_s + 10^{-3} r a_s,$$

где α_s — потери при однократном отражении от поверхности. Пусть эти потери составляют 0,5 и 3 дБ для частот 1 и 3 кГц, что на основании рис. 5.6 приблизительно соответствует состоянию моря 3 балла. График суммарных потерь при распространении приведен на рис. 5.20. На частоте 1 кГц потери в приповерхностном канале значительно меньше потерь для сферического закона распространения даже на расстоянии 100 км. Однако для 3 кГц на расстоянии более 30 км потери очень быстро нарастают. При волнении моря более 3 баллов свойства приповерхностного слоя как акустического канала быстро разрушаются. При штилевом состоянии моря потери при распространении достаточно близко соответствуют цилиндрическому закону распространения.

5.6. Подводный звуковой канал

Переходная область между основным термоклинном и глубоководным изотермическим слоем создает в океане эффект акустической линзы. В средних широтах эта область находится на глубине от 900 до 1200 м и содержит точку минимальной скорости звука.

Если источник расположен в точке с минимальной скоростью звука, лучи, выходящие из источника, будут осциллировать вверх и вниз относительно горизонта источника (рис. 5.21). Глубину минимальной скорости звука называют осью глубоководного подводного звукового канала. Как показано на рисунке, звуковые лучи источника, расположенного на оси, концентрируются вдоль оси, так что интенсивность звуковой энергии уменьшается в соответствии с цилиндрическим, а не сферическим законом распространения (при этом, конечно, необходимо учитывать потери при поглощении в функции частоты и расстояния).

Свойства подводного звукового канала используют при спасении потерпевших аварию летчиков. Небольшие взрывные источники звука, которые сбрасывают приводнившиеся летчики, подрываются на оси подводного звукового канала. Измеряя время приема сигнала на нескольких приемных станциях, можно определить местонахождение летчика. Сигналы подобных взрывных источников обнаруживаются на расстоянии в 2000 миль и более. Иногда подводный звуковой канал называют волноводом СОФАР (SOund Fixing And Ranging — определение и измерение местоположения с помощью звука).

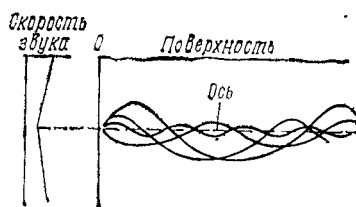


Рис. 5.21. Траектории звуковых лучей в глубоководном подводном звуковом канале:

--- ось подводного звукового канала

5.7. Распространение звука в дальних зонах акустической освещенности

При существовании в океане профиля скорости звука, подобного изображенному на рис. 5.21, лучи, выходящие из источника звука, расположенного выше или ниже оси, осциллируют относительно оси канала. В глубоком море практический интерес представляет случай относительно близкого к поверхности расположения источника и приемника. Рассмотрим лучевую картину (рис. 5.22), аналогичную примеру, рассмотренному в п. 4.4.1, для источника вблизи поверхности. Если изобразить только те лучи, которые не пересекают поверхность и дно, можно увидеть, что они периодически возвращаются к поверхности в узких полосах по дальности, которые называют зонами конвергенции. В средних широтах расстояние между зонами обычно составляет от 60 до 70 км, а протяженность зон лежит в пределах 5...10% от дистанции. Следует обратить внимание на то, что для существования зоны освещенности глубина моря должна быть достаточно большой, чтобы скорость звука у дна оказалась равной или большей, чем на поверхности.

Рассмотрим зависимость потерь при распространении и от расстояния для приемника, расположенного на глубине источника. На малых расстояниях вплоть до зоны тени потери подчиняются сферическому закону распространения. В зоне тени интенсивность резко падает до значений, определяемых условиями донных отражений, и сохраняется это значение до начала зоны конвергенции. В зоне конвергенции происходит скачкообразное нарастание интенсивности, величина которой обычно превосходит значения, соответствующие сферическому закону распространения. За пределами первой зоны конвергенции интенсивность вновь падает до уровня, определяемого величиной донных отражений. Можно легко показать, что для достижения второй зоны

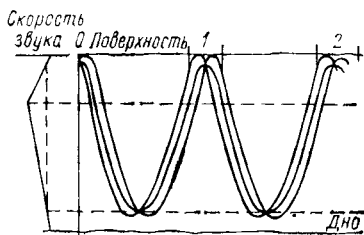


Рис. 5.22. Распространение при наличии зон конвергенции; 1 и 2 — первая и вторая зона конвергенции

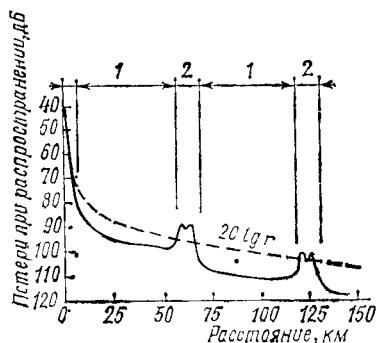


Рис. 5.23. Потери при распространении в глубоком море при наличии зон конвергенции:

1 — зона донных отражений; 2 — зона конвергенции

конвергенции потребуется два донных отражения. На рис. 5.23 приведена типичная зависимость потерь при распространении от дальности для условий существования зон конвергенции.

5.8. Зона сплошной акустической освещенности

Зоны конвергенции обеспечивают еще один вид работы с применением буев в глубоком море. Пусть приемная система находится на глубине, где скорость звука равна максимальной скорости у поверхности. Лучи, выходящие из приемника горизонтально, вновь становятся горизонтальными у поверхности. Все лучи выше горизонтальных отражаются от поверхности так же, как и лучи ниже горизонтальных, включая и предельный донный луч. Лучевая картина (рис. 5.24) показывает существование надежной зоны акустической освещенности на расстоянии, превышающем половину расстояния до начала зоны конвергенции. В данном случае максимальное расстояние зависит от глубины моря под приемником. Характер изменения потерь приближается к сферическому закону распространения (при измерении расстояния от приемника до поверхности).

На практике глубина моря часто оказывается недостаточной для образования зон конвергенции и возможности использования такого типа распространения. Если антенна размещена вблизи дна в глубоком море, освещение среды обеспечивается по крайней мере в пределах донного предельного луча. Эти условия распространения получили название надежной зоны акустической освещенности (РАП — reliable acoustic path — надежная акустическая траектория) вследствие относительной стабильности их характеристик.

5.9. Флюктуация звука в море

Интенсивность звука, измеренного на некотором расстоянии от стабильного источника, обычно флюктуирует во времени. Одна из причин флюктуации — изменчивость поверхности моря, другая обусловлена температурной микроструктурой верхних слоев океана. Тщательные измерения температуры в фиксированной точке в течение длительного времени или на фиксированной глубине в функции от горизонтального расстояния выявили температурные изменения в пределах долей градуса. Несмотря на свою малость, они приводят к отклонениям скорости звука, что,

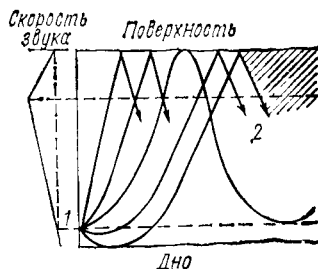


Рис. 5.24. Траектории звуковых лучей в зоне акустической освещенности:

1 — источник; 2 — луч, претерпевающий полное внутреннее отражение у дна

в свою очередь, изменяет процесс рефракции. Кумулятивный эффект вдоль траектории луча вызывает заметные изменения интенсивности.

Прогноз потерь при распространении на основе линейно или плавно изменяющегося профиля скорости звука соответствует, в лучшем случае, среднему значению измеренных данных. Ожидаемая величина флюктуации интенсивности вследствие температурной микроструктуры может составить около 50 % от среднего значения.

Задачи

5.1. Используя формулу (5.1), рассчитайте градиент скорости звука для солености 35 ‰ при $T = 0$ и $+10^\circ\text{C}$.

5.2. Осью подводного звукового канала является глубина с минимальной скоростью звука. Применяя формулу (5.1), рассчитайте вертикальный температурный градиент на глубине минимальной скорости звука в предположении отрицательного температурного градиента, солености 35 ‰ и температуры около 0°C .

5.3. Используя критерий Рэлея и угол скольжения 10° , рассчитайте максимальную высоту волны, при которой поверхность еще считается гладкой, на частотах 1, 10 и 30 кГц. Оцените для этих высот потери отражения от поверхности в соответствии с выражением (5.2).

5.4. Глубина изотермического приповерхностного слоя 400 м, источник звука находится на глубине 30 м. Рассчитайте θ_m , r_0 и r_s . Определите число отражений от поверхности на 1 км расстоянии для предельного луча, выходящего под углом θ_m . Сравните число отражений от поверхности на 1 км для этого луча с числом отражений для луча, выходящего из источника горизонтально. Скорость звука 1500 м/с.

5.5. Оцените потери при распространении для приемника, находящегося в слое на расстоянии 30 км для условий упражнения 5.4. Частота сигнала 3 кГц, потери при однократном отражении 3 дБ, коэффициент пространственного затухания 0,2 дБ/км. Расчет выполните для луча, выходящего из источника под углом θ_m , а затем сравните с потерями для луча, выходящего из источника горизонтально.

5.6. Глубина моря 4000 м. Глубина приемника 3000 м. Профиль скорости звука показан на рис. 4.11. Рассчитайте горизонтальное расстояние от приемника до точки пересечения поверхности предельным донным лучом.

Список литературы

1. *Kuwahara S.* Velocity of Sound in Sea Water and Calculation of the Velocity for Use in Sonic Sounding, *Hydrogr. Rev.*, Vol. 16. P. 123 (1939).
2. *DelGrosso V. A.* Velocity of Sound in Sea Water at Zero Depth, U. S. Naval Research Laboratory Report 4002, 1952
3. *Wilson W. D.* Speed of Sound in Sea Water as a Function of Temperature, Pressure and Salinity. *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 32. P. 641 (1960).
4. *Kunsler L. E., Frey A. R.* Fundamentals of Acoustics, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962
5. *Urick R. J.* Principles of Underwater Sound for Engineers, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1975, Chaps 5 and 6.
6. *Podeszwa E. M.* Sound Speed Profiles for the North Atlantic Ocean. Naval Underwater Systems Center, Technical Document 5447, 1976.
7. *Marsh H. W.* Exact Solution of Wave Scattering by Irregular Surfaces. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 33. P. 330 (1961).
8. *March H. W., Schulkin M., Kneale S. G.* Scattering of Underwater Sound by the Sea Surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 33. P. 334 (1961).

9. *Weinberg H.* Generic Sonar Model. Naval Underwater Systems Center, Technical Document 5971-A, Feb. 27, 1980
10. *Thorp W. H.* Deep Ocean Sound Attenuation in the Sub- and Low-Kilocycle-per-Second Region. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 38. P. 648 (1965).
11. *Brekhovskikh L. M.* Waves in Layered Media. New York: Academic Press, Inc., 1960.
12. *Mackenzie K. V.* Long-Range Shallow-Water Transmission. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 33. P. 1505 (1961).
13. *Weston D. E.* Propagation of Sound in Shallow Water. J. Br. IRE, Vol. 26. P. 329 (1963).
14. *Whitmarsh D. C., Skudryzk E., Urick R. J.* Forward Scattering of Sound in the Sea and Its Correlation with Temperature Microstructure, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 29. P. 1124 (1957).

Глава 6.

МЕТОДЫ ФУРЬЕ

Анализ гидроакустических систем включает в себя рассмотрение сигналов, шумов и их преобразование в ходе различных, осуществляемых системой, операций, таких, как фильтрация и обнаружение.

Преобразование функций сложного вида из временной в частотную область с помощью методов Фурье оказывается в этом случае весьма полезным. Реакцию линейных систем на воздействие сложных входных сигналов можно определить непосредственно по их реакции на воздействие синусоидальных сигналов различной частоты. При этом расчет выходного сигнала такой системы часто упрощается.

В этой главе рассматривается разложение периодических функций в ряды Фурье, ведущее к более общему представлению преобразования Фурье-функций. Обсуждаются основные операции, необходимые при системном анализе (умножение, свертка, дифференцирование и интегрирование) как во временной, так и частотной областях. С помощью вводимых понятий и системы обозначений формируется теорема о выборке¹. И, наконец, обсуждается аналитический сигнал в связи с комплексным представлением вещественных сигналов и понятием огибающей.

6.1. Разложение функций

Многие функции сложного вида можно представить в некотором конечном интервале $[x_1, x_2]$ как

$$f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x), \quad (6.1)$$

¹ В отечественной литературе эта теорема называется теоремой Котельникова. *Ред.*

где функции $\varphi_n(x)$ называются *базисными функциями* разложения, а определению подлежат постоянные a_n . В общем случае, для того чтобы средний квадрат разности исходной функции и ее разложения в ряд был равен нулю, требуется бесконечное число членов.

Большинство инженеров знакомо с разложением функции в ряд на примере разложения в *ряд Тейлора* по степеням независимой переменной. Непрерывная функция $f(x)$ с конечными производными в точке x_0 может быть представлена в окрестности этой точки рядом Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (6.2)$$

где

$$a_n = \left. \frac{d^n f(x)}{n! dx^n} \right|_{x=x_0} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Хотя ряд Тейлора полезен во многих случаях, он не очень удобен для большинства задач анализа сигналов и систем.

Удобным классом базисных функций является такой, в котором функции, входящие в данное множество, взаимно ортогональны. Набор функций $\varphi_n(x)$ ортогонален в интервале $[x_1, x_2]$ с неотрицательной весовой функцией $r(x)$, если для любых m и n

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) \varphi_m(x) \varphi_n^*(x) dx = \begin{cases} A_n & \text{при } m = n; \\ 0 & \text{при } m \neq n, \end{cases} \quad (6.3)$$

где A_n — постоянная, а $\varphi_n^*(x)$ комплексно сопряжена с $\varphi_n(x)$. Соотношение (6.3) иногда записывают в более компактном виде с помощью функции, называемой *символом Кронекера* и определяемой в виде

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n; \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases} \quad (6.4)$$

Подставляя определение (6.4) в (6.3), получим

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) \varphi_m(x) \varphi_n^*(x) dx = A_n \delta_{mn}. \quad (6.5)$$

Ценность ортогональных функций в качестве базиса разложения заключается в легкости, с которой можно находить коэффициенты a_n . Допустим, например, что базисные функции в уравнении (6.1) ортогональны, и умножим обе части уравнения на $r(x) \varphi_n^*(x)$, где $\varphi_n(x)$ — конкретная функция из совокупности базисных функций.

При интегрировании по интервалу ортогональности получим

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) f(x) \varphi_n^*(x) dx = \int_{x_1}^x r(x) [a_0 \varphi_0(x) \varphi_n^*(x) + \dots \\ \dots + a_m \varphi_m(x) \varphi_n^*(x) + a_n |\varphi_n(x)|^2 + \dots] dx. \quad (6.6)$$

Вследствие соотношений ортогональности (6.3) или (6.5) все члены в правой части уравнения (6.6) равны нулю, за исключением члена, содержащего $|\varphi_n(x)|^2$. Следовательно,

$$\int_{x_1}^{x_2} r(x) f(x) \varphi_n^*(x) dx = a_n \int_{x_1}^x r(x) |\varphi_n(x)|^2 dx = a_n A_n, \quad (6.7)$$

откуда

$$a_n = 1/A_n \int_{x_1}^{x_2} r(x) f(x) \varphi_n^*(x) dx. \quad (6.8)$$

6.2. Ряд Фурье в комплексной форме

Функция называется периодической, если существует такое T , называемое периодом, что для любого x и любого целого числа n $f(x) = f(nT + x)$. Отсюда следует, что если периодическая функция известна в некотором интервале $[x_1, x_1 + T]$, то она известна во всей области изменения значений x .

Разложение периодических функций обычно осуществляется с помощью базисных функций, которые сами являются периодическими, причем их периоды связаны с периодом функции, подлежащей разложению. Например, при разложении в ряд Фурье в качестве базисных используются синусоидальные и косинусоидальные функции.

Для образования комплексной базисной функции удобно, пользуясь формулой Эйлера, объединить члены, содержащие синусы и косинусы. Таким образом.

$$\begin{aligned} \text{комплексная базисная функция} &= \exp(j\omega_n x) = \\ &= \cos \omega_n x + j \sin \omega_n x, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $\omega_n = n\omega_1 = 2\pi n f_1$. Такие комплексные экспоненциальные базисные функции приводят к комплексным коэффициентам ряда Фурье. Получающееся в результате разложение периодической функции тождественно совпадает с таким же разложением при использовании вещественных тригонометрических функций.

Базисные функции, определяемые выражением (6.9), ортогональны на основном периоде $T = 1/f_1$ с весовой функцией $r(x) = 1$. Легко проверить, что

$$\int_{x_1}^{x_1+T} \exp(jm\omega_1 x) \exp(-jn\omega_1 x) dx = \delta_{mn} T. \quad (6.10)$$

Ряд Фурье в комплексном виде для произвольной функции можно записать как

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \exp(jn\omega_1 x), \quad (6.11)$$

где постоянные α_n находятся с помощью формул (6.8) и (6.10). Таким образом,

$$\alpha_n = 1/T \int_T f(x) \exp(-jn\omega_1 x) dx. \quad (6.12)$$

Отметим, что в выражении (6.11) индекс суммирования n может меняться в бесконечных пределах. Отметим также, что постоянная α_n может в общем случае быть комплексной, хотя $f(x)$ и является вещественной. Для исследования свойств комплексных коэффициентов Фурье полезно разбить $f(x)$ на четную и нечетную составляющие. Четная функция определяется как такая функция, для которой $f(x) = f(-x)$ при любом x . Косинусоидальная функция является четной функцией своего аргумента относительно начала координат. Для нечетной функции $f(x) = -f(-x)$. Типичный пример нечетной функции — синусоидальная функция. Вещественную функцию $f(x)$ можно разбить на четную и нечетную составляющие следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f_{\text{ч}}(x) &= [f(x) + f(-x)]/2; \\ f_{\text{нч}}(x) &= [f(x) - f(-x)]/2. \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Произведение четной и нечетной составляющих $f(x)$ дает

$$f_{\text{ч}}(x) f_{\text{нч}}(x) = [f^2(x) - f^2(-x)]/4. \quad (6.14)$$

Можно показать, что интеграл от выражения (6.14) по всем x равен нулю, откуда следует, что четная и нечетная составляющие функции ортогональны. Этот вывод можно обобщить и показать, что все четные функции ортогональны нечетным в интервале, симметричном относительно начала координат.

Теперь коэффициенты Фурье для $f(x)$ можно выразить в виде

$$\alpha_n = 1/T \int_T [f_{\text{ч}}(x) + f_{\text{нч}}(x)] \exp(-jn\omega_1 x) dx. \quad (6.15)$$

Заметим, что сама функция $\exp(-jn\omega_1 x)$ может быть разбита на четную и нечетную составляющие с помощью формулы Эйлера, а произведения вида $f_{\text{ч}}(x) \sin n\omega_1 x$ и $f_{\text{нч}}(x) \cos n\omega_1 x$ при интегрировании дают нуль. Уравнение (6.15) примет окончательный вид

$$\alpha_n = 1/T \int_T f_{\text{ч}}(x) \cos n\omega_1 x dx - j/T \int_T f_{\text{нч}}(x) \sin n\omega_1 x dx. \quad (6.16)$$

Это соотношение показывает, что вещественная часть α_n получается из четной составляющей $f(x)$, а нечетная составляющая $f(x)$ порождает мнимую часть α_n .

Вследствие свойств четности и нечетности синусоидальных и косинусоидальных функций вещественная часть α_n не меняется при изменении знака n , а мнимая часть меняет знак вместе со знаком n , т. е.

$$\operatorname{Re}[\alpha_n] = \operatorname{Re}[\alpha_{-n}], \quad \operatorname{Im}[\alpha_n] = -\operatorname{Im}[\alpha_{-n}],$$

откуда

$$\alpha_n = \alpha_{-n}^*. \quad (6.17)$$

Уравнение (6.17) показывает, что комплексные коэффициенты Фурье для вещественной функции обладают свойством *комплексно-сопряженной симметрии*.

6.2.1. Пример: периодическая последовательность импульсов

Рассмотрим периодическую последовательность прямоугольных импульсов, показанную на рис. 6.1. Такой вид могло бы иметь, например, меняющееся во времени напряжение или давление. Каждый импульс имеет ширину t_n , период T и амплитуду A . Вследствие периодического характера такого сигнала его функция полностью определяется заданием ее значений в интервале $[-T/2, T/2]$. Таким образом,

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{при } -t_n/2 \leq t \leq t_n/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Комплексные коэффициенты Фурье определяются следующим образом:

$$\alpha_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jn\omega_1 t) dt = A/T \int_{-t_n/2}^{t_n/2} \exp(-jn\omega_1 t) dt.$$

С помощью элементарных выкладок получаем

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -\frac{A}{jn\omega_1 T} \exp(-jn\omega_1 t) \Big|_{-t_n/2}^{t_n/2} = \\ &= \frac{A}{jn\omega_1 T} \left[\exp\left(\frac{jn\omega_1 t_n}{2}\right) - \exp\left(\frac{-jn\omega_1 t_n}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Используя формулу Эйлера, это выражение можно представить в виде

$$\alpha_n = \frac{At_n}{T} \frac{\sin(n\omega_1 t_n/2)}{n\omega_1 t_n/2} = \frac{At_n}{T} \frac{\sin(\pi n f_1 t_n)}{\pi n f_1 t_n}. \quad (6.18)$$

Отметим, что для данного примера мнимая часть α_n равна нулю. Это объясняется тем, что функция $f(t)$ четная. Разложение Фурье $f(t)$ можно теперь записать так:

$$f(t) = \frac{At_n}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n f_1 t_n)}{\pi n f_1 t_n} \exp(j2\pi n f_1 t). \quad (6.19)$$

Поскольку в этом примере $f(t)$ вещественна, суммирование мнимых членов в уравнении (6.19) дает в результате нуль.

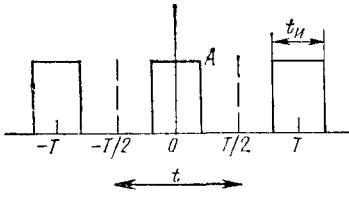


Рис. 6.1. Последовательность прямоугольных импульсов

$n = 1$ и $n = -1$ дает амплитуду составляющей на основной частоте f_1 , содержащейся в сигнале. Аналогично этому частотное содержание на каждой из гармоник основной частоты дается суммой составляющих при $n = \pm 2, \pm 3, \dots$. На рис. 6.2 выделим следующее.

1. Линии спектра периодического сигнала отстоят друг от друга на величину $f_1 = 1/T$.

2. Спектр данного конкретного сигнала симметричен относительно частоты $f = 0$.

3. Спектр этого сигнала сосредоточен в основном в области между $f = -1/t_n$ и $f = 1/t_n$.

Если период сигнала возрастает, то расстояние между линиями спектра уменьшается. Однако *огибающая* спектра остается неизменной при условии, что форма сигнала в пределах одного периода остается той же.

В качестве варианта этого примера допустим, что периодическая последовательность импульсов (см. рис. 6.1) смещается вправо на величину t_0 , как показано на рис. 6.3. Сигнал в одном периоде определяется как $f(t) = A$ при $t_0 - t_n/2 \leq t \leq t_0 + t_n/2$, а коэффициенты Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{A}{T} \int_{t_0 - t_n/2}^{t_0 + t_n/2} \exp(-jn\omega_1 t) dt = -\frac{A}{jn\omega_1 T} \exp(-jn\omega_1 t) \Big|_{t_0 - t_n/2}^{t_0 + t_n/2} = \\ &= \frac{A}{jn\omega_1 T} \exp(-jn\omega_1 t_0) \left[\exp\left(\frac{jn\omega_1 t_n}{2}\right) - \exp\left(-\frac{jn\omega_1 t_n}{2}\right) \right] = \\ &= \left[\frac{At_n}{T} \frac{\sin(n\omega_1 t_n/2)}{n\omega_1 t_n/2} \right] \exp(-jn\omega_1 t_0). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Смещение на величину t_0 дает в результате спектр, который содержит мнимые слагаемые из-за того, что периодический сигнал содержит теперь и четную, и нечетную составляющие. Отметим, однако, что *амплитуда* спектра

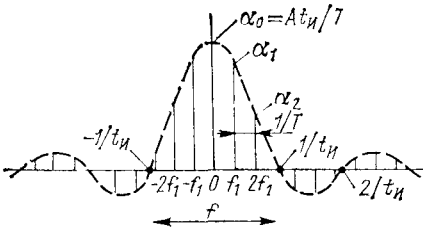


Рис. 6.2. Амплитудный спектр последовательности прямоугольных импульсов с центром в начале координат

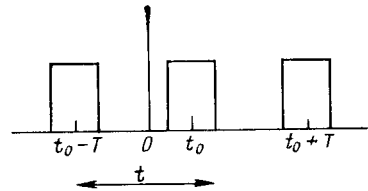


Рис. 6.3. Периодическая последовательность импульсов с центром в точке $t = t_0$

совпадает с амплитудой в выражении (6.18). Информация относительно временного сдвига заключена целиком в комплексной показательной функции $\exp(-jn\omega_1 t_0)$. Это смещение приводит к фазовому сдвигу $n\omega_1 t_0$ всех линий исходного спектра. Фаза является линейной функцией частоты и прямо пропорциональна t_0 .

6.2.2. Спектральная плотность мощности. Теорема Парсеваля

Пусть $s(t)$ — периодический сигнал (напряжение) во временной области с разложением Фурье вида

$$s(t) = \sum_n \alpha_n \exp(jn\omega_1 t). \quad (6.21)$$

Средняя мощность, отдаваемая в нагрузку этим сигналом, прямо пропорциональна квадрату его эффективного значения и обратно пропорциональна действующему параллельному сопротивлению нагрузки. Сопротивление нагрузки удобно принять равным 1 Ом и приравнять мощность непосредственно среднему квадрату значения сигнала (напряжения). Такая условность будет часто использоваться в этой и последующих главах, причем, если нет особого указания, будет подразумеваться, что нагрузка равна 1 Ом. Поэтому средняя мощность сигнала вида (6.21) определяется следующим уравнением:

$$\frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T \left| \sum_n \alpha_n \exp(jn\omega_1 t) \right|^2 dt.$$

Этот квадрат суммы можно записать в виде двойной суммы и получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_T \left\{ \sum_m \sum_n \alpha_m \alpha_n^* \exp[j(m-n)\omega_1 t] \right\} dt = \\ &= \sum_m \sum_n \alpha_m \alpha_n^* \left\{ \frac{1}{T} \int_T \exp[j(m-n)\omega_1 t] dt \right\}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Вследствие ортогональности комплексных экспонент интеграл в правой части уравнения (6.22) представляет собой символ Кронекера, определенный выражением (6.4). Отсюда

$$\frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 dt = \sum_m \sum_n \alpha_m \alpha_n^* \delta_{mn} = \sum_n |\alpha_n|^2. \quad (6.23)$$

Средняя мощность сигнала, таким образом, определяется либо усредненным по времени квадратом его значения, либо суммой квадратов модулей коэффициентов Фурье. Это соотношение есть теорема Парсеваля. Квадраты модулей коэффициентов Фурье,

рассматриваемые как функция частоты, описывают распределение мощности сигнала в частотной области. Кривая зависимости этих коэффициентов от частоты называется *спектральной плотностью мощности* сигнала. Мощность, заключенная в любой ограниченной области частот, определяется с помощью суммирования спектральной плотности мощности по этой области.

6.3. Ограниченные во времени сигналы. Интегральное преобразование Фурье

В противоположность непрерывным периодическим сигналам многие функции обладают ограниченной протяженностью. В случае функций во временной области такие ограниченные во времени сигналы часто называются *переходными*.

Допустим, что сигнал, ограниченный во времени, имеет вид, показанный на рис. 6.4. Эта функция имеет заданную форму в интервале $[t_1, t_2]$ и равна нулю вне его. Если этот сигнал — напряжение или давление, то о нем можно говорить, что его полная энергия конечна, а средняя мощность (при усреднении по всей временной оси) равна нулю. Непрерывный или периодический сигнал, наоборот, обладает конечной средней мощностью, но бесконечной полной энергией. Поэтому переходный сигнал иногда называют *сигналом с конечной энергией*, а периодическую или непрерывную функцию — *сигналом с конечной мощностью*.

Функция, представленная на рис. 6.4, может быть разложена в ряд Фурье в интервале $[t_1, t_2]$, если допустить, что она повторяется с периодом, равным или большим длины интервала $[t_1, t_2]$. На рис. 6.5, *a* показан дискретный амплитудный спектр в предположении, что период T совпадает с $t_2 - t_1$. Расстояние между составляющими Фурье в этом случае равно $1/(t_2 - t_1)$. Если период увеличивается, как показано на рис. 6.5, *б*, то огибающая спектра остается той же (за исключением масштабного множителя), а расстояние между линиями уменьшается. Реальный сигнал, ограниченный во времени, получается в пределе, когда период стремится к бесконечности. Как показано на рис. 6.5, это приводит к тому, что расстояние между спектральными линиями стремится к нулю, т. е. получается непрерывный спектр. С возрастанием периода уменьшается основная частота f_1 . В разложении Фурье-сигнала мы можем заменить индекс суммирования n на nf_1 . Таким образом,

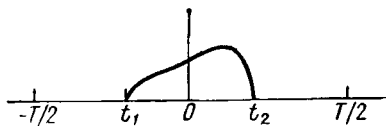


Рис. 6.4. Сигнал, ограниченный во времени

$$s(t) = \sum_{nf_1=-\infty}^{\infty} \alpha_{(nf_1)} \exp(i2\pi nf_1 t),$$

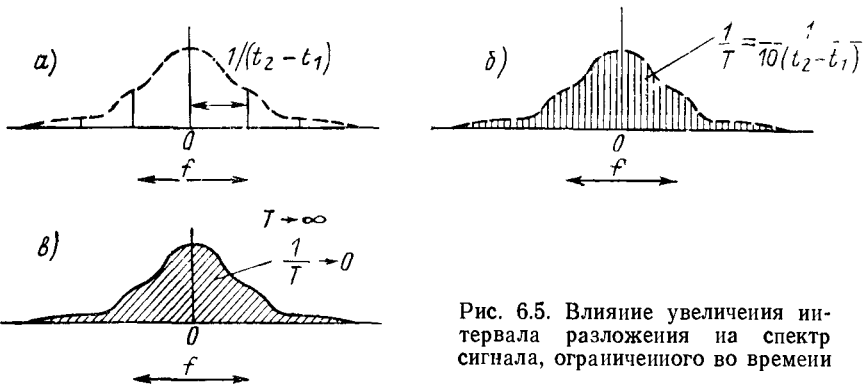


Рис. 6.5. Влияние увеличения интервала разложения на спектр сигнала, ограниченного во времени

где

$$\alpha_{(nf_1)} = f_1 \int_{-1/2f_1}^{1/2f_1} s(t) \exp(-j2\pi nf_1 t) dt.$$

Объединив эти выражения, получим

$$s(t) = \sum_{nf_1=-\infty}^{\infty} \left[f_1 \int_{-1/2f_1}^{1/2f_1} s(t') \exp(-j2\pi nf_1 t') dt' \right] \exp(j2\pi nf_1 t). \quad (6.24)$$

Когда период стремится к бесконечности, дискретная переменная nf_1 переходит в непрерывную переменную f . Кроме того, положим $f_1 \rightarrow df$ и $1/2f_1 \rightarrow 0$.

В пределе сумма в выражении (6.24) становится интегралом и

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t') \exp(-j2\pi ft') dt' \right] \exp(j2\pi ft) df. \quad (6.25)$$

Выражение (6.25) есть представление функции $s(t)$, ограниченной во времени, в виде *интеграла Фурье*. Оно может быть записано в более компактной форме, если определить

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (6.26)$$

и вместо (6.25) записать

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f_2) \exp(j2\pi ft) df. \quad (6.27)$$

Выражение (6.26) есть *преобразование Фурье* функции $s(t)$ во временной области в функцию $S(f)$ в частотной области. Выражение (6.27), наоборот, определяет *обратное преобразование*

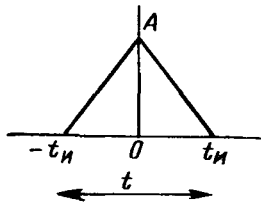


Рис. 6.6. Треугольный импульс

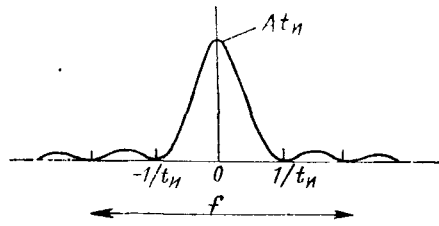


Рис. 6.7. Спектр треугольного импульса

Фурье функции $S(f)$ назад во временную область. Функции $s(t)$ и $S(f)$ называются *парой преобразований Фурье* и связь между ними будет обозначаться следующим символическим соотношением: $s(t) \leftrightarrow S(f)$.

Функция $S(f)$ в частотной области является непрерывным аналогом спектра Фурье функции $s(t)$. Для вещественной функции во временной области спектр обладает свойством симметрии при комплексном сопряжении, а именно:

$$S(f) = S^*(-f); \quad s(t) \text{ — вещественная функция.} \quad (6.28)$$

Вещественная часть $S(f)$ является преобразованием четной составляющей $s(t)$, а мнимая часть — преобразованием нечетной составляющей $s(t)$. Отсюда следует, что если $s(t)$ четна, то ее спектр чисто вещественен.

В качестве примера интегрального преобразования Фурье рассмотрим треугольный сигнал, приведенный на рис. 6.6. Этот сигнал определяется выражением

$$s(t) = \begin{cases} A(1 + t/t_n) & \text{при } -t_n \leq t \leq 0; \\ A(1 - t/t_n) & \text{при } 0 \leq t \leq t_n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Преобразование Фурье $s(t)$ имеет вид

$$S(f) = \int_{-t_n}^{t_n} s(t) \exp(-j2\pi ft) dt.$$

Поскольку $s(t)$ — четная функция t , то мнимая часть $S(f)$ равна нулю.

Следовательно,

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-t_n}^{t_n} s(t) \cos 2\pi ft dt = 2 \int_0^{t_n} s(t) \cos 2\pi ft dt = \\ &= 2A \int_0^{t_n} (1 - t/t_n) \cos 2\pi ft dt. \end{aligned}$$

С помощью таблицы элементарных интегралов получаем

$$S(f) = At_n \frac{\sin^2(\pi f t_n)}{(\pi f t_n)^2}. \quad (6.29)$$

Вид спектра треугольного импульса приведен на рис. 6.7. Отметим, что этот спектр представляет собой по форме квадрат спектра прямоугольного импульса шириной t_n .

6.4. Основные виды сигналов

Некоторые функции так часто встречаются при анализе сигналов и систем, что заслуживают отдельного рассмотрения и специальных обозначений. Прямоугольный импульс, рассмотренный в предыдущих примерах, единичная импульсная функция и единичная ступенчатая функция входят в их число.

6.4.1. Прямоугольная функция и ее преобразование

В предыдущих примерах прямоугольный импульс определялся выражением

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } -t_n/2 \leq t \leq t_n/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Стандартный прямоугольный импульс — это такой импульс, амплитуда и ширина которого равны единице. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{стандартный прямоугольный импульс} &= \\ &= \begin{cases} 1 & \text{при } -1/2 \leq t \leq 1/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Этот стандартный импульс может быть представлен более компактно следующим обозначением [1, 2]:

$$\text{стандартный прямоугольный импульс} = \text{rect}(t). \quad (6.30)$$

Импульс, имеющий амплитуду A и ширину t_n , примет вид

$$\begin{aligned} &A \text{rect}(t/t_n) = \\ &= \begin{cases} A & \text{при } -1/2 \leq t/t_n \leq 1/2 \text{ или } -t_n/2 \leq t \leq t_n/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Для преобразования прямоугольной функции легко получить

$$A \text{rect}(t/t_n) \leftrightarrow At_n \frac{\sin(\pi f t_n)}{\pi f t_n}, \quad (6.32)$$

откуда стандартный импульс и его преобразование

$$\text{rect}(t) \leftrightarrow \sin(\pi f)/(\pi f). \quad (6.33)$$

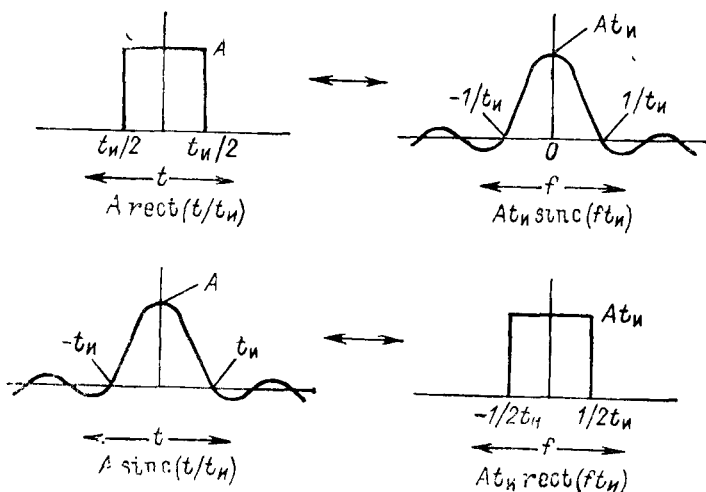


Рис. 6.8. Прямоугольные и sinc-функции во временной и частотной областях

Преобразование прямоугольного импульса называется *функцией sinc* (f), определяемой как

$$\text{sinc}(f) = \sin(\pi f)/(\pi f)$$

или

$$At_n \text{sinc}(ft_n) = At_n \frac{\sin(\pi ft_n)}{\pi ft_n}. \quad (6.34)$$

Применение прямоугольной функции не ограничивается только временной областью, а функции sinc — частотной. Например, функция sinc во временной области с амплитудой A и шириной до первого нуля t_n вместе со своим преобразованием может быть записана в виде

$$A \text{sinc}(t/t_n) \leftrightarrow At_n \text{rect}(ft_n). \quad (6.35)$$

Соотношения (6.32) и (6.35) для пар преобразований показаны на рис. 6.8.

6.4.2. Импульсная функция

Амплитуда функции, приведенной на рис. 6.9, *a*, равна нулю или постоянному значению A , за исключением области вблизи начала координат, где она изменяется линейно до нуля до A на отрезке длиной a . На рис. 6.9, *б* показана производная этой функции, представляющая собой прямоугольный импульс с амплитудой A/a и шириной a .

Заметим, что когда a становится очень малым, функция на рис. 6.9, *a* становится почти разрывной. В то же самое время про-

изводная становится исчезающе узким импульсом с амплитудой, обратно пропорциональной ширине. Площадь прямоугольного импульса остается постоянной и по значению равна амплитуде исходной функции в интервале, где она почти разрывна.

Импульсная функция определяется с помощью функции, подобной приведенной на рис. 6.9, б, в пределе $a \rightarrow 0$. Эффективное значение импульса равно площади функции. Так, импульс с эффективным значением A определяется как

$$A\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [(A/a) \text{rect}(t/a)]. \quad (6.36)$$

Единичный импульс получается при A , равной единице. Выражение, определяющее единичный импульс, можно также записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &= \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t \neq 0; \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1; \\ \int_{-\infty}^0 \delta(t) dt &= \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1/2. \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Единичный импульс может находиться и в точке, отличной от начала координат, например, t_0 . Тогда записываем

$$\left. \begin{aligned} \delta(t - t_0) &= \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_0; \\ 0 & \text{при } t \neq t_0; \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Рассмотрим результат умножения произвольного сигнала $s(t)$ на единичный импульс в точке t_0 . Произведение оказывается равным нулю во всех точках оси времени, за исключением точки, где находится импульс. В результате получается импульс

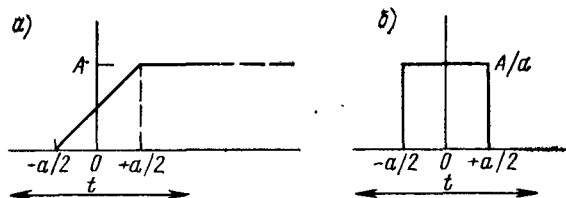


Рис. 6.9. Почти разрывная функция и ее производная

с эффективным значением, равным амплитуде сигнала $s(t)$ в t_0 . Таким образом, $s(t) \delta(t - t_0) = s(t_0) \delta(t - t_0)$. Интеграл от этого произведения

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - t_0) dt = s(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = s(t_0). \quad (6.39)$$

Используя соотношение в формуле (6.39), можно определить преобразование Фурье единичного импульса. Пусть $s(t) = \delta(t)$, тогда

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \exp(-j0) = 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta(t) \leftrightarrow 1. \quad (6.40)$$

Спектр единичного импульса в начале координат равен единице на всех частотах от минус до плюс бесконечности. Для импульса в некоторой другой точке преобразование имеет вид

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \exp(-j2\pi ft) dt = \exp(-j2\pi ft_0)$$

или

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow \exp(-j2\pi ft_0). \quad (6.41)$$

Единичный импульс можно также определить и в частотной области:

$$\left. \begin{aligned} \delta(f - f_0) &= \begin{cases} \infty & \text{при } f = f_0; \\ 0 & \text{при } f \neq f_0; \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) df &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

Импульс в частотной области представляет собой отдельную спектральную линию при $f = f_0$. Обратное преобразование импульса в частотной области легко получается с помощью того же подхода, что и в случае импульса во временной области. Так,

$$\left. \begin{aligned} 1 &\leftrightarrow \delta(f); \\ \exp(j2\pi f_0 t) &\leftrightarrow \delta(f - f_0). \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

Импульс в частотной области с положением в начале координат является преобразованием Фурье-функции во временной области, равной постоянной (постоянный ток).

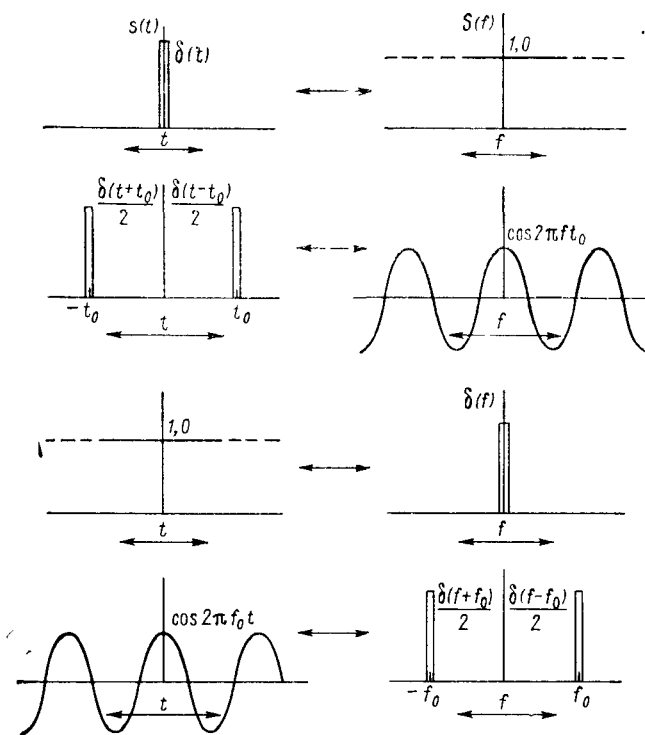


Рис. 6.10. Представление импульсных функций во временной и частотной областях

Из пары преобразований (6.43) можно получить преобразование Фурье-функций синуса и косинуса. Поскольку

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &= [\exp(j2\pi f_0 t) + \exp(-j2\pi f_0 t)]/2; \\ \sin(2\pi f_0 t) &= [\exp(j2\pi f_0 t) - \exp(-j2\pi f_0 t)]/2j, \end{aligned}$$

можно написать

$$\left. \begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &\leftrightarrow [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]/2; \\ \sin(2\pi f_0 t) &\leftrightarrow [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]/2j. \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

Некоторые соотношения для пар преобразований единичных импульсов во временной и частотной областях приведены на рис. 6.10.

Единичный импульс полезен при выводе теоремы Парсеваля для сигналов с конечной энергией. Пусть $s(t)$ — сигнал с конечной энергией, имеющий преобразование Фурье $S(f)$, такое, что

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(j2\pi f t) df.$$

Квадрат модуля $s(t)$ можно выразить как

$$\begin{aligned} |s(t)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(j2\pi ft) df \right|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) S^*(f') \exp[j2\pi(f-f')t] df df'. \end{aligned}$$

Энергия сигнала пропорциональна интегралу от $|s(t)|^2$. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) S^*(f') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(f-f')t] dt \right\} df df'.$$

Но интеграл по времени в правой части этого выражения равен, по определению [см., например, (6.43)], импульсной функции $\delta(f-f')$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) S^*(f') \delta(f-f') df' df.$$

Рассмотрим интеграл по f' в правой части. Подынтегральная функция равна нулю всюду, кроме точки $f=f'$. Используя соотношение в формуле (6.39), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(f) S^*(f') \delta(f-f') df' = |S(f)|^2$$

и, наконец,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \quad (6.45)$$

Выражение (6.45) показывает, что энергия сигнала есть интеграл от квадрата модуля сигнала либо во временной, либо в частотной области. Функция $|S(f)|^2$ называется *спектральной плотностью энергии* сигнала.

6.4.3. Единичная ступенчатая функция

Единичная ступенчатая функция равна нулю в интервале от минус бесконечности до некоторой точки и единице в интервале от этой точки до плюс бесконечности. Ступенчатая функция во временной области имеет вид

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (6.46)$$

Нетрудно понять, что единичная ступенчатая функция может быть выражена так же, как интеграл от единичного импульса, а именно

$$u(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau. \quad (6.47)$$

При попытке найти формальное преобразование Фурье единичной ступенчатой функции возникает определенная трудность, так как интеграл от этой функции по всей временной оси бесконечен. Ее можно преодолеть, если рассматривать единичную ступенчатую функцию как предельный вид функции, интеграл от которой сходится быстрее. Например, пусть при положительных a

$$u(t) = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow 0} [\exp(-at)], & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (6.48)$$

Тогда преобразование Фурье $u(t)$ имеет вид

$$U(f) = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} \exp[(-a + j2\pi f)t] dt \right\} = \lim_{a \rightarrow 0} [1/(a + j2\pi f)]. \quad (6.49)$$

При этом

$$1/(a + j2\pi f) = a/[a^2 + (2\pi f)^2] + 2\pi f/j[a^2 + (2\pi f)^2]. \quad (6.50)$$

Рассматривая первое слагаемое в правой части, заметим, что

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} \right] = \begin{cases} \infty, & f = 0; \\ 0, & f \neq 0 \end{cases}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} df = 1/2.$$

Это слагаемое ведет себя как импульс, и можно записать

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2} \right] = \frac{1}{2} \delta(f). \quad (6.51)$$

Второе слагаемое в правой части (6.50) при $a = 0$ легко вычисляется, и в результате преобразование единичной ступенчатой функции получается в виде

$$u(t) \leftrightarrow [\delta(f) + 1/(j\pi f)]/2. \quad (6.52)$$

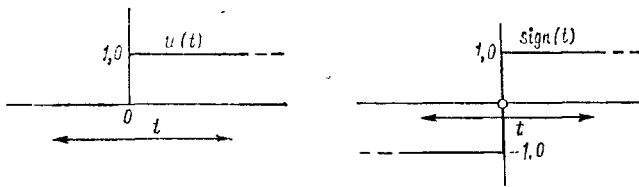


Рис 6.11. Единичная ступенчатая функция и функция sign

Подобным образом можно определить единичную ступенчатую функцию в частотной области и ее преобразование Фурье. Пусть

$$u(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } f > 0; \\ 0 & \text{при } f < 0, \end{cases}$$

тогда

$$u(f) \leftrightarrow [\delta(t) - 1/(j\pi t)]/2. \quad (6.53)$$

6.4.4. Функция sign

Полезной функцией, тесно связанной с единичной ступенчатой функцией, является функция sign, определяемая как

$$\text{sign}(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > t_0 \\ -1 & \text{при } t < t_0 \end{cases} = 2u(t - t_0) - 1. \quad (6.54)$$

Функция sign может быть определена и в частотной области $\text{sign}(f)$.

С помощью выражений (6.52) и (6.54) получаются следующие соотношения для пар преобразований:

$$\left. \begin{aligned} \text{sign}(t) = 2u(t) - 1 &\leftrightarrow 1/(j\pi f); \\ -1/(i\pi t) &\leftrightarrow 2u(f) - 1 = \text{sign}(f). \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

Соотношение между функцией sign и единичной ступенчатой функцией показано графически (рис. 6.11).

6.5. Отклик линейных систем во временной области

Рассмотрим отклик линейной, не изменяющейся во времени, системы на произвольный входной сигнал. Линейная система — это такая система, выходной отклик которой на два или более входных сигнала равен сумме откликов на каждый из этих сигналов, действующих по отдельности. Если система не изменяется во времени, то отклик на заданный входной сигнал не зависит от начала отсчета сигнала.

На рис. 6.12 показана не изменяющаяся во времени линейная система, а также ее выходной сигнал в предположении, что входным сигналом является единичный импульс. На рисунке

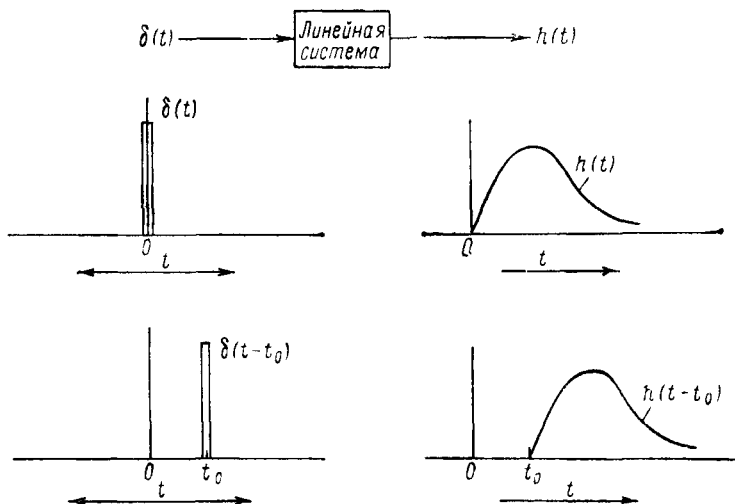


Рис. 6.12. Импульсная реакция линейной системы

также показано, что момент подачи входного импульса не влияет на форму выходного сигнала.

Если на вход подается последовательность импульсов с различной эффективной силой и различным положением на временной оси, то выходной сигнал является суммой откликов на отдельные импульсы. Пусть входной сигнал имеет вид

$$s_1(t) = \sum_{n=1}^N a_n \delta(t - t_n). \quad (6.56)$$

Отклик системы на единичный импульс в начале координат называется *импульсной реакцией* $h(t)$. Следовательно, выходной сигнал

$$s_2(t) = \sum_{n=1}^N a_n h(t - t_n). \quad (6.57)$$

Пусть теперь входной сигнал является непрерывной функцией, которая может быть тем не менее аппроксимирована последовательностью прилегающих друг к другу узких прямоугольных импульсов. При ширине, приблизительно равной нулю, импульсы становятся похожими на импульсную функцию (рис. 6.13). Непрерывный сигнал $s_1(t)$ содержит импульсный элемент при $t = \tau$ такой, что импульс в точке $\tau = s_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$. Эф-

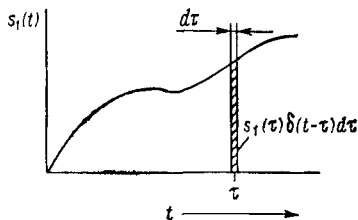


Рис. 6.13. Импульсный элемент произвольной функции $s_1(t)$

фактивная сила этого импульса равна $s_1(\tau) d\tau$, а отклик системы на него

$$\text{выход} = s_1(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (6.58)$$

Полный выходной сигнал, образуемый всеми такими импульсными элементами входного сигнала, получается суммированием всех компонент типа (6.58). Поскольку τ — непрерывная переменная, то эта сумма становится интегралом. Таким образом,

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (6.59)$$

Этот интеграл называется *интегралом свертки*. Выходной отклик линейной системы получается *сверткой* импульсной реакции системы с входной функцией.

Выражение (6.59) можно также записать так:

$$s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s_1(t - \tau) d\tau. \quad (6.60)$$

Интеграл свертки встречается настолько часто, что для него во многих случаях используется следующее сокращенное обозначение:

$$s(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (6.61)$$

Операция свертки подчиняется многим правилам, справедливым для алгебраических операций. Так,

$$s_1(t) \otimes [s_2(t) + s_3(t)] = s_1(t) \otimes s_2(t) + s_1(t) \otimes s_3(t); \quad (6.62)$$

$$s_1(t) \otimes [s_2(t) \otimes s_3(t)] = [s_1(t) \otimes s_2(t)] \otimes s_3(t) \quad (6.63)$$

и

$$s_1(t) \otimes s_2(t) = s_2(t) \otimes s_1(t). \quad (6.64)$$

6.5.1. Свойства аддитивности свертки

Рассмотрим свертку произвольной функции $s(t)$ с единичной импульсной функцией в начале координат:

$$s(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (6.65)$$

Если вспомнить результат в соотношении (6.39), то интеграл в (6.65) будет равен значению функции $s(\tau)$ при $\tau = t$. Таким образом,

$$s(t) \otimes \delta(t) = s(t) \quad (6.66)$$

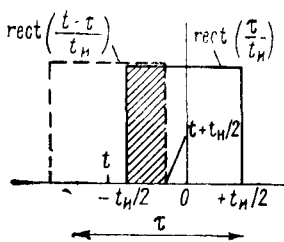


Рис. 6.14. Пересечение двух прямоугольных функций при операции свертки

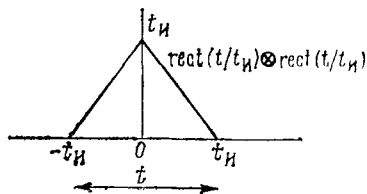


Рис. 6.15. Результат автосвертки прямоугольной функции

и видно, что свертка с единичной импульсной функцией в начале координат не изменяет функцию.

Аналогичным образом

$$s(t) \otimes \delta(t - t_0) = s(t - t_0). \quad (6.67)$$

Если $s(t)$ — единичная импульсная функция в точке $t = t_1$, то это соотношение переходит в

$$\delta(t - t_1) \otimes \delta(t - t_0) = \delta[t - (t_1 + t_0)]. \quad (6.68)$$

Предположим теперь, что некоторые три функции связаны соотношением $s_3(t) = s_1(t) \otimes s_2(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} s_1(t - t_1) \otimes s_2(t - t_2) &= s_1(t) \otimes \delta(t - t_1) \otimes s_2(t) \otimes \delta(t - t_2) = \\ &= s_1(t) \otimes s_2(t) \otimes \delta[t - (t_1 + t_2)] = s_3(t) \otimes \delta[t - (t_1 + t_2)] = \\ &= s_3[t - (t_1 + t_2)]. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Таким образом, при операции свертки временные задержки складываются, т. е. обладают свойством аддитивности.

6.5.2. Свертка двух прямоугольных функций

Часто встречающейся операцией является свертка прямоугольной функции с собой. Пусть $s(t) = \text{rect}(t/t_n)$, тогда

$$s(t) \otimes s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\tau/t_n) \text{rect}[(t - \tau)/t_n] d\tau.$$

Произведение двух прямоугольных функций под интегралом отлично от нуля только в области, где они перекрываются (рис. 6.14).

При отрицательных t пределы интегрирования равны $-t_n/2$ и $t + t_n/2$. Поэтому

$$s(t) \otimes s(t) = \int_{-t_n/2}^{t+t_n/2} d\tau = t + t_n, \quad -t_n/2 \leq t \leq 0.$$

При положительных t аналогично

$$s(t) \otimes s(t) = \int_{t-t_n/2}^{t_n/2} d\tau = t_n - t, \quad 0 \leq t \leq t_n/2.$$

Объединив эти результаты, получим

$$s(t) \otimes s(t) = t_n (1 - |t|/t_n) \text{rect}(t/2t_n). \quad (6.70)$$

Таким образом, автосвертка прямоугольного импульса приводит к треугольному импульсу (рис. 6.15).

6.6. Анализ Фурье. Основные операции

При анализе систем необходимы многие основные операции над функциями, например сложение, умножение, интегрирование, дифференцирование и т. д. Рассмотрим, как эти операции влияют на преобразования Фурье-функций.

6.6.1. Сложение

Преобразование Фурье суммы двух функций равно сумме преобразований Фурье, т. е.

$$s_3(t) = s_1(t) + s_2(t) \leftrightarrow S_1(f) + S_2(f) = S_3(f). \quad (6.71)$$

6.6.2. Инверсия

Инверсия функции осуществляется заменой t на $-t$ в $s(t)$: инвертированная $s(t) = s(-t)$. Для того чтобы определить эффект операции инверсии на преобразование Фурье, положим

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j2\pi ft) dt;$$

$$S_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-t) \exp(-j2\pi ft) dt.$$

Теперь положим $t' = -t$ и сделаем замену переменной в выражении для $S_2(f)$:

$$S_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t') \exp[-j2\pi f(-t')] dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t') \exp[-j2\pi(-f)t'] dt'.$$

Это выражение для $S_2(f)$ совпадает с выражением для $S_1(f)$, за исключением того, что переменная f заменена на $-f$. Поэтому $S_2(f) = S_1(-f)$, или, в общем случае, если $s(t) \leftrightarrow S(f)$, то

$$s(-t) \leftrightarrow S(-f). \quad (6.72)$$

6.6.3. Комплексное сопряжение

Пусть $s(t)$ — комплексная функция с преобразованием

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j2\pi ft) dt.$$

Функции, комплексно-сопряженной с $s(t)$, соответствует преобразование

$$\begin{aligned} S_2(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(j2\pi ft) dt \right\}^* = \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp[-j2\pi(-f)t] dt \right\}^*. \end{aligned}$$

Интеграл в скобках является преобразованием Фурье-функции $s(t)$ при значении аргумента, равном $-f$. Поэтому $S_2(f) = S_1^*(-f)$ или

$$\left. \begin{aligned} s(t) &\leftrightarrow S(f); \\ s^*(t) &\leftrightarrow S^*(-f). \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

6.6.4. Масштабирование

Предположим, что есть пара преобразований $s(t) \leftrightarrow S(f)$. Мы хотим изменить масштаб переменной t и определить эффект этого изменения на преобразование. Определим масштабированную переменную t' , такую, что $t' = t/T$, где T — положительная постоянная. Преобразование функции с новой переменной имеет вид

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t') \exp(-j2\pi ft) dt,$$

но $t = t'T$; $dt = T dt'$, так что

$$S_1(f) = T \int_{-\infty}^{\infty} s(t') \exp[-j2\pi (fT) t'] dt'.$$

Интеграл теперь совпадает с преобразованием функции $s(t)$ с аргументом, равным масштабированной частоте fT . Таким образом, $S_1(f) = TS(fT)$ и

$$s(t/T) \leftrightarrow TS(fT). \quad (6.74)$$

Вспомним, что операция масштабирования встречалась в пп. 6.4.1 при определении прямоугольной функции. Стандартная прямоугольная функция единичной ширины переводилась в импульс ширины t_n при помощи масштабирования времени t . Соотношения для пар преобразований были получены в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{rect}(t) &\leftrightarrow \text{sinc}(f); \\ \text{rect}(t/t_n) &\leftrightarrow t_n \text{sinc}(ft_n), \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

что согласуется с формулой (6.74).

6.6.5. Перенос

В примере пп. 6.2.1 было показано, что перенос сигнала во временной области приводит к появлению в спектре множителя, фаза которого линейно зависит от частоты. Теперь будет получено общее соотношение. Предположим, есть пара преобразований $s(t) \leftrightarrow S(f)$. Если $s(t)$ переносится по времени на величину t_0 , то можно записать

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) \exp(-j2\pi ft) dt.$$

Теперь положим $t' = t - t_0$, так что $dt' = dt$; $t = t' + t_0$, и сделаем замену переменной в интеграле:

$$\begin{aligned} S_1(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t') \exp[-j2\pi f(t' + t_0)] dt = \\ &= \exp(-j2\pi ft_0) \int_{-\infty}^{\infty} s(t') \exp(-j2\pi ft') dt' = S(f) \exp(-j2\pi ft_0). \end{aligned}$$

Это дает общее соотношение для пар преобразований

$$s(t - t_0) \leftrightarrow S(f) \exp(-j2\pi ft_0). \quad (6.76)$$

Перенос в частотной области — операция, широко применяемая в системах для смещения сигнала в более удобный частотный диапазон. В силу симметрии преобразования Фурье можно сразу же записать

$$\left. \begin{aligned} s(t) &\leftrightarrow S(f); \\ s(t) \exp(j2\pi f_0 t) &\leftrightarrow S(f - f_0). \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

Отсюда легко получается результат для умножения функции во временной области на вещественную синусоидальную функцию. Например,

$$\cos(2\pi f_0 t) = [\exp(j2\pi f_0 t) + \exp(-j2\pi f_0 t)]/2.$$

Поэтому

$$s(t) \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow [S(f - f_0) + S(f + f_0)]/2. \quad (6.78)$$

6.6.6. Свертка

Отклик линейной системы является, как было показано, результатом свертки во временной области входного сигнала с импульсной реакцией системы. Преобразование Фурье результата операции свертки во временной области приводит к особенно простому соотношению в частотной области. Пусть $s_1(t) \leftrightarrow S_1(f)$; $s_2(t) \leftrightarrow S_2(f)$; $s_3(t) = s_1(t) \otimes s_2(t) \leftrightarrow S_3(f)$. Тогда

$$\begin{aligned} S_3(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} [s_1(t) \otimes s_2(t)] \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \right] \exp(-j2\pi ft) dt. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$S_3(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) \exp(-j2\pi ft) dt \right] s_1(\tau) d\tau.$$

Внутренний интеграл является преобразованием Фурье-функции $s_2(t - \tau)$. По правилу переноса $s_2(t - \tau) \leftrightarrow S_2(f) \exp(-j2\pi f\tau)$. Подстановка в выражение для $S_3(f)$ дает

$$S_3(f) = S_2(f) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau.$$

Оставшийся интеграл является преобразованием Фурье-функции $s_1(t)$. Окончательный результат имеет вид

$$S_3(f) = S_1(f) S_2(f)$$

или

$$s_1(t) \otimes s_2(t) \leftrightarrow S_1(f) S_2(f). \quad (6.79)$$

Таким образом, относительно сложная операция свертки во временной области приводит к простой операции умножения в частотной области. В качестве примера полезности этого

результата рассмотрим свертку во временной области двух одинаковых функций $\text{sinc}(t)$:

$$s(t) = \text{sinc}(t) \otimes \text{sinc}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{\pi \tau} \frac{\sin \pi (t - \tau)}{\pi (t - \tau)} d\tau.$$

Хотя в данном случае интеграл можно вычислить без особых трудностей, результат получается значительно быстрее, если вспомнить, что $\text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f)$. Используя выражение (6.79), получим $\text{sinc}(t) \otimes \text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f) \text{rect}(f) = \text{rect}(f)$.

Таким образом, $s(t) = \text{sinc}(t) \otimes \text{sinc}(t) = \text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f)$. Автосвертка функции $\text{sinc}(t)$ приводит к такой же функции — это очевидно при использовании соотношения (6.79) для пар преобразований.

Операцию свертки часто применяют и в частотной области. По симметрии с результатом (6.79) свертка в частотной области приводит к умножению соответствующих функций во временной области. Таким образом,

$$s_1(t) s_2(t) \leftrightarrow S_1(f) \otimes S_2(f). \quad (6.80)$$

Если $s_2(t)$ сопряжено с $s_1(t)$, то посредством выражения (6.73) получаем

$$|s_1(t)|^2 \leftrightarrow S_1(f) \otimes S_1^*(-f). \quad (6.81)$$

6.6.7. Дифференцирование

Рассмотрим представление функции $s(t)$ интегралом Фурье:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp(j2\pi ft) df.$$

Теперь продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{ds(t)}{dt} = s'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [j2\pi f S(f)] \exp(j2\pi ft) df.$$

Преобразование производной $s(t)$ дается выражением в скобках под интегралом. Таким образом, если $s(t) \leftrightarrow S(f)$, то

$$s'(t) \leftrightarrow j2\pi f S(f). \quad (6.82)$$

Аналогично можно показать, что преобразование производной функции в частотной области имеет вид

$$-j2\pi t s(t) \leftrightarrow S'(f). \quad (6.83)$$

6.6.8. Интегрирование

Как влияет интегрирование на соотношения для пар преобразований, можно установить, рассмотрев свертку функции с единичной ступенчатой функцией

$$s(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

Но

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\infty \leq \tau \leq t; \\ 0 & \text{при } \tau > t, \end{cases}$$

поэтому

$$s(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau.$$

Преобразование этого интеграла есть произведение преобразований функций $s(t)$ и $u(t)$:

$$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{2} S_s(f) [\delta(f) + 1/(j\pi f)]. \quad (6.84)$$

Аналогичным образом интегрирование в частотной области дает

$$\frac{1}{2} s(t) [\delta(t) - 1/(j\pi t)] \leftrightarrow \int_{-\infty}^t S(v) dv. \quad (6.85)$$

6.7. Оператор повторения и функция выборки

В первой части этой главы интегральное представление Фурье-сигналов, ограниченных во времени, было получено предельным переходом к разложению в ряд Фурье периодических сигналов. Теперь пройдем в обратном направлении к разложению Фурье периодических сигналов, применив предельный переход к разложению сигналов, ограниченных во времени.

Рассмотрим одиночный прямоугольный импульс и его преобразование $s_1(t) = \text{rect}(t/t_n) \leftrightarrow t_n \text{sinc}(ft_n)$. Псевдопериодический сигнал можно сформировать, добавив по копии функции $s_1(t)$ по обе стороны $s_1(t)$ в точках $-T$ и T :

$$s(t) = s_1(t + T) + s_1(t) + s_1(t - T) = \sum_{n=-1}^1 s_1(t - nT).$$

Используя свойства единичной импульсной функции, $s(t)$ можно описать так же, как свертку $s_1(t)$ с совокупностью трех

импульсных функций:

$$s(t) = s_1(t) \otimes \left[\sum_{n=-1}^1 \delta(t - nT) \right].$$

И в том, и другом случаях преобразование трех импульсов имеет вид

$$\begin{aligned} s(t) &\leftrightarrow S_1(f) [\exp(j2\pi fT) + 1 + \exp(-j2\pi fT)] = \\ &= t_H \operatorname{sinc}(ft_H) [1 + 2 \cos(2\pi fT)]. \end{aligned}$$

Этот спектр изображен на рис 6.16. Отметим, что границы спектра определяются формой функции $S_1(f)$, а более острые вторичные максимумы разнесены на интервал $1/T$. Типичные для периодического сигнала характеристики заметны всего лишь при трехкратном повторении импульса.

Теперь добавим по $N/2$ равноотстоящих импульсов по обе стороны от исходного, так что их общее число составит $N + 1$. Тогда

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} s_1(t - nT) \quad (6.86)$$

и

$$S(f) = S_1(f) \sum_{n=-N/2}^{N/2} \exp(-j2\pi fnT). \quad (6.87)$$

Здесь сумма представляет собой геометрическую прогрессию вида

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2} r^n,$$

где $r = \exp(-j2\pi fT)$.

Сумма конечной геометрической прогрессии легко находится в явном виде. С помощью тригонометрических тождеств сумму

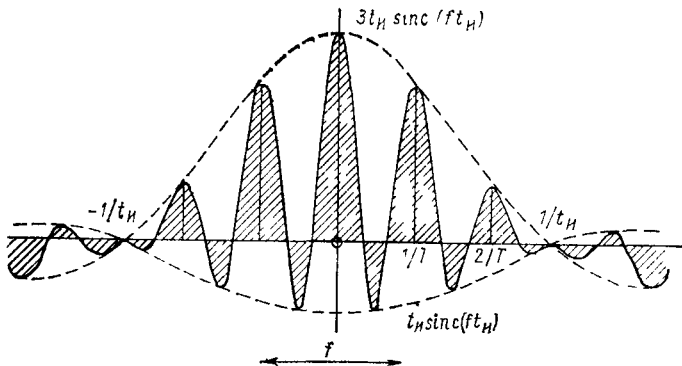


Рис 6.16 Спектр трех равноотстоящих прямоугольных импульсов

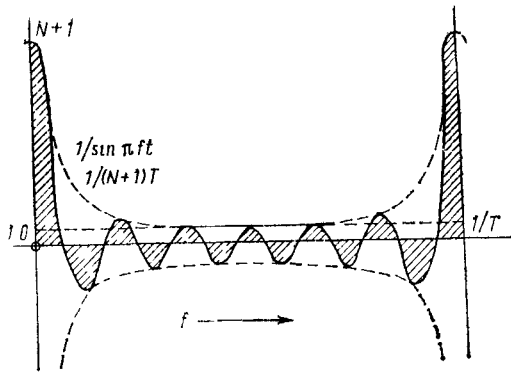


Рис. 6.17. Один период функции $[\sin(N+1) \times \pi fT] / \sin \pi fT$

в выражении (6.87) можно представить в следующей компактной форме:

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2} \exp(-j2\pi f nT) = \frac{\sin(N+1)\pi fT}{\sin \pi fT}. \quad (6.88)$$

Эта функция имеет периоды $1/T$. Один полный период при $N+1=13$ приведен на рис. 6.17. Отметим, что в окрестности точки $f=0$ данная функция похожа по общему виду на функции $\text{sinc}(f)$, а именно при $\pi fT \ll 1$

$$\frac{\sin(N+1)\pi fT}{\sin \pi fT} \simeq (N+1) \frac{\sin(N+1)\pi fT}{(N+1)\pi fT}. \quad (6.89)$$

Первый нуль находится в точке $f=1/(N+1)T$, что является величиной, обратной полной длительности последовательности импульсов.

Подставив (6.88) в (6.87), получаем для спектра конечной последовательности импульсов

$$S(f) = t_n \text{sinc}(ft_n) \left[\frac{\sin(N+1)\pi fT}{\sin \pi fT} \right], \quad (6.90)$$

что графически изображено на рис. 6.18. Спектр сосредоточен в основном в узких пиках, разнесенных на $1/T$ с амплитудами, определяемыми спектром одиночного импульса. Ширина каждого пика обратно пропорциональна полной ширине импульсной последовательности.

Истинно периодический сигнал получается из выражений (6.86), (6.87) устремлением N к бесконечности:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(t-nT) \leftrightarrow S_1(f) \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(N+1)\pi fT}{\sin \pi fT} \right] \right\}. \quad (6.91)$$

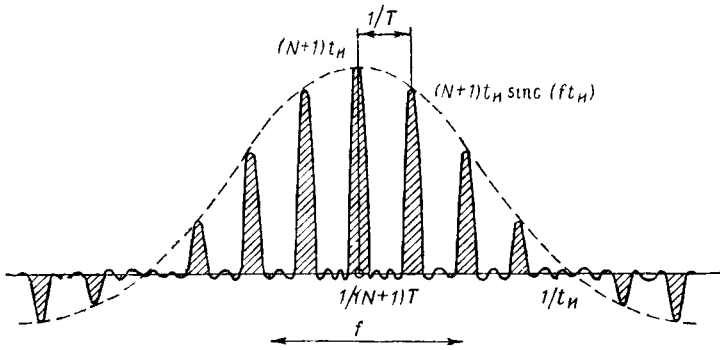


Рис. 6.18. Спектр конечной последовательности импульсов

Амплитуда множителя в скобках выражения (6.91) стремится к бесконечности в точках $f = n/T$, когда N становится бесконечно большим. Кроме того,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1/2T}^{1/2T} \frac{\sin(N+1)\pi f T}{\sin \pi f T} df = \frac{1}{T}. \quad (6.92)$$

Но это характерно для периодической последовательности импульсов с эффективной силой $1/T$ и периодом $1/T$. Таким образом,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin(N+1)\pi f T}{\sin \pi f T} \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right). \quad (6.93)$$

Соотношение (6.91) теперь принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(t - nT) \leftrightarrow (1/T) S_1(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T). \quad (6.94)$$

Последовательность импульсов здесь порождает линейную структуру, типичную для периодического сигнала. По сути дела, берется выборка исходного спектра $S(f)$ с интервалом, равным частоте повторения, при помощи последовательности импульсных функций. Амплитуду спектральной компоненты принято изображать как эффективную силу соответствующей импульсной функции.

Для повторения сигналов Ф. Вудвордом [1] было предложено использовать следующее сокращенное обозначение. Определим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t - nT) = [\text{rep}_T s(t)]; \quad (6.95)$$

$$F \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF) = F \text{comb}_F; \quad F = 1/T. \quad (6.96)$$

Оператор периодического повторения $[\text{rep}(\cdot)]$ показывает, что функция в скобках должна быть повторена с указанным интервалом. При применении оператора повторения и указании в скобках функции, которая должна повторяться, нужно быть внимательным.

Предположим, что периодическая функция умножается на другую функцию, что можно записать так: $[\text{rep}_T s_1(t)] s_2(t)$. Это показывает, что функция $s_1(t)$ повторяется с интервалом T , и результат умножается на функцию $s_2(t)$. Вообще говоря, это не то же самое, что умножение $s_1(t)$ на $s_2(t)$ и повторение затем результата с интервалом T . Таким образом, в общем случае

$$[\text{rep}_T s_1(t)] s_2(t) \neq [\text{rep}_T s_1(t) s_2(t)]. \quad (6.97)$$

В операторе периодического повторения, определенном соотношением (6.95), нетрудно узнать оператор свертки, причем одна из функций является последовательностью импульсных функций:

$$[\text{rep}_T s_1(t)] = s(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = s(t) \otimes \text{comb}_T. \quad (6.98)$$

У гребенчатой функции, как и у обычной функции, есть преобразование Фурье:

$$\text{comb}_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi fnT) = F \text{comb}_F. \quad (6.99)$$

Таким образом, гребенчатая функция в одной области преобразуется в гребенчатую функцию в другой.

С помощью соотношений (6.98) и (6.99) получаем следующие пары преобразований:

$$s(t) \leftrightarrow S(f);$$

$$[\text{rep}_T s(t)] \leftrightarrow FS(f) \text{comb}_F; \quad (6.100)$$

$$\text{comb}_T s(t) \leftrightarrow F[\text{rep}_F S(f)]. \quad (6.101)$$

Соотношения (6.100) и (6.101) показывают, что функция взятия выборки (гребенчатая функция) и оператор периодического повторения могут применяться как во временной, так и в частотной областях.

6.8. Таблицы правил и пар преобразований

Для последующих ссылок правила, которым подчиняются операции, полезные при анализе Фурье, и отдельные пары преобразований, сведены в табл. 6.1. Пара 6 в этой таблице — гауссов сигнал и его преобразование. Хотя в данной главе указанная пара преобразований и не была получена, она приведена

Таблица 6.1. Некоторые правила
и пары преобразований для анализа Фурье

Правило	Сигнал	Преобразование	Примечание
1	$s(t)$ $s_1(t) + s_2(t)$	$S(f)$ $S_1(f) + S_2(f)$	Обозначение Сложение
2	$s(-t)$	$S(-f)$	Инверсия
3	$s^*(t)$	$S^*(-f)$	Комплексное сопряжение
4	$s(t/T)$	$TS(fT)$	Масштабирование переменной
5	$s(t - t_0)$	$S(f) \exp(-j2\pi f t_0)$	Перенос по времени
6	$s(t) \exp(j2\pi f_0 t)$	$S(f - f_0)$	Перенос по частоте
7	$s_1(t) \otimes s_2(t)$	$S_1(f) S_2(f)$	Свертка во временной области
8	$s_1(t) s_2(t)$	$S_1(f) \otimes S_2(f)$	Умножение во временной области
9	$s'(t)$ $-j2\pi t s(t)$	$j2\pi f S(f)$ $S'(f)$	Дифференцирование
10	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$ $\frac{1}{2} s(t) [\delta(t) - 1/j\pi t]$	$\frac{1}{2} S(f) [\delta(f) + 1/j\pi f]$ $\int_{-\infty}^t S(v) dv$	Интегрирование
11	comb_T	$F \text{comb}_F$	Функция взятия выборки во временной области, $F = 1/T$
12	$[\text{rep}_T s(t)]$	$F \text{comb}_F S(f)$	Оператор повторения во временной области
13	$\text{comb}_T s(t)$	$F [\text{rep}_F S(f)]$	Выборка сигнала во временной области

Продолжение табл. 6.1

Пара	Сигнал	Преобразование	Примечание
1	$\delta(t)$	1	Единичная импульсная функция
2	$u(t);$ $\frac{1}{2} [\delta(t) - 1/j\pi t]$	$\frac{1}{2} [\delta(f) + 1/j\pi f];$ $u(f)$	Единичные ступенчатые функции

Пара	Сигнал	Преобразование	Примечание
3	$\text{rect}(t/t_n)$	$t_n \text{sinc}(ft_n)$	Прямоугольная функция во временной области
4	$\text{sinc}(t/t_n)$	$t_n \text{rect}(ft_n)$	
5	$\cos(2\pi f_0 t);$ $\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)];$ $\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$	Синусоидальные функции
6	$\exp(-t^2/2\sigma^2)$	$\delta \sqrt{2\pi} \exp[-2(\pi f)^2 \sigma^2]$	Гауссов сигнал

потому, что часто встречается в задачах, представляющих практический интерес. Отметим, что преобразование гауссовой функции тоже имеет гауссову форму.

Применение правил и пар преобразований (см. табл. 6.1) будет проиллюстрировано несколькими примерами, интересными для практики.

6.8.1. Периодическая последовательность высокочастотных импульсов

Одиночный высокочастотный импульс можно записать как $s_1(t) = \text{rect}(t/t_n) \cos(2\pi f_0 t)$, где предполагается, что несущая частота f_0 велика по сравнению с $1/t_n$. Этот сигнал можно преобразовать в периодический сигнал с периодом $T \gg t_n$ с помощью оператора повторения: $s(t) = [\text{rep}_T s_1(t)] = [\text{rep}_T \text{rect}(t/t_n) \cos(2\pi f_0 t)]$.

Преобразование Фурье периодического сигнала получается теперь применением правил и пар.

$$\text{Пара 3: } \text{rect}(t/t_n) \leftrightarrow t_n \text{sinc}(ft_n).$$

$$\text{Пара 5: } \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)].$$

$$\text{Правило 8: } \text{rect}(t/t_n) \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{t_n}{2} [\text{sinc}(f - f_0) t_n + \text{sinc}(f + f_0) t_n].$$

$$\text{Правило 12: } [\text{rep}_T s_1(t)] \leftrightarrow \frac{t_n}{2} F \text{comb}_F \times$$

$$\times [\text{sinc}(f - f_0) t_n + \text{sinc}(f + f_0) t_n].$$

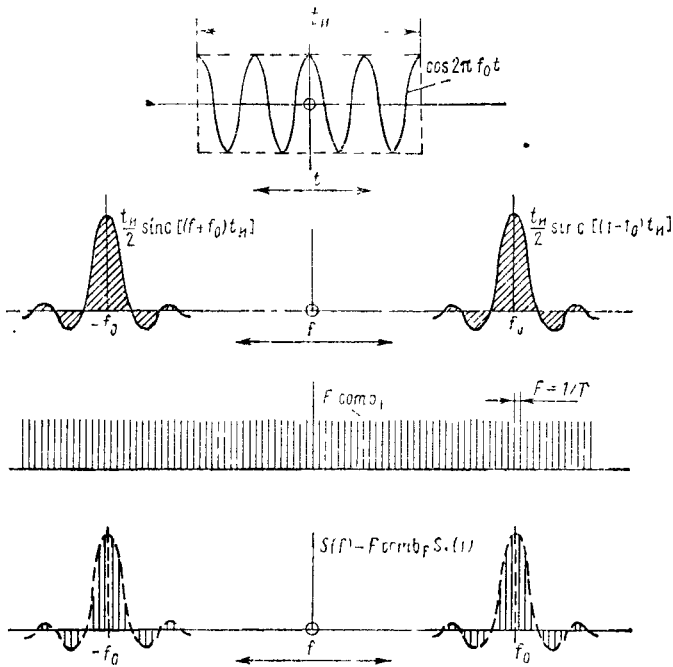


Рис. 6.19. Спектр периодической последовательности высокочастотных импульсов

Сигнал $s_1(t)$ во временной области и различные шаги при получении окончательного вида спектра приведены на рис. 6.19. Спектр $s_1(t)$ — это спектр прямоугольного импульса, имеющий вид $\text{sinc}(f)$ и смещенный в точки $\pm f_0$. Окончательный спектр получается взятием выборки смещенных функций $\text{sinc}(f)$ с помощью гребенчатых функций в частотной области. Отметим, что окончательный спектр не обязательно содержит линию в точках $\pm f_0$ (такая линия присутствует только при гармонической связи между f_0 и $1/T$).

6.8.2. Последовательность высокочастотных импульсов, когерентных по фазе

Рассмотрим сигнал, образуемый как произведение периодической последовательности прямоугольных импульсов и непрерывной косинусоидальной несущей: $s(t) = [\text{rep}_T \text{rect}(t/t_n)] \times \cos(2\pi f_0 t)$. Отметим, что в данном случае фаза несущей в каждом импульсе определяется фазой непрерывной синусоиды. В предыдущем примере фазы несущей во всех импульсах совпадали, что давало истинно периодический сигнал.

Последовательно преобразуя сигнал в частотную область, получаем следующее:

Пара 3: $\text{rect}(t/t_n) \leftrightarrow t_n \text{sinc}(ft_n)$.

Правило 12: $[\text{rep}_T \text{rect}(t/t_n)] \leftrightarrow t_n F \text{comb}_F \text{sinc}(ft_n)$.

Пара 5: $\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$.

Правило 8: $[\text{rep}_T \text{rect}(t/t_n)] \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow$
 $\leftrightarrow \frac{t_n}{2} F \text{comb}_F \text{sinc}(ft_n) \otimes [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$.

В данном примере спектр одиночного прямоугольного импульса, который описывается функцией sinc , сначала умножается на гребенчатую функцию, что дает спектр периодической последовательности импульсов, затем получившийся линейчатый спектр переносится в точки $\pm f_0$. Сигнал во временной области и последовательное получение спектра представлены на рис. 6.20. Отметим, что спектр огибающей последовательности содержит линию при $f = 0$, которая представляет собой среднее значение функции. В окончательном спектре эта линия из

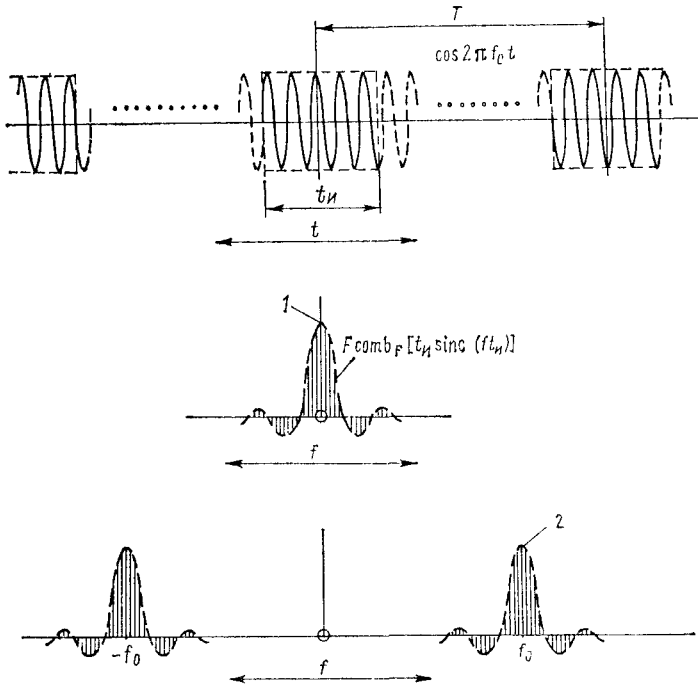


Рис. 6.20. Нахождение спектра для последовательности импульсов, когерентных по фазе:

1 — линия при $f=0$; 2 — линия при $f=\pm f_0$

Начала координат оказывается перенесенной в положения $\pm f_c$. Таким образом, исходная несущая частота может быть восстановлена при помощи узкополосного фильтра, центральная частота которого совпадает с несущей.

6.8.3. Треугольный импульс

Свертка прямоугольного импульса с самим собой приводит к треугольному импульсу (см. пп. 6.5.2). Преобразование Фурье треугольного импульса является квадратом функции sinc. Этот результат следует непосредственно из правила 7 для свертки.

Пара 3: $\text{rect}(t/t_n) \leftrightarrow t_n \text{sinc}(ft_n)$.

Правило 7: $\text{rect}(t/t_n) \otimes \text{rect}(t/t_n) = t_n(1 - |t|/t_n) \text{rect}(t/2t_n)$;

$t_n(1 - |t|/t_n) \text{rect}(t/2t_n) \leftrightarrow t_n^2 \text{sinc}^2(ft_n)$.

6.8.4. Теоремы о выборке

На практике часто удобно работать с дискретными периодическими выборками сигналов, а не с непрерывными функциями. В этом случае необходимо определить, как часто надо брать отсчеты непрерывной функции для того, чтобы избежать потерь информации. Кроме того, желательно задать метод восстановления исходного сигнала по выборочным значениям. Решение этих вопросов и составляет предмет теорем о выборке, дающих конкретные ответы при условии, что на сигнал наложены определенные ограничения (фактически нереализуемые). Использование правил и пар в табл. 6.1 позволяет вывести простой вывод теоремы о выборке [1, 5].

Допустим, что непрерывный сигнал $s(t)$ имеет спектр, ограниченный полосой частот $\pm F$. Пусть $s(t) \leftrightarrow S(f)$. В силу того, что $S(f)$ равно нулю вне полосы $\pm F$, это можно так же записать, как $s(t) \leftrightarrow S(f) \text{rect}(f/2F)$. Теперь, не меняя результата, можем сделать $S(f)$ повторяющейся с интервалом $2F$, поскольку прямоугольная функция позволяет игнорировать все составляющие вне полосы частот $\pm F$: $s(t) \leftrightarrow [\text{rep}_{2F} S(f)] \text{rect}(f/2F) = S(f)$.

Положим $2F = 1/T_b$ и преобразуем спектр во временную область.

Правило 13: $t_b \text{comb}_{t_b} s(t) \leftrightarrow [\text{rep}_{2F} S(f)]$.

Пара 4: $(1/t_b) \text{sinc}(t/t_b) \leftrightarrow \text{rect}(f/2F)$.

Правило 7: $s(t) = \text{comb}_{t_b} s(t) \otimes \text{sinc}(t/t_b) \leftrightarrow S(f)$. (6.102)

Произведение comb_{t_b} и $s(t)$ представляет собой выборку непрерывной функции с интервалом $t_b = 1/2F$. Свертка с функцией sinc эквивалентна пропусканию импульсов выборки через прямоугольный фильтр с центральной частотой $f = 0$ и полосой $2F$.

Отметим, что этот результат согласуется с условием Найквиста для выборки, утверждающим, что отсчеты должны браться с частотой, по крайней мере, вдвое превышающей наивысшую частоту, содержащуюся в сигнале. Кроме того, соотношение (6.102) показывает, что исходная функция точно восстанавливается при помощи свертки выборки с соответствующей функцией $\text{sinc}(t/t_b)$. Теорема о выборке по временной области может быть сформулирована следующим образом:

Непрерывная функция времени, спектр которой ограничен полосой частот $\pm F$, полностью определяется своими отсчетами во временной области, взятыми с интервалом $1/2F$. Исходная функция может быть точно восстановлена при условии, что интерполяция между отсчетами осуществляется с помощью функции $\text{sinc}(t/t_b)$.

На рис. 6.21 изображены непрерывная функция и ее ограниченный по полосе спектр, а также выборка этой функции со своим спектром. Интервал между отсчетами взят несколько меньшим значения $1/2F$. Это облегчает задачу восстановления исходного сигнала, поскольку увеличивается разнесение между повторяющимися спектрами сигнала; кроме того, снижаются требования к фильтру, который должен пропускать только спектр в начале координат.

Теорему о выборке можно сформулировать и для частотной области.

Пусть сигнал $s(t)$ равен нулю вне интервала $\pm T$. Определим теперь величину интервала между отсчетами в частотной области, необходимую для того, чтобы полностью определить спектр $s(t)$. Поступая, как и раньше, положим $s(t) \leftrightarrow S(f)$.

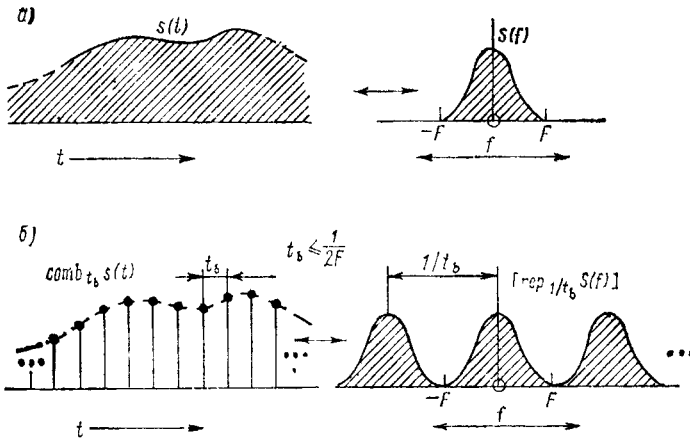


Рис 6.21 Выборка во временной области сигнала с ограниченным по полосе спектром а — исходная функция и ее спектр; б — выборка функции и ее спектр

Поскольку $s(t)$ равен нулю вне интервала $\pm T$, можно записать $s(t) \text{rect}(t/2T) \leftrightarrow S(f) \otimes 2T \text{sinc}(2fT)$.

Теперь можно сделать функцию $s(t)$ повторяющейся с интервалом $2T$. Это дает $s(t) = [\text{rep}_{2T} s(t)] \text{rect}(t/2T) \leftrightarrow f_b \text{comb}_{f_b} \times \times S(f) \otimes 2T \text{sinc}(2fT) = \text{comb}_{f_b} S(f) \otimes \text{sinc}(2fT) = S(f)$, где $f_b = 1/2T$.

Произведение comb_{f_b} представляет собой выборку $S(f)$ с интервалом $f_b = 1/2T$. Свертка выборки спектра с $\text{sinc}(2fT)$ позволяет восстановить исходный непрерывный спектр.

Теорема о выборке в частотной области может быть сформулирована следующим образом.

Спектр функции времени, существующей только во временном интервале $\pm T$, полностью определяется отсчетами, взятыми с интервалом $f_b = 1/2T$. Исходный спектр может быть точно восстановлен при условии, что интерполяция между отсчетами осуществляется с помощью функции $\text{sinc}(2fT)$.

6.9. Комплексное представление сигналов.

Понятие огибающей

В предыдущих главах часто оказывалось полезным заменять вещественные синусоидальные сигналы комплексной показательной функцией. Вещественному сигналу тогда сопоставлялась вещественная часть комплексного сигнала. Так,

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \text{Re} \{ A \exp [j(\omega_0 t + \varphi)] \}. \quad (6.103)$$

Применение такого приема объясняется тем, что некоторые математические выкладки упрощаются при использовании комплексной формы. Отметим, например, что *комплексная огибающая* легко отделяется от множителя с несущей частотой при выражении сигнала в комплексной форме. Так,

$$A \exp [j(\omega_0 t + \varphi)] = [A \exp (j\varphi)] \exp (j\omega_0 t). \quad (6.104)$$

По интуитивным соображениям огибающая сигнала должна содержать медленные амплитудные и фазовые изменения, связанные с комплексной синусоидой (несущей частотой). Для сигнала в выражении (6.103) амплитуда и фаза постоянны.

Спектр комплексного сигнала в формуле (6.104) сосредоточен целиком в области положительных частот. Так,

$$A \exp (j\varphi) \exp (j2\pi f_0 t) \leftrightarrow A \exp (j\varphi) \delta (f - f_0). \quad (6.105)$$

Пусть теперь амплитуда и фаза меняются во времени; запишем вещественный сигнал как

$$x(t) = a(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (6.106)$$

Как и ранее, комплексная форма сигнала получается так:

$$x(t) = \text{Re} \{ a(t) \exp [j\varphi(t)] \exp (j\omega_0 t) \}. \quad (6.107)$$

Если наивысшая частота, содержащаяся в комплексной огибающей $a(t) \exp [j\varphi(t)]$, мала по сравнению с несущей, то спектр полного комплексного сигнала и в этом случае сосредоточен в области положительных частот, причем поведение огибающей удовлетворяет интуитивным представлениям. Если огибающая обладает широким спектром, захватывающим несущую частоту, то спектр полного комплексного сигнала не ограничивается только положительными частотами. На самом деле, при широком спектре частот понятие огибающей теряет смысл с интуитивной точки зрения.

Для получения более общего подхода к построению комплексного сигнала по вещественному определим аналитический сигнал [6]. Аналитический сигнал формируется путем отбрасывания области отрицательных частот спектра вещественного сигнала и удвоения спектра в области положительных частот. Так, если $x(t)$ — вещественный сигнал, записываем $x(t) \leftrightarrow X(f)$ и аналитический сигнал

$$x_a(t) \leftrightarrow 2u(f) X(f), \quad (6.108)$$

где $u(f)$ — единичная ступенчатая функция в частотной области.

Заметим, что если $x(t)$ — синусоида постоянной амплитуды, то операция, указанная в выражении (6.108), состоит просто в замене вещественной синусоиды комплексной экспонентой. В более общем случае для нахождения вещественной и мнимой частей $x_a(t)$ можно преобразовать спектр в выражении (6.108) по временную область:

$$\left. \begin{aligned} [\delta(t) - 1/(j\pi t)] &\leftrightarrow 2u(f); \\ x(t) &\leftrightarrow X(f); \end{aligned} \right\} \quad (6.109)$$

$$x_a(t) = x(t) \otimes [\delta(t) - 1/(j\pi t)].$$

Свертка $x(t)$ с импульсной функцией не меняет $x(t)$, поэтому можно записать

$$x_a(t) = x(t) + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (6.110)$$

Вещественная часть $x_a(t)$ является исходной вещественной функцией, а мнимая часть определяется в формуле (6.110) интегралом от функции, содержащей $x(t)$. Этот интеграл называется *преобразованием Гильберта* функции $x(t)$ и обозначается

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (6.111)$$

Существует следующее обратное соотношение:

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}^*(\tau)}{t-\tau} d\tau. \quad (6.112)$$

Таким образом, $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ представляют собой *пару преобразований Гильберта*.

Аналитический сигнал можно записать как

$$x_a(t) = x(t) + j\hat{x}(t). \quad (6.113)$$

Легко показать, что функция $\sin \omega_0 t$ является преобразованием Гильберта $\cos \omega_0 t$. Поэтому аналитический сигнал, соответствующий $\cos \omega_0 t$, имеет вид $x_a(t) = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t = \exp(j\omega_0 t)$.

Аналитический сигнал общего вида удобно представлять в экспоненциальной форме как

$$x_a(t) = |x_a(t)| \exp[j\Phi(t)], \quad (6.114)$$

где $|x_a(t)| = [x^2(t) + \hat{x}^2(t)]^{1/2}$; $\Phi(t) = \text{arctg}[\hat{x}(t)/x(t)]$.

Теперь положим $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ и запишем

$$x_a(t) = |x_a(t)| \exp[j\varphi(t)] \exp(j\omega_0 t) = \mu(t) \exp(j\omega_0 t). \quad (6.115)$$

Комплексная огибающая $\mu(t)$ получается удалением комплексного множителя, связанного с несущей, из аналитического сигнала:

$$\mu(t) = x_a(t) \exp(-j\omega_0 t) = |x_a(t)| \exp[j\varphi(t)]. \quad (6.116)$$

Если $\mu(t)$ — узкополосная относительно f_0 функция, то она будет обладать свойствами, которые мы интуитивно связываем с огибающей. В противном случае это просто удобное математическое представление.

Если вспомнить обсуждение функции sign в пп. 6.4.4, то спектр функции $\hat{x}(t)$ можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} 1/\pi t &\leftrightarrow -j \text{sign}(f); \\ \hat{x}(t) = x(t) \otimes 1/2\pi t &\leftrightarrow -j \text{sign}(t) X(f) = \begin{cases} -jX(f) & \text{при } f > 0; \\ jX(f) & \text{при } f < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.117)$$

С помощью обобщения теоремы Парсеваля можно показать, что $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ ортогональны. Для двух заданных функций $s_1(t)$ и $s_2(t)$ обобщенное соотношение Парсеваля состоит в том, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) S_2^*(f) df, \quad (6.118)$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) [-j \operatorname{sign}(f) X(f)]^* df, \quad (6.119)$$

но

$$X(f) [-j \operatorname{sign}(f) X(f)]^* = j |X(f)|^2 \operatorname{sign}(f).$$

В силу того, что эта функция частоты нечетна, интеграл в выражении (6.119) по всему частотному диапазону равен нулю. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}(t) dt = 0.$$

Спектральные плотности энергии $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ одинаковы, следовательно, полная энергия аналитического сигнала в два раза больше энергии вещественного.

Задачи

6.1. Для сигнала, изображенного на рис. 6.22: а) найти преобразование Фурье непосредственным вычислением интеграла Фурье; б) заметив, что производная сигнала состоит из двух прямоугольных импульсов, симметрично смещенных от начала координат, написать преобразование Фурье производной сигнала с помощью пары 3 и правила 5 (см. табл. 6.1); в) с помощью правила 11 (см. табл. 6.1) получить из предыдущего результата преобразование исходного сигнала; г) сигнал, изображенный на рис. 6.22, может быть получен сверткой двух прямоугольных импульсов. Найти амплитуду и ширину этих импульсов, а также преобразование Фурье получившегося сигнала с помощью пары 3 и правила 7.

Результаты пп. а, в и г должны совпадать.

6.2. Пара 6 указывает, что преобразование гауссова сигнала также имеет гауссову форму. Получить этот результат непосредственным вычислением интеграла Фурье.

6.3. Пусть даны следующие два гауссова сигнала:

$$s_1(t) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2\sigma_1^2),$$

$$s_2(t) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2\sigma_2^2).$$

Показать непосредственным вычислением интеграла свертки, что свертка $s_1(t)$ с $s_2(t)$ дает тоже гауссов сигнал. Получить этот результат с помощью пары 6 и правила 7 (см. табл. 6.1).

6.4. Даны две функции $s_1(t)$ и $s_2(t)$ во временной области и соответствующие преобразования Фурье. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) S_2^*(f) df.$$

6.5. С помощью формулы (6.111) показать, что преобразование Гильберта $\cos \omega_0 t$ равно $\sin \omega_0 t$. Доказать этот факт с помощью соотношения (6.117) для преобразования Фурье.

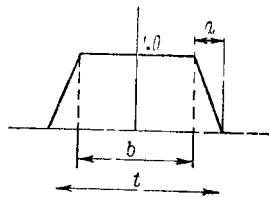


Рис. 6.22. К задаче 6.1

6.6. Последовательность повторяющихся гауссовых импульсов можно записать как $[\text{гер}_T \exp(-t^2/2\sigma_1^2)]$, $\sigma_1 \ll T$. Пусть этот сигнал умножен на одиночный гауссов импульс так, что $\exp(-t^2/2\sigma_2^2) [\text{гер}_T \exp(-t^2/2\sigma_1^2)]$, $\sigma_2 \gg T$. Выразить преобразование этого сигнала в символическом виде. Схематически изобразить получившийся спектр.

Список литературы

1. Woodward P. M. Probability and Information Theory, with Applications to Radar. New York: McGraw-Hill Book Company/London: Pergamon Press Ink, 1953, Chap. 2.
2. Burdic W. S. Radar Signal Analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Ink, 1968, Chaps. 1, 2, 4.
3. Titchmarsh E. C. Introduction to the Theory of Fourier Integrals. New York: Oxford University Press, Ink, 1948.
4. Miller K. S. Engineering Mathematics, New York: Dover Publications, Ink, 1943.
5. Shannon C. E., Weaver N. The Mathematical Theory of Communication, Urbana, Ill: The University of Illinois Press, 1964, p. 86.
6. Dugundji J. Envelopes and Pre-envelopes of Real Waveforms, IRE Trans PGIT, vol. IT-4, N 1, p. 53 (Mar. 1958).

Глава 7.

ДИСКРЕТНЫЕ МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В главе 6 были получены ряд Фурье и интегральное преобразование Фурье для непрерывных функций, которые доступны наблюдению во всем диапазоне от минус до плюс бесконечности как во временной, так и частотной областях. Основываясь на реальных физических явлениях и системах, мы всегда вынуждены рассматривать функции лишь в конечных интервалах наблюдения. Для систем, работающих в реальном времени, интервал наблюдения простирается от некоторого конечного момента времени в прошлом до настоящего. Подобным образом спектральные измерения функций на практике должны ограничиваться конечным диапазоном частот.

Помимо ограничения конечности интервала наблюдения для систем, использующих средства цифровой вычислительной техники, необходимо обрабатываемые функции преобразовать в дискретный набор чисел (или выборочных значений). Затем осуществляют обработку этих отсчетов, а не непрерывных функций, что приводит непосредственно к выводу дискретной формы преобразования Фурье.

В данной главе, исходя из непрерывных функций, используем теоремы о выборке для описания представления функций в виде выборок как во временной, так и частотной областях. Затем выведем правила для выполнения основных операций, требующихся при анализе систем, и для установления связи между выборками во временной и частотной областях с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Наконец, опишем особенно эффективный метод вычисления ДПФ, называемый быстрым преобразованием Фурье (БПФ), в элементарном виде [1 ... 3].

7.1. Дискретное представление непрерывных функций

На рис. 7.1 показана непрерывная функция времени с ограниченной полосой частот и выборка во временной области. Как отмечалось, если интервал между отсчетами во временной области равен обратной величине полной полосы частот сигнала $2F$, то спектр повторяется с интервалом $2F$ без перекрывания между повторениями. На рис. 7.1, б выборка функции во временной области стробирована функцией $\text{rect}(t/T)$. В частотной области для этого требуется свертка с функцией $\text{sinc}(fT)$. Начиная с исходной непрерывной функции, операции, изображенные на рис. 7.1, можно записать так:

непрерывная функция (с ограниченной полосой частот)

$$s(t) \leftrightarrow S(f) \text{rect}(f/2F);$$

выборка функции

$$s(t) \text{comb}_{t_b} \leftrightarrow [2F \text{rep}_{2F} S(f) \text{rect}(f/2F)]; \quad (7.1)$$

стробированная выборка функции

$$[s(t) \text{comb}_{t_b}] \text{rect}(t/T) \leftrightarrow [2F \text{rep}_{2F} S(f) \text{rect}(f/2F)] \otimes T \text{sinc}(fT).$$

Заметим, что в результате свертки происходят повторения исходного спектра, что приводит к их перекрыванию. Действительно, вследствие неограниченной протяженности функции $\text{sinc}(fT)$ повторения исходного спектра $S(f)$, ограниченного по полосе, растягиваются на бесконечный частотный диапазон. В результате этого исходная непрерывная функция уже не может быть точно восстановлена фильтрацией сигнала, изображенного на рис. 7.1, б, прямоугольным фильтром с нулевой центральной частотой и шириной полосы $2F$. Искажения исходного спектра в области $\pm F$ за счет перекрывания с соседними областями приводят к *ошибке наложения* при попытке восстановления исходного сигнала. Этот пример служит для подтверждения того, что функция не может быть одновременно ограничена по протяженности во временной и частотной областях. Однако если T очень велик по сравнению с $1/2F$ и $S(f)$ и спадает до

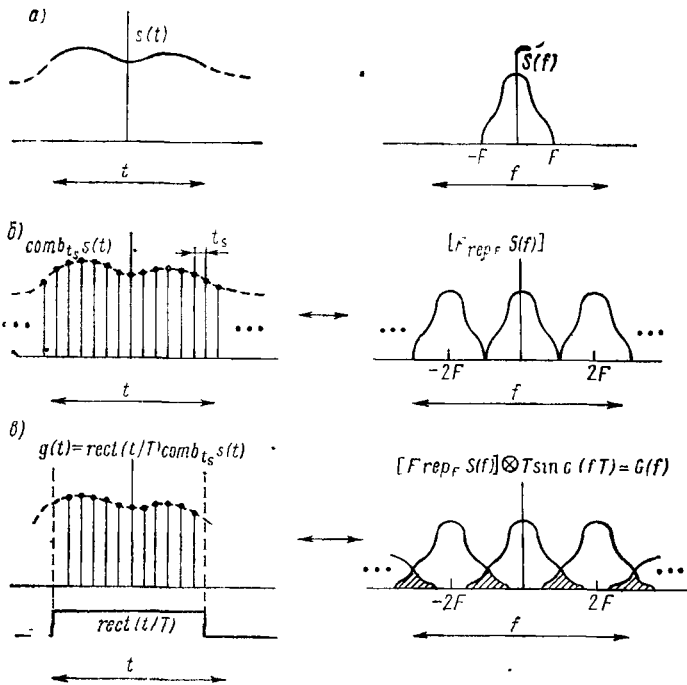


Рис. 7.1. Влияние временного стробирования на выборку сигнала

достаточно малого значения, еще не достигнув границ $\pm F$, то ошибка наложения может быть приемлемо малой.

Пусть центр временного stroba на рис. 7.1, в совпадает с началом координат, а полное число временных отсчетов в интервале $N + 1 = T/t_s = 2FT$. Стробированную выборку сигнала можно записать как

$$g(t) = [s(t) \text{comb}_{t_s}] \text{rect}(t/T) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} s(nt_s) \delta(t - nt_s) \quad (7.2)$$

и преобразование Фурье

$$g(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} s(nt_s) \delta(t - nt_s) \leftrightarrow \sum_{n=-N/2}^{N/2} s(nt_s) \exp(-j2\pi fnt_s) = G(f). \quad (7.3)$$

Сформируем теперь выборку спектра с помощью гребенчатой функции в частотной области. Поскольку $g(t)$ ограничена интервалом T , интервал между отсчетами в частотной области должен быть $f_B = 1/T$. Поэтому

$$\text{comb}_{f_s} G(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-N/2}^{N/2} s(nt_s) \exp[-j2\pi fnt_s] \right] \delta(f - kt_s). \quad (7.4)$$

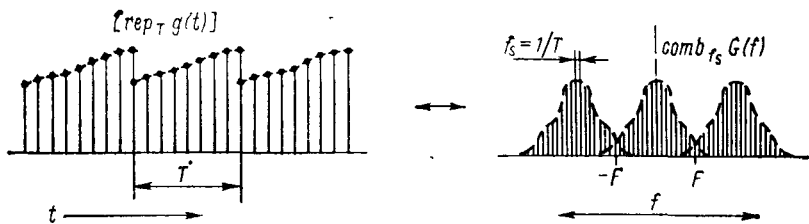


Рис. 7.2. Влияние взятия выборок в частотной области на $g(t)$

Наличие импульсной функции означает, что все это выражение оказывается равным нулю всюду, кроме точек $f = kf_s = k/T$, следовательно,

$$\begin{aligned} \text{comb}_{f_s} G(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-N/2}^{N/2} s(nt_s) \exp(-j2\pi knt_s/T) \right] \times \\ &\times \delta(f - kt_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(kf_s) \delta(f - kf_s), \end{aligned} \quad (7.5)$$

где

$$G(kf_s) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} s(nt_s) \exp(-j2\pi knt_s/T). \quad (7.6)$$

Дискретизация спектра $G(f)$ приводит к тому, что $g(t)$ повторяется с интервалом T (рис. 7.2). Заметим [(см. формулу (7.6)], что выборочные значения $G(kf_s)$ были получены дискретным преобразованием $(N+1)$ -точечной временной выборки в интервале T . Так как $G(f)$ охватывает все частоты, частотный индекс k тоже должен меняться от $-\infty$ до $+\infty$. Однако поскольку $G(f)$ повторяется с интервалом $2F$, существует лишь $2FT = 2F/f_s$ различных выборочных значений, необходимых для полного задания функции. Таким образом, при любом целом r

$$G(kf_s) = G[(k + 2FT)r f_s]. \quad (7.7)$$

В силу того, что число временных отсчетов $N+1$ равно $T/t_s = 2FT$, числа различных временных и частотных выборочных значений совпадают.

7.2. Дискретное преобразование Фурье

Дискретные выборочные значения стробированной временной функции и соответствующий дискретный спектр представляют собой пару дискретных преобразований Фурье. Обозначим $g(n)$ отсчеты $s(nt_s)$ в интервале T и $G(k)$ — соответствующие отсчеты в частотной области. При $T/t_s = N+1$ соотношение (7.6) примет вид

$$G(k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} g(n) \exp[-j2\pi kn/(N+1)]. \quad (7.8)$$

Для удобства последующих рассуждений определим $W = \exp[-j2\pi/(N+1)]$. Уравнение (7.8) теперь можно записать более компактно:

$$G(k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} g(n) W^{kn}. \quad (7.9)$$

Дискретное обратное преобразование $G(k)$ в интервале $k = \pm N/2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N/2}^{N/2} G(k) W^{-kn} &= \sum_{k=-N/2}^{N/2} \left[\sum_{l=-N/2}^{N/2} g(l) W^{kl} \right] W^{-kn} = \\ &= \sum_k \sum_l g(l) W^{(l-n)k} = \sum_l g(l) \left[\sum_k W^{(l-n)k} \right]. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Рассмотрим структуру выражения в скобках. Экспоненциальный множитель

$$W^{(l-n)k} = \exp[-j2\pi(l-n)k/(N+1)] = 1,$$

где r — любое целое, т. е. при $n = l + r(N+1)$. Нетрудно показать, что при любом другом значении n суммирование по k в этом выражении дает нуль. Таким образом,

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2} W^{(l-n)k} = \begin{cases} N+1 & \text{при } n = l + r \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} = (N+1) \delta_{((ln))}. \quad (7.11)$$

Здесь $\delta_{((ln))}$ — символ Кронекера, причем двойные скобки указывают, что величина $l-n$ делится нацело на $N+1$. Отметим, что n не ограничено диапазоном $\pm N/2$. Уравнение (7.10) теперь можно записать как

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2} G(k) W^{-kn} = (N+1) \sum_{l=-N/2}^{N/2} g(l) \delta_{((ln))}. \quad (7.12)$$

Суммирование в правой части (7.12) является дискретным эквивалентом интеграла от произведения непрерывной и импульсной функций; результат представляет собой значение $g(l)$ при $l = ((n))$. Таким образом,

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2} G(k) W^{-kn} = (N+1) g((n)). \quad (7.13)$$

Уравнения (7.9) и (7.13) определяют $g(n)$ и $G(k)$ как пару дискретных преобразований Фурье. В другом представлении этой пары преобразований используется N точек в интервале от 0 до $N-1$:

$$G((k)) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) W^{kn}; \quad g((n)) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) W^{-kn}. \quad (7.14)$$

Здесь и далее $W = \exp(-j2\pi/N)$, а двойные скобки означают, что целое число в скобках приведено к основному интервалу $(0, N-1)$ вычитанием числа, кратного N . Таким образом, N -точечное преобразование приводит к дискретной последовательности, повторяющейся с интервалом N , в сопряженной области.

7.3. Основные операции с дискретными функциями

Основные операции, необходимые при анализе с использованием дискретных функций, подчиняются, вообще говоря, тем же правилам, которые обсуждались в гл. 6 для непрерывных функций, но в дискретной форме. Когда в рассмотрении участвует более одной функции, необходимо обращать внимание на то, чтобы все функции содержали одно и то же число дискретных элементов при одном и том же интервале между отсчетами. При работе с дискретными представлениями непрерывных функций следует помнить, что дискретные функции не могут идеально представлять непрерывные функции и во временной, и в частотной областях. Однако сами по себе соотношения для преобразования одних дискретных функций в другие являются точными.

Правила, которым подчиняются операции с непрерывными функциями, и их преобразования сведены в табл. 6.1. Рассмотрим лишь несколько примеров использования дискретных функций.

Пусть дискретная функция $g_3(n)$ является суммой двух других дискретных функций. Тогда ДПФ функции $g_3(n)$ равно сумме ДПФ составляющих функций:

$$g_3(n) = g_1(n) + g_2(n) \leftrightarrow G_1(k) + G_2(k) = G_3(k). \quad (7.15)$$

Дискретная временная функция может быть перенесена по времени дискретными шагами, что приводит к появлению дискретного линейного по фазе множителя в ДПФ. Пусть

$$g((n)) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) W^{-nk};$$

$$g((n-l)) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) W^{-(n-l)k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [G(k) W^{lk}] W^{-nk}.$$

Поэтому

$$g((n-l)) \leftrightarrow G(k) W^{lk} = G(k) \exp(-j2\pi lk/N). \quad (7.16)$$

Перенос в частотной области приводит к подобному же эффекту в функции во временной области. Если

$$G((k)) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) W^{nk},$$

то

$$g(n) \exp(j2\pi n/N) \leftrightarrow G((k - q)). \quad (7.17)$$

Произведение дискретных функций приводит к определенному виду дискретной свертке их ДПФ в сопряженной области. Рассмотрим произведение дискретных функций $X(k)$ и $Y(k)$, являющихся N -точечными ДПФ $x(n)$ и $y(n)$. Найдем теперь обратное ДПФ этого произведения. Положим

$$v((n)) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y(k) W^{-kn}. \quad (7.18)$$

Подставим вместо $X(k)$ и $Y(k)$ их эквиваленты в терминах ДПФ x и y :

$$v((n)) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} x(l) W^{lk} \right] \left[\sum_{m=0}^{N-1} y(m) W^{mk} \right] W^{-nk}.$$

Изменяя порядок суммирования, получаем

$$v((n)) = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(l) y(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(n-l-m)k} \right]. \quad (7.19)$$

Выражение в скобках является дискретной импульсной функцией (символом Кронекера), а именно

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(n-l-m)k} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n - l + rN \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} = \delta((m[n-l])). \quad (7.20)$$

Поэтому выражение (7.19) отлично от нуля только при $m = (n - l)$. Следовательно,

$$v((n)) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) y((n-l)). \quad (7.21)$$

Соотношение (7.21) является дискретным аналогом интеграла свертки для непрерывных функций. Отметим, что получающаяся функция $v((n))$ повторяется с интервалом N . Для выполнения свертки исходная функция $y(l)$ длины N сначала инвертируется, а затем повторяется с интервалом N , что дает $y((-l))$. Рассмотрим интервал $0 \leq l \leq N-1$, определяемый пределами суммирования. Когда $y((-l))$ смещается вправо на

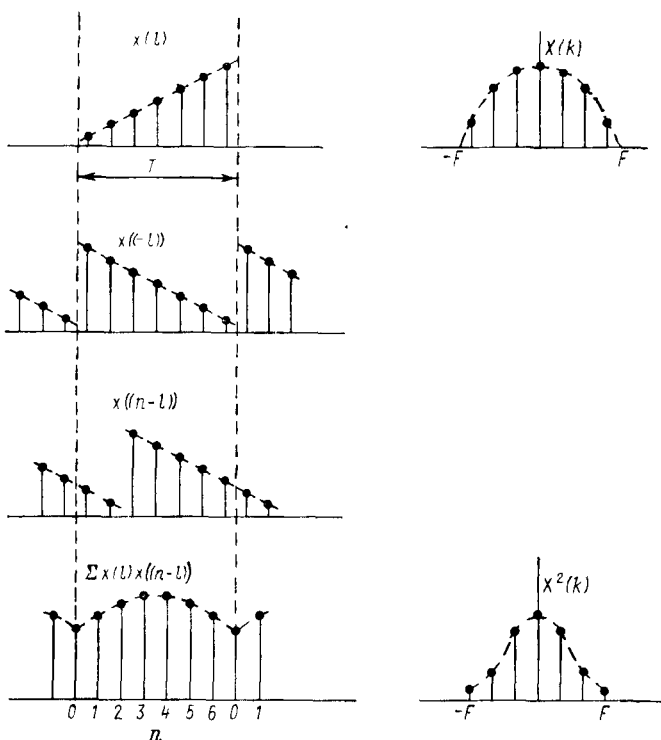


Рис. 7.3. Пример дискретной или круговой свертки

величину n , отсчеты y выходят из интервала суммирования на одном его конце и вновь появляются на другом. Таким образом, все N отсчетов всегда находятся в интервале суммирования, совершая циркуляцию по области при изменении n . В силу этого дискретная свертка, определяемая формулой (7.21), часто называется *круговой сверткой*, в отличие от *линейной свертки*, которая обычно ассоциируется с неперiodическими функциями.

В качестве примера дискретной свертки рассмотрим свертку дискретной функции $x(n)$ с собой.

Пусть $v(n) = x(n) \otimes x(n) \leftrightarrow X^2(k)$. На рис. 7.3 показаны $x(l)$ и ее ДПФ $X(k)$, а также $x(-l)$. Смещенная функция $x((n-l))$ умножается на $x(l)$ и суммируется по промежутку длиной N ; в результате получается одна точка выходной функции.

В некоторых случаях желательно избежать перекрывания соседних интервалов, что обычно происходит при круговой свертке. Этого можно добиться, искусственно дополняя исходную последовательность нулями. Такой прием показан на

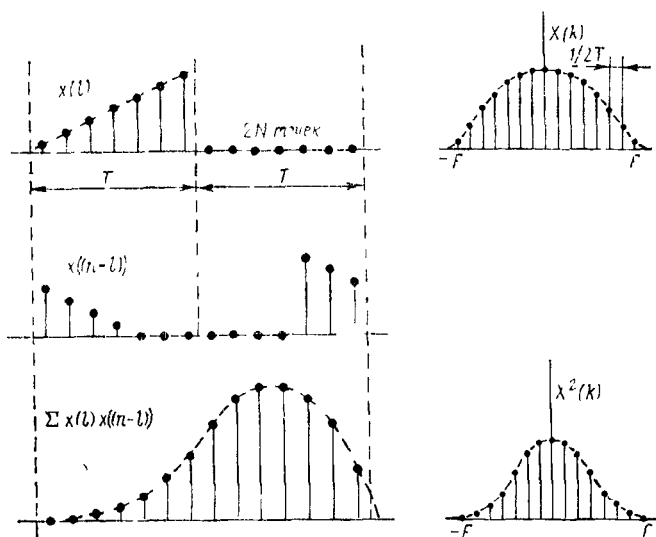


Рис. 7.4. Эффект искусственного удлинения временной последовательности дополнением нулями во избежание перекрывания при свертке

рис. 7.4. В данном примере длина исходной последовательности удваивается добавлением N нулей, и полная временная протяженность становится равной $2T$. Дополнительные нули во временной последовательности не изменяют ни форму, ни длину ДПФ, но интервал между отсчетами в частотной области уменьшается до $1/2T$, что дает $2N$ точек в интервале $\pm F$.

Как показано на рисунке, наличие дополнительных точек с нулевыми амплитудами не позволяет соседним повторениям исходной временной последовательности перекрываться. Результат такой свертки повторяется с интервалом $2N$, а не с интервалом N , как в примере на рис. 7.3.

7.4. Быстрое преобразование Фурье

Рассмотрим ДПФ

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n) W^{nk}. \quad (7.22)$$

Для каждой дискретной частоты k вычисление $G(k)$ требует N комплексных умножений и N комплексных сложений. Поэтому для получения всех N составляющих требуется N^2 комплексных умножений и сложений. При больших значениях N это, очевидно, составляет весьма большой объем вычислений. Так, для $N = 1000$ требуется миллион комплексных операций.

Алгоритм БПФ был разработан как метод более эффективного вычисления дискретного преобразования Фурье [3]. Действительно, алгоритм БПФ позволяет вести спектральный анализ в высоком темпе с использованием современных цифровых методов.

Для объяснения идеи метода БПФ разобьем сумму, определяющую $G(k)$, на две части: одну, содержащую четные по n слагаемые, и другую, содержащую нечетные слагаемые. Предположим, что N делится на 2, так что получившиеся суммы по четным и нечетным значениям состоят из одинакового числа слагаемых. Таким образом, можно записать

$$G(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(2n) W^{2kn}}_{N/2 \text{ четных слагаемых}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(2n+1) W^{k(2n+1)}}_{N/2 \text{ нечетных слагаемых}} = \\ = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(2n) W^{2kn} + W^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(2n+1) W^{2kn}. \quad (7.23)$$

Каждая из сумм в выражении (7.23) соответствует временной функции, интервал между отсчетами которой равен $2t_s$, а их общее число $N/2$. Таким образом, каждая сумма может быть использована для нахождения лишь $N/2$ различных значений $G(k)$, а не всех N . Это означает, что при $k \geq N/2$ каждая сумма повторяет значение, уже найденное для $k \leq (N/2) - 1$. Например, при $k = 1$ имеем $W^{2kn} = W^{2n}$. Для $k = (N/2) + 1$ имеем $W^{2nk} = W^{nN} W^{2n}$, но $W^{nN} = \exp(-j2\pi nN/N) = 1$. В общем случае

$$W^{2nk} = W^{2n(k+N/2)}. \quad (7.24)$$

Каждая из сумм в выражении (7.23) требует $N/2$ комплексных умножений для каждого значения k . Кроме того, одно комплексное умножение требуется для экспоненциального множителя перед второй суммой. Поэтому полное число умножений для каждого значения $k = (N/2) + (N/2) + 1 = N + 1$. Для всех значений k в интервале $[0, (N/2) - 1]$ полное число комплексных умножений равно $(N/2)(N + 1) = N^2/2 + N/2$.

Теперь рассмотрим интервал $(N/2) \leq k \leq N - 1$. С помощью выражения (7.24) значения $G(k)$ в этом интервале можно найти, используя значения, вычисленные для k , меньших $N/2$. Пусть k_1 соответствует значениям k в левой половине интервала, а $k_2 = k_1 + N/2$. Тогда

$$G(k_2) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(2n) W^{2nk_1} + W^{(N/2)} W^{k_1} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(2n+1) W^{2nk_1}, \quad (7.25)$$

но

$$W^{N/2} \exp[-j2\pi(N/2)/N] = -1.$$

Теперь положим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(2n) W^{2kn};$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(2n+1) W^{2kn}$$

и запишем

$$\left. \begin{aligned} G(k_1) &= X(k_1) + W^{k_1} Y(k_1); \\ G(k_2) &= X(k_1) - W^{k_1} Y(k_1). \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Следовательно, после выполнения операций, необходимых для вычисления ДПФ в диапазоне $0 \leq k \leq (N/2) - 1$, в оставшейся части нужно изменить знак слагаемого $W^{k_1} Y(k_1)$ и выполнить $N/2$ комплексных сложений. Дополнительных комплексных умножений не требуется. Поэтому полное число комплексных умножений для всего интервала $0 \leq k \leq N - 1$ равно $N^2/2 + N/2$. При больших N это дает экономию почти в два раза по сравнению с прямым вычислением ДПФ.

Предположим теперь, что N является степенью 2. Каждая из сумм в выражении (7.23) может быть еще раз разбита на две группы по $N/4$ точек в каждой. Это приводит к дополнительной экономии почти в два раза в числе требуемых комплексных умножений. Такое разбиение можно продолжать до тех пор, пока в каждой сумме не останется всего два слагаемых. Тогда полное число требуемых комплексных умножений окажется равным $(N/2) \lg_2 N$. Для выявления того, какую экономию объема вычислений это означает, положим $N = 1024$. При использовании алгоритма БПФ N -точечное ДПФ требует 5120 комплексных умножений, в то время как при непосредственном вычислении по формуле (7.22) — 1 048 576.

В качестве простого примера метода БПФ рассмотрим дискретную временную последовательность с $N = 8$.

В соответствии с выражением (7.23) разобьем 8-точечное ДПФ на два 4-точечных. Функциональная схема при использовании выражений (7.26) для вычисления всего ДПФ показана на рис. 7.5. Составляющие временной последова-

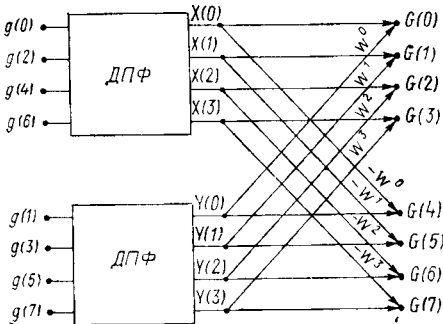


Рис. 7.5. Сведение 8-точечного ДПФ к двум 4-точечным для иллюстрации метода БПФ

тельности с четными номерами дают значения X, X_1, X_2 и X_3 при помощи стандартного дискретного преобразования. Аналогичным образом для нахождения Y_0, Y_1, Y_2 и Y_3 используются составляющие с нечетными номерами. Для получения составляющей G_0 окончательного преобразования сложим произведение $W^0 Y_0$ и X_0 . Выходная составляющая G_4 получается вычитанием произведения $W^0 Y_0$ из X_0 . Продолжая тем же образом, находим все восемь выходных составляющих.

Обобщение этого примера на группу четырех 2-точечных ДПФ является непосредственным, хотя функциональная схема усложняется. Информацию об организации реальных устройств БПФ можно найти в дополнительной литературе.

Задачи

7.1. Символ Кронекера определяется соотношением (7.11). Для $N = 4$ и $(l - n) = 1, 2$ показать при помощи геометрического построения, что сумма в выражении (7.11) равна нулю. Показать, что без изменения результата промежуток суммирования по k можно смещать на целое число, а именно при m целом

$$\sum_{k=m-N/2}^{m+N/2} W^{(l-n)k} = (N+1) \delta_{((l-n))}.$$

7.2. В главе 6 рассматривалось влияние инверсии и комплексного сопряжения на соотношение для преобразований Фурье при непрерывных переменных. С помощью аналогичного подхода для дискретных переменных показать, что если $g(n) \leftrightarrow G(k)$, то $g(-n) \leftrightarrow G(-k)$, $g^*(n) \leftrightarrow G^*(-k)$.

7.3. На рис. 7.5 изображена функциональная схема вычисления 8-точечного ДПФ по выходам двух 4-точечных ДПФ. Аналогичным методом построить схему для 8-точечного ДПФ с использованием четырех 2-точечных ДПФ. Сгруппировать входные отсчеты в следующем порядке: $g(0), g(4), g(2), g(6), g(1), g(5), g(3), g(7)$.

Список литературы

1. Gold B., Rader C. Digital Processing of Signals. New York: McGraw-Hill Book Company, 1960
2. Oppenheim A. V., Schaffer R. W. Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1975.
3. Cooley J. W., Tukey J. W. An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series. Math. Comp., Vol. 19. P. 297—301 (Apr. 1965).

Глава 8

КОРРЕЛЯЦИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Корреляционный анализ сигналов — это действие или процесс определения взаимосвязей, существующих между сигналами или функциями. Чаще всего сравнивают такие характеристики сигналов, как форму, ширину полосы, длительность и положение сигнала по времени или частоте.

В данной главе понятие корреляции представлено в виде процесса подбора одной функции относительно другой для минимизации среднеквадратичной разности функций. Количество переборов зависит от степени подобия обеих функций. Корреляционную функцию широко используют при анализе систем, она служит основой для измерения и оптимизации характеристик систем.

8.1. Корреляция векторов

Геометрическую интерпретацию корреляции можно получить сравнением двух векторов. На рис. 8.1 показаны два вектора V_1 и V_2 и разложение каждого из них на ортогональные составляющие.

Определим количественную меру степени подобия V_1 и V_2 . Один из подходов заключается в образовании разностного вектора V_p (рис. 8.2, а). Если $V_p = 0$, то V_1 и V_2 идентичны. Когда $V_p \neq 0$, подбирают значение V_2 для уменьшения V_p . Рассмотрим вектор

$$V_p = V_1 - c_{12}V_2, \quad (8.1)$$

где c_{12} — вещественная постоянная.

Из рис. 8.2, б видно, что V_p имеет наименьшее значение, когда находится под прямым углом, или ортогонален, $c_{12}V_2$. Тогда вектор V_1 состоит из составляющей $c_{12}V_2$, которая отличается от V_2 только по величине, и составляющей V_p , ортогональной V_2 .

Из рис. 8.2, б найдем постоянную

$$c_{12} = |V_1| \cos \theta / |V_2|. \quad (8.2)$$

Если угол $\theta = 90^\circ$ (V_1 и V_2 ортогональны), то $c_{12} = 0$, а V_1 и V_2 отличаются друг от друга максимально возможным образом, т. е. не коррелированы. В противоположном, экстремальном, случае, если $\theta = 0$, c_{12} будет просто отношением амплитуд векторов и $c_{12} = 1$, если $|V_1| = |V_2|$.

Альтернативное уравнению (8.2) выражение можно получить, обратившись к определению скалярного произведения двух векторов. Если θ — угол между двумя векторами, тогда

$$V_1 \cdot V_2 = |V_1| |V_2| \cos \theta,$$

откуда

$$c_{12} = V_1 \cdot V_2 / |V_2|^2. \quad (8.3)$$

Определим далее значение c_{12} так, чтобы его можно

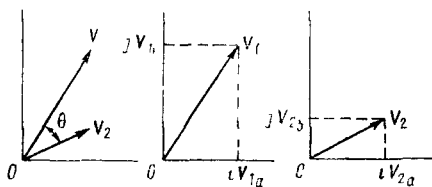


Рис 8.1 Разложение двух векторов на ортогональные компоненты

было применить к сравнению функций, отличных от простых двумерных векторов. Запишем разложение V_1 и V_2 на прямоугольные составляющие:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= iV_{1a} + jV_{1b}; \\ V_2 &= iV_{2a} + jV_{2b}; \\ V_p &= i(V_{1a} - c_{12}V_{2a}) + j(V_{1b} - c_{12}V_{2b}). \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Квадрат модуля (величины) V_p равен сумме квадратов его ортогональных составляющих:

$$|V_p|^2 = |V_1 - c_{12}V_2|^2 = (V_{1a} - c_{12}V_{2a})^2 + (V_{1b} - c_{12}V_{2b})^2. \quad (8.5)$$

В более общей форме

$$|V_p|^2 = \sum_{k=a}^b (V_{1k} - c_{12}V_{2k})^2. \quad (8.6)$$

То значение c_{12} , которое минимизирует $|V_p|^2$, минимизирует также и $|V_p|$. Поэтому уравнение (8.6) можно дифференцировать по c_{12} и, приравняв нулю, решить относительно c_{12} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |V_p|^2}{\partial c_{12}} &= \frac{\partial}{\partial c_{12}} \left[\sum_{k=a}^b (V_{1k}^2 - 2c_{12}V_{1k}V_{2k} + c_{12}^2V_{2k}^2) \right] = 0; \\ \frac{\partial |V_p|^2}{\partial c_{12}} &= 2c_{12} \sum_{k=a}^b V_{2k}^2 - 2 \sum_{k=a}^b V_{1k}V_{2k} = 0; \\ c_{12} &= \frac{\sum_{k=a}^b V_{1k}V_{2k}}{\sum_{k=a}^b V_{2k}^2}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Числитель в уравнении (8.7) является по определению скалярным произведением V_1 и V_2 , а знаменатель представляет собой квадрат модуля V_2 . Таким образом, выражение (8.7) идентично выражению (8.3). Постоянную c_{12} получили минимизацией квадрата разности между V_1 и V_2 .

В этом примере для минимизации вектора разности следовало бы изменять величину не модуля V_2 , а модуля V_1 . Такая операция дает в результате

$$c_{12} = \frac{\sum_{k=a}^b V_{1k}V_{2k}}{\sum_{k=a}^b V_{1k}^2}. \quad (8.8)$$

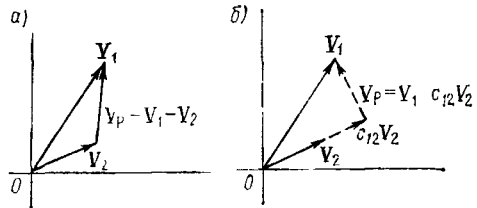


Рис. 8.2. Подбор величины V_2 для минимизации разностного вектора

Если записать $V_2 = c_{12}V_1 + V_p$, увидим, что V_2 можно разложить на составляющие: одна будет отличаться от V_1 только по модулю, другая — V_p , ортогональная V_1 .

8.2. Корреляция сигналов во времени и по форме

Рассмотрим простые временные функции (рис. 8.3). Каждый сигнал состоит из двух смежных прямоугольных импульсов длительностью Δt и отличается формой.

Полная энергия, содержащаяся в $v_1(t)$,

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |v_1(t)|^2 dt = (v_{1a}^2 + v_{1b}^2) \Delta t. \quad (8.9)$$

Поскольку прямоугольные составляющие сигнала $v_1(t)$ существуют в различных временных интервалах, то в соответствии с определением они ортогональны, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[v_{1a} \operatorname{rect} \left(\frac{t - \Delta t/2}{\Delta t} \right) \right] \left[v_{1b} \operatorname{rect} \left(\frac{t - 3\Delta t/2}{\Delta t} \right) \right] dt = 0. \quad (8.10)$$

Поэтому энергия, заключенная в сигнале данной формы, пропорциональна сумме квадратов его ортогональных составляющих, что аналогично определению квадрата вектора по сумме квадратов его ортогональных составляющих.

Меру подобия сигналов двух форм можно определить так же, как сравнивались между собой векторы. Например, умножить $v_2(t)$ на постоянную c_{12} и получить выражение для разностного сигнала

$$v_p(t) = v_1(t) - c_{12}v_2(t). \quad (8.11)$$

Постоянную c_{12} выбираем для минимизации энергии в разностном сигнале. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial c_{12}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [v_1^2(t) - 2c_{12}v_1(t)v_2(t) + c_{12}^2v_2^2(t)] dt \right\} = 0.$$

$$c_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t)v_2(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} v_2^2(t) dt}. \quad (8.12)$$

Для простых прямоугольных сигналов, приведенных на рис. 8.3, выражение (8.12) можно записать в виде

$$c_{12} = \frac{\sum_{k=a}^b v_{1k}v_{2k} \Delta t}{\sum_{k=a}^b v_{2k}^2 \Delta t}, \quad (8.13)$$

идентичном выражению (8.7) для двух векторов.

Если c_{12} выбрать в соответствии с уравнением (8.12), то сигнал формы $v_1(t)$ можно разложить на составляющую, кото-

рая будет отличаться от $v_2(t)$ только по модулю, и составляющую $v_p(t)$, ортогональную $v_2(t)$. Ортогональность $v_p(t)$ и $v_2(t)$ легко проиллюстрировать с помощью уравнений (8.11) и (8.12), чтобы показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_2(t) v_p(t) dt = 0.$$

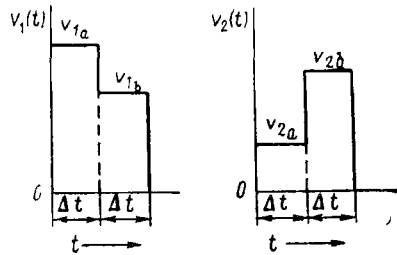


Рис 8.3 Две простые временные функции

Величину $v_1(t)$ можно изменить, чтобы свести к минимуму энергию в разностном сигнале, выразив постоянную c_{21} в виде

$$c_{21} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t) v_2(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} v_1^2(t) dt}. \quad (8.14)$$

Выражения (8.12) и (8.14) справедливы для вещественных сигналов. В более общем случае сравниваемые функции могут быть комплексными и тогда c_{12} и c_{21} будут комплексными:

$$\left. \begin{aligned} c_{12} &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t) v_2^*(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |v_2(t)|^2 dt}; \\ c_{21} &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v_1^*(t) v_2(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |v_1(t)|^2 dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

8.3. Нормированная корреляция и корреляционные функции

Выражения в знаменателе формул (8.15) определяют энергию сигналов $v_1(t)$ и $v_2(t)$. Выражения в числителе содержат информацию относительно *подобия* (корреляции) этих двух функций. Выражения (8.15) можно привести к более удобному виду, если принять числитель пропорциональным (равным) произведению энергий этих двух функций. В результате получим *нормированный коэффициент корреляции*:

$$\rho_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(t) v_2^*(t) dt}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |v_1(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |v_2(t)|^2 dt \right]^{1/2}}. \quad (8.16)$$

Нормируя по энергии обе функции, найдем, что ρ_{12} ограничено интервалом ± 1 : если $v_1(t) = kv_2(t)$, где k — любая вещественная постоянная, $\rho_{12} = +1$ или -1 в зависимости от того, каким является коэффициент k — положительным или отрицательным.

Рассмотрим два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t - \tau)$, где τ — произвольный сдвиг по времени. Степень корреляции двух сигналов будет очевидно функцией от τ . Без учета нормирования *взаимно корреляционные функции* будут

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt; \quad (8.17)$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^*(t - \tau) s_2(t) dt. \quad (8.18)$$

Эти выражения можно записать также в виде

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t + \tau) s_2^*(t) dt; \quad (8.19)$$

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1^*(t) s_2(t + \tau) dt. \quad (8.20)$$

Из выражений (8.17) и (8.20)

$$R_{12}(\tau) = R_{21}^*(-\tau), \quad (8.21)$$

а для вещественных сигналов

$$R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau). \quad (8.22)$$

Верхнюю границу корреляционной функции установим с помощью *неравенства Шварца*, общий вид которого

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x)|^2 dx. \quad (8.23)$$

Подстановка выражения (8.23) в (8.17) дает

$$|R_{12}(\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt \right| \leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |s_2(t)|^2 dt \right]^{1/2}, \quad (8.24)$$

т. е. значение корреляционной функции ограничено корнем квадратным из произведения энергий сигналов. Разделив выражение (8.24) на правую часть уравнения (8.24), получим, что нормированная корреляционная функция не может быть больше единицы.

Если $s_1(t) = s_2(t)$, из уравнения (8.17) найдем автокорреляционную функцию

$$R_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_1^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t + \tau) s_1^*(t) dt. \quad (8.25)$$

В соответствии с неравенством Шварца автокорреляционная функция равна или меньше своего значения при $\tau = 0$:

$$R_{11}(\tau) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 dt = R_{11}(0). \quad (8.26)$$

Автокорреляционная функция обладает свойством сопряженной симметрии: $R_{11}(\tau) = R_{11}^*(-\tau)$. Если $s_1(t)$ вещественна, автокорреляционная функция будет четной функцией от τ .

8.3.1. Преобразование Фурье корреляционных функций

Рассмотрим два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$ с преобразованиями Фурье $S_1(f)$ и $S_2(f)$. По определению преобразование Фурье взаимно корреляционной функции

$$\begin{aligned} S_3(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt \right] \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.27)$$

После перестановки членов и изменения порядка интегрирования получим

$$S_3(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_2^*(t - \tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \right] dt. \quad (8.28)$$

Внутренний интеграл представляет собой преобразование Фурье функции $s_2^*(t - \tau)$ из области τ в область f . Воспользовавшись правилами преобразования (см. табл. 6.1), найдем

$$s_2^*(t - \tau) \leftrightarrow S_2^*(f) \exp(-j2\pi ft). \quad (8.29)$$

Подставляя соотношение (8.29) в выражение (8.28), получим

$$S_3(f) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \exp(-j2\pi ft) dt \right] S_2^*(f).$$

В этом выражении интеграл представляет собой преобразование $s_1(t)$, поэтому

$$R_{12}(\tau) \leftrightarrow S_3(f) = S_1(f) S_2^*(f). \quad (8.30)$$

Воспользовавшись аналогичной процедурой, можем также записать

$$R_{21}(\tau) \leftrightarrow S_1^*(f) S_2(f); \quad (8.31)$$

$$R_{11}(\tau) \leftrightarrow |S_1(f)|^2. \quad (8.32)$$

Соотношение (8.32) показывает, что преобразование автокорреляционной функции представляет собой энергетический спектр $s_1(t)$. Таким образом, спектр автокорреляционной функции вещественный и положительный. Если функция $s_1(t)$ вещественна, спектр автокорреляционной функции также будет четной функцией от частоты.

8.3.2. Отношение между корреляцией и сверткой

Ясно, что существует подобие между корреляционным интегралом и интегралом свертки, определенным в гл. 6, т. е.

$$s_3(t) = s_1(t) \otimes s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau. \quad (8.33)$$

Можно заменить t на τ в определении (8.33) без изменения существа операции:

$$s_3(\tau) = s_1(\tau) \otimes s_2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(\tau - t) dt. \quad (8.34)$$

Запишем далее взаимно корреляционную функцию для $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в виде

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt$$

и определим новый сигнал, связанный с $s_2(t)$:

$$s_4(\tau - t) = s_2^*(t - \tau). \quad (8.35)$$

Подстановка равенства (8.35) в выражение для $R_{12}(\tau)$ дает

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_4(\tau - t) dt. \quad (8.36)$$

Сравнение выражений (8.34) и (8.36) показывает, что $R_{12}(\tau)$ получается с помощью свертки $s_1(t)$ и $s_4(t)$:

$$R_{12}(\tau) = s_1(\tau) \otimes s_4(\tau).$$

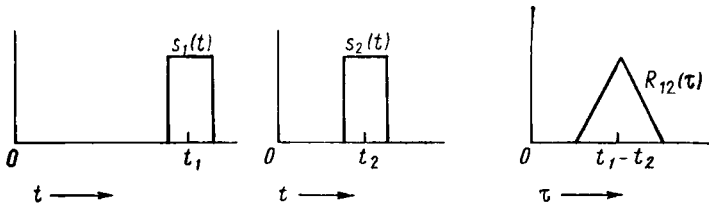


Рис. 8.4. Взаимная корреляция двух прямоугольных импульсов

Приняв в формуле (8.35) $t = 0$, найдем

$$s_4(\tau) = s_2^*(-\tau), \quad (8.37)$$

поэтому

$$R_{12}(\tau) = s_1(\tau) \otimes s_2^*(-\tau). \quad (8.38)$$

Взаимно корреляционная функция определена теперь как интеграл свертки с заменой соответствующей функции на сопряженную ей функцию.

8.3.3. Влияние сдвига¹ на корреляционную функцию

При реализации операции свертки сдвиги подчиняются аддитивному закону. Чтобы определить влияние сдвига на корреляционную функцию, примем допущения: $R_{12}(\tau) = s_1(\tau) \otimes s_2^*(-\tau)$; $s_3(t) = s_1(t - t_1) = s_1(t) \otimes \delta(t - t_1)$; $s_4(t) = s_2(t - t_2) = s_2(t) \otimes \delta(t - t_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} R_{34}(\tau) &= s_3(\tau) \otimes s_4^*(-\tau) = [s_1(\tau) \otimes \delta(\tau - t_1)] \otimes \\ &\otimes [s_2^*(-\tau) \otimes \delta(t_2 - \tau)] = [s_1(\tau) \otimes s_2^*(-\tau)] \otimes \\ &\otimes [\delta(\tau - t_1) \otimes \delta(t_2 - \tau)] = R_{12}(\tau) \otimes \delta[\tau - (t_1 - t_2)] = R_{12}[\tau - (t_1 - t_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом, при операции корреляции времена сдвигов вычитаются. Если считать, что t_1 и t_2 определяют *положение* сигналов во времени, то взаимно корреляционная функция содержит информацию относительно временного интервала между этими двумя сигналами (рис. 8.4).

8.3.4. Корреляционная функция в частотной области

Корреляционный процесс не ограничивается функциями во временной области. Зачастую при анализе сигналов необходимо получать корреляционные функции в частотной области. Таким образом, если $s_1(t) \leftrightarrow S_1(f)$; $s_2(t) \leftrightarrow S_2(f)$, тогда

$$K_{12}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) S_2^*(f - \nu) df, \quad (8.39)$$

¹ Под сдвигом подразумевается сдвиг функции во времени.

где $K_{12}(\nu)$ — взаимно корреляционная функция; ν — частотная переменная сдвига по частоте между $S_1(f)$ и $S_2(f)$. Кроме того,

$$K_{21}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1^*(f - \nu) S_2(f) df \quad (8.40)$$

и спектральная автокорреляционная функция

$$K_{11}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) S_1^*(f - \nu) df. \quad (8.41)$$

Обратное преобразование спектральной корреляционной функции можно получить с помощью операций, изложенных в пп. 8.3.1. Таким образом,

$$\begin{aligned} s_1(t) s_2^*(t) &\leftrightarrow K_{12}(\nu); & s_1^*(t) s_2(t) &\leftrightarrow K_{21}(\nu); \\ |s_1(t)|^2 &\leftrightarrow K_{11}(\nu). \end{aligned} \quad (8.42)$$

Если функции во временной области вещественны, соответствующие корреляционные операции в частотной области идентичны операции свертки.

8.3.5. Корреляционные функции сигналов с конечной мощностью¹

До сих пор считали, что интеграл от квадрата модуля коррелируемых функций имеет конечное значение (сигнал с конечной энергией). Если сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ содержат среднюю мощность конечной величины, но бесконечную полную энергию (сигналы с конечной мощностью), их корреляционная функция

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt = \langle s_1(t) s_2^*(t - \tau) \rangle, \quad (8.43)$$

где обозначение $\langle \cdot \rangle$ употреблено для реализации интеграла с усреднением по времени.

8.3.6. Интервал корреляции

Предположим, что $s_1(t)$ имеет конечную среднюю мощность, а $s_2(t)$ — бесконечную полную энергию. Тогда интеграл произведения имеет конечное значение. В этой ситуации полезным корреляционным моментом является *эффективный интервал корреляции*

$$T_{12} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt \right|^2 / \left(\langle |s_1(t)|^2 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} |s_2(t)|^2 dt \right). \quad (8.44)$$

¹ Мощность оценивается на конечном временном интервале.

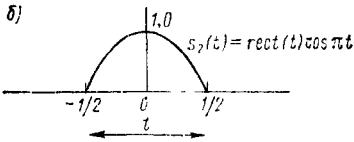
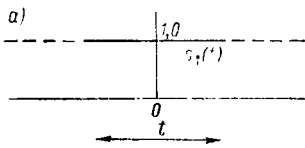


Рис. 8.5. Простой сигнал с конечной мощностью (а) и конечной энергией (б):

$s_1(t)$ — сигнал с конечной мощностью;
 $s_2(t) = \text{rect}(t) \cos \pi t$ — сигнал с конечной энергией

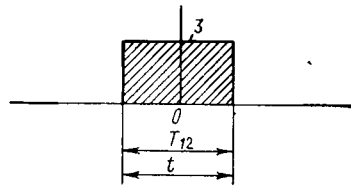
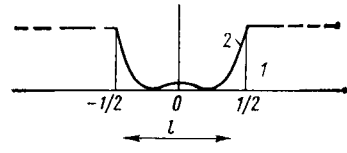


Рис. 8.6. Использование интервала корреляции для определения эквивалентной длительности сигнала:

1 — выделенная энергия, равная $\langle s_1^2(t) \rangle > T_{12}$; 2 — $s_a^2(t) = [s_1(t) - c_{12}s_2(t)]^2$; 3 — $[\langle s_1^2(t) \rangle]^{1/2} \times \text{rect}(t/T_{12})$

Для функции во временной области T_{12} измеряется в секундах и представляет собой эффективный временной интервал, в котором сигнал с бесконечной полной энергией можно использовать для получения мощности сигнала в конечных пределах.

Пусть $s_1(t)$ имеет единичную амплитуду в любой момент времени и $s_2(t)$ будет полупериодом косинусной функции (рис. 8.5). Очевидно, средняя мощность в $s_1(t)$ равна единице. Значение $T_{12}(c)$ в этом примере будет

$$T_{12} = \left| \int_{-1/2}^{+1/2} \cos(\pi t) dt \right|^2 / (1) \int_{-1/2}^{+1/2} \cos^2(\pi t) dt = 8/\pi^2.$$

Заметим, что T_{12} представляет собой произведение c_{12} и c_{21} , как указывалось ранее, причем $c_{12} = 4/\pi$, $c_{21} = 2/\pi$. Образует теперь разностный сигнал $s_p(t) = s_1(t) - c_{12}s_2(t) = 1 - (4/\pi) \times \cos(\pi t) \text{rect}(t)$. Энергия, отбираемая из $s_1(t)$ вычитанием составляющей $c_{12}s_2(t)$, равна

$$\begin{aligned} \text{отбираемая энергия} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [s_1^2(t) - s_p^2(t)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2c_{12}s_2(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} c_{12}^2 s_2^2(t) dt = \\ &= \frac{8}{\pi} \int_{-1/2}^{+1/2} \cos(\pi t) dt - \frac{16}{\pi^2} \int_{-1/2}^{+1/2} \cos^2(\pi t) dt = \frac{8}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Для этого примера отбираемая энергия равна произведению T_{12} и средней мощности в $s_1(t)$, т. е. $T_{12} \langle s_1^2(t) \rangle$.

На рис. 8.6 показан квадрат разностного сигнала вместе с сигналом прямоугольной формы длительностью T_{12} и амплитудой, равной среднеквадратичному значению $s_1(t)$. Прямоугольная форма сигнала эквивалентна $c_{12}s_2(t)$ в том смысле, что из $s_1(t)$ извлекается такое же количество энергии, что и при образовании разностного сигнала. Коэффициент T_{12} можно рассматривать как эквивалентную длительность $s_2(t)$.

8.4. Разрешающая способность и функции неопределенности сигналов

Корреляционную функцию широко применяют при анализе характеристик акустических систем [3]. Рассмотрим активную акустическую систему, используемую для определения местонахождения удаленных подводных объектов. Подобная система в типичном случае генерирует ограниченный по длительности акустический сигнал, который излучается источником в воду. Объекты, подлежащие обнаружению, представляют собой разрыв непрерывности импеданса в воде, при этом часть падающей на объект акустической энергии отражается обратно к источнику. Если предположить, что отражающие объекты — это точечные отражатели и они неподвижны относительно источника излучения, то сигнал, принятый в месте нахождения источника излучаемого сигнала, будет представлять собой задержанный во времени отклик излученного сигнала с амплитудой, уменьшенной в результате потерь при распространении сигнала до объекта и обратно, а также вследствие потерь, учитывающих характеристики отражения объекта — цели. Огибающая типичного излученного сигнала вместе с сигналами, принятыми от двух точечных целей, показана на рис. 8.7, а.

Форму излучаемого сигнала и приемную систему выбирают таким образом, чтобы они способствовали повышению возможности распознавания факта присутствия двух целей и точному измерению дистанции до каждой цели (или ее положению во времени). В отсутствие шумов местоположение можно в принципе определить с любой требуемой точностью. Наличие шумов искажает общую форму принятого сигнала настолько, что действительная форма и положение отраженных целью сигналов становятся неопределенными. Строгий анализ сигналов в присутствии шумов дается в последующих главах. В данной главе для распознавания характеристик сигналов, важных для оптимизации характеристик системы в целом, использован эвристический подход.

Ясно, что разумный подход к определению присутствия и местоположения сигналов, отраженных целью, состоит в том, что-

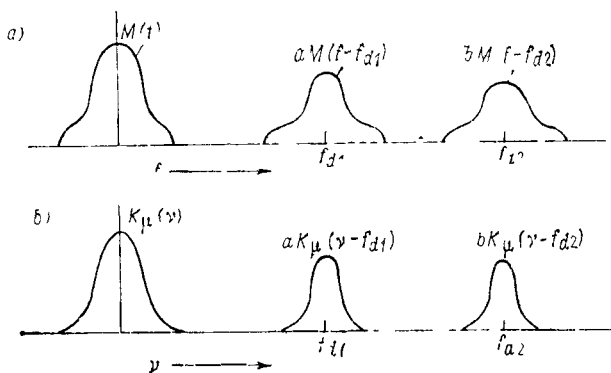


Рис. 87 Формы излученного и принятых сигналов и взаимная корреляция между ними

бы с помощью сдвигов отклика излученного сигнала в различные временные моменты определить те положения, которые дают в результате минимальное значение *интегральной квадратичной разности* между сдвинутым опорным и принятым сигналами. Пусть принятый сигнал

$$\mu_r(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t) = a\mu(t - t_1) + b\mu(t - t_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(t - \tau) - \mu_r(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(t - \tau)|^2 dt + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu_r(t)|^2 dt - 2 \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_r(t) \mu^*(t - \tau) dt \right]. \end{aligned}$$

Первые два члена представляют энергию в излученном и принятом сигналах и их можно считать постоянными. Последний член представляет собой удвоенное значение вещественной части взаимно корреляционной функции излученного и принятого сигналов.

Обозначим через \mathcal{W} сумму постоянных членов, тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(\tau) &= \mathcal{W} - 2 \operatorname{Re} \left[a \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t - t_1) \mu^*(t - \tau) dt + \right. \\ &+ \left. b \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t - t_2) \mu^*(t - \tau) dt \right] = \mathcal{W} - 2 \operatorname{Re} [aR_\mu(\tau - t_1) + bR_\mu(\tau - t_2)], \end{aligned} \quad (8.45)$$

где $R_{\mu}(\tau - t_n)$ — автокорреляционная функция $\mu(t)$, сдвинутая на время $\tau = t_n$.

Величина $\varepsilon^2(\tau)$ минимальна в положениях t_1 и t_2 , где корреляционные функции сигналов, сдвинутых во времени, достигают своих максимальных значений (рис. 8.7, б). Точность, с которой можно определить t_1 или t_2 , находится в обратной зависимости с шириной автокорреляционной функции $\mu(t)$. Аналогично способность распознавать присутствие двух (или более) сигналов от цели увеличивается, если ширина корреляционной функции мала по сравнению с временным интервалом между сигналами от целей. Может вызвать удивление тот факт, что способность разрешения двух или более целей или точного определения дистанции зависит от ширины автокорреляционной функции излученного сигнала, а не от длительности самого сигнала. Длительность сигнала очень простой формы и ширина автокорреляционной функции непосредственно связаны друг с другом. Однако в общем случае возможно, что длительность сигнала будет значительно большей, чем ширина автокорреляционной функции.

8.4.1. Эффективная ширина полосы. Разрешающая способность по дальности

Оптимальной формой автокорреляционной функции для достижения наилучших данных при измерении дальности и разрешения цели будет импульс. Мерой качества формы сигнала для этих целей можно считать интервал корреляции, рассмотренный в пп. 8.3.6, который определяет, насколько автокорреляционная функция близка по форме к импульсу. Равным образом можно сравнить *спектр* автокорреляционной функции со спектром импульса. В результате получим коэффициент с единицей измерения с^{-1} или ширину полосы, которую можно считать *эквивалентной*, или *эффективной*, *шириной полосы* β_3 сигнала. Это сравнение обычно делается при использовании комплексной функции огибающей для сигнала, поскольку несущая частота не входит в явном виде в процессе разрешения.

Пусть функция огибающей и ее преобразование Фурье имеют вид $\mu(t) \leftrightarrow M(f)$, откуда $R_{\mu}(\tau) \leftrightarrow |M(f)|^2$. В случае импульса $\delta(\tau) \leftrightarrow 1$. С учетом выражения (8.44) интервал корреляции, или эффективная ширина полосы, для функций в частотной области

$$\beta_3 = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (1) |M(f)|^2 df \right]^2}{\left[\lim_{B \rightarrow \infty} (1/B) \int_{-B/2}^{+B/2} (1) df \right] \int_{-\infty}^{+\infty} |M(f)|^4 df} \quad (8.46)$$

Поскольку интеграл в скобках в знаменателе выражения (8.46) равен единице,

$$\beta_s = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |M(f)|^2 dt \right]^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} |M(f)|^4 df. \quad (8.47)$$

Другое выражение для эффективной ширины полосы получим, воспользовавшись теоремой Парсеваля. Таким образом,

$$R_\mu(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |M(f)|^2 df; \quad (8.48)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_\mu(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |M(f)|^4 df. \quad (8.49)$$

Подставив выражения (8.48) и (8.49) в формулу (8.47), найдем

$$\beta_s = R_\mu^2(0) / \int_{-\infty}^{+\infty} |R_\mu(\tau)|^2 d\tau. \quad (8.50)$$

Эффективная ширина полосы, определенная по формулам (8.47) и (8.50), увеличивается по мере того, как форма автокорреляционной функции все более приближается к форме импульса.

Предположим, что $\mu(t)$ — функция вида $\text{sinc}(x)$. Тогда автокорреляционная функция будет такого же вида, а ее спектр — прямоугольным по форме, т. е.

$$\mu(t) = \text{sinc}(t/t_n) \leftrightarrow t_n \text{rect}(ft_n),$$

откуда

$$R_\mu(\tau) = t_n \text{sinc}(\tau/t_n) \leftrightarrow t_n^2 \text{rect}(ft_n).$$

Используя формулу (8.47), найдем эффективную ширину полосы

$$\beta_s = \left[t_n^2 \int_{-t_n/2}^{+t_n/2} dt \right]^2 / \left[t_n^4 \int_{-t_n/2}^{+t_n/2} df \right] = t_n^2 / t_n^3 = 1/t_n. \quad (8.51)$$

Как и следовало ожидать, для спектра прямоугольной формы эффективная ширина полосы равна соответствующей ширине полосы в частотной области.

Допустим далее, что

$$\mu(t) = \text{rect}(t/t_n) \leftrightarrow t_n \text{sinc}(ft_n);$$

$$R_\mu(\tau) = t_n(1 - |\tau|/t_n) \text{rect}[t/(2t_n)] \leftrightarrow t_n^2 \text{sinc}^2(ft_n).$$

Из формулы (8.47) или (8.50) определим эффективную ширину полосы (для прямоугольного импульса):

$$\beta_s = 3/(2t_n). \quad (8.52)$$

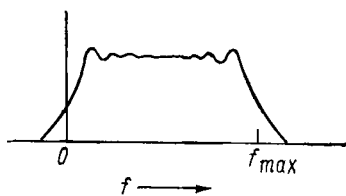


Рис 8.8 Спектр функции огибающей с частотной линейной модуляцией

Из формул (8.51) и (8.52) видно, что для простого импульса $\text{sinc}(x)$ и прямоугольных функций огибающей эффективная ширина обратно пропорциональна длительности импульса.

Рассмотрим гораздо более сложную огибающую

$$\mu(t) = \text{rect}[(t - t_n/2)/t_n] \exp(jkt^2), \quad (8.53)$$

которая является комплексной функцией времени с квадратической фазовой характеристикой kt^2 . Определив частоту как скорость изменения фазы, можно найти *мгновенную частоту*

$$f_t = \frac{1}{2\pi} \frac{d(kt)^2}{dt} = \frac{kt}{\pi}. \quad (8.54)$$

Таким образом, мгновенная частота будет линейной функцией времени за период длительности импульса. Применительно к высокочастотной несущей функция огибающей в выражении (8.53) дает в результате линейный частотно-модулированный импульс.

Максимальной мгновенная частота f_{max} будет, когда в выражении (8.54) $t = t_n$. Тогда

$$f_{\text{max}} = kt_n/\pi. \quad (8.55)$$

Если f_{max} велико по сравнению с $1/t_n$, эффективная ширина полосы импульса с частотной модуляцией по линейному закону определяется частотной модуляцией, а не формой и длительностью прямоугольной функции. При $f_{\text{max}}t_n \gg 1$ форма спектра модулированной функции огибающей почти прямоугольна (рис. 8.8). Этот спектр нельзя выразить в замкнутом виде. Форму его рассчитывают с помощью таблиц интегралов Френеля [7].

При больших значениях $f_{\text{max}}t_n$ автокорреляционная функция частотно-модулированного сигнала приближенно представляет собой функцию вида $\text{sinc}(x)$ с шириной, обратно пропорциональной f_{max} . Таким образом,

$$R_\mu(\tau) \approx \text{sinc}(\tau f_{\text{max}}). \quad (8.56)$$

Ширина автокорреляции в этом случае значительно меньше, чем длительность исходной функции огибающей. Целесообразно предположить, что неподвижные цели можно по отдельности идентифицировать с применением этого сигнала при условии, что расстояние между целями составляет по меньшей мере $1/f_{\text{max}}$.

842. Эффективная длительность во времени
Разрешающая способность по скорости

Предположим, что цели движутся относительно источника излучаемого звука. Вследствие доплеровского эффекта наблюдаемая частота сигнала, отраженного от цели, зависит от этого движения и от положения приемника. Например, для цели, движущейся от источника со скоростью v , сигнал, приходящий в точку нахождения цели, будет иметь частоту

$$f_1 = f_0(1 - v/c), \quad (8.57)$$

где f_0 — частота, излучаемая неподвижным источником; v — радиальная скорость цели, движущейся от источника; c — скорость звука в неподвижной среде.

Сигнал, отраженный обратно к источнику от движущейся цели, претерпевает дополнительный доплеровский сдвиг, в результате чего частота, принимаемая в точке нахождения приемника,

$$f_2 = f_0 \frac{1 - v/c}{1 + v/c}. \quad (8.58)$$

Доплеровский сдвиг, определяемый разностью между частотами принятого и излученного сигналов,

$$f_d = f_2 - f_0 = -\frac{2vf_0}{c} \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-1} = \frac{2v}{\lambda_0} \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-1}. \quad (8.59)$$

Если не требуется большой точности в расчете доплеровского сдвига, удобно упростить уравнение (8.59), приняв, что в типичном случае $v/c \ll 1$, поэтому

$$f_d \approx -2v/\lambda_0. \quad (8.60)$$

Предположим, что такое допущение возможно. Заметим, однако, что в том виде, в каком он определен здесь, доплеровский сдвиг отрицателен для удаляющейся от источника цели ($v > 0$) и положителен для цели, движущейся в направлении к источнику ($v < 0$).

Пусть излученный сигнал

$$s(t) = \mu(t) \exp(j2\pi f_0 t)$$

отражается двумя целями, которые перемещаются относительно источника. Сигналы от цели, принятые в точке нахождения источника, будут иметь вид

$$s_r(t) = a\mu(t - t_1) \exp[j2\pi(f_0 + f_{d1})(t - t_1)] + b\mu(t - t_2) \exp[j2\pi(f_0 + f_{d2})(t - t_2)], \quad (8.61)$$

где t_1, t_2 — положения целей 1 и 2 во времени; f_{d1}, f_{d2} — доплеровские сдвиги по частоте для целей 1 и 2

Если разность по времени $t_2 - t_1$ меньше, чем величина, обратная эффективной ширине полосы огибающей, то, как видно

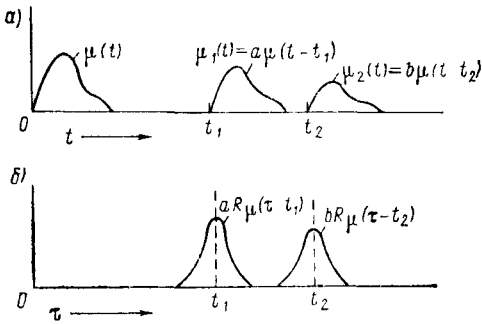


Рис 8.9 Спектр принятого сигнала (а) и взаимная корреляция спектров принятого и излученного сигналов при условии, что цели движутся в направлении на источник (б)

из предыдущего, при таком сигнале было бы трудно обеспечить разрешение по этим двум целям на основе взаимной

корреляции во временной области. В качестве предельного случая допустим, что $t_1 = t_2$. Без каких-либо потерь в общности t_1 и t_2 можно принять равными нулю, в результате огибающая принятого сигнала будет описываться следующей функцией:

$$\mu_r(t) = a\mu(t) \exp(j2\pi f_{d1}t) + b\mu(t) \exp(j2\pi f_{d2}t). \quad (8.62)$$

Эти две цели еще можно разрешить с помощью доплеровского разделения частот (фильтрации) $f_{d2} - f_{d1}$, формируя в частотной области взаимно корреляционной функции спектры огибающей излученного и принятого сигналов.

Таким образом, пусть $\mu(t) \leftrightarrow M(f)$, $\mu_r(t) \leftrightarrow aM(f - f_{d1}) + bM(f - f_{d2})$. Взаимно корреляционная функция в частотной области

$$K_{\mu, \mu_r}(v) = aK_{\mu}(v - f_{d1}) + bK_{\mu}(v - f_{d2}), \quad (8.63)$$

где

$$K_{\mu}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(f) M^*(f - v) df.$$

Ширина спектра принятого сигнала и взаимно корреляционной функции показана на рис. 8.9, где f_1 и f_2 приняты положительными, т. е. цели движутся к источнику. Способность по разрешению этих двух целей на основе доплеровской фильтрации обратно пропорциональна ширине корреляционной функции в частотной области.

Чем более корреляционная функция близка по форме к импульсу, тем ближе по частоте могут быть цели при сохранении возможности их разрешения.

Интервал корреляции можно использовать для сравнения спектральной корреляционной функции с импульсом в частотной области. Кроме того, можно сравнить преобразование $K(v)$ с

преобразованием $\delta(f)$. Таким образом, $1 \leftrightarrow \delta(f)$, $|\mu(t)|^2 \leftrightarrow M(v) \otimes \otimes M^*(-v) = K_\mu(v)$, откуда

$$\tau_3 = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (1) |\mu(t)|^2 dt \right]^2}{\left[\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{+T/2} (1)^2 dt \right] \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(t)|^4 dt} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(t)|^2 dt \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\mu(t)|^4 dt}. \quad (8.64)$$

Выражение (8.64) определяет *эффективную длительность* τ_3 функции огибающей. Чем больше значение τ_3 , тем больше будет K_μ приближаться к форме импульса и тем большей будет разрешающая способность такого сигнала в частотной области. Воспользовавшись теоремой Парсеваля, получим эквивалентное выражение

$$\tau_3 = K_\mu^2(0) / \int_{-\infty}^{+\infty} |K_\mu(v)|^2 dv. \quad (8.65)$$

Для огибающей, описываемой прямоугольной функцией, эффективная длительность равна длительности импульса t_n , т. е. если $\mu(t) = \text{rect}(t/t_n)$, то

$$\tau_3 = \left[\int_{-t_n/2}^{+t_n/2} dt \right]^2 / \int_{-t_n/2}^{+t_n/2} dt = t_n^2/t_n = t_n. \quad (8.66)$$

Это справедливо также и для частотно-модулированного сигнала с прямоугольной огибающей, поскольку

$$|\text{rect}(t/t_n) \exp(jkt^2)| = \text{rect}(t/t_n).$$

В типичном случае для частотно-модулированного сигнала произведение эффективной ширины полосы на эффективную длительность значительно больше единицы:

$$\beta_3 \approx f_{\max} \gg 1/t_n; \quad \tau_3 = t_n$$

и при частотно-модулированном сигнале

$$\beta_3 \tau_3 \approx f_{\max} t_n \gg 1. \quad (8.67)$$

8.4.3. Одновременное разрешение по дальности и скорости

Рассмотрим два принятых сигнала, разнесенных по времени на τ , а по доплеровской частоте — на ν . Функция, описывающая огибающую принятого сигнала, в общем виде будет

$$\mu_r(t) = \mu(t) \exp(-j2\pi\nu t) + \mu(t - \tau),$$

где амплитуды обоих принятых сигналов для простоты принимаются равными. Огибающая $\mu(t)$ должна быть выбрана таким

образом, чтобы разность между принятыми сигналами от цели была наибольшей в как можно более широком диапазоне значений τ и ν .

Пользуясь теми же правилами, что и ранее, получим интеграл квадрата разности между принятыми сигналами и попытаемся максимизировать эту величину, выбирая соответствующую форму сигнала. В результате определим взаимно корреляционную функцию двух принятых сигналов:

$$\chi(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) \mu^*(t - \tau) \exp(-j2\pi\nu t) dt, \quad (8.68)$$

которая будет функцией двух переменных τ и ν . Заметим, что разрешающая способность повышается, если привести эту двумерную корреляционную функцию к импульсному виду как в частотной, так и во временной областях. По аналогии с выражениями (8.50) и (8.65)

$$\text{общий коэффициент разрешения} = \frac{\chi^2(0, 0)}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu}. \quad (8.69)$$

Этот коэффициент называют также *коэффициентом неопределенности сигнала*, а $|\chi(\tau, \nu)|^2$ — *функцией неопределенности сигнала*. Данная функция описывает полную неопределенность разрешения, или точного обнаружения, целей по дальности (временную задержку) и по скорости (доплеровскую частоту).

Ранее (см. п. 8.4) установлено, что при известной скорости цели разрешающую способность по дальности повышают минимизацией площади под квадратом огибающей автокорреляционной функции во временной области (максимизацией эффективной ширины полосы). Аналогично в пп. 8.4.2 показано, что при известном расстоянии до цели разрешающая способность по скорости обратно пропорциональна площади квадрата огибающей корреляционной функции в частотной области.

Если ни дальность, ни скорость не известны, способность по одновременному разрешению или определению местоположения целей по дальности и скорости обратно пропорциональна *объему* под функцией неопределенности сигнала. Покажем, что этот объем инвариантен по отношению к *выбранной* форме сигнала и в действительности равен квадрату энергии сигнала $|\chi(0, 0)|^2$. Запишем функцию неопределенности сигнала в виде двойного интеграла:

$$|\chi(\tau, \nu)|^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) \mu^*(t - \tau) \mu^*(t') \mu(t' - \tau) \times \\ \times \exp[-j2\pi\nu(t - t')] dt dt'.$$

Отсюда после некоторых перестановок получим интеграл по τ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) \mu^*(t') \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t' - \tau) \mu^*(t - \tau) d\tau \right] \times \right. \\ \left. \times \exp[-j2\pi\nu(t - t')] dt dt' \right\}. \quad (8.70)$$

Член в скобках в выражении (8.70) представляет собой $R_\mu^*(t - t')$.

Пусть $t' = t - T$; $dt' = -dT$, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) \mu^*(t - \tau) R_\mu^*(T) \exp(-j2\pi\nu T) dt dT.$$

Интегрируя по t , получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_\mu(T)|^2 \exp(-j2\pi\nu T) dT. \quad (8.71)$$

Теперь проинтегрируем выражение (8.71) по ν . В результате

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_\mu(T)|^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j2\pi\nu T) d\nu \right] dT = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_\mu(T)|^2 \delta(T) dT = R_\mu^2(0) = |\chi(0, 0)|^2. \quad (8.72)$$

Подстановка выражения (8.72) в формулу (8.69) показывает, что общая функция неопределенности сигнала равна единице независимо от выбора формы сигнала, т. е.

$$\chi^2(0, 0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu = 1. \quad (8.73)$$

Значение этого результата состоит в том, что если форму сигнала изменить для улучшения разрешения по дальности, разрешающая способность по скорости неизбежно ухудшится. Аналогично повышение разрешающей способности по скорости ухудшает разрешение по дальности.

8.4.4 Функция неопределенности гауссова сигнала

Математически удобной формой сигнала для иллюстрации понятия неопределенности сигнала является импульс в форме гауссовой кривой. Выберем амплитуду сигнала такой, чтобы его энергия оказалась равной единице. Тогда

$$\mu(t) = (\sigma^{1/2} \pi^{1/4})^{-1} \exp[-t^2/(2\sigma^2)] \leftrightarrow \sigma^{1/2} \pi^{1/4} \sqrt{2} \cdot \exp(-2\pi f^2 \sigma^2).$$

Двумерная автокорреляционная функция для сигнала подобной формы

$$\chi_{\mu}(\tau, \nu) = \exp[-\tau^2/(4\sigma^2) + j\pi\nu\tau - (\pi\sigma)^2 \nu^2]. \quad (8.74)$$

Если $\nu = 0$, получим автокорреляционную функцию временной задержки

$$R_{\mu}(\tau) = \chi_{\mu}(\tau, 0) = \exp[-\tau^2/(4\sigma^2)]. \quad (8.75)$$

Аналогично этому автокорреляционная функция в доплеровской области

$$K_{\mu}(\nu) = \chi(0, \nu) = \exp[-(\pi\sigma\nu)^2]. \quad (8.76)$$

Эффективная ширина полосы и длительность гауссова импульса будут

$$\beta_e = 1/(\sigma \sqrt{2\pi}); \quad \tau_e = \sigma \sqrt{2\pi}. \quad (8.77)$$

Эта функция неопределенности сигнала есть квадрат огибающей, определяемой выражением (8.74). Таким образом,

$$|\chi(\tau, \nu)|^2 = \exp[-\tau^2/(2\sigma^2) - 2(\pi\sigma\nu)^2]. \quad (8.78)$$

Подставив далее выражение (8.77) в формулу (8.78), получим

$$|\chi(\tau, \nu)|^2 = \exp[-\pi(\beta_e^2\tau^2 + \tau_e^2\nu^2)]. \quad (8.79)$$

Трехмерный график гауссовой функции неопределенности показан на рис. 8.10. Для любого фиксированного значения ν эта функция неопределенности имеет гауссову форму, когда она строится в функции от τ . Аналогично, для любого конкретного значения τ она будет гауссовой функцией от ν . Площадь под пересечением функции с вертикальной плоскостью при $\nu = 0$ обратно пропорциональна эффективной ширине полосы огибающей, а площадь поперечного сечения по оси ν при $\tau = 0$ обратно пропорциональна эффективной длительности.

Заштрихованная область на рис. 8.10 представляет собой пересечение функции неопределенности с плоскостью, параллельной плоскости $\tau 0\nu$. Можно показать, что это пересечение имеет эллиптическую форму. Пусть это пересечение определяется выражением

$$|\chi(\tau, \nu)|^2 = K < |\chi(0, 0)|^2. \quad (8.80)$$

Заменим $|\chi(\tau, \nu)|^2$ выражением (8.79) и прологарифмируем обе части

$$\pi(\beta_e^2\tau^2 + \tau_e^2\nu^2) = -\ln K; \quad \beta_e^2\tau^2 + \tau_e^2\nu^2 = -\ln K/\pi. \quad (8.81)$$

Постоянную K можно выбрать такой, чтобы выражение в правой части соотношения (8.81) было равно единице. В результате получим уравнение для эллипса с большой и малой полуосями, равными $1/\beta_e$ и $1/\tau_e$. Этот эллипс показан на рис. 8.11 в

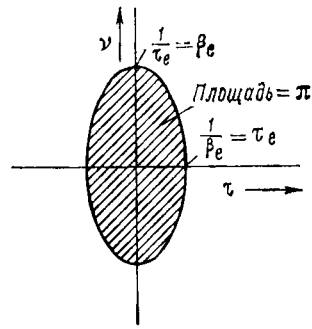
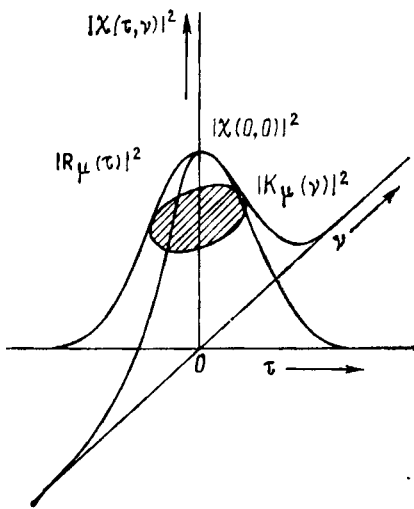


Рис. 8.11. Двумерный график гауссовой функции неопределенности

←
Рис. 8.10. Трехмерный график гауссовой функции неопределенности

виде двумерной фигуры, отображающей соответствующую информацию, содержащуюся в более сложной трехмерной диаграмме неопределенности.

Ширина эллипса неопределенности в направлении τ будет критерием разрешающей способности сигнала по дальности, а ширина в направлении ν связана с разрешением по скорости. Для гауссова сигнала, как видно из выражений (8.76) и (8.77), произведение $\beta_e \tau_e = 1$. Площадь эллипса неопределенности определяется выражением $\pi / (\beta_e \tau_e)$ и является величиной постоянной. Это соответствует поведению трехмерной функции неопределенности: любая попытка улучшить разрешающую способность сигнала в одной области приводит к ухудшению разрешения в другой области.

8.4.5. Гауссов сигнал с линейной частотной модуляцией

Произведение эффективной ширины полосы и эффективной длительности в общем случае не равно единице. Однако увеличение этого произведения не обеспечивает возможности улучшить разрешение по дальности и по скорости одновременно, исходя из допущения, что как дальности, так и скорости целей неизвестны и неограничены. Если, с другой стороны, либо дальность, либо скорость известны (или ограничены в достаточно узких пределах) для каждой цели, разрешение в другой области можно улучшить беспрельдно.

Предположим, гауссов сигнал с линейной частотной модуляцией

$$\mu(t) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sigma^{1/2}} \exp \left[- \left(\frac{t^2}{2\sigma^2} \right) - jkt^2 \right]. \quad (8.82)$$

На эффективную длительность этого сигнала частотная модуляция не влияет, и поэтому она такая же, как у простого гауссова импульса, т. е. $\tau_e = \sigma \sqrt{2\pi}$. Эффективная ширина полосы зависит от члена, выражающего частотную модуляцию:

$$\beta_e = (1 + k^2 \tau_e^4 / \pi^2)^{1/2} / \tau_e, \quad (8.83)$$

откуда

$$\beta_e \tau_e = [(1 + k^2 \tau_e^4) / \pi^2]^{1/2}. \quad (8.84)$$

Произведение длительности на ширину полосы пропорционально k и τ_e^2 и может быть сделано сколь угодно большим.

Функция неопределенности сигнала для такого процесса

$$|\chi(\tau, \nu)|^2 = \exp[-\pi(\beta_e^2 \tau^2 - 2k\tau_e^2 \nu \tau / \pi + \tau_e^2 \nu^2)]. \quad (8.85)$$

Сечение этой функции, параллельное плоскости $\tau 0 \nu$, опять в форме эллипса можно получить, приняв показатель в выражении (8.85) равным соответствующей постоянной. Пусть, например,

$$\beta_e^2 \tau^2 - 2k\tau_e^2 \nu \tau / \pi + \tau_e^2 \nu^2 = 1. \quad (8.86)$$

Вследствие частотной модуляции главные оси эллипса в формуле (8.85) не параллельны осям τ и ν , как при простом гауссовом сигнале. Двумерный эллипс неопределенности для частотно-модулированного сигнала представлен на рис. 8.12. На этом же рисунке эллипс неопределенности при $k = 0$ и с такой же эффективной длительностью показан в виде заштрихованной области. Несложные расчеты подтверждают, что при возрастании k площадь эллипса остается постоянной.

Располагая сигналом, определенным формулой (8.82), допустим, что цель с нулевой относительной скоростью расположена на расстоянии, соответствующем времени t_1 . Корреляция во временной области с функцией огибающей излученного сигнала дает в результате функцию $R_{\mu}(\tau - t_1) = \chi[(\tau - t_1), 0]$. Квадрат этой функции представляет собой пересечение функции неопределенности сигнала (с центром в $t_1, 0$) с вертикальной плоскостью через ось τ .

Вторая цель тоже с нулевой скоростью, находящаяся на расстоянии t_2 по времени, дает корреляционную функцию с центром t_2 . Результирующие корреляционные функции для двух целей показаны на рис. 8.13, а. Эти цели легко разрешимы при условии, что $t_2 - t_1$ больше обратной величины эффективной ширины полосы сигнала.

Допустим далее, что относительная скорость первой цели не равна нулю, что приводит в результате к доплеровскому сдвигу ν_1 . Корреляция во временной области с излученным сигналом уже не имеет центр t_1 , а сдвигается во времени на величину, пропорциональную доплеровскому сдвигу и постоянной частот-

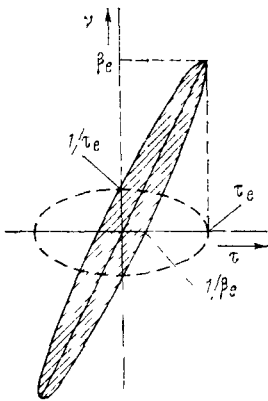


Рис. 8.12. Двумерный эллипс неопределенности для гауссова импульса с частотной модуляцией

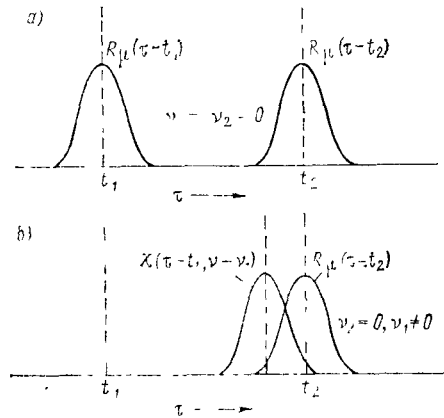


Рис. 8.13. Корреляционные функции целей во временной области при равных (а) и разных (б) скоростях целей

ной модуляции k . Если скорость цели неизвестна, положение цели во времени неопределенно в пределах $\pm\tau_e$ от истинного положения. Поэтому такие две цели не могут быть разрешены по дальности без неопределенности, если расстояние между ними не превышает эффективной длительности.

На рис. 8.13, б показан сдвиг во времени в положении первой цели и получающееся в результате (возможное) перекрытие со второй целью.

Аналогичным образом, если расстояния до целей известны, цели могут разрешаться по доплеровской частоте при условии, что они разнесены по частоте, по меньшей мере, на $1/\tau_e$. Если же дальности до целей неизвестны, положения корреляционных максимумов в частотной области нельзя однозначно связывать с истинными положениями целей в этой области. Тогда для гарантии разрешения необходим разнос по частоте между целями около β_e .

При таких ограничениях может показаться, что большое значение произведения времени на ширину полосы, получаемое в случае частотно-модулированного сигнала, не имеет практической ценности. Однако, хотя скорости и дальности целей могут быть неизвестны априори, они редко бывают неограниченными. Обычно скорости целей под водой малы. При условии, что результирующий доплеровский сдвиг небольшой по сравнению с $1/\tau_e$, можно достичь разрешения по дальности, соответствующего величине, обратно пропорциональной эффективной ширине полосы.

Для негауссовых сигналов полная неопределенность, определяемая выражением (8.69), равна единице. Однако пересечение функции неопределенности с горизонтальной плоскостью не

приводит в общем случае к эллипсу, как для сигнала гауссовой формы. Из-за простоты двумерной эллиптической диаграммы неопределенности ее часто используют в качестве схематического представления распределения неопределенности в τ ν -плоскости даже для негауссовых функций огибающей. Тогда эллиптической функции в выражении (8.86) придают с помощью формулы (8.84) следующий вид:

$$\beta_e^2 \tau^2 - 2 (\beta_e^2 \tau_e^2 - 1)^{1/2} \tau \nu + \tau_e^2 \nu^2 = 1. \quad (8.87)$$

Это уравнение строго справедливо только для гауссовой огибающей. Однако при использовании действительно эффективных ширины полосы и длительности для огибающей других видов эллипс, описываемый уравнением (8.87), отражает соответствующее поведение более сложной трехмерной функции неопределенности. Площадь его постоянна, а пересечения с осями τ и ν определяются значениями $1/\beta_e$ и $1/\tau_e$.

Задачи

8.1. Определите нормированный коэффициент корреляции для двух сигналов:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \text{rect}(t/t_{n1}); \\ s_2(t) &= \text{rect}(t/t_{n2}) \cos(\pi t/t_{n2}); \\ t_{n2} &\geq t_{n1}. \end{aligned}$$

Определите зависимость между t_{n2} и t_{n1} , которая максимизирует нормированный коэффициент корреляции. Рассчитайте максимально возможный коэффициент корреляции.

8.2. Взаимно корреляционная функция $s_1(t)$ и $s_2(t)$ определяется как

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2^*(t - \tau) dt.$$

Покажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} s_2^*(t) dt.$$

8.3. Пусть $s(t)$ будет вещественной функцией с преобразованием Фурье $S(f)$. Если $R(\tau)$ — автокорреляционная функция $s(t)$, покажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [R'(\tau)]^2 d\tau = (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |S(f)|^4 df.$$

8.4. С помощью уравнений (8.47) или (8.50) покажите, что эффективная ширина полосы гауссова сигнала $s(t) = \exp[-t^2/(2\sigma^2)]$ равна $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$.

8.5. Обозначим преобразование Гильберта $x(t)$ через $\hat{x}(t)$. Образуйте аналитический сигнал $z(t)$ в виде

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t).$$

Покажите, что

$$R_z(\tau) = 2 [R_x(\tau) + j\hat{R}_x(\tau)],$$

где $\hat{R}_x(\tau)$ — преобразование Гильберта автокорреляционной функции $x(t)$.

8.6. Изобразите схематически функции неопределенности сигнала в виде огибающей прямоугольной функции.

Список литературы

1. *Mason S. J., Zimmerman H. J.* Electronic Circuits, Signals, and Systems. New York: John Wiley and Sons, Inc; 1960, Chap. 6.
2. *Burdic W. S.* Radar Signal Analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc., 1968, Chap. 3 and 5.
3. *Woodward P. M.* Probability and Information Theory with Applications to Radar. Elmsford, N. Y.: Pergamon Press, Inc., 1960. (1955).
4. *Helstrom C. W.* Statistical Theory of Target Detection. Elmsford, N. Y., Pergamon Press, Inc., 1960.
5. *Westerfield E. C., Prager R. H., Stewart J. L.* Processing Gains against Reverberation (Clutter) Using Matched Filters. IRE Trans. Inf. Theory, Vol. IT-6. P. 342—348. (June 1960).
6. *Rihaczek A. W.* Principles of High-Resolution Radar. New York: McGraw-Hill Book Company, 1969.
7. *Abramovitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions. Nat. Bureau of Standards, Applied. Math. Series (55). Wash., DC.: U. S. Govt. Printing Office, 1965.

Глава 9

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Параметры окружающей среды и сигналов, используемые при анализе акустических систем, невозможно измерить с большой точностью. Определение потерь при распространении между двумя точками с учетом сложного взаимодействия поверхности, дна и толщи океана рассмотрено в гл. 5. Точный прогноз потерь при распространении между двумя точками потребовал бы детального измерения физических параметров среды в функции пространства и времени. В большинстве случаев сделать это невозможно и приходится довольствоваться средними значениями параметров среды. Акустические сигналы часто по своему характеру подобны шуму, а окружающий шум в океане порождается случайными явлениями. Несмотря на это, все же можно получить полезные результаты в предположении существования некоторых средних статистических закономерностей рассматриваемых явлений.

Методы теории вероятностей и статистики являются чрезвычайно полезным инструментом при анализе систем, имеющих дело со случайными шумоподобными сигналами и процессами. Ниже приводятся основные положения этих теорий.

9.1. Определение вероятности

Обычно понятие вероятности вводится при рассмотрении относительной частоты появления случайных событий. Этот подход, хотя и лишен математической строгости, вполне подходит для наших целей.

Типичное случайное событие — результат бросания игральной кости для правильно изготовленной кости: нельзя заранее уверенно предсказать число, которое появится при любом бросании. Вместе с тем при большом количестве испытаний существует строгая закономерность появления определенного числа в предсказуемом проценте случаев. Возможный исход бросания кости называется событием. Если испытание заключается в бросании кости A_1 , тогда появление двойки есть событие A_2 , а появление любой грани — A_k , где k равно любому числу от 1 до 6.

Пусть в проведенном эксперименте из N бросаний n раз произошло событие A_2 . Относительная частота появления события A_2 (частость события) равна $n(A_2)/N$. При повторении испытаний n может быть другим, однако при бесконечном числе опытов частость стремится к некоторой постоянной величине. Вероятность события A_2 есть предельное значение частоты при количестве опытов, стремящемся к бесконечности:

$$P(A_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} [n(A_k)/N]. \quad (9.1)$$

Говорят, если в результате опыта может произойти только одно элементарное событие, как, например, при каждом бросании кости, такие события будут несовместными. Тогда вероятность появления $k=2$ или $k=3$ определяется выражением

$$P(A_2 \text{ или } A_3) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{[n(A_2) + n(A_3)]/N\} = P(A_2) + P(A_3) \quad (9.2)$$

или в общем случае

$$P(A_1 \text{ или } A_2 \dots A_L) = \sum_{k=1}^L P(A_k). \quad (9.3)$$

Вероятность появления одного из нескольких несовместных событий равна сумме их вероятностей. Сумма вероятностей полной группы событий равна единице. Так, для K возможных исходов

$$\sum_{k=1}^K P(A_k) = 1. \quad (9.4)$$

9.1.1. Вероятность совмещения (произведения) событий

Случайное событие не обязательно ограничено одним исходом, как в случае бросания одиночной игральной кости. Например, при бросании двух костей появятся два числа. Событие,

состоящее в появлении двух конкретных чисел, называют сложным событием, в отличие от элементарного (простого) события. Вероятности, относящиеся к простому и сложному событиям, называют соответственно элементарной вероятностью и вероятностью совмещения (произведения) событий.

Пусть в случае двух игральных костей совмещение события обозначено A_k, B_l , где k и l конкретные значения возможных исходов событий A и B . Вероятность $P(A_k, B_l)$ является вероятностью получения конкретного k -го результата на кости A с одновременным получением конкретного l -го результата на кости B . Поскольку при бросании каждой кости существуют шесть исходов, то для двух костей имеется 36 исходов. С учетом несовместности событий сумма вероятностей полной группы событий равна единице. В опыте с двумя игральными костями

$$\sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 P(A_k, B_l) = 1. \quad (9.5)$$

Рассмотрим вероятность события A_k при любом из 6 исходов события B . Этому случаю удовлетворяют следующие сложные события: $A_k, B_1, A_k, B_2, \dots, A_k, B_l$, т. е. все возможные способы реализации простого события A_k , и, следовательно, вероятность должна быть равной $P(A_k)$. Поскольку все они несовместные, эта вероятность равна сумме вероятностей сложных событий, т. е.

$$P(A_k) = \sum_{l=1}^6 P(A_k, B_l). \quad (9.6)$$

9.1.2. Условная вероятность

Допустим, необходимо определить вероятность события A_k, B_l при условии, что событие A_k уже произошло. Вероятность события такого рода называют условной вероятностью и записывают следующим образом: вероятность A_k при условии того, что B_k произошло, равна $P(A_k/B_l)$.

Пусть выполнено N опытов, в которых событие B_l осуществлялось $n(B_l)$ раз, а сложное событие A_k, B_l произошло $n(A_k, B_l)$ раз. Следовательно, условная частота события A_k при условии, что B_l произошло, равна

$$n(A_k, B_l)/n(B_l).$$

Разделив числитель и знаменатель на N и устремив N к бесконечности, найдем выражение для определения условной вероятности

$$P(A_k/B_l) = P(A_k, B_l)/P(B_l). \quad (9.7)$$

По аналогии можно получить выражение для оценки условной вероятности события B_l , если A_k осуществилось:

$$P(B_l|A_k) = P(A_k, B_l)/P(A_k). \quad (9.8)$$

В формулах (9.7) и (9.8) условная вероятность определяется на основании вероятностей сложного и элементарного событий.

9.1.3. Статистическая независимость

В опытах с парой правильно изготовленных игральных костей результат выпадания числа на одной из костей никак не влияет на результат второй кости, т. е. при любом B_l условная вероятность A_k просто равна элементарной вероятности A_k . В тех случаях, когда это справедливо, события A_k и B_l считаются статистически независимыми и можно написать

$$\begin{aligned} P(A_k|B_l) &= P(A_k, B_l)/P(B_l) = P(A_k); \\ P(B_l|A_k) &= P(A_k, B_l)/P(A_k) = P(B_l), \end{aligned}$$

откуда

$$P(A_k, B_l) = P(A_k)P(B_l). \quad (9.9)$$

Таким образом, для статистически независимых событий вероятность совмещения (произведения) событий равна произведению вероятностей.

9.2. Дискретные случайные величины

В случае экспериментов с игральной костью исходы принимают определенные дискретные значения. Такие же результаты характерны для ряда физических явлений, представляющих интерес с практической точки зрения. Обозначим исход испытания через x , а конкретное дискретное значение через x_k . Переменную x называют дискретной случайной величиной, а ряд вероятностей $P(x_k)$, соответствующих значениям x_k , — функцией плотности распределения (законом) случайной величины x , если вероятность рассматривать как функцию от x .

Обычно для представления распределения дискретной случайной величины используют импульсную функцию. Пусть случайная величина принимает значение x_k с вероятностью $P(x_k)$. На основании свойств импульсной функции

$$P(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_k) \delta(x - x_k) dx. \quad (9.10)$$

Если дискретная случайная величина принимает N возможных значений, распределение вероятностей или плотность веро-

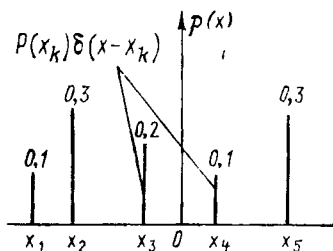


Рис 9.1 Функция плотности распределения, или плотности вероятности, дискретной случайной величины

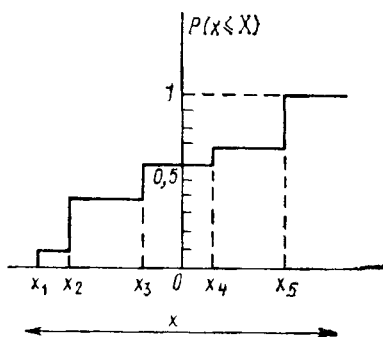


Рис 9.2 Функции распределения для генератора дискретного напряжения

ятности от x можно представить в виде

$$p(x) = \sum_{k=1}^N P(x_k) \delta(x - x_k). \quad (9.11)$$

В качестве примера дискретной случайной величины x_k рассмотрим выход генератора случайного напряжения. Функция плотности вероятности для $N=5$ приведена на рис. 9.1. Отметим, что сумма дискретных вероятностей случайной величины определяется интегралом от функции плотности вероятности и в случае учета всех возможных значений x равна единице:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^5 P(x_k) \delta(x - x_k) dx = \\ &= \sum_{k=1}^5 P(x_k) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_k) dx = \sum_{k=1}^5 P(x_k) = 1. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Представляет также интерес вероятность того, что выходное напряжение x равно либо меньше некоторого значения X . Для несовместных событий ее значение определяется суммой вероятностей дискретных значений x_k , равных или меньших X :

$$P(x_k \leq X) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \sum_{k=1}^M P(x_k), \quad (9.13)$$

где M — наибольшее значение k , для которого $x_k \leq X$. Например, для дискретной случайной величины, приведенной на рис. 9.1, вероятность того, что $x \leq x_4$, равна 0,7.

Функцию, определяемую выражением (9.13), когда вероятность является функцией верхнего предела X , называют

функцией распределения случайной величины x . Для генератора дискретного случайного напряжения функция распределения показана на рис. 9.2.

Функция распределения является монотонно возрастающей функцией X . В случае дискретной случайной величины она скачкообразно увеличивается в точках допустимых значений x . Максимальное значение функции распределения равно единице.

Из выражения (9.13) видно, что функцию плотности вероятности можно получить, дифференцируя функцию распределения. Функция плотности вероятности (дифференциальная функция распределения) — это неотрицательная функция, интеграл от которой по всем возможным x должен быть равен единице.

Если дискретная случайная величина относится к сложному событию x_k, y_l или к системе случайных величин, функция распределения и плотность вероятности определяются следующим выражением:

$$\begin{aligned}
 & P(x_k \leq X, y_l \leq Y) = \\
 = & \int_{-\infty}^Y \int_{-\infty}^x p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^Y \int_{-\infty}^x \sum_k \sum_l P(x_k, y_l) \delta(x - x_k, y - y_l) dx dy = \\
 & = \sum_{\substack{x_k \leq X \\ y_l \leq Y}} P(x_k, y_l). \tag{9.14}
 \end{aligned}$$

Интеграл от плотности вероятности по всем возможным значениям x и y должен быть равен единице, так как включает все возможные события. Если интегрирование выполняется по всем возможным значениям y и по ограниченному диапазону значений x , результат представляет собой функцию распределения x , т. е.

$$P(x \leq X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x p(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^x p(x) dx. \tag{9.15}$$

Из выражения (9.15) также видно, что интегрирование функции плотности вероятности по всему диапазону одной из случайных переменных величин приводит к получению функции плотности вероятности другой величины:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p'(x, y) dy. \tag{9.16}$$

9.3. Непрерывные случайные величины

Пусть число возможных дискретных значений напряжения на выходе генератора случайного напряжения безгранично возрастает. Поскольку сумма вероятностей во всем диапазоне слу-

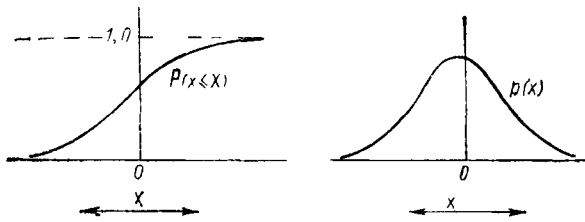


Рис 9.3 Функции распределения и функции плотности вероятности непрерывной случайной величины

чайной величины должна оставаться равной единице, вероятность, соответствующая каждому дискретному значению, должна стремиться к нулю при увеличении числа возможных исходов до бесконечности. Вместе с тем вероятность нахождения выходного напряжения в любом конечном интервале отлична от нуля. Функция распределения остается неубывающей функцией с максимальным значением, равным единице.

9.3.1. Функция плотности вероятности

В пределе дискретная величина превращается в непрерывную с непрерывной функцией распределения. При отсутствии разрывов в функции распределения функция плотности вероятности не содержит импульсных функций.

На рис. 9.3 показана гипотетическая функция распределения и функция плотности вероятности для генератора непрерывного случайного напряжения. Следует обратить внимание на то, что хотя функция плотности вероятности и не является нулевой, вероятность, соответствующая любому значению напряжения, равна $p(x)dx$ и, следовательно, бесконечно мала.

Случайная величина может состоять из дискретных и непрерывных компонентов. Функцию плотности вероятности для таких случайных величин представим в виде суммы непрерывной и импульсной функций плотности вероятности. Пусть $p_1(x)$ — непрерывная составляющая функция плотности вероятности; $p_2(x) = \sum_{k=1}^N P(x_k) \delta(x - x_k)$ — дискретная составляющая функция плотности вероятности.

Функция плотности вероятности случайной величины такого типа

$$p(x) = p_1(x) + \sum_{k=1}^N P(x_k) \delta(x - x_k). \quad (9.17)$$

9.3.2. Функция совместной плотности вероятности

Двумерную функцию распределения и функцию плотности вероятности для двух непрерывных случайных величин x и y

определяют аналогично функциям произведения дискретных случайных величин. Так,

$$P(x \leq X, y \leq Y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p(x, y) dx dy. \quad (9.18)$$

Объем, ограниченный поверхностью функции плотности вероятности, как и в случае дискретных переменных, равен единице, а одномерную функцию распределения для каждой непрерывной случайной величины получают интегрированием двумерной функции в соответствующих пределах. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1; \quad (9.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x p(x, y) dx dy = P(x \leq X); \quad (9.20)$$

$$\int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = P(y \leq Y); \quad (9.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = p(x); \quad (9.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx = p(y). \quad (9.23)$$

9.3.3. Условная функция плотности вероятности и статистическая независимость

Условную функцию плотности вероятности и ее взаимосвязь с функцией плотности многомерной и одномерной случайных величин определяют аналогично дискретному случаю:

$$p(x, y) = p(x|y)p(y) = p(y|x)p(x). \quad (9.24)$$

Если x и y статистически независимы, условная функция плотности вероятности просто равна функции плотности вероятности случайной величины. Таким образом, для независимых x и y

$$\left. \begin{aligned} p(y|x) &= p(y); & p(x|y) &= p(x); \\ p(x, y) &= p(x)p(y), \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

а также

$$\begin{aligned} P(x \leq X, y \leq Y) &= P(x \leq X)P(y \leq Y) = \\ &= \int_{-\infty}^y p(y) dy \int_{-\infty}^x p(x) dx. \end{aligned} \quad (9.26)$$

9.4. Моменты распределения

При анализе случайных величин часто требуется определить их среднее или ожидаемое значение, а может потребоваться также среднее значение функций вероятности.

Рассмотрим дискретную случайную величину x , принимающую K различных значений x_k . Если эксперимент повторяется N раз, среднее значение $x_{\text{ср}}$ будет

$$x_{\text{ср}} = (1/N)[x_1 n(1) + \dots + x_k n(k) + \dots + x_K n(K)], \quad (9.27)$$

где N — число испытаний; $n(k)$ — число исходов, при которых $x = x_k$.

Запишем выражение (9.27) в более компактном виде

$$x_{\text{ср}} = \sum_{k=1}^K x_k [n(k)/N]. \quad (9.28)$$

При $N \rightarrow \infty$ выражение в квадратных скобках превращается в $P(x_k)$ и тогда (9.28) можно переписать в виде

$$E[x] = \bar{x} = \sum_{k=1}^K x_k P(x_k). \quad (9.29)$$

Выражение $E[x]$ обозначает математическое ожидание случайной величины x . Этот параметр называют также средним, ожидаемым статистическим средним или средним по ансамблю значениям случайной величины x . Если x — функция другой переменной, например времени, ее называют стохастической величиной, а соответствующие ей средние — стохастическими средними.

Часто необходимо определить математическое ожидание различных функций случайных величин. Например, повторив рассуждения, приведенные в выражении (9.29), получим математическое ожидание квадрата x :

$$E[x^2] = \bar{x}^2 = \sum_{k=1}^K x_k^2 P(x_k). \quad (9.30)$$

В общем случае, если $f(x)$ — произвольная функция x ,

$$E[f(x)] = \sum_{k=1}^K f(x_k) P(x_k). \quad (9.31)$$

Заменяя дискретную вероятность функцией плотности вероятности, а суммирование — интегрированием, найдем математическое ожидание непрерывной случайной величины:

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx. \quad (9.32)$$

При анализе случайных величин особую важность представляет математическое ожидание различных степеней x . Они называются моментами случайной величины и определяются в виде момента порядка n :

$$E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx. \quad (9.33)$$

Среднее значение x будет первым моментом или центром распределения $p(x)$, среднее значение квадрата $x - E[x^2]$ является вторым моментом $p(x)$ и т. д.

Центральные моменты случайных величин определяют как математическое ожидание порядка n переменной $(x - \bar{x})$, т. е. n -й центральный момент

$$E[(x - \bar{x})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^n p(x) dx. \quad (9.34)$$

Первый центральный момент равен нулю по определению. Второй центральный момент является дисперсией x и часто имеет следующее специальное обозначение:

$$D[x] = \sigma_x^2 \quad (9.35)$$

Раскрывая скобки в формуле (9.34), получим

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - 2\bar{x} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx + \\ &+ (\bar{x})^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - (\bar{x})^2 = E[x^2] - E^2[x]. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Таким образом, дисперсия равна разности между вторым моментом и квадратом первого. Квадратный корень из дисперсии σ_x^2 называют стандартным отклонением x

Если x представляет собой случайное напряжение в функции времени, то ожидаемое или среднее значение будет постоянной составляющей \bar{x} . Переменная составляющая x получается как разность между значением x и средним значением: $x = x - \bar{x}$.

Мощность, характеризующая переменную составляющую, пропорциональна среднему значению ее квадрата, т. е. дисперсии x :

$$P_{\sim} = E[(x - \bar{x})^2] = \sigma_x^2.$$

Общая мощность процесса равна сумме мощностей постоянной и переменной составляющих:

$$P = P_{\sim} + P_{-} = \sigma_x^2 + (\bar{x})^2 = E[x^2]. \quad (9.37)$$

Понятие моментов и средних значений можно использовать также и для характеристики многомерных случайных величин. Пусть z — некоторая функция x и y . Тогда

$$E[z] = E[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(x, y) dx dy. \quad (9.38)$$

Моменты многомерной случайной величины задаются в виде момента порядка $(n + m)$:

$$E[x^n y^m] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^m p(x, y) dx dy, \quad (9.39)$$

а центральный момент порядка $(n + m)$ будет

$$E[x^n y^m] = E[(x - \bar{x})^n (y - \bar{y})^m]. \quad (9.40)$$

Пусть теперь x и y статистически независимы, так что $p(x, y) = p(x)p(y)$. Тогда момент порядка $(n + m)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} E[x^n y^m] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^m p(x) p(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y^m p(y) dy = E[x^n] E[y^m]. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Таким образом, для статистически независимых случайных величин среднее значение произведения равно произведению средних значений. Если z — сумма случайных величин x и y , то среднее значение z будет

$$\begin{aligned} E[z] = E[x + y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) p(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx \right] dy. \end{aligned} \quad (9.42)$$

С учетом выражений (9.22) и (9.23) формула (9.42) приобретает вид

$$E[x + y] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p(y) dy = E[x] + E[y]. \quad (9.43)$$

Следовательно, среднее значение суммы случайных величин равно сумме их средних значений. Необходимо отметить, что для получения этого результата не требуется, чтобы переменные были статистически независимы.

Дисперсия $z = x + y$ в соответствии с определением будет $\sigma_z^2 = E[(z - \bar{z})^2]$. Так как среднее значение z — сумма средних значений x и y , то

$$\begin{aligned}\sigma_z^2 &= E\{[(x - \bar{x}) + (y - \bar{y})]^2\} = E[(x - \bar{x})^2] + \\ &+ 2E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] + E[(y - \bar{y})^2] = \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})].\end{aligned}\quad (9.44)$$

Если x и y статистически независимы, то среднее значение произведения в уравнении (9.44) равно произведению средних значений. Тогда для статистически независимых x и y

$$E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})] = E[(x - \bar{x})]E[(y - \bar{y})] = 0,$$

т. е. дисперсия z равна сумме дисперсий x и y . Обобщая этот результат для суммы N независимых случайных величин, получим

$$z = \sum_{n=1}^N x_n; \quad \bar{z} = \sum_{n=1}^N \bar{x}_n; \quad \sigma_z^2 = \sum_{n=1}^N \sigma_{x_n}^2. \quad (9.45)$$

Необходимо отметить, что в соответствии с выражением (9.44), если случайные составляющие z не являются статистически независимыми, то дисперсия z не равна сумме дисперсий своих составляющих. В общем случае для всех не обязательно статистически независимых x_n

$$\begin{aligned}E[(z - \bar{z})^2] &= E\left[\left(\sum_n x_n - \sum_n \bar{x}_n\right)^2\right] = E\left[\sum_n (x_n - \bar{x}_n)^2\right] = \\ &= E\left[\sum_m \sum_n (x_m - \bar{x}_m)(x_n - \bar{x}_n)\right] = \sum_m \sum_n E[(x_m - \bar{x}_m)(x_n - \bar{x}_n)].\end{aligned}\quad (9.46)$$

Средние значения величин x_m и x_n в уравнении (9.46) называют их ковариацией. При $m = n$ ковариация просто превращается в дисперсию. Для статистически независимых x_m и x_n уравнение (9.46) сводится к (9.45).

9.5. Примеры функций плотности вероятности

Воспользовавшись положениями, изложенными ранее, рассмотрим несколько примеров.

9.5.1. Равномерная плотность вероятности

Наиболее простой функцией плотности вероятности будет равномерная функция (рис. 9.4). Плотность вероятности x постоянна в области от $b - a$ до $b + a$ и равна нулю вне этой области. Плотность вероятности случайной величины x

$$p(x) = [1/(2a)] \text{rect}[(x - b)/(2a)]. \quad (9.47)$$

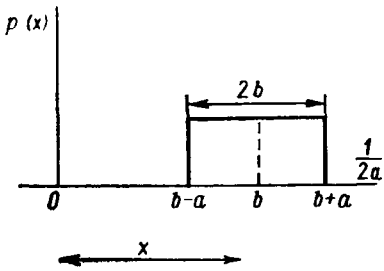


Рис. 9.4. Функции плотности вероятности при равномерном распределении

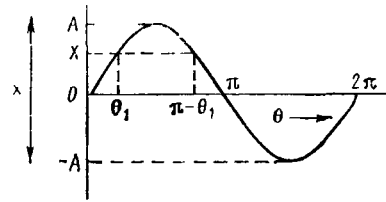


Рис. 9.5. Синусоидальная функция

Площадь под $p(x)$ равна единице. Среднее значение x

$$E[x] = \bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \frac{1}{2a} \int_{b-a}^{b+a} x dx = \frac{x^2}{4a} \Big|_{b-a}^{b+a} = b.$$

Дисперсия x

$$\begin{aligned} E[(x - \bar{x})^2] &= \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x) dx = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} (x - b)^2 \text{rect}\left(\frac{x - b}{2a}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \text{rect}\left(\frac{x}{2a}\right) dx = \frac{x^3}{6a} \Big|_{-a}^a = \frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$

Стандартное отклонение x равно корню квадратному из дисперсии, т. е. $\sigma_x = a/\sqrt{3}$.

9.5.2. Плотность вероятности синусоидального процесса

Пусть x — синусоидальная функция (рис. 9.5), т. е.

$$x = A \sin \theta,$$

где θ — случайная переменная, равномерно распределенная в пределах 2π ; A — константа. Необходимо определить функцию плотности распределения x .

Функция распределения случайной величины x

$$P(x \leq X) = \int_{-\infty}^x p(x) dx,$$

где $X \leq A$. Из рис. 9.5 видно, что вероятность того, что $x \leq X$, равна вероятности нахождения θ вне пределов интервала $[\theta, \pi - \theta]$. Поскольку θ равномерно распределена в интервале

от 0 до 2π , требуемая вероятность $P(x \leq X) = P$. Вне интервала $[\theta_1, \pi - \theta_1]$ $\theta = (\pi + 2\theta_1)/(2\pi)$. Но $\theta_1 = \arcsin(X/A)$, следовательно,

$$P(x \leq X) = 1/2 + (1/\pi) \arcsin(X/A).$$

Плотность вероятности (рис. 9.6) получим дифференцированием функции распределения:

$$p(X) = \begin{cases} dP(x \leq X)/dX = 1/[\pi(A^2 - X^2)^{1/2}] & \text{при } |X| \leq A; \\ 0 & \text{при } |X| > A. \end{cases} \quad (9.48)$$

Необходимо отметить, что значение плотности вероятности стремится к бесконечности при $x \rightarrow \pm A$. Однако это не означает, что вероятность того, что $x = A$ или $x = -A$, равна бесконечности. Необходимо помнить, что вероятность нахождения x в любом интервале определяется площадью под кривой плотности вероятности в пределах этого интервала. Общая площадь конечно должна быть равна единице.

Среднее значение $x = 0$, поскольку $p(x)$ является четной функцией x , и, следовательно, первый момент распределения должен быть равен нулю:

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) = 0.$$

Дисперсия x равна второму моменту

$$D[x] = \sigma_x^2 = E[x^2] = \int_{-A}^A \frac{x^2 dx}{\pi(A^2 - x^2)^{1/2}}.$$

Интеграл табличный и его значение равно

$$\sigma_x^2 = A^2/2,$$

что соответствует известному результату для синусоидального процесса — стандартное отклонение или среднеквадратичное значение равно максимальному значению, деленному на квадратный корень из двух:

$$\sigma_x = A/\sqrt{2}.$$

9.5.3. Распределение процесса на выходе идеального выпрямителя

Напряжение на выходе идеального однополупериодного выпрямителя равно напряжению на входе при положительном значении входного напря-

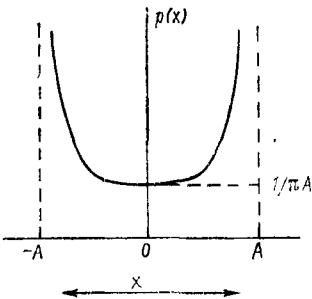


Рис. 9.6. Функции плотности распределения случайной величины при $x = A \sin \theta$

жения и равно нулю при отрицательном значении. Пусть напряжение входного процесса $x(t)$ представляет собой функцию времени с нулевым средним значением и гауссовой функцией плотности распределения, определяемой выражением

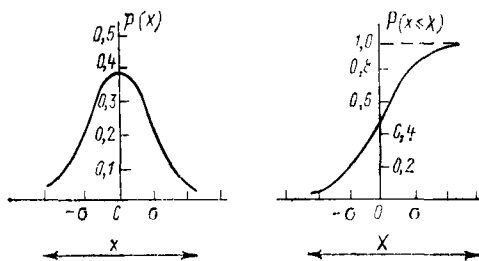


Рис. 9.7. Гауссовы функции плотности распределения и функции распределения

$$p(x) = [1/(\sigma_x \sqrt{2\pi})] \exp[-x^2/(2\sigma_x^2)]. \quad (9.49)$$

Дисперсия $x(t) = \sigma_x^2$, а функция распределения

$$P(x \leq X) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) dx. \quad (9.50)$$

Интеграл (9.50) нельзя представить в конечном виде, однако для нормализованной формы существуют таблицы. На рис. 9.7 показаны гауссова функция плотности вероятности и функция распределения.

Напряжение на выходе идеального выпрямителя половину времени — при отрицательном напряжении на входе — равно нулю. Вследствие этого функция плотности вероятности выходного процесса $y(t)$ равна нулю для отрицательных значений $y(t)$ и содержит импульсную функцию со значением 0,5 при нулевом значении $y(t)$. Для положительных значений $y(t)$ функция плотности распределения идентична $x(t)$. Функция плотности распределения выходного процесса

$$p(y) = 0,5\delta(y) + \frac{u(y)}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad (9.51)$$

где $u(y)$ — функция единичного скачка. Функции плотности вероятности выходного процесса и функции распределения показаны на рис. 9.8.

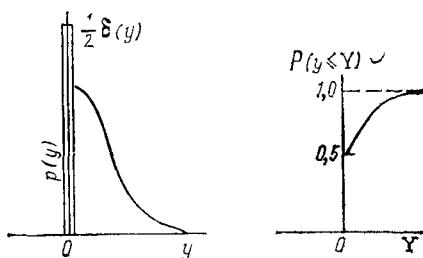


Рис. 9.8 Функции плотности распределения $(\sigma_x \sqrt{2\pi})^{-1} e^{-y^2/(2\sigma_x^2)}$ и функции распределения на выходе однополупериодного выпрямителя при гауссовом входном процессе

Найдем среднее значение и дисперсию выходного процесса. По определению среднее значение y будет

$$E[y] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y \delta(y) dy + \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}\right) dy.$$

Первый интеграл равен нулю, так как $y\delta y = 0$ во всем интервале. Значение второго интеграла легко найти с помощью соответствующих таблиц. В результате

$$E[y] = \sigma_x / \sqrt{2\pi}. \quad (9.52)$$

Дисперсия выходного процесса

$$\sigma_y^2 = E[y^2] - E^2[y].$$

Опуская интеграл с импульсной функцией, получим

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}\right) dy - \frac{\sigma_x^2}{2\pi}.$$

Используя таблицу определенных интегралов, найдем

$$\sigma_y^2 = (\sigma_x^2/2) (1 - 1/\pi). \quad (9.53)$$

Как следует из выражений (9.52) и (9.53), на выходе детектора появляется постоянная составляющая, пропорциональная амплитуде переменной составляющей входного процесса, и выходная переменная составляющая, меньшая по сравнению с переменной входной компонентой.

9.6. Случайные процессы

Случайное напряжение, вызванное тепловым движением электронов на зажимах резистора, — это еще один пример случайной величины. Статистические характеристики такого напряжения можно определить непосредственным наблюдением в течение достаточно длительного интервала времени.

Будем считать, что напряжения на клеммах всех однотипных резисторов при аналогичных условиях подчиняются одним и тем же законам и напряжение на клеммах некоторого конкретного резистора является реализацией случайного процесса, в частности теплового шума. Случайный процесс определяется семейством всех возможных реализаций этого процесса, характеризуемых полным набором статистических параметров каждой реализации и соотношениями между реализациями. Полное семейство реализации называют ансамблем.

Реализации случайного процесса не обязательно должны порождаться одинаковыми физическими процессами. Например, случайный процесс может возникать в результате подключения

случайным образом к одному из нескольких источников напряжения, создаваемого отличными по физической природе процессами. Напряжение одного из источников может создаваться за счет теплового движения электронов через резистор, другого — выбором величины в зависимости от результата, выпавшего на игральной кости и т. д. Для описания соотношения между случайными переменными в таком наборе необходимо знать статистические характеристики переключаемых процессов. В этом случае функция распределения каждого из процессов будет отличаться от соответствующей функции распределения реализации случайного процесса.

9.6.1. Стационарные процессы

Если статистические характеристики случайного процесса не изменяются во времени, такой процесс называется стационарным. Рассмотрим набор большого числа идентичных резисторов с одинаковой температурой. Обозначим ряд измеренных напряжений в момент t_1 на выходе каждого из резисторов через $x(t_1)$, чтобы отличить его от результата $x_k(t)$, полученного на любом резисторе. Тогда выборочная функция плотности распределения будет $p[x(t_1)]$ или $p(x_1)$. Она соответствует функции плотности распределения выборочной реализации напряжения из ансамбля в момент t_1 . В случае стационарного процесса функция плотности распределения в момент времени t_2 будет такой же, как и в момент t_1 .

Аналогично можно сопоставить отсчеты в моменты t_1 и t_2 и получить функцию плотности совместного распределения $p(x_1, x_2)$. Для стационарных процессов функция плотности совместного распределения не зависит от абсолютного значения времени взятия выборки и определяется только разностью отсчетов $t_2 - t_1$, т. е.

$$p(x_1, x_2) = p(x_3, x_4)$$

при условии, что $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$.

Если соотношение подобного типа остается справедливым для функции плотности вероятности более высоких порядков, то говорят, что процесс стационарен в строгом (узком) смысле. Если $p(x_1)$ и $p(x_1, x_2)$ инвариантны относительно временного смещения, а функции более высоких порядков не имеют этого свойства, процесс называется стационарным в широком смысле. Если процесс не обладает ни одним из указанных свойств, он будет нестационарным процессом. Процесс теплового шума, когда все элементы находятся в тепловом равновесии и при постоянной температуре, стационарен в строгом смысле. Очевидно, если температура резисторов с течением времени медленно изменяется, то и тепловое напряжение изменится и процесс будет нестационарным.

Принцип стационарности обычно применяется в соответствии с временной шкалой, характерной для рассматриваемого процесса. Все физические явления являются частью природы и, следовательно, должны изменяться во времени. Вместе с тем удобно считать процесс стационарным, если его статистические характеристики не подвергаются значительным изменениям в течение самого продолжительного периода, характерного для изучаемого процесса.

9.6.2 Эргодические процессы

Среднее по времени значение напряжения на клеммах резистора, находящегося в тепловом равновесии, определяется выражением

$$\langle x_k(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t) dt, \quad (9.54)$$

где $x_k(t)$ — напряжение на k -м резисторе ансамбля. Статистическое среднее напряжение или среднее по ансамблю получается при одновременном измерении напряжения на каждом резисторе в некоторый момент времени:

$$E[\mathbf{x}(t_1)] = \overline{\mathbf{x}(t_1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1 p(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}. \quad (9.55)$$

Если все сопротивления равны и находятся при одинаковой постоянной температуре, результаты, полученные на основании выражений (9.54) и (9.55), равны. Следовательно,

$$\langle x_k(t) \rangle = E[x_1] = \bar{\mathbf{x}}_1. \quad (9.56)$$

Кроме того, можно установить, что

$$\langle x_k^2(t) \rangle = E[x_1^2]$$

и

$$\langle x_k(t) x_k(t - \tau) \rangle = E[\mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}(t_1 - \tau)] = E[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2], \quad (9.57)$$

где $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_1 - \tau)$. Процесс, обладающий указанным свойством, называется *эргодическим*. Эргодический процесс всегда стационарен. Вместе с тем стационарность процесса еще не гарантирует его эргодичности. Возьмем, например, выборку теплового шумового процесса из ансамбля с неравными резисторами. Временное среднее, полученное на основании одной из выборок, в общем случае не равно среднему по ансамблю, и, следовательно, процесс не будет эргодическим.

Основное внимание при анализе систем уделяется обнаружению и измерению сигналов при наличии случайного шума, относящегося к эргодическим процессам. Обычно это приводит к под-

дающимся обработке математическим выражениям и однозначно определенным процедурам оптимизации. Вместе с тем часто в состав шумового поля необходимо включать дискретные мешающие сигналы, случайно распределенные в пространстве и времени. После этого шумовое поле перестает быть эргодическим и его точный анализ становится очень трудным.

9.7. Функции случайных величин

При анализе систем необходимо уметь оценивать влияние различных математических преобразований на статистические характеристики случайных величин. Ниже будет показано, как это сделать для нескольких, наиболее часто применяемых преобразований.

9.7.1. Масштабирование случайных величин

Наиболее распространенным и очень простым математическим преобразованием сигнала и помех является амплитудное масштабирование. Пусть имеется случайная величина x с функцией плотности вероятности $p(x)$. Необходимо определить функцию плотности вероятности, среднее значение и дисперсию величины $y = ax$, где a — действительная постоянная.

Функция распределения $P(y)$ связана с функцией плотности вероятности x следующим образом:

$$P(y \leq Y) = P\left(x \leq \frac{Y}{a}\right) = \int_{-\infty}^{Y/a} p(x) dx. \quad (9.58)$$

Функцию плотности вероятности $p(Y)$ получаем, дифференцируя выражение (9.58) по Y :

$$p(y) = \frac{\partial P(y \leq Y)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left[\int_{-\infty}^{Y/a} p(x) dx \right]. \quad (9.59)$$

Частную производную правой части выражения (9.59) находим с использованием известных соотношений:

если

$$h = \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} g(x) dx,$$

то

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f_2(z)}{\partial z} g[x = f_2(z)] - \frac{\partial f_1(z)}{\partial z} g[x = f_1(z)],$$

откуда

$$p(Y) = (1/a) p(x = Y/a). \quad (9.60)$$

В качестве примера рассмотрим гауссову величину со средним значением \bar{x} и дисперсией σ_x^2 . Тогда

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2} \right]$$

и

$$p(Y) = \frac{1}{a\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(Y/a - \bar{x})^2}{2\sigma_x^2} \right] = \frac{1}{a\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(Y - a\bar{x})^2}{2a^2\sigma_x^2} \right]. \quad (9.61)$$

Необходимо отметить, что $\bar{y} = a\bar{x}$, а $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$.

9.7.2. Сумма случайных величин

Пусть z представляет сумму двух случайных величин x и y :

$$z = x + y. \quad (9.62)$$

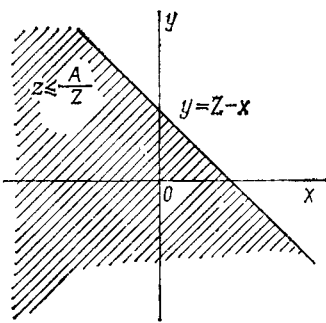
Решим уравнение (9.62) относительно y для некоторого значения $z = Z$ и проведем прямую линию, отражающую зависимость между x и y (рис. 9.9). В области A этого рисунка $x + y = Z$. Теперь функцию распределения z легко найти на основании свойств x и y :

$$P(z \leq Z) = P[(x, y) \in A].$$

Для области A на рис. 9.9 характерны следующие неравенства:

$$-\infty \leq y \leq Z - x; \quad -\infty \leq x \leq \infty. \quad (9.63)$$

Функция распределения Z определяется выражением



$$P(z \leq Z) = \int_{-\infty}^{Z-x} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy. \quad (9.64)$$

Продифференцировав выражение (9.64) по Z , получим функцию плотности вероятности для Z :

$$p(Z) = \frac{\partial}{\partial Z} \left[\int_{-\infty}^{Z-x} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy \right]; \quad (9.65)$$

$$p(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y = Z - x) dx. \quad (9.66)$$

Рис. 9.9. Область, соответствующая $z \leq Z$, для $z = x + y$

Для дальнейших преобразований необходимо знать функцию плотности совместного распределения x и y . Если x и y статистически независимы, можно получить особенно интересный результат. Так, если

$$p(x, y) = p(x) p(y),$$

тогда

$$p(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) p(y = Z - x) dx. \quad (9.67)$$

Для независимых x и y $p(Z)$ будет сверткой функций плотности вероятности x и y . Этот результат можно распространить на случай когда z является суммой большого числа статистически независимых величин. Пусть

$$z = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots + x_N.$$

Тогда

$$p(z) = p(x_1) \otimes p(x_2) \otimes \dots \otimes p(x_N). \quad (9.68)$$

В качестве примера допустим, что все $p(x_n)$ будут гауссовы со средним значением \bar{x}_n и дисперсией $\sigma_{x_n}^2$. Результат свертки двух гауссовых функций также является гауссовой функцией. Если z определяется формулой (9.68) и

$$p(x_n) = \frac{1}{\sigma_{x_n} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x}_n)^2}{2\sigma_{x_n}^2} \right],$$

тогда

$$p(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(z - \bar{z})^2}{2\sigma_z^2} \right],$$

где $\bar{z} = \sum_{n=1}^N \bar{x}_n$; $\sigma_z^2 = \sum_{n=1}^N \sigma_{x_n}^2$. В качестве второго примера рассмотрим сумму двух статистически независимых величин x_1 и x_2 , каждая с нулевым средним и равномерной функцией плотности вероятности в интервале шириной $2a$:

$$z = x_1 + x_2;$$

$$p(x_1) = p(x_2) = [1/(2a)] \text{rect} [x/(2a)].$$

Функция плотности вероятности z — результат свертки двух равномерных функций плотности вероятности — представляет собой треугольную функцию:

$$p(z) = \frac{1}{4a^2} \text{rect} \left(\frac{x}{2a} \right) \otimes \text{rect} \left(\frac{x}{2a} \right) = \frac{1}{4a^2} \left(1 - \frac{|z|}{2a} \right) \text{rect} \left(\frac{z}{4a} \right).$$

9.7.3. Характеристические функции и центральная предельная теорема

В главе 6 было показано, что операция свертки функций соответствует произведению преобразований Фурье от этих функций и ее можно использовать для определения плотности распределения суммы независимых случайных величин.

Характеристической функцией соответствующей функции плотности распределения называют

$$Q_x(s) = E[\exp(j \cdot 2\pi s x)] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp(j \cdot 2\pi s x) dx. \quad (9.69)$$

Обратным преобразованием будет функция плотности распределения

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_x(s) \exp(-j \cdot 2\pi s x) ds. \quad (9.70)$$

Пусть все x_n независимы, а $z = \sum_{n=1}^N x_n$ и $p(x_n) \leftrightarrow Q_n(s)$. Функция плотности распределения z определяется как обратное преобразование произведения характеристических функций:

$$p(z) = p(x_1) \otimes \dots \otimes p(x_N) \leftrightarrow Q_1(s) Q_2(s) \dots Q_N(s). \quad (9.71)$$

Поскольку функция плотности неотрицательна и имеет единичную площадь, максимальное значение характеристической функции равно единице при $s = 0$, т. е.

$$|Q_x(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp(j \cdot 2\pi s x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, 0 = Q_x(0). \quad (9.72)$$

Моменты случайной величины находят дифференцированием характеристической функции. Так, производная порядка n от характеристической функции

$$\frac{d^n Q_x(s)}{ds^n} = (j \cdot 2\pi)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) \exp(j \cdot 2\pi s x) dx.$$

Полагая $s = 0$, получим

$$\frac{d^n Q_x(s)}{ds^n} \Big|_{s=0} = (j \cdot 2\pi)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx,$$

откуда

$$E[x^n] = \frac{1}{(j \cdot 2\pi)^n} \frac{d^n Q_x(s)}{ds^n} \Big|_{s=0}. \quad (9.73)$$

Используя выражение (9.73) представим $Q_x(s)$ в виде степенного ряда в области $s = 0$. Для простоты предположим, что $p(x)$ — четная функция x , которой соответствует действительная характеристическая функция, являющаяся четной функцией s . Следовательно, степенной ряд $Q_x(s)$ содержит только члены с четными степенями s . Тогда

$$Q_x(s) = 1 + a_2s^2 + a_4s^4 + \dots, \quad (9.74)$$

где

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k Q_x(s)}{ds^k} \right|_{s=0} = \frac{(j \cdot 2\pi)^k}{k!} E[x^k];$$

$$Q_x(s) = 1 - \frac{(2\pi s)^2}{2} E[x^2] + \frac{(2\pi s)^4}{24} E[x^4] \dots \quad (9.75)$$

Характеристическая функция суммы n статистически независимых случайных величин с идентичными функциями плотности распределения $p(x)$ есть

$$Q_z(s) = Q_x^n(s).$$

Прологарифмировав обе части, получим

$$\ln Q_z(s) = n \ln Q_x(s) = n \ln \left\{ 1 - \frac{(2\pi s)^2}{2} E[x^2] + \dots \right\}.$$

Для больших n при s , существенно отличных от нуля, величина $Q_z(s)$ быстро уменьшается. В связи с этим можно ограничиться рассмотрением случая $|s| \ll 1,0$ и опустить в разложении $Q_z(s)$ члены порядка, большего, чем s^2 . Для очень малых s

$$n \ln Q_x(s) \simeq n \ln \left\{ 1 - \frac{(2\pi s)^2}{2} E[x^2] \right\} \simeq -2(\pi s)^2 n E[x^2].$$

Следовательно,

$$\ln Q_z(s) = -2(\pi s)^2 n E[x^2].$$

Откуда с учетом предположения о четности функции плотности распределения и $E[x^2] = \sigma_x^2$ получим

$$Q_z(s) = \exp \left[-2(\pi s)^2 n \sigma_x^2 \right]. \quad (9.76)$$

С помощью пары б табл. 6.1 найдем обратное преобразование (9.76):

$$p(z) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi n}} \exp \left(-\frac{z^2}{2n\sigma_x^2} \right). \quad (9.77)$$

Выражение (9.77) — это гауссова функция плотности вероятности с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma_z^2 = n\sigma_x^2$, являющейся суммой дисперсий случайных величин, составляющих z . Таким образом, функция плотности вероятности случайной величины z , которая представляет собой сумму большого числа

независимых случайных величин с идентичными функциями плотности вероятности, приближается к форме гауссовой кривой. Ограничение, связанное с требованием четности функций плотности вероятности, можно снять, но и тогда функция плотности вероятности суммы будет приближаться к форме гауссовой кривой, если среднее значение и дисперсии всех составляющих конечны.

Этот результат известен как центральная предельная теорема — одна из полезнейших теорем теории вероятностей. Многие из случайных величин обязаны своим существованием влиянию многочисленных независимых факторов. Следовательно, в соответствии с центральной предельной теоремой, функция плотности вероятности распределения таких случайных величин приближается к гауссовой. Если справедливо гауссово приближение, анализ многих физических задач существенно упрощается, поскольку свойства гауссовой функции хорошо изучены и имеются ее подробные таблицы.

Прежде чем применять центральную предельную теорему, необходимо установить наличие соответствующих для этого предпосылок. Иногда трудно определить число независимых случайных величин, которое можно считать «большим». Присутствие одной негауссовой величины с большой дисперсией по сравнению с остальными может явиться причиной существенного отличия формы функции плотности вероятности от гауссовой. В некоторых случаях результирующая функция плотности вероятности может хорошо аппроксимироваться гауссовой в окрестности среднего значения и существенно отличаться на краях распределения. Важным вопросом для многих проблем является форма «хвостов» функции распределения. В этих случаях необходимо проявлять особую осторожность при использовании центральной предельной теоремы. Наконец, если одна или несколько величин в сумме имеют бесконечное значение среднего или дисперсии, то центральная предельная теорема неприменима.

9.7.4. Квадрат случайной величины

Функция плотности вероятности на выходе однополупериодного линейного выпрямителя была определена в пп. 9.5.3. Более типичным видом выпрямителя при анализе систем будет двухполупериодный квадратичный выпрямитель (детектор), входные и выходные характеристики которого показаны на рис. 9.10.

Пусть $y(t)$ — процесс на выходе квадратичного детектора, на вход которого подан случайный процесс $x(t)$:

$$y(t) = x^2(t).$$

На основании рис. 9.10 вероятность того, что напряжение на выходе равно или меньше некоторого значения Y , равна вероят-

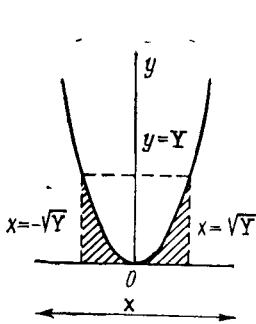


Рис. 9.10. Входные и выходные характеристики двухполупериодного идеального квадратичного выпрямителя (детектора)

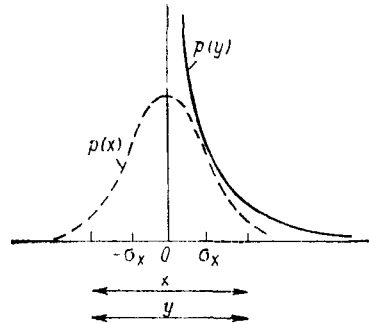


Рис. 9.11. Графики плотности распределения процессов на входе и выходе двухполупериодного квадратичного детектора при входном гауссовом процессе $[p(x) = (\sigma_x \sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/(2\sigma_x^2)}; p(y) = (\sigma_x \sqrt{2\pi y})^{-1} e^{-y/(2\sigma_x^2)}$ при $y \geq 0]$

ности того, что x находится в пределах $\pm \sqrt{Y}$:

$$P(y \leq Y) = \begin{cases} P(-\sqrt{Y} \leq x \leq \sqrt{Y}) & \text{при } Y \geq 0; \\ 0 & \text{при } Y < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$P(y \leq Y) = \int_{-\sqrt{Y}}^{\sqrt{Y}} p(x) dx. \quad (9.78)$$

Функцию плотности вероятности распределения выходного процесса получим, дифференцируя интеграл (9.78) по Y :

$$\begin{aligned} p(Y) &= p(x = \sqrt{Y}) d\sqrt{Y}/dY - p(x = -\sqrt{Y}) d(-\sqrt{Y})/dY = \\ &= \begin{cases} [1/(2\sqrt{Y})][p(x = \sqrt{Y}) + p(x = -\sqrt{Y})] & \text{при } Y \geq 0; \\ 0 & \text{при } Y < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.79)$$

Если функция плотности вероятности входного процесса является четной функцией x , выражение упрощается:

$$p(Y) = (1/\sqrt{Y}) p(x = \sqrt{Y}) \text{ при } Y \geq 0 \text{ и } p(x) = p(-x). \quad (9.80)$$

В качестве особенно интересного примера рассмотрим $x(t)$ с гауссовой функцией плотности распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

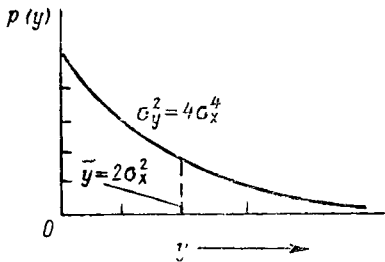


Рис. 9.12. График функции плотности распределения величины $y = x_1^2 + x_2^2$, когда x_1 и x_2 — гауссовы переменные с нулевым средним значением и равными дисперсиями $\left[p(y) = (2\sigma_x^2)^{-1} e^{-y/(2\sigma_x^2)} \right]$

гауссовой функции плотности распределения заданы выражением

$$E[(x - \bar{x})^n] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1) \sigma_x^n. \quad (9.82)$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} E[(x - \bar{x})^2] &= \sigma_x^2; & E[(x - \bar{x})^4] &= 3\sigma_x^4; \\ E[(x - \bar{x})^6] &= 15\sigma_x^6. \end{aligned} \right\} \quad (9.83)$$

Для выходного процесса

$$\left. \begin{aligned} E[y] &= E[x^2] = \sigma_x^2; \\ \sigma_y^2 &= E[y^2] - E^2[y] = E[x^4] - E^2[x^2] = 3\sigma_x^4 - \sigma_x^4 = 2\sigma_x^4. \end{aligned} \right\} \quad (9.84)$$

Пусть теперь переменная y представляет собой сумму квадратов двух независимых гауссовых переменных x_1 и x_2 с нулевым средним и равной дисперсией:

$$y = x_1^2 + x_2^2;$$

$$p(x_1) = p(x_2) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Функцию плотности распределения величины y найдем с помощью свертки (9.81) либо с помощью характеристической функции, которые приводят к выражению

$$p(y) = \frac{1}{2\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad \text{при } y \geq 0. \quad (9.85)$$

Это простое экспоненциальное распределение показано на рис. 9.12.

С учетом условия (9.80) для положительных значений y получим

$$p(y) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad (9.81)$$

График функции (9.81) показан на рис. 9.11. Там же приведена гауссова функция плотности вероятности входного процесса.

Среднее значение и дисперсию y рассчитываем как первый и второй моменты $p(y)$ или непосредственно на основании моментов x . Можно показать, что четные центральные моменты

Среднее значение и дисперсия в данном случае будут

$$\begin{aligned} E[y] &= E[x_1^2] + E[x_2^2] = 2\sigma_x^2; \\ \sigma_y^2 &= D[x_1^2] + D[x_2^2] = 2\sigma_{x_1}^4 + 2\sigma_{x_2}^4 = 4\sigma_x^4. \end{aligned} \quad (9.86)$$

Если распространить полученный результат по аналогии для случая, когда y представляет собой сумму квадратов N независимых гауссовых переменных с нулевыми средними и равными дисперсиями, функция плотности вероятности будет

$$p(y) = \frac{(y/\sigma_x^2)^{N/2-1} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_x^2}\right)}{\sigma_x^2 \cdot 2^{N/2} \Gamma(N/2)}, \quad (9.87)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

В нормализованном виде при $\sigma_x^2 = 1$ плотность распределения (9.87) называют функцией χ^2 с N степенями свободы, а y — случайной величиной с распределением χ^2 с N степенями свободы. Иногда случайные величины такого типа называют функциями χ^2 , даже если $\sigma_x^2 \neq 1$. По аналогии с формулой (9.86) среднее значение и дисперсия случайной величины с распределением χ^2 будут

$$\left. \begin{aligned} E[y] &= E\left[\sum_{n=1}^N x_n^2\right] = NE[x_n^2] = N\sigma_x^2; \\ D[y] &= ND[x^2] = 2N\sigma_x^4. \end{aligned} \right\} \quad (9.88)$$

Функция плотности распределения (9.81) — это функция χ^2 с одной степенью свободы, а (9.85) — с двумя. Необходимо отметить, что для больших N функция χ^2 в соответствии с центральной предельной теоремой приближается к гауссову распределению (рис. 9.13).

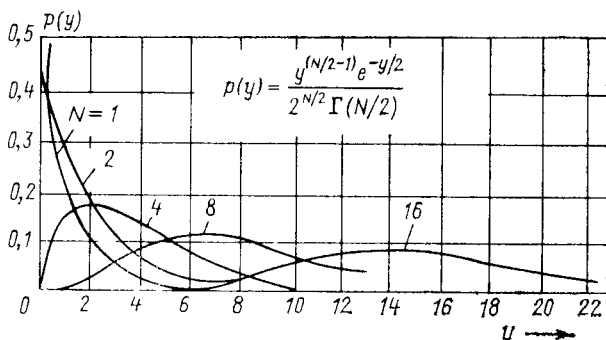


Рис 9.13 Графики функций плотности распределения случайных величин, подчиняющихся закону χ^2

9.7.5. Квадратный корень из случайной величины

Рассмотрим связь (рис. 9.14) напряжений на входе и выходе устройства, обеспечивающего извлечение квадратного корня из случайной величины, т. е. $z = \sqrt{y}$ для z и $y \geq 0$.

Дифференцируя по z функцию распределения

$$P(0 \leq z \leq Z) = P(0 \leq y \leq Z^2) = \int_0^{Z^2} p(y) dy,$$

получим

$$p(Z) = \frac{dP(0 \leq z \leq Z)}{dZ} = \frac{d(Z^2)}{dZ} p(y = Z^2) = 2Z p(y = Z^2) \text{ при } Z \geq 0. \quad (9.89)$$

Рассмотрим пример, в котором y имеет функцию плотности распределения, подчиняющуюся закону χ^2 с двумя степенями свободы. Пусть $y = x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 независимые гауссовы случайные величины с нулевыми средними и равными дисперсиями. Функция плотности распределения y

$$p(y) = \frac{1}{2\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_x^2}\right).$$

Величина z — это положительное значение квадратного корня из суммы квадратов x_1 и x_2 . Непосредственная подстановка в (9.89) дает функцию плотности распределения

$$p(z) = \begin{cases} (z/\sigma_x^2) \exp[-z^2/(2\sigma_x^2)] & \text{при } z \geq 0; \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases} \quad (9.90)$$

Она известна как функция Рэлея, а z является рэлеевской случайной величиной. Рэлеевское распределение характерно для амплитуды огибающей комплексного гауссова шума. Допустим, что огибающая представляет собой сумму большого числа синусоид:

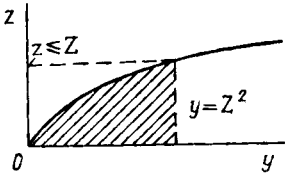


Рис. 9.14. Соотношение между напряжениями на входе и выходе устройства, обеспечивающего извлечение квадратного корня из входной величины ($z = \sqrt{y}$ для z и $y \geq 0$)

$$v = \sum_{n=1}^N a_n \exp(j\varphi_n). \quad (9.91)$$

Пусть a_n — случайная величина с нулевым средним значением, причем a_m статистически не зависит от a_n при $m \neq n$ для всех φ_n . Предположим, что фаза φ_n равномерно распределена в интервале $[-\pi, \pi]$, причем φ_n и φ_m независимы. Пусть далее

$$x_1 = \sum_{n=1}^N a_n \cos \varphi_n; \quad x_2 = \sum_{n=1}^N a_n \sin \varphi_n.$$

Перепишем (9.91) в виде

$$v = x_1 + jx_2. \quad (9.92)$$

В соответствии с центральной предельной теоремой x_1 и x_2 становятся гауссовыми величинами при $N \rightarrow \infty$. Кроме того, они оказываются независимыми с равными дисперсиями и тогда комплексную величину (9.92) можно представить в виде

$$v = |v| \exp(j\psi),$$

где $|v| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$; $\psi = \text{arctg}(x_2/x_1)$.

Как видно, амплитуда v подчиняется закону распределения Рэлея (является рэлеевской величиной). Можно показать также, что фаза равномерно распределена в интервале $[-\pi, \pi]$. Величину v называют комплексной гауссовой величиной.

9.7.6. Произведение случайных величин

Пусть z — произведение случайных величин x и y . Чтобы найти функцию плотности распределения z , необходимо сначала определить пределы для x и y , которые удовлетворяют условию $z \leq Z$. Область, удовлетворяющая этому соотношению, показана на рис. 9.15 в плоскости xy . Из рисунка видно, что $z \leq Z$, если x и y находятся в области A_1 или A_2 :

$$P(z \leq Z) = P(x, y \in A_1) + P(x, y \in A_2) = \int_{A_1} \int p(x, y) dx dy + \int_{A_2} \int p(x, y) dx dy. \quad (9.93)$$

Область A_1 определяется неравенствами

$$-\infty \leq x \leq Z/y; \quad 0 \leq y \leq \infty,$$

область A_2 —

$$Z/y \leq x \leq \infty; \quad -\infty \leq y \leq 0.$$

Дифференцируя сумму (9.93) по Z с учетом определенных границ, получим функцию плотности распределения Z :

$$\begin{aligned} p(Z) &= \frac{d}{dZ} \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^{Z/y} p(x, y) dx dy + \right. \\ &+ \left. \int_{-\infty}^0 \int_{Z/y}^\infty p(x, y) dx dy \right] = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{y} p\left(x = \frac{Z}{y}, y\right) dy - \\ &- \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y} p\left(x = \frac{Z}{y}, y\right) dy. \quad (9.94) \end{aligned}$$

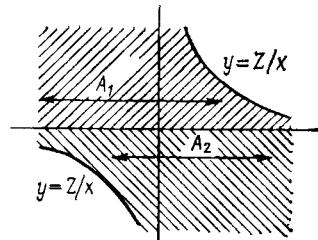


Рис. 9.15. Графики, определяющие пределы интегрирования по x и y , для нахождения функции распределения величины $z = xy$

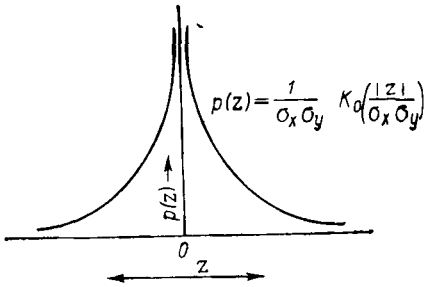


Рис. 9.16. График функции плотности распределения для произведения независимых гауссовых величин с нулевым средним значением

Для независимых x и y выражение (9.94) упрощается:

$$\begin{aligned}
 p(Z) &= \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{y} p\left(x = \frac{Z}{y}\right) p(y) dy - \\
 &- \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y} p\left(x = \frac{Z}{y}\right) p(y) dy.
 \end{aligned} \tag{9.95}$$

В качестве полезного для практики примера рассмотрим случай, когда x и y — статистически независимые гауссовы величины с нулевым средним со следующими функциями плотности вероятности:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right); \\
 p(y) &= \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right).
 \end{aligned}$$

Подстановка в уравнение (9.95) дает

$$\begin{aligned}
 p(z) &= \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \cdot 2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{y} \exp\left[-\left(\frac{z^2}{2\sigma_x^2 y^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right] dy - \right. \\
 &- \left. \int_{-\infty}^0 \frac{1}{y} \exp\left[-\left(\frac{z^2}{2\sigma_x^2 y^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right] dy \right\}.
 \end{aligned} \tag{9.96}$$

Подынтегральные выражения в интеграле (9.96) являются нечетными функциями и второе из них равно отрицательному значению первого. Следовательно,

$$p(z) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{y} \exp\left[-\left(\frac{z^2}{2\sigma_x^2 y^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right] dy. \tag{9.97}$$

Интеграл в формуле (9.97) похож на выражение для функции Бесселя второго рода нулевого порядка. Например, из работы [1] для $u > 0$ следует

$$K_0(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \exp\left[-\left(\frac{u^2}{4t} + t\right)\right] dt. \tag{9.98}$$

Пусть $t = y^2/(2\sigma_y^2)$; $dt = y dy/\sigma_y^2$; $u^2 = z^2/(\sigma_x^2\sigma_y^2)$. Подстановка в уравнение (9.98) дает

$$p(z) = \frac{1}{\sigma_x\sigma_y\pi} K_0\left(\frac{z}{\sigma_x\sigma_y}\right) \quad \text{при } z > 0.$$

Несмотря на то, что формула (9.98) определяет $K_0(u)$ только для положительных значений u , выражение можно переписать для любого значения z (положительного или отрицательного):

$$p(z) = \frac{1}{\sigma_x\sigma_y\pi} K_0\left(\frac{|z|}{\sigma_x\sigma_y}\right), \quad (9.99)$$

поскольку $p(z)$ в этом примере четная функция (рис. 9.16).

9.7.7. Отношение случайных величин

Пусть z — отношение случайных величин x и y : $z = x/y$. Область в плоскости xy , где $z \leq Z$ получается на основании уравнения $x = yZ$ (рис. 9.17). Для положительных значений y область A_1 определяется неравенством

$$-\infty \leq x \leq yZ,$$

а для отрицательных значений y область A_2 — неравенством

$$Zy \leq x \leq \infty.$$

Функция распределения для z

$$P(z \leq Z) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{yZ} p(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^0 \int_{Zy}^{\infty} p(x, y) dx dy.$$

Дифференцируя по Z , получим

$$p(Z) = \int_0^{\infty} yp(x = yZ, y) dy - \int_{-\infty}^0 yp(x = yZ, y) dy. \quad (9.100)$$

При независимых x и y выражение (9.100) упрощается:

$$p(Z) = \int_0^{\infty} yp(x = yZ) p(y) dy - \int_{-\infty}^0 yp(x = yZ) p(y) dy. \quad (9.101)$$

Рассмотрим пример, когда x и y — статистически независимы, причем x — гауссова величина, y — рэлеевская. Функции, определяющие плотности распределения, соответственно равны

$$p(x) = [1/(\sigma_x \sqrt{2\pi})] \exp[-x^2/(2\sigma_x^2)];$$

$$p(y) = \begin{cases} (y/\sigma_y^2) \exp[-y^2/(2\sigma_y^2)] & \text{при } y \geq 0; \\ 0 & \text{при } y < 0; \end{cases} \quad (9.102)$$

$$p(x = yZ) = [1/(\sigma_x \sqrt{2\pi})] \exp[(-y^2 Z^2)/(2\sigma_x^2)]. \quad (9.103)$$

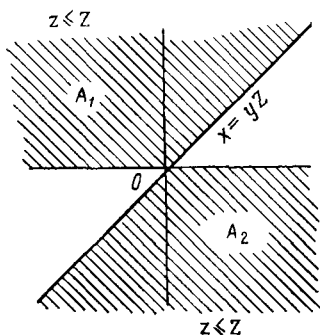


Рис. 9.17. Область в плоскости xOy , в которой $z \leq Z$ при $z = x/y$

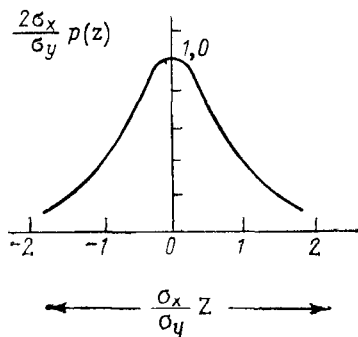


Рис. 9.18. График функции плотности распределения для отношения гауссовой и рэлеевской случайных величин

Подставляя функции (9.102) и (9.103) в формулу (9.101), найдем

$$p(Z) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y^2 \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^2 \exp(-ay^2) dy, \quad (9.104)$$

где $a = (1/2)(1/\sigma_y^2 + Z^2/\sigma_x^2)$.

Необходимо оценить интеграл только в области A_2 , поскольку $p(y) = 0$ для отрицательных значений z . Взяв определенный интеграл (9.104), получим

$$p(Z) = [\sigma_y / (2\sigma_x)] [1 + (\sigma_y / \sigma_x)^2 Z^2]^{-3/2}. \quad (9.105)$$

Эта функция плотности распределения в нормированном виде приведена на рис. 9.18. Легко показать, что среднее значение $z = 0$, а дисперсия бесконечна. Если в состав суммы независимых случайных величин входит хотя бы одна подобного типа, центральная предельная теорема становится неприменимой независимо от вида других составляющих.

9.7.8. Интеграл от случайных функций

Рассмотрим случайный процесс с выборочной функцией $x_n(t)$. Тогда результат интегрирования за конечный промежуток времени $[t_1, t_2]$ будет случайной величиной:

$$y(n, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x_n(t) dt. \quad (9.106)$$

Величина y в общем случае различна для разных выборочных функций x и отличных промежутков времени интегрирования.

Среднее значение y находим осреднением по всем возможным выборочным функциям:

$$E[y(t_1, t_2)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[\int_{t_1}^{t_2} x_n(t) dt \right]. \quad (9.107)$$

Поменяв порядок интегрирования и суммирования, получим

$$E[y(t_1, t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{x_n(t)}{N} \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} E[x(t)] dt, \quad (9.108)$$

т. е. среднее значение интеграла равно интегралу от среднего значения.

В общем случае $E[x(t)]$ может быть функцией времени. Однако для стационарных процессов $E[x(t)]$ от времени не зависит и его можно вынести за знак интеграла. Тогда выражение (9.108) можно переписать в виде

$$E[y(t_2 - t_1)] = E[x] \int_{t_1}^{t_2} dt = (t_2 - t_1) E[x]. \quad (9.109)$$

Если $x_n(t)$ умножить на детерминированную функцию $h(t)$, среднее значение интеграла их произведения будет

$$E[y(t_1, t_2)] = E \left[\int_{t_1}^{t_2} h(t) x_n(t) dt \right] = \int_{t_1}^{t_2} h(t) E[x(t)] dt. \quad (9.110)$$

В случае стационарного процесса выражение (9.110) приводим к виду

$$E[y(t_1, t_2)] = E[x] \int_{t_1}^{t_2} h(t) dt. \quad (9.111)$$

9.8. Корреляционные функции случайных процессов

Пусть $x_n(t)$ является выборочной функцией действительного случайного процесса. Автокорреляционная функция процесса $x_n(t)$ за ограниченный отрезок времени

$$R_{x_{nT}}(\tau) = \int_{-T/2}^{T/2} x_{nT}(t) x_{nT}(t - \tau) dt, \quad (9.112)$$

где $x_{nT} = x_n(t) \text{rect}(t/T)$.

При конечном интервале T $R_{x_{nT}}$ будет случайной величиной. Устремим T к бесконечности и найдем среднее по времени

Значение автокорреляционной функции:

$$R_{x_{nT}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_n(t) x_n(t - \tau) dt = \langle x_n(t) x_n(t - \tau) \rangle. \quad (9.113)$$

Для эргодических процессов временное осреднение в выражении (9.113) эквивалентно статистическому (по ансамблю), т. е.

$$\begin{aligned} R_{x_n}(\tau) = R_x(\tau) &= \langle x_n(t) x_n(t - \tau) \rangle = E[\mathbf{x}_t \mathbf{x}_{t-\tau}] = \\ &= \int \mathbf{x}_t \mathbf{x}_{t-\tau} p(\mathbf{x}_t \mathbf{x}_{t-\tau}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9.114)$$

Среднее значение (9.114) — это автокорреляционная функция по ансамблю (множеству наблюдений); для эргодических процессов оно равно временному среднему автокорреляционной функции. Свойства автокорреляционной функции по ансамблю для эргодических процессов идентичны свойствам временной автокорреляционной функции:

$$R_x(\tau) \leq R_x(0) = E[\mathbf{x}^2]; \quad R_x(\tau) = R_x^*(-\tau).$$

Если процесс действительный, автокорреляционная функция будет четной.

Для эргодических процессов особый интерес представляет преобразование Фурье автокорреляционной функции по ансамблю. Чтобы получить необходимое соотношение, рассмотрим сначала преобразование заданной выборочной функции в пределах конечного отрезка времени:

$$X_{nT}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t/T) x_n(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (9.115)$$

Энергетический спектр этого сигнала

$$\begin{aligned} |X_{nT}(f)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t/T) x_n(t) \exp(-j \cdot 2\pi ft) dt \right|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t/T) x_n(t) \exp(-j \cdot 2\pi ft) dt \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t'/T) \times \\ &\quad \times x_n(t') \exp(j \cdot 2\pi ft') dt'. \end{aligned}$$

Сделаем подстановку $t' = t - \tau$ и перепишем предыдущее выражение в виде

$$\begin{aligned} |X_{nT}(f)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n(t) x_n(t - \tau) \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t - \tau}{T}\right) \times \\ &\quad \times \exp(-j \cdot 2\pi f\tau) dt d\tau. \end{aligned}$$

Его среднее значение

$$E[|X_{nT}(f)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[x_n(t)x_n(t-\tau)] \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \times \\ \times \operatorname{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \exp(-j \cdot 2\pi f\tau) dt d\tau.$$

Математическое ожидание в подынтегральном выражении является автокорреляционной функцией процесса. Следовательно,

$$E[|X_{nT}(f)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j \cdot 2\pi f\tau) \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) dt \right] d\tau.$$

Интеграл в квадратных скобках — это автокорреляционная функция прямоугольной функции. Тогда

$$E[|X_{nT}(f)|^2] = T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_x(\tau) \exp(-j \cdot 2\pi f\tau) d\tau. \quad (9.116)$$

Разделим обе части выражения (9.116) на T и перейдем к пределу, устремив T к бесконечности и определив тем самым среднее значение спектральной плотности мощности выборочной функции, которое для эргодических процессов называется спектральной плотностью мощности процесса и является преобразованием Фурье автокорреляционной функции по ансамблю. Таким образом,

$$\Psi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{|X_{nT}(f)|^2}{T}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j \cdot 2\pi f\tau) d\tau. \quad (9.117)$$

9.8.1. Автоковариационные функции

Ковариация двух случайных величин была определена с помощью выражения (9.46), которое включало вычитание среднего значения из каждой величины и отыскание математического ожидания произведения полученных величин с нулевым средним значением. Автоковариационную функцию случайного процесса получаем аналогичным образом, т. е. находим автокорреляционную функцию после вычитания среднего значения:

$$C_x(\tau) = E\{[\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}][\mathbf{x}(t-\tau) - \bar{\mathbf{x}}]\} = \\ = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t-\tau)] - (\bar{\mathbf{x}})^2 = R_x(\tau) - (\bar{\mathbf{x}})^2. \quad (9.118)$$

Преобразование автоковариационной функции идентично преобразованию автокорреляционной минус член при $f = 0$:

$$C_x(\tau) \leftrightarrow \Psi_x(f) - \Psi_x(0). \quad (9.119)$$

9.8.2. Взаимокорреляционные функции процессов

Пусть $z(t)$ — сумма двух стационарных случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$. Процесс $z(t)$ в этом случае также стационарен, поэтому автокорреляционная функция z -процесса

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) = \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2 \operatorname{Re}[R_{xy}(\tau)]. \end{aligned} \quad (9.120)$$

Результат преобразования Фурье взаимокорреляционной функции $R_{xy}(\tau)$ является взаимной спектральной плотностью процессов x и y :

$$R_{xy}(\tau) \leftrightarrow \Psi_{xy}(f). \quad (9.121)$$

Спектральную плотность z -процесса можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_z(f) &= \Psi_x(f) + \Psi_y(f) + \Psi_{xy}(f) + \Psi_{yx}(f) = \\ &= \Psi_x(f) + \Psi_y(f) + 2 \operatorname{Re}[\Psi_{xy}(f)]. \end{aligned} \quad (9.122)$$

Если процессы x и y некоррелированы, их взаимная спектральная плотность равна нулю и спектральная плотность z -процесса будет суммой спектральных плотностей процессов x и y .

9.8.3. Фильтрация случайных процессов

Понятие спектральной плотности мощности случайных процессов особенно необходимо при определении выходного эффекта фильтра, на вход которого подана выборка случайного процесса.

Пусть $x(t)$ — выборочная функция эргодического процесса с нулевым средним значением и дисперсией σ_x^2 . Если на вход линейного фильтра подается процесс $x(t)$, выходной процесс $y(t)$ будет случайным. Выходной процесс в предположении всех возможных входных выборочных функций также является эргодическим процессом со спектральной плотностью мощности, определяемой выражением

$$\Psi_y(f) = \Psi_x(f) |H(f)|^2, \quad (9.123)$$

где $\Psi_x(f)$ — спектральная плотность мощности x -процесса; $\Psi_y(f)$ — спектральная плотность мощности y -процесса; $|H(f)|^2$ — квадрат амплитудно-частотной характеристики фильтра.

Допустим, мощность входного процесса равномерно распределена в полосе B , существенно большей, чем ширина полосы, определяемой функцией $H(f)$.

Тогда

$$\Psi_x(f) = (\sigma_x^2/B) \text{rect}(f/B);$$

$$\Psi_y(f) = (\sigma_x^2/B) \text{rect}(f/B) |H(f)|^2 = (\sigma_x^2/B) |H(f)|^2. \quad (9.124)$$

Автокорреляционную функцию выходного процесса получим обратным преобразованием спектральной плотности мощности процесса. Для данного примера

$$R_y(\tau) \leftrightarrow (\sigma_x^2/B) |H(f)|^2. \quad (9.125)$$

Таким образом, при равномерном спектре входного шума выходная автокорреляционная функция имеет форму, определяемую формой линейного фильтра.

Для входных процессов с нулевым средним значением выходной процесс также имеет нулевое среднее значение, а дисперсия на выходе

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(f) |H(f)|^2 df.$$

Для равномерного спектра $\Psi_x(f)$

$$\sigma_y^2 = (\sigma_x^2/B) \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df. \quad (9.126)$$

Пусть фильтр имеет прямоугольную амплитудно-частотную характеристику в полосе $\beta \ll B$:

$$H(f) = \text{rect}(f/\beta) = |H(f)|^2.$$

Тогда

$$R_y(\tau) \leftrightarrow (\sigma_x^2/B) \text{rect}(f/\beta),$$

откуда

$$R_y(\tau) = \sigma_x^2 (\beta/B) \text{sinc}(\tau\beta),$$

$$R_y(0) = \sigma_y^2 = \sigma_x^2 (\beta/B). \quad (9.127)$$

Выходная спектральная плотность мощности и автокорреляционная функция рассмотренного примера показаны на

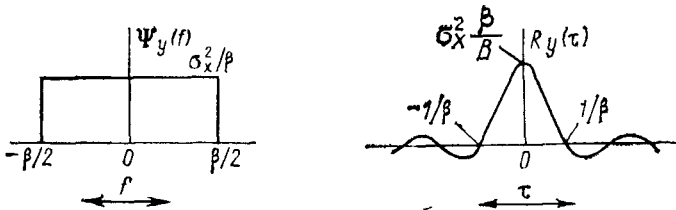


Рис. 9.19. Спектральная плотность и автокорреляционная функция выходного процесса при равномерной спектральной плотности входного процесса и прямоугольном фильтре

рис. 9.19. Необходимо обратить внимание на тот факт, что выходная автокорреляционная функция равна нулю в точках $1/\beta$. Выборки процесса, разделенные промежутком времени, по крайней мере, на величину $1/\beta$, становятся некоррелированными.

9.8.4. Время корреляции процессов (корреляционный интервал)

Для процессов с равномерной спектральной плотностью мощности временные выборки, отстоящие друг от друга точно на величину $1/\beta$, являются некоррелированными и разрешение зависит от соответствующей эффективной полосы частот, как показано в пп. 8.4.1. В общем случае интервал корреляции процесса определяется величиной, обратной ширине эффективной полосы частот процесса:

$$T_{\text{корр}} = 1/\beta_e = \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)|^2 d\tau / R^2(0). \quad (9.128)$$

Временные отсчеты, разделенные промежутками, меньшими $T_{\text{корр}}$, наверняка будут сильно коррелированными, а при интервалах, больших $T_{\text{корр}}$, будут существенно некоррелированными. На рис. 9.20 показана спектральная плотность действительного узкополосного эргодического процесса, центрированного относительно несущей частоты f_0 . Корреляционная функция такого процесса выражается в виде комплексной огибающей корреляционной функции, определенной в п. 6.10. Спектральную плотность действительного процесса найдем переносом спектральной плотности огибающей на частоту $\pm f_0$ и делением результата на 4. Таким образом,

$$R_s(\tau) \leftrightarrow \Psi_s(f) = (1/4) [\Psi_\mu(f_0 + f) + \Psi_\mu(f - f_0)],$$

где Ψ_μ — спектральная плотность комплексной огибающей. В соответствии с правилом преобразования получим

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= (1/4) R_\mu(\tau) [\exp(j \cdot 2\pi f_0 \tau) + \exp(-j \cdot 2\pi f_0 \tau)] = \\ &= (1/2) R_\mu(\tau) \cos(\omega_0 \tau). \end{aligned} \quad (9.129)$$

Эффективная частотная полоса огибающей функции составляет половину эффективной частотной полосы исходной действительной функции:

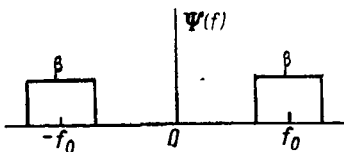


Рис. 9.20. Спектральная плотность распределения узкополосного случайного процесса с несущей частотой $\pm f_0$

$$R_s^2(0) / \int R_s^2(\tau) d\tau = 2R_\mu^2(0) / \int R_\mu^2(\tau) d\tau. \quad (9.130)$$

Это связано с тем, что спектральная плотность комплексной огибающей определяется составляющей спектра действительной функции поло-

жительной частоты. В большинстве задач системного анализа ширина эффективной полосы является важнейшим параметром.

9.8.5. Автокорреляционная функция квадрата случайного процесса

Пусть $x(t)$ — выборочная функция действительного эргодического процесса. Типичный вид обработки — возведение $x(t)$ в квадрат. Если

$$x_1 = x(t); \quad x_2 = x(t - \tau); \quad y(t) = x^2(t);$$

$$E[y] = E[x^2] = E[x_1^2] = E[x_2^2],$$

то $R_y(\tau) = R_{x^2}(\tau) = E[x_1^2 x_2^2]$.

В общем случае оценка корреляционной функции y -процесса может оказаться трудной задачей. В частном случае, когда x -процесс является гауссовым процессом с нулевым средним, между $R_y(\tau)$ и $R_x(\tau)$ существует простое соотношение. Чтобы показать это, необходимо воспользоваться важным свойством многомерного гауссова процесса.

Допустим, x -процесс — гауссов процесс с нулевым средним значением и дисперсией σ_x^2 . Для достаточно большого τ значения x_1 и x_2 являются статистически независимыми. Функция совместной плотности вероятности

$$p(x_1, x_2) = p(x_1) p(x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma_x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad (9.131)$$

Можно показать [2], что если x_1 и x_2 не являются статистически независимыми, функция совместной плотности вероятности имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2 \sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \exp\left[-\frac{x_1^2 - 2\rho_{12}x_1x_2 + x_2^2}{2\sigma_x^2(1 - \rho_{12}^2)}\right], \quad (9.132)$$

где $\rho_{12} = E[x_1 x_2] / \sigma_x^2$.

Если коэффициент корреляции $\rho_{12} = 0$, выражение (9.132) превращается в (9.131) для статистически независимых гауссовых процессов. Для совместных гауссовых случайных процессов нулевая корреляция гарантирует статистическую независимость. Это свойство для негауссовых процессов в общем случае несправедливо. Говорят, что негауссовы процессы, коэффициент корреляции которых равен нулю, линейно независимы. Для гауссовых процессов линейная независимость влечет и статистическую независимость.

Вернемся к задаче оценки автокорреляционной функции квадрата гауссовых процессов с нулевым средним значением. Воспользовавшись коэффициентом корреляции (см. п. 8.2), представим x в виде двух ортогональных составляющих:

$$x_1 = c_{12}x_2 + x_d,$$

где $c_{12} = E[x_1x_2]/E[x_2^2] = \rho_{12}$.

Величины x_d и x_2 ортогональны, а гауссовость обеспечивает и статистическую независимость. Запишем выражение

$$x_1^2x_2^2 = (\rho_{12}x_2 + x_d)^2x_2^2 = \rho_{12}^2x_2^4 + 2\rho_{12}x_2^3x_d + x_2^2x_d^2. \quad (9.133)$$

Вследствие независимости x_2 и x_d среднее значение выражения (9.133)

$$E[x_1^2x_2^2] = \rho_{12}^2E[x_2^4] + E[x_2^2]E[x_d^2]. \quad (9.134)$$

На основании равенства (9.83)

$$E[x_2^4] = E[x_2^4] = 3E^2[x_2^2]; \quad (9.135)$$

$$E[x_d^2] = E[x_1^2] - 2\rho_{12}E[x_1x_2] + \rho_{12}^2E[x_2^2] = E[x_1^2](1 - \rho_{12}^2). \quad (9.136)$$

Подставляя выражения (9.135) и (9.136) в (9.134), получим

$$E[x_1^2x_2^2] = 3\rho_{12}^2E^2[x_2^2] + (1 - \rho_{12}^2)E^2[x_2^2] = (1 + 2\rho_{12}^2)E^2[x_2^2];$$

$$E[x_1^2x_2^2] = E^2[x_2^2] + 2E^2[x_1x_2].$$

Это выражение можно также записать в виде

$$R_y(\tau) = R_{x_2}(\tau) = R_x^2(0) + 2R_x^2(\tau). \quad (9.137)$$

Таким образом, для гауссовых процессов автокорреляционную функцию на выходе устройства с квадратичной характеристикой легко определить на основе известной входной автокорреляционной функции.

Спектр мощности y находим, преобразуя уравнение (9.37):

$$\Psi_y(f) = R_x^2(0)\delta(f) + 2K_{\Psi_x}(f), \quad (9.138)$$

где $K_{\Psi_x}(f) = \Psi_x(f) \otimes \Psi_x(f) \leftrightarrow R_x^2(\tau)$.

Гауссовы случайные величины — редкий пример случайных величин, для которых функцию плотности распределения и спектр мощности квадрата случайной величины можно получить в явном виде.

При анализе, когда используют комплексные случайные величины, часто необходимо уметь определять квадрат амплитуды

комплексной случайной величины. Для комплексных гауссовых случайных величин выходную автокорреляционную функцию легко найти по известной входной. Пусть

$$z = x + jy;$$

$$R(\tau) = E[z(t)z^*(t-\tau)] = E[z_1 z_2^*],$$

где x и y — статистически независимые гауссовы величины с нулевым средним значением и равными дисперсиями. Читатель может самостоятельно проверить, что для $y = |z|^2 = x^2 + y^2$

$$R_{|z|^2}(\tau) = E[|z_1|^2 |z_2|^2] = E^2[|z|^2] + E^2[z_1 z_2^*] = R_z^2(0) + R_z^2(\tau). \quad (9.139)$$

Сравнивая автокорреляционные функции (9.137) и (9.139), обнаружим, что они отличаются лишь коэффициентом 2 при члене, относящемся ко входной автокорреляционной функции.

Выражения (9.137) и (9.139) — это частный случай более общего соотношения для гауссовых случайных величин с нулевыми средними значениями x_1, x_2, x_3 и x_4 . Для этих величин

$$E[x_1 x_2 x_3 x_4] = E[x_1 x_2] E[x_3 x_4] + E[x_1 x_3] E[x_2 x_4] + E[x_1 x_4] E[x_2 x_3]. \quad (9.140)$$

Легко проверить, что при $x_1 = x_2$ и $x_3 = x_4$ полученный результат идентичен результату, определяемому соотношением (9.137).

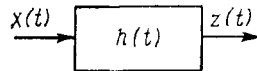
9.9. Канал с многолучевым распространением звука

Часто акустическая энергия распространяется в океане по **многим траекториям с разными** временными запаздываниями и факторами потерь. Чтобы показать некоторые приемы применения теории случайных процессов, рассмотрим упрощенную модель канала распространения (рис. 9.21).

Входной сигнал $x(t)$ является выборочной функцией эргодического гауссова процесса с нулевым средним значением и дисперсией σ_x^2 . Коэффициенты a_n и время запаздывания t_n , входящие в состав импульсного отклика канала $h(t)$, — случайные параметры и предполагаются фиксированными для любой конкретной реализации $h(t)$. Итак, пусть $h_k(t)$ — конкретная реализация импульсного отклика:

$$h_k(t) = \sum_{n=1}^N a_{nk} \delta(t - t_{nk}).$$

Выходной процесс канала для данного отклика обозначим через $z_k(t)$.



$$z(t) = x(t) \otimes h(t) = \sum_n a_n x(t - t_n) = \sum_n y_n(t - t_n)$$

Рис 9.21. Канал со случайным многолучевым распределением

Параметры a_n и t_n считаются независимыми от частоты и независимыми друг от друга. Кроме этого, a_n имеет нулевое среднее значение и не зависит от a_m при $n \neq m$. Диапазон временных задержек $t_N - t_1$ предполагается малым по сравнению со временем распространения.

Поскольку импульсный отклик $h_k(t)$ инвариантен ко времени, выходной процесс $z_k(t)$ будет стационарным процессом. Эргодичность процесса z_k подтверждается равенством временного и статистического среднего $z_k^2(t)$. Статистическое среднее по ансамблю выборочных функций $x(t)$

$$\begin{aligned} E[z_k^2(t)] &= E[z^2 | h_k] = E\left\{\left[\sum_n a_{n_k} x(t - t_{n_k})\right]^2\right\} = \\ &= E\left[\sum_m \sum_n a_{m_k} a_{n_k} x(t - t_{m_k}) x(t - t_{n_k})\right] = \\ &= \sum_m \sum_n a_{m_k} a_{n_k} E[x(t - t_{m_k}) x(t - t_{n_k})] = \\ &= \sum_m \sum_n a_{m_k} a_{n_k} R_x(t_{m_k} - t_{n_k}). \end{aligned} \quad (9.141)$$

Для временного среднего $z_k^2(t)$

$$\begin{aligned} \langle z_k^2(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T z_k^2(t) dt = \\ &= \sum_m \sum_n a_{m_k} a_{n_k} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x(t - t_{m_k}) x(t - t_{n_k}) dt \right\}. \end{aligned} \quad (9.142)$$

Поскольку процесс $x(t)$ — эргодический, среднее по времени, определяемое выражением (9.142), равно статистическому среднему в виде формулы (9.141):

$$\langle z_k^2(t) \rangle = \sum_m \sum_n a_{m_k} a_{n_k} R_x(t_{m_k} - t_{n_k}) = E[z_k^2(t)]. \quad (9.143)$$

Безусловный z -процесс состоит из всех возможных реализаций $z_k(t)$, полученных во всех возможных реализациях $h(t)$. Статистическое среднее значение безусловного процесса

$$\begin{aligned} E[z^2] &= E\left[\sum_m \sum_n a_m a_n x(t - t_m) x(t - t_n)\right] = \\ &= \sum_m \sum_n E[a_m a_n] E[x(t - t_m) x(t - t_n)]. \end{aligned} \quad (9.144)$$

Вследствие независимости a_m и a_n все члены суммы в (9.144), за исключением членов при $m = n$, равны нулю. Тогда

$$E[z^2] = \sum_n E[a_n^2] E[x^2] = N \sigma_a^2 \sigma_x^2, \quad (9.145)$$

Выражение (9.145), очевидно, не совпадает с выражением для временного среднего конкретной реализации функции $z_k(t)$.

Это позволяет сделать вывод, что безусловный z -процесс является стационарным, но не эргодическим.

Таким же образом можно показать, что $y_n(t) = a_n x(t - t_n)$ будет стационарным и эргодическим для конкретного $h_k(t)$. Действительно,

$$E[y_n^2 | h] = a_{n_k}^2 E[x^2(t - t_n) | h] = a_{n_k}^2 \sigma_x^2;$$

$$\langle y_n^2 | h \rangle = a_{n_k}^2 \lim_{n_{kT} \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int x^2(t - t_n) dt = a_{n_k}^2 \sigma_x^2. \quad (9.146)$$

С другой стороны, безусловное статистическое среднее

$$E[y_n^2] = E[a_{n_k}^2 x^2(t - t_n)] = E[a_{n_k}^2] E[x^2] = \sigma_a^2 \sigma_x^2, \quad (9.147)$$

что показывает неэргодичность безусловного y -процесса.

Поскольку y -процесс не эргодический, временная функция плотности распределения конкретной выборки $y_n(t)$ для $h_k(t)$ импульсного отклика необязательно будет иметь ту же форму, что и функция плотности распределения ансамбля безусловного процесса. Для конкретной выборочной функции функция плотности распределения является гауссовой с нулевым средним значением и дисперсией $a_{n_k}^2 \sigma_x^2$. При осреднении по ансамблю $y = a_n x$. В частном случае, когда a_n — гауссова величина с нулевым средним, y будет произведением гауссовых случайных величин, а функция плотности распределения при осреднении по ансамблю — функцией Бесселя нулевого порядка второго рода (см. пп. 9.7.6):

$$p(y) = \frac{1}{\sigma_a \sigma_x \pi} K_0\left(\frac{|y|}{\sigma_a \sigma_x}\right). \quad (9.148)$$

Временная функция плотности распределения $z_k(t)$ конечно будет гауссовой с нулевым средним значением, поскольку она — сумма гауссовых величин с нулевым средним значением. Функция плотности распределения ансамбля безусловного процесса z в общем случае не будет гауссовой, поскольку он представляет собой сумму необязательно независимых случайных величин с функцией плотности распределения, определяемых выражением (9.148). Если слагаемые z независимы, функция плотности распределения ансамбля в соответствии с центральной предельной теоремой при больших N может приближаться к гауссовой.

Определим теперь спектральные характеристики $z_k(t)$. Поскольку $z_k(t)$ — непрерывная случайная функция, оценку спектральных характеристик необходимо провести с помощью преобразования Фурье конечных отрезков $z_k(t)$. Запишем такой ограниченный отрезок длительностью T с центром в lT в виде

$$z_{kT}(t, l) = z_k(t) \text{rect}[(t - lT)/T]. \quad (9.149)$$

Предполагаем, что длительность T велика по сравнению с общим диапазоном запаздывания в $h_k(t)$, так что $T \gg (t_n - t_1)$.

Преобразование Фурье $z_{kT}(t, l)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Z_{kT}(f, l) &= \int_{-\infty}^{\infty} z_{kT}(t, l) \exp(-j \cdot 2\pi f t) dt = \\ &= \sum_n a_{n_k} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_n) \operatorname{rect}\left(\frac{t - lT}{T}\right) \exp(-j \cdot 2\pi f t) dt = \\ &= \sum_n a_{n_k} X_{kT}(f, l, n), \end{aligned} \quad (9.150)$$

где

$$x(t - t_{n_k}) \operatorname{rect}[(t - lT)/T] \leftrightarrow X_{kT}(f, l, n).$$

Для малого по сравнению с T диапазона величин запаздывания

$$X_{kT}(f, l, n) \simeq X_T(f, l, 0) \exp(-j \cdot 2\pi f t_{n_k}), \quad (9.151)$$

откуда

$$Z_{kT}(f, l) = X_T(f, l, 0) \left[\sum_n a_{n_k} \exp(-j \cdot 2\pi f t_{n_k}) \right]. \quad (9.152)$$

Выражение в квадратных скобках является преобразованием Фурье $h_k(t)$. Таким образом,

$$Z_{kT}(f, l) = X_T(f, l, 0) H_k(f). \quad (9.153)$$

Рассмотрим теперь случайную функцию в выражении (9.153) для фиксированного значения $f = f_0$. Пусть x будет широкополосным процессом с постоянной спектральной плотностью, равной σ_x^2/β . Тогда дисперсия $Z_{kT}(f_0, l)$

$$D[Z_{kT}(f_0, l)] = (1/\beta) T \sigma_x^2 |H_k(f_0)|^2 = \sigma_{Z_T, f_0}^2. \quad (9.154)$$

Для конкретной $h_k(t)$ функция $Z_{kT}(f_0, l)$ — комплексная гауссова величина с нулевым средним значением. Следовательно, квадрат амплитуды $Z_{kT}(f_0, l)$ имеет χ^2 -распределение с двумя степенями свободы. Пусть $\Psi_{f_0} = |Z_{kT}(f_0, l)|^2$, тогда

$$p(\Psi_{f_0} | h) = (1/\bar{\Psi}_{f_0}) \exp(-\Psi_{f_0}/\bar{\Psi}_{f_0}). \quad (9.155)$$

Дисперсия Ψ_{f_0}

$$D[\Psi_{f_0} | h] = \sigma_{Z_T, f_0}^4 = (1/\beta^2) T^2 \sigma_x^4 |H_k(f_0)|^4. \quad (9.156)$$

Поскольку $H_k(f)$ непостоянна в полосе частот, то и дисперсия Ψ_{f_0} будет функцией частоты f_0 .

Зафиксируем временной индекс l при значении $l = l_0$ и рассмотрим функцию $Z_{k_T}(f, l_0) = X_T(f, l_0) H_k(f)$. Если самая низкая частота диапазона выбрана так, что обеспечивается равномерное распределение фазового члена $2\pi f t_n$ в $H_k(f)$ в пределах 2π радиан, то $H_k(f)$ будет комплексной гауссовой функцией с нулевым средним значением. Следовательно, функция $Z_{k_T}(f, l_0)$ будет произведением двух независимых гауссовых величин, а спектральная плотность мощности — произведением двух независимых функций с χ^2 -распределением с двумя степенями свободы каждая. Пусть $\Psi_{l_0} = |Z_{k_T}(f, l_0)|^2$, тогда

$$\begin{aligned}\Psi_{l_0} &= |X_T(f, l_0)|^2 |H_k(f)|^2; \\ E[\Psi_{l_0}] &= \sigma_{x_T}^2 \sigma_H^2 = T \sigma_x^2 \sigma_H^2 / \beta; \\ D[\Psi_{l_0}] &= E[\Psi_{l_0}^2] - E^2[\Psi_{l_0}],\end{aligned}\tag{9.157}$$

но

$$E[\Psi_{l_0}^2] = E[|X_T|^4] E[|H_k|^4] = 2\sigma_{x_T}^4 \cdot 2\sigma_H^4,$$

следовательно,

$$D[\Psi_{l_0}] = 4\sigma_{x_T}^4 \sigma_H^4 - \sigma_{x_T}^4 \sigma_H^4 = 3\sigma_{x_T}^4 \sigma_H^4.\tag{9.158}$$

Как видно, для выборочной $h_k(t)$ дисперсия при фиксированной l_0 отличается от дисперсии с фиксированной f_0 :

$$D[\Psi_{l_0}] = 3D[\Psi_{f_0}] \sigma_H^4 / H(f_0)^4.\tag{9.159}$$

Функцию плотности распределения Ψ_{l_0} можно найти с помощью методов, рассмотренных в п. 9.7 для произведения статистически независимых случайных величин. Подстановка в выражение (9.95) функций плотности распределения для $|X_T|^2$ и $|H_k|^2$, подчиняющихся закону χ^2 , после некоторых преобразований приводит к решению в виде функции Бесселя:

$$p(\Psi_{l_0} | h) = \frac{2}{\sigma_{x_T}^2 \sigma_H^2} K_0 \left(\frac{2 \sqrt{\Psi_{l_0}}}{\sigma_{x_T} \sigma_H} \right).\tag{9.160}$$

Интересно сравнить функции плотности распределения (9.155) и (9.160). Чтобы облегчить сравнение, введем новую центрированную и нормированную переменную

$$u = (\Psi - \bar{\Psi}) / [D(\Psi)]^{1/2}.$$

Графики функций плотности распределения u , соответствующие выражениям (9.155) и (9.160), приведены на рис 9.22. Наиболее существенное различие функций плотности распределения характерно для больших значений u . Для больших значений u модифицированная функция Бесселя плотности распределения

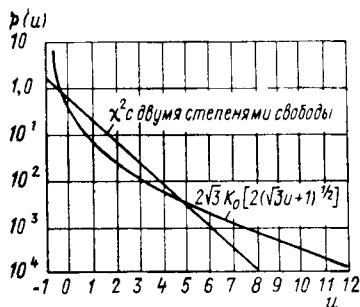


Рис. 9 22. Графики функций плотности распределения, подчиняющихся закону χ^2 с двумя степенями свободы и модифицированной функции Бесселя нулевого порядка

стремится к нулю гораздо медленнее, чем функции плотности χ^2 . Это различие особенно важно в тех случаях, когда характеристики системы определяются хвостами функции плотности распределения (см. гл. 13).

В завершение данного примера предположим, что импульсный отклик $h(t)$ заменяется новой независимой реализацией $h(t, l)$ в начале каждого временного интервала T : $h(t, l) = \sum_n^n a_{n_i} \delta \times \times (t - t_{n_i})$. Тогда случайная величина $|z_T(f, l)|^2$ представляет собой произведение независимых

случайных величин с χ^2 -распределением при $f = f_0$ либо $l = l_0$. В любом случае функция плотности распределения определяется выражением (9.160).

Этот пример показывает, что необходима особая осторожность при определении характеристик случайных величин, последовательно преобразуемых различными устройствами системы.

Задачи

9.1. Случайная величина z связана со статистически независимыми с нулевым средним значением случайными величинами x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$z = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4).$$

Напишите выражение для $E[z^2]$.

9.2. Случайная величина x имеет функцию плотности распределения, показанную на рис 9 23. Напишите выражение нормированной функции плотности распределения. Рассчитайте среднее значение и дисперсию x .

9.3. Пусть z представляет собой сумму n статистически независимых случайных величин в виде $y_i = \sin \theta_i$, где θ_i имеет равномерное распределение в интервале $[0, 2\pi]$. Используя метод характеристических функций, покажите, что функция плотности распределения приближается к гауссовой при $n \rightarrow \infty$ (характеристическая функция для функции плотности распределения y_i будет бесцеловой функцией первого рода нулевого порядка).

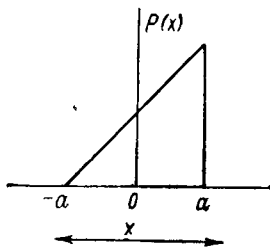


Рис. 9 23. К задаче 9.1

9 4 Пусть $z = xy$, причем x и y статистически независимы. Определите функцию плотности распределения z , если

$$p(x) = \frac{1}{2a} \text{rect} \left(\frac{x}{2a} \right);$$

$$p(y) = \frac{1}{2b} \text{rect} \left(\frac{y}{2b} \right).$$

9 5. Пусть x — случайная величина, функция плотности распределения которой

$$p(x) = [1/(2a)] \operatorname{rect}[x/(2a)].$$

Воспользовавшись уравнением (9.73), покажите, что дисперсия x равна $a^2/3$.

9 6. Пусть $z(t)$ представляет собой комплексную гауссову случайную величину (см. пп. 9.75). Докажите соотношение (9.139), т. е. покажите, что для $y(t) = |z(t)|^2$

$$R_y(\tau) = R_z^2(0) + R_z^2(\tau),$$

9 7. Две статистически независимые случайные величины x и y имеют следующие функции плотности распределения:

$$p(x) = (1/\pi) (1 - x^2)^{-1/2} \operatorname{rect}(x/2);$$

$$p(y) = y \exp(-y^2/2) \quad \text{при } y \geq 0.$$

Покажите, что функция плотности распределения их произведения xy будет гауссовой.

Список литературы

- 1 *Gradshteyn A. A., Ryzhik A. H.* Tables of Integrals, Series, and Products. New York: Academic Press, Inc, 1979. P. 959.
- 2 *Davenport W. B., Root W. L.* Random Signals and Noise. New York: McGraw-Hill Book Company, 1958
- 3 *Parzen E.* Modern Probability Theory and Its Applications. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1960.
- 4 *Miller K. S.* Engineering Mathematics. New York: Dover Publications, Inc, 1963
- 5 *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions, Natl. Bur. Stand., Appl. Math. Ser. 55. Washington, D. C.: U. S. Government Printing Office, 1964, Chs 9 and 26.

Глава 10

ОКРУЖАЮЩИЙ ШУМ В ОКЕАНЕ

На выходе приемника, установленного в океане, возникает сигнал, который при наблюдении в течение длительных периодов времени наилучшим образом описывается как «шум», т. е. его амплитуда флуктуирует по случайному закону. При этом возможно лишь статистическое описание, основанное на наблюдениях в течение больших интервалов времени. Наблюдаемое на выходе приемника напряжение является суммой электрических шумов, генерируемых электронной частью системы, и акустических шумов, производимых случайными флуктуациями давления в океане в месте установки приемников. Как показано в гл. 3,

при правильном проектировании системы акустический шум должен быть доминирующей составляющей в системе. Ниже рассматриваются источники и характеристики фонового акустического шума или *окружающего шума*. Этот шум устанавливает нижний предел интенсивности полезных акустических сигналов в гидроакустических системах.

Многие полезные акустические сигналы в океане имеют шумоподобный характер. Термин «окружающий шум» относится к шуму, который остается после того, как все легко идентифицируемые источники звука устранены. Например, присутствие большого числа судов, случайным образом распределенных по поверхности океана, дает составляющую окружающего шума как результат «отдаленного судоходства». Однако шум, производимый отдельным, находящимся поблизости, кораблем, легко поддается идентификации и определению координат и поэтому рассматривается как акустический сигнал, а не как часть окружающего шума.

Для системного анализа важны как пространственные, так и временные свойства поля окружающего шума. В этой главе выводится зависимость между пространственной корреляцией и угловым распределением окружающего шума для нескольких простых моделей, представляющих практический интерес.

В имеющейся литературе дается подробное описание окружающего шума. Особенно рекомендуем читателю познакомиться с работами [1, 2], в которых дан обзор этого материала в качестве пособия для понимания механизмов (процессов), определяющих временные и пространственные свойства шума.

10.1. Источники окружающего шума

Источники окружающего шума бывают естественного происхождения и искусственного — результат деятельности человека в океане, причем разные источники имеют различные спектральные и направленные свойства. К естественным источникам шума относятся сейсмические возмущения, ветровое волнение морской поверхности и тепловая активность молекул воды. Значительный вклад в фоновый шум, особенно в гаванях и прибрежных водах, вносят биологические источники, такие как шелкающие креветки, шумящие рыбы, дельфины и другие виды рыб и океанских млекопитающих.

Основной искусственной составляющей окружающего шума является звук, генерируемый отдаленным судоходством. Термин «отдаленное» в этом случае включает расстояния примерно от нескольких сотен до 1000 миль и более. Очевидно, уровни окружающего шума сильно зависят от географического положения, характеристик прохождения звука в среде, времени года и погоды. Шум дальнего судоходства зависит от уровня и вида тор-

говой активности в открытом море, и в последние годы эта составляющая шума постоянно возрастает. Даже политические события, такие как закрытие Суэцкого канала, влияют на окружающий шум, воздействуя на общий характер судоходства в мире.

Рассмотрение характеристик окружающего шума можно упростить, разделив акустический спектр шумов на три полосы частот: нижняя полоса — диапазон от 1 Гц или ниже до нескольких сотен герц; полоса средних частот — от нескольких сотен герц до примерно 50 кГц; высокочастотная полоса — все частоты выше 50 кГц. В каждой из этих полос можно выделить доминирующие источники окружающего шума, хотя может существовать и значительное перекрытие по частоте на краях полос.

Главным источником окружающего шума в низкочастотной полосе является звук отдаленного судоходства. В глубоком океане шумы отдаленного судоходства имеют широкий максимум вблизи 30 Гц и быстро спадают выше 100 Гц. Шум ниже 10 Гц в результате турбулентных флюктуаций давления в океане и сейсмической активности преобладает над шумом, производимым отдаленным судоходством, но этот очень низкочастотный диапазон обычно не представляет большого интереса при проектировании гидроакустических систем.

Акустический шум, излучаемый судном, измеряемый на близком расстоянии, перекрывает полосу частот, значительно более широкую, чем полоса, приписываемая отдаленному судоходству. Высокочастотная часть излучаемого судном спектра шумов снижается в результате поглощения звука в океане на больших расстояниях, связанных с отдаленным судоходством. На рис. 10.1 приведены типичный график спектральной интенсивности шума на небольшом расстоянии для торгового судна и измененный вид спектра, полученный в результате измерений на дистанции 500 миль. Обратите внимание на быстрое спадание спектра выше 100 Гц при измерениях на дистанции 500 миль.

Уровень шума в полосе частот от 10 до 100 Гц определяется плотностью судоходства и характеристиками дальнего распространения звука в океане в этом частотном диапазоне. Уровень низкочастотного звука, приходящего с больших расстояний, должен зависеть главным образом от рефракции звука при прохождении зоны конвергенции и типа звукового канала. Шум, распространяющийся путями, приводящими к многократным донным отражениям, сильно затухает и, таким образом, не вносит большого вклада в поле окружающего шума. Следовательно, высокие уровни окружающего шума в низкочастотном диапазоне обычно наблюдаются при таких глубинах и профилях скорости звука, которые характеризуются наличием зон конвергенции. На рис. 10.2 показан диапазон уровней, который можно ожидать для шумов отдаленного судоходства с учетом влияния

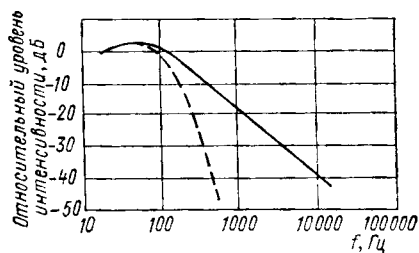


Рис. 10.1. Влияние потерь при поглощении звука на форму спектра излучаемого шума для надводного корабля

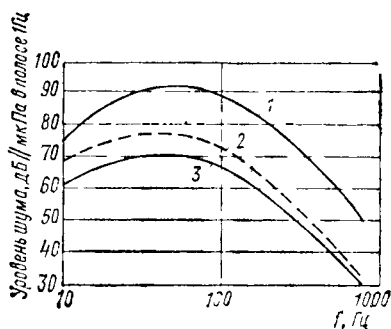


Рис. 10.2. Влияние отдаленного судоходства на уровень окружающего шума:

1 — интенсивное судоходство, условия распространения низкочастотных сигналов хорошие, 2 — умеренное судоходство, условия распространения средние; 3 — плотность судоходства невысокая, условия распространения плохие

плотности судоходства и характеристик распространения звука. По оси ординат отложен уровень интенсивности шума в дБ/мкПа, измеренный в полосе шириной 1 Гц (см. пп. 2.5.3).

Исходя из того, что шум отдаленного судоходства в основном ограничен траекториями, для которых характерна рефракция звука, можно сделать качественные выводы относительно углового распределения окружающего шума в вертикальной плоскости в низкочастотной полосе. Используя типичные для глубокого океана профили скорости звука, легко показать, что для акустических лучей, которые не пересекаются ни с поверхностью океана, ни с дном, вертикальный угол, определяющий направление прихода волны к приемнику лежит примерно в пределах $\pm 15^\circ$ относительно горизонтальной плоскости.

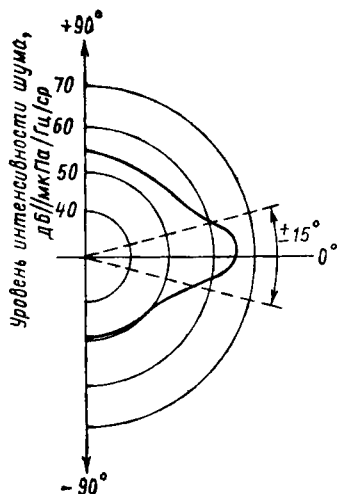


Рис. 10.3. Типичное угловое распределение шума в вертикальной плоскости в низкочастотной полосе в глубоком море

Таким образом, интенсивность шума, измеряемая направленным приемником при углах, близких к горизонтали, гораздо больше, чем при углах, близких к вертикали. На рис. 10.3 представлено распределение шума в вертикальной плоскости в низкочастотной полосе (на один стерадиан телесного угла).

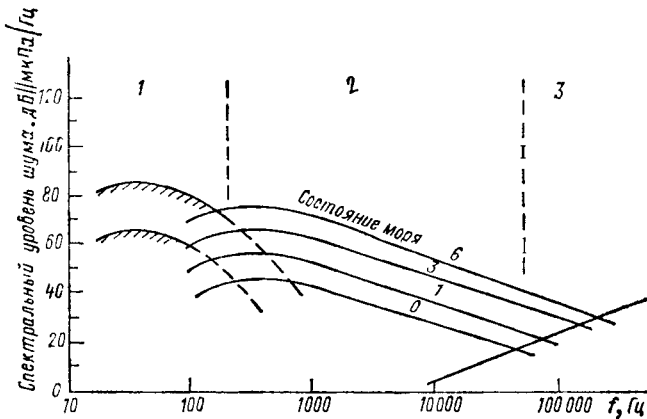


Рис. 10.4. Типичные спектры окружающего шума в глубоком море, измеренные ненаправленным приемником:

1 — полоса низких частот, отдаленное судоходство; 2 — полоса средних частот, шум, генерируемый ветром (кривые Кнудсена); 3 — полоса высоких частот, тепловой шум

В диапазоне средних частот доминирующим фактором будет влияние ветра на поверхность океана. Исследования В. О. Кнудсена [3] показали наличие корреляции между окружающим шумом и силой ветра или состоянием моря. Кривые окружающего шума в полосе средних частот в зависимости от силы ветра, состояния моря или скорости ветра в качестве параметра *семейства характеристик* часто называют «кривыми Кнудсена». Уровень окружающего шума в этой полосе возрастает примерно на 5 дБ при увеличении скорости ветра в два раза [1].

Шум, возникающий в результате воздействия ветра, имеет широкий спектральный максимум около 500 Гц и уменьшается со скоростью от —5 до —6 дБ на октаву на более высоких частотах. В этом диапазоне частот свой вклад в окружающий шум вносят барашки, брызги, образование и захлопывание пузырьков и, возможно, турбулентные давления в воздухе, непосредственно прилегающем к воде. Акустический шум, генерируемый таким образом, не распространяется на большие расстояния вследствие поглощения. По этой причине, а также вследствие геометрических свойств поверхности как излучателя окружающий шум в полосе средних частот более интенсивен в вертикальном направлении, чем в горизонтальном (см. пп. 10.2.4).

В полосе частот выше 50 кГц основным источником окружающего шума является тепловое движение молекул воды. Эта составляющая шума возрастает со скоростью 6 дБ на октаву по мере возрастания частоты [4]. Тепловой шум в океане изотропен в пространстве.

Типичные спектры окружающего акустического шума, измеренные ненаправленным приемником для всех трех рассматриваемых полос частот, приведены на рис. 10.4 [2]. Кривые представляют усредненные характеристики для глубокого океана и можно ожидать значительных отклонений в зависимости от географического положения места, времени года и состояния погоды. Ориентировочные пределы изменения уровня шума дает рис. 10.4. Эти результаты следует уточнить.

10.2. Корреляционные свойства окружающего шума

Рассмотрим шумовой сигнал на выходе двух ненаправленных приемников, разнесенных в пространстве (рис. 10.5). Поскольку окружающий шум — функция случайная, точные различия между n_1 и n_2 не поддаются прогнозированию. Таким образом, нужно полагаться на статистическое описание изменения шумового поля в пространстве и во времени. Это приводит к использованию корреляционной функции выборок окружающего шума.

Из рассмотренного материала (см. п. 10.1) следует, что окружающий шум — это процесс, не стационарный во времени и пространстве. На пространственную стационарность в широком смысле влияет географическое положение, а в более узком — близость и состояние граничных поверхностей распространения звука в море. Долговременные изменения происходят в масштабах времен года, а краткосрочные — в интервалах от дней до нескольких минут [5, 6]. Однако многие полезные результаты получены с помощью допущения стационарности как в пространстве, так и во времени. Это дает возможность применить разработанный математический аппарат и вместе с допущением об эргодичности использовать аналитические методы для установления зависимости свойств шумового поля от времени и частоты или линейных и угловых пространственных характеристик. Рамки, в которых допущение о стационарности этого процесса остается справедливым, зависят от конкретного применения. Обычная практика состоит в допущении стационарности и последующем уточнении результатов с учетом влияния нестационарности. При допущении о стационарности взаимно корреляционная функция между n_1 и n_2 будет функцией только разности векторов, определяющих положения точек p_1 и p_2 и времени задержки τ .

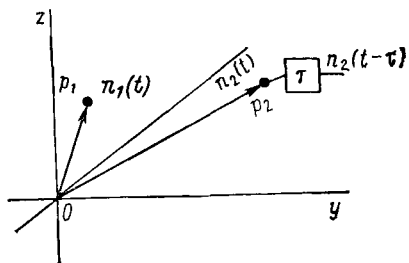


Рис. 10.5 Расположение приемников для определения корреляционных свойств шумового поля

Для дальнейшего упрощения окружающий шум прини-

маем изотропным в горизонтальной плоскости, причем точки наблюдения, определяемые радиусами-векторами, p_1 и p_2 размещены в горизонтальной плоскости. При таком допущении взаимно корреляционная функция зависит только от значения разности $p_1 - p_2$. Конкретные случаи отклонения от такого допущения рассмотрены в пп. 10.2.7, более общие — в работах В. Ф. Крона и К. Г. Шермана [7] и Г. Кокса [8].

10.2.1. Пространственная модель поля окружающего шума

Предположим, что источники окружающего шума образуются на значительном расстоянии, так что шум на приемнике можно рассматривать как суммирование большого числа статистически независимых плоских волн, каждая со случайной ориентацией в пространстве. Это явление можно моделировать большим числом случайных источников шума, распределенных по поверхности большой сферы с всенаправленной антенной, расположенной в центре этой сферы.

Для описания корреляционных свойств шумового поля выберем систему координат, как показано на рис. 10.6. Направление определяется полярным углом θ , измеряемым в плоскости zOy относительно положительной оси z , и углом ψ между плоскостью zOy и единичным вектором. В качестве альтернативы можно определить углы γ и ϕ в горизонтальной и вертикальной плоскостях, как показано на рисунке.

Всенаправленные гидрофоны расположены в точках 1 и 2 на оси x на расстоянии d , значительно меньшем, чем радиус гипотетической шумовой сферы. Таким образом, шумы, приходящие в точки 1 и 2 от небольшого элемента сферической поверхности, отличаются только относительным временем прихода.

Пусть шумовой сигнал, приходящий из элементарного телесного угла $d\Omega$ и направления θ, ψ в точку, находящуюся в начале координат, равен $n_0(\theta, \psi, t)d\Omega$. Допустим, преобразование Фурье в частотной области для этого сигнала существует, т. е.

$$n_0(\theta, \psi, t) d\Omega = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} N_0(\theta, \psi, f) \exp(j2\pi ft) df \right] d\Omega. \quad (10.1)$$

Суммарный сигнал в точке, совпадающей с началом координат, получится интегрированием по сферической поверхности:

$$n_0(t) = \iint_{4\pi}^{+\infty} N_0(\theta, \psi, f) \exp(j2\pi ft) df d\Omega. \quad (10.2)$$

Будем считать, что шумы, генерируемые элементами сферической поверхности, и шумы на различных частотах статистически

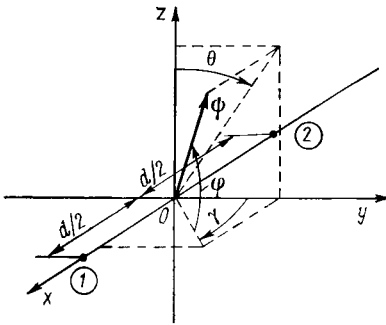


Рис. 10.6. Полярная система координат, используемая при определении шумового поля

независимы. Тогда средняя интенсивность шума в начале координат

$$I_m = E[|n_0(t)|^2] = \iint_{4\pi-\infty}^{+\infty} |N_0(\theta, \psi, f)|^2 df d\Omega. \quad (10.3)$$

Среднюю интенсивность считаем постоянной в рассматриваемой пространственной области в соответствии с предположением о пространственной стационарности.

Шумовые сигналы на двух приемниках (рис. 10.6), приходящие с направления ψ, θ , отличаются от сигнала в точке, совпадающей с началом координат, временем задержки, которое является функцией ψ и не зависит от θ . В частности задержка в точке 1 относительно сигнала в начале координат равна $-d \sin \psi / (2c)$, в точке 2 — $+d \sin \psi / (2c)$, где c — скорость звука. Пользуясь правилом, выведенным в гл. 6 для расчета влияния временной задержки на преобразование Фурье, получим, что Фурье-преобразования сигналов в точках 1 и 2 связаны с Фурье-преобразованием сигнала в начале координат следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} N_1(\theta, \psi, f) &= N_0(\theta, \psi, f) \exp(j\pi f d \sin \psi / c); \\ N_2(\theta, \psi, f) &= N_0(\theta, \psi, f) \exp(-j\pi f d \sin \psi / c), \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} n_1(t) &= \iint_{4\pi-\infty}^{+\infty} N_0(\theta, \psi, f) \exp\left[j2\pi f \left(t + \frac{d \sin \psi}{2c}\right)\right] df d\Omega; \\ n_2(t) &= \iint_{4\pi-\infty}^{+\infty} N_0(\theta, \psi, f) \exp\left[j2\pi f \left(t - \frac{d \sin \psi}{2c}\right)\right] df d\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Выразим теперь временную взаимно корреляционную функцию для n_1 и n_2 , прибавив временную задержку τ к сигналу на выходе приемника 2:

$$R_{12}(d, \tau) = E[n_1(t) n_2^*(t - \tau)]. \quad (10.6)$$

Воспользовавшись статистической независимостью по частоте и направлению, запишем выражение (10.6) в интегральной

форме:

$$R_{12}(d, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi f\tau) \left\{ \int_{4\pi} \overline{|N_0(\theta, \psi, f)|^2} \times \right. \\ \left. \times \exp(j2\pi f d \sin \psi/c) d\Omega \right\} df. \quad (10.7)$$

Если $d = 0$, уравнение (10.7) становится обычным выражением, связывающим автокорреляционную функцию во временной области и плотность энергетического спектра в частотной области. Таким образом,

$$R_{12}(d = 0, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{|N_0(f)|^2} \exp(j2\pi f\tau) df, \quad (10.8)$$

где

$$\overline{|N_0(f)|^2} = \int_{4\pi} \overline{|N_0(\theta, \psi, f)|^2} d\Omega = I_{\text{ш}}(f).$$

Внутренний интеграл в выражении (10.7) имеет вид Фурье-преобразования угловой спектральной плотности на частоте f в линейную область с расстоянием d по оси x . Таким образом, определяем пространственную взаимную корреляцию сигналов в точках 1 и 2 для фиксированной частоты:

$$Q_{12}(d, f) = \int_{4\pi} \overline{|N_0(\theta, \psi, f)|^2} \exp\left(j \frac{2\pi f d \sin \psi}{c}\right) d\Omega.$$

Преобразуя в полярные координаты β, γ при $\beta = \pi/2 - \varphi$, получаем

$$Q_{12}(d, f) = \int_0^{+\pi} \int_0^{2\pi} \overline{|N_0(\theta, \psi, f)|^2} \exp\left(j \frac{2\pi f d \sin \psi}{c}\right) \sin \beta d\beta d\gamma. \quad (10.9)$$

Функцию $Q_{12}(d, f)$ называют также *взаимной спектральной плотностью* сигналов в точках 1 и 2. *Пространственно-временная корреляционная функция* в уравнении (10.7) — это Фурье-преобразование *взаимной спектральной плотности*, определяемой выражением (10.9):

$$R_{12}(d, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{12}(d, f) \exp(j2\pi f\tau) df. \quad (10.10)$$

При $d = 0$ уравнение (10.10) сводится к временной автокорреляционной функции выражения (10.8). При $\tau = 0$

$$R_{12}(d, \tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_{12}(d, f) df. \quad (10.11)$$

Выражение (10.9) показывает, что функцию корреляции на частоте f для приемников, расположенных вдоль оси x , можно определить, зная трехмерное распределение шумового поля на данной частоте. В этой простой форме соотношение (10.9) не представляет собой обратной операции, поскольку трехмерное распределение шума нельзя восстановить, зная корреляционную функцию для приемников, расположенных по одной линии. Для того чтобы можно было восстановить угловое распределение шумового поля в общем случае, необходимо знать корреляционную функцию для приемников, разнесенных на расстояние, равное векторной разности $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, где направление этой разности может принимать все возможные значения.

Для простоты удобно рассматривать свойства пространственной корреляции шумового поля на одной частоте. Проанализируем взаимную спектральную плотность $Q_{12}(d, f)$ с учетом времени задержки τ , вводимого в сигнал одного из приемников. Таким образом,

$$Q_{12}(d, f, \tau) = Q_{12}(d, f) \exp(j2\pi f\tau). \quad (10.12)$$

Удобно также нормировать этот результат относительно средней интенсивности шума на частоте f , т. е.

$$q_{12}(d, f, \tau) = Q_{12}(d, f, \tau) / Q_{12}(d=0, \tau=0, f). \quad (10.13)$$

И, наконец, видим, что для шумовых сигналов с вещественным значением нормированная корреляция является вещественной частью выражения (10.13):

$$q'_{12}(d, f, \tau) = \operatorname{Re}[q_{12}(d, f, \tau)]. \quad (10.14)$$

Выведем взаимные спектральные плотности или одночастотные пространственные корреляционные функции для нескольких угловых распределений шума, представляющих практический интерес. Геометрия моделей шумов, которые будут рассмотрены далее, показана на рис. 10.7.

10.2.2. Изотропный шум

Модель изотропного шума, показанная на рис. 10.7, *a*, простейшая с математической точки зрения, и тем не менее она представляет значительный практический интерес. Между частотным диапазоном, в котором доминирующую роль играют шумы отдаленного судоходства, и диапазоном, где преобладают шумы, генерируемые поверхностью моря, существует переходная область частот, где шум имеет почти изотропное угловое распределение. Шумовое поле в диапазоне свыше 50 кГц близко к изотропному, а на других частотах шумовое поле обычно содержит изотропную составляющую.

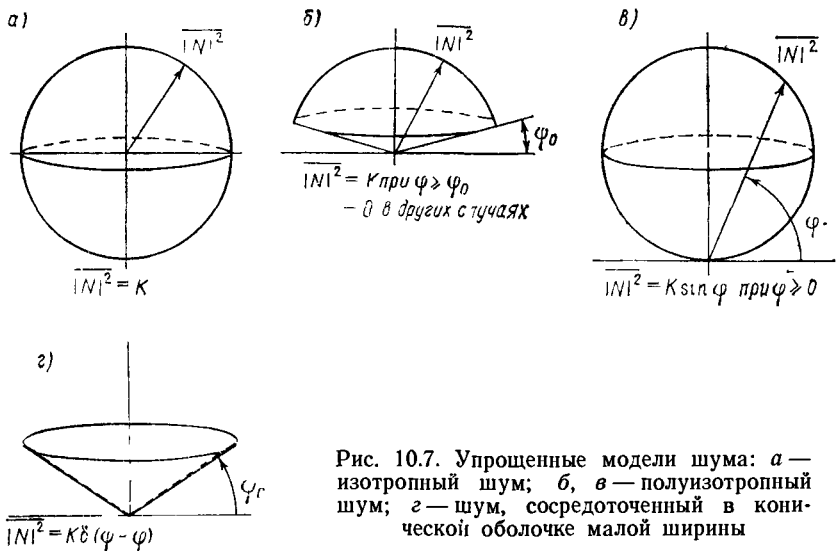


Рис. 10.7. Упрощенные модели шума: а — изотропный шум; б, в — полуизотропный шум; з — шум, сосредоточенный в конической оболочке малой ширины

Полная интенсивность шумового поля на частоте f для изотропной модели определяется из уравнения (10.8). Если принять, что угловая интенсивность постоянна и равна K , получим

$$I_{\text{ш}}(f) = Q_{12}(0, f, 0) = \int_{4\pi} K d\Omega = 4\pi K. \quad (10.15)$$

Чтобы получить взаимную спектральную плотность, запишем с помощью выражения (10.9):

$$Q_{12}(d, f) = K \int_0^{+\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{2\pi f d}{c} \sin \psi\right) \sin \beta d\beta d\gamma, \quad (10.16)$$

где $\sin \psi = \sin \beta \sin \gamma$.

Интегрируя по γ , найдем

$$Q_{12}(d, \lambda) = 2\pi K \int_0^{\pi} I_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \beta\right) \sin \beta d\beta,$$

где $\lambda = c/f$.

Получился табличный интеграл, который представляет собой функцию sinc:

$$Q_{12}(d, \lambda) = 4\pi K \operatorname{sinc}(2d/\lambda) = 4\pi K \left[\frac{\sin(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} \right]. \quad (10.17)$$

Из выражений (10.12), (10.13) и (10.15) получаем следующее выражение для нормированной взаимной спектральной плотности с учетом времени задержки τ :

$$q_{12}(d, \lambda, \tau) = \operatorname{sinc}(2d/\lambda) \exp(j2\pi c\tau/\lambda).$$

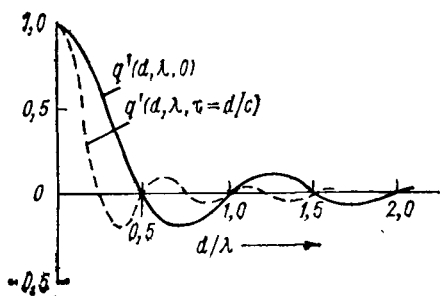


Рис. 10.8. Пространственные корреляционные функции для изотропного шумового поля

пении, что окружающий шум является гауссовым случайным процессом, нулевая корреляция гарантирует также статистическую независимость.

Пусть теперь τ равно времени распространения звука между гидрофонами, находящимися на расстоянии d . Тогда

$$\cos(2\pi c\tau/\lambda) = \cos(2\pi d/\lambda);$$

$$q'_{12}(d, \lambda, \tau = d/c) = \frac{\sin(2\pi d/\lambda) \cos(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} = \frac{\sin(4\pi d/\lambda)}{4\pi d/\lambda}. \quad (10.19)$$

Влияние *вводимой* задержки заключается во введении дополнительных нулей в корреляционную функцию, в результате чего на приемниках, разнесенных на расстояния, кратные $\lambda/4$, шумовые сигналы будут статистически независимы. Пространственные корреляционные функции для изотропного шумового поля при $\tau = 0$ и $\tau = d/c$ показаны на рис. 10.8.

10.2.3. Шум, распределенный в секторе пространства

Рассмотрим распределение шума, показанное на рис. 10.7, б. Интенсивность такого шума постоянна в некоторой симметричной части сферической поверхности и равна нулю в других областях. (В оригинале книги вычисления для этого случая выполнены неверно. Здесь записаны исправленные выражения.)

Пусть в сферической системе координат, определяемой углами φ, γ (см. рис. 10.6), интенсивность шума находим из условия

$$\overline{|N_0(\varphi, \gamma, f)|^2} = \begin{cases} K & \text{при } \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi/2. \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10.20)$$

Переходя к углам β и γ ($\beta = \pi/2 - \varphi$), запишем

$$\overline{|N_0(\beta, \gamma, f)|^2} = \begin{cases} K & \text{при } 0 \leq \beta < \pi/2 - \varphi_0, 0 \leq \gamma \leq 2\pi; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10.21)$$

Для шума, определяемого вещественной функцией, это выражение следует записать в виде

$$q'_{12}(d, \lambda, \tau) = \text{sinc}(2d/\lambda) \cos(2\pi c\tau/\lambda). \quad (10.18)$$

При $\tau = 0$ пространственная корреляция будет функцией sinc с нулевыми значениями при $d = n\lambda/2$, где n — любое целое число. При допу-

Взаимно корреляционная функция для этого шумового поля

$$Q_{12}(d, \lambda, \tau) = K \exp(j2\pi f\tau) \int_0^{\pi/2 - \varphi_0} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{j2\pi d \sin \psi}{\lambda}\right) \sin \beta d \beta d\gamma.$$

Учитывая, что $\sin \psi = \sin \beta \sin \gamma$, можно взять интеграл по γ :

$$Q_{12}(d, \lambda, \tau) = 2\pi K \exp(j2\pi f\tau) \int_0^{\pi/2 - \varphi_0} J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \beta\right) \sin \beta d\beta.$$

После замены $u = \sin \beta$ получаем

$$Q_{12}(d, \lambda, \tau) = 2\pi K \exp(j2\pi f\tau) \int_0^{\cos \varphi_0} J_0\left(\frac{2\pi du}{\lambda}\right) \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Этот интеграл аналитически не берется и может быть определен численно. Выполняя нормирование по формулам (10.12) и (10.14), получим для шума, определяемого вещественной функцией,

$$q'_{12}(d, \lambda, \tau) = \cos\left(\frac{2\pi c\tau}{\lambda}\right) \frac{1}{1 - \sin \varphi_0} \int_0^{\cos \varphi_0} J_0\left(\frac{2\pi du}{\lambda}\right) \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (10.22)$$

Отметим, что при $\varphi_0 = 0$ выражение (10.22) превращается в формулу (10.17) для изотропного поля. Для того чтобы в этом убедиться, следует учесть, что при $\cos \varphi_0 = 1$ интеграл берется аналитически и его значение равно $\sin(2\pi du/\lambda) / (2\pi du/\lambda)$.

Этот интересный результат можно обобщить с помощью рассмотрения полуизотропного поля, которое должно состоять из двух частей: части, представляющей собой четную функцию φ , и части, являющейся нечетной функцией φ . Таким образом, пусть $\overline{|N(\varphi, \gamma)|^2} = \overline{|N(\varphi)|_e^2} + \overline{|N(\varphi)|_o^2}$. После несложных преобразований при $\varphi_0 = 0$ для однородного звукового поля в горизонтальной плоскости вклад нечетной части шумового поля в корреляционную функцию равен нулю. Тогда это шумовое поле можно представить в следующем виде:

$$\overline{|N(\varphi)|^2} = (K/2) [1 + \text{sgn}(\varphi)], \quad (10.23)$$

где

$$\text{sgn}(\varphi) = \begin{cases} +1 & \text{при } \varphi \text{ положительном;} \\ -1 & \text{при } \varphi \text{ отрицательном.} \end{cases}$$

Для любого звукового поля, однородного в горизонтальной плоскости, структуру которого в вертикальной плоскости можно разделить на четные и нечетные составляющие, корреляционную функцию, измеряемую в горизонтальной плоскости, получим с

помощью рассмотрения только четной составляющей. В качестве примера рассмотрим шумовое поле с кардиоидной характеристикой в вертикальной плоскости:

$$|N(\varphi, \gamma)|^2 = (K/2)(1 + \sin \varphi). \quad (10.24)$$

Поскольку $\sin \varphi$ — нечетная функция φ , корреляционная функция определяется полностью четной составляющей уравнения (10.24), представляющей изотропное поле с амплитудой $K/2$. Таким образом, шумовое поле с кардиоидной характеристикой имеет ту же самую корреляционную функцию, что и изотропное поле, при оценке в плоскости, перпендикулярной оси кардиоиды.

Чем больше угол φ_0 , тем больше расстояние между приемниками, при котором корреляция обращается в нуль. В предельном случае, когда $\varphi_0 \rightarrow \pi/2$, область прихода шума превращается в линию, соответствующую плоской волне, приходящей с вертикального направления. Тогда сигналы на обоих приемниках имеют нормированный коэффициент корреляции, равный единице для всех расстояний между ними, так как задержка $\tau = 0$.

10.2.4. Шумовое поле, генерируемое поверхностью

Допустим, что в результате воздействия ветра на поверхность океана элементарные участки поверхности излучают в воду независимо друг от друга акустический шум с угловой характеристикой излучения $g(\varphi)$ при $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$. Интенсивность шума, излучаемого элементом площади dA , в направлении φ , отнесенная к единице расстояния,

$$dI(\varphi) = I_0 |g(\varphi)|^2 dA, \quad (10.25)$$

где I_0 — величина, пропорциональная интенсивности источника.

Рассмотрим далее геометрию (рис. 10.9). Приемник H , установленный на глубине d , принимает шум в вертикальной плоскости под углом φ от кругового кольца радиусом r , как показано на рисунке. Интенсивность шума, принимаемого из этого кольца,

$$dI_H = I_0 |g(\varphi)|^2 dA/R^2. \quad (10.26)$$

Приняв dA равным площади кругового кольца, получим

$$dI_H = I_0 |g(\varphi)|^2 2\pi r dr/R^2. \quad (10.27)$$

Уравнение (10.27) выражает интенсивность шума, излучаемого элементом поверхности, через мощность на единицу площади на расстоянии R . Чтобы преобразовать ее в единицы мощности на единицу площади на 1 ср телесного угла, определим проектируемую поверхность кругового кольца на поверхность, нормальную к направлению φ , и разделим на площадь сферы ра-

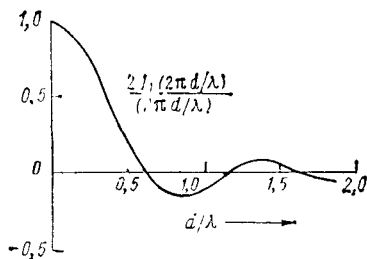
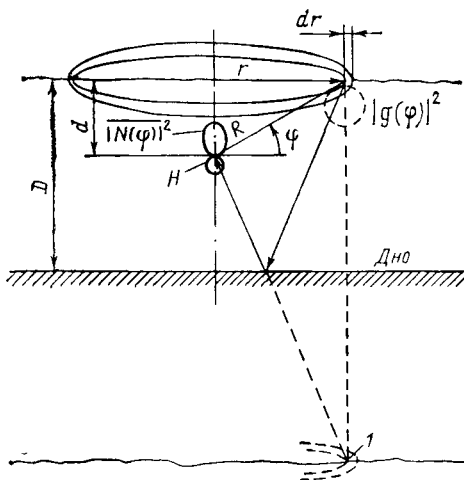


Рис. 10.10. Пространственная корреляционная функция в горизонтальной плоскости при $|N(\varphi)|^2 = K \sin |\varphi|$

Рис. 10.9. Геометрическое представление модели шума, генерируемого поверхностью:

1 — зеркальное изображение элементарного участка поверхности

диусом R . Таким образом, величина телесного угла (σ), из которого поступает шум от элементарного участка поверхности dA , будет

$$2\pi r \sin \varphi dr / (4\pi R^2). \quad (10.28)$$

Разделив выражение (10.27) на значение, определяемое формулой (10.28), получим угловое распределение шумового поля, измеренное в точке H , создаваемого шумом, излучаемым непосредственно с поверхности:

$$\begin{aligned} |N(\varphi)|^2 &= \frac{I_0 |g(\varphi)|^2 2\pi r dr}{R^2} \left(\frac{4\pi R^2}{2\pi r \sin \varphi dr} \right) = \\ &= 4\pi I_0 |g(\varphi)|^2 / \sin \varphi \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Заметим, что шумовое поле, описываемое выражением (10.29), не зависит от глубины приемника. В действительности же вследствие влияния поглощения уровень шума будет уменьшаться с увеличением глубины [2]. Это особенно заметно на высоких частотах. При выводе выражения (10.29) не учитывалось также влияния рефракции.

Как показано на рис. 10.9, приемник в точке H будет принимать шумовой сигнал, представляющий собой шум, генерированный поверхностью и отраженный от дна. Выражение для поля шума, отраженного от дна в точке H , можно получить с помощью замены отражающего дна зеркальным изображением реальных источников шума на поверхности. Пренебрегая опять поглощением и рефракцией, получим в результате характеристику шума в нижней полусфере, аналогичную по форме характеристике, определяемой выражением (10.29), но с интенсивностью, уменьшенной на коэффициент L_b . Для простоты потери

при отражении от дна предположим независимыми от угла падения сигнала. Суммарное угловое распределение шума в вертикальной плоскости можно теперь записать так:

$$\overline{|N(\varphi)|^2} = \begin{cases} 4\pi I_0 |g(|\varphi|)|^2 / \sin|\varphi| & \text{при } \varphi \geq 0; \\ 4\pi I_0 L_b |g(|\varphi|)|^2 / \sin|\varphi| & \text{при } \varphi < 0. \end{cases} \quad (10.30)$$

Примем обычное допущение $|g(\varphi)|^2 = \sin^m \varphi$, где m — произвольная положительная постоянная. На низких частотах условие $m = 0$ приводит к результатам, согласующимся с экспериментальными данными, в то время как в диапазоне средних частот чаще всего используют значение $m = 2$.

Принимая $m = 2$, подстановкой в выражение (10.30) найдем формулу вертикального распределения шума в верхней полусфере в точке H :

$$\overline{|N(\varphi)|^2} = 4\pi I_0 \sin \varphi \quad \text{при } \varphi \geq 0. \quad (10.31)$$

Для определения пространственной корреляционной функции преобразуем координаты $\sin \varphi = \cos \psi \cos \theta$ и подставим преобразованное выражение (10.31) в выражение (10.9). С учетом того, что мнимая часть результирующего выражения равна нулю, получаем

$$\begin{aligned} Q_{12}(d, \lambda) &= 4\pi I_0 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta \cos^2 \psi \cos \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \psi \right) d\theta d\psi = \\ &= 8\pi I_0 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \psi \cos \left(\frac{2\pi d}{\lambda} \sin \psi \right) d\psi = (8\pi I_0) \pi \left[\frac{J_1(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} \right], \end{aligned} \quad (10.32)$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода и первого порядка.

Нормированную корреляционную функцию получим делением выражения (10.32) на интенсивность шума, принятого ненаправленным приемником в точке H . В результате

$$q_{12}(d, \lambda) = 2J_1(2\pi d/\lambda) (2\pi d/\lambda). \quad (10.33)$$

Пространственная корреляция в горизонтальной плоскости для шумового поля с распределением вида $\sin|\varphi|$ в вертикальной плоскости показана на рис. 10.10 как функция d/λ . Заметим, что эта корреляционная функция равна нулю для расстояния между приемниками $d \approx 0,61\lambda$, несколько большего, чем требуемое для достижения нулевой корреляции в изотропном шумовом поле (для изотропного шума $d = 0,5\lambda$). Заметим также, что на рис. 10.10 расстояние между последовательными нулями постоянно.

10.2.5. Шум, сосредоточенный в конической оболочке малой ширины

Модель, приведенная на рис. 10.7, *д*, предполагает, что шумовое поле имеет однородное распределение по азимуту, но равно нулю повсюду в вертикальной плоскости, за исключением направления φ_0 . Таким образом,

$$|N(\varphi)|^2 = K\delta(\varphi - \varphi_0), \quad (10.34)$$

где $\delta(\varphi - \varphi_0)$ — δ -функция.

Такое распределение описывает коническую оболочку с углом при вершине, равным $2\varphi_0$, и весьма малой толщиной. При $\varphi_0 = 0$ эта модель ограничивает шум горизонтальной плоскостью. Если приемник установлен на оси глубоководного звукового канала (см. гл. 5), шумовые сигналы из зон конвергенции приходят из некоторой известной области углов на несколько градусов выше и ниже горизонтальной плоскости. Рассматриваемая модель шума обеспечивает приемлемое представление этой составляющей общего шумового поля.

Чтобы получить пространственную корреляционную функцию представленного поля, удобно воспользоваться сферической системой координат. Учитывая, что $\sin \psi = \cos \varphi \sin \gamma$, получаем следующее выражение для пространственной функции корреляции:

$$Q_{12}(d, \lambda) = K \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \delta(\varphi - \varphi_0) \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \varphi \sin \gamma\right) \cos \varphi d\varphi d\gamma. \quad (10.35)$$

После интегрирования

$$Q_{12}(d, \lambda) = 2K \cos \varphi_0 \int_0^{+\pi} \exp\left(j \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \varphi_0 \sin \gamma\right) d\gamma; \quad (10.36)$$

$$Q_{12}(d, \lambda) = 2\pi K \cos \varphi_0 J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \cos \varphi_0\right), \quad (10.37)$$

где J — функция Бесселя нулевого порядка первого рода. После нормирования

$$q_{12}(d, \lambda) = J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \cos \varphi_0\right). \quad (10.38)$$

На рис. 10.11 функция Бесселя нулевого порядка сравнивается с корреляционными функциями для изотропного шума и для шума с распределением вида $\sin|\varphi|$. Расстояние между приемниками, при котором корреляция равна нулю, меньше для горизонтального шумового поля, чем для любого из других распределений шумового поля.

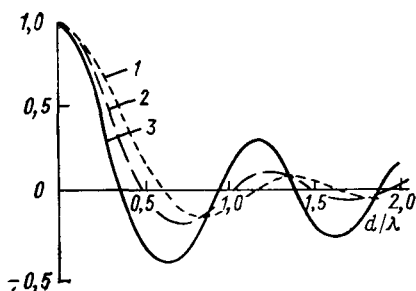


Рис 10.11 Сравнение пространственных корреляционных функций для различных моделей шума — изотропного (2), сосредоточенного в конической оболочке малой ширины (3) и генерируемого поверхностью (1)

Заметим, что уровень осцилляций корреляционной функции шума, сосредоточенного в узкой области углов, среди рассмотренных моделей шума («боковые лепестки») является наибольшим.

По мере возрастания φ_0 корреляционная функция расширяется и нулевой корреляции будет соответствовать все большее расстояние между приемниками. При $\varphi_0 = \pi/2$ коническая оболочка, определяющая распределение шумового поля, стягивается к оси z

и шумовые сигналы на обоих приемниках оказываются полностью коррелированными при любом расстоянии между приемниками (при условии, что $\tau = 0$).

10.2.6. Другие направления шумового поля

Примеры, рассматривавшиеся до сих пор, относятся к шумовым полям с главными осями, перпендикулярными к горизонтальной плоскости, содержащей приемники, причем шумовое поле в горизонтальной плоскости однородно. Из рис. 10.11 можно сделать вывод, что для этих условий пространственная корреляция в горизонтальной плоскости не очень чувствительна к угловому распределению шума в вертикальной плоскости. Вертикальные распределения от изотропного в горизонтальной плоскости до сосредоточенного в узком конусе с вертикальной осью дают функции пространственной корреляции с большим сходством.

Несложные рассуждения могли бы показать, что для приемников, расположенных на оси x (см. рис. 10.6), главные оси шумового поля можно поворачивать в любое положение в плоскости zOy без какого-либо влияния на вид пространственной корреляционной функции.

Хотя анализ произвольной ориентации оси шумового поля выходит за рамки данной главы, следует рассмотреть влияние поворота звукового поля на 90° , чтобы сориентировать его по оси x , а не по оси z . Это эквивалентно расположению приемников по оси z вместо оси x .

Примем допущение, что шумовое поле симметрично относительно оси x , т. е.

$$|\overline{N(\varphi, \theta)}|^2 = K\delta(\varphi - \varphi_1). \quad (10.39)$$

Это выражение описывает коническую оболочку вокруг оси x с поверхностью под углом ψ_1 относительно плоскости zOy . Пространственную корреляционную функцию получаем непосредственной подстановкой в уравнение (10.9):

$$Q_{12}(d, \lambda, \tau) = K \exp\left(j \frac{2\pi c \tau}{\lambda}\right) \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \delta(\psi - \psi_1) \cos \psi \exp \times \\ \times \left(j \frac{2\pi d \sin \psi}{\lambda}\right) d\psi d\theta. \quad (10.40)$$

Проинтегрировав, найдем

$$Q_{12}(d, \lambda, \tau) = 2\pi K \cos \psi_1 \exp\left(j \frac{2\pi d \sin \psi_1}{\lambda} + j \frac{2\pi c \tau}{\lambda}\right). \quad (10.41)$$

Для шума с вещественным значением нужна вещественная часть выражения (10.41), которую после нормирования запишем в виде

$$q'_{12}(d, f, \tau) = \cos\left(\frac{2\pi d \sin \psi_1}{\lambda} + \frac{2\pi c \tau}{\lambda}\right). \quad (10.42)$$

При подобной ориентации шумового поля значение τ всегда можно выбрать таким, чтобы получить любую величину корреляции между ± 1 .

Приведем еще один пример поворота шумового поля. Пусть шумовое поле с синусоидальным распределением из пп. 10.2.4 будет повернуто так, что его главная ось совпадает с осью x . Таким образом,

$$|N(\psi, \theta)|^2 = \begin{cases} K \sin \psi & \text{при } 0 \leq \psi \leq \pi/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

откуда

$$Q_{12}(d, \lambda, \tau) = K \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{+\pi/2} \sin \psi \cos \psi \exp\left[j\left(\frac{2\pi d \sin \psi}{\lambda} + \frac{2\pi c \tau}{\lambda}\right)\right] d\psi d\theta. \quad (10.43)$$

После нормирования вещественная часть соотношения (10.43)

$$q'_{12}(d, \lambda, \tau) = 2 \cos\left(\frac{2\pi c \tau}{\lambda}\right) \left[\frac{\sin(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} + \frac{\cos(2\pi d/\lambda) - 1}{(2\pi d/\lambda)^2} \right] - \\ - 2 \sin\left(\frac{2\pi c \tau}{\lambda}\right) \left[\frac{\sin(2\pi d/\lambda)}{(2\pi d/\lambda)^2} - \frac{\cos(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} \right]. \quad (10.44)$$

Эта пространственная корреляционная функция показана на рис. 10.12 при $\tau = 0$, $\tau = -d/c$ и $\tau = +d/c$. Если сигнал в виде

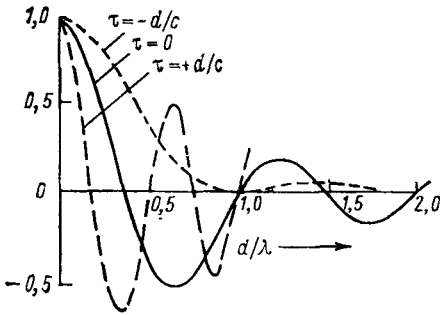


Рис. 10.12. Пространственные корреляционные функции для приемников, расположенных вдоль оси x , при $|N(\psi, \theta)|^2 = K \sin \psi$ с тремя значениями относительной электрической задержки

для этих условий приводятся к упрощенному виду:

$$\left. \begin{aligned} q'_{12}(d, f, \tau = 0) &= 2 \left[\frac{\sin(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} - \frac{\sin^2(\pi d/\lambda)}{2(\pi d/\lambda)^2} \right]; \\ q'_{12}(d, f, \tau = -d/c) &= \frac{\sin^2(\pi d/\lambda)}{(\pi d/\lambda)^2}, \\ q'_{12}(d, f, \tau = +d/c) &= 2 \left[\frac{\sin(4\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} + \frac{\cos(4\pi d/\lambda) - \cos(2\pi d/\lambda)}{(2\pi d/\lambda)^2} \right]. \end{aligned} \right\} (10.45)$$

Нули в корреляционной функции для приемников, сфазированных или повернутых в направлении минимума звукового поля, соответствуют расстояниям между приемниками, приблизительно кратным величине $\lambda/4$. При $\tau = 0$ расстояние между нулями корреляции примерно равно $\lambda/2$, а для приемников, повернутых в направлении максимума шумового поля, расстояние между нулями равно λ .

10.2.7. Пространственная корреляция в более сложных шумовых полях

Функция пространственной корреляции для шумового поля, состоящего из суммы статистически независимых составляющих, представляет собой сумму корреляционных функций для каждого из компонентов, рассматриваемых отдельно. Такой подход дает метод синтеза корреляционной функции для более сложных шумовых полей с помощью результатов, полученных для простых шумовых полей, рассмотренных ранее.

В средней полосе частот окружающее шумовое поле часто состоит из трех составляющих: шума, генерируемого поверхностью, вместе с его отражением от дна; составляющей шума в виде конусной оболочки, ориентированной в плоскости, близ-

плоской волны приходит с направления $\psi = \pi/2$, т. е. с направления, совпадающего с максимумом шумового поля, при $\tau = -d/c$ сигналы на обоих приемниках имеют одинаковую фазу. При $\tau = +d/c$ сигналы на приемниках синфазны в случае сигнала в виде плоской волны, приходящего с направления $\psi = -\pi/2$, соответствующего направлению минимума шумового поля. Нормированные пространственные корреляции

кой к горизонтальной, и являющейся следствием шумов отдаленного судоходства; небольшой изотропной составляющей, возникающей в результате различных факторов. Предполагая, что все составляющие однородны в горизонтальной плоскости, примем угловое распределение шума в вертикальной плоскости в виде

$$\overline{|N(\varphi)|^2} = \begin{cases} K_0 + K_1 \sin|\varphi| & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi/2; \\ K_0 + L_b K_1 \sin|\varphi| + K_2 \delta(\varphi - \varphi_0) & \text{при } \varphi < 0. \end{cases}$$

Это распределение показано на рис. 10.13 с учетом допущения, что интенсивность шума каждой из трех составляющих — конусной, изотропной и отраженной от дна — на 10 дБ ниже интенсивности шума, генерируемого поверхностью, в той части, где он распространяется по прямой.

При $\tau = 0$ пространственная корреляционная функция в горизонтальной плоскости для этой совокупности нескольких источников шума

$$Q_{12}(d, \lambda) = 2\pi K_1 (1 + L_b) \frac{J_1(2\pi d/\lambda)}{2\pi d/\lambda} - 4\pi K_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{2d}{\lambda}\right) + 2\pi K_2 \cos \varphi_0 J_0\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \cos \varphi_0\right). \quad (10.46)$$

Когда в этом шумовом поле преобладает составляющая, генерируемая поверхностью моря, как в примере, приведенном на рис. 10.13, основное влияние других составляющих заключается в некотором изменении положения нулей в совокупной корреляционной функции.

10.3. Использование пространственной корреляционной функции для анализа шумов системы

Ранее было сделано допущение, что сигнал фонового шума принимается точечными приемниками, находящимися в дискретных точках пространства. Для удобства будем рассматривать точечный приемник как протяженный с распределением чув-

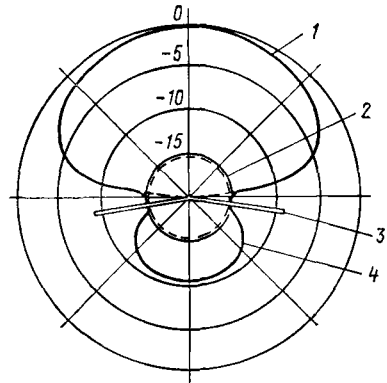


Рис. 10.13. Угловое распределение в вертикальной плоскости для шума, генерируемого поверхностью, изотропного шума и шума, сосредоточенного в конической оболочке малой ширины:

1 — шум поверхности $10 \lg \sin \varphi$; 2 — изотропная составляющая шума $K_0 = 0,025$; 3 — коническая составляющая шума $K_2 = 0,15$; 4 — шум поверхности $10 \lg 0,1 \sin \varphi$, отраженный дном

ствительности в пространстве в виде импульса (δ -функция). Таким образом, соответствующее выражение сигнала, принимаемого точечным приемником, расположенным на оси x , следует записать в виде

$$n(x_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t) \delta(x - x_1) dx, \quad (10.47)$$

где $n(x, t)$ — шумовой сигнал на единицу длины вдоль оси x ; $\delta(x - x_1)$ — распределение чувствительности в пространстве для приемника, установленного в точке $x = x_1$.

Рассмотрим теперь приемник с непрерывной протяженностью от $-L/2$ до $+L/2$ по оси x . Пространственное распределение чувствительности «линейного приемника» можно описать через пространственную прямоугольную функцию. Нормируем распределение, чтобы площадь его была равна единице, с тем чтобы выходной сигнал от входного сигнала в виде плоской волны, падающей нормально к оси x , не зависел от длины приемника. Таким образом, определим пространственную характеристику приемника

$$g(x) = L^{-1} \text{rect}(x/L), \quad (10.48)$$

откуда получим выражение для выходного сигнала в присутствии окружающего шумового поля:

$$n_0(t) = L^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t) \text{rect}(x/L) dx. \quad (10.49)$$

Поскольку шумовое поле предполагается стационарным во времени, среднеквадратичное значение $n_0(t)$ не зависит от времени и можно записать

$$E[|n_0|^2] = \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{x}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{x'}{L}\right) E[n(x)n^*(x')] dx dx'. \quad (10.50)$$

Шумовое поле также предполагается стационарным в пространстве, так что математическое ожидание подынтегрального выражения (10.50) будет лишь функцией различия в положении. Обозначив $x - x' = \Delta$, запишем

$$E[n(x)n^*(x')] = R_n(x - x') = R_n(\Delta). \quad (10.51)$$

Подставив (10.51) в выражение (10.50), получим

$$E[|n_0|^2] = \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{x}{L}\right) \text{rect}\left(\frac{x - \Delta}{L}\right) R_n(\Delta) dx d\Delta. \quad (10.52)$$

Теперь, интегрируя по x , найдем

$$E [|n_0|^2] = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|\Delta|}{L} \right) R_n(\Delta) d\Delta. \quad (10.53)$$

Треугольная весовая функция внутри интеграла в выражении (10.53) представляет собой автокорреляционную функцию распределения чувствительности $g(x)$ линейного приемника. Поэтому в общем случае для приемника, распределенного по оси x , среднеквадратичное значение шума на выходе

$$E [|n_0|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_g(\Delta) R_n(\Delta) d\Delta, \quad (10.54)$$

где $R_g(\Delta) = g(\Delta) \otimes g^*(-\Delta)$.

Пусть, например, шумовое поле будет изотропным со взаимно спектральной плотностью (или пространственно-корреляционной функцией) при фиксированной частоте при длине волны λ , определяемой выражением

$$Q_n(\Delta, \lambda) = 4\pi K \operatorname{sinc}(2\Delta/\lambda).$$

Среднеквадратичное значение сигнала на выходе приемника при условии, что приемник имеет прямоугольное распределение чувствительности,

$$\begin{aligned} E [|n_0(\lambda)|^2] &= \frac{4\pi K}{L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|\Delta|}{L} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{2\Delta}{\lambda} \right) d\Delta = \\ &= \frac{8\pi K}{L} \left[\int_0^L \frac{\sin(2\pi\Delta/\lambda)}{2\pi\Delta/\lambda} d\Delta - \frac{\lambda}{2\pi L} \int_0^L \operatorname{si} \left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda} \right) d\Delta \right] = \\ &= 8\pi K \left\{ \frac{\lambda}{2\pi L} \operatorname{si} \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) + \frac{\lambda}{4\pi^2 L^2} \left[\cos \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (10.55) \end{aligned}$$

где $\operatorname{si}(\cdot)$ — интегральный синус, равный

$$\operatorname{si}(u) = \int_0^u \frac{\sin x}{x} dx.$$

Функция, описывающая интегральный синус, приводится в табличной форме в большинстве справочников по математическим функциям [9].

Легко проверить, что при $L \ll \lambda$ выражение (10.55) сводится к выражению, получаемому для точечного приемника, г. е.

$$E [|n_0(\lambda)|^2] = 4\pi K. \quad (10.56)$$

При $L \gg \lambda$

$$E [|n_0(\lambda)|^2] = 4\pi K [\lambda/(2L)]. \quad (10.57)$$

Из соотношения (10.57) следует, что при фиксированном значении L шумовой сигнал на выходе, связанный с реакцией на постоянную плоскую волну, уменьшается с уменьшением длины волны (см. гл. 11).

Среднеквадратичное значение выходного сигнала в конечной полосе частот найдем с помощью интегрирования выражения (10.55) по необходимой частотной полосе. Таким образом, при $f = c/\lambda$ и $\beta = f_2 - f_1$

$$\begin{aligned} E[|n_0(\beta)|^2] &= \int_{f_1}^{f_2} E[|n_0(f)|^2] df = \int_{f_1}^{f_2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} R_g(\Delta) Q_n(\Delta, f) d\Delta \right] df = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_g(\Delta) \left[\int_{f_1}^{f_2} Q_n(\Delta, f) df \right] d\Delta. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Если от f_2 до f_1 включен весь частотный диапазон, занимаемый окружающим шумом в океане, то внутренний интеграл в выражении (10.58) становится равным $R_n(\Delta)$ и выражение (10.58) сводится к выражению (10.54).

Задачи

10.1. Пользуясь уровнями окружающего шума, приведенными на рис. 10.4 для интенсивного судоходства, и приняв состояние моря 3 балла, рассчитайте приближенные уровни шумов в полосах частот от 10 до 100, от 100 до 1000 и от 1000 до 10 000 Гц.

10.2. Уровень интенсивности широкополосного шума иногда дают применительно к ширине полосы, равной $1/3$ октавы, а не для полос шириной 1 Гц. Ширина полосы $1/3$ октавы равна $0,23f_g$, где f_g — геометрическая средняя частота полосы. Приняв уровни спектра шумов в 1-герцевых полосах на частотах 100, 1000 и 10 000 Гц равными 80 и 50 дБ/мкПа, преобразуйте эти уровни в $1/3$ -октавные полосовые и постройте график получаемого в результате $1/3$ -октавного спектра.

10.3. Предположим, что угловая интенсивность шума

$$|N(\varphi, \gamma)|^2 = \begin{cases} 4\pi I_0 \sin \varphi & \text{при } 0 < \varphi \leq \pi/2; \\ 0 & \text{при } \varphi < 0, \end{cases}$$

где φ и γ — углы в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Рассчитайте интенсивность шума, измеряемую всенаправленным приемником.

10.4. Линейный гидрофон длиной L расположен по оси x в шумовом поле с угловой характеристикой в виде конической оболочки, определяемой выражением (10.39). Выведите выражение для среднеквадратичного значения выходного сигнала линейного гидрофона при воздействии на него этого шумового поля.

Список литературы

1. Wenz G. M. Acoustic Ambient Noise in the Ocean: Spectra and Sources. Acoust. Soc. Am., Vol. 34 No. 12. P. 1936—1956 (Dec 1962).
2. Urlick R. J. Principles of Underwater Sound for Engineers. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1975, Chap. 7.

- 3 *Knudsen V. O., Alford R. S., Emling J. W.* Underwater Ambient Noise. *J. Mar. Res.*, Vol. 7. P. 410 (1948).
- 4 *Meller R. H.* Thermal Noise Limit in the Detection of Underwater Acoustic Signals. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 24. P. 478 (1952).
- 5 *Hodgkiss W. S., Anderson V. C.* Detection of Sinusoids in Ocean Acoustic Background Noise. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 67, No. 1. P. 214 (Jan. 1980)
- 6 *Anderson V. S.* Nonstationary and Nonuniform Oceanic Background in a High Gain Acoustic Array Marine Physical Laboratory of Scripps Institute of Oceanography, MPL-U-80/78, Jan 1979.
- 7 *Gron B. F., Sherman C. H.* Spatial-Correlation Functions for Various Noise Models. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 34, P. 1732 (1962).
- 8 *Cox H.* Spatial Correlation in Arbitrary Noise Fields with Application to Ambient Sea Noise. *J. ACOUST. Soc. Am.*, Vol. 54, No. 5. P. 1289 (1973).
- 9 *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. Natl. Bur. Stand., Appl Math. Ser. 55. Washington, D. C.: U. S. Government Printing Office, 1964, Chap. 5.

Глава 11.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ. ФОРМИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН

Проектирование средств обработки гидроакустических сигналов начинается с разработки антенной системы. Кроме преобразования акустического сигнала в электрический на антенну возлагается решение следующих задач:

- снижение влияния окружающего шума, на фоне которого принимается плосковолновый сигнал;
- обеспечение углового разрешения плосковолновых сигналов, приходящих с различных направлений;
- обеспечение измерения направления прихода плосковолновых сигналов.

Заменяя слова «плосковолновый сигнал» на «синусоидальный сигнал», «окружающий шум» на «широкополосный шум» и «направление» на «частоту», убедимся, что эти задачи аналогичны задачам фильтра в частотной области, используемого для обработки узкополосных сигналов во временной области: узкополосные фильтры уменьшают шум, на фоне которого должен приниматься синусоидальный сигнал, позволяют получить разрешение сигналов разной частоты и помогают измерять частоту отдельных синусоидальных сигналов. По аналогии антенная система выполняет функцию пространственного фильтра, предназначенного для улучшения параметров, характеризующих обнаружение, разрешение и измерение направления прихода плосковолновых сигналов.

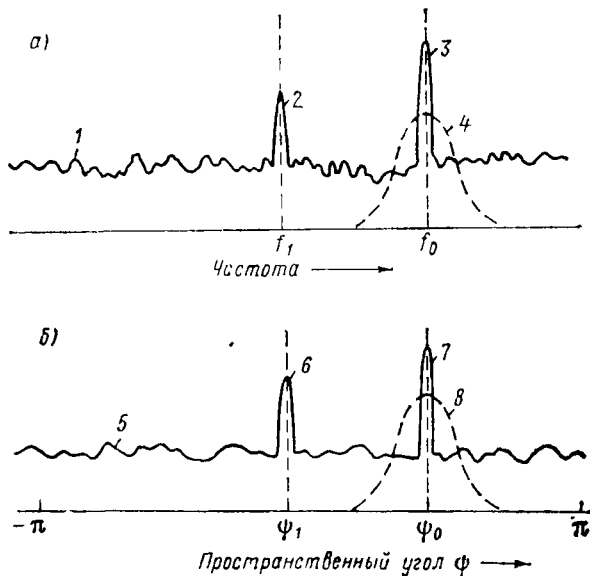


Рис. 11.1. Сравнение временных и пространственных функций фильтра: а — спектральная плотность мощности синусоидальных сигналов в широкополосном шуме; б — угловая плотность акустического плоскостолнового сигнала в окружающем шуме:

1 — спектр шума в широкой полосе; 2 — синусоидальный сигнал на частоте f_1 ; 3 — синусоидальный сигнал на частоте f_0 ; 4 — характеристика узкополосного фильтра на частоте f_0 ; 5 — угловая плотность окружающего шума, 6 — плоскостолновой сигнал с направления ψ_1 ; 7 — плоскостолновой сигнал с направления ψ_0 ; 8 — узкополосный пространственный фильтр в направлении ψ_0

Аналогию между представлением в частотной области узкополосного сигнала в широкополосном шуме и плоскостолнового сигнала в окружающем шуме подтверждает рис. 11.1, где для простоты график представляет собой угловое распределение акустической энергии только в одной плоскости.

Рассмотрим отношение сигнал/шум по мощности на выходе либо временного, либо пространственного фильтра. Для временного фильтра (рис. 11.1, а): $\alpha^2 \delta(f - f_0)$ — спектральная плотность мощности сигнала $|N(f)|^2$ — спектральная плотность мощности шума; $|H(f)|^2$ — характеристика фильтра по мощности.

Мощность сигнала и шума на выходе фильтра

$$P_s = \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) |H(f)|^2 df = \alpha^2 |H(f_0)|^2;$$

$$P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |N(f)|^2 |H(f)|^2 df,$$

откуда

$$\text{сигнал/шум} = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\alpha^2 |H(f_0)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |N(f)|^2 |H(f)|^2 df}.$$

Пусть плотность спектра шума N_0 будет величиной постоянной, а характеристика фильтра представляет собой прямоугольную функцию с центральной частотой f_0 , т. е.

$$|H(f)|^2 = \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{\beta}\right); \quad |H(f_0)|^2 = 1,$$

тогда

$$\text{сигнал/шум} = \frac{\alpha^2}{N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}[(f-f_0)/\beta] df} = \frac{\alpha^2}{\beta N_0}. \quad (11.1)$$

Заметим, что в выражении (11.1) отношение сигнал/шум обратно пропорционально ширине характеристики фильтра, определяемой коэффициентом β . Это в общем справедливо при условии, что полный спектр сигнала узок по сравнению с шириной полосы фильтра. Из рис. 11.1 также видно, что способность оценивать частоту сигнала и разрешать сигналы, близкие по частоте, обратно пропорциональна ширине полосы фильтра.

Аналогично определим отношение сигнал/шум на выходе пространственного фильтра. Пусть для двумерных сигнала и шума, показанных на рис. 11.1, $\alpha^2 \delta(\psi - \psi_0)$ — плотность угловой интенсивности сигнала; $|N(\psi)|^2$ — плотность угловой интенсивности шума; $|G(\psi)|^2$ — угловая характеристика пространственного фильтра по мощности.

На выходе

$$\text{сигнал/шум} = \frac{\alpha^2 |G(\psi_0)|^2}{\int_{-\pi}^{+\pi} |N(\psi)|^2 |G(\psi)|^2 d\psi}. \quad (11.2)$$

При постоянной угловой плотности шумового поля K можно записать

$$\text{сигнал/шум} = \alpha^2 / (K \psi_B), \quad (11.3)$$

где ψ_B — ширина характеристики пространственного фильтра, равная

$$\psi_B = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{|G(\psi)|^2}{|G_0(\psi_0)|^2} d\psi.$$

Как и для временного фильтра, отношение сигнал/шум обратно пропорционально ширине полосы фильтра.

Среднее значение мощности на выходе пространственного фильтра

$$P_0(\psi_k) = \int_{-\pi}^{+\pi} [|N(\psi)|^2 + |s(\psi)|^2] |G(\psi - \psi_k)|^2 d\psi, \quad (11.4)$$

где $|s(\psi)|^2$ — угловое распределение плотности плосковолновых сигналов. Выражение (11.4) представляет собой свертку в угловой области объединенной угловой плотности сигнала и шума с характеристикой пространственного фильтра по мощности. Результат показан на рис. 11.2 для полей шума и сигнала, приведенных на рис. 11.1.

Из рис. 11.2 видно, что способность обеспечивать разрешение близко находящихся целей обратно пропорциональна ширине полосы пространственного фильтра. Кроме того, точность оценки направления на цель улучшается по мере уменьшения ψ_B . Таким образом, характеристика пространственного фильтра с точки зрения выполнения им тех функций, для которых он предназначен, улучшается при уменьшении ширины его характеристики в угловой области. Хотя другие системные соображения могут в известной мере изменить этот вывод, уменьшение ψ_B часто является основной задачей при проектировании пространственного фильтра.

Обычно о качестве пространственного фильтра судят по фактору, который характеризует уменьшение мощности шума по сравнению с устройством, не имеющим направленных свойств (всенаправленная антенна). Было показано, что при двумерной модели изотропного шума этот фактор обратно пропорционален угловой ширине полосы фильтра, где угловая ширина определяется как интеграл нормированной характеристики фильтра по мощности.

Рассмотрим теперь трехмерное шумовое поле и пространственный фильтр со следующими параметрами: $|N(\psi, \theta)|^2$ — угловое распределение интенсивности шумового поля; $b(\psi, \theta) = |G(\psi, \theta)|^2 / |G_{\max}|^2$ — нормированная характеристика пространственного фильтра по мощности.

Для обнаружения плосковолнового сигнала усиление антенны определяется как отношение мощности на выходе всенаправленного устройства к

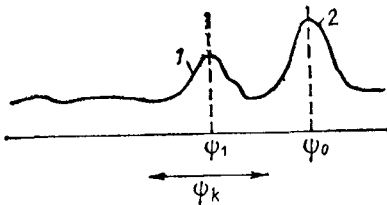


Рис. 11.2. Выходной сигнал пространственного фильтра при изотропном шуме и двух плосковолновых сигналах:

1 — плосковолновой сигнал с направления ψ_1 ;
2 — плосковолновой сигнал с направления ψ_0

мощности шума на выходе пространственного фильтра. Выраженное в децибелах усиление антенны¹ $УА$ равно

$$УА = 10 \lg \left[\frac{\int_{4\pi} |N(\psi, \theta)|^2 d\Omega}{\int_{4\pi} |N(\psi, \theta)|^2 b(\psi, \theta) d\Omega} \right]. \quad (11.5)$$

Если шумовое поле изотропно, этот коэффициент называется коэффициентом направленности концентрации² КК и выражение (11.5) упрощается:

$$КК = 10 \lg \left[\frac{4\pi}{\int_{4\pi} b(\psi, \theta) d\Omega} \right]. \quad (11.6)$$

Интеграл в знаменателе выражения (11.6) можно рассматривать как измеренную в стерадианах «ширину» или протяженность трехмерной характеристики пространственного фильтра.

11.1. Одномерные пространственные фильтры

Одномерный линейный гидрофон удовлетворяет основному требованию к пространственному фильтру. Он обеспечивает в известной мере избирательность по направлению и улучшение отношения сигнал/шум относительно всенаправленного приемника. В целях упрощения математического аппарата ограничим подробное рассмотрение пространственных фильтров в основном одномерным случаем. Многомерные устройства кратко описаны в п. 11.8.

11.1.1. Угловая характеристика линейного гидрофона

Рассмотрим угловую характеристику линейного гидрофона относительно плосковолнового сигнала в функции от направления прихода ψ, θ . Пусть линейный гидрофон расположен вдоль оси x , так что угол ψ представляет собой угол между направлением прихода сигнала и плоскостью, перпендикулярной к оси линейного гидрофона. При таком выборе системы координат сигнал, принимаемый в любой точке гидрофона, будет лишь функцией ψ и не зависит от θ .

Обратимся к рис. 11.3. Пусть сигнал в начале координат $s(t)$. Сигнал в любой другой точке на оси x запаздывает или опере-

¹ Эта величина называется также помехоустойчивостью антенны в поле помех с заданным пространственным спектром $|N(\psi, \theta)|$. *Ред.*

² Эту величину называют также коэффициентом направленного действия.

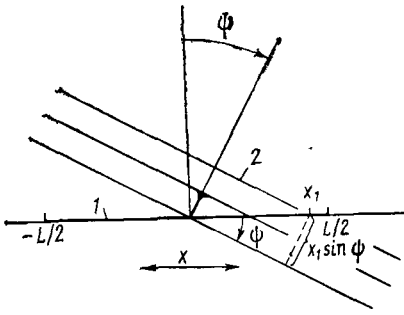


Рис. 11.3. Плосковолновой сигнал, падающий на линейный гидрофон: 1 — линейный гидрофон; 2 — волновой фронт плосковолнового сигнала

рофона под воздействием плосковолнового сигнала, приходящего с направления ψ ,

$$s_0(t, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) s(t + x \sin \psi/c) dx. \quad (11.7)$$

Характеристику гидрофона $g(x)$ обычно называют *апертурной функцией* (или амплитудно-фазовым распределением чувствительности).

Допустим, функция $s(t)$ имеет преобразование Фурье в частотной области в виде $S(f)$, так что

$$s\left(t + \frac{x \sin \psi}{c}\right) \leftrightarrow S(f) \exp\left(\frac{j2\pi f x \sin \psi}{c}\right).$$

Выходной сигнал линейного гидрофона можно теперь выразить в виде

$$s_0(t, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \exp\left(\frac{j2\pi f x \sin \psi}{c} + j2\pi f t\right) df \right] g(x) dx.$$

Преобразуя это выражение, получим

$$s_0(t, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \exp\left(\frac{j2\pi f x \sin \psi}{c}\right) dx \right] \exp(j2\pi f t) df. \quad (11.8)$$

Внутренний интеграл в выражении (11.8) является преобразованием Фурье апертурной функции $g(x)$ из области x в область, представляемую переменной $u = (\sin \psi)/\lambda$, где $\lambda = c/f$. Это преобразование апертурной функции называют *характеристикой направленности*, определяемой выражением

$$G(u) = G(f, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \exp(j2\pi x u) dx. \quad (11.9)$$

жает сигнал в начале координат на время $x \sin \psi/c$, т. е.

$$s(t, x) = s(t + x \sin \psi/c).$$

Сигнал на выходе линейного гидрофона получим интегрированием произведения отклика гидрофона и сигнала по всей его длине. Таким образом, если $g(x) dx$ представляет собой отклик гидрофона на единичный сигнал в точке x , суммарный выходной сигнал, появляющийся на выходе гидрофона под воздействием плосковолнового сигнала, приходящего с направления ψ ,

Подставляя выражение (11.9) в (11.8), найдем

$$s_0(t, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) G(f, \psi) \exp(j2\pi ft) df. \quad (11.10)$$

Пусть падающая плоская волна представляет собой комплексную синусоиду единичной амплитуды. Тогда

$$\left. \begin{aligned} s(t) &= \exp(j2\pi f_0 t) \leftrightarrow S(f) = \delta(f - f_0); \\ s_0(t, \psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) G(f, \psi) \exp(j2\pi ft) df = \\ &= G(f_0, \psi) \exp(j2\pi f_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Функция $G(f_0, \psi)$ представляет собой характеристику направленности, определяющую форму характеристики пространственного фильтра, которую формирует линейный гидрофон на частоте f_0 .

Пусть $g(x)$ будет постоянной по длине гидрофона L и равна нулю в других точках. В нормированном виде

$$g(x) = L^{-1} \text{rect}(x/L).$$

Соответствующая характеристика направленности

$$G(u) = L^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(x/L) \exp(j2\pi xu) dx = \text{sinc}(uL). \quad (11.12)$$

Прямоугольная апертурная функция и получаемая в результате характеристика направленности показаны на рис. 11.4. Заметим, что значение переменной u ограничено интервалом $\pm 1/\lambda$ при изменении $\sin \psi$ от -1 до $+1$. При изменении ψ в пределах $[0, 2\pi]$ диаграмма направленности повторяет форму, приведенную на рис. 11.4, так что $G(\psi) = G(\pi - \psi)$. Угловая характеристика, следовательно, неоднозначна относительно угла ψ и устройство

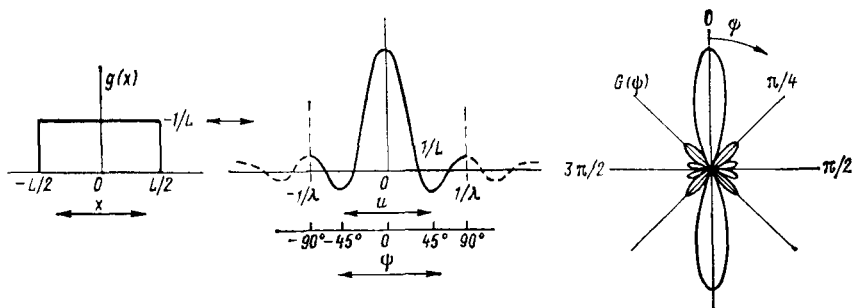


Рис. 11.4. Прямоугольная апертурная функция и результирующая характеристика направленности

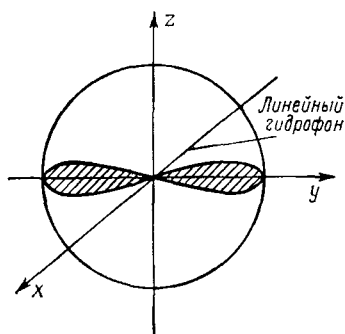


Рис. 11.5. Трехмерная характеристика чувствительности линейного гидрофона, ориентированного по оси x

Угловая ширина главного лепестка определяется угловым расстоянием от максимума характеристики до первого нуля. Из рис. 11.4 видно, что первый нуль имеет место при $u = 1/L$. Преобразуя эту величину в угловые значения, получаем

$$u = 1/L = \sin \psi_B / \lambda; \quad \psi_B = \arcsin (\lambda/L). \quad (11.13)$$

При $L \gg \lambda$

$$\psi_B \approx \lambda/L. \quad (11.14)$$

Ширина главного лепестка, или ширина луча, определяемая выражением (11.4), представляет собой угловую ширину функции sinc между точками примерно на уровне 4 дБ ниже максимума характеристики. Чаще всего используемая ширина луча на уровне 3 дБ (в град)

$$\psi_{3\text{дБ}} \approx 50\lambda/L. \quad (11.15)$$

Ширина главного лепестка представляет собой величину углового разрешения, обеспечиваемого линейным гидрофоном для сигналов, разнесенных в направлении ψ . Разрешающая способность, очевидно, улучшается при увеличении L или уменьшении λ .

11.1.2. Коэффициент концентрации линейного гидрофона

Определение коэффициента концентрации устройства требует расчета мощности шума на выходе при наличии изотропного шумового поля. Это можно осуществить, используя нормированную по мощности характеристику направленности в сочетании с функцией угловой плотности шума, или, что эквивалентно, апертурной функции устройства вместе с функцией пространственной корреляции шума.

равным образом реагирует на цели с направления ψ и с направления $\pi - \psi$, будучи одновременно независимым от пространственного угла θ .

Трехмерный график характеристики направленности линейного гидрофона приведен на рис. 11.5. Для упрощения на рисунке показан лишь центральный лепесток характеристики направленности. Характеристика приближенно имеет форму диска в плоскости zy , образованного вращением главного лепестка вокруг оси x .

Для линейного гидрофона нормированную по мощности характеристику направленности можно записать

$$b(\psi, \theta, \lambda) = \text{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) \left[\frac{\sin^2(\pi L \sin \psi / \lambda)}{(\pi L \sin \psi / \lambda)^2} \right], \quad (11.16)$$

откуда знаменатель приобретает вид

$$\int_{4\pi} b(\psi, \theta) d\Omega = \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\sin^2(\pi L \sin \psi / \lambda)}{(\pi L \sin \psi / \lambda)^2} \cos \psi d\psi d\theta, \quad (11.17)$$

или, полагая $u = (\sin \psi) / \lambda$ и интегрируя по θ , получаем

$$\int_{4\pi} b(\psi, \theta) d\Omega = 2\pi\lambda \int_{-1/\lambda}^{+1/\lambda} \text{sinc}^2(Lu) du. \quad (11.18)$$

С помощью теоремы Парсеваля можно показать, что этот результат эквивалентен результату, полученному с использованием апертурной функции. Таким образом, для изотропного шумового поля одночастотная корреляционная функция или взаимно спектральная плотность и ее преобразование в области u имеют вид

$$Q_n(x, \lambda) = 4\pi \text{sinc}(2x/\lambda) \leftrightarrow 2\pi\lambda \text{rect}(u\lambda/2) = |N(u)|^2, \quad (11.19)$$

где плотность шума в области (ψ, θ) приведена к единице. Для линейного гидрофона с прямоугольной апертурной функцией

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= L^{-1} \text{rect}(x/L) \leftrightarrow \text{sinc}(uL); \\ R_g(x) &= L^{-1} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{rect}(x/2L) \leftrightarrow \text{sinc}^2(uL) = |G(u)|^2. \end{aligned} \right\} \quad (11.20)$$

Из уравнения (10.54) и теоремы Парсеваля найдем выходное значение мощности шума для линейного гидрофона, приведенное к одной частоте:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} R_g(x) Q_n(x, \lambda) dx = \\ &= \int_{-1/\lambda}^{+1/\lambda} |N(u)|^2 |G(u)|^2 du = \\ &= 2\pi\lambda \int_{-1/\lambda}^{+1/\lambda} \text{rect}(u\lambda/2) \text{sinc}^2(uL) du = \\ &= \frac{4\pi}{L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \text{sinc}\left(\frac{2x}{\lambda}\right) dx = \\ &= 2\pi\lambda \int_{-1/\lambda}^{+1/\lambda} \text{sinc}^2(uL) du, \quad (11.21) \end{aligned}$$

что идентично выражению (11.18).

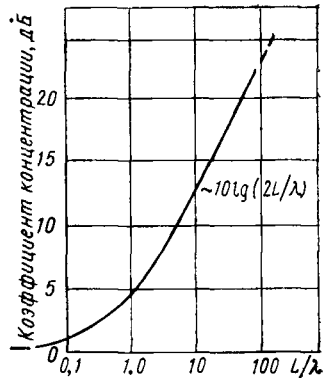


Рис. 11.6. Коэффициент концентрации непрерывного линейного гидрофона

Независимо от того, в какой области x или u осуществляется интегрирование, результат определяется выражением (10.55). Пользуясь этим результатом, находим, что коэффициент концентрации KK линейного гидрофона при длине волны λ

$$KK = 10 \lg \left(\frac{2L}{\lambda} \left\{ \frac{2}{\pi} \operatorname{Si} \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) + \frac{\lambda}{\pi^2 L} \left[\cos \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right) - 1 \right] \right\}^{-1} \right). \quad (11.22)$$

Зависимость коэффициента концентрации от отношения L/λ показана на рис. 11.6. Для $L \gg \lambda$

$$KK = 10 \lg (2L/\lambda). \quad (11.23)$$

Когда $L/\lambda \rightarrow 0$, то $KK \rightarrow 0$.

11.2. Дискретные пространственные антенны

Пространственные фильтры можно сформировать, используя решетки из ненаправленных гидрофонов. Простая, применяемая на практике дискретная решетка состоит из ряда гидрофонов, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Определим теперь характеристики такой линейной решетки, распространив на эту решетку результаты, полученные для непрерывного линейного гидрофона.

Рассмотрим снова апертурную функцию и характеристику направленности для непрерывного линейного гидрофона, как это показано на рис. 11.4. Хотя функция $G(u)$ имеет вещественное значение только в пределах $\pm 1/\lambda$ в области u , все же можно представить эту функцию вне этих пределов в формальном математическом смысле (пунктир на рис. 11.4, в для $|u| > 1/\lambda$).

Апертурную функцию дискретной линейной антенны можно рассматривать как дискретный вариант соответствующей непрерывной апертурной функции, при этом выборки состоят из пространственных импульсных функций. Для гидрофонов, расположенных на равных расстояниях друг от друга, используем гребенчатую функцию выборки, определенную в п. 6.7. Таким образом, дискретная форма прямоугольной функции апертурны

$$g(x) = d \operatorname{comb}_d \left[\frac{1}{L} \operatorname{rect} \left(\frac{x}{L} \right) \right] = \frac{d}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nd) \operatorname{rect} \left(\frac{x}{L} \right). \quad (11.24)$$

Для удобства пусть $L = Nd$ при $N = 2M + 1$. В результате получаем общее число N гидрофонов в интервале L , один из которых расположен в точке, совпадающей с началом координат, и M эквидистантно расположенных элементов с каждой стороны начала координат. Дискретизация в одной области приводит к тому, что преобразование становится периодически повторяю-

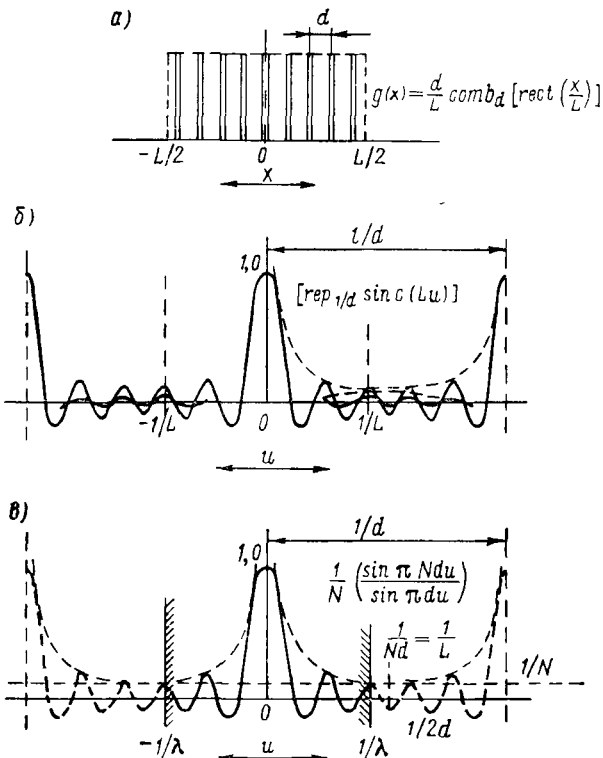


Рис. 11.7. Дискретная прямоугольная апертурная функция и результирующая апертурная функция

щимся в другой области. Запишем в соответствии с правилом 13 из табл. 6.1

$$g(x) = d \text{comb}_d [1/L \text{rect}(x/L)] \leftrightarrow [\text{rep}_{1/d} \text{sinc}(Lu)] = G(u). \quad (11.25)$$

Функция sinc при непрерывной апертурной функции повторяется с интервалом $1/d$ в области u . Дискретная апертурная функция и получаемая в результате характеристика направленности показаны на рис. 11.7. Дискретная апертурная функция (рис. 11.7, а) нормируется к единичной площади, в результате чего максимум характеристики равен единице.

На рис. 11.7, б приведены отдельные функции вида $\text{sinc}(x)$, содержащиеся в периодически повторяющейся характеристике. Вследствие бесконечной протяженности каждой функции $\text{sinc}(x)$ в промежутке $[-1/\lambda, +1/\lambda]$ содержатся вклады от «хвостов» бесконечного числа функции $\text{sinc}(x)$, сосредоточенных вне данного интервала, что приводит к изменению получаемой в результате реальной характеристики направленности в этой области

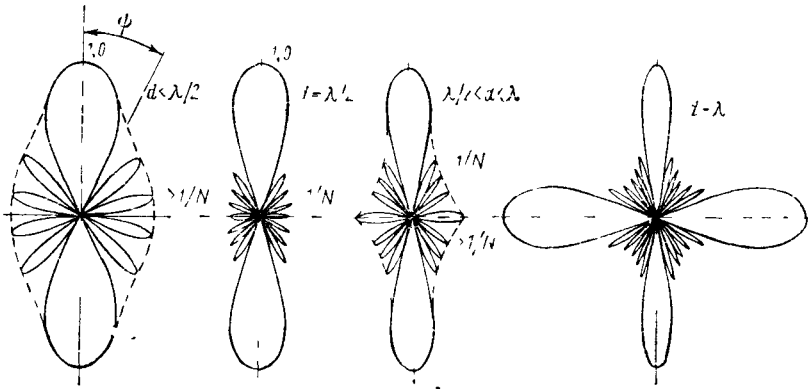


Рис. 11.8 Характеристика направленности дискретной линейной антенны при различных расстояниях между элементами относительно длины волны

в полной аналогии с влиянием погрешностей, которые встречаются при дискретизации сигналов во временной области.

Как показано в п. 6.7, преобразование дискретной апертурной функции можно выразить также и в конечном виде. Таким образом,

$$[\text{rep}_{1/d} \text{sinc}(Lu)] = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin(\pi N du)}{\sin \pi du} \right]. \quad (11.26)$$

Это выражение графически показано на рис. 11.7, оно дает полную результирующую характеристику направленности в интервале $(-1/\lambda, +1/\lambda)$, включая эффекты, вызываемые дискретным характером апертурной функции.

Заметим, что на рис. 11.7, ψ ширина главного лепестка, измеряемая положением первого перехода через нуль, идентична ширине главного лепестка для непрерывной апертурной функции, т. е. $G(u) = 0$ и $u = 1/Nd = 1/L$. Следовательно,

$$\psi_B = \arcsin [\lambda/(Nd)].$$

Огибающая боковых лепестков, выраженная в аналитическом виде, имеет минимальное значение $1/N$ при $u = 1/2d$. Однако если $d < \lambda/2$, реальная функция характеристики направленности будет ограничена областью, в которой $u < 1/2d$, а минимальный боковой лепесток будет превосходить $1/N$. Если $d > \lambda/2$, минимальный уровень боковых лепестков в области реальной характеристики будет вплоть до значений $u = 1/\lambda$, причем он снова начинает увеличиваться по мере возрастания u . Если $d = \lambda$, первый лепесток повторяется при значении $u = 1/d$ и находится, следовательно, в области реальной характеристики. В результате при $\psi = \pm\pi/2$, а также при $\psi = 0$ и π боковые лепестки равны основному. Возникновение дополнительных ле-

пестков или *дополнительных максимумов* ухудшает способность пространственного фильтра однозначно измерять углы и обеспечивать разрешение при наличии множества целей. Если расстояние между элементами увеличить еще больше, проблема усложняется возникновением новых дополнительных максимумов, переходящих в область реальной характеристики направленности.

На рис. 11.8 реальная характеристика дискретной линейной антенны показана в полярных координатах для нескольких значений отношения d/λ . При неизменном расстоянии между элементами верхней полезной рабочей частоты для дискретной антенны из ненаправленных элементов обычно считают частоту, для которой $d = \lambda/2$. Хотя удовлетворительные характеристики можно получить и на несколько более высоких частотах, очевидно, что характеристики антенны как пространственного фильтра будут существенно хуже, если расстояние между элементами будет значительно больше, чем $\lambda/2$.

11.3. Антенны с неоднородным распределением

До сих пор предполагалось, что апертурная функция постоянна по всей активной площади и равна нулю в остальных точках. В случае линейной апертуры такое предположение дает в результате характеристику направленности вида $\sin x/x$ с характеристиками боковых лепестков, типичными для таких форм характеристики направленности. Для обнаружения одиночного плосковолнового сигнала в изотропном шуме апертурная функция с постоянной амплитудой, или однородная апертурная функция, будет приблизительно оптимальной с точки зрения достижения максимального коэффициента концентрации.

В присутствии interfering сигналов на углах вне основного лепестка характеристики направленности или при не изотропном шумовом поле часто желательно уменьшить уровни боковых лепестков ниже уровней, которые можно получить при равномерной апертурной функции. Этого можно достичь изменением формы апертурной функции. Этот процесс часто называют

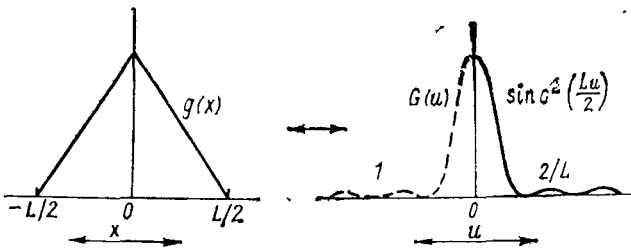


Рис 11.9 Треугольная апертурная функция и результирующая характеристика направленности.

1 — первый боковой лепесток — 26 дБ

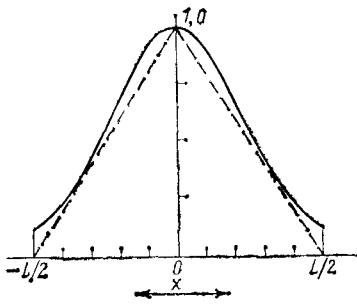


Рис. 11.10. Апертурная функция, полученная с помощью весовых коэффициентов Тейлора, для уровня боковых лепестков -40 дБ и расширения основного лепестка на 25%

лепестка (сравните с боковым лепестком -13 дБ, получающимся при однородной апертуре). Отметим, однако, что при той же общей длине апертуры L ширина луча, измеряемая положением первого нуля характеристики направленности, в два раза больше, чем при однородной апертуре. Обычно практикуется выбор той функции апертуры, при которой боковые лепестки уменьшаются до приемлемого уровня при минимальном расширении главного лепестка. Вообще же, некоторое расширение главного лепестка неизбежно, при этом коэффициент концентрации несколько уменьшается, и это та цена, которую приходится платить за уменьшение боковых лепестков.

Существуют методы выбора апертурных функций, обеспечивающие требуемый низкий уровень боковых лепестков при минимально возможном расширении главного лепестка. Тейлоровский метод апертурных весовых коэффициентов [2] обеспечивает почти одинаковые уровни боковых лепестков при очень умеренном расширении главного лепестка. На рис. 11.10 приведен пример формы апертуры, полученной с помощью весовых коэффициентов Тейлора, для уровня боковых лепестков -40 дБ. В этом случае получаемая в результате ширина главного лепестка только в 1.25 раза превышает ширину лепестка при одинаковых весовых коэффициентах. Отметим, что форма характеристики, полученная с помощью распределения Тейлора для достижения такого результата, не очень существенно отличается от треугольной формы, приведенной на рис. 11.9. Это наводит на мысль, что действительная апертурная функция должна точно соответствовать расчетной форме, если необходимо обеспечить прогнозируемые характеристики. И чем меньше требуемая величина боковых лепестков, тем более точным должно быть это согласование.

введением *распределения*. Возможность осуществления преобразования между апертурной функцией и характеристикой направленности обеспечивает удобный способ изучения влияния формы апертурной функции на характеристики боковых лепестков.

В качестве примера рассмотрим треугольную апертурную функцию и получающуюся в результате характеристику (рис. 11.9). Форма характеристики $(\sin x/x)^2$ и в результате первый боковой лепесток имеет величину -26 дБ относительно максимального значения главного

11.4. Управление характеристиками направленности

Рассмотренные выше операции по формированию характеристик направленности приводят к образованию характеристики направленности с главной осью чувствительности, перпендикулярной линии, образующей антенну. Перемещают характеристику направленности в других направлениях физическим изменением ориентации акустической апертуры или для антенны из дискретных элементов — с помощью электронного сканирования оси характеристики направленности. Электронное сканирование дискретной антенны наиболее удобно, поскольку оно допускает одновременное формирование нескольких приемных лучей в различных направлениях.

Воспользуемся для преобразований правилом 6 из табл. 6.1. Рассмотрим, например, апертурную функцию и соответствующую одночастотную характеристику направленности $g(x) \leftrightarrow \leftrightarrow G(u)$, тогда

$$g(x) \exp(j2\pi x u_0) \leftrightarrow \leftrightarrow G(u - u_0). \quad (11.27)$$

Умножение апертурной функции на комплексный экспоненциальный член приводит к перемещению или сдвигу характеристики направленности на величину u_0 . Для дискретной линейной антенны с эквидистантно расположенными гидрофонами выражение (11.27) принимает вид

$$\sum_n g(nd) \delta(x - nd) \exp(j2\pi nd u_0) \leftrightarrow \leftrightarrow G(u - u_0). \quad (11.28)$$

Поскольку $u_0 = (\sin \psi_0) f/c$, операция, содержащаяся в формуле (11.28), представляет собой добавление к выходу каждого гидрофона фазового сдвига, который будет линейной функцией частоты и расстояния вдоль антенны. Фазовый сдвиг, добавляемый к n -му гидрофону,

$$\varphi_n = 2\pi f n d \sin \psi_0 / c. \quad (11.29)$$

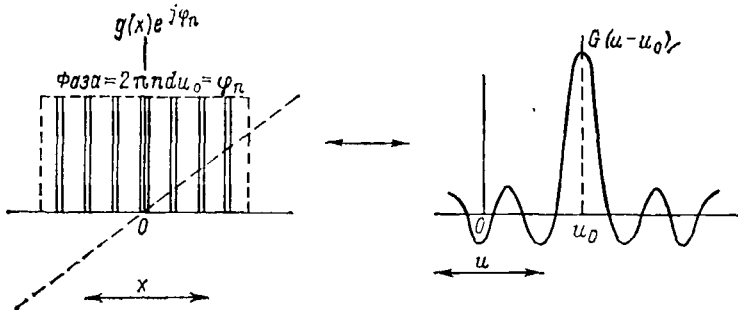


Рис. 11.11. Влияние на характеристику направленности введения линейно изменяющейся фазы в апертурную функцию

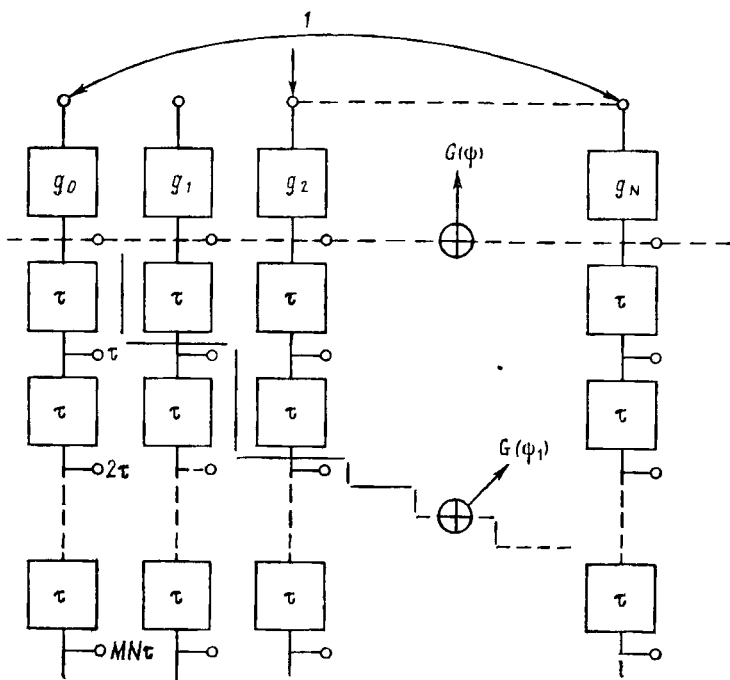


Рис 11.12 Формирование большого числа характеристик направленности с помощью линий задержки с отводами.
1 — элементы антенны (гидрофоны)

Связь между видоизмененной апертурной функцией и результирующей характеристикой направленности на конкретной частоте показана на рис. 11.11. Для одночастотного сигнала влияние фазового сдвига эквивалентно временной задержке τ_n , определяемой выражением

$$\varphi_n = 2\pi f \tau_n,$$

где

$$\tau_n = nd \sin \psi_0 / c. \quad (11.30)$$

Требуемый фазовый сдвиг обеспечивается введением соответствующей временной задержки в каждый приемный канал независимо от частоты сигнала.

Временная задержка, необходимая для сканирования луча, — это именно та задержка, которая требуется для компенсации времени геометрической задержки на каждом элементе антенны для плосковолнового сигнала, приходящего с направления ψ_0 . Таким образом, сигнал на всех элементах антенны складывается в фазе, когда направление сигнала будет ψ_0 .

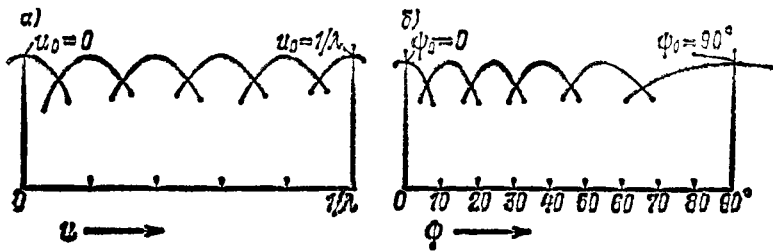


Рис. 11.13. Многолучевая характеристика направленности линейной антенны с лучами, эквидистантно расположенными в u -области

Установив в каждом приемном канале линию задержки с набором отводов, можно одновременно формировать лучи в нескольких направлениях. Линейная антенна, в которой используются элементы линии задержки с отводами для формирования большого числа лучей, показана на рис. 11.12. Луч по нормали к антенне $G(\psi)$ формируется при помощи комбинации сигналов со всех элементов антенны без каких-либо задержек. Лучи в других направлениях формируются выбором соответствующих отводов линии задержки таким образом, чтобы существовала линейная прогрессия задержек от одного конца антенны до другого

Предположим, наклон функции, определяющей время задержки при различных положениях гидрофона, изменяется разными ступенями для формирования ряда лучей. В результате лучи равномерно размещаются в области u , а не в области ψ . Очевидно, что наклон задержки является линейной функцией $\sin \psi_0$. Однако для линейной антенны это приводит к пересечению лучей на одном и том же уровне характеристик направленности, что обеспечивает однородное перекрытие характеристик во всем диапазоне углов, представляющих интерес. Формируемые таким образом лучи показаны на рис. 11.13 как в функции от u , так и в функции от ψ . Рис. 11.13, б показывает, что ширина сканируемых лучей для линейной антенны увеличивается по мере приближения угла ψ_0 к 90° .

Трехмерная характеристика линейной антенны в плоскости нормальной к оси антенны ($\psi_0 = 0$) имеет форму диска

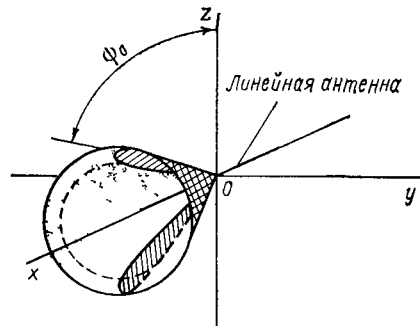


Рис. 11.14. Трехмерная характеристика направленности линейной антенны для луча, сканируемого на плоскости, нормальной к оси антенны

(см. рис. 11.5). При направлениях, отличных от нормального к оси антенны, характеристика напоминает коническую раковину (рис. 11.14). Для упрощения на рис. 11.14 не показана структура боковых лепестков. Трехмерная характеристика линейной антенны симметрична относительно оси антенны для всех углов сканирования. Характеристика направленности для дискретной линейной антенны с равномерным распределением чувствительности по апертуре, с главным максимумом, повернутым на угол ψ_0 , получается с помощью выражений (11.26) и (11.27). Таким образом, если

$$G(u) = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin(\pi N du)}{\sin(\pi du)} \right],$$

то

$$\begin{aligned} G(u - u_0) &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{\sin[\pi N d(u - u_0)]}{\sin[\pi d(u - u_0)]} \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \frac{\sin[\pi N d(\sin \psi - \sin \psi_0)/\lambda]}{\sin[\pi d(\sin \psi - \sin \psi_0)/\lambda]} \right\}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

11.5. Обобщенный коэффициент усиления для дискретной линейной антенны

В пп. 11.1.2 было выведено выражение для коэффициента концентрации линейного гидрофона. При этом в соответствии с определением делалось допущение об изотропном шумовом поле, в котором линейный гидрофон формирует характеристику направленности, сканируемую в плоскости, перпендикулярной к оси гидрофона. Распространим теперь этот вывод на дискретную антенну гидрофона с равномерным распределением при произвольных углах сканирования и рассмотрим как изотропное, так и анизотропное шумовые поля. Для анизотропного поля используется термин «усиление антенны» (коэффициент усиления антенны — помехоустойчивость), а не коэффициент концентрации. Вспомним, что усиление антенны определяется здесь как отношение мощности шума на выходе ненаправленной антенны к мощности шума на выходе направленной при допущении, что максимальная мощность для каждой антенны принимается за единицу. Это определение справедливо при рассмотрении характеристик антенны по отношению к одиночному плосковолновому сигналу, совпадающему по направлению с направлением максимальной чувствительности антенны.

Возьмем сначала изотропное шумовое поле и дискретную антенну из эквидистантно расположенных по оси z элементов с равными весовыми коэффициентами. Для характеристики направленности, сканируемой по вертикальному углу ψ_0 , дискретная апертурная функция и соответствующая характеристика на-

правленности при длине волны λ имеют вид

$$g(z, \lambda) = d \operatorname{comb}_d \left[\frac{1}{L} \operatorname{rect} \left(\frac{z}{L} \right) \exp(j2\pi zu_0) \right] \leftrightarrow \leftrightarrow \{ \operatorname{rep}_{1/d} \operatorname{sinc} [L(u - u_0)] \} = G(u - u_0), \quad (11.32)$$

где $u = (\sin \varphi) / \lambda$ — корреляционная функция. Квадрат характеристики направленности получается из выражения (11.32):

$$R_g(z) = d \operatorname{comb}_d \left[\frac{1}{L} \left(1 - \frac{|z|}{L} \right) \operatorname{rect} \left(\frac{z}{2L} \right) \exp(j2\pi zu_0) \right] \leftrightarrow \leftrightarrow \{ \operatorname{rep}_{1/d} \operatorname{sinc}^2 [L(u - u_0)] \}. \quad (11.33)$$

Изотропное шумовое поле при длине волны λ описывается взаимной спектральной плотностью и угловым распределением интенсивности. Таким образом,

$$Q_n(z, \lambda) = 4\pi K(\lambda) \operatorname{sinc}(2z/\lambda) \leftrightarrow K(\lambda) = |N(\varphi, \gamma, \lambda)|^2, \quad (11.34)$$

где φ и γ — вертикальные и горизонтальные углы (углы в вертикальной и горизонтальной плоскостях).

Мощность шума на выходе ненаправленного приемника или антенны определяем, используя представления функции в угловом или в линейном пространстве. Для всенаправленного датчика удобно интегрировать по пространственным углам следующим образом:

$$P_0(\lambda) = K(\lambda) \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi d\gamma = K(\lambda) 2\pi \int_{-1/\lambda}^{+1/\lambda} du = 4\pi K(\lambda). \quad (11.35)$$

Для вертикальной линейной антенны в изотропном шумовом поле решение легче всего получить в линейном представлении. Отсюда

$$P_a(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_g(z, \lambda) Q_n(z, \lambda) dz = \frac{4\pi K(\lambda)}{L} \int_{-L}^{+L} d \operatorname{comb}_d \left[\left(1 - \frac{|z|}{L} \right) \times \times \exp(j2\pi zu_0) \right] \operatorname{sinc} \left(\frac{2z}{\lambda} \right) dz. \quad (11.36)$$

Вспомним, что функция comb_d представляет собой последовательность импульсов с расстоянием между ними, равным d . Очевидно также, что интеграл от мнимой части выражения (11.36) равен нулю и что число элементов антенны $N = L/d$.

Поэтому перепишем выражение (11.36):

$$P_a(\lambda) = \frac{4\pi K(\lambda)}{N} \int_{-L}^{+L} \sum_n \delta(z - nd) \left(1 - \frac{|z|}{L}\right) \times \\ \times \cos(2\pi z u_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{2z}{\lambda}\right) dz = \frac{4\pi K(\lambda)}{N^2} \sum_{n=-(N-1)}^{+(N-1)} (N-n) \times \\ \times \cos(2\pi n d u_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{2n d}{\lambda}\right); \quad (11.37)$$

$$P_a(\lambda) = \frac{4\pi K(\lambda)}{N^2} \left[N + 2 \sum_{n=1}^{+(N-1)} (N-n) \cos(2\pi n d u_0) \operatorname{sinc}\left(\frac{2n d}{\lambda}\right) \right]. \quad (11.38)$$

Объединив уравнения (11.35) и (11.38), получим коэффициент концентрации однородной линейной антенны в изотропном шумовом поле:

$$KK = \frac{P_0(\lambda)}{P_a(\lambda)} = \frac{N^2}{N + 2 \sum_{n=1}^{N-1} (N-n) \cos(2\pi n d u_0) \operatorname{sinc}(2n d/\lambda)}. \quad (11.39)$$

Для изотропного шумового поля этот результат не зависит от ориентации антенны.

В качестве примера примем, что $u_0 = 0$ ($\varphi_0 = 0$) и пусть расстояние между элементами $d = \lambda/2$. Поскольку $\operatorname{sinc}(n) = 0$ для всех $n \neq 0$, сложение в знаменателе дает нуль и в результате $KK = N$. Такой же результат получается и для $d = m\lambda/2$, где m — любое целое число. Как говорилось в п. 11.2, при увеличении d (для $d > \lambda/2$) боковые лепестки характеристики направленности увеличиваются, что в конечном счете приводит к возрастанию этих лепестков до величины основного максимума.

Пусть теперь $u_0 = 1/\lambda$ ($\varphi_0 = \pi/2$). Этот случай часто называют *сканированием по оси антенны*, поскольку максимальная чувствительность характеристики направленности достигается вдоль оси антенны. Выражение в знаменателе в данном случае содержит член $\cos(2\pi nd/\lambda) \operatorname{sinc}(2nd/\lambda)$, который, как нетрудно видеть, равен нулю для d , равного любому целому, кратному $\lambda/4$.

На рис. 11.15 показана зависимость коэффициента концентрации дискретной антенны из девяти эквидистантных элементов от частоты, нормированной к частоте, для которой $d = \lambda/2$. Коэффициент концентрации показан как для луча с главным максимумом плоскости, нормальной к оси антенны ($\varphi_0 = 0$), так и для луча с главным максимумом вдоль оси ($\varphi_0 = \pi/2$). По

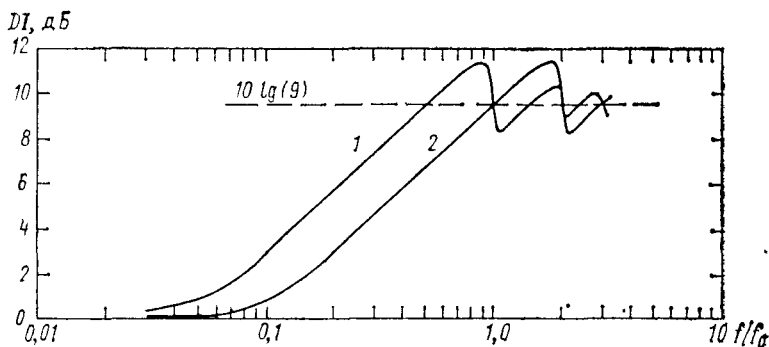


Рис 11.15 Коэффициент концентрации для дискретной линейной антенны из 9 элементов в плоскости, нормальной к оси антенны, и вдоль оси ($DI = \lg KK$)
 1 — главный максимум в плоскости, нормальной к оси антенны ($\varphi_0 = \pi/2$).
 2 — главный максимум вдоль оси антенны ($\varphi_0 = 0$)

мере уменьшения частоты, начиная от нормированного значения, равного единице, коэффициент концентрации уменьшается примерно на 3 дБ на октаву до тех пор, пока длина антенны не будет составлять примерно одну длину волны. По мере дальнейшего уменьшения частоты коэффициент концентрации асимптотически приближается к нулю. Отметим, что в высокочастотной области он колеблется около значения $10 \lg N$. Возможны величины коэффициента концентрации, превышающие $10 \lg N$, поскольку отрицательная корреляция шумов между гидрофонами может приводить к тому, что полная мощность шума будет меньше, чем сумма мощностей шума на отдельных элементах.

В области ниже нормированной частоты, равной 0,5, коэффициент концентрации для луча, ориентированного вдоль оси, примерно на 3 дБ выше, чем для луча, ориентированного в поперечном направлении. Это преимущество для продольного луча получается за счет более узкого полезного частотного диапазона, т. е. для луча, ориентированного вдоль оси, характеристики боковых лепестков начинают ухудшаться при $d > \lambda/4$, причем величина бокового лепестка достигает величины главного максимума при $d = \lambda/2$ и $\varphi = 180^\circ$.

В качестве второго примера рассмотрим шумовое поле, возникающее при волнении поверхности моря, включая составляющие, которые возникают в результате отражений от дна. Воспользовавшись моделью, приведенной в пп. 10.2.4, найдем выражение для угловой плотности шума в вертикальной плоскости:

$$|N(\varphi, \gamma, \lambda)|^2 = \begin{cases} K(\lambda) \sin \varphi & \text{при } 0 \leq \varphi \leq \pi/2; \\ K(\lambda) L_b \sin |\varphi| & \text{при } -\pi/2 \leq \varphi < 0. \end{cases} \quad (11.40)$$

В значениях переменной $u = (\sin \varphi)/\lambda$ это можно записать

$$|N(u)|^2 = \begin{cases} K(\lambda)\lambda u & \text{при } 0 \leq u \leq 1/\lambda; \\ K(\lambda)L_b|u| & \text{при } -1/\lambda \leq u < 0. \end{cases} \quad (11.41)$$

Определим усиление для вертикальной линейной антенны из эквидистантно расположенных приемников с одинаковыми весовыми коэффициентами при произвольных углах сканирования в неизотропном шумовом поле.

Шум на выходе ненаправленного приемника в таком поле

$$\begin{aligned} P_0(\lambda) &= K(\lambda)(1 + L_b) \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{1/\lambda} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\gamma = \\ &= K(\lambda)(1 + L_b) 2\pi\lambda^2 \int_0^{1/\lambda} u \, du = K(\lambda)\pi(1 + L_b). \end{aligned} \quad (11.42)$$

Чтобы получить значение шума на выходе вертикальной антенны, удобно интегрировать в области u , представив нормированную по мощности характеристику направленности в виде

$$\begin{aligned} |G(u - u_0)|^2 &= N^{-2} \left| \sum_n \exp[j2\pi n d(u - u_0)] \right|^2 = \\ &= N^{-2} \sum_n \sum_m \exp[j2\pi(n - m)d(u - u_0)], \end{aligned} \quad (11.43)$$

где N — число гидрофонов; u_0 — направление сканирования в пространстве u .

Пусть в выражении (11.43) $r = (n - m)$. Мнимая часть выражения (11.43) равна нулю. Тогда

$$|G(u - u_0)|^2 = N^{-2} \left\{ N + 2 \sum_{r=1}^{N-1} (N - r) \cos 2\pi r d(u - u_0) \right\}. \quad (11.44)$$

Шум на выходе антенны

$$\begin{aligned} P_a(\lambda) &= K(\lambda)\lambda^2 \left[\int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{1/\lambda} u |G(u - u_0)|^2 \, du \, d\gamma - \right. \\ &\quad \left. - L_b \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-1/\lambda}^0 u |G(u - u_0)|^2 \, du \, d\gamma \right] = \\ &= 2\pi K(\lambda)\lambda^2 \left[\int_0^{1/\lambda} u |G(u - u_0)|^2 \, du - L_b \int_{-1/\lambda}^0 u |G(u - u_0)|^2 \, du \right]. \end{aligned} \quad (11.45)$$

Подставляя формулу (11.44) в (11.45) и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned}
 P_a(\lambda) = & \frac{\pi K(\lambda)(1+L_b)}{N^2} \left\{ N + 4 \sum_{r=1}^{N-1} (N-r) \cos(2\pi r du_0) \times \right. \\
 & \times \left[\frac{\sin(2\pi r d/\lambda)}{2\pi r d/\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi r d/\lambda)}{(\pi r d/\lambda)^2} \right] \left. + \frac{4\pi K(\lambda)(1-L_b)}{N^2} \times \right. \\
 & \times \sum_{r=1}^{N-1} (N-r) \sin(2\pi r du_0) \left[\frac{\sin(2\pi r d/\lambda)}{(2\pi r d/\lambda)^2} - \frac{\cos(2\pi r d/\lambda)}{2\pi r d/\lambda} \right]. \quad (11.46)
 \end{aligned}$$

Из уравнений (11.42) и (11.46) найдем выражение для усиления антенны:

$$\begin{aligned}
 YA = & N^2 \left\{ N + 4 \sum_{r=1}^{N-1} (N-r) \cos(2\pi r du_0) \times \right. \\
 & \times \left[\frac{\sin(2\pi r d/\lambda)}{2\pi r d/\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\pi r d/\lambda)}{(\pi r d/\lambda)^2} \right] + \frac{4(1-L_b)}{(1+L_b)} \sum_{r=1}^{N-1} (N-r) \times \\
 & \times \sin(2\pi r du_0) \left[\frac{\sin(2\pi r d/\lambda)}{(2\pi r d/\lambda)^2} - \frac{\cos(2\pi r d/\lambda)}{2\pi r d/\lambda} \right] \left. \right\}. \quad (11.47)
 \end{aligned}$$

Хотя выражение (11.47) представляется весьма сложным, его можно вычислить на ЭВМ. На рис. 11.16 усиление антенны построено в функции от угла сканирования в вертикальной плоскости φ_0 для вертикальной антенны из девяти элементов в рассматриваемой модели шумов, генерируемых волнением на поверхности. Для правой части рисунка частота принимается такой, что расстояние между элементами $d = \lambda/2$, в то время как для левой части $d = \lambda/4$. На рисунке нанесены точки, определяющие коэффициент концентрации (DI), который можно было бы получить для луча, нормального к оси антенны. Предполагается, что коэффициент $L_b = 0,1$.

Заметим, что усиление антенны превышает коэффициент концентрации в широком диапазоне углов сканирования в нижней полусфере. Усиление антенны обычно меньше, чем коэффициент концентрации для лучей, сканируемых в направлении поверхности. При $d = \lambda/2$ коэффициент усиления антенны значительно уменьшается при сканировании вдоль оси антенны на угол $\varphi_0 = -90^\circ$ из-за того, что в направлении $+90^\circ$ при этой частоте образуется дополнительный максимум. При $d = \lambda/4$ и $\varphi_0 = -90^\circ$ в вертикальном направлении не образуется дополнительного максимума и усиление антенны остается высоким. Этот пример

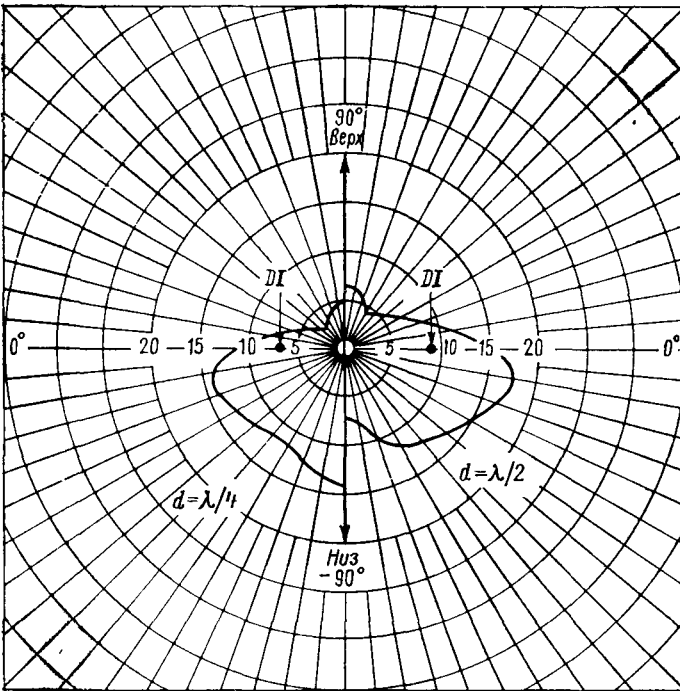


Рис. 11.16. Усиление 9 элементной вертикальной линейной антенны в функции от угла сканирования в вертикальной плоскости в шумовом поле, генерируемом поверхностью

иллюстрирует важность учета зависимости свойств антенны от характеристик шумового поля при выборе конфигурации акустической системы.

11.6. Использование усиления антенны при анализе характеристик системы

Располагая информацией об интенсивности источника акустической энергии, свойствах среды при прохождении сигналов и свойствах окружающих (фоновых) шумов, можно определить отношение сигнал/шум в месте расположения ненаправленного приемника. Найдем теперь отношение сигнал/шум на выходе направленного приемника с учетом усиления антенны.

Сделаем допущение, что спектры интенсивности для сигнала источника $\Psi_s(f)$ и для шума $\Psi_n(f)$ нормированы соответствующей эталонной (опорной) интенсивностью. Таким образом, спек-

тральный уровень сигнала и спектральный уровень шума на частоте f будут:

$$\begin{aligned} \text{УИ}_s(f) &= 10 \lg \Psi_s(f); \\ \text{УШ}_s(f) &= 10 \lg \Psi_n(f). \end{aligned}$$

Коэффициент потерь при прохождении будет функцией как дистанции, так и частоты. На дистанции r спектральная интенсивность сигнала на частоте f связана с интенсивностью источника и коэффициентом потерь при прохождении отношением

$$\Psi_s(r, f) = \Psi_s(f) T(r, f).$$

Поэтому потери при распространении

$$\text{ПР}(r, f) = -10 \lg T(r, f) = 10 \lg \left[\frac{\Psi_s(f)}{\Psi_s(r, f)} \right].$$

Спектр сигнала в месте расположения приемника может отличаться от спектра источника сигнала как по амплитуде, так и по форме.

Интенсивность принятого сигнала в данной полосе частот выражается интегралом от энергетического спектра принятого сигнала в этой полосе. Для частотного диапазона f_1, f_2

$$I_s(r) = \int_{f_1}^{f_2} \Psi_s(r, f) df = \int_{f_1}^{f_2} \Psi_s(f) T(r, f) df,$$

откуда общий уровень принятого сигнала

$$\text{УС}(r) = 10 \lg I_s(r) = 10 \lg \left[\int_{f_1}^{f_2} \Psi_s(f) T(r, f) df \right]. \quad (11.48)$$

Если коэффициент потерь при распространении существенно не изменяется, его можно вывести из-под интеграла, что значительно упрощает выражение (11.48):

$$\text{УИ}(r) = 10 \lg \left[\int_{f_1}^{f_2} \Psi_s(f) df \right] + 10 \lg T(r) = \text{УИ} - \text{ПР}(r), \quad (11.49)$$

где УИ — уровень источника, оцениваемый в интересующей полосе частот; ПР(r) — потери при распространении, присущие этой полосе. В случае плосковолнового сигнала, ориентированного на максимум характеристики направленности, выражения (11.48), (11.49) определяют уровень принятого сигнала на выходе направленного приемника.

Спектр интенсивности окружающих шумов видоизменяется за счет направленного усиления антенны по сравнению со спектром на выходе ненаправленного приемника. Поэтому интен-

сивность шума на выходе направленного датчика в диапазоне частот f_1, f_2

$$I_n = \int_{f_1}^{f_2} \left[\frac{\Psi_n(f)}{A(f)} \right] df, \quad (11.50)$$

где $A(f)$ — численное значение усиления антенны в функции от частоты. Уровень шума на выходе приемника в рассматриваемой полосе частот $УШ_0 = 10 \lg I_n$. Если диапазон частот f_1, f_2 очень узкий, так что $\Psi_n(f)$ и $A(f)$ почти неизменны в этом диапазоне, полный уровень интенсивности шума можно разложить на члены, связанные со спектральной интенсивностью среды, шириной полосы и усилением антенны. Таким образом, при неизменном уровне шума и усиления антенны

$$УШ_0 = УШ_s - УА + 10 \lg \beta, \quad (11.51)$$

где $УШ_0$ — спектральный уровень окружающего шума в полосе (постоянный); $УА$ — усиление антенны в полосе (постоянное); $\beta = f_2 - f_1$ — ширина полосы частот.

Пользуясь системой записи в децибелах, запишем отношение интенсивности сигнала к интенсивности шума на выходе направленного датчика так:

$$\begin{aligned} \text{сигнал/шум}(r) &= 10 \lg \left\{ \int_{f_1}^{f_2} \Psi_s(f) T(r, f) df \right\} - \\ &- 10 \lg \left\{ \int_{f_1}^{f_2} \left[\frac{\Psi_n(f)}{A(f)} \right] df \right\} = УИ(r) - УШ_0, \end{aligned} \quad (11.52)$$

где $УШ_0$ — суммарный уровень шума в полосе на выходе приемника.

Это выражение можно и далее упрощать, но только до тех пор, пока остаются справедливыми допущения, позволяющие вводить такие упрощения, как допущение о независимости потерь при распространении или об очень узкой частотной полосе. При допущении узкой частотной полосы, получим особенно простое выражение

$$\text{сигнал/шум}(r)_{\text{УП}} = УИ_s - ПР(r) - УШ_s + УА. \quad (11.53)$$

Если ширина полосы частот не узкая, но потери при распространении постоянны во всей полосе

$$\text{сигнал/шум}(r) = УИ - ПР(r) - УШ, \quad (11.54)$$

где $УИ$ — уровень источника в полосе; $ПР(r)$ — потери при распространении на дистанции r , соответствующей полосе частот f_1, f_2 .

Поведение членов, выражающих сигнал и шум в подынтегральных выражениях в формуле (11.52), показано на рис. 11.17. Заметим, что формировать отношение сигнал/шум непосредственно на спектральном уровне допустимо только для узкой полосы частот. В противном случае члены, выражающие сигнал и шум, должны интегрироваться каждый в отдельности по всей полосе частот до того, как сформировано отношение сигнал/шум.

Если допущения, принятые в выражениях (11.53) и (11.54), допустимы, функциональную зависимость отношения сигнал/шум от дистанции можно выделить из-под интеграла, описывающего спектры сигнала.

Таким образом, интегралы нужно оценить только один раз. Если зависимость потерь при распространении звука от частоты нельзя пренебречь, необходимо оценить интеграл интенсивности сигнала на каждой дистанции, представляющей интерес, чтобы определить зависимость отношения сигнал/шум от дистанции.

11.7. Оценка направления прихода сигнала

Помимо улучшения отношения сигнал/шум пространственный фильтр влияет на оценку направления прихода плосковолнового сигнала. Пусть рис. 11.18 представляет зависимость выходной мощности сканируемого луча в шумовом поле, которое

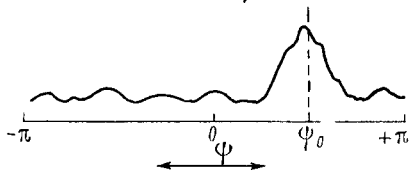


Рис. 11.18. Выходной сигнал антенны при отклонении луча для плосковолнового сигнала с направления ψ_0

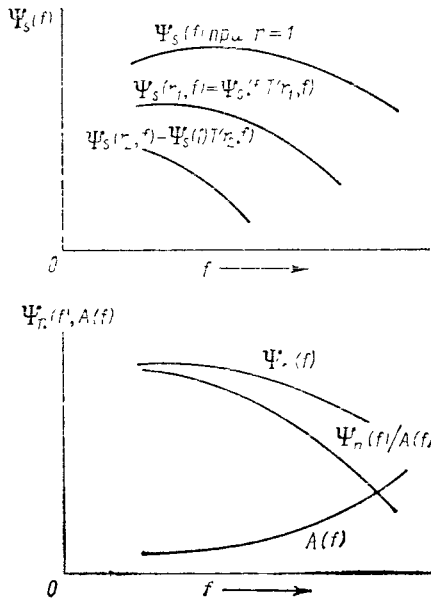


Рис. 11.17. Спектральное представление источника, характеристик распространения и шума

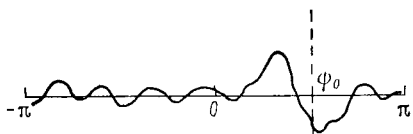


Рис. 11.19. Производная пространственной характеристики, представленной на рис. 11.18

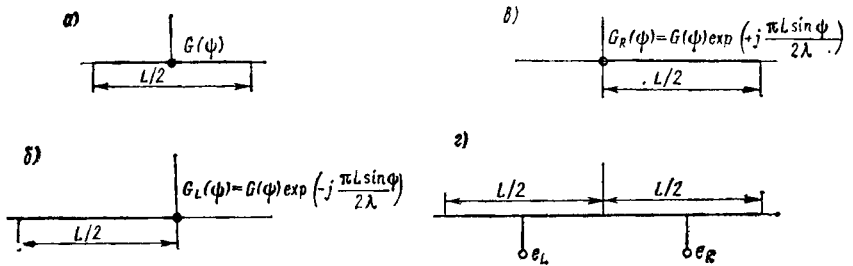


Рис. 11.20. Влияние переноса на характеристику направленности

содержит плосковолновой сигнал цели, приходящий под углом ψ_0 . На основании имеющихся данных можно сформировать оценку ψ_0 , в которой неизбежно будет содержаться некоторая неопределенность из-за присутствия шума.

Один из подходов к оцениванию угла цели заключается в выборе максимального значения выходного сигнала на рис. 11.18 в качестве оценки. Можно также было бы продифференцировать эту указанную зависимость по ψ и выбрать положение вблизи ψ_0 , где производная проходит через нуль, в качестве оценки направления на цель. Производная пространственной зависимости выходной мощности показана на рис. 11.19.

Предположим, что характеристика является четной функцией относительно своей главной оси, тогда производная будет нечетной функцией. Таким образом, вблизи главной оси величину

$$\frac{d |G(\psi)|^2}{d\psi} \simeq K\psi \quad (11.55)$$

можно принять в качестве угловой чувствительности при определении направления прихода плосковолнового сигнала.

Опишем далее устройство, называемое *коррелятором с расщепленной апертурой*, которое обеспечивает значение угловой чувствительности, приблизительно соответствующее величине, определяемой выражением (11.55).

На рис. 11.20, *а* показана линейная антенна длиной $L/2$ с центром, совпадающим с началом координат, имеющая характеристику направленности $G(\psi)$. На рис. 11.20, *б* антенна сдвинута влево на $L/4$. Этот сдвиг не влияет на форму характеристики, но *фаза* сигнала, принимаемого сдвинутой апертурой, изменится относительно сигнала, принимаемого апертурой, расположенной в центре антенны, на величину, пропорциональную величине сдвига. Аналогично этому на рис. 11.20, *в* антенна сдвинута вправо, что в результате дает фазу сигнала с противоположным знаком. Апертуры с левосторонним и правосторонним сдвигами

имеют характеристики, выражаемые через значения характеристики для апертуры, находящейся в центре антенны:

$$\left. \begin{aligned} G_L(\psi) &= G(\psi) \exp\left(-j \frac{\pi L \sin \psi}{2\lambda}\right); \\ G_R(\psi) &= G(\psi) \exp\left(+j \frac{\pi L \sin \psi}{2\lambda}\right). \end{aligned} \right\} \quad (11.56)$$

На рис. 11.20, *г* показаны сдвинутые апертуры, дающие на выходе сигналы e_L и e_R . Для плосковолнового монохроматического сигнала с амплитудой a эти сигналы с каждой из половин антенны (обычно называемые «полулучевыми сигналами» — half-beam) в комплексной форме имеют вид

$$\left. \begin{aligned} e_L(t, \psi) &= aG(\psi) \exp\left[j\left(\omega t - \frac{\pi L \sin \psi}{2\lambda}\right)\right]; \\ e_R(t, \psi) &= aG(\psi) \exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi L \sin \psi}{2\lambda}\right)\right]. \end{aligned} \right\} \quad (11.57)$$

Сигналы на выходах левой и правой частей антенны в выражениях идентичны, за исключением различия по электрической фазе φ , вызванного физическим разнесением половин антенны и пространственным углом ψ между главной осью чувствительности и направлением на цель. Таким образом,

$$\varphi = \frac{\pi L}{\lambda} \sin \psi. \quad (11.58)$$

При $\psi \ll 1$ выражение (11.58) принимает вид

$$\varphi \approx \frac{\pi L}{\lambda} \psi. \quad (11.59)$$

Следовательно, электрическая фаза между выходными сигналами половин антенны определяет направление цели относительно главной оси чувствительности антенны. Заметим, что коэффициент пропорциональности между электрическим и пространственным углами включает отношение L/λ . Это свидетельствует о возможности более точного определения направления на цель при увеличении L/λ .

Чтобы получить значение разности фаз φ , перемножим сигнал с выхода левой половины антенны и комплексно-сопряженный сигнал с выхода правой половины антенны:

$$e_L(t, \psi) e_R^*(t, \psi) = a^2 |G(\psi)|^2 \exp(-j\varphi) = a^2 |G(\psi)|^2 (\cos \varphi - j \sin \varphi). \quad (11.60)$$

Вещественная и мнимая части выражения (11.60) показаны на рис. 11.21. Отношение мнимой и вещественной частей будет тангенсом угла электрической фазы. Таким образом,

$$\frac{\text{Im} [e_L e_R^*]}{\text{Re} [e_L e_R^*]} = \text{tg } \varphi = \text{tg} \left(\frac{\pi L \sin \psi}{\lambda} \right). \quad (11.61)$$

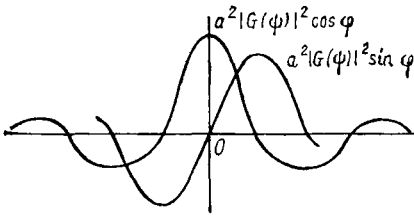


Рис. 11.21. Вещественная и мнимая части $e_L e_R^*$

Для малых значений ψ , при которых $(L/\lambda) \sin \psi \ll 1$,

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{\pi L}{\lambda} \psi, \quad (11.62)$$

что соответствует выражению (11.55).

На рис. 11.22 показано, как можно достичь результата, содержащегося в выражении (11.62), в предположении вещественного, а не комплексного синусоидального сигнала. Сигналы на выходах половин антенн отличаются только по электрической фазе, и их можно записать

$$\left. \begin{aligned} e_L &= aG(\psi) \cos(\omega t - \varphi/2); \\ e_R &= aG(\psi) \cos(\omega t + \varphi/2). \end{aligned} \right\} \quad (11.63)$$

Сигнал на выходе левой половины антенны сдвигается по фазе на $\pi/2$ (что эквивалентно формированию комплексно-сопряженного сигнала) и умножается на e_R . В результате

$$\begin{aligned} a^2 G^2(\psi) \cos(\omega t - \varphi/2 + \pi/2) \cos(\omega t + \varphi/2) = \\ = a^2/2 G^2(\psi) (\sin \varphi + \cos 2\omega t). \end{aligned} \quad (11.64)$$

Низкочастотный фильтр на выходе умножителя подавляет составляющую удвоенной частоты и остается сигнал, пропорциональный $\sin \varphi$.

Сигналы e_R и e_L перемножаются:

$$e_R e_L = (a^2/2) G^2(\psi) (\cos \varphi + \cos 2\omega t). \quad (11.65)$$

Снова используется низкочастотный фильтр, чтобы подавить член, содержащий составляющую удвоенной частоты. В результате получаем сигнал, пропорциональный $\cos \varphi$. Сигналы подаются на вход устройства, которое делит один сигнал на дру-

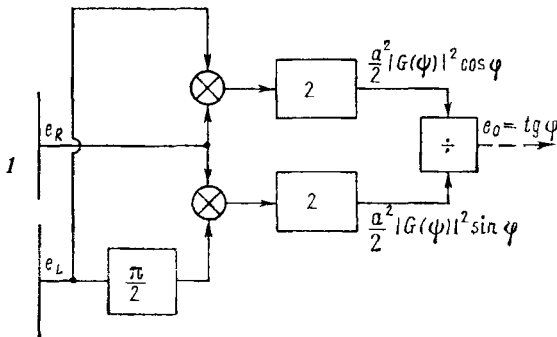
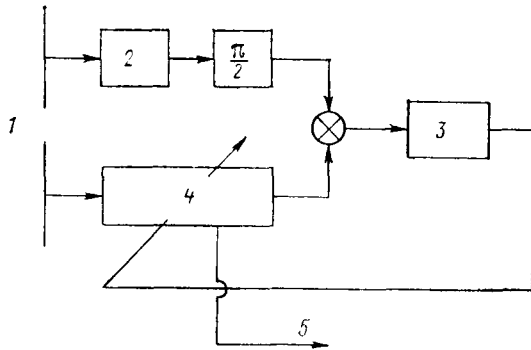


Рис. 11.22. Узкополосный коррелятор для угловых измерений: 1 — разделенная антенна; 2 — низкочастотный фильтр

Рис. 11.23. Устройство для угловых измерений с петлей обратной связи и коррелятором:

1—разделенная антенна; 2—фиксированная задержка; 3—низкочастотный фильтр; 4—задержка, управляемая по напряжению; 5—считывание задержки, пропорциональной углу направления на цель относительно главной оси характеристики направленности



гой. Тогда выходной сигнал равен $\operatorname{tg} \varphi$. Последовательность операций, описанных для получения $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, приводит к формированию оценки функции взаимной корреляции e_L и e_R , отсюда и название — коррелятор с расщепленной апертурой.

Присутствие шума в сочетании с полезным сигналом не позволяет точно измерить направление на цель. Погрешность измерений, являющаяся следствием присутствия шума, рассмотрена в гл. 13.

В качестве альтернативы способу измерения угла в явной форме, показанному на рис. 11.22, служит устройство с петлей обратной связи (рис. 11.23). В этом устройстве в один из сигнальных каналов вводится переменная задержка для компенсации задержки, вызванной разностью прихода сигналов от цели относительно главной оси характеристики направленности. Для управления переменной задержкой, приводящей $\sin \varphi$ к нулю, используется сигнал на выходе низкочастотного фильтра, пропорциональный $\sin \varphi$. Величина задержки, требующаяся для снижения уровня выходного сигнала до нуля, градуируется в значениях угла цели относительно главной оси характеристики направленности.

11.8. Пространственные фильтры

В пп. 11.1.1. характеристика направленности линейного гидрофона, расположенного по оси x , определяется выражением (11.9). Это частный случай более общей зависимости

$$G(\mathbf{u}) = \int g(\mathbf{r}) \exp [j2\pi \mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)] dv, \quad (11.66)$$

где \mathbf{u} и \mathbf{u}_0 — векторы с величинами $1/\lambda$, указывающие направление прихода плосковолнового сигнала и направление сканирования луча; \mathbf{r} — вектор, определяющий положение элемента объема dv ; $g(\mathbf{r})$ — чувствительность, приходящаяся на единицу объема антенны относительно единичного сигнала в точке \mathbf{r} .

Для дискретной антенны из N гидрофонов с произвольным распределением выражение (11.66) принимает вид

$$G(\mathbf{u}) = \sum_n g(\mathbf{r}_n) \exp[j2\pi \mathbf{r}_n \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)]. \quad (11.67)$$

В прямоугольной системе координат (см. рис. 10.6) составляющие \mathbf{r}_n будут x_n, y_n, z_n . Пользуясь полярными углами ψ и θ , получим для составляющих $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$

$$\left. \begin{aligned} u_x - u_{x0} &= \frac{\sin \psi - \sin \psi_0}{\lambda}; \\ u_y - u_{y0} &= \frac{\cos \psi \sin \theta - \cos \psi_0 \sin \theta_0}{\lambda}; \\ u_z - u_{z0} &= \frac{\cos \psi \cos \theta - \cos \psi_0 \cos \theta_0}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (11.68)$$

Преобразовав скалярное произведение в выражении (11.67), найдем

$$G(\mathbf{u}) = \sum_n g(x_n, y_n, z_n) \exp\{j2\pi [x_n(u_x - u_{x0}) + y_n(u_y - u_{y0}) + z_n(u_z - u_{z0})]\}. \quad (11.69)$$

Выражение (11.69) сводится к случаю линейной антенны, если y_n и z_n равны нулю при всех n . Таким образом,

$$G(u_x) = \sum_n g(x_n) \exp\left[\frac{j2\pi x_n (\sin \psi - \sin \psi_0)}{\lambda}\right]. \quad (11.70)$$

Формулы (11.67) или (11.68) можно использовать для определения характеристики направленности для всех произвольных объемных распределений гидрофонов. Конечно, нельзя ожидать получения замкнутых результатов в явном виде, за исключением случаев чрезвычайно простых геометрических конфигураций антенны. Однако при наличии данных о размещении приемников и весовых коэффициентов вычисления по формуле (11.69) легко выполняются на ЭВМ.

Один из примеров простого математического решения, представляющего практический интерес, — плоская антенна (рис. 11.24). Пусть элементы антенны расположены на одинаковом расстоянии в направлении $x = d_x$ и в направлении $y = d_y$. Таким образом, координаты m -го приемника будут $x_m = md_x$; $y_n = nd_y$; $z_{m,n} = 0$.

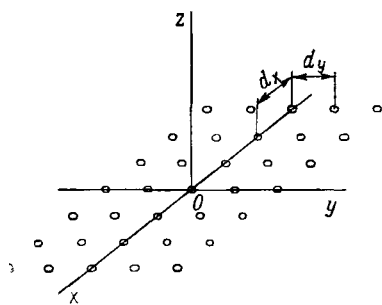


Рис. 11.24. Геометрия плоской антенны

Выражение (11.69) теперь можно свести к двойному суммированию. Без потери в общности примем $u_0 = 0$ и запишем

$$G(\mathbf{u}) = \sum_m \sum_n g(x_m, y_n) \exp[j2\pi(md_x u_x + nd_y u_y)]. \quad (11.71)$$

Дальнейшее упрощение возможно, если двумерное распределение чувствительности представить в виде произведения двух одномерных апертурных функций, т. е.

$$g(x_m, y_n) = g_x(x_m) g_y(y_n). \quad (11.72)$$

Выражение (11.72) означает, что вид амплитудного распределения в направлении x не зависит от y_n и наоборот. Наиболее очевидная весовая функция, которая удовлетворяет выражению (11.72), — это однородное распределение или распределение с постоянной амплитудой.

Подстановка выражения (11.72) в (11.71) дает возможность записать

$$G(\mathbf{u}) = \sum_m g_x(x_m) \exp(j2\pi md_x u_x) \sum_n g_y(y_n) \exp(2\pi nd_y u_y). \quad (11.73)$$

Принимая отдельные суммы в качестве характеристик направленности для линейной антенны по осям x и y , запишем выражение (11.73) в следующем виде:

$$G(\mathbf{u}) = G_x(u_x) G_y(u_y), \quad (11.74)$$

где

$$G_x(u_x) = \sum_m g_x(x_m) \exp(j2\pi md_x u_x);$$

$$G_y(u_y) = \sum_n g_y(y_n) \exp(j2\pi nd_y u_y).$$

В качестве примера рассмотрим квадратную антенну, где $d_x = d_y$ с равномерным распределением. При $u_x = \sin \psi / \lambda$ и $u_y = \cos \psi \sin \theta / \lambda$ характеристика направленности будет иметь вид

$$G(\psi, \theta, \lambda) = \left[\frac{\sin(\pi Nd \sin \psi / \lambda)}{\sin(\pi d \sin \psi / \lambda)} \right] \left[\frac{\sin(\pi Nd \cos \psi \sin \theta / \lambda)}{\sin(\pi d \cos \psi \sin \theta / \lambda)} \right]. \quad (11.75)$$

Если $\theta = 0$ в уравнении (11.75), характеристика направленности в плоскости zOx превращается в характеристику направленности простой линейной антенны. Приняв $\psi = 0$, получим аналогичный результат в плоскости zOy . Заметим, однако, что трехмерная характеристика направленности не получается вращением характеристики линейной антенны вокруг оси z . Представляем читателю самому показать, что характеристика направленности, измеренная в плоскости, содержащей ось z и диагональ квадратной антенны определяется в виде

$$G = (\beta, \lambda) = \left[\frac{\sin(\pi Nd \sin \beta / \lambda \sqrt{2})}{\sin(\pi d \sin \beta / \lambda \sqrt{2})} \right]^2, \quad (11.76)$$

где β измеряется от оси z в этой плоскости. На рис. 11.25 показано соотношение между характеристикой направленности в плоскости, ориентированной по главной оси антенны, и характеристикой, измеренной в плоскости, содержащей диагональ антенны. Измеренная по положению первого нуля характеристики направленности ширина в плоскости диагонали равна $\sqrt{2}\lambda/Nd$, в то время, как в главной плоскости эта ширина равна λ/Nd . Заметим, что в характеристике в диагональной плоскости нет обращения знака в области боковых лепестков. Кроме того, амплитуда боковых лепестков очень мала по сравнению с боковыми лепестками в главной плоскости.

Коэффициент концентрации плоской апертуры формально можно выразить в виде

$$KK(\lambda) = 4\pi K \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\infty R_g(\rho, \varphi) Q_n(\rho, \lambda) \rho d\rho d\varphi \right]^{-1}, \quad (11.77)$$

где ρ и φ — полярные координаты точки в плоскости xOy ; R_g — корреляционная функция в апертуре; Q_n — одночастотная функция корреляции изотропного шума.

Поскольку R_g — функция как ρ , так и φ для квадратной апертуры, вычислить интеграл (11.77) в явном виде не удастся. Однако влияние отсутствия круговой симметрии незначительно, что приводит к приближенному результату, когда размеры квадрата велики по сравнению с длиной волны и апертурная функция постоянна. Для этого случая корреляционная функция в апертуре

$$R_g(\rho, \varphi) = L^{-2} [1 - \rho L^{-1} (|\cos \varphi| + |\sin \varphi|) + \rho^2 L^{-2} |\cos \varphi \sin \varphi|]. \quad (11.78)$$

Величина ρ ограничена пределами, при которых $R_g \geq 0$. При $\varphi = 0$ или 90° получим вертикальный разрез функции вдоль

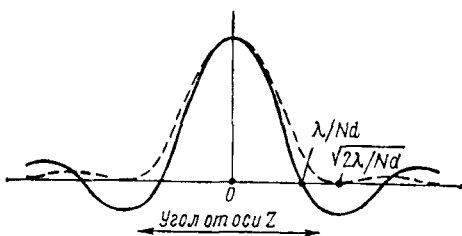


Рис. 11.25. Соотношение характеристики направленности квадратной антенны вдоль диагонали антенны и стороны квадрата:

— характеристика направленности в главной плоскости; --- характеристика направленности в диагональной плоскости

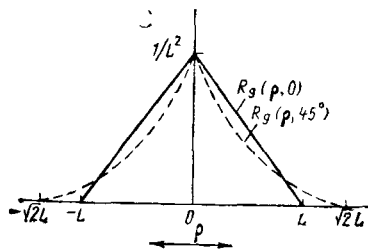


Рис. 11.26. Сечение в главной и диагональной плоскостях квадратной плоской антенны с равномерным амплитудным распределением

одной из главных осей апертуры. Это известная треугольная функция корреляции, связанная с функцией прямоугольной апертуры. При $\varphi = 45^\circ$ получаем диагональный разрез, который характеризуется наибольшим отклонением от треугольной формы. Сходство этих двух сечений (рис. 11.26) наводит на мысль, что допущение о независимости функции корреляции от φ вносит незначительную ошибку. Пусть

$$R_g(\rho) \approx 1/L^2(1 - \rho/L) \text{ при } \rho \leq L. \quad (11.79)$$

Учитывая, что

$$Q_n(\rho, \lambda) = 4\pi K \frac{\sin(2\pi\rho/\lambda)}{2\pi\rho/\lambda}$$

и интегрируя по φ , из выражения (11.77) найдем

$$\text{КК}(\lambda) \approx \left[\frac{\lambda}{L^2} \int_0^L \left(1 - \frac{\rho}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda}\right) d\rho \right]^{-1}. \quad (11.80)$$

Это выражение при $L \gg \lambda$ будет

$$\text{КК}(\lambda) \approx \frac{2\pi L^2}{\lambda^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2L}{\lambda}\right)^2. \quad (11.81)$$

Оно представляет собой квадрат коэффициента концентрации линейной апертуры длиной L , умноженный на $\pi/2$.

Для прямоугольной апертуры с равномерным распределением, имеющей размеры L_x и L_y , которые велики по сравнению с длиной волны, коэффициент концентрации

$$\text{КК}(\lambda) \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{4L_x L_y}{\lambda^2}\right). \quad (11.82)$$

Член в скобках — произведение коэффициентов концентрации линейных апертур с длинами L_x и L_y .

В случае антенны с плоской апертурой часто необходимо экранировать одну сторону плоскости, чтобы устройство было чувствительно к сигналам, приходящим только из одной полусферы. При этом мощность шума уменьшается в два раза, благодаря чему коэффициент направленности увеличивается вдвое. Таким образом,

$$\text{КК}(\lambda) = 4\pi \frac{L_x L_y}{\lambda^2} = 4\pi \frac{A}{\lambda^2}, \quad (11.83)$$

где A — площадь прямоугольной апертуры.

Правая часть выражения (11.83) применима к широкому классу плоских антенн с однородным фазоамплитудным распределением при условии, что минимальный эффективный размер велик по сравнению с длиной волны. Например, коэффициент концентрации экранированного круглого поршня диаметром $D \gg \lambda$

$$\text{КК}(\lambda) = \left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) = \frac{4\pi A}{\lambda^2}. \quad (11.84)$$

Формулу (11.83) также можно применить к плоским апертурам при неоднородном фазоамплитудном распределении с помощью определения *эффективной* апертуры в виде

$$A_{\text{эф}} = \frac{\left| \iint g(x, y) dx dy \right|^2}{\iint |g(x, y)|^2 dx dy}. \quad (11.85)$$

Тогда

$$\text{КК}(\lambda) \simeq \frac{4\pi A_{\text{эф}}}{\lambda^2}. \quad (11.86)$$

С помощью неравенства Шварца легко показать, что эффективная площадь, определяемая уравнением (11.85), равна или меньше действительной площади апертуры. Уравнение (11.86) справедливо, если $A_{\text{эф}} > \lambda^2$, а наименьший размер плоской области, где $g(x, y)$ имеет существенное значение, должен быть больше, чем λ .

К другим примерам многомерных пространственных фильтров относятся цилиндрические и сферические антенны, сферические объемные антенны и конформные антенны, соответствующие обводам корабля или корпусу подводной лодки. Подробный анализ свойств таких антенн приведен, например, в работах [4, 5].

Задачи

11.1. Два гидрофона равной чувствительности и усиления расположены по оси x на расстоянии d . Определите суммарную чувствительность сигналов гидрофонов по отношению к плосковолновому сигналу с длиной волны λ , приходящему под углом ψ к плоскости, перпендикулярной оси x . Постройте график характеристики направленности в полярных координатах, приняв $d = \lambda/4, \lambda/2$ и λ .

11.2. Повторите задачу 11.1 для трех гидрофонов, расположенных по оси x на равном расстоянии d .

11.3. В изотропном шумовом поле шумовые сигналы, принимаемые гидрофонами, расстояние между которыми точно равно $\lambda/2$ статистически независимы друг от друга. Воспользуйтесь этим фактом и рассчитайте коэффициент концентрации для решеток гидрофонов в задачах 11.1 и 11.2 при условии, что расстояние между ними составляет $1/2$ длины волны.

11.4. Предположим, что есть линейная антенна с эквидистантным расположением гидрофонов, причем расстояние между ними составляет половину длины волны. Можно показать, что амплитудное распределение в соответствии с коэффициентами, определяемыми по формуле бинома Ньютона, приводит к нулевым боковым лепесткам. Покажите это, построив график характеристик направленности для антенны из четырех элементов с весовыми коэффициентами 1, 3, 3 и 1. Обратите внимание на ширину главного максимума результирующей характеристики и сопоставьте ее с шириной главного максимума для четырехэлементной антенны с равномерным фазоамплитудным распределением.

11.5. Апертурная функция непрерывной линейной антенны выражается уравнением

$$g(x) = 1/L \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{L} \right) \right] \text{rect}(x/L).$$

Выведите выражение для характеристики направленности $G(u)$ и изобразите характеристику как функцию переменной u . Сравните ширину характеристики направленности и максимальную величину бокового лепестка с шириной характеристики направленности и максимальным уровнем бокового лепестка антенны с равномерными весами.

11.6. Рассчитайте коэффициент концентрации для биномиальной решетки задачи 11.4 в предположении изотропного шума и расстояния между гидрофонами, равного половине длины волны.

11.7. Выражение (11.47) определяет усиление вертикальной линейной антенны для модели шумов, генерируемых волнением поверхности моря, включая влияние составляющей шума, отраженного от дна. Если характеристика направленности сканируется в плоскости, нормальной к оси антенны ($u_0 = 0$), можно увидеть, что усиление антенны не зависит от коэффициента отражения от дна. Правильно ли это? Дайте объяснение.

11.8. В системе с сопровождением по углу используется коррелятор с расщепленной апертурой, как показано на рис. 11.23. Предположим, что полная длина антенны L , а длина волны сигнала λ . Какими должны быть значение фиксированной задержки и диапазон переменных задержек, чтобы антенна «видела» цель в диапазоне пеленгов $-\lambda/2L \leq \psi \leq \lambda/2L$?

Список литературы

1. Horton J. W. Fundamentals of Sonar, 2nd ed., United States Naval Institute, 1959.
2. Taylor T. T. Design of Line-Source Antennas for Narrow Beamwidth and Low Side Lobes. IRE Trans., Vol. AP-3. P. 316 (1955).
3. Dolph C. L. A Current Distribution of Broadside Arrays Which Optimizes the Relationship between Beam Width and Side-Lobe Level. Proc. IRE, Vol. 34. P. 335 (June 1946).
4. Queen W. C. The Directivity of Sonar Receiving Arrays. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 47, N 3. P. 711 (1979).
5. Anderson V. C., Munson J. C. Directivity of Spherical Receiving Arrays. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 35, N. 8. P. 1162 (1963).
6. Albers V. M. Underwater Acoustics Handbook-11. University Park, Pa.: The Pennsylvania State University Press, 1965, Chap. 17.
7. Jordan E. C. Electromagnetic Waves and Radiating Systems, New York: Prentice-Hall, Inc., 1950, Chap. 12.

Глава 12.

АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТОВ

Обнаружение подводных объектов с помощью гидроакустических систем возможно либо за счет приема непосредственно создаваемого этими объектами шума, либо излучением зондирующего импульса и приемом отраженного от цели эхо-сигнала. Гидроакустические системы, обнаруживающие шумы целей, называют пассивными системами, а системы, обнаруживающие

цели по эхо-сигналу — активными. Существуют также системы, которые одновременно обладают возможностями активных и пассивных систем.

Ниже рассмотрены характеристики целей, необходимые для оценки пассивных и активных систем. Пассивные цели характеризуются своим «портретом», т. е. уровнем спектральной плотности сигнала на расстоянии 1 м от акустического центра цели. Для активных систем важным параметром является сила цели, с помощью которого оценивается интенсивность отраженного от цели эхо-сигнала.

В течение второй мировой войны были выполнены тщательные измерения пассивных и активных характеристик надводных кораблей и подводных лодок, результаты которых приводятся в несекретных источниках [1 ... 3]. Несмотря на то что эта информация относится к судам, которые теперь считаются устаревшими, нельзя утверждать, что основные их характеристики по форме и амплитуде совершенно не похожи на характеристики современных кораблей. Конкретное их значение в оборонных целях по вполне понятным соображениям засекречено. В связи с этим в дальнейшем основное внимание будет сосредоточено на изучении природы акустических характеристик целей, а не на рассмотрении параметров конкретных типов надводных кораблей и подводных лодок.

12.1. Акустические портреты надводных кораблей и подводных лодок

Корабли и подводные лодки длиной от 30 до 300 м перемещаются в воде с помощью гребных винтов, приводимых в действие установками с мощностью на валу от нескольких тысяч до сотен тысяч киловатт. Некоторая часть этой огромной энергии неизбежно излучается в воду в виде акустической энергии.

Основные источники излучаемого шума следующие [4, 5]: энергетическая установка, которая включает машину, редукторы, вал, подшипники и т. д.;

винты, которые хотя и являются частью энергетической установки, должны рассматриваться отдельно вследствие существенно отличного способа, которым они создают акустические сигналы;

вспомогательные механизмы, в состав которых входят механические и электрические системы, не относящиеся к энергетической установке, такие, как вентиляторы, генераторы, насосы; гидродинамические эффекты, состоящие из шумов обтекания, а также шумов различных частей оборудования и конструкций, которые создаются за счет протекания жидкостей.

Спектр излучаемого шума включает непрерывную широкополосную составляющую, а также узкополосные синусоидаль-

ные компоненты, которые часто называют дискретными линиями («дискретами»). В зависимости от своего происхождения различные спектральные составляющие могут зависеть либо не зависеть от скорости, глубины или других факторов, относящихся к условиям работы кораблей.

Акустический портрет обычно определяют на относительно небольших расстояниях (100 или 200 м), а затем пересчитывают относительно расстояния 1 м в предположении сферического закона распространения.

В связи со сложным законом распространения звука в океане акустический портрет, измеренный даже на средних расстояниях, может существенно отличаться от измеренного на малом расстоянии. На больших расстояниях сказывается влияние затухания на высокочастотные составляющие спектра. В мелководных каналах отклик канала неодинаков для дискретных составляющих на различных частотах, что приводит к существенному отличию по амплитуде относительно измерений на малых расстояниях. При необходимости охарактеризовать акустический портрет цели на значительных расстояниях от нее следует учитывать, если это возможно, частотную зависимость затухания в соответствии с акустической траекторией распространения звука.

12.1.1. Шумы энергетической установки

В состав энергетической установки входят вращающиеся валы, подшипники, шестерни и в зависимости от конструкции соответствующие машины, турбины или электрические приводные моторы. Небольшой динамический разбаланс в этих системах вызывает вибрацию, передающуюся через фундаменты и опоры на корпус, который излучает акустическую энергию в воду. Возникающий таким образом шум состоит из тональных (дискретных) составляющих, соответствующих частоте вращения подвижных частей системы. Как правило, силы, порождающие дискретные линии в спектре, увеличиваются пропорционально квадрату частоты вращения, поэтому их интенсивность чаще всего изменяется в соответствии со скоростью корабля.

Системе движения присущи также силы трения, которые создают широкополосную составляющую акустического портрета, также зависящую от скорости.

12.1.2. Шум винта

Шум винта связан с кавитацией, возникающей на его вращающихся лопастях. Вращение приводит к уменьшению давления на кромках и вокруг лопастей. Когда давление снижается ниже критического, начинают возникать разрывы воды и

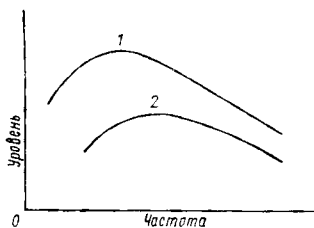


Рис 12.1. Форма огибающей спектра кавитационного шума винта

пузырьки. Пузырьки сначала растут, а затем быстро схлопываются, создавая широкополосный шум. Поскольку начало кавитации зависит от заглубления и частоты вращения винта, кавитационный шум уменьшается с глубиной и возрастает с увеличением частоты [4]. Форма огибающей кавитационного спектра показана на рис. 12.1. Частота, на которой уровень спектра кавитации будет максимальным, зависит от размеров винта, а также от

глубины и частоты вращения, и обычно снижается с увеличением диаметра винта.

Кавитационный шум является основной компонентой акустического портрета надводных кораблей и идущих вблизи поверхности подводных лодок. Погружаясь на достаточную глубину, подводная лодка может предотвратить кавитацию и тем самым значительно уменьшить свою шумность (кривая 2). С началом кавитации шумность подводной лодки в высокочастотной части спектра может возрасти на 20 дБ и более (кривая 1).

Кавитационный шум обычно модулируется по амплитуде в результате вращения винта. Частота модуляции определяется частотой вращения лопастей (частота вращения вала, умноженная на число лопастей) и представляет собой ценную информацию для классификации целей.

Дискретные составляющие шума могут возникать также и при вибрации лопастей винта. Это явление получило название «пення» винта.

12.1.3. Шум вспомогательных механизмов

Вспомогательные механизмы выполняют определенную работу, которая непосредственно не связана с движением корабля. Электрогенераторы, насосы, воздухопроводы и другие механизмы работают более или менее постоянно и обычно вращаются с постоянной частотой.

Спектр акустического шума, создаваемого вспомогательными механизмами, вследствие динамического разбаланса вращающихся частей будет линейчатым. Поскольку эти механизмы непосредственно не связаны с движением корабля, дискретные составляющие стабильны по частоте и амплитуде.

12.1.4. Гидродинамический шум

Вода, обтекающая корпус и выступающие части корабля, создает шум вследствие различных гидродинамических эффектов. Ка-

вита́ция уже упоминалась в связи с шумом винтов. Кавитационный процесс возникает на корпусе и выступающих частях, когда давление падает ниже кавитационного порога. Однако поскольку это происходит на больших скоростях корабля, т. е. после возникновения кавитации на винтах, то кавитация на корпусе не оказывает значительного влияния на акустический портрет цели.

При обтекании водой на задних кромках тел могут возникать завихрения, вызывающие вибрацию. Вибрация, в свою очередь, приводит к возникновению шума. Обтекание корпуса также может стать турбулентным при скорости корабля, большей некоторого критического значения, а турбулентный поток приведет к возникновению вибрации корпуса и станет причиной шума.

За исключением кавитационного шума винтов, гидродинамический шум по сравнению с шумами механизмов вносит меньший вклад в шумовой портрет корабля. Однако для гидроакустической станции с подкильной антенной гидродинамический шум может оказаться основным источником помех, ограничивающих дальность обнаружения целей.

12.1.5. Общий акустический портрет

Общий диапазон ожидаемого уровня спектральной плотности помех показан на рис. 12.2. На частотах выше 1 кГц огибающая спектра имеет наклон около 20 дБ на декаду, а в районе 100 Гц в зависимости от размеров корабля, скорости и глубины погружения она становится более плоской. Нижняя сплошная кривая соответствует погруженной подводной лодке на докавитационной скорости под электромоторами, а верхняя — линкору на скорости 20 уз. В зависимости от частоты размах между кривыми составляет 50 ... 70 дБ. На этом же рисунке приведен типичный график спектра окружающего шума (штриховая линия).

Представляет интерес общая величина акустической мощности, соответствующая кривым рис. 12.2. Применительно к большому надводному кораблю она составляет около 1 кВт, а для подводной лодки — несколько милливольт.

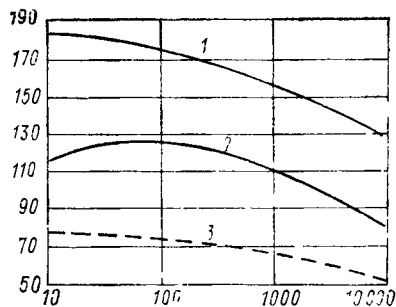


Рис 12.2. Диапазон ожидаемого спектрального уровня шумности для надводных кораблей и подводных лодок:

1 — большой надводный корабль (большая скорость), 2 — погруженная подводная лодка (малая скорость); 3 — уровень типичного окружающего шума

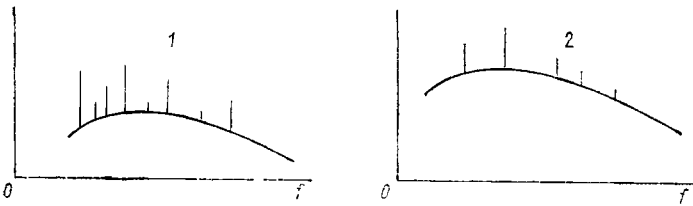


Рис. 12.3. Широкополосные и узкополосные составляющие акустического портрета подводной лодки на малой (1) и большой (2) скоростях

Вместе с тем акустическая мощность является лишь незначительной частью мощности, которая затрачивается на движение корабля. Очень малый уровень шума, излучаемый подводной лодкой, ставит перед конструкторами систем обнаружения подводных лодок серьезные проблемы.

На рис. 12.3 показаны более детализированные акустические портреты подводной лодки на малой и большой скоростях. Они включают наравне со сплошным спектром дискретные составляющие (узкополосные компоненты), обусловленные системой движения корабля, винтами и вспомогательными механизмами.

Дискретные составляющие, обусловленные вспомогательными механизмами, обычно стабильны и не зависят от скорости корабля. Ширина их часто пропорциональна частоте и составляет $0,3 \dots 0,03 \%$ от частоты. Амплитуда и частота дискретных составляющих, вызванные системой движения и винтами, изменяются вместе со скоростью движения корабля. Их ширина обычно больше ширины узкополосных компонентов шума вспомогательных механизмов, а в некоторых случаях они представляют собой звукоряды.

Линейчатая структура акустического портрета подводной лодки, обусловленная дискретными составляющими спектра системы движения и вспомогательных механизмов, особенно хорошо видна при отсутствии кавитации на винтах. По мере увеличения скорости и с началом кавитации на винтах уровень сплошной части спектра увеличивается и начинает маскировать отдельные дискретные составляющие. Частоты, на которых возникают дискретные составляющие, обусловленные системой движения, возрастают, а амплитуды этих компонентов увеличиваются, в то время как параметры дискретных составляющих шумов вспомогательных механизмов остаются неизменными.

Акустический портрет изменяется в зависимости от условий распространения звука в среде. Нестабильность во времени и многолучевость распространения звука могут изменить как ширину спектра принятого сигнала, так и относительные ампли-

туды узкополосных тональных составляющих, а при относительном перемещении корабля и цели появляется еще и частотное (доплеровское) смещение спектра.

12.2. Сила цели

В случае активных систем в водную среду с помощью антенны излучаются импульсы конечной длительности. В акустическом отношении цель представляет собой неоднородность среды, которая отражает часть падающей на нее излученной энергии. Именно эта часть энергии будет полезным эхо-сигналом для приемной системы. В моностатических гидроакустических станциях излучающая и приемная антенны расположены в одном и том же месте, в бистатических — в различных местах.

Для активных систем особый интерес представляют свойства цели, определяющие величину отношения интенсивностей отраженного и падающего сигналов, как показано на рис. 12.4 для моностатической 2 и бистатической 3 гидроакустических станций. Пусть интенсивность источника 1, измеренная на расстоянии 1 м от него, равна I_0 . Интенсивность падающей на цель волны на расстоянии r_1 от источника (в предположении сферического распространения)

$$I_i = I_0/r_1^2.$$

Часть энергии, перехваченной целью, отражается в направлении приемника. Сила цели t_s определяется как отношение отраженной в направлении приемника интенсивности I_r , измеренной на расстоянии 1 м от акустического центра цели, к интенсивности падающей волны:

$$t_s = I_r/I_i. \quad (12.1)$$

Сила цели для моностатических и бистатических систем в общем случае неодинакова вследствие геометрических осо-

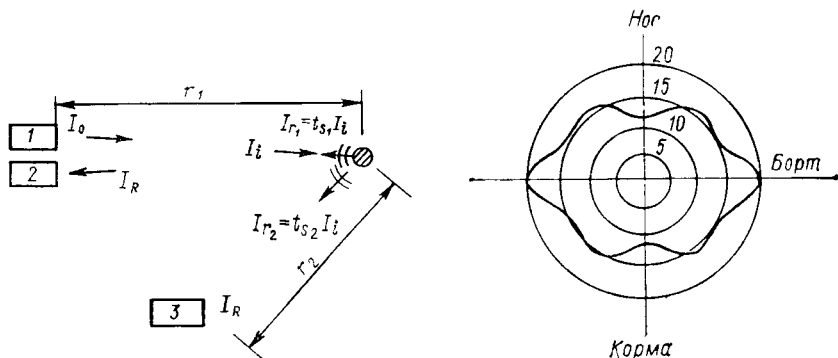


Рис. 12.4. Взаимное расположение активной станции и целей

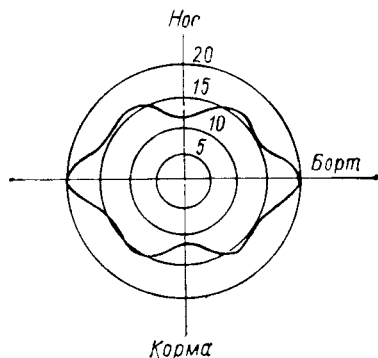


Рис. 12.5. График типичной силы цели подводной лодки

бенностей и акустических свойств цели. Моностатическую силу цели иногда называют силой обратного рассеяния цели.

Интенсивность эхо-сигнала на входе приемной системы для моностатической гидроакустической станции при известной силе цели

$$I_R = I_r/r_1^2 = t_s I_i/r_1^2 = t_{s1} I_0/r_1^4, \quad (12.2)$$

для бистатической —

$$I_r = t_{s2} I_0/(r_1^2 r_2^2). \quad (12.3)$$

В логарифмической форме выражения (12.2) и (12.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \text{УЭ}_R &= \text{УИ} + \text{СЦ}_1 - 2\text{ПР}; \\ \text{УЭ}_r &= \text{УИ} + \text{СЦ}_2 - \text{ПР}_1 - \text{ПР}_2, \end{aligned} \quad (12.4)$$

где УЭ — уровень эхо-сигнала;

$$\text{СЦ} = 10 \lg I_r/I_i. \quad (12.5)$$

Акустическая сила цели является функцией ее формы, размеров, акустического импеданса и частоты падающего сигнала. Сила цели простых геометрических форм в предположении большого значения акустического импеданса рассчитана и приведена в различных источниках [3, 4, 6, 7]. Силу цели более сложных форм, таких, как корабли и подводные лодки, чаще всего определяют экспериментально [3]. Чтобы получить представление о значении силы цели, рассмотрим абсолютно жесткую сферу с радиусом $a \gg \lambda$ в поле плоской волны с интенсивностью I_i . Акустическая мощность, перехваченная сферой из поля падающей волны,

$$P_i = \pi a^2 I_i.$$

Абсолютно жесткая сфера переизлучает захваченную энергию равномерно по всем направлениям. Интенсивность переизлученного поля на расстоянии 1 м от центра сферы

$$I_r = P_i/(4\pi) = \pi a^2 I_i/(4\pi) = a^2 I_i/4, \quad (12.6)$$

откуда

$$\text{СЦ} = 10 \lg (I_r/I_i). \quad (12.7)$$

Так, сила цели 0 дБ соответствует отражению от жесткой сферы радиусом 2 м.

Общий характер изменения силы цели подводной лодки в зависимости от курсового угла показан на рис. 12.5. Сила цели максимальна на траверзных курсовых углах вследствие большого значения поперечного сечения и простой формы и минимальна на носовых и кормовых курсовых углах. Рубка, различные выступающие части, балластные цистерны и другие внутренние конструкции вносят свой вклад в изменение силы цели в зависимости от курсового угла.

Приведенные значения силы цели получены в предположении длительности зондирующего импульса, достаточной для одновременного облучения всей цели. Интервал дистанции, одновременно облученной импульсом моностатической гидроакустической станции,

$$\Delta r = ct_p/2,$$

где t_p — длительность импульса; c — скорость звука. Таким образом, для цели длиной 100 м в направлении лоцирования длительность импульса для одновременного облучения должна быть, по крайней мере, 133 мс. Длительность эхо-сигнала будет равна $t_p + 2l/c$, где l — длина цели. На рис. 12.6 показаны зондирующие импульсы большой и малой длительностей и эхо-сигналы от подводной лодки при облучении ее с носовых углов.

При большой длительности импульса амплитуда сигнала постепенно нарастает до своего максимального значения, а затем уменьшается по мере того, как импульс проходит цель. В случае короткого импульса принимается серия коротких эхо-сигналов, показывая вклад наиболее существенных отражателей (блестящих точек) подводной лодки. В терминах теории электрических цепей эхо-сигнал будет сверткой зондирующего импульса с импульсным откликом цели, а импульсный отклик цели — функцией курсового угла.

К другим целям, представляющим военный или коммерческий интерес, относят мины, торпеды, рыбы. Мины и торпеды обладают простой геометрической формой, что позволяет рассчитать силу цели по формулам, приведенным в работе [4, табл. 9.1]. Значения силы цели изменяются в пределах от -15 до $+15$ дБ в зависимости от размера и курсового угла. Сила цели рыб определяется их размером и физиологией и для промысловых рыб лежит в пределах от -15 до -40 дБ [8, 9].

12.3. Реверберация

Реверберация — это результат отражения излученной энергии от различных неоднородностей океана и его границ. В большинстве случаев реверберация приводит к появлению на входе приемника нежелательных сигналов, которые искажают полез-

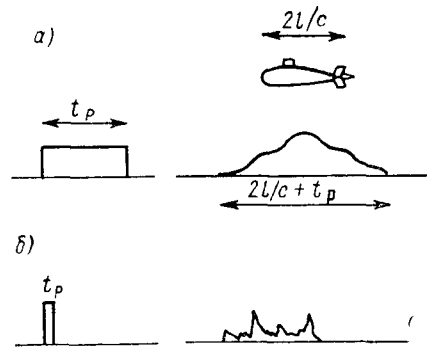


Рис. 12.6. Эхо-сигнал от подводной лодки на ее носовом курсовом углу: а — пространственная длительность импульса сравнима с протяженностью цели ($t_p \geq 2l/c$); б — пространственная длительность импульса мала по сравнению с длиной цели ($t_p \ll 2l/c$)

ный эхо-сигнал. Таким образом, в активных системах для обнаружения полезного эхо-сигнала приходится бороться не только с окружающим шумом, но и с реверберационной помехой. Аналогичная ситуация существует и для радиолокационных систем при обнаружении целей на фоне отражений от поверхности земли и капель дождя.

Среди основных причин возникновения объемной реверберации, по-видимому, важнейшими источниками являются рыбы, планктон и другие биологические объекты; неоднородность и шероховатость поверхности и дна океана — причины поверхностной реверберации. Для простоты предполагают, что неоднородности равномерно распределены в объеме океана и на его поверхности. На самом деле это не всегда справедливо. Например, биологические объекты часто сосредоточены в слоях на определенных глубинах океана, что вызывает существенные изменения объемного рассеяния.

Для количественного описания свойств реверберации необходимо ввести понятие силы обратного рассеяния единичного объема или единичной поверхности, подобно тому, как это было сделано для силы цели. Например, сила объемного рассеяния определяется как отношение интенсивности рассеянной энергии на расстоянии 1 м от единичного объема к интенсивности энергии, падающей на единичный объем. Таким образом,

$$s_v = (I_r/\text{единичный объем})/I_i,$$

или в логарифмическом виде

$$S_v = 10 \lg s_v = 10 \lg (I_r/\text{ед. об.}/I_i). \quad (12.8)$$

Пусть источник звука, имеющий нормированную характеристику направленности $b(\psi, \theta)$, излучает импульс длительностью t_p . Если интенсивность на расстоянии 1 м от источника составляет I_0 , то на расстоянии r в направлении ψ, θ интенсивность

$$I_i = I_0 b(\psi, \theta)/r^2. \quad (12.9)$$

По определению интенсивность звука, рассеиваемого элементарным объемом dv на расстоянии r в данном направлении,

$$dI_r = s_v I_i dv = s_v I_0 b(\psi, \theta) dv/r^2. \quad (12.10)$$

Если характеристики направленности приемной и излучающей систем идентичны, интенсивность реверберации на выходе антенны моностатической системы

$$dI_r = s_v I_0 b^2(\psi, \theta) dv/r^4. \quad (12.11)$$

Если характеристика направленности приемной и передающей систем различны, выражение $b^2(\psi, \theta)$ заменяется произве-

дением двух характеристик направленности. Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что характеристики направленности идентичны.

Выражение для определения интенсивности объемной реверберации на расстоянии r получается интегрированием по всем возможным элементам объема на этом расстоянии:

$$I_r = (s_v I_0 / r^4) \int b^2(\theta, \psi) dv. \quad (12.12)$$

Элементарный объем в уравнении (12.12) определим с помощью рис. 12.7. Объем представляет собой цилиндр длиной $ct_p/2$ с основанием $r^2 d\Omega$, где $d\Omega$ — элементарный телесный угол. Таким образом,

$$dv = (ct_p/2) r^2 d\Omega. \quad (12.13)$$

Подставив выражение (12.13) в (12.12), получим

$$I_r = (s_v I_0 ct_p / 2r^2) \int b^2(\theta, \psi) d\Omega. \quad (12.14)$$

Интеграл (12.14) можно трактовать как эквивалентную взаимную характеристику направленности. Обозначив ее Ω_B , перепишем выражение (12.14):

$$I_r = s_v I_0 ct_p \Omega_B / 2r^2. \quad (12.15)$$

Представим уравнение (12.15) в логарифмическом виде

$$UP_v = S_v + УИ - ПР + 10 \lg (ct_p \Omega_B / 2), \quad (12.16)$$

где UP_v — уровень объемной реверберации на расстоянии r ; S_v — коэффициент обратного рассеяния объемной реверберации; УИ — уровень источника, соответствующий I_0 ; ПР — односторонние потери при сферическом распространении на расстоянии r .

Величина S_v является функцией глубины, времени дня, сезона, частоты и степени концентрации биологических объектов. Обычно $S_v = -60 \dots -90$ дБ.

Необходимо отметить, что уровень реверберации снижается при уменьшении длительности импульса или эффективной ширины характеристики направленности, причем степень снижения пропорциональна $20 \lg r$, а не $40 \lg r$, характерной для эхосигнала от точечной цели. Происходит это потому, что объем элементарного объема реверберации увеличивается пропорционально квадрату расстояния, частично компенсируя двусторонние потери распространения. Формулы расчета Ω_B для наиболее распространенных типов антенн приведены в работе [4, табл. 8.1].

Выражение для поверхностной реверберации выводим аналогично тому, как это было сделано для объемной реверберации. Для простоты будем считать, что ось характеристики на-

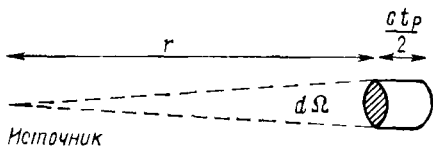
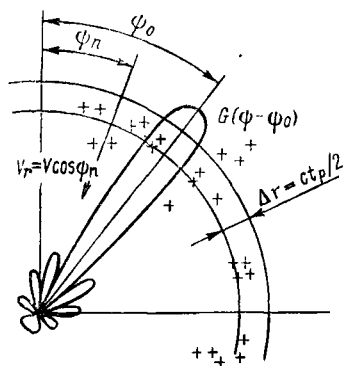


Рис. 12.7. Элементарный объем при определении поля объемной реверберации (площадь равна $r^2 d\Omega$)

Рис. 12.8. Движущийся носитель гидролокатора в стационарном поле рассеивателей



правленности ориентирована параллельно поверхности. Элементарная площадь поверхности на расстоянии r

$$da = (ct_p/2) r d\gamma, \quad (12.17)$$

где $d\gamma$ — угол в азимутальной плоскости. Определив ширину произведения взаимной характеристики направленности в горизонтальной плоскости как эффективную, получим выражение для уровня поверхностной реверберации

$$УР_s = S_s + УИ - 3/2ПР + 10 \lg ct_p v_B/2, \quad (12.18)$$

где S_s — коэффициент обратного рассеяния поверхностной реверберации.

Как видно из рис. 12.8, уровень поверхностной реверберации падает с расстоянием быстрее, чем при объемной реверберации. Это объясняется тем, что площадь элементарного участка поверхности возрастает пропорционально r , а не r^2 .

Сила обратного рассеяния была для поверхности и дна определена экспериментально в работах [10 ... 12]. Полученные значения являются функцией частоты, угла скольжения, скорости ветра, а в случае рассеяния дном — также функцией состава грунта и его шероховатости (неровности). Опубликованные экспериментальные значения для S_s лежат в пределах от -10 до -50 дБ. Сила обратного рассеяния поверхностной реверберации возрастает пропорционально частоте, углу скольжения и неровности поверхности.

При расчете дальности обнаружения необходимо знать отношение интенсивности эхо-сигнала от точечной цели к интенсивности реверберации, соответствующей расстоянию до цели. Например, пусть цель находится на расстоянии r , а преобладающей помехой будет объемная реверберация. Применяя выражение (12.4) для моностатической системы и (12.16), можно

написать

$$\frac{- \text{УЭ} = \text{СЦ} + \text{УИ} - 2\text{ПР} - \text{УР}_v = S_v + \text{УИ} - \text{ПР} + 10 \lg(ct_p \Omega_B/2)}{\text{УЭ} - \text{УР}_v = \text{СЦ} - S_v - \text{ПР} - 10 \lg(ct_p \Omega_B/2)}. \quad (12.19)$$

Как видно из уравнения (12.19), отношение эхо-сигнал/реверберация не зависит от уровня излучения и обратно пропорционально квадрату расстояния. Кроме того, отношение эхо-сигнал/реверберация увеличивается при уменьшении длительности импульса. Эти выводы верны, если размеры цели малы по сравнению с пространственной и угловой протяженностями излученного сигнала в месте расположения цели.

Применяя выражения (12.4) и (12.18), найдем для отношения эхо-сигнал/поверхностная реверберация:

$$\text{УЭ} - \text{УР}_s = \text{СЦ} - S_s - \text{ПР}/2 - 10 \lg(ct_p \gamma_B/2). \quad (12.20)$$

Как следует из уравнения (12.20), отношение эхо-сигнал/поверхностная реверберация уменьшается обратно пропорционально расстоянию, а не r^2 . Для пояснения ограничений, связанных с особенностями поверхностной реверберации, предположим, что эхо-сигнал и поверхностная реверберация равны на расстоянии 40 км. Однако для надежного обнаружения цели эхо-сигнал должен на 10 дБ превышать уровень поверхностной реверберации. На основании уравнения (12.20) дальность должна быть уменьшена в 10 раз, чтобы получить превышение эхо-сигнала на 10 дБ. Таким образом, эхо-сигнал от цели будет надежно обнаружен на расстоянии 4 км.

12.3.1. Статистические и спектральные свойства реверберации

Возникновение реверберации обусловлено рассеянием излученной энергии от отражателей, случайно расположенных в пространстве. Для исследования свойств реверберации предположим вначале, что гидроакустическая станция и отражатели неподвижны. Излученный импульс ограничен во времени, а ширина его спектра мала по сравнению с несущей частотой. Необходимо определить статистические характеристики огибающей реверберации и ее спектральную плотность на расстоянии, много большем, чем длительность импульса.

Пусть $s(t)$ — излученный импульс, $a_n s(t - t_n)$ — эхо-сигнал, принятый от n -го отражателя в ограниченном интервале дальности. Принятый эхо-сигнал можно выразить в виде свертки излученного импульса с импульсом, имеющим амплитуду a_n в момент $t = t_n$. Таким образом,

$$a_n s(t - t_n) = s(t) \otimes a_n \delta(t - t_n). \quad (12.21)$$

Тогда суммарный сигнал, принятый в ограниченном интервале дальности,

$$s_R(t) = s(t) \otimes \sum_n a_n \delta(t - t_n) = S(t) \otimes c(t), \quad (12.22)$$

где t_n принадлежит избранному ограниченному интервалу дальности; $c(t)$ — импульсный отклик от суммы рассеивающих элементов в заданном интервале дистанции.

Допустим, что в заданном интервале дальности содержится большое число элементов, t_n более или менее равномерно распределено на интервале и a_n — случайная конечная величина с нулевым средним значением, причем a_n и a_m независимы для всех $n \neq m$. Представим $s(t)$ в виде

$$s(t) = \mu(t) \exp(j \cdot 2\pi f_0 t),$$

где $\mu(t)$ — огибающая; f_0 — несущая частота. Теперь уравнение (12.22) принимает вид

$$s_R(t) = \sum_n a_n \mu(t - t_n) \exp[j \cdot 2\pi f_0 (t - t_n)], \quad (12.23)$$

откуда огибающая принятого сигнала

$$\begin{aligned} \mu_R(t) &= s_R(t) \exp(-j \cdot 2\pi f_0 t) = \sum_n a_n \mu(t - t_n) \exp(-j \cdot 2\pi f_0 t_n) = \\ &= \sum_n a_n \mu(t - t_n) \cos 2\pi f_0 t_n - j \sum_n a_n \mu(t - t_n) \sin 2\pi f_0 t_n. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Действительная и мнимая части в формуле (12.24) имеют одинаковые дисперсии, и на основании центральной предельной теоремы считаем их гауссовыми с нулевым средним значением. Вследствие ортогональности функций синуса и косинуса действительная и мнимая части статистически независимы. Таким образом, огибающая принятого сигнала является комплексной гауссовой величиной. Статистические свойства подобных величин рассмотрены в пп. 9.7.4. В частности, квадрат амплитуды $\mu_R(t)$ имеет функцию плотности вероятности χ^2 с двумя степенями свободы, а амплитуда огибающей имеет распределение Рэлея.

Поскольку число рассеивателей, которое необходимо учитывать, и их сила для любого момента времени являются функциями расстояния, то и среднее значение, и дисперсия, связанные с огибающей, также будут функциями расстояния.

Спектральную плотность реверберационного процесса определим с помощью преобразования Фурье (12.22). Пусть

$$\begin{aligned} s(t) &\leftrightarrow S(f); \\ c(t) &\leftrightarrow C(f) = \sum_n a_n \exp(-j \cdot 2\pi f t_n); \\ s_R(t) &= s(t) \otimes c(t) \leftrightarrow S(f) \sum_n a_n \exp(-j \cdot 2\pi f t_n). \end{aligned} \quad (12.25)$$

По определению спектральная плотность — это математическое ожидание значения квадрата амплитуды функции (12.25) в частотной области. Таким образом,

$$\Psi_R(f) = E[|S(f)C(f)|^2] = |S(f)|^2 E \sum_m \sum_n a_m a_n [-j \cdot 2\pi f (t_m - t_n)]. \quad (12.26)$$

Вследствие независимости a_m и a_n математическое ожидание (12.26) равно нулю при $n \neq m$. Следовательно,

$$\Psi_R = |S(f)|^2 E \left[\sum_n a_n^2 \right] = |S(f)|^2 N \sigma_{an}^2, \quad (12.27)$$

где N — общее число рассеивающих элементов в рассматриваемом объеме (площади).

Как следует из выражения (12.27), спектральная плотность реверберации, принятая из ограниченного интервала, имеет тот же вид, что и спектр мощности излученного сигнала. Амплитуда спектральной плотности реверберации по причине, упомянувшейся ранее, изменяется с расстоянием.

Предположим теперь, что гидроакустическая станция движется с постоянной скоростью в поле неподвижных элементарных рассеивателей, как это показано на рис. 12.8. Вследствие эффекта Доплера частота принятого сигнала от элемента рассеяния сдвинута на величину, пропорциональную радиальной относительно гидроакустической станции составляющей скорости. Для синусоидального излученного сигнала с частотой f_0 доплеровский сдвиг для n -го рассеивателя

$$f_{d_n} \approx 2V \cos \psi_n / \lambda_0. \quad (12.28)$$

Учитывая сигналы, принятые из кольцевой зоны с центром, совпадающим с местом движущейся гидроакустической станции, получим, что доплеровское смещение лежит в пределах от $+2V/\lambda_0$ до $-2V/\lambda_0$.

Для зондирующего сигнала с шириной полосы частот, малой по сравнению с несущей, спектр принятого сигнала от одиночного рассеивателя приблизительно повторяет спектр зондирующего сигнала, сдвинутого по частоте на величину доплеровского смещения $f_{d_n} = 2V_n/\lambda_0$, где V_n — относительная радиальная составляющая скорости; λ_0 — длина волны, соответствующая несущей частоте излученного сигнала. Зондирующий сигнал и его спектр связаны следующим преобразованием Фурье:

$$s(t) \leftrightarrow S(f),$$

а принятый сигнал и его спектр для n -го рассеивателя в предположении ненаправленного излучения и приема —

$$a_n s(t - t_n) \exp(j \cdot 2\pi f_{d_n} t) \leftrightarrow a_n S(f - f_{d_n}) \exp[-j \cdot 2\pi (f - f_{d_n}) t_n]. \quad (12.29)$$

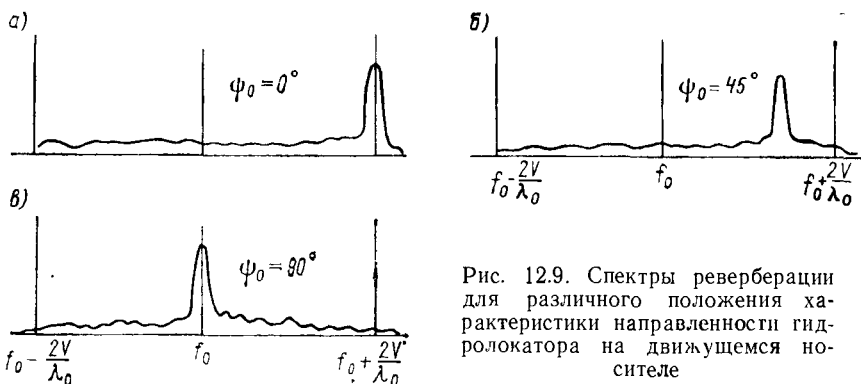


Рис. 12.9. Спектры реверберации для различного положения характеристики направленности гидролокатора на движущемся носителе

При направленных излучении и приеме с идентичными характеристиками направленности $G(\psi - \psi_0)$ спектр принятого сигнала из кольцевого элемента

$$s_R(f) = \sum_n a_n |G(\psi_n - \psi_0)|^2 S(f - f_{d_n}) \exp[-j \cdot 2\pi(f - f_{d_n})t_n]. \quad (12.30)$$

Полагая, что сигналы от отдельных рассеивателей статистически независимы, усредненный спектр мощности принятого сигнала, соответствующий выражению (12.30), запишем в виде

$$\Psi_R(f) = \sum_n \sigma_{a_n}^2 |G(\psi_n - \psi_0)|^4 |S(f - f_{d_n})|^2. \quad (12.31)$$

Таким образом, спектр принятого сигнала является суммой спектров от отдельных рассеивателей с весом, определенным квадратом взаимной характеристики направленности (рис. 12.9). На рис. 12.9, а направление оси характеристики направленности совпадает с направлением вектора скорости, так что спектр принятого реверберационного сигнала сосредоточен в районе несущей частоты $+2V/\lambda$. Ширина основного лепестка спектра определяется шириной полосы зондирующего сигнала и угловой шириной характеристики направленности. Доплеровское смещение в пределах ширины характеристики направленности приводит к некоторому уширению спектра принятого сигнала. В качестве примера рассмотрим зондирующий импульс длительностью 0,1 с, ширина характеристики направленности 0,1 рад и $2V/\lambda = 100$ Гц. При $\psi_0 = 0$ доплеровское смещение в пределах характеристики направленности

$$\Delta f_d = (2V/\lambda) [1 - \cos(\psi_B/2)] = 0,125 \text{ Гц},$$

что намного меньше ширины полосы зондирующего сигнала, равной 10 Гц.

В диапазоне частот от $f_0 + 2V/\lambda$ до $f_0 - 2V/\lambda$ мощность реверберационной помехи уменьшается на величину, определяемую уровнем бокового поля характеристики направленности. Поскольку величина доплеровского смещения не может превосходить $2V/\lambda$, спектр на частотах выше $f_0 + 2V/\lambda$ определяется прежде всего формой спектра зондирующего сигнала с центром на частоте $f_0 + 2V/\lambda$.

На рис. 12.9, б ось характеристики направленности отклонена от направления вектора скорости на 45° . Основная энергия спектра сосредоточена в лепестке с центром на частоте $0,707 (2V\lambda)$, оставшаяся часть, обусловленная приемом реверберации боковым полем антенны, распределена в диапазоне $f_0 \pm 2V/\lambda$. Наконец, на рис. 12.9, в ось характеристики направленности перпендикулярна вектору скорости, вследствие чего доплеровское смещение основного лепестка спектра равно нулю, а реверберационная энергия, обусловленная приемом реверберации по боковому полю антенны, распределена симметрично во всем диапазоне доплеровского смещения.

Задачи

12.1. Используя спектральные характеристики, приведенные на рис. 12.2, рассчитайте уровень шумности для погруженной подводной лодки, движущейся с малой скоростью для декадных полос 10...100, 100...1000 и 1000...10 000 Гц.

12.2. Используя кривую окружающего шума, приведенную на рис. 12.2, рассчитайте уровень помех в каждой из указанных в п. 12.1 полос. Рассчитайте отношение сигнал/помеха для цели, находящейся на расстоянии 1000 м от гидроакустической станции в полосе, заданной в п. 12.1. Закон распространения звука — сферический.

12.3. Излучатель моностатической гидроакустической станции имеет мощность 1 кВт при ненаправленном излучении синусоидального сигнала. Рассчитайте уровень эхо-сигнала от цели силой 15 дБ, находящейся на расстоянии 2000 м от гидроакустической станции в предположении сферического распространения звука.

12.4. Интенсивность эхо-сигнала в бистатической системе пропорциональна $r_1^2 r_2^2$, где r_1 и r_2 — расстояния от цели до излучателя и от цели до приемника. Допустим, цель движется таким образом, что $r_1 + r_2 = K$. Полагая силу цели постоянной, определите соотношение между r_1 и r_2 , которое максимизирует значение эхо-сигнала.

12.5. Применительно к моностатической системе п. 12.3, рассчитайте уровень обемной реверберации и отношение сигнал/реверберация при расстоянии до цели 2000 м, полагая $S_V = -80$ дБ, $t_p = 0,1$ с, $\Omega_B = 0,1$ рад и $СЦ = +10$ дБ.

12.6. Носитель гидроакустической станции движется с постоянной скоростью 40 уз в однородном поле элементарных стационарных рассеивателей. Зондирующий импульс на частоте $f_0 = 20$ кГц длительностью 10 мс имеет прямоугольную огибающую. Эффективная ширина характеристики направленности 0,3 рад, а направление оси ее характеристики направленности относительно вектора скорости носителя составляет 30° . Нарисуйте приближительную кривую огибающей принятой спектральной плотности реверберации с учетом доплеровского уширения полосы в пределах характеристики направленности.

Список литературы

1. *Dow M. T., Emling J. W., Knudsen V. O.* Survey of Underwater Sound No. 4: Sounds from Surface Ships. NDRC Division 6, Section 6.1., NDRC-2124 (1945); available through U. S. Department of Commerce, Federal Clearinghouse for Scientific and Technical Information, Springfield, Va.
2. *Knudsen V. O., Axford R. S., Emling J. W.* Survey of Underwater Sound No. 2: Sounds from Submarines, NDRC Division 6, Section 6-1, NDRC-1306 (1943).
3. *Physics of Sound in the Sea. Part III: Reflection of Sound from Submarines and Surface Vessels.* NDRC Division 6, Vol. 8, Summary Technical Reports (1946); reprinted in 1969 by the U. S. Government Printing Office, Washington D. C.
4. *Urlick R. J.* Principles of Underwater Sound for Engineers, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1975, Chaps. 8, 9 and 10.
5. *Albers V. M.* Underwater Acoustics Handbook-11. University Park, Pa.: The Pennsylvania State University Press, 1965, Chap. 17.
6. *Principles of Sonar Installation,* U. S. Naval Underwater Systems Center, Technical Document 6059.
7. *Kerr D. E.* Ed, Propagation of Short Radio Waves, MIT Radiat. Lab. Ser., Vol. 13. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951.
8. *Cushing D. H.* et al., «Measurements of the Target Strength of Fish», J. Br. IRE, Vol 25. P. 299 (1963).
9. *Volberg H. W.* Acoustic Properties of Fish. 14th Pacific Tuna Conference, Sept. 1963.
10. *Marsh H. W.* Sound Reflection and Scattering from the Sea Surface. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 35. P. 240 (1963).
11. *McKinney C. M., Anderson C. D.* Measurements of Backscattering of Sound from the Ocean Bottom. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 36. P. 153 (1964).
12. *Burstein A. W., Keane J. J.* Backscattering of Explosive Sound from Ocean Bottom, J. Acoust. Am., Vol. 36. P. 1596 (1964).

Глава 13.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ

Гидроакустические системы предназначены для обнаружения шумящих целей или сигналов, отраженных от подводных объектов, а также для оценки обнаруженных объектов, измерения расстояния до них, определения направления и радиальной скорости. Вследствие неизбежного присутствия помех и мешающих сигналов описание характеристик систем приводит к необходимости применения методов проверки статистических гипотез и оценки параметров. Детальное рассмотрение этих вопросов не входит в задачу данной книги. Поэтому изложение материала ограничено сведениями, необходимыми для понимания структурных схем и методов анализа характеристик систем.

13.1. Проверка гипотез

В качестве иллюстрации метода проверки гипотез рассмотрим следующий пример. Предположим, принятый сигнал $x(t)$ представляет собой случайный процесс $n(t)$, в составе которого может содержаться или не содержаться сигнал с известной и постоянной амплитудой. Эту возможность можно выразить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= n(t) + \mu; \\ x_0(t) &= n(t). \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

На основании имеющейся ограниченной во времени записи необходимо определить, содержит ли принятый процесс сигнал или нет, т. е. выбрать одну из гипотез $x_1(t)$ или $x_0(t)$. Первая гипотеза относится к случаю, когда сигнал присутствует, и обозначается H_1 , вторая — к случаю отсутствия сигнала и обозначается H_0 .

Для простоты предположим, что есть единственный отсчет принятого процесса. Имея некоторую статистическую модель ситуации, необходимо на основе измеренного значения амплитуды единственного отсчета выбрать наиболее правдоподобную гипотезу. В этом случае существуют две условных вероятности:

$$\left. \begin{aligned} P(H_1|x) &= \text{вероятность } H_1 \text{ при данном } x; \\ P(H_0|x) &= \text{вероятность } H_0 \text{ при данном } x. \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

Эти вероятности называют апостериорными, так как для их определения необходимо знать амплитуду принятого отсчета.

Основное правило состоит в выборе гипотезы, соответствующей максимуму апостериорной вероятности. Таким образом, выбираем H_1 , если

$$\frac{P(H_1|x)}{P(H_0|x)} \geq 1. \quad (13.3)$$

На основании соотношений между условными вероятностями, приведенными в гл. 9, запишем

$$P(H|x)P(x) = P(x|H)P(H).$$

Тогда выражение (13.3) можно представить в виде

$$\frac{P(H_1|x)}{P(H_0|x)} = \frac{P(x|H_1)P(H_1)}{P(x|H_0)P(H_0)} \geq 1, \quad (13.4)$$

где $P(H_1)$ и $P(H_0)$ — априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала.

Так как $P(H_1) = 1 - P(H_0)$, перепишем выражение (13.4):

$$\frac{P(x|H_1)}{P(x|H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{1 - P(H_0)}. \quad (13.5)$$

Легко показать, что левая часть формулы (13.5) эквивалентна отношению функций условных плотностей вероятностей, т. е.

$$\frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{1-P(H_0)}. \quad (13.6)$$

Это отношение называют отношением правдоподобия, а функции $p(x|H_1)$ и $p(x|H_0)$ — функциями правдоподобия. Проверку гипотез на основании отношения правдоподобия называют испытанием по методу максимального правдоподобия, проверку с использованием формулы (13.6) — испытанием по критерию максимума апостериорной вероятности. Для удобства $p(x|H_0)$ и $p(x|H_1)$ в дальнейшем обозначим через $p(x)$ и $p_1(x)$.

13.1.1. Критерий Неймана — Пирсона

На рис. 13.1 приведены графики функций плотности вероятности для гипотетической ситуации. Ось x разделена на две области принятия решения относительно гипотез H_1 и H_0 по критерию максимума апостериорной вероятности.

Независимо от выбора H_1 или H_0 существует конечное значение вероятности допустить ошибку, значение которой пропорционально площади заштрихованных областей 1 и 2. Вероятность выбора H_1 , когда верна гипотеза H_0 , называют ложной тревогой или ошибкой первого рода, она равна площади под кривой в области 1. Если $\gamma = x$, разделяющему ось абсцисс на две области, вероятность ложной тревоги

$$P_{fa} = \int_{\gamma}^{\infty} p_0(x) dx. \quad (13.7)$$

Если выбрать гипотезу H_0 , когда верна H_1 , то будет совершена ошибка пропуска (ложное отклонение), или ошибка второго рода. Вероятность ошибки второго рода P_{fd} определяется площадью области 2. Вероятность обнаружения P_d равна единице минус вероятность пропуска.

Таким образом,

$$P_D = \int_{\gamma}^{\infty} p_1(x) dx; \quad (13.8)$$

$$P_{fd} = \int_{-\infty}^{\gamma} p_1(x) dx = 1 - P_D. \quad (13.9)$$

Чтобы найти порог γ , при котором выражение (13.6) обращается в равенство, необходимо знать прежде всего $P(H_0)$, а также функцию условной плотности вероятности. Применительно к гидроакустическим или радиолокационным системам апри-

орные вероятности $P(H_0)$ и $P(H_1)$, как правило, не известны, т. е. в общем случае не существует статистических данных, позволяющих определить значение вероятности, с которой цель может оказаться в некоторой заданной точке в определенный момент времени. Более того, для случая, когда справедлива гипотеза H_1 , условная вероятность $p_1(x)$ зависит от соотношения неизвестной величины амплитуды сигнала x и амплитуды помех. Таким образом, в самом лучшем случае, существует единственный известный член из выражения (13.6) — условная вероятность $x|H_0$.

Критерий Неймана — Пирсона позволяет избежать затруднений, вызываемых незнанием амплитуды сигнала и априорных вероятностей с помощью выбора приемлемого значения вероятности ложной тревоги. В случае стационарного шума порог γ определяется на основании выражения (13.7). Вероятность обнаружения, соответствующая этому порогу и вероятности ложной тревоги, оказывается максимальной. Необходимо отметить, что, используя критерий максимального правдоподобия при известных значениях H_0 , H_1 и амплитуды сигнала, можно получить большую вероятность обнаружения, но только ценой более высокой вероятности ложной тревоги.

Для заданной амплитуды сигнала проверку гипотез по критерию Неймана — Пирсона можно представить в виде отношения правдоподобия:

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} \geq \lambda_0, \quad (13.10)$$

где λ_0 — функция порога γ и амплитуд сигнала и помех. В качестве примера допустим, что

$$\left. \begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_n^2} \right]; \\ p_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} \exp \left[\frac{-x^2}{2\sigma_n^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

Тогда функция отношения правдоподобия

$$\lambda(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \exp \left[\frac{(2\mu x - \mu^2)}{2\sigma_n^2} \right] \geq \lambda_0. \quad (13.12)$$

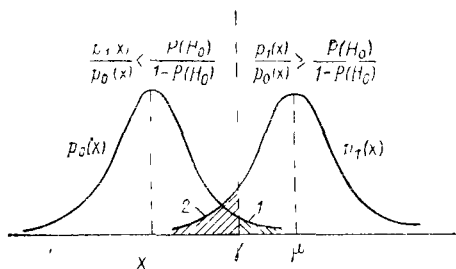


Рис 13.1 Графики функций плотности вероятности с разделением пространства на две области принятия решения относительно гипотез H_0 и H_1 на основе критерия максимума апостериорной вероятности

Выражение (13.12) обращается в равенство при $x = \gamma$, т. е.

$$\lambda_0 = \exp\left(\frac{2\mu\gamma - \mu^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (13.13)$$

Пролагарифмировав уравнение (13.12) и решив относительно x , получим

$$x \geq \sigma_n^2/\mu \ln(\lambda_0) + \mu/2 = \gamma. \quad (13.14)$$

Принятый отсчет x в этом случае называют *статистикой*, которую сравнивают с фиксированным порогом γ по критерию Неймана — Пирсона.

13.1.2. Испытания при большом числе отсчетов

Большое число отсчетов принятого сигнала можно использовать для улучшения результатов испытаний. Пусть серия из m отсчетов x_1, x_2, \dots, x_m представлена вектором \mathbf{x} . Поскольку отношение правдоподобия является отношением условных плотностей вероятностей, то

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p_1(x_1, x_2, \dots, x_m)}{p_0(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \frac{p_1(\mathbf{x})}{p_0(\mathbf{x})}. \quad (13.15)$$

Допустим, что \mathbf{x} — выборочная функция гауссова процесса, причем x_i не зависит от x_j при $i \neq j$. Тогда многомерная функция плотности вероятности будет произведением одномерных функций:

$$\left. \begin{aligned} p_1(\mathbf{x}) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{m/2} \prod_{i=1}^m \exp\left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_x^2}\right] = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{m/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^m \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_x^2}\right]; \\ p_0(\mathbf{x}) &= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{m/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{2\sigma_x^2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

откуда

$$\lambda(\mathbf{x}) = \exp\left[\sum_{i=1}^m \frac{(2\mu x_i - \mu^2)}{2\sigma_x^2}\right]. \quad (13.17)$$

Используя отношение правдоподобия в логарифмическом виде и порог по критерию Неймана — Пирсона, получим

$$y = m^{-1} \sum_{i=1}^m x_i \geq \gamma; \quad (13.18)$$

$$y' = \frac{1}{m\sigma_x^2} \sum_{i=1}^m \mu x_i \geq \gamma', \quad (13.19)$$

где y и y' — статистики, полученные расчетом среднего значения выборки.

Вероятности ложной тревоги и обнаружения можно рассчитать с использованием многомерной функции отношения правдоподобия $p_0(\mathbf{x})$ и $p_1(\mathbf{x})$ или более просто с помощью функции плотности для y . Дисперсия случайной величины y равна σ_x^2/m , а среднее значение равно нулю или μ в зависимости от справедливости гипотез H_0 или H_1 . Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} P_{fa} &= \int_{\gamma}^{\infty} p_0(y) dy; \\ P_D &= \int_{\gamma}^{\infty} p_1(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

13.1.3. Корреляционный приемник. Согласованные фильтры

В предыдущих разделах сигнальная составляющая в выражении для x предполагалась равной нулю либо постоянной величине. Пусть теперь сигнал представляет собой полностью известную функцию времени, так что

$$x(t) | H_1 = s(t) + n(t).$$

Помеху считаем ограниченным по полосе, белым шумом, с уровнем спектральной плотности, равным $N_0/2$.

Если временной интервал между отсчетами выбран таким, что отсчеты шума независимы, функция отношения правдоподобия принимает вид

$$\lambda(\mathbf{x}) = \exp \left[\frac{\sum_{i=1}^m (2s_i x_i - s_i^2)}{2\sigma_n^2} \right], \quad (13.21)$$

где s_i и x_i — временные отсчеты сигнала и принятого процесса в моменты t . Устремим временной интервал между отсчетами к нулю, а ширину полосы частоты помехи — к бесконечности так, чтобы отсчеты по-прежнему оставались независимыми, тогда сумма в выражении (13.21) становится интегралом, а функция отношения правдоподобия будет характеризовать непрерывные процессы. Легко показать, что в этом случае статистику испытания можно записать в виде

$$y(T) = \int_0^T x(t) s(t) dt \geq \gamma. \quad (13.22)$$

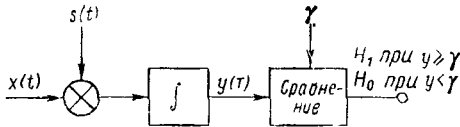


Рис 13.2 Схема корреляционного приемника

Порог γ выбран на основании требуемой вероятности ложной тревоги.

Приемник, реализующий статистику (13.22), называют корреляционным приемником

(рис. 13.2), так как интеграл представляет собой результат свертки принятого процесса с известным сигналом за время T .

При определении отношения сигнал/помеха (ОСП) применительно к статистике [см. выражение (13.22)] полезным сигналом целесообразно считать приращение постоянной составляющей выходного процесса, обусловленного присутствием сигнала. Тогда

$$\text{ОСП}(y) = \frac{\{E[y_1] - E[y_0]\}^2}{D[y_0]}. \quad (13.23)$$

Математическое ожидание $y_1 = 0$, так как сигнал и помеха статистически независимы, а математическое ожидание помехи равно нулю. При наличии сигнала

$$E[y_1] = \int_0^T [s^2(t) + \overline{s(t)n(t)}] dt = \int_0^T s^2(t) dt = E, \quad (13.24)$$

где E — энергия сигнала за время T . Дисперсия y_0 равна среднему значению квадрата:

$$D[y_0] = \int_0^T \int_0^T s(t) s(t') E[n(t)n(t')] dt dt'. \quad (13.25)$$

В предположении, что $n(t)$ — белый шум, а математическое ожидание в выражении (13.25) равно $N_0/2\delta(t-t')$, двойной интеграл становится обычным, откуда

$$D[y_0] = N_0/2 \int_0^T s^2(t) dt = N_0 E/2. \quad (13.26)$$

Подставив выражения (13.24) и (13.26) в (13.23), получим

$$\text{ОСП}(y) = 2E/N_0 \quad (13.27)$$

откуда следует, что ОСП на выходе корреляционного приемника равно отношению энергии сигнала за время T к спектральной плотности белого шума $N_0/2$.

Легко показать, что соответствующим образом выбранный линейный фильтр может замесить перемножитель и интегратор в корреляционном приемнике. Пусть фильтр имеет отклик $h(t)$.

Тогда при входном сигнале $x(t)$ на выходе в момент T

$$y(T) = \int_0^T h(\tau) x(T - \tau) d\tau. \quad (13.28)$$

Пусть теперь

$$h(t) = s(T - t) \text{ при } 0 \leq t \leq T. \quad (13.29)$$

Подставив выражение (13.29) в (13.28), найдем

$$y(T) = \int_0^T s(T - \tau) x(T - \tau) d\tau = \int_0^T s(t) x(t) dt. \quad (13.30)$$

Этот результат идентичен результату для корреляционного приемника.

Фильтр с импульсным откликом (13.29) называют согласованным фильтром. Он обеспечивает оптимальные характеристики при обнаружении известного сигнала на фоне белого шума.

Воспользовавшись неравенством Шварца, покажем, что согласованный фильтр обеспечивает максимум ОСП в соответствии с определением (13.23). Для произвольного фильтра с импульсным $h(t)$ квадрат математического ожидания величины y за время T

$$E^2[y_1] = \left[\int_0^T h(\tau) s(T - \tau) d\tau \right]^2 \leq \int_0^T h^2(\tau) d\tau \int_0^T s^2(T - \tau) d\tau. \quad (13.31)$$

Дисперсия

$$D[y_0] = (N_0/2) \int_0^T h^2(\tau) d\tau; \quad (13.32)$$

Отношение сигнал/помеха

$$\text{ОСП}[y] = \frac{\left[\int_0^T h(\tau) s(T - \tau) d\tau \right]^2}{(N_0/2) \int_0^T h^2(\tau) d\tau} \leq \frac{2 \int_0^T s^2(T - \tau) d\tau}{N_0} = \frac{2E}{N_0}. \quad (13.33)$$

Неравенство (13.33) превращается в равенство при $h(t) = s(T - t)$. Преобразование Фурье для согласованного фильтра на основании табл. 6.1 будет

$$\left. \begin{aligned} s(t) &\leftrightarrow S(f); \\ s(-t) &\leftrightarrow S(-f) = S^*(f); \\ h(t) &= s(T - t) \leftrightarrow S^*(f) \exp(j2\pi fT). \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

13.1.4. Сигналы с неизвестными параметрами

В предыдущем параграфе предполагалось, что присутствующая в принятом процессе сигнальная компонента во всех деталях точно известна. Все, что необходимо определить, — только наличие или отсутствие сигнала. В подводной акустике это редкий случай. В активных системах приближительная форма эхосигнала известна, а амплитуда и время появления — неизвестны. Кроме того, частота сигнала может изменяться под влиянием эффекта Доплера. В пассивных системах сигнал, подлежащий обнаружению, зачастую представляет собой случайный процесс, так что в лучшем случае известна лишь форма его спектральной плотности (спектра)

Детально вопросы обнаружения сигналов с неизвестными параметрами рассмотрены в работах [1, 2]. В целях определения практических структур приемников воспользуемся результатами, полученными для известного сигнала. Обычно эти структуры создаются с помощью аппроксимаций строгих правил обнаружения.

Активная система — одиночный импульс. Рассмотрим сначала активную систему обнаружения сигнала известной формы, но с неизвестной амплитудой и временем появления, т. е. с зондирующим сигналом $s(t)$ и принятым сигналом $a s(t - t_0)$, где a и t_0 неизвестны. В этом случае можно использовать фильтр, согласованный с формой сигнала при условии, что время появления максимального значения выходного эффекта заранее неизвестно. Выход фильтра представляет собой корреляционную функцию зондирующего сигнала и принятого процесса. Таким образом, при $h(t) = s(T - \tau)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \\ &= a \int_0^t s(T - \tau) s(t - \tau - t_0) + \int_0^T s(T - \tau) n(T - \tau) d\tau = \\ &= a R_s(t - T - t_0) + \int_0^T s(T - \tau) n(t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (13.35)$$

где $R_s(t)$ — автокорреляционная функция зондирующего сигнала.

Вследствие неопределенности относительно t_0 для вынесения решения о наличии либо отсутствия сигнала $y(t)$ надо рассматривать как функцию времени. В этом случае достаточно знать огибающую, а тонкая структура $R_s(t)$, обусловленная несущей частотой, не имеет существенного значения. С точки зрения статистического обнаружения разница между огибающей и квадра-

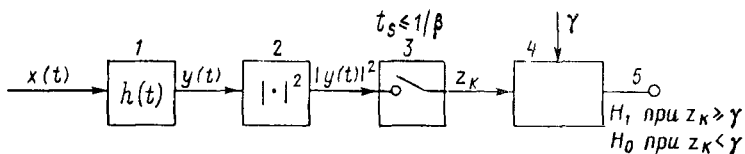


Рис. 13.3. Структурная схема приемника обнаружения сигнала с неизвестными амплитудой и временем прихода:

1 — $h(t)$, согласованная с сигналом; 2 — детектор огибающей; 3 — отсчеты с интервалом $t_s \leq 1/\beta$; 4 — сравнение; 5 — решение

том амплитуды огибающей — незначительна, а поскольку математические преобразования существенно проще при использовании квадрата амплитуды, дальнейшее рассмотрение проведем применительно к этому случаю.

Используя огибающую принимаемого процесса, достаточно наблюдать амплитуду через интервал времени, приблизительно равный ширине автокорреляционной функции. Этот временной интервал соответствует также эффективной ширине полосы огибающей (см. пп. 8.4.1).

Алгоритм статистической проверки

$$z_k = |y(kt_s)|^2 = \left| \int_0^{kt_s} h(\tau) x(kt_s - \tau) d\tau \right|^2, \quad (13.36)$$

где t_s — интервал между отсчетами, равный или меньший величины, соответствующей полосе выходного фильтра. Порог γ выбираем в соответствии с допустимой вероятностью ложной тревоги. Структурная схема приемника, соответствующая данному алгоритму, приведена на рис. 13.3.

Необходимо отметить, что при использовании критерия Неймана — Пирсона отсутствие сведений об амплитуде сигнала не влияет на величину порога. Применение согласованного с излученным сигналом фильтра обеспечивает максимальное ОСП согласно выражению (13.23). Легко показать, что ОСП при зондировании реальной цели

$$\text{ОСП}(y) = \frac{2a^2 E}{N_0}. \quad (13.37)$$

На практике дискретизацию и сравнение с порогом, показанные на рис. 13.3, может производить человек-оператор, наблюдающий за амплитудно-временными характеристиками процесса, отображаемого на экране определенного типа.

Для изучения статистических свойств квадрата амплитуды огибающей удобно рассматривать аналитическую форму $y(t)$, которую можно записать в соответствии с обозначениями п. 6.10:

$$y_a(t) = y(t) + j\hat{y}(t) = |y_a(t)| \exp[j\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (13.38)$$

где $\hat{y}(t)$ — преобразование Гильберта от $y(t)$. Вещественная часть формулы (13.38) определяет истинный процесс:

$$y(t) = |y_a(t)| \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = [y^2(t) + \hat{y}^2(t)]^{1/2} \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (13.39)$$

откуда

$$y^2(t) = (1/2) [y^2(t) + \hat{y}^2(t)] \{1 + \cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t)]\}. \quad (13.40)$$

Допустим, что в состав квадратичного детектора огибающей входит фильтр для режекции второй гармоники несущей (13.40). Обозначив режекцию высокочастотной составляющей через $|\cdot|^2$, получим

$$z = |y(t)|^2 = 1/2 [y^2(t) + \hat{y}^2(t)] = 1/2 |y_a(t)|^2. \quad (13.41)$$

При гипотезе H_0 предполагается, что $y_0(t)$ имеет гауссово распределение со средним значением, равным нулю. По определению функция и ее преобразование Гильберта — ортогональны, что в данном случае обеспечивает и их статистическую независимость. Функция z_c — сумма квадратов независимых гауссовых случайных величин с нулевым средним значением и равными дисперсиями. Функция плотности вероятности представляет собой распределение χ^2 с двумя степенями свободы. В частности, для $z \geq 0$

$$p_0(z) = \frac{1}{\sigma_{y_0}^2} \exp(-z/\sigma_{y_0}^2), \quad (13.42)$$

где $\sigma_{y_0}^2 = \bar{z}_0$. Полагая, что входной шум белый со спектральной плотностью $N_0/2$, найдем

$$\bar{z}_0 = \sigma_{y_0}^2 = N_0/2 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau) d\tau. \quad (13.43)$$

При наличии сигнала функция плотности вероятности величины z_1 представляет собой распределение χ^2 со средним значением, не равным нулю. Подробно распределение рассмотрено в работе [1, гл. 4, 8]. Пусть ОСП на выходе фильтра равно S , тогда плотность вероятности

$$p_1(z) = 1/\sigma_{y_0}^2 \exp(-S - z/\sigma_{y_0}^2) I_0 \left[2 \left(\frac{zS}{\sigma_{y_0}^2} \right)^{1/2} \right], \quad (13.44)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. В случае согласованного фильтра $S = 2E/N_0$. Функции плотности вероятности при наличии и отсутствии сигнала показаны на рис. 13.4.

Активная система — пачка импульсов. Обычно активные системы излучают периодические пачки импульсов. Предположим,

что принято M импульсов из такой пачки. Качество обнаружения можно улучшить (по отношению к одиночному импульсу), добавив к приемной системе схему последетекторной обработки. После детектирования сигналы, относящиеся к одной и той же дистанции, суммируются и формируют испытательную статистику. Пусть $|y_{ik}|^2$ — квадраты отсчетов огибающей для i -го цикла излучения на k -й дистанции. Испытательная статистика на этом расстоянии

$$z_k = \sum_{i=1}^M |y_{ik}|^2. \quad (13.45)$$

Структурная схема такого приемника приведена на рис. 13.5. В этой схеме импульсный отклик фильтра $h(t)$, как и раньше, согласован с формой одиночного импульса. Предположим, что помеха в заданном элементе разрешения по дальности статистически независима от цикла к циклу излучения, тогда z_k имеет распределение χ^2 с $2M$ степенями свободы. Функция плотности вероятности только шума

$$p_0(z) = \frac{1}{\sigma_{y_0}^2 \Gamma(M)} (z/\sigma_{y_0}^2)^{M-1} \exp(-z/\sigma_{y_0}^2), \quad (13.46)$$

а моменты z_0 —

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}_0 &= M\sigma_{y_0}^2; \\ E[z_0^2] &= M(M+1)\sigma_{y_0}^4; \\ D[z_0] &= M\sigma_{y_0}^4. \end{aligned} \right\} \quad (13.47)$$

При $M=1$ эти результаты относятся к случаю одиночного импульса. Необходимо отметить, что отношение среднего значения к стандартному отклонению равно \sqrt{M} и, следовательно,

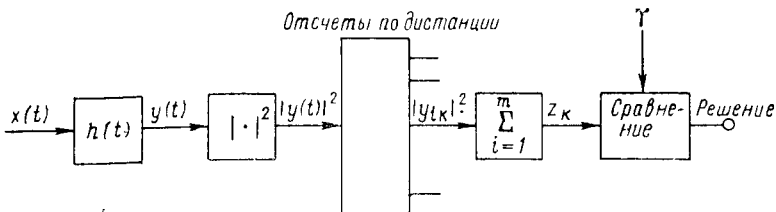


Рис. 13.5. Структурная схема приемника для обнаружения пачки сигналов

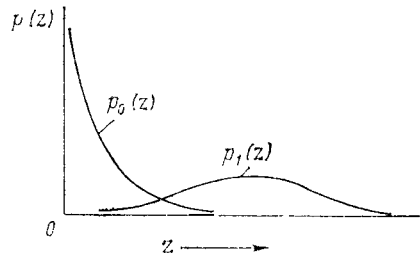


Рис. 13.4. Функции плотности вероятности на выходе квадратичного детектора огибающей для одного шума и сигнала плюс шум

флюктуации помех относительно среднего значения уменьшаются за счет осреднения.

Функция плотности вероятности в присутствии сигнала для z_1

$$p_1(z) = \frac{1}{\sigma_{y_0}^2} \left(\frac{z}{S\sigma_{y_0}^2} \right)^{(M-1)/2} \exp(-S - z/\sigma_{y_0}^2) I_{M-1} \left[2 \left(\frac{zS}{\sigma_{y_0}^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (13.48)$$

Среднее значение z_1 увеличивается относительно z_0 пропорционально ОСП на входе детектора огибающей. Таким образом,

$$\bar{z}_1 = \bar{z}_0(1 + S). \quad (13.49)$$

Для больших M и малых S дисперсия z_1 приблизительно такая же, как и для z_0 . ОСП для z целесообразно определить аналогично тому, как это было сделано для y в выражении (13.23):

$$\text{ОСП}(z) = \frac{\{E[z_1] - E[z_0]\}^2}{D[z_0]}. \quad (13.50)$$

Подставив формулы (13.47) и (13.49) в (13.50), получим

$$\text{ОСП}(z) = MS^2. \quad (13.51)$$

Типичные графики $p_0(z)$ и $p_1(z)$ для пачки импульсов показаны на рис. 13.6. Для больших M обе функции $p_0(z)$ и $p_1(z)$ в соответствии с центральной предельной теоремой стремятся к гауссову распределению.

Активные системы при наличии доплеровского смещения. При относительном перемещении гидроакустической системы и объекта частота эхо-сигнала вследствие эффекта Доплера смещается относительно излученного импульса. Величина смещения обычно заранее неизвестна, что требует модификации структуры приемника во избежание серьезного ухудшения характеристик обнаружения.

Ограничиваясь случаем одиночного импульса, рассмотрим два возможных подхода к построению приемника при неизвестном значении доплеровского смещения (рис. 13.7). В одном варианте схемы приемника (рис. 13.7, а) применена гребенка фильтров, согласованных с одиночным импульсом, центральная частота которых смещена на некоторую величину относительно

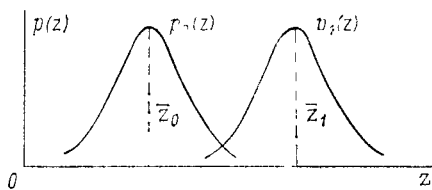


Рис 13.6. Типичные функции плотности вероятности для пачки импульсов

друг друга. Полоса частот, перекрываемая гребенкой фильтров, соответствует ожидаемому диапазону доплеровского смещения частоты. Параметры фильтров каждого канала согласованы с одиночным импульсом. Неизвестное доплеровское смещение усложняет структуру

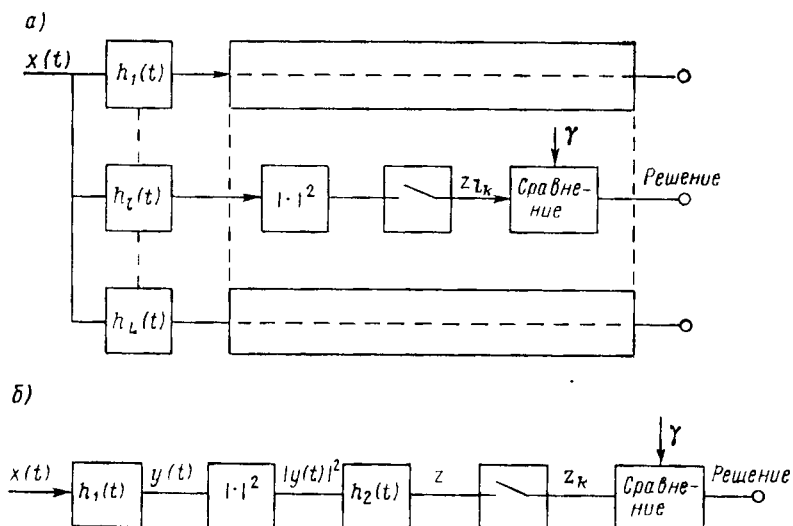


Рис. 13.7. Альтернативные варианты приемников для обнаружения сигнала при неизвестном значении доплеровского смещения: а — с гребенкой согласованных фильтров; б — с широкополосным входным и узкополосным последдетекторным фильтрами

приемника и увеличивает вероятность ложной тревоги вследствие увеличения числа частотных каналов, а это, в свою очередь, заставляет увеличивать порог, чтобы сохранить на прежнем уровне вероятность ложной тревоги.

Во втором варианте (рис. 13.7, б) полоса преддетекторного фильтра соответствует диапазону возможного доплеровского смещения, а не полосе излученного сигнала. Вследствие этого ОСП уменьшается по отношению к оптимальному приемнику из-за расширения полосы частот входного фильтра. Последдетекторный фильтр согласуется в определенном смысле с характеристиками зондирующего импульса на выходе детектора огибающей, обеспечивая улучшение ОСП на выходе детектора.

Пусть сигнал имеет прямоугольную огибающую, причем $\beta t_p \gg 1$, где t_p — длительность импульса, β — ширина полосы входного фильтра. На выходе фильтра ОСП уменьшается приблизительно в βt_p раз по отношению к согласованному фильтру. Последдетекторная обработка частично компенсирует эти потери, поэтому результирующие потери становятся равными $\sqrt{\beta t_p}$. В гл. 14 будет показано, как уточнить эту величину, принимая во внимание различия в вероятности ложной тревоги для рассмотренных приемников. При $\beta t_p < 10$ характеристики этих приемников по критерию входного ОСП различаются менее чем на 1,5 дБ для заданных вероятностей P_D и P_{fa} .

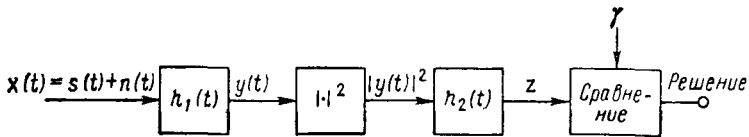


Рис. 13.8. Структурная схема широкополосного пассивного приемника

Пассивная широкополосная система. Сигнал от объекта, обнаруживаемого с помощью пассивной системы, обычно представляет собой типичный широкополосный случайный процесс, длительность которого ограничена только взаимным расположением и относительным перемещением объекта и носителя гидроакустической системы. В этом случае известны только некоторые статистические характеристики сигнала. Предположим, известна форма спектральной плотности сигнала, его ориентировочная длительность, а также форма спектральной плотности помехи, которая не обязательно является белым шумом. Структурная схема приемника приведена на рис. 13.8. Необходимо определить виды преддетекторного и последдетекторного фильтров, которые в определенном смысле оптимизируют характеристики обнаружения системы. Возможным критерием оптимизации может быть максимум значения ОСП (z).

В качестве примера рассмотрим сигнал с постоянной амплитудой в течение времени $T \gg 1/\beta_s$, где β_s — ширина полосы сигнала. Тогда

$$\begin{aligned}\Psi_{x_1}(f) &= \Psi_s(f) + \Psi_n(f); \\ \Psi_{x_0}(f) &= \Psi_n(f),\end{aligned}$$

где $\Psi_s(f)$ — спектральная плотность мощности сигнала, измеренная на входе приемника; $\Psi_n(f)$ — спектральная плотность мощности помех. И сигнал, и помеху считаем стационарными гауссовыми процессами с нулевыми средними значениями, независимыми друг от друга. На выходе преддетекторного фильтра

$$\text{ОСП}(y) = \frac{\int \Psi_s(f) |H_1(f)|^2 df}{\int \Psi_n(f) |H_1(f)|^2 df} = \frac{\int [\Psi_{y_1}(f) - \Psi_{y_0}(f)] df}{\int \Psi_{y_0}(f) df}, \quad (13.52)$$

где $H_1(f)$ — преобразование Фурье от $h_1(t)$; пределы интегрирования в данном и последующих выражениях, если не оговорено иное, — бесконечны.

На выходе квадратичного детектора

$$\begin{aligned}E[|y_1|^2] &= E[|y_s|^2] + E[|y_n|^2]; \\ E[|y_0|^2] &= E[|y_n|^2],\end{aligned}$$

где y_s и y_n — составляющие процесса на выходе фильтра, связанные с сигналом и помехой. Для нахождения ОСП необходимо определить дисперсию $|y_0|^2$. По определению

$$D[|y_0|^2] = E[|y_0|^4] - E^2[|y_0|^2].$$

Для гауссова процесса четвертый момент можно определить через второй момент. Так как предполагаем, что квадратичный детектор отфильтровывает удвоенную частоту $|y^2(t)|$, четвертый момент огибающей будет равен удвоенному квадрату второго момента, а не утроенному, что было бы справедливо для $y^2(t)$. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} D[|y_0|^2] &= E^2[|y_0|^2]; \\ \text{ОСП}(|y|^2) &= \frac{\{E[|y_1|^2] - E[|y_0|^2]\}^2}{D[|y_0|^2]} = \frac{E^2[|y_s|^2]}{E^2[|y_0|^2]} = \{\text{ОСП}(y)\}^2. \end{aligned} \right\} \quad (13.53)$$

Обычно отклик последетекторного фильтра предполагается нормализованным, поэтому математическое ожидание z идентично математическому ожиданию $|y|^2$, которое, в свою очередь, эквивалентно требованию равенства единице интеграла от $h_2(t)$.

Дисперсия z_0

$$E[|z_0|^2] = \int \Psi_{|y_0|^2}(f) |H_2(f)|^2 df = \int R_{|y_0|^2}(\tau) R_{h_2}(\tau) d\tau. \quad (13.54)$$

Используя свойства огибающей функции Гаусса, найдем

$$\begin{aligned} R_{|y_0|^2}(\tau) &= R_{|y_0|^2}^2(0) + R_{|y_0|^2}^2(\tau) = E^2[|y_0|^2] + R_{|y_0|^2}^2(\tau) = \\ &= E^2[z_0] + R_{|y_0|^2}^2(\tau), \end{aligned} \quad (13.55)$$

где $|y_0|$ — огибающая процесса на выходе преддетекторного фильтра, когда присутствует только помеха. Подставив равенство (13.55) в (13.54), получим

$$D[z_0] = \int R_{|y_0|^2}^2(\tau) R_{h_2}(\tau) d\tau. \quad (13.56)$$

В предположении постоянства уровня мощности сигнала в течение времени T и равенства нулю в остальное время разумным выбором импульсного отклика $h_2(t)$ будет прямоугольная функция длительностью T . Пусть

$$h_2(t) = 1/T \operatorname{rect}(t/T),$$

откуда

$$R_{h_2}(\tau) = 1/T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{\tau}{2T}\right), \quad (13.57)$$

$$D[z_0] = 1/T \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R_{|y_0|^2}^2(\tau) R(\tau) d\tau. \quad (13.58)$$

Ширина автокорреляционной функции помехи на выходе преддетекторного фильтра обычно мала по сравнению с T вследствие предположения о большом значении произведения времени на ширину полосы. Следовательно,

$$D[z_0] \simeq \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_{|y_0|}^2(\tau) d\tau. \quad (13.59)$$

Воспользовавшись определением эффективной полосы огибающей из пп. 8.4.1, перепишем выражение (13.59):

$$D[z_0] = \frac{R_{|y_0|}^2(0)}{T\beta_n} = \frac{E^2[|y_0|^2]}{T\beta_n}, \quad (13.60)$$

где β_n — эффективная ширина полосы помех на выходе преддетекторного фильтра. Теперь выражение для ОСП принимает вид

$$\begin{aligned} \text{ОСП}(z) &= \frac{\{E[z_1] - E[z_0]\}^2}{D[z_0]} = \\ &= T\beta_n \frac{E^2[|y_s|^2]}{E^2[|y_0|^2]} = T\beta_n \{\text{ОСП}(y)\}^2. \end{aligned} \quad (13.61)$$

Последетекторный фильтр улучшает ОСП усреднением $T\beta_n$ независимых выборок помехи.

Далее необходимо определить форму преддетекторного фильтра, оптимизирующую выходное ОСП. Для этого, используя формулу (13.52), а также выражение для эффективной ширины полосы в частотной области, перепишем уравнение (13.61):

$$\begin{aligned} \text{ОСП}(z) &= \frac{T}{2} \left\{ \frac{\left[\int \Psi_n(f) |H_1(f)|^2 df \right]^2}{\int \Psi_n^2(f) |H_1(f)|^4 df} \left[\frac{\int \Psi_s(f) |H_1(f)|^2 df}{\int \Psi_n(f) |H_1(f)|^2 df} \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{T}{2} \frac{\left[\int \Psi_s(f) |H_1(f)|^2 df \right]^2}{\int \Psi_n^2(f) |H_1(f)|^4 df}. \end{aligned} \quad (13.62)$$

Умножим и разделим подынтегральное выражение интеграла числителя (13.62) на спектральную плотность помех, и воспользовавшись неравенством Шварца, получим

$$\begin{aligned} \left\{ \int \left[\frac{\Psi_s(f)}{\Psi_n(f)} \right] [\Psi_n(f) |H_1(f)|^2 df] \right\}^2 &\leq \\ &\leq \int \frac{\Psi_s^2(f)}{\Psi_n^2(f)} df \int \Psi_n^2(f) |H_1(f)|^4 df. \end{aligned} \quad (13.63)$$

После подстановки неравенства (13.63) в (13.62) имеем

$$\text{ОСП}(z) \leq T \int \frac{\Psi_s^2(f)}{\Psi_n^2(f)} df. \quad (13.64)$$

Легко убедиться, что неравенство (13.64) превращается в равенство, если $H_1(f)$ выбрать таким образом, чтобы

$$|H_1(f)|^2 = \frac{\Psi_s(f)}{\Psi_n^2(f)}. \quad (13.65)$$

Выражение (13.65) определяет оптимальный фильтр, называемый иногда фильтром Эккарта [3]. При равномерном спектре помехи его форма соответствует спектральной плотности сигнала, т. е. он аналогичен описанному ранее согласованному фильтру для известного сигнала в присутствии белого шума. Если помеха не является белым шумом, характеристика оптимального фильтра должна иметь спад в тех областях спектра, где мощность помехи велика.

Полученные результаты были основаны на использовании последетекторного фильтра с прямоугольным импульсным откликом. В действительности вид последетекторного фильтра не оказывает существенного влияния на форму оптимального передетекторного фильтра, если полоса пропускания последетекторного фильтра мала по сравнению с шириной полосы помех. Например, пусть $h_2(t)$ имеет экспоненциальный отклик с постоянной времени T . Предоставляем читателям возможность доказать, что если длительность сигнала много больше T и $h_2(t) = (1/T)\exp(-t/T)$, $t \geq 0$, то

$$\text{ОСП}(z) = 2T\beta_n \{\text{ОСП}(y)\}^2, \quad T\beta_n \gg 1. \quad (13.66)$$

Форму последетекторного фильтра выбирают на основе ожидаемой геометрии входных сигналов и их динамики. В связи с тем что обычно предполагается широкий диапазон вариации этих параметров, предпочтительными оказываются относительно простые формы, такие, как прямоугольная или экспоненциальная функции.

Пассивная узкополосная система. В спектре шумов, излучаемых подводными лодками и кораблями, наряду с широкополосной составляющей могут содержаться и узкополосные дискретные компоненты. Приемник, соответствующий такому спектру, содержит гребенку узкополосных фильтров, перекрывающих ожидаемый частотный диапазон. Процесс на выходе каждого фильтра детектируется, фильтруется, если необходимо, и сравнивается с порогом. Структурная схема такого приемника приведена на рис. 13.9.

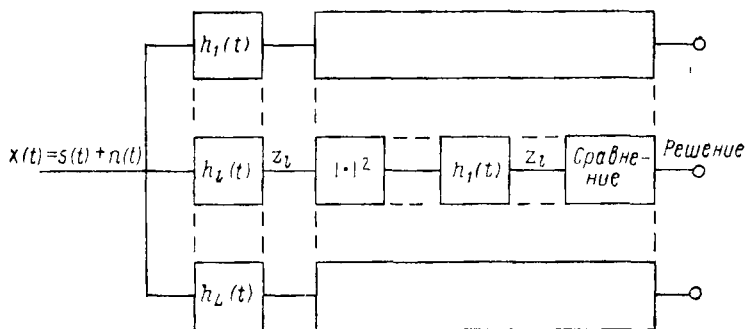


Рис. 13.9. Структурная схема узкополосного приемника

В типичных узкополосных приемниках гребенку фильтров формируют с помощью дискретного преобразования Фурье входного сигнала. Полоса каждого фильтра обратно пропорциональна длительности входного сигнала, которая использована для преобразования. Обычно эта полоса существенно меньше ширины спектра сигнала от цели. Если она равна ширине дискретной составляющей сигнала, то последетекторная фильтрация не улучшит характеристик обнаружения. Однако наиболее часто произведение длительности сигнала и полосы фильтра превышает единицу и тогда применимы выражения для широкополосного сигнала. Расчет ОСП для узкополосной системы существенно упрощается, если предположить, что спектральная плотность помех постоянна в полосе фильтров. В качестве примера рассмотрим случай, когда комплексный синусоидальный сигнал, узкополосный фильтр и спектр помехи представлены в виде

$$\begin{aligned}\Psi_s(f) &= a^2 \delta(f - f_1); \\ \Psi_n(f) &= \Psi_n(f_1); \\ H_1(f) &= \text{rect}\left(\frac{f - f_1}{\beta}\right).\end{aligned}$$

Тогда

$$\text{ОСП}(y) = \frac{a^2}{\Psi_n(f) \int \text{rect}^2[(f - f_0)/\beta] df} = \frac{a^2}{\Psi_n(f_1) \beta}.$$

Эффективная ширина полосы прямоугольного фильтра при входной помехе в виде белого шума равна β . Предположив, что $h_2(t)$ имеет прямоугольный импульсный отклик с шириной T , найдем, что на выходе

$$\text{ОСП}(z) = T \beta_n \{\text{ОСП}(y)\}^2 = T \beta_n \frac{a^4}{\Psi_n^2(f_1) \beta^2} = \left(\frac{T}{\beta}\right) \left(\frac{a^2}{\Psi_n(f_1)}\right)^2. \quad (13.67)$$

13.2. Рабочие характеристики приемника

Характеристику обнаружения приемной системы рассчитывают, определяя мощность входного сигнала, необходимую для достижения заданной вероятности обнаружения при фиксированной приемлемой вероятности ложной тревоги. С этой целью сначала находят требуемое ОСП на входе детектора огибающей — ОСП (y). Затем в предположении линейности системы от ее входа до входа детектора определяют требуемый входной сигнал.

Характеристики обнаружения можно представить графически в виде зависимости вероятности обнаружения от вероятности ложной тревоги, используя в качестве параметра семейство ОСП. Такая зависимость получила название рабочей характеристики приемника.

В общем случае нужна серия таких кривых для перекрытия возможного диапазона произведения времени на ширину полосы и вида последетекторной обработки. Наиболее просто рабочие характеристики приемника, схема которого показана на рис. 13.8, получают при $\beta T \gg 1$. В этом случае $p_0(z)$ и $p_1(z)$ являются гауссовыми, а соотношение между ОСП (y) и ОСП (z) определяют с помощью выражения (13.61). Следовательно, ОСП (z) можно использовать в качестве параметра единственного семейства рабочих характеристик (рис. 13.10). На рис. 13.10 параметр d , называемый показателем обнаружения, является значе-

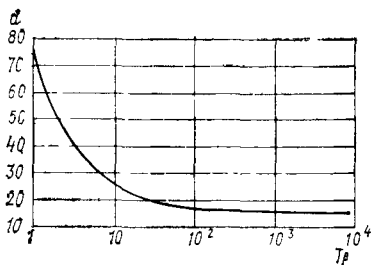
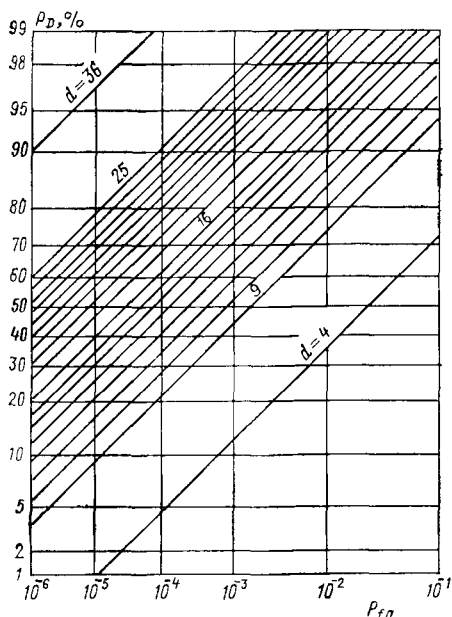


Рис. 13.11. Показатель обнаружения в зависимости от произведения $T\beta$ для $P_D = 50\%$ и $P_{fa} = 10^{-4}$

←
Рис. 13.10. Рабочие характеристики приемника для гауссовых $p_0(z)$ и $p_1(z)$

нием $ОСП(z)$, требуемым для обеспечения заданных значений P_D и P_{fa} .

В качестве примера использования графиков (рис. 13.10) рассчитаем $ОСП(y)$, обеспечивающее 90 %-ю вероятность обнаружения при вероятности ложной тревоги 10^{-4} для широкополосного пассивного приемника с $T\beta = 1000$. По графику рис. 13.10 находим $d = ОСП(z) = 25$. Следовательно, на основании выражения (13.61)

$$ОСП(y) = \left(\frac{d}{T\beta}\right)^{1/2} = \left(\frac{25}{1000}\right)^{1/2} = 0,158.$$

Рабочие характеристики обнаружения для многих важнейших случаев приведены в работах [4...6]. Применительно к линейному детектору огибающей и последетекторному суммированию независимых выборок кривые обнаружения рассчитаны Г. Х. Робертсоном [6]. В работе [1] приведен полный набор кривых Робертсона в диапазоне от 1 до 8192 независимых выборок. Число независимых выборок эквивалентно произведению времени и ширины полосы, которое использовалось в предыдущих разделах.

В качестве параметра семейства характеристик Г. Х. Робертсон использовал $ОСП$ на входе детектора.

При больших произведениях времени и ширины полосы результаты, получаемые с помощью кривых Робертсона, практически идентичны использованию кривых на рис. 13.10. На рис. 13.11 приведена зависимость показателя обнаружения от произведения $T\beta$ для $P_D = 50\%$ и $P_{fa} = 10^{-4}$. При $T\beta \geq 32$ ошибка в определении $ОСП(y)$ по кривым рис. 13.10, вместо рис. 13.11, оказывается меньше 1 дБ.

13.3. Оценка параметров сигнала

С помощью приемной системы наряду с обнаружением сигналов часто требуется оценить специфические параметры сигнала от цели. Например, необходимо измерить дистанцию до цели, направление на нее, скорость и размер. Эти параметры цели соответствуют таким параметрам сигнала, как время задержки, относительное время задержки для двух точек приема, доплеровское смещение частоты и значение амплитуды сигнала.

Как и при обнаружении, принятый процесс наряду с сигналом содержит помеху. Для оценки заданного параметра необходимо выбрать такое его значение, которое максимизирует функцию условной плотности вероятности параметра применительно к характеру принятого сигнала.

Пусть x — принятый сигнал, α — параметр, который необходимо измерить. Тогда

$$p(\alpha | x) = \frac{p(x | \alpha) p(\alpha)}{p(x)}.$$

В большинстве практически важных случаев априорное распределение $p(\alpha)$ неизвестно и предполагается равновероятно распределенным в интересующей области. Необходимо отметить также, что $p(x)$ не зависит от α . Следовательно, максимизация $p(\alpha|x)$ эквивалентна максимизации $p(x|\alpha)$. Оценку, выбранную на такой основе, называют *оценкой максимального правдоподобия*, поскольку $p(x|\alpha)$ — функция условной вероятности при данном значении неизвестного параметра α .

Для изучения оценки максимального правдоподобия при одном неизвестном параметре α представим принятый процесс в виде

$$x(t) = s(t, \alpha) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $s(t, \alpha)$ находится в пределах интервала T , а помеха предполагается белой и гауссовой. Чтобы получить оценку максимального правдоподобия, продифференцируем $p(x|\alpha)$ по α . Тогда при

$$p(x|\alpha) = K \exp \left\{ -1/N_0 \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)]^2 dt \right\}$$

получим

$$\frac{\partial p(x|\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{2K}{N_0} \left\{ \int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt \right\} \exp \{ \cdot \}. \quad (13.68)$$

В качестве оценки $\tilde{\alpha}$ выберем такое значение α , при котором выражение (13.68) равно нулю:

$$\int_0^T [x(t) - s(t, \alpha)] \frac{\partial s(t, \alpha)}{\partial \alpha} dt = 0. \quad (13.69)$$

13.3.1. Оценка времени запаздывания

Обычно дистанцию до цели определяют, измеряя время запаздывания эхо-сигнала по отношению к зондирующему импульсу. Для удобства будем использовать представление сигнала и помех в комплексной форме. Предположим, что помеха на входе приемника является белым шумом со спектральной плотностью $N_0/2$, а полоса спектра сигнала с центром на несущей частоте f_0 мала по сравнению с частотой f_0 . Тогда комплексная огибающая входного процесса

$$x(t) = \eta(t) + \mu(t - \tau),$$

где в соответствии с п. 6.10 составляющие выражения имеют следующий смысл:

$$\eta(t) = [n(t) + j\hat{n}(t)] \exp(-j2\pi f_0 t) \text{ — огибающая шума;}$$

$$\mu(t) = [s(t) + j\hat{s}(t)] \exp(-j2\pi f_0 t) \text{ — огибающая сигнала}$$

и τ — временное запаздывание эхо-сигнала от цели В дальнейшем без потери общности положим $\tau = 0$

Далее необходимо найти автокорреляционную функцию действительной и мнимой частей $\eta(t)$. На основании известных соотношений преобразования Гильберта преобразование Фурье действительной части $\eta(t)$ будет

$$\operatorname{Re}[\eta(t)] = \eta_r(t) \leftrightarrow 1/2 \{N(f + f_0)[1 + \operatorname{sgn}(f + f_0)] + N(f - f_0)[1 - \operatorname{sgn}(f - f_0)]\}, \quad (13.70)$$

где $N(f)$ — спектр вещественной части помехи $n(t)$. Из выражения (13.70)

$$R_{\eta_r}(\tau) \leftrightarrow N_0/4 [2 + \operatorname{sgn}(f + f_0) - \operatorname{sgn}(f - f_0)] = N_0/2 [1 + \operatorname{rect}(f/2f_0)], \quad (13.71)$$

откуда

$$R_{\eta_r}(\tau) = N_0/2 [\delta(\tau) + 2f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau)]. \quad (13.72)$$

Легко показать, что автокорреляционная функция мнимой части также определяется выражением (13.72). Применение R_{η_r} и R_{η_i} ограничено интегралом от произведения этих функций и огибающей узкополосного сигнала. Следовательно, характер функции sinc в уравнении (13.72) приблизительно соответствует импульсу, и R_{η_r} можно выразить в виде

$$R_{\eta_r}(\tau) = R_{\eta_i}(\tau) \simeq N_0\delta(\tau). \quad (13.73)$$

На основании выражения (13.69) оценку времени запаздывания $\bar{\tau}$ получим, решив уравнение

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_0^T [x(t) - \mu(t - \bar{\tau})] \frac{\partial \mu^*(t - \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} dt \right\} = 0, \quad (13.74)$$

которое можно переписать в виде

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} R_\mu(\bar{\tau}) + \int_0^T \eta(t) \frac{\partial \mu^*(t - \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} dt - \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \int_0^T |\mu(t - \bar{\tau})|^2 dt \right\} = 0, \quad (13.75)$$

где $R_\mu(\tau)$ — автокорреляционная функция огибающей сигнала. Третий член в равенстве (13.75) равен нулю.

Разложив $R_\mu(\tau)$ в ряд Тейлора, получим

$$\operatorname{Re}[R_\mu(\bar{\tau})] = R_\mu(0) + \frac{R_\mu''(0)}{2} \tau^2 + \dots$$

Ограничившись членами второго порядка и продифференцировав это выражение, найдем

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} R_{\mu}(\bar{\tau}) \right\} = R_{\mu}''(0) \bar{\tau}. \quad (13.76)$$

Подставив выражение (13.76) в (13.75), получим формулу для оценки времени запаздывания (помня, что истинное значение $\tau = 0$):

$$\bar{\tau} = - \frac{1}{R_{\mu}''(0)} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^T \eta(t) \frac{\partial \mu^*(t - \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} dt \right\}. \quad (13.77)$$

Так как среднее значение $\tau = 0$ (или равно τ в общем случае), полученная оценка будет несмещенной.

Дисперсия оценки является математическим ожиданием квадрата величины, определяемой выражением (13.77). Используя выражение (13.73) для $R_{\eta_r}'(\tau)$, получим формулу дисперсии:

$$D[\bar{\tau}] = \left(\frac{1}{R_{\mu}''(0)} \right)^2 N_0 \int_0^T \left| \frac{\partial \mu(t - \bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} \right|^2 dt. \quad (13.78)$$

На основании соотношений преобразования Фурье и теоремы Парсеваля легко показать, что интеграл в выражении (13.78) равен $R_{\mu}''(0)$.

Таким образом,

$$D[\bar{\tau}] = \frac{N_0}{R_{\mu}''(0)}. \quad (13.79)$$

Определим теперь ширину огибающей сигнала через нормированный второй момент его энергетического спектра. Иногда эту ширину β называют среднеквадратичной полосой. Таким образом, при $\mu(t) \leftrightarrow M(f)$

$$\beta_0^2 = \frac{(2\pi)^2 \int f^2 |M(f)|^2 df}{\int |M(f)|^2 df} = \frac{R_{\mu}''(0)}{R_{\mu}(0)}. \quad (13.80)$$

Среднее значение, или первый момент $|M(f)|^2$, в уравнении (13.80) предполагается равным нулю.

Помня, что $R_{\mu}(0) = 2E$, где E — энергия действительной части сигнала, и подставив выражение (13.80) в (13.78), найдем

$$D[\bar{\tau}] = [2E/N_0\beta_0^2]^{-1}. \quad (13.81)$$

Можно показать [1], что нельзя получить оценку времени запаздывания с меньшей дисперсией, чем выражение (13.81). Эту минимальную дисперсию называют границей Крамера — Рао [7].

13.3.2. Оценка частотного смещения

Предположим, что огибающая функция принятого процесса представлена в виде

$$x(t) = \mu(t) \exp(j2\pi\nu t) + \eta(t), \quad (13.82)$$

где $\mu(t)$ — огибающая узкополосного сигнала; ν — подлежащее определению неизвестное доплеровское смещение частоты. Как и раньше, без потери общности положим фактическое значение $\nu = 0$ и получим оценку $\tilde{\nu}$, решив уравнение

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_0^T [x(t) - \mu(t) \exp(j2\pi\tilde{\nu}t)] \frac{\partial \mu^*(t) \exp(-j2\pi\tilde{\nu}t)}{\partial \tilde{\nu}} dt \right\} = 0, \quad (13.83)$$

которое можно представить в виде

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial K_\mu(\tilde{\nu})}{\partial \tilde{\nu}} \right\} = -\operatorname{Re} \left\{ \int_0^T \eta(t) \frac{\partial \mu^*(t) \exp(-j2\pi\tilde{\nu}t)}{\partial \tilde{\nu}} dt \right\}. \quad (13.84)$$

где $K_\mu(\tilde{\nu})$ — автокорреляционная функция частотного смещения спектра $\mu(t)$ в частотной области.

Действуя как и раньше, разложим $K_\mu(\tilde{\nu})$ в ряд Тейлора, продифференцируем и получим необходимую оценку

$$\tilde{\nu} = - \left(\frac{1}{K_\mu''(\tilde{\nu})} \right) \operatorname{Re} \left\{ \int_0^T \eta(t) \frac{\partial^2 \mu^*(t) \exp(-j2\pi\tilde{\nu}t)}{\partial \tilde{\nu}^2} dt \right\}. \quad (13.85)$$

Дисперсия оценки

$$D[\tilde{\nu}] = \left(\frac{1}{K_\mu''(0)} \right)^2 N_0 \int_0^T (2\pi)^2 t^2 |\mu(t)|^2 dt. \quad (13.86)$$

Среднеквадратичное значение длительности огибающей:

$$\tau_0 = \frac{(2\pi)^2 \int_0^T t^2 |\mu(t)|^2 dt}{\int_0^T |\mu(t)|^2 dt} = \frac{K_\mu''(0)}{K_\mu(0)}. \quad (13.87)$$

Но $K_\mu(0) = R_\mu(0) = 2E$, поэтому выражение дисперсии

$$D[\tilde{\nu}] = [(2E/N_0)\tau_0^2]^{-1}. \quad (13.88)$$

Отметим, что дисперсия оценки частоты уменьшается с увеличением длительности сигнала, в то время как дисперсия оценки времени уменьшается с возрастанием ширины полосы сигнала. Структурная схема приемника для оценки частоты обычно состоит из гребенки фильтров и интеграторов аналогично тем, которые приведены на рис. 13.7, а и 13.9.

Центральная частота фильтра с максимальным значением сигнала на выходе и будет требуемой оценкой.

13.3.3. Оценка направления

Для получения точной оценки времени запаздывания необходимо, как было определено в пп. 13.3.1, чтобы ширина полосы сигнала была достаточно большой, подобно тому, как при оценке частоты необходима большая длительность сигнала. Покажем теперь, что для оценки направления на цель необходимо, чтобы сигналы разрешались по пространству, т. е. при измерении имели определенную протяженность.

Для простоты предположим, что узкополосный сигнал и узкополосный изотропный шум с центральной частотой и полосой $\beta \ll 1$ зарегистрированы на отрезке оси y . Необходимо определить направление ψ на цель относительно нормали к оси y .

Пусть $\mu(t)$ — принятая огибающая (на единицу длины приемника) в начале координат. Тогда принятый сигнал в любой другой точке оси y :

$$\mu(t, y, \psi) = \mu(t) = \exp\left(j \frac{2\pi f y \sin \psi}{c}\right). \quad (13.89)$$

Для удобства опустим символ временной зависимости и перепишем выражение, определяющее принятый входной процесс (отношенный к отрезку единичной длины), на оси y в виде

$$x(y) = \mu(y, \psi) + \eta(y), \quad (13.90)$$

где $\eta(y)$ — составляющая изотропного поля помех. Пусть фактическое направление на цель соответствует условию $\psi = 0$. Найдем оценку направления из уравнения

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} [x(y) - \mu(y, \tilde{\psi})] \frac{\partial \mu^*(y, \tilde{\psi})}{\partial \tilde{\psi}} dy \right\} = 0; \quad (13.91)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \mu(y) \frac{\partial \mu^*(y, \tilde{\psi})}{\partial \tilde{\psi}} dy \right\} = - \operatorname{Re} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \eta(y) \frac{\partial \mu^*(y, \tilde{\psi})}{\partial \tilde{\psi}} dy \right\}, \quad (13.92)$$

где L определяет отрезок оси y , на котором находятся приемники сигнала. Пределы интегрирования в выражении (13.92) можно увеличить до бесконечности, введя прямоугольную весовую функцию

$$g(y) = \operatorname{rect}(y/L).$$

Проведя дифференцирование и учитывая введенную весовую функцию, получим

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ -j \int y |\mu(y)|^2 g(y) \exp(-jky \sin \tilde{\psi}) dy \right\} = \\ & = \operatorname{Re} \left\{ j \int y \eta(y) \mu^*(y) g(y) \exp(-jky \sin \tilde{\psi}) dy \right\}, \quad (13.93) \end{aligned}$$

где $k = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$. Выражение (13.93) допускает дальнейшее упрощение, если предположить, что $L/\lambda \gg 1$ и ψ мало по сравнению с λ/L .

Предположим также, что амплитуда огибающей сигнала не зависит от y . Тогда

$$-|\mu|^2 k \tilde{\psi} \int y^2 g(y) dy = \operatorname{Re} \left\{ j\mu^* \int y \eta(y) g(y) \exp(-jky\tilde{\psi}) dy \right\} \quad (13.94)$$

и оценка направления

$$\tilde{\psi} = - \frac{\operatorname{Re} \left\{ j \int y \eta(y) g(y) \exp(-jky\tilde{\psi}) dy \right\}}{\mu k \int y^2 g(y) dy}. \quad (13.95)$$

Автокорреляционная функция изотропной помехи для одной пространственной частоты действительной или мнимой части огибающей определяется выражением

$$E[\eta_r(y) \eta_r(y')] = E[\eta_i(y) \eta_i(y')] = P_n \operatorname{sinc}[k(y - y')]. \quad (13.96)$$

С учетом формулы (13.96) дисперсия оценки направления

$$D[\tilde{\psi}] = \frac{P_n (\lambda/2) \int y^2 g^2(y) dy}{|\mu|^2 k^2 \left(\int y^2 g(y) dy \right)^2}. \quad (13.97)$$

Поскольку в этом примере $g(y) = g^2(y)$, выражение (13.97) принимает вид

$$D[\tilde{\psi}] = \frac{P_n \lambda^3}{2 |\mu|^2 (2\pi)^2 \int y^2 g^2(y) dy}. \quad (13.98)$$

Определим теперь среднеквадратичное значение апертуры L_0 в виде

$$L_0^2 = \frac{(2\pi)^2 \int x^2 g^2(y) dy}{\int g^2(y) dy}. \quad (13.99)$$

При прямоугольной весовой функции $L_0 = \pi L/\sqrt{3}$. Отношение $|\mu|^2/P_n$ — это ОСП, которое в предположении обработки с помощью согласованного фильтра равно $2E/N_0$. С учетом этой подстановки дисперсия

$$D[\tilde{\psi}] = [(2E/N_0) (2L/\lambda) (L_0^2/\lambda)]^{-1}. \quad (13.100)$$

В выражении (13.100) член $2L/\lambda$ представляет собой коэффициент концентрации для линейной антенны с равномерным амплитудным распределением помехоустойчивости в изотропном

поле помех. Таким образом, дисперсию оценки направления $\tilde{\psi}$ можно выразить через ОСП на выходе антенны и через эффективную длину антенны:

$$D[\tilde{\psi}] = \left[\text{ОСП}_0 \left(\frac{L_0}{\lambda} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (13.101)$$

где

$$\text{ОСП}_0 = (2E/N_0) (2L/\lambda).$$

В принципе направление на цель, дисперсия которой определяется выражением (13.101), можно определить с ошибкой, используя два гидрофона, разнесенные на эффективное расстояние L_0 , определяемое формулой (13.99) при условии, что амплитуда сигнала обеспечивает $\text{ОСП} = \text{ОСП}_0$.

На практике случаи, когда в качестве копии огибающей процесса в выражении (13.91) можно использовать сигнал, свободный от помех, встречаются очень редко. Корреляционный приемник с расщепленной апертурой, который был рассмотрен в п. 11.7, использует в качестве копии сам принятый процесс. Для этого антенна разделяется на две половины, и процессы, принятые каждой частью, подвергаются взаимокорреляционной обработке. Реальные характеристики такой системы вследствие неизбежного присутствия шума в «копии» оказываются хуже определяемых границей Крамера — Рао в формуле (13.100).

Чтобы получить выражение для дисперсии оценки направления в корреляторе с расщепленной апертурой, рассмотрим структурную схему рис. 13.12. Пусть сигнал и помеха — комплексные узкополосные процессы, причем n_1 и n_2 независимы. Фактическое отклонение направления на цель от оси характеристики направленности каждой половины антенны, предполагается малым по сравнению с шириной характеристики направленности, поэтому

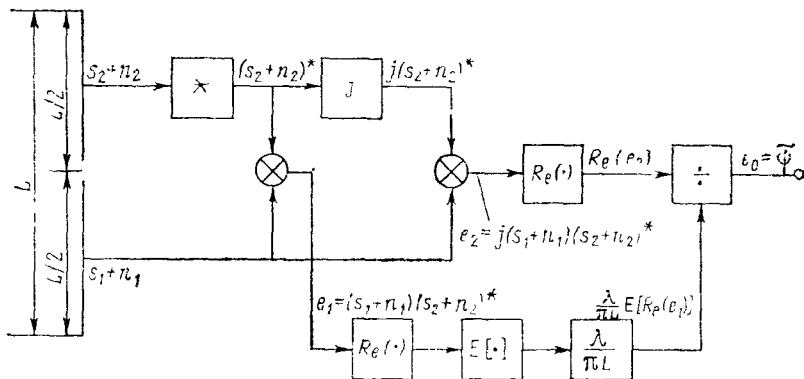


Рис. 13.12. Структурная схема коррелятора с расщепленной апертурой

формой характеристики направленности можно пренебречь и написать

$$s_1 = a \exp\left(-j \frac{\pi L}{2\lambda} \psi\right);$$

$$s_2 = a \exp\left(+j \frac{\pi L}{2\lambda} \psi\right),$$

где символ временной зависимости снова опущен. Пусть сигнал присутствует в течение времени T , а ширина полосы помехи $\beta = 1/T$. Тогда энергия действительной части сигнала равна $E = a^2 T/2$ и средняя мощность действительной части помех на входе каждой половины антенны $N_0 \beta = N_0/T$.

При перемножении выходов интерес представляет только действительная часть комплексного произведения. Таким образом,

$$\operatorname{Re} [e_1] = \operatorname{Re} [s_1 s_2^* + s_1 n_2^* + s_2^* n_1 + n_1 n_2^*];$$

$$\operatorname{Re} [e_2] = \operatorname{Re} [j s_1 s_2^* + j s_1 n_2^* + j s_2^* n_1 + j n_1 n_2^*],$$

но

$$\operatorname{Re} [s_1 s_2^*] = a^2 \cos\left[\frac{\pi L}{\lambda} \psi\right] \simeq a^2;$$

$$\operatorname{Re} [j s_1 s_2^*] = a^2 \sin\left(\frac{\pi L}{\lambda} \psi\right) \simeq a^2 \left(\frac{\pi L}{\lambda} \psi\right),$$

а также

$$E \{\operatorname{Re} [e_1]\} \simeq a^2.$$

При большом ОСП можно пренебречь членами с произведением вида помеха — помеха и написать

$$e_0 = \frac{\lambda \operatorname{Re} [e_2]}{\pi L a^2} = \psi + \frac{\lambda}{\pi L a^2} \{\operatorname{Re} [j s_1 n_2^* + j s_2^* n_1]\} = \tilde{\psi}. \quad (13.102)$$

Дисперсия оценки

$$D[\tilde{\psi}] = \left(\frac{\lambda}{\pi L a^2}\right)^2 E \{[\operatorname{Re} (j s_1 n_2^* + j s_2^* n_1)]^2\}. \quad (13.103)$$

Легко показать, что математическое ожидание в выражении (13.103) будет

$$4E [s_{1r}^2 n_{2r}^2] = 4E [s_{1r}^2] E [n_{2r}^2] = 2a^2 E [n_{2r}^2].$$

Соотношение помех на выходе и входе каждой половины антенны определяется коэффициентом концентрации, следовательно,

$$E [n_{2r}^2] = \frac{N_0}{T} (\lambda/L).$$

Полагая $a^2 = 2E/T$, найдем окончательно для дисперсии

$$D[\tilde{\psi}] = \left[\frac{2E}{N_0} \left(\frac{\pi^2 L^3}{2L^3} \right) \right]^{-1}.$$

Поскольку эффективная длина для всей антенны $L_0 = \pi L / \sqrt{3}$, дисперсия

$$D[\hat{\psi}] = \left[\left(\frac{2E}{N_0} \right) \left(\frac{2L}{\lambda} \right) \left(\frac{L_0^2}{\lambda^2} \right) (3/4) \right]^{-1}. \quad (13.104)$$

Сравнивая это выражение с формулой (13.100), видим, что платой за отсутствие свободной от шума копии будет увеличение дисперсии в $4/3$ раза по сравнению с минимально возможным значением.

Задачи

13.1. Пусть $x(t)$ — гауссов шум с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 . Чтобы подтвердить наличие или отсутствие сигнала для положительных x , необходимо установить порог γ по критерию Неймана — Пирсона. Используя таблицы значений интеграла для гауссовой функции, определите требуемое отношение γ/σ для вероятности ложных тревог 10^{-2} , 10^{-3} и 10^{-4} .

13.2. Решите задачу 13.1, полагая, что x подчиняется закону χ^2 с двумя степенями свободы и имеет функцию плотности вероятности

$$p(x) = 1/\bar{x} \exp\left(\frac{-x}{\bar{x}}\right) \quad \text{при} \quad x \geq 0.$$

Напоминаем, что для этой функции плотности вероятности $\bar{x} = \sigma_x$.

13.3. Пусть $p_0(x)$ и $p_1(x)$ заданы выражениями

$$p_0(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2\sigma^2);$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Рассчитайте значение функции отношения правдоподобия λ_0 , соответствующее порогу, определенному в задаче 13.1, предполагая, что в каждом случае $\mu = \gamma$.

13.4. Допустим, что применительно к структурной схеме широкополосного приемника, показанной на рис. 13.8, $h_2(t) = 1/T \exp(-t/T)$ при $t \geq 0$. Найдите выражение для дисперсии z_0 , считая, что T велико по сравнению с соответствующей эффективной шириной полосы шума. Сравните результат со значением для дисперсии, полученной при условии, что $h_2(t)$ — прямоугольная функция с шириной T .

13.5. Допустим, что пассивная широкополосная приемная система имеет $T\beta = 1000$. Рассчитайте требуемое ОСП в децибелах на входе квадратичного детектора огибающей для получения 50 %-й вероятности обнаружения P_D при значениях $P_{fa} = 10^{-6}$, 10^{-5} , 10^{-4} и 10^{-3} .

13.6. Дисперсия оценки направления применительно к узкополосному коррелятору с расщепленной характеристикой направленности в предположении большого ОСП на выходе каждой половины антенны определяется выражением (13.104). Покажите, что дисперсия при произвольном ОСП получается при умножении выражения (13.104) на выражение $[1 + (N_0/2E)(\lambda/L)]$. Напишите выражение для дисперсии, предполагая, что $\text{ОСП} \ll 1$.

Список литературы

1. Whalen A. D. Detection of Signals in Noise. New York: Academic Press, Inc., 1971.
2. Helstrom C. W. Statistical Theory of Signal Detection, Elmsford, N. Y.: Pergamon Press, Inc., 1960.

3. *Eckart C.* Optimal Rectifier Systems for the Detection of Steady Signals. Marine Physical Laboratory of Scripps Institute of Oceanography, La Jolla, Calif., Ref. 52—11, 1952.
4. *Marcum J. I.* A Statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar. Mathematical Appendix. Rand Corporation Report RM-339, July 1948.
5. *Fehlner L. F.* Marcum and Swerling's Data on Target Detection by Pulsed Radar. The Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory, Silver Spring, Md., TG 451, 1962.
6. *Robertson G. H.* Operating Characteristics for a Linear Detector of CW Signals in Narrow-Band Gaussian Noise. Bell Syst. Tech. J., Vol. 46, N. 4 (1967).
7. *Cramer H.* Mathematical Method of Statistics Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1958.
8. *Van Tress H. L.* Detection, Estimation and Modulation Theory. Part I. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968.

Глава 14.

ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ

При анализе характеристик гидроакустических систем необходимо знать параметры целей, среды и основные положения статистической теории обнаружения и оценок. В предыдущих главах изложены важнейшие сведения, относящиеся к указанным областям. Заканчиваем изложение этих вопросов некоторыми примерами анализа характеристик систем, которые должны продемонстрировать использование рассмотренных ранее принципов. Ограниченный объем книги не позволяет включить все детали анализа систем и анализа, относящегося ко всем предыдущим главам. Автор надеется, что читатель и без помощи конкретных для каждого случая примеров будет в состоянии самостоятельно использовать положения

14.1. Обнаружение с помощью пассивных узкополосных систем

В пп. 13.1.4 показано, что узкополосная пассивная система по сути является анализатором спектра. На рис. 14.1 приведена структурная схема с формирователем характеристики направленности — пространственным фильтром на входе. Предполагается, что сигнал от цели на центральной частоте одного из преддетекторных фильтров гребенки представляет собой чистую синусоиду. Ширина полосы помехи каждого фильтра β , а общая полоса приема $N\beta$ перекрывается N идентичными филь-

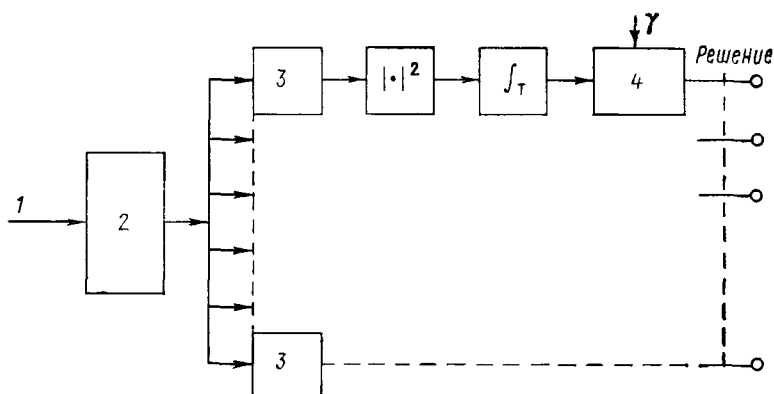


Рис. 14.1. Узкополосная приемная система:
 1— сигнал + шум; 2— пространственный фильтр; 3— узкополосный фильтр; 4— сравнение

рами. В данном примере процессор последовательной обработки обеспечивает линейное интегрирование в течение такого времени T , что $T\beta \gg 1$.

Выходное ОСП(z) для любого канала определяем из выражения (13.67). С учетом пространственной фильтрации (в предположении изотропной помехи) можно написать

$$\text{ОСП}(z) = (T/\beta) [D(f_1) P_s / \Psi_n(f_1)]^2, \quad (14.1)$$

где $D(f_1)$ — параметр, определяемый направленными свойствами пространственного фильтра на частоте сигнала f_1 ; $\Psi_n(f_1)$ — спектральная плотность помехи в полосе 1 Гц; P_s — мощность сигнала на входе системы.

Учитывая потери при распространении от цели до приемника, представим выражение (14.1) в логарифмической форме:

$$0,5 [\text{ОСП}(z) - 10 \lg(T/\beta)] = (\text{УИ} - \text{ПР}) - (\text{УП} - \text{ПН}), \quad (14.2)$$

где УИ — уровень шумоизлучения цели на частоте f_1 ; ПР — потери при распространении на расстоянии r ; УП — уровень окружающих помех в полосе 1 Гц на частоте f ; ПН — показатель направленности на частоте f_1 .

Для определения характеристик обнаружения многоканальной системы (рис. 14.1) зададимся приемлемой вероятностью ложной тревоги P_{fa} . Независимые отсчеты на выходе каждого из N каналов появляются через T секунд, а общее число ложных выбросов равно N/T .

Следовательно, число ложных выбросов в секунду будет $(N/T) P_{fa}$. Обратную этому значению величину — средний про-

межутков между выбросами называют средним временем ложной тревоги t_{fa} , т. е.

$$\bar{t}_{fa} = T/(NP_{fa}); \quad (14.3)$$

$$P_{fa} = T/(N\bar{t}_{fa}). \quad (14.4)$$

Следовательно, вероятность ложной тревоги можно определить, исходя из приемлемого времени ложной тревоги.

Величину ОСП (z), удовлетворяющую найденному значению вероятности ложной тревоги и необходимой вероятности обнаружения, определяем по графику рис. 13.10. (Так как $\beta T \gg 1$, полагаем, что функция распределения выходного процесса — гауссова.) Подставляя значение ОСП (z) = $10 \lg d$ в выражение (14.2) и решая уравнение относительно потерь при распространении, получим

$$ПР = УИ - УП + ПН - 5 \lg d + 5 \lg (T/\beta). \quad (14.5)$$

Последние два члена в правой части равенства (14.5) соответствуют требуемому отношению полной мощности сигнала к спектральной плотности мощности помех в полосе 1 Гц на входе детектора огибающей. Это отношение в логарифмической форме называют *порогом обнаружения узкополосной системы*

$$ПО_{1Гц} = 5 \lg d - 5 \lg (T/\beta). \quad (14.6)$$

В качестве численного примера рассмотрим систему со следующими значениями параметров: сигнал — синусоида $f = 500$ Гц с уровнем УИ = 125 дБ/мкПа/1 м; уровень помех УП = $+65$ дБ/мкПа в полосе 1 Гц на частоте 500 Гц, что приблизительно соответствует состоянию моря 3 балла; пространственный фильтр — горизонтальная протяженная антенна длиной $L = 30$ м; преддетекторная обработка — гребенка узкополосных фильтров каждый с полосой $\beta = 0,5$ Гц, перекрывающих полосу 500 Гц с центральной частотой 500 Гц, последдетекторная обработка — линейный интегратор со временем осреднения $T = 100$ с; среднее время ложной тревоги $\bar{t}_{fa} = 1000$ с.

Рассчитаем вероятность обнаружения в зависимости от расстояния до цели, предполагая сначала, что потери соответствуют сферическому закону распространения звука без затухания, а затем — с учетом потерь, приведенных на рис. 5.15.

Вероятность ложной тревоги, соответствующая среднему времени ложной тревоги, на основании формулы (14.4)

$$P_{fa} = T/(N\bar{t}_{fa}) = 10^{-4}.$$

Используя рис. 13.10 и рассчитанную вероятность ложной тревоги, найдем значения вероятности обнаружения P_D и соответствующие ей показатели и пороги обнаружения:

$P_D, \%$	10	50	90
d	6,2	14	25
$5 \lg d$	4	5,7	7
$ПО_{1Гц}, дБ$	-7,5	-5,8	-4,5

Показатель направленности для горизонтальной протяженной антенны определяется соотношением (11.23), откуда на частоте 500 Гц ($\lambda = 30$ м)

$$ПН = 10 \lg (2L/\lambda) = 10 \lg 20 = 13 \text{ дБ.}$$

Допустимые потери при распространении

$$PR = УИ - УП + ПН - ПО_{1Гц} = 73 - ПО_{1Гц} \quad (14.7)$$

Для трех выбранных значений P_D потери при распространении и соответствующие им расстояния в предположении сферического распространения будут:

$P_D, \%$	10	50	90
PR, дБ	80,5	78,8	77,5
$r = \text{antilg } PR/20, \text{ м}$	10 600	8710	7500

Для условий распространения, приведенных на рис 5.15, дальность обнаружения будет ограничена расстоянием до границы, разделяющим область прямого распространения от области распространения звука с учетом донных отражений. График зависимости вероятности обнаружения от расстояния до цели для двух законов распространения звука приведен на рис. 14.2

Потери при распространении, рассчитанные по формуле (14.7) при вероятности обнаружения $P_D = 50\%$, иногда называют показателем качества ПК. Необходимо отметить, что в ПК входят также параметры цели и среды и, следовательно, он не может быть единственным неизменным показателем, определяющим качество системы в общем случае.

Полезно оценить зависимость рассчитанного расстояния обнаружения от вероятности ложной тревоги. Пусть при вероятности обнаружения 50% вероятность ложной тревоги будет $P_{fa} = 10^{-5}$ и 10^{-6} , что соответствует $t_{fa} = 10^4$ и 10^5 с. Показатель обнаружения для этих значений вероятности ложной тревоги, определенный с помощью рис. 13.10, принимает значения 18 и 23, откуда дальность обнаружения в предположении сферического закона распространения будет:

P_{fa}	10^{-5}	10^{-6}
r_m	8180	7690

В этом примере уменьшение вероятности ложной тревоги на два порядка привело к уменьшению расчетной дальности обнаружения лишь на 12%. Как видно, в общем случае расчетная дальность обнаружения слабо зависит от выбора P_{fa} .

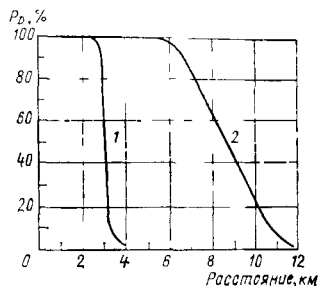


Рис. 14.2. Зависимость вероятности обнаружения от дальности для узкополосной приемной системы: 1—PR с рис. 5.15, 2—сферическое распространение

14.2. Обнаружение с помощью пассивных широкополосных систем

На рис. 14.3 показан один пространственный канал многоканальной пассивной широкополосной приемной системы. Пусть спектральные плотности сигналов и помехи на входе пространственного фильтра будут $\Psi_{sr}(f)$ и $\Psi_n(f)$.

Предположим, что для цели, находящейся на оси характеристики направленности, пространственный фильтр имеет единичное усиление. С учетом этого на входе квадратичного детектора спектральная плотность сигнала будет $\Psi_{sr}(f) |H(f)|^2$; по-

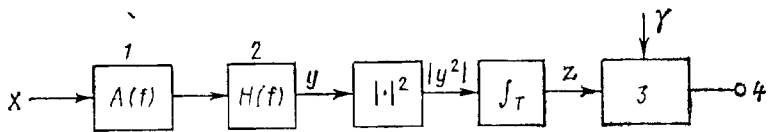


Рис 14.3 Один пространственный канал широкополосной пассивной системы: 1 — формирователь характеристики направленности, 2 — широкополосный фильтр; 3 — сравнение; 4 — решение

мехи — $\Psi_n(f) |H(f)|^2 / A(f)$, где $A(f)$ — коэффициент усиления пространственного фильтра.

Значение

$$\text{ОСП}(y) = \frac{\int \Psi_{sr}(f) |H(f)|^2 df}{\int [\Psi_n(f) |H(f)|^2 / A(f)] df}. \quad (14.8)$$

Выходное значение $\text{ОСП}(z)$ на основании формулы (13.61)

$$\text{ОСП}(z) = T\beta_n [\text{ОСП}(y)]^2,$$

где β_n — эффективная ширина фильтра на входе детектора огибающей. Значение β_n рассчитывают на основании спектральной плотности помех в точке y по формуле

$$\beta_n = \left[\int_0^\infty \Psi'_n df \right]^2 / \int_0^\infty \Psi'_n df, \quad (14.9)$$

где $\Psi'_n = \Psi_n |H|^2 / A$, аргумент при Ψ'_n и для удобства опущен.

Подставляя выражение (14.8) и (14.9) в уравнение для $\text{ОСП}(z)$, получим

$$\text{ОСП}(z) = T \frac{\left[\int_0^\infty \Psi'_n df \right]^2 \left[\int_0^\infty \Psi_{tr} |H|^2 df \right]^2}{\int_0^\infty \Psi_n'^2 df \left[\int_0^\infty \Psi'_n df \right]^2}. \quad (14.10)$$

Считая, что $T\beta_n > 1$, для определения показателя обнаружения, соответствующего выбранным значениям P_D и P_{fa} , воспользуемся графиками рабочих характеристик (см. рис. 13.10). Требуемое $\text{ОСП}(z) = d = T\beta_n [\text{ОСП}(y)]^2$ или

$$\text{требуемое ОСП}(y) = [d / (T\beta_n)]^{1/2}. \quad (14.11)$$

Теперь необходимо определить такое расстояние r , которое удовлетворяет следующему уравнению, записанному в логарифмическом виде:

$$\text{УИ}_T(r) - \text{УП}_T = \text{ПО}, \quad (14.12)$$

где $УИ_T(r)$ — уровень принятого сигнала на расстоянии r , равной

$$ИУ_T(r) = 10 \lg \left[\int \Psi_{s_r} |H|^2 df \right]; \quad (14.13)$$

$УП_T$ — уровень помех на входе детектора огибающей, равный

$$УП_T = 10 \lg \left[\int \Psi'_n df \right] = 10 \lg \left[\int \Psi_n |H|^2 / A \right] df; \quad (14.14)$$

$ПО$ — порог обнаружения для широкополосной приемной системы, равный

$$ПО = 5 \lg d - 5 \lg T\beta_n. \quad (14.15)$$

Необходимо обратить внимание на то, что расчетная формула для порога обнаружения широкополосной системы отличается от соответствующего выражения для порога узкополосной системы вследствие того, что последний рассчитывают не относительно общего уровня помех в полосе приема, а по отношению к спектральной плотности помех в полосе 1 Гц.

Как указывалось в п. 11.6, форма огибающей спектра сигнала может в общем случае зависеть от расстояния:

$$\Psi_{s_r}(f) = \Psi_s(f) T(r, f),$$

где $\Psi_s(f)$ — спектральная плотность сигнала на расстоянии 1 м от цели; $T(r, f)$ — потери распространения на расстоянии r в функции частоты.

Если частотной зависимостью нельзя пренебречь, дальность рассчитывают итеративным образом с помощью соотношений (14.12). Если же частотная зависимость в полосе приемной системы не оказывает существенного влияния, множитель в формуле (14.13), определяющий потери при распространении, можно вынести из-под знака интеграла и получить

$$УИ_T(r) = 10 \lg \left[T(r) \int \Psi_s |H|^2 df \right] = УИ_T - ПР. \quad (14.16)$$

Подставив уравнение (14.16) в (14.12), найдем выражение для расчета потерь при распространении, соответствующих порогу обнаружения с выбранными значениями P_D и P_{1a} ,

$$ПР = УИ_T - УП - ПО. \quad (14.17)$$

Дальность обнаружения, или допустимая величина потерь при распространении, увеличивается с увеличением времени интегрирования (в предположении, что T не превосходит длительности сигнала) и коэффициента усиления антенны.

Частотная характеристика фильтра $H(f)$ оказывает влияние на все три члена правой части уравнения (14.17). Оптимизацию характеристик производят выбором $H(f)$ в соответствии с выражением (13.65). С учетом эффекта усиления антенны

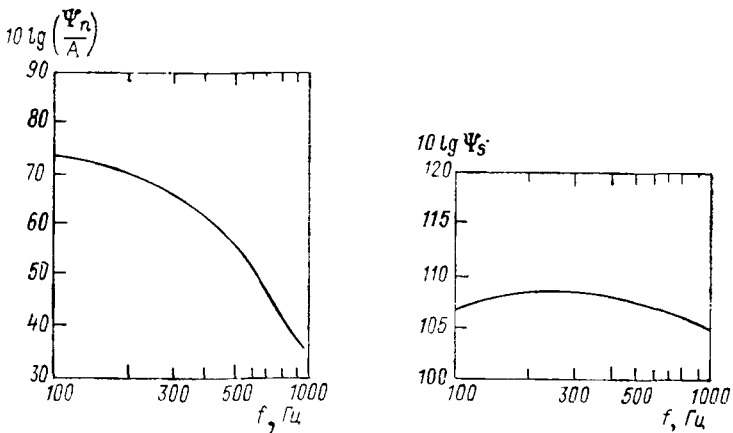


Рис. 14.4. Спектральный уровень сигнала и помех для широкополосной системы

получим следующее выражение для оптимальной формы частотной характеристики:

$$|H(f)|^2 = \Psi_{sr}(f) A^2(f) / \Psi_n^2(f). \quad (14.18)$$

Необходимо отметить, что в общем форма оптимальной частотной характеристики фильтра будет функцией расстояния вследствие зависимости спектра от дальности до цели. К счастью, в большинстве случаев приблизительное расстояние можно заранее предсказать, а следовательно, и определить оптимальную форму для этого расстояния. Кроме того, как будет видно из рассмотренного ниже примера, особо высокая точность в выборе формы характеристики и не требуется.

Будем считать, что уровень помех на выходе пространственного фильтра и уровень сигнала заданы кривыми на рис. 14.4. При $P_D = 50\%$, $P_{fa} = 10^{-4}$ и $T = 100$ с необходимо определить: 1) дальность обнаружения, когда в качестве преселектора применен прямоугольный фильтр с верхней частотой среза 1000 Гц и нижними частотами среза 900, 800, 700, 600 и 500 Гц; 2) форму оптимального фильтра; 3) дальность обнаружения, когда в качестве преселектора использован фильтр с оптимальной частотной характеристикой по п. 2.

Предположим, что закон распространения звука — сферический, а частотно-зависимое затухание отсутствует. Необходимое при решении уравнения (14.17) интегрирование можно выполнить численным методом, как это показано в пп. 2.5.3. Разобьем спектральную плотность (рис. 14.4) на полосы шириной по 100 Гц и запишем в таблицу интенсивность в центре полос. Мощность сигнала в полосе от f_1 до f_2

$$\int_{f_1}^{f_2} \Psi_s |H|^2 df \approx (100 \text{ Гц}) \sum_i \Psi_{s_i} |H_i|^2$$

для всех i в $[f_1, f_2]$ или

$$УИ_T = 10 \lg(100) + 10 \lg \left(\sum_i \Psi_{s_i} |H_i|^2 \right).$$

Для фильтра с прямоугольной характеристикой $H_i = 1$ и в этих выражениях ее можно опустить. Приведенные ниже данные отражают суть метода, используемого для ответа на вопрос по п. 1 примера:

f , Гц	$УИ_s$, дБ	$\Psi_{s_i} \cdot 10^{-10}$	$10 \sum \Psi_{s_i} \cdot 10^{-12}$	$УИ_T$, дБ	Полоса, Гц
950	105,2	3,31	3,31	125,2	1000 . . . 900
850	105,8	3,8	7,11	128,5	1000 . . . 800
750	106,2	4,17	11,28	130,5	1000 . . . 700
650	106,8	4,78	16,06	132	1000 . . . 600
550	107,3	5,73	21,43	133,3	1000 . . . 500

Во втором столбце приведен уровень сигнала в центре полосы каждого прямоугольного фильтра; в третьем — величина спектральной плотности; в четвертом — интенсивность сигнала в суммарной полосе; в пятом — интенсивность сигнала в суммарной полосе в логарифмическом виде.

Для завершения расчетов по п. 1 определим уровень помех и эффективную ширину полосы каждого из прямоугольных фильтров:

$$УП_T \approx 10 \lg \left[100 \sum_i \Psi_{s_i} |H_i|^2 / A_i \right];$$

$$\beta_n \approx 100 \left[\sum_i \Psi_{n_i} |H_i|^2 / A_i \right]^2 \left[\sum_i (\Psi_{n_i} |H_i|^2 / A_i)^2 \right]^{-1}.$$

Результаты расчетов приведены ниже:

Полоса, Гц	$УП_T$, дБ	β_n , Гц
1000 . . . 900	55	100
1000 . . . 800	59,8	180
1000 . . . 700	64	223
1000 . . . 600	69,5	183
1000 . . . 500	76,1	158

Необходимо отметить, что эффективная ширина полосы помех не равна ширине прямоугольного фильтра, за исключением первого участка шириной 100 Гц с центром на частоте 950 Гц. Быстрый спад спектра помех в полосе 500 . . . 1000 Гц приводит к тому, что эффективная ширина полосы помех в общем случае отличается от ширины полосы фильтра.

Теперь можно рассчитать для каждого фильтра порог обнаружения ПК и дальность обнаружения при $d = 14$, что соответствует требуемым P_D , P_{fa} и $T = 100$ с. Результаты расчета следующие:

Полоса, Гц	$УИ_T - УП_T$	ПО	ПК	r , м
1000 . . . 900	70,2	-14,3	84,5	16 788
1000 . . . 800	68,7	-15,5	84,2	16 218
1000 . . . 700	66,5	-16	82,5	13 335
1000 . . . 600	62,5	-15,6	78,1	8035
1000 . . . 500	57,2	-15,3	72,5	4217

В этом примере наибольшая дальность обнаружения получается при использовании фильтра шириной 100 Гц в высокочастотном участке полосы частот. В соответствии с использованной в примере формой спектральной плотности сигнала и помех именно в этом диапазоне получается наибольшее ОСП. Следует отметить, что минимальный порог обнаружения соответствует полосе 700 . . . 1000 Гц, однако из-за увеличения уровня помех на этом участке дальность обнаружения оказывается меньше.

Для выбора оптимальной формы фильтра (п. 2 настоящего примера) воспользуемся выражением (14.18). Проведя нормировку по максимальному значению, получим:

$f, \text{ Гц}$	$ H/H_{\max} ^2$
950	1,0 = 0 дБ
850	0,29 = -5,3 дБ
750	0,05 = -12,7 дБ
650	0,0036 = -24,4 дБ
550	0,0001 = -40 дБ

Частотная характеристика оптимального фильтра имеет острый выброс в верхнем участке диапазона, что подтверждает выводы, полученные в п. 1 примера.

Для выполнения расчетов по п. 3 подставим формулу в интеграл, входящий в выражение (14.17), упростив, получим

$$PK = PR(r) = 5 \lg \left[\int \left(\frac{\Psi_s A}{\Psi_n} \right)^2 df \right] - 5 \lg d + 5 \lg T \quad (14.19)$$

Отметим, что применение фильтра с оптимальной формой частотной характеристики сокращает вычисляемые интегралы до одного. Численное интегрирование выражения (14.19) дает $PK = 85,25$ дБ; $r = 18\,300$ м.

Сопоставление с результатами п. 1 подтверждает улучшение характеристик обнаружения при использовании оптимального фильтра по отношению к фильтрам с прямоугольной частотной характеристикой. Вместе с тем ПК системы с оптимальным фильтром лишь на 0,75 дБ лучше по отношению к прямоугольному фильтру с полосой 900 ... 1000 Гц. Это показывает, что тщательный учет параметров сигнала и помех может привести к весьма простой реализации фильтра, обеспечивающей характеристики обнаружения, близкие к оптимальным. Процедура определения оптимальной формы частотной характеристики фильтра достаточно проста, а полученные результаты могут подсказать путь выбора относительно простой формы фильтра в качестве аппроксимации оптимальной частотной характеристики. Тщательный подбор формы фильтра, обеспечивающей близкое совпадение с формой оптимального фильтра, очень редко оправдывает полученное улучшение характеристик при сопоставлении с увеличением стоимости и сложности.

14.3. Сопровождение по углу с помощью широкополосных пассивных систем

В качестве одного из возможных вариантов устройства для определения направления в гл. 11 и 13 описана схема, содержащая коррелятор с расщепленной апертурой. Как видно из рис. 13.12, для того чтобы измерить разность фаз сигналов от двух половин антенны, в одном из каналов узкополосный сигнал сдвигается по фазе на 90° . Разность фаз узкополосного сигнала пропорциональна отклонению направления на цель от оси характеристики направленности.

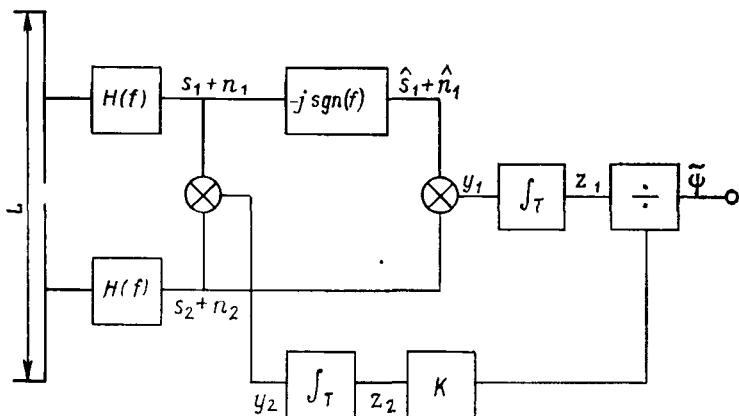


Рис. 14.5. Широкополосный коррелятор с расщепленной апертурой и преобразованием Гильберта для определения направления

Аналогичный результат получится и в случае широкополосного сигнала, если сдвиг по фазе на 90° обеспечить для всех частот входной полосы, что в данном случае эквивалентно преобразованию Гильберта. В п. 6.10 показано, что для заданного сигнала $x(t)$ и его преобразования Фурье $X(f)$ преобразование Гильберта определяется выражением $\hat{x}(t) \leftrightarrow \leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(f) X(f)$.

На рис. 14.5 приведена структурная схема широкополосного коррелятора с расщепленной апертурой в котором использовано преобразование Гильберта.

Сигнал и помеха предполагаются гауссовыми с нулевым средним значением, n_1 и n_2 независимы, s_1 и s_2 отличаются только временем задержки, вызванным отклонением направления на цель от оси характеристики направленности. Отклонение направления на цель предполагается малым по сравнению с шириной характеристики направленности, поэтому в тригонометрических соотношениях можно использовать аппроксимацию малыми углами.

Процесс на выходе интеграторов в схеме рис. 14.5 запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \int_T \hat{s}_1 s_2 dt + \int_T (\hat{n}_1 s_2 + n_2 \hat{s}_1 + \hat{n}_1 n_2) dt; \\ z_2 &= \int_T s_1 s_2 dt + \int_T (n_1 s_2 + n_2 s_1 + n_1 n_2) dt. \end{aligned} \right\} \quad (14.20)$$

Предположим, что ОСП на выходе фильтров мало, но T достаточно велико, поэтому

$$z_1 \approx \int_T \hat{s}_1 \hat{s}_2 dt + \int_T \hat{n}_1 \hat{n}_2 dt; \quad z_2 \approx \int_T s_1 s_2 dt.$$

При малых углах практически $s_1 = s_2$, поэтому $z_2 \approx TE [s^2]$. Выходной сигнал $z_1/(Kz_2)$ — это оценка направления, а его ожидаемое значение

$$E[\tilde{\psi}] = E[\hat{s}_1 s_2] / (KE [s^2]). \quad (14.21)$$

Предположим, что эффективная полоса помех велика по сравнению с $1/T$, тогда дисперсию оценки

$$D^2[\tilde{\psi}] = \frac{1}{K^2 T^2 E^2 [s^2]} \int_{-\infty}^{+\infty} R_n^2(\tau) d\tau \quad (14.22)$$

можно представить в виде

$$D^2[\tilde{\psi}] = \left[2K^2 T \beta_n \frac{R_s^2(0)}{R_n^2(0)} \right]^{-1}, \quad (14.23)$$

где β_n — эффективная ширина полосы помех.

Пусть сигнал представляет собой плоскую волну, приходящую к антенне под углом ψ относительно оси характеристики направленности. Сигналы s_1 , s_2 и их преобразование Фурье (с учетом малости углов) будут

$$\left. \begin{aligned} s_1(t, \psi) &\leftrightarrow G(\psi, f) H(f) S(f) \exp[j2\pi L\psi/(2c)] \approx \\ &\approx G(\psi, f) H(f) S(f) [1 + j\pi f L\psi/(2c)]; \\ s_2(t, \psi) &\leftrightarrow G(\psi, f) H(f) S(f) \exp[-j2\pi f L\psi/(2c)] \approx \\ &\approx G(\psi, f) H(f) S(f) [1 - j\pi f L\psi/(2c), \end{aligned} \right\} \quad (14.24)$$

где $G(f, \psi)$ — характеристика направленности половины антенны, приведенная к центру антенны; $S(f)$ — преобразование Фурье-сигнала плоской волны на входе антенны при $\psi = 0$.

Преобразованием Фурье для $\hat{s}_1(t, \psi)$ будет выражение

$$\hat{s}_1(t, \psi) \leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(f) G(\psi, f) H(f) S(f) \exp[j\pi f L\psi/(2c)], \quad (14.25)$$

откуда на основании теоремы Парсеваля

$$\begin{aligned} E \left[\int_T \hat{s}_1(t) s_2(t) dt \right] &= TE [\hat{s}_1 s_2] = \\ &= -jT \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(f) |G|^2 |H|^2 \Psi_s \left(1 + j \frac{\pi f L \psi}{c} \right) df, \end{aligned} \quad (14.26)$$

где $\Psi_s(f) = |\overline{S(f)}|^2$. Мнимая часть выражения (14.26) равна нулю, поэтому

$$E[\hat{s}_1 \hat{s}_2] = \frac{2\pi L \Psi}{c} \int_0^{\infty} f |G|^2 |H|^2 \Psi_s df. \quad (14.27)$$

Интеграл формулы (14.27) представляет собой односторонние спектральные плотности s_1 и s_2 . Будучи соответствующим образом нормирован, он может быть истолкован как «средняя частота» широкополосного спектра. Таким образом,

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} f |G|^2 |H|^2 \Psi_s df / \int_0^{\infty} |G|^2 |H|^2 \Psi_s df. \quad (14.28)$$

Знаменатель дроби (14.28) равен $0,5R_s(0) = 0,5E[s^2]$. Подставляя соотношение (14.28) в (14.27), получим

$$E[\hat{s}_1, \hat{s}_2] = \frac{\pi L \bar{f} \Psi}{c} R_s(0) = \frac{\pi L \Psi}{\bar{\lambda}} E[s^2], \quad (14.29)$$

где $\bar{\lambda} = c/\bar{f}$ — средняя длина волны.

Пусть теперь в уравнении (14.21) $K = \pi L/\bar{\lambda}$ и ожидаемое значение оценки равно истинному направлению. Подставив K в соотношение (14.23), найдем дисперсию угла

$$D[\bar{\psi}] = [2(\pi L/\bar{\lambda})^2 T \beta_n \{\text{ОСП}\}^2]^{-1}, \quad (14.30)$$

где ОСП на выходе преддетекторного фильтра для каждой половины антенны.

Отметим, что выбор указанного K сделан в предположении известного значения средней частоты. В общем случае, если только истинное направление не равно нулю, ошибка в оценке \bar{f} приводит к появлению ошибки при оценке ожидаемого направления на цель. Для решения этой проблемы можно использовать схему с обратной связью сканирования нуля характеристики (систему автоматического сопровождения цели), показанную на рис. 11.23.

Найдем теперь форму преддетекторного фильтра, минимизирующего дисперсию определения направления для широкополосной пассивной системы. Взяв за основу выражение (14.22), легко показать, что дисперсия минимизируется при максимизации функции

$$\left[\int_0^{\infty} f \Psi_s |H|^2 df \right]^2 / \int_0^{\infty} (\Psi'_n)^2 |H|^2 df, \quad (14.31)$$

где Ψ'_n — спектральная плотность помех на выходе каждой половины антенны. Умножив и разделив подынтегральное выра-

жение в числителе на Ψ'_n и воспользовавшись неравенством Шварца, получим

$$\frac{\left[\int_0^{\infty} f \Psi_s |H|^2 df \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} (\Psi'_n)^2 |H|^4 df} \leq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f^2 \left(\frac{\Psi_s}{\Psi'_n} \right)^2 df. \quad (14.32)$$

Неравенство (14.32) превращается в равенство, если

$$|H(f)|^2 = f \Psi_s(f) / \Psi_n'^2(f). \quad (14.33)$$

Оптимальный фильтр для оценки угла отличается от оптимального фильтра для обнаружения [см. формулу (13.64)] только параметром \hat{f} . В качестве численного примера рассмотрим случай, когда спектральные плотности сигнала и помех имеют форму, показанную на рис. 14.4.

В каждом из каналов приемной системы с расщепленной апертурой применен оптимальный фильтр, определяемый равенством (14.33), а потери при распространении предполагаются независимыми от частоты. Дисперсия оценки направления для этого случая

$$D[\tilde{\psi}] = \frac{1}{2T} \left(\frac{c}{\pi L} \right)^2 \left[T^2(r) \int f^2 \left(\frac{\Psi_s}{\Psi'_n} \right)^2 df \right]^{-1}, \quad (14.34)$$

где $T(r)$ — потери при распространении на расстоянии r ; Ψ_s — спектральная плотность сигнала при $r=1$. Необходимо определить расстояние, на котором стандартное отклонение оценки направления $\sigma_{\tilde{\psi}}$ уменьшается до приемлемого значения.

Прологарифмировав выражение (14.34) и решив относительно потерь при распространении, получим

$$\text{ПР} = 10 \lg \sigma_{\tilde{\psi}} + 5 \lg(2T) - 10 \lg \left(\frac{c}{\pi L} \right) + 5 \lg \left[\int f^2 \left(\frac{\Psi_s}{\Psi'_n} \right)^2 df \right]. \quad (14.35)$$

Пусть длина антенны составляет 30 м, время интегрирования 10 с, а скорость звука — 1500 м/с. Если допустимое стандартное отклонение направления равно 0,01 рад, тогда потери при распространении не должны превышать

$$\text{ПР} = -25,5 + 5 \lg \left[\int f^2 \left(\frac{\Psi_s}{\Psi'_n} \right)^2 df \right]. \quad (14.36)$$

На основании графиков спектральной плотности (см. рис. 14.4) найдем значение подынтегрального выражения:

$f, \text{ Гц}$	$f^2 (\Psi_s/\Psi'_n)^2 \Delta f$
950	$98,8 \cdot 10^{20}$
850	$26,3 \cdot 10^{20}$
750	$4,1 \cdot 10^{20}$
650	$0,24 \cdot 10^{20}$
550	$0,008 \cdot 10^{20}$
<hr style="width: 50%; margin: auto;"/>	
$129,5 \cdot 10^{20} = \Delta f \Sigma f^2 (\Psi_s/\Psi'_n)^2$	

Окончательно

$$\text{ПР} = -25,5 + 5 \lg (129,5 \cdot 10^{20}) = 85 \text{ дБ.} \quad (14.37)$$

В этом примере среднее значение частоты очень близко к 1000 Гц. Так как ширина характеристики направленности приблизительно равна $\bar{\lambda}/L = 0,05$ рад, стандартное отклонение оценки направления составляет 1/5 ширины характеристики направленности.

Необходимо отметить, что потери при распространении, определяемые формулой (14.37), практически такие же, как и полученные в п. 14.2 для случая обнаружения с использованием оптимального фильтра. В действительности для корректной оценки уровень помех при расчетах дисперсии направления необходимо удвоить, так как для приема используется лишь половина антенны. Таким образом, допустимое значение потерь при распространении необходимо уменьшить на 3 дБ и они составят 82 дБ.

Точность оценки направления в этом примере рассчитывалась применительно к плоской волне и изотропной помехе. Одновременный прием сигналов с других направлений и анизотропия помех вызывают на практике существенный рост ошибки, если отношение сигнала к суммарной помехе недостаточно велико.

14.4. Измерение расстояния в пассивном режиме при многолучевом распространении сигналов

С помощью шумопеленгаторных систем можно определять расстояние до цели, пеленгуя из двух различных точек, т. е. триангуляционным методом. В данном методе используется характерная особенность распространения звука в море — многолучевость, что эквивалентно пеленгованию источника несколькими разнесенными в пространстве приемниками.

Как видно из рис. 14.6, существуют две различные траектории распространения звука от надводного корабля до погруженной подводной лодки. Если подводная лодка находится вне зоны геометрической дальности, эти траектории могут оказаться единственно возможными. Для простоты в дальнейшем

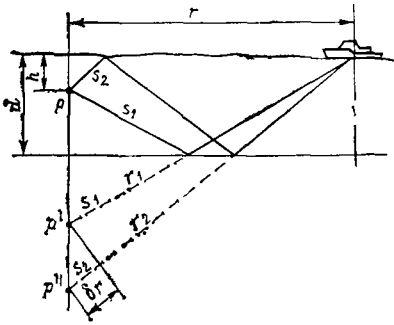


Рис. 14.6 Геометрия простого двух-лучевого пассивного измерения дистанции

точках p' и p'' (за исключением изменения знака при отражении сигнала от поверхности).

Если $s_1 = s(t)$, то $s_2 = s(t - \Delta)$, где $\Delta = \delta r / c$. Когда глубины приемника h и моря d малы по сравнению с горизонтальным расстоянием r , легко показать, что соотношение между горизонтальным расстоянием r и разностью траекторий Δr будет

$$r = 4hd / (\delta r).$$

Таким образом, расстояние до цели можно легко определить, если известны d и h , а δr измерено.

Для численной оценки положим $d = 1500$ м; $h = 60$ м; $r = 15000$ м. Тогда $\delta r = 24$ м, а время запаздывания s_2 относительно s_1 $\Delta = 16$ мс (при $c = 1500$ м/с).

На рис. 14.7 приведена структурная схема устройства для определения времени запаздывания Δ , соответствующего значению δr , применительно к двум траекториям распространения сигнала на рис. 14.6. Практически эта схема обеспечивает вычисление автокорреляционной функции принятого сигнала и на ее основе — расчет временной задержки. Ограничимся определением ОСП соответствующих компонентов $y(\tau, t)$. Антенна предполагается ненаправленной в вертикальной плоскости: она не обеспечивает разрешения траекторий лучей по углу прихода.

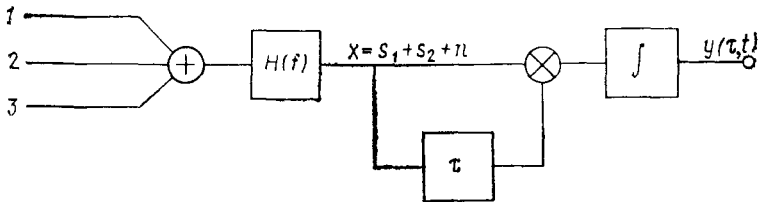
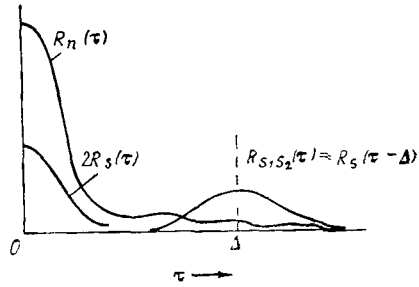


Рис. 14.7. Структурная схема корреляционного приемника при пассивном измерении дистанции и многолучевом распространении:

1 и 2 — первый и второй пути сигнала; 3 — окружающий шум

Процесс на выходе интегратора является оценкой корреляционной функции принятого сигнала. Тогда при $T \gg \tau$

$$y(f, \tau) = \tilde{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t') x(t' - \tau) dt', \quad (14.38)$$



а среднее значение $y(t, \tau)$

$$\overline{y(t, \tau)} = R_x(\tau) = R_{s_1}(\tau) + R_{s_2}(\tau) + R_n(\tau) + R_{s_{s_1}}(\tau) + R_{s_{s_2}}(\tau). \quad (14.39)$$

Рис 14.8 Составные части корреляционной функции при двух траекториях распространения сигнала

Поскольку s_1 и s_2 различаются только временем запаздывания, $R_{s_1}(\tau) = R_{s_2}(\tau)$ и $R_{s_{s_1}} = R_s(\tau - \Delta) = R_{s_{s_2}}(-\tau)$. Отсюда

$$R_x(\tau) = 2R_s(\tau) + R_n(\tau) + R_s(\tau - \Delta) + R_s(\tau + \Delta). \quad (14.40)$$

Составные части $R_x(\tau)$ показаны на рис. 14.8 для положительного τ (при этом предполагается, что ширина главного максимума корреляционной функции мала по сравнению с временем запаздывания Δ).

Для того чтобы оценить запаздывание, необходимо вначале обнаружить корреляционный пик вблизи $\tau = \Delta$, а затем найти ОСП при $\tau = \Delta$:

$$\text{ОСП}(y) = \frac{\{E[y_{s+n}(\Delta)] - E[y_n(\Delta)]\}^2}{D[y_n(\Delta)]}. \quad (14.41)$$

При $R_s(0) \ll R_n(0)$ и Δ , больших по сравнению с шириной пика корреляционной функции,

$$\begin{aligned} E[y_{s+n}(\Delta)] &\approx R_s(0) + R_n(\Delta); \\ E[y_n(\Delta)] &= R_n(\Delta), \end{aligned}$$

поэтому числитель в формуле (14.41) становится равным $R_s^2(0)$.

Запишем выражение для дисперсии помех:

$$\begin{aligned} E[y_n^2(\Delta)] &= \frac{1}{T^2} \iint \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t'}{T}\right) \times \\ &\times \overline{n(t)n(t')n(t-\Delta)n(t'-\Delta)} dt dt'. \end{aligned} \quad (14.42)$$

Математическое ожидание произведения четырех членов подынтегрального выражения и предположении, что помеха

гауссова с нулевым средним значением, можно оценить с помощью соотношения (9.140). Таким образом,

$$\begin{aligned} \overline{n(t)n(t')n(t-\Delta)n(t'-\Delta)} &= \overline{[n(t)n(t')][n(t-\Delta)n(t'-\Delta)]} + \\ &+ \overline{[n(t)n(t-\Delta)][n(t')n(t'-\Delta)]} + \\ &+ \overline{[n(t)n(t'-\Delta)][n(t')n(t-\Delta)]} = \\ &= R_n^2(t-t') + R_n^2(\Delta) + R_n(t-t'+\Delta)R_n(t'-t+\Delta). \end{aligned} \quad (14.43)$$

С учетом принятых допущений третий член в формуле (14.43) при интегрировании исчезнет. Пусть $t-t' = t''$, тогда

$$E[y_n^2(\Delta)] = \frac{1}{T^2} \iint \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t-t''}{T}\right) [R_n^2(t'') + R_n^2(\Delta)] dt dt''.$$

Проинтегрировав по t , получим

$$E[y_n^2(\Delta)] = R_n^2(\Delta) + \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t''|}{T}\right) R_n^2(t'') dt''.$$

Для T , больших по сравнению с шириной $R_n(t'')$, это выражение приблизительно равно

$$E[y_n^2(\Delta)] \approx R_n^2(\Delta) + \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} R_n^2(t'') dt'',$$

откуда

$$D[y_n(\Delta)] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} R_n^2(t'') dt''. \quad (14.44)$$

Воспользовавшись определением эффективной ширины огибающей помех, запишем

$$D[y_n(\Delta)] = R_n^2(0)/(2T\beta_n), \quad (14.45)$$

откуда

$$\text{ОСП}(y) = 2T\beta_n \left[\frac{R_s^2(0)}{R_n^2(0)} \right] = \frac{T\beta_n}{2} \{\text{ОСП}(x)\}^2, \quad (14.46)$$

где $\text{ОСП}(x)$ — ОСП на выходе фильтра. Выражение (14.46) идентично формуле (13.65), определяющей выходное ОСП для широкополосной системы обнаружения.

Выражение (14.45) справедливо при условии, что время запаздывания Δ велико по сравнению с шириной корреляционной функции как сигнала, так и помехи. Это эквивалентно требованию большого значения Δ по сравнению с обратными величинами эффективных полос сигнала и помех. Для рассмотренного примера при $\Delta = 16$ мс необходимая полоса $\beta_n, \beta_s \gg 10^3 \approx \approx 62$ Гц, т. е. для успешного определения расстояния в пассив-

ном режиме при заданных геометрических соотношениях может потребоваться полоса сигнала и помех 400 Гц и более.

При разумном ОСП точность оценки обеспечиваются коррелятором и рассчитывают по формуле (13.81), т. е. дисперсия оценки обратно пропорциональна ОСП и ширине огибающей сигнала.

На практике точность результатов при многолучевом распространении чрезвычайно сильно зависит от фактических гидроакустических условий и возможности точного прогноза многолучевой структуры. В общем случае лучевая структура оказывается гораздо сложнее приведенной на рис. 14.6, а это фактически во многих случаях обесценивает метод пассивного измерения дальности.

14.5. Характеристики активных систем

Пусть в активной системе используется обратимая экранированная антенна в виде диска. Основные характеристики активной системы и цели следующие: антенна — экранированный диск диаметром 3 м; рабочая частота 5 кГц; форма импульса — прямоугольный импульс длительностью 0,1 с; уровень излучения 220 дБ/мкПа на 1 м; цель — сила цели СЦ = +10 дБ; относительная скорость ± 40 уз или 20 м/с; среда — уровень помех +60 дБ/мкПа в полосе 1 Гц; поверхностная реверберация $S_s = -40$ дБ.

Необходимо рассчитать дальность обнаружения при $P_D = 50\%$; $P_{fa} = 10^{-4}$ и следующих ограничивающих факторах: 1) преобладающая помеха — шум моря, относительная скорость цели равна нулю; 2) преобладающая помеха — шум моря, относительная скорость цели не равна нулю; 3) преобладает помеха поверхностной реверберации, скорость цели относительно источников реверберации равна нулю; 4) преобладает помеха поверхностной реверберации, скорость цели относительно источников реверберации не равна нулю.

14.5.1. Преобладающая помеха — шум моря, относительная скорость равна нулю

Предположим, что центральная частота преддетекторного фильтра совпадает с частотой излучаемого сигнала, а ширина его полосы обратно пропорциональна длительности импульса. Так как ширина полосы фильтра мала по сравнению с частотой сигнала, спектральная плотность помех постоянна в полосе фильтра. Следовательно, потери при распространении можно рассчитать с помощью уравнения, аналогичного уравнению для пассивных систем:

$$ПР = 0,5(УИ + СЦ - УП_s + ПН - ПО_{Гч}), \quad (14.47)$$

где ПР — потери при распространении в одну сторону; множитель 0,5 необходим, потому что для активной системы характерны потери при распространении звука в обе стороны. Характеристики обнаружения рассчитаем для одиночной посылки.

Порог обнаружения для узкополосной системы

$$ПО_{1Гц} = 5 \lg d - 5 \lg (t_p/\beta), \quad (14.48)$$

где t_p — длительность импульса с прямоугольной огибающей; β — ширина полосы преддетекторного фильтра. С учетом того, что $\beta = 1/t_p$, получим

$$ПО_{1Гц} = 5 \lg d - 5 \lg (t_p^2). \quad (14.49)$$

Для этой системы произведение длительности импульса на полосу фильтра равно единице, следовательно, статистика выходного процесса не будет гауссовой. Для определения показателя обнаружения воспользуемся кривой на рис. 13.11, откуда для $P_D = 50\%$, $P_{fa} = 10^{-4}$ и $t_p\beta = 1$ имеем $d = 75$, а порог обнаружения приблизительно 19 дБ. Показатель направленности для круглой антенны на основании формулы (11.84)

$$ПН = 20 \lg (\pi D/\lambda) = 20 \lg 3\pi/0,3 \approx 30 \text{ дБ.}$$

Допустимые потери при распространении в одну сторону в соответствии с выбранными P_D и P_{fa} найдем после подстановки рассчитанных величин в формулу (14.47):

$$ПР = 0,5 (220 + 10 - 60 + 30 - 19) = 90,5 \text{ дБ.}$$

Допустим, что сигнал распространяется по сферическому закону с затуханием 0,5 дБ/км (см. рис. 5.10). Тогда дальность обнаружения найдем из уравнения

$$90,5 = 20 \lg r + 0,5r \cdot 10^{-3},$$

откуда $r = 15\,000$ м.

14.5.2. Преобладающая помеха — шум моря, относительная скорость не равна нулю

С учетом относительной скорости цели ± 40 уз частота принятого сигнала может оказаться смещенной вследствие эффекта Доплера. Для данного примера диапазон частотного смещения

$$f_{d_{\max}} = \pm 2V/\lambda = \pm 2(20)/0,3 \approx \pm 134 \text{ Гц.}$$

Как было показано в пп. 13.1.4, для перекрытия возможного смещения можно использовать один широкополосный фильтр или гребенку узкополосных. Рассчитаем вначале характеристики для широкополосного фильтра с шириной полосы $\beta = 268$ Гц. Произведение времени на ширину полосы $t_p\beta = 26,8$. Ширина полосы последдетекторного фильтра соответствует полосе фильтра с прямоугольной огибающей.

На основании рис. 13.11 показатель обнаружения равен приблизительно 20, откуда порог обнаружения

$$ПО_{1Гц} = 5 \lg 20 - 5 \lg 0,1/268 \approx 24 \text{ дБ.}$$

По сравнению с предыдущим случаем использование широкополосного фильтра привело к увеличению порога почти на 5 дБ. Потери при распространении

$$ПР = 0,5 (220 + 10 - 60 + 30 - 24) = 88 \text{ дБ},$$

откуда дальность обнаружения при сферическом законе распространения с затуханием $r = 12\,500$ м, т.е. относительно предыдущего примера дальность уменьшилась на 17 %.

Если для обработки используется гребенка фильтров с шириной полосы каждого фильтра, согласованной с длительностью импульса, характеристики обнаружения будут приблизительно равны характеристикам для случая с нулевой относительной скоростью. Увеличение числа частотных каналов от 1 до 27 приведет к незначительному возрастанию порога обнаружения из-за необходимости сохранения того же уровня ложных тревог, что и при одном частотном канале с узкополосным фильтром.

14.5.3. Преобладающая реверберационная помеха.

Нулевое доплеровское смещение частоты эхо-сигнала относительно реверберации

Пусть излучающая и приемная характеристики направленности активной системы ориентированы параллельно поверхности океана. Допустим, что реверберационная помеха превосходит шум моря и для простоты будем полагать, что преобладающим компонентом помех является поверхностная реверберация.

Спектральная плотность реверберационной помехи обладает параметрами, приведенными в пп. 12.3.1, с центральным пиком, смещенным по частоте относительно излученного сигнала пропорционально скорости носителя и курсовому углу характеристики направленности. На практике при преобладающей реверберационной помехе частота излученного сигнала, как правило, изменяется таким образом, что пик реверберации сохраняется постоянным на некоторой фиксированной частоте. Это позволяет использовать в приемной системе неизменный набор фильтров.

Если цель неподвижна относительно рассеивателей, создающих реверберацию, спектральная плотность принятого сигнала по форме будет идентична спектральной плотности реверберации. Отношение сигнал/реверберация в логарифмической форме для этого случая определяется выражением (12.20). Таким образом,

$$УЭ - УР_s = СЦ - S_s - ПР/2 - 10 \lg (ct_p \gamma_B/2),$$

где $УР_s$ — уровень реверберационной помехи; γ_B — ширина эквивалентной характеристики направленности в горизонтальной плоскости в соответствии с табл. 8 I из работы [1]

$$10 \lg \gamma_B = 10 \lg (\lambda/\pi D) + 6,9$$

или с учетом трехметрового диаметра антенны и частоты 5 кГц $\gamma_B = 0,156$ рад.

Приравняв отношение сигнал/реверберация порогу обнаружения и решив относительно потерь при распространении, найдем

$$ПР = 2 [СЦ - \dot{S}_s + 10 \lg (ct_p \nu_B / 2)] - ПО]. \quad (14.50)$$

Вследствие того что спектр эхо-сигнала и реверберации имеют одинаковую форму, никакого выигрыша от согласования формы фильтра с сигналом получить нельзя (применение преддетекторного фильтра обязательно для минимизации влияния шума моря). Более того, последетекторная обработка одиночного сигнала не обеспечивает улучшения ОСП, так как произведение длительности эхо-сигнала на ширину полосы реверберации равно единице. Следовательно, порог обнаружения зависит только от показателя обнаружения: $ПО = 5 \lg d$, где d выбирается по графикам рабочих характеристик приемника для произведения длительности на ширину полосы, равную единице. Например, воспользовавшись рис. 13.11, получим $d = 75$ и $ПО = +9$ дБ. Таким образом, на основании формулы (14.50):

$$ПР = 2 (10 + 40 - 11 - 9) = 60 \text{ дБ.}$$

В предположении сферического закона распространения дальность обнаружения в этом случае ограничена 1000 м.

Необходимо отметить, что затухание не принималось во внимание, так как оно одинаково влияет как на сигнал, так и на реверберацию. Потери, связанные с затуханием, необходимо учитывать в том случае, когда для определения вида преобладающих помех сравнивается уровень реверберационных и окружающих помех.

Как следует из равенства (14.50), лишь длительность импульса и ширину характеристики направленности в горизонтальной плоскости может использовать проектант активной системы для улучшения характеристик обнаружения. Они улучшаются при уменьшении любого из этих параметров до тех пор, пока пространственные размеры импульса не станут меньше размеров цели.

Необходимо отметить, что рассчитанная характеристика чрезвычайно чувствительна к значению силы цели и коэффициенту обратного рассеяния, которые обычно известны весьма приблизительно. Так, ошибка в определении любого из указанных параметров на 10 дБ приводит к ошибке расчетной величины потерь при распространении в 20 дБ.

14.5.4. Преобладающая реверберационная помеха.

Ненулевое доплеровское смещение эхо-сигнала относительно спектра реверберации

Пусть носитель активной системы идет со скоростью 10 уз, причем направление оси характеристики направленности совпадает с направлением вектора скорости носителя. Эхо-сигнал от цели, сближающейся с относительной скоростью 10 уз, принимается максимумом характеристики направленности. Спектральные плотности эхо-сигнала и цели показаны на рис. 14.9. В данном случае максимум спектральной плотности ревербера-

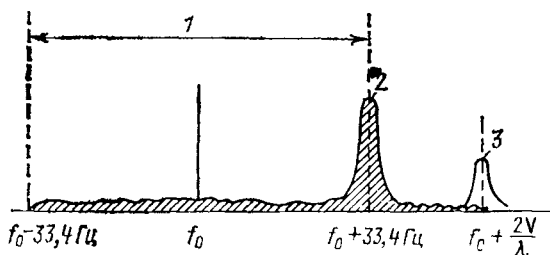


Рис. 14.9. Спектры реверберации и сигнала при носовых курсовых углах приближающейся цели:
1 — реверберационная доплеровская полоса; 2 — пик реверберации; 3 — спектр цели

ционной помехи имеет доплеровское смещение $+2V/\lambda = 33,4$ Гц, где V — скорость носителя. Некоторая часть энергии реверберационной помехи, обусловленная конечным ненулевым значением уровня бокового поля характеристики направленности присутствует в полосе $\pm 33,4$ Гц. Наличие реверберационной помехи за пределами полосы $f_0 \pm 33,4$ Гц определяется формой спектра излучаемого сигнала.

Для прямоугольной огибающей излучаемого сигнала основной лепесток спектральной плотности реверберационной помехи приблизительно соответствует функции

$$\Psi_R(f) = \Psi_{\max} \operatorname{sinc}^2[(f - f_0 - f_d)t_p]. \quad (14.51)$$

Это показано на рис. 14.10 вместе с огибающей пиков добавочных максимумов спектральной плотности реверберации и спектральной плотностью сигнала, пик которого совпадает со значением максимального доплеровского смещения.

Допустим, относительная скорость сближения цели и носителя составляет 20 уз, т. е. доплеровское смещение эхо-сигнала равно 66,8 Гц. Смещение же пика спектра эхо-сигнала относительно максимума спектральной плотности реверберации составляет 33,4 Гц. Уровень реверберационной помехи на этой частоте

$$\begin{aligned} & 10 \lg \Psi_R = \\ & = 10 \lg \Psi_m - 20 \lg (\pi f' t_p) = \\ & = 10 \lg \Psi_m - 20 \lg (33,4\pi/10) = \\ & = 10 \lg \Psi_m - 20 \text{ дБ}. \end{aligned}$$

Таким образом, в первом приближении фильтр с шириной полосы $1/t_p$ и центральной частотой,

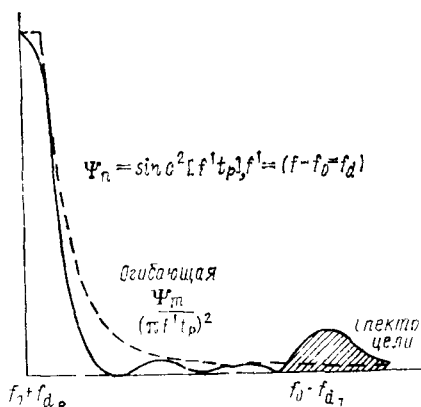


Рис. 14.10. Элементы основного лепестка спектра реверберации при излучении импульса с прямоугольной огибающей

совпадающей с частотой эхо-сигнала, обеспечивает улучшение отношения сигнал/реверберация на 20 дБ по сравнению со случаем, когда спектр эхо-сигнала совпадает со спектром реверберации. Если обозначить выигрыш в отношении сигнал/реверберация через R , то выражение (14.50) можно представить в виде

$$PR = 2 [СЦ - S_s + R - 10 \lg (ct_p \nu_B/2) - ПО], \quad (14.52)$$

в котором для импульса с прямоугольной огибающей

$$R = 20 \lg [(f_{d_t} - f_{d_R}) \pi t_p]$$

где f_{d_t} — доплеровское смещение частоты эхо-сигнала от цели; f_{d_R} — доплеровское смещение пика спектральной плотности реверберации.

Подставив численное значение параметров для данного примера, получим

$$PR = 2 (10 + 40 + 20 - 11 - 9) = 100 \text{ дБ.}$$

Как видно, допустимая величина потерь при распространении на 12 дБ больше, чем в случае, когда ограничивающим фактором является окружающий шум. Это означает, что для данной относительной скорости ограничивающим фактором будет не реверберационная помеха, а окружающий шум. Если относительную скорость сближения уменьшить до 15 уз, допустимая величина потерь будет 88 дБ, т.е. и реверберационная помеха и окружающий шум в равной мере являются ограничивающими факторами.

Из выражений (14.52) и (14.53) следует, что дальность обнаружения цели с большим доплеровским сдвигом частоты увеличивается пропорционально длительности импульса, а это прямо противоположно случаю обнаружения цели, спектр эхо-сигнала которой совпадает со спектром реверберации. Для цели с большим доплеровским смещением возрастание уровня реверберации за счет увеличения длительности импульса с лихвой компенсируется снижением уровня добавочных максимумов спектра реверберационной помехи на частоте эхо-сигнала от цели.

Для импульсов с прямоугольной огибающей уровень добавочных максимумов спектральной плотности обратно пропорционален квадрату частоты. Поскольку дальность обнаружения цели с большим доплеровским смещением непосредственно связана с уровнем добавочных максимумов используемых фильтров, на практике для улучшения характеристик обнаружения применяют импульсы с огибающей, отличной от прямоугольной. Для оптимизации формы огибающей импульса в целях снижения уровня добавочных максимумов используют методы, аналогичные рассмотренным в п. 11.3 применительно к пространственным фильтрам.

В данном примере при относительной скорости приближающейся цели менее 10 уз уровень реверберационных помех, обусловленных добавочными максимумами характеристик направленности, может оказаться существенным и его необходимо учитывать при выполнении расчетов. Если для излучения и приема применяется одна и та же антенна, уровень ревербера-

ционных помех, обусловленный боковым полем антенны, уменьшается пропорционально четвертой степени отношения амплитуды добавочных максимумов к амплитуде основного лепестка характеристики направленности.

Рассмотрим цель, сближающуюся с носителем активной системы с относительной скоростью 6 уз. Частота эхо-сигнала будет на 17 Гц выше частоты реверберации по направлению главного максимума характеристики направленности и сопоставима с частотой реверберационной помехи, обусловленной боковым полем антенны в направлениях, определяемых выражением

$$\Psi = \arccos(\lambda f_d / 2V) = \arccos[0,3 \cdot 17 / (2 \cdot 3)] \approx 32^\circ.$$

Нормированная характеристика направленности круглой плоской антенны определяется формулой

$$G(\Psi) = \frac{2J_1[(\pi D/\lambda) \sin \Psi]}{(\pi D/\lambda) \sin \Psi},$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка. При $D = 3$ м и $\lambda = 0,3$ м добавочный максимум в направлении $\Psi = 32^\circ$ составляет около 0,13. Следовательно, коэффициент снижения уровня реверберационных помех относительно основного лепестка характеристики направленности

$$R = -10 \lg[G^4(\Psi)] = 35 \text{ дБ}.$$

В случае использования прямоугольного импульса уровень реверберации, обусловленный боковым полем антенны, будет значительно меньше уровня реверберации, обусловленной боковыми лепестками прямоугольного импульса. Однако если огибающая импульса выбирается таким образом, чтобы уменьшить уровень боковых лепестков, то реверберация, обусловленная боковым полем антенны, может стать определяющей.

Когда для обнаружения целей используют ненаправленное излучение и направленный прием, уровень реверберационных помех, обусловленный боковым полем антенны, ослабляется пропорционально квадрату, а не четвертой степени величины добавочных максимумов характеристики направленности. Так, в рассмотренном примере коэффициент снижения уровня реверберационных помех относительно основного лепестка характеристики направленности будет меньше на 17,5, а не на 35 дБ. В таком случае для уменьшения уровня бокового поля антенны при приеме может возникнуть необходимость использования амплитудного распределения.

Задачи

14.1. В узкополосной приемной системе использована гребенка из 1000 фильтров, каждый с шириной полосы 0,5 Гц. Время интегрирования 100 с для каждого частотного канала, а допустимое время ложных тревог 0,5 ч. Рассчитайте порог обнаружения для вероятности обнаружения 90%.

14.2. Найдите порог обнаружения для приемной системы п. 14.1 при времени ложных тревог 15 мин и 2 ч.

14.3. На рис. 14.11 приведены спектральная плотность помех на выходе пространственного фильтра (кривая 4) и три графика (кривые 1...3) спек-

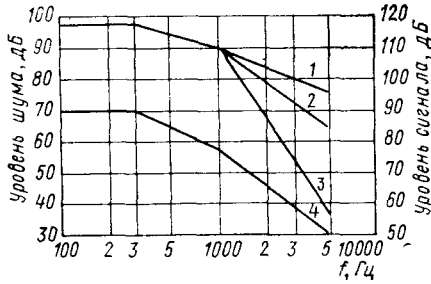


Рис. 14.11. К задаче 14.3

тральной плотности сигнала для расчета характеристик обнаружения широкополосной приемной системы. Определите форму оптимального широкополосного фильтра для полосы 100...5000 Гц для каждого графика сигнала.

14.4. Рассчитайте показатель качества ПК широкополосной системы для каждого графика уровня сигнала, п. 14.3 в предположении использования оптимальных фильтров, времени интегрирования 300 с, $P_D = 50\%$ и $P_{fa} = 10^{-4}$.

14.5. Повторите расчеты для п. 14.4, полагая, что верхняя частота среза составляет 3000, 2000 и 1000 Гц. На основе этих результатов ответьте на вопрос о целесообразности применения всей полосы 5000 Гц для каждого типа целей.

14.6. На рис. 14.5 приведена широкополосная система пеленгования цели с использованием преобразования Гильберта. Покажите, что схема, изображенная на рис. 14.12, является практическим воплощением преобразования Гильберта. Для простоты допустите, что сигнал s и помеха n — ограниченные по полосе процессы с эффективной несущей частотой f_0 , а фильтры $H_2(f)$ имеют прямоугольную огибающую, причем ширина полосы спектра сигнала и помех одинакова.

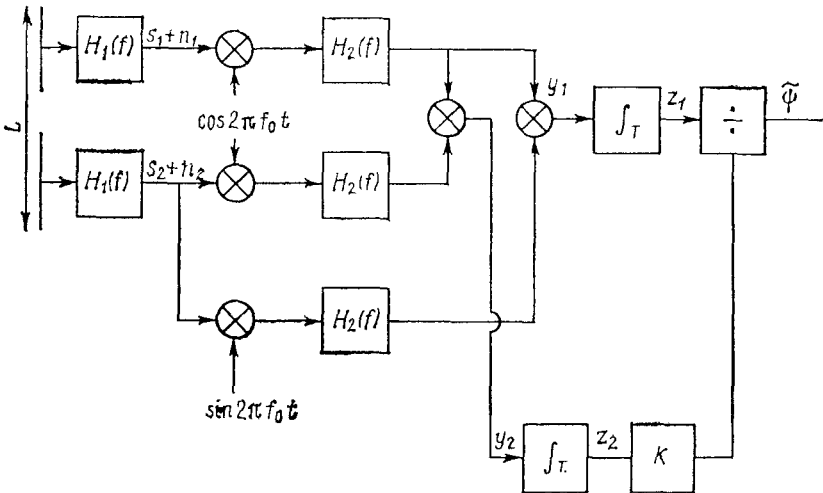


Рис. 14.12. К задаче 14.6

Список литературы

1. *Urick R. J.* Principles of Underwater Sound for Engineers, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1975, Chaps. 12 and 13.
2. *Principles of Sonar Installation.* Naval Underwater Systems Center, Technical Document 6059, 1980.
3. *Stewart J. I.* Active Acoustic Signal Processing (Unclassified). U. S. Navy J. Underwater Acoust., Vol. 21, No. 4 (Oct. 1971).
4. *Stocklin P. L.* Passive Acoustic Signal Processing—The State of the Art (Unclassified). U. S. Navy J. Underwater Acoust., Vol. 21, No. 4 (Oct. 1971).
5. *Winder A. A.* Sonar System Technology. IEEE Trans. Sonics, Ultrasonics, Vol. SU-22, No. 5 (Sept. 1975).
6. *Knight W. S., Pridman R. G., Kay S. M.* Digital Signal Processing for Sonar, Proc. IEEE, Vol. 69, No. 11 (Nov. 1981).
7. *Gong F. K., Davis J. S.* Evaluation of Target Motion Analysis in a Multipath Environment. Naval Underwater Systems Center, Technical Report 4814, Mar. 1976.
8. *Lindgren A. G., Gong K. F.* Measurement of Relative Delay between Signals Propagating in a Multipath Environment. IEEE International Conference on Engineering in the Ocean Environment, 1974.
9. *Nuttall A. H.* Signal Processing in Reverberation—A Summary of Performance Capability. Naval Underwater Systems Center, Technical Memo, TC-173-72, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Исторические сведения	7
1.1. Первые шаги в гидроакустике	7
1.2. Гидроакустика в период до первой мировой войны	9
1.3. Гидроакустическая техника в первую мировую войну	11
1.4. Разработка гидроакустической аппаратуры в период между войнами	16
1.5. Вторая мировая война и послевоенный период	18
1.6. Выводы	23
Список литературы	23
Глава 2. Акустические волны в однородной среде	24
2.1. Электрический аналог распространения плоской волны	26
2.2. Акустические плоские волны в однородной среде	35
2.3. Сферические акустические волны в однородной среде	41
2.4. Пульсирующий сферический источник	46
2.5. Единицы измерений, эталоны и децибелы	50
2.6. Пульсирующий сферический излучатель	55
Список литературы	61
Глава 3. Гидроакустические преобразователи	61
3.1. Продольные колебания простого стержня	62
3.2. Работа приемника	66
3.3. Работа излучателя	80
Список литературы	89
Глава 4. Отражение, распространение и рефракция	90
4.1. Нормальное падение звука	91
4.2. Наклонное падение звука	96
4.3. Задача о прохождении звука через слоистую среду	99
4.4. Лучевая акустика. Рефракция при постоянном градиенте скорости звука	103
Список литературы	111
Глава 5. Распространение звука в океане	111
5.1. Скорость звука в океане	112
5.2. Потери при отражении от поверхности	114
5.3. Потери при отражении от дна	117
5.4. Поглощение звука в океане	120
5.5. Акустические характеристики приповерхностного слоя	122
5.6. Подводный звуковой канал	129
5.7. Распространение звука в дальних зонах акустической освещенности	130
5.8. Зона сплошной акустической освещенности	131
5.9. Флюктуация звука в море	131
Список литературы	132

Глава 6. Методы Фурье	133
6.1. Разложение функций	133
6.2. Ряд Фурье в комплексной форме	135
6.3. Ограниченные во времени сигналы. Интегральное преобразование Фурье	140
6.4. Основные виды сигналов	143
6.5. Отклик линейных систем во временной области	150
6.6. Анализ Фурье. Основные операции	154
6.7. Оператор повторения и функция выборки	159
6.8. Таблицы правил и пар преобразований	163
6.9. Комплексное представление сигналов. Понятие огибающей	170
Список литературы	174
Глава 7. Дискретные методы преобразования Фурье	174
7.1. Дискретное представление непрерывных функций	175
7.2. Дискретное преобразование Фурье	177
7.3. Основные операции с дискретными функциями	179
7.4. Быстрое преобразование Фурье	182
Список литературы	185
Глава 8. Корреляция и корреляционные функции	185
8.1. Корреляция векторов	186
8.2. Корреляция сигналов во времени и по форме	188
8.3. Нормированная корреляция и корреляционные функции	189
8.4. Разрешающая способность и функции неопределенности сигналов	196
Список литературы	211
Глава 9. Случайные процессы	211
9.1. Определение вероятности	212
9.2. Дискретные случайные величины	214
9.3. Непрерывные случайные величины	216
9.4. Моменты распределения	219
9.5. Примеры функций плотности вероятности	222
9.6. Случайные процессы	226
9.7. Функции случайных величин	229
9.8. Корреляционные функции случайных процессов	243
9.9. Канал с многолучевым распространением звука	251
Список литературы	257
Глава 10. Окружающий шум в океане	257
10.1. Источники окружающего шума	258
10.2. Корреляционные свойства окружающего шума	262
10.3. Использование пространственной корреляционной функции для анализа шумов системы	277
Список литературы	280
Глава 11. Пространственная фильтрация. Формирование характеристик направленности антенн	281
11.1. Одномерные пространственные фильтры	285
11.2. Дискретные пространственные антенны	290
11.3. Антенны с неоднородным распределением	293
11.4. Управление характеристиками направленности	295
11.5. Обобщенный коэффициент усиления для дискретной линейной антенны	298
11.6. Использование усиления антенны при анализе характеристик системы	304
11.7. Оценка направления прихода сигнала	307
11.8. Пространственные фильтры	311
Список литературы	317

Глава 12. Акустические характеристики объектов	317
12.1. Акустические портреты надводных кораблей и подводных лодок	318
12.2. Сила цели	323
12.3. Реверберация	325
Список литературы	334
Глава 13. Статистические основы анализа характеристик систем	334
13.1. Проверка гипотез	335
13.2. Рабочие характеристики приемника	353
13.3. Оценка параметров сигнала	354
Список литературы	363
Глава 14. Примеры анализа характеристик систем	364
14.1. Обнаружение с помощью пассивных узкополосных систем	364
14.2. Обнаружение с помощью пассивных широкополосных систем	367
14.3. Сопровождение по углу с помощью широкополосных пассивных систем	372
14.4. Измерение расстояния в пассивном режиме при многолучевом распространении сигналов	377
14.5. Характеристики активных систем	381
Список литературы	389

Производственное издание

Бурдик Вильям С.

АНАЛИЗ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Заведующий редакцией *П. К. Зубарев*
 Редакторы *А. И. Голикова, С. Ю. Курашева*
 Оформление обложки *Б. Н. Осенчакова*
 Художественный редактор *Э. А. Бубович*
 Технический редактор *Г. Г. Федорова*
 Корректоры *Т. С. Александрова, А. Г. Кувалкин*

ИБ № 1244

Сдано в набор 26.02.88. Подписано к печати 07.07.88. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 24,5. Уч.-изд. л. 24,3. Усл. кр.-отт. 24,5. Тираж 3760 экз. Изд. № 4094-85. Заказ №1768. Цена 5 р. 20 к.

Издательство «Судостроение», 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Отпечатано с набора Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29 в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.