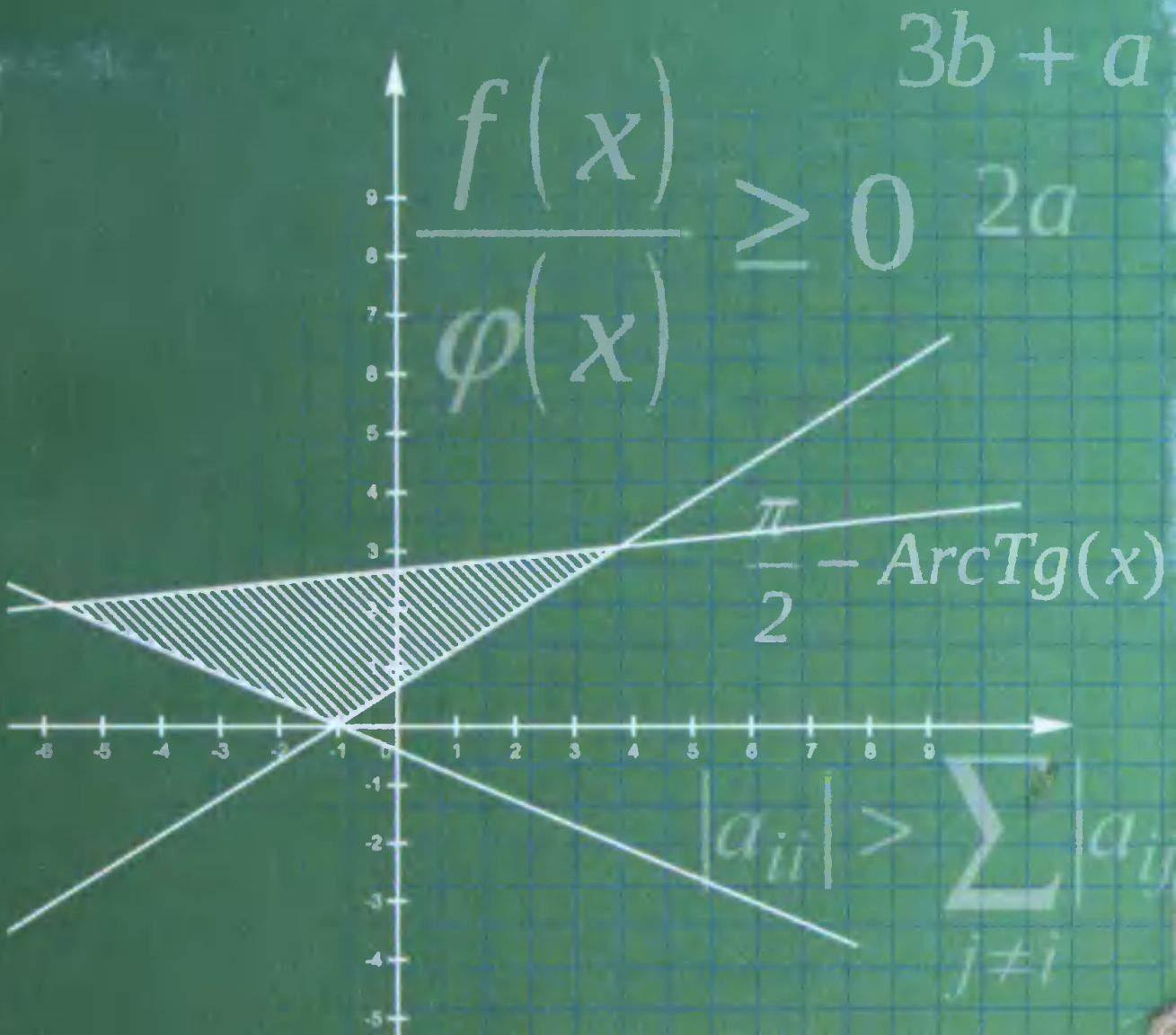
МАТЕМАТИКА

СПРАВОЧНИК ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА и ЕГЭ



Справочники

Э.Н. Балаян

МАТЕМАТИКА

Справочник для подготовки к ГИА и ЕГЭ

Ростов-на-Дону
Феникс
2013

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.
Б20 Математика. Справочник для подготовки к ГИА и ЕГЭ / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2013. — 319 с. — (Справочники).

ISBN 978-5-222-21425-1

Справочник предназначен для выпускников средних образовательных заведений: школ, гимназий, лицеев, училищ или техникумов и абитуриентов высших учебных заведений при подготовке и сдаче выпускных и вступительных экзаменов.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-21425-1 ББК 22.1я72

© Балаян Э.Н., 2013
© Оформление: ООО «Феникс», 2013

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N — множество натуральных чисел;

Z — множество целых чисел;

Z_0 — множество целых неотрицательных чисел;

Q — множество рациональных чисел;

R — множество действительных чисел (числовая прямая);

C — множество комплексных чисел;

$[a; b]$, или $a \leq x \leq b$ — замкнутый промежуток (или отрезок) с началом a и концом b;

$(a; b)$, или $a < x < b$ — открытый промежуток (или интервал);

$(a; b]$, или $a < x \leq b$; $[a; b)$, или $a \leq x < b$ — полуоткрытые промежутки (полуинтервалы);

$[a; +\infty)$, или $x \geq a$; $(-\infty; b]$, или $x \leq b$ — лучи;

$(a; +\infty)$, или $x > a$; $(-\infty; b)$, или $x < b$ — открытые лучи;

$(-\infty; +\infty) = R$ — числовая прямая;

$a = b$ — a равно b;

$a \neq b$ — a не равно b;

$a \approx b$ — a приближенно равно b;

$a > b$ — a больше b;

$a \geq b$ — a больше или равно b;

$a < b$ — a меньше b;

$a \leq b$ — a меньше или равно b;

$a \in A$ — a принадлежит множеству A;

$a \notin A$ — a не принадлежит множеству A;

$B \subset A$ — B является подмножеством A;

$A \cup B$ — объединение множеств A и B;

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B;

$\varnothing$ — пустое множество;

% — процент;

‰ — промилле;

НОД $(a; b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b;

НОК $(a; b)$ — наименьшее общее кратное чисел a и b;

$|a|$ — модуль (абсолютная величина) действительного числа a;

a^n — n-я степень числа a;

$\sqrt[n]{a}$ — корень n-й степени из числа a;

$\sqrt{a}$ — арифметический квадратный корень из числа a;

$\pi \approx 3{,}1415$ — отношение длины окружности к диаметру;

$e \approx 2{,}71828$ — основание натурального логарифма;

$\log_a x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ — логарифм числа x по основанию a;

$\lg x$ — десятичный логарифм числа x;

$\ln x$ — натуральный логарифм числа x;

$\sin x$ — синус x;

$\cos x$ — косинус x;

$\operatorname{tg} x$ — тангенс x;

$\operatorname{ctg} x$ — котангенс x;

$1/\sin x$ — косеканс x;

$1/\cos x$ — секанс x;

$\arcsin x$ — арксинус x;

$\arccos x$ — арккосинус x;

$\operatorname{arctg} x$ — арктангенс x;

$\operatorname{arcctg} x$ — арккотангенс x;

Δx — приращение аргумента;

Δy — приращение функции;

y', $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$ в точке x;

$y_{\text{наиб.}}$, $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ — наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$;

$y_{\text{наим.}}$, $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ — наименьшее значение функции на отрезке $[a; b]$;

$\int\limits_a^b f(x)dx$ — интеграл функции $f(x)$ от a до b;

A — точка A;

a, AB — прямая a, прямая AB;

α, ABC — плоскость α, плоскость ABC;

ΔABC — треугольник ABC;

$\angle$ — знак угла, например, $\angle(a; b)$, $\angle ABC$;

$\parallel$ — знак параллельности, например, $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$;

$\perp$ — знак перпендикулярности, например, $a \perp b$, $\alpha \perp \beta$;

$\cup$ — знак дуги, например, $\cup AB$;

$\sim$ — знак подобия, например, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;

$M(x)$ — точка M на координатной прямой имеет координату x;

$M(x; y)$ — точка M в прямоугольной (декартовой) системе координат имеет абсциссу x и ординату y;

$M(x; y; z)$ — точка в пространстве имеет абсциссу x, ординату y, аппликату z.

Таблицы

Квадраты натуральных чисел от 10 до 99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Кубы натуральных чисел от 1 до 9

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Степени некоторых чисел

n	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8
1	1	1	1	1	1
2	16	32	64	128	256
3	81	243	729	2187	6561
4	256	1024	4096	16384	65536
5	625	3125	15625	78125	390625
6	1296	7776	46656	279936	1679616
7	2401	16807	117649	823543	5764801
8	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	6561	59049	531441	4782969	43046721

Простые числа до 997

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Часть 1

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b = 0$.

1) Если $a \neq 0$, $a \in R$, $b \in R$, то $x = -\frac{b}{a}$ (корень уравнения).

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.

3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

2. Система линейных уравнений

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1; \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

1) Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение (прямые пересекаются в одной точке);

2) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений (прямые не пересекаются, т. е. параллельны);

3) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают).

3. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$, a — I (старший) коэффициент, b — II коэффициент, c — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант (различитель).

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$ — один корень.

3) Если $D < 0$, корней нет (действительных).

Частные случаи

1) Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$,

$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, если коэффициенты a и c имеют разные знаки; если коэффициенты a и c имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б) $ax^2 + bx = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$;

в) $ax^2 = 0$, $x = 0$.

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0,\ x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

3) Квадратное уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}\ .$$

4) Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$

$a + b + c = 0$, то $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a}$;

$a - b + c = 0$, то $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{c}{a}$.

4. Теорема Виета

а) Для квадратного уравнения общего вида $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$;

б) для приведенного вида

$x_1 + x_2 = -p;\ x_1x_2 = q.$

Теорема, обратная теореме Виета

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p;\ x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Теорема Виета для кубического уравнения

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$

Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения, то

$x_1 + x_2 + x_3 = -a;$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b;$

$x_1\, x_2\, x_3 = -c.$

5. Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена, $D > 0$.

Если $D = 0$, то
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

6. Биквадратное уравнение

Общий вид:
$ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$.

Заменой $x^2 = y$ приводят к квадратному вида $ay^2 + by + c = 0$.

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

7. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0$, $a \neq 0$.

Приводится к виду

$$a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0$$

и заменой $y = x + \frac{m}{x}$ и

$y^2 - 2m = x^2 + \frac{m^2}{x^2}$ приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Частные случаи

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $(m = 1)$ — симметрическое уравнение I рода.

Решается подстановкой

$$y = x + \frac{1}{x};$$

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, $(m = -1)$ — симметрическое уравнение II рода.

Решается подстановкой

$$y = x - \frac{1}{x}.$$

8. Свойства степеней

Для любых x, y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства:

$a^0 = 1$ (по определению);

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

$a^x : a^y = a^{x-y}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};\ a^{-x} = \frac{1}{a^x};\ a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

9. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) =$
$= (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) =$
$= (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ — разность кубов.

Дополнительные формулы

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab +$
$+ 2ac + 2bc;$

$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab -$
$- 2ac + 2bc;$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab;$$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2) =$
$= (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3);$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 +$
$+ ab^3 + b^4);$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4);$$

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2) \times (a^2 - ab + b^2) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5);$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

10. Свойства арифметических корней

Для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$ и любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \neq 0);$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \ (a \geq 0);$$

$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, если $0 \leq a < b$;

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0, \\ -a \text{ при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \ (a \geq 0).$$

11. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

12. Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Дополнительные формулы:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta};$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\sin\alpha\cos\gamma+$$

$$+ \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma -$$
$$- \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma;$$
$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) =$$
$$= \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma -$$
$$- \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma -$$
$$- \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma -$$
$$- \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

13. Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

14. Формулы половинного аргумента (для функции sin и cos — формулы понижения степени)

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2};\quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

15. Универсальные тригонометрические подстановки

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

16. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta =$$

$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi), \text{ где}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Дополнительные формулы

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha);$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha);$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha};$$

$$1-\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha.$$

17. Формулы преобразования произведения в сумму

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta);$$
$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta);$$
$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta).$$

Дополнительные формулы

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=$$
$$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha;$$
$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha=$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$$

18. Радианная и градусная меры углов

$$1 \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ};$$

$$1 \text{ рад.} \approx 57{,}3^{\circ};$$

$$\alpha \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha\right)^{\circ};$$

$$1^{\circ} = \frac{180}{\pi} \text{ рад.}$$

$$\alpha^{\circ} = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha \text{ рад.}$$

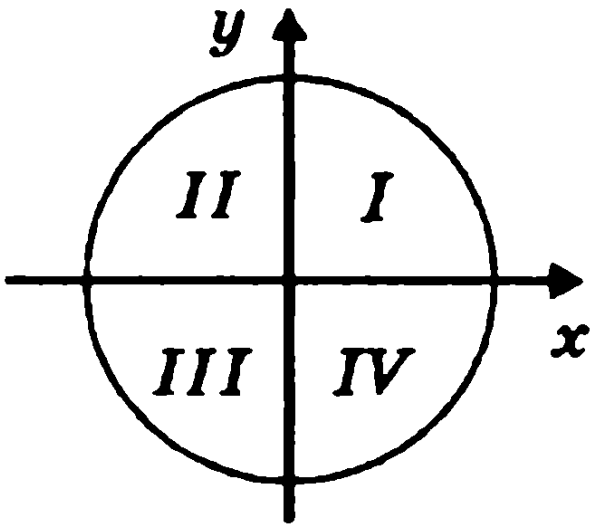
$l = \alpha R$ — длина дуги окружности;

α — угол в радианах;

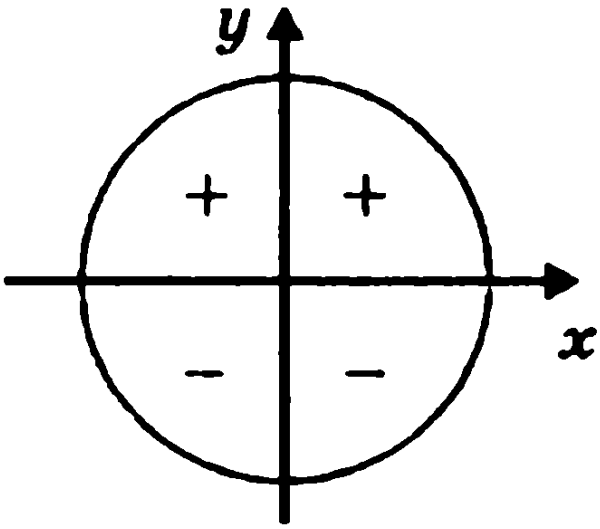
R — радиус окружности.

$S = \frac{R^2}{2}\alpha$ — площадь кругового сектора, $0 < \alpha < \pi$.

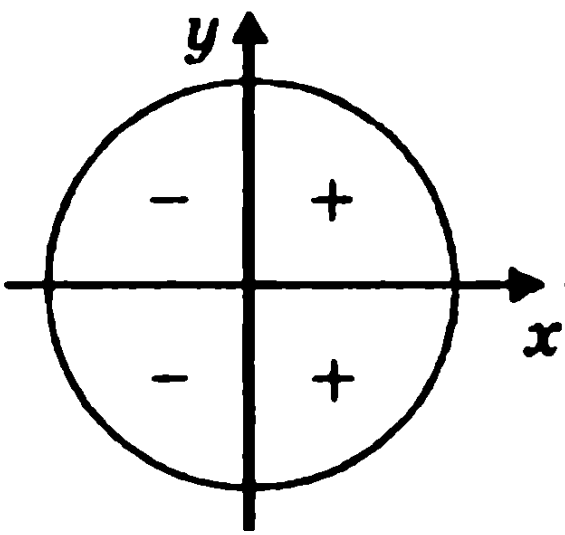
19. Знаки тригонометрических функций



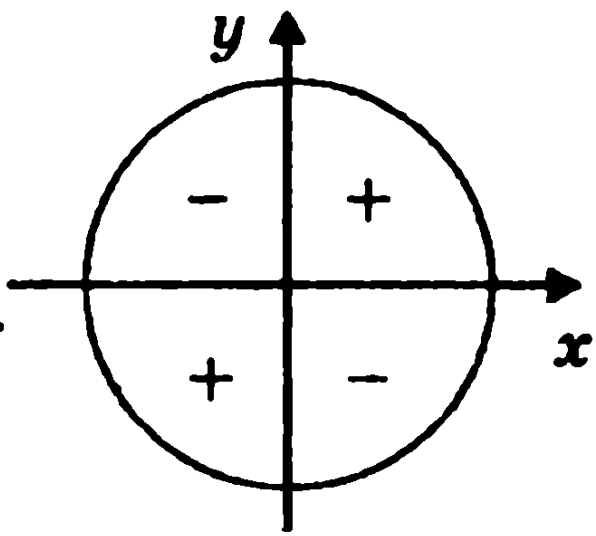
Четверти



Знаки sin



Знаки cos



Знаки tg и ctg

20. Формулы приведения

Функция α	Аргумент α							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

21. Значения тригонометрических функций для некоторых углов

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	–	0	–

22. Периоды тригонометрических функций

Периоды функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равны 2π.

Периоды функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равны π.

Периоды функций $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ находят по формуле $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, а функций $y = A\operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ и $y = A\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ по формуле $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

23. Обратные тригонометрические функции

Функция	Область определения	Область значений
$y = \arcsin x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$

$\sin(\arcsin x) = x, -1 \le x \le 1;$

$\cos(\arccos x) = x, -1 \le x \le 1;$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$,

$-1 \le x \le 1;$

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$,

$-1 \le x \le 1;$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0;$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$-1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$-1 \leq x < 0,\ 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$-1 \leq x < 0,\ 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$-1 < x < 1;$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$
$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

24. Значения обратных тригонометрических функций некоторых углов

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

25. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$, где $|a| \le 1$,

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$

$\cos x = a,\ |a| \le 1,$

$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$

$\operatorname{tg} x = a,\ a \in R,$

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z.$

$\operatorname{ctg} x = a,\ a \in R,$

$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z.$

Частные случаи
($a = 0$, $a = 1$, $a = -1$):

$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z;$

$\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

$\operatorname{tg} x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z;$

$\operatorname{ctg} x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$

$$\sin x = 1,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\cos x = 1,\ x = 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\sin x = -1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

26. Средние величины

1. Среднее арифметическое

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

2. Среднее геометрическое

$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

3. Среднее гармоническое

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

4. Среднее квадратичное

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

5. Среднее взвешенное

$$V = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

27. Некоторые важные неравенства

1. Неравенство Коши:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}\ ,\ \text{где}\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

2. Неравенство треугольника: $|x + a| \leq |x| + |a|$.

3. Неравенство для двух взаимно обратных величин:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\ ,\ \text{где}\ x > 0.$$

4. $\dfrac{a^2+1}{2} \geq 2.$

5. $\dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}.$

28. Прогрессии

1. Арифметическая прогрессия

(a_1 — 1-й член, d — разность, n — число членов, a_n – n-й член, S_n — сумма n первых членов).

Определение арифметической прогрессии:

$a_{n+1} = a_n + d.$

Формула n-го члена

$a_n = a_1 + (n-1)d.$

Формула суммы n первых членов

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}),$$

где $n > 1$.

2. Геометрическая прогрессия

(b_1 — 1-й член, q — знаменатель ($q \neq 0$), n — число членов, b_n — n-й член, S_n — сумма n первых членов).

Определение геометрической прогрессии:

$b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Формула n-го члена:

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Формула суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1.$$

Характеристическое свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Формула суммы членов *бесконечной геометрической прогрессии:*

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ где } |q| < 1.$$

29. Логарифмы и их свойства

1. Если $x > 0$, то $x = a^{\log_a x}$ — основное логарифмическое тождество.

2. $\log_a a = 1$.

3. $\log_a 1 = 0$.

4. Если $x > 0$, $y > 0$, то $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ — логарифм произведения.

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — логарифм частного.

6. Если $x > 0$, $p \in R$, то $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$ — логарифм степени.

7. Если $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, то $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — формула перехода от основания a к основанию b.

В частности, если $x = b$, то

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ или}$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

8. $\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b$

$(p \in R, p \neq 0)$.

9. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $p \neq 0$, то

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$

10. $\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x$, где $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

11. $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$; $a, b, c > 0$, $a \neq 1$.

30. Неравенства

1. Основные свойства числовых неравенств:

1. Если $a > b$, то $b < a$.

2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$, $a - c > b - c$ для любого c.

4. $ac > bc$ при $c > 0$; $ac < bc$ при $c < 0$.

$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ при $c > 0$; $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ при $c < 0$.

5. Если $0 < a < b$, то $a^c < b^c$ при $c > 0$, $a^c > b^c$ при $c < 0$.

6. Если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$, $a - d > b - c$.

7. Если $a > b > 0$, $c > d > 0$, то $ac > bd$, $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

8. Если $a < x < b$, то $(x - a)(x - b) < 0$, и обратно.

2. Неравенство I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b > 0$.

1. Если $a > 0$, то $x > -\frac{b}{a}$.

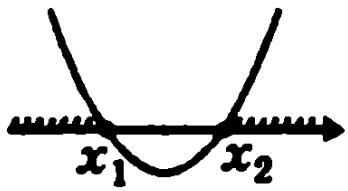
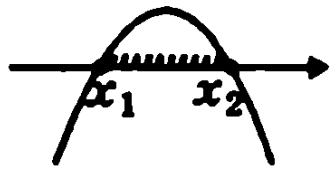
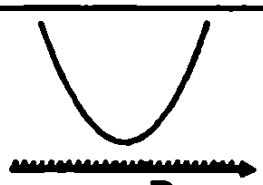
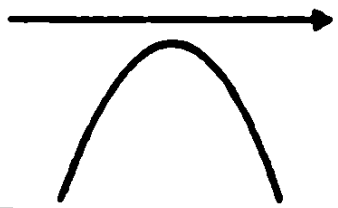
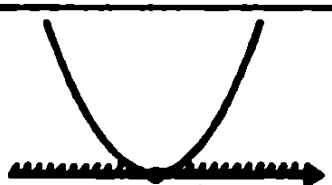
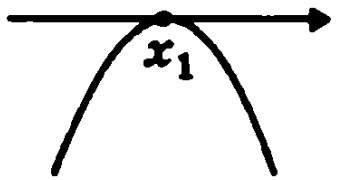
2. Если $a < 0$, то $x < -\frac{b}{a}$.

3. Если $a = 0$, то при $b > 0$ $x \in R$, при $b \leq 0$ решений нет.

3. Неравенство II степени (квадратное)

Общий вид:
$ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$.

В зависимости от знака a и от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ имеем 6 возможностей:

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 $x \le x_1,\ x \ge x_2$	 $x_1 \le x \le x_2$
$D < 0$	 $x \in R$	 *Решений нет*
$D = 0$	 $x \in R$	 $x = x_1$

4. Иррациональные неравенства

1. Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

2. Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

5. Показательное неравенство

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ неравенству $f(x) < g(x)$.

При решении показательных неравенств пользуются свойства-

ми неравенств, содержащих степени:

1. При всех допустимых значениях a и b справедливы следующие утверждения:

1) неравенства $a^b > 1$ и $(a - 1)b > 0$ равносильны;

2) неравенства $a^b \geq 1$ и $(a - 1)b \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $a^b < 1$ и $(a - 1)b < 0$ равносильны;

4) неравенства $a^b \leq 1$ и $(a - 1)b \leq 0$ равносильны.

2. При всех допустимых значениях a, b и c справедливы следующие утверждения:

1) неравенства $a^b > a^c$ и $(a - 1)(b - c) > 0$ равносильны;

2) неравенства $a^b \geq a^c$ и $(a - 1)(b - c) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $a^b < a^c$ и $(a - 1)(b - c) < 0$ равносильны;

4) неравенства $a^b \le a^c$ и $(a-1)(b-c) \le 0$ равносильны.

6. Логарифмическое неравенство

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

При решение логарифмических неравенств пользуются следующими свойствами:

1. При всех допустимых значениях a, b и c, таких, что $a > 0$,

$a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, справедливы утверждения:

1) неравенства $\log_a b > \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b \geq \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b < \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b \leq \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) \leq 0$ равносильны.

2.

1) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d > 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d \geq 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d < 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d \leq 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \leq 0$ равносильны;

3.

1) неравенства $\log_a b \cdot \log_c b > 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b \cdot \log_c b \geq 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b \cdot \log_c b < 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b \cdot \log_c b \leq 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) \leq 0$ равносильны;

7. Тригонометрические неравенства

$\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{ctg} x > a$ (вместо знака $>$ могут быть знаки $<$, $\geq$, $\leq$) решаются гра-

фически: находят точки пересечения графика функции с прямой $y = a$, расположенной ближе к началу координат, а затем используют периодичность функции.

Тригонометрические неравенства можно решать и с помощью единичного круга.

31. Таблица производных и первообразных элементарных и сложных функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Первообразная $F(x)$
C, где C – const	0	Cx
Cx	C	$\frac{1}{2}Cx^2$
$x^p, p \in R$	px^{p-1}	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$ax + b, a \neq 0$	a	$\frac{1}{2}ax^2 + bx + C$

Продолжение табл.

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$	**Первообразная** $F(x)$
$(ax+b)^p$	$pa(ax+b)^{p-1}$	$\frac{(ax+b)^{p+1}}{a(p+1)}+C$
e^x	e^x	e^x
e^{ax+b}, $a \neq 0$	ae^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
a^x, $a>0$, $a \neq 0$	$a^x \ln a$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
a^{kx+b}, $a>0$, $a \neq 0$	$ka^{kx+b}\ln a$	$\frac{a^{kx+b}}{k\ln a}+C$
$\ln x$, $x>0$	$\frac{1}{x}$	$x\ln x - x + C$
$\ln(ax+b)$, $a \neq 0$	$\frac{a}{ax+b}$	–
$\log_a x$, $x>0$, $a>0$	$\frac{1}{x\ln a}$	$x\log_a x - \frac{x}{\ln a}+C$
$\log_a(kx+b)$	$\frac{k}{(kx+b)\ln a}$	–
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$

Окончание табл.

Функция $f(x)$	**Производная** $f'(x)$	**Первообразная** $F(x)$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x+C$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	–	$\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	–	$-\operatorname{ctg} x+C$

32. Правила дифференцирования

(u, v — функции, C — const):

$(Cu)' = Cu'$; $\qquad (u+v)' = u'+v'$;

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}; \qquad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}.$$

$(g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, где $g(f(x))$ — сложная функция.

33. Уравнение касательной

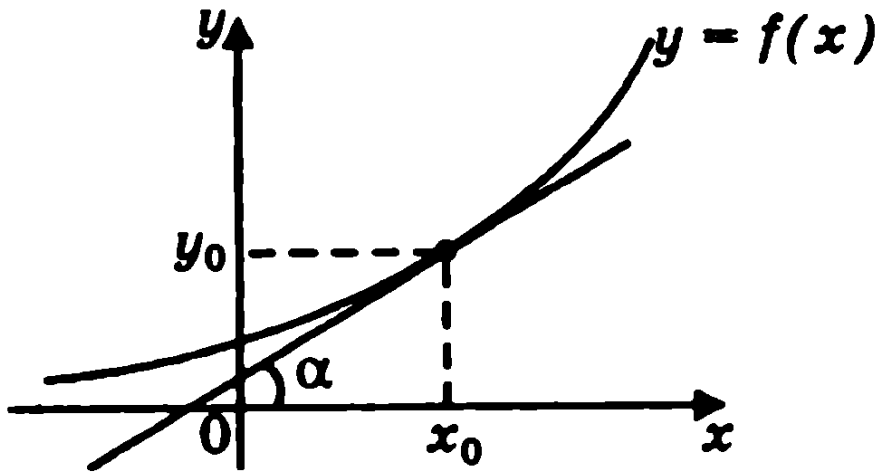
Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где (x_0, y_0) — точка касания.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = k,$$

где k — угловой коэффициент касательной к графику функции.



34. Правила нахождения первообразных

1. Если F — первообразная для f, а H — первообразная для h, то $F + H$ есть первообразная для $f + h$.

2. Если F — первообразная для f, а k – const, то kF есть первообразная для kf.

3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для функции $f(kx + b)$.

35. Формула Ньютона–Лейбница

Формула Ньютона–Лейбница имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Свойства:

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

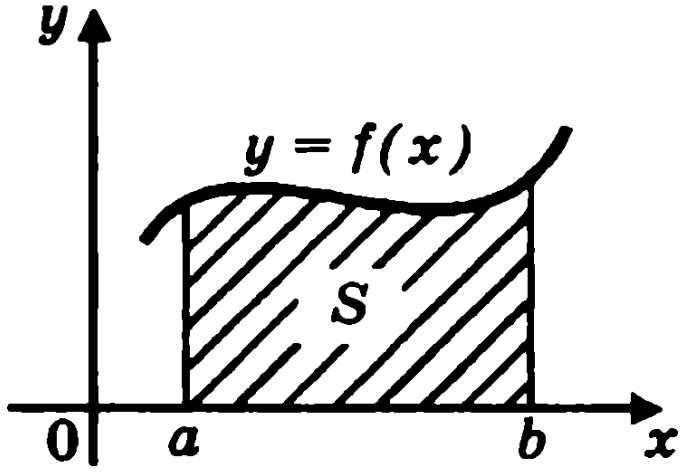
2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$

где $a < c < b.$

36. Площадь криволинейной трапеции

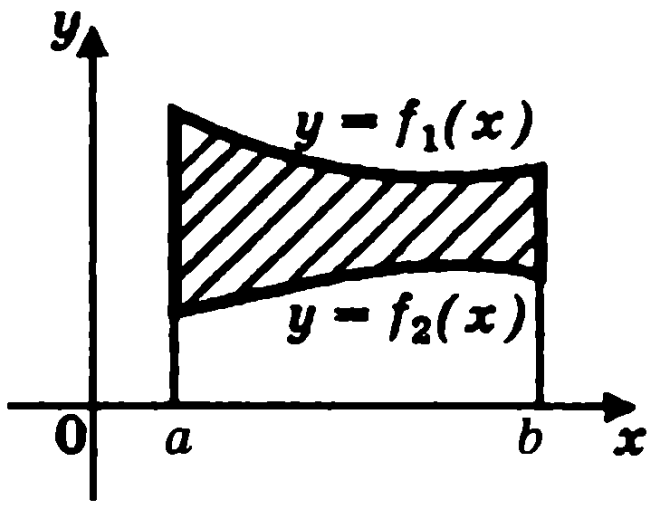
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, находится по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx.$



37. Площадь фигуры, заключенной на отрезке

Площадь фигуры, заключенной на отрезке $[a, b]$ между графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $(f_1(x) \geq f_2(x))$, находится по формуле

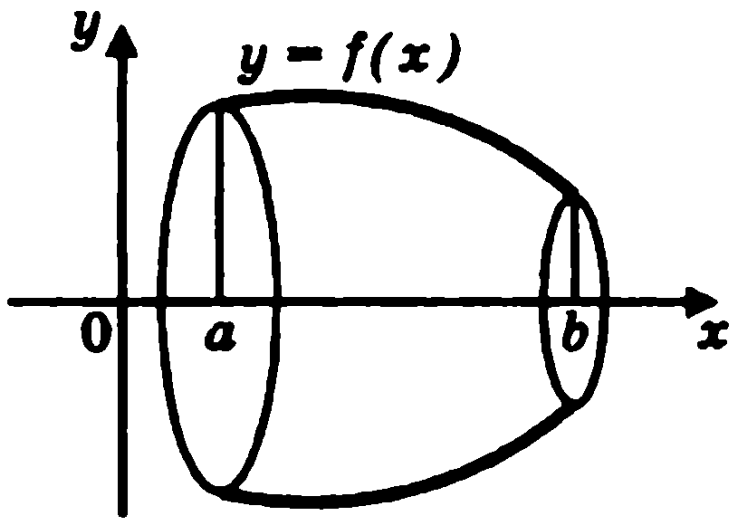
$$S = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\,dx.$$



38. Объем тела вращения

Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$



39. Формула Лагранжа

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Характеристики элементарных функций

Функция	ООФ	ОЗФ	Период	Четность	Нули
$y = ax + b$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	–	Неч. при $b = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	–	Чет.	$x = 0$
$y = x^3$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	–	Неч.	$x = 0$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	–	Неч.	Нет
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	–	–	$x = 0$
$y = \sqrt[3]{x}$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	–	Неч.	$x = 0$
$y = x^a$, $a > 0$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	–	–	$x = 0$
$y = x^a$, $a < 0$	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	–	–	Нет
$y = a^x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	–	–	Нет

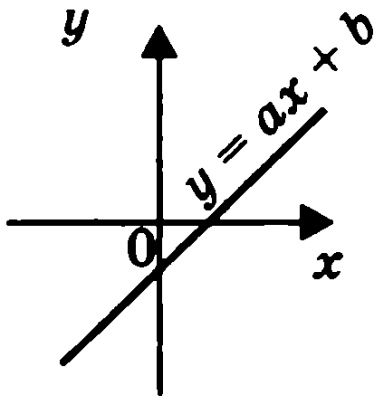
Окончание табл.

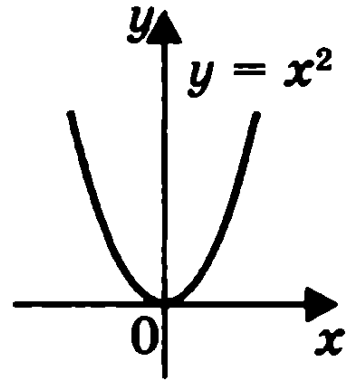
Функция	ООФ	ОЗФ	Период	Четность	Нули
$y = \log_a x$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	–	–	$x = 1$
$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	2π	Неч.	$x = \pi n$
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	2π	Чет.	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$(-\infty; +\infty)$	π	Неч.	$x = \pi n$
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi n$	$(-\infty; +\infty)$	π	Чет.	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

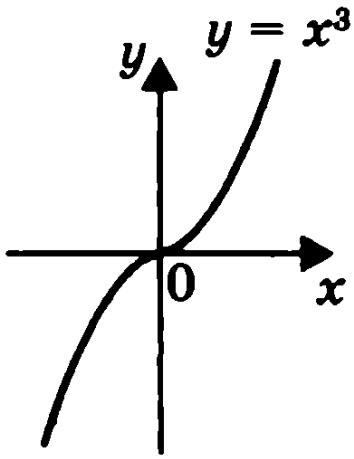
Примечание. **ООФ — область определения функции.**

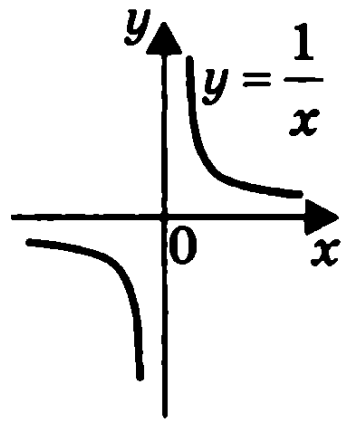
ОЗФ — область (множество) значений функции.

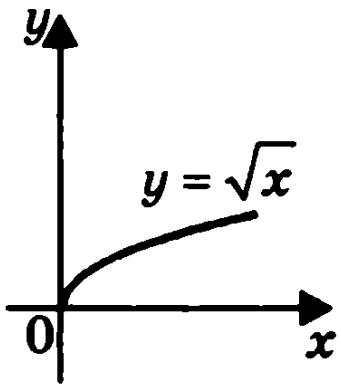
Характеристики элементарных функций

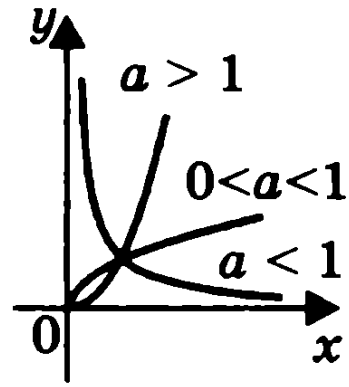




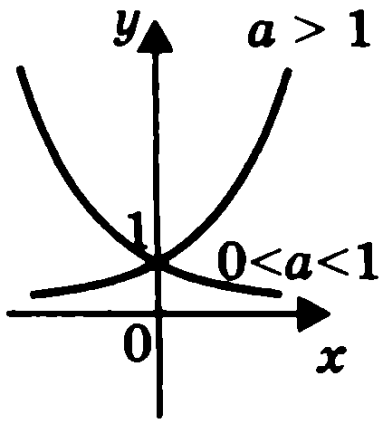




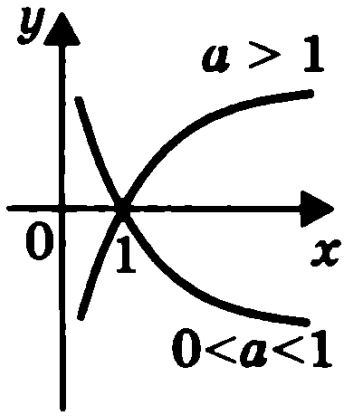




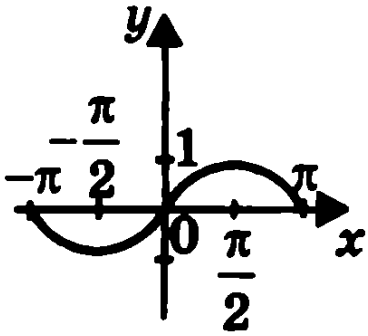
$y = x^a$



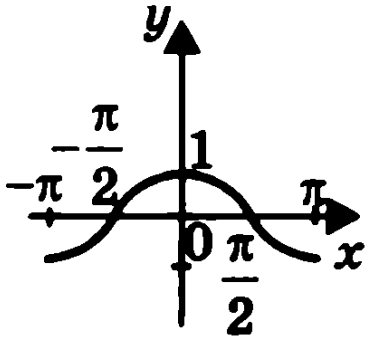
$y = a^x$



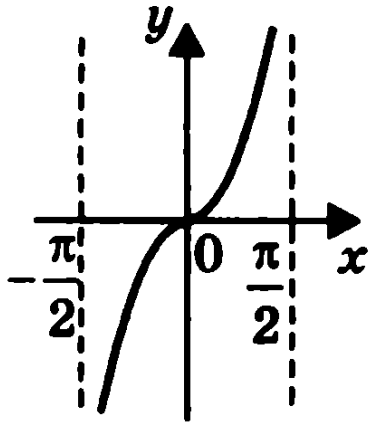
$y = \log_a x$



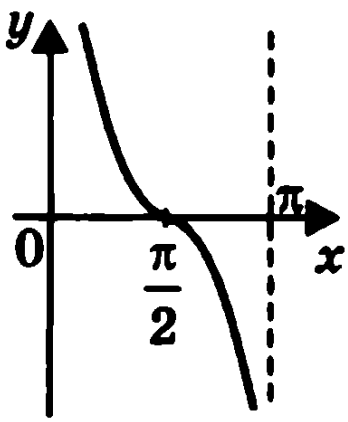
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$



$y = \operatorname{ctg} x$

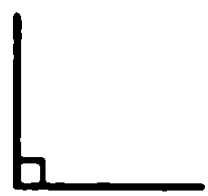
Глава 2

ГЕОМЕТРИЯ

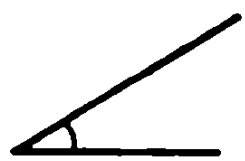
Часть 1

ПЛАНИМЕТРИЯ

40. Классификация углов



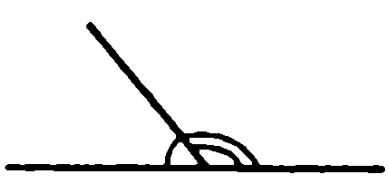
Прямой угол



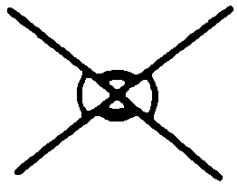
Острый угол

Тупой угол

Развернутый угол



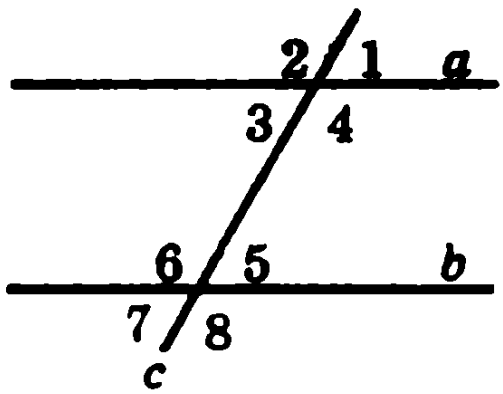
Смежные углы



Вертикальные углы

41. Углы при параллельных прямых

($a \parallel b$, c — секущая)



1. Соответственные углы: $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$.

Каждые два соответственных угла равны.

2. Внутренние накрест лежащие углы: $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$.

3. Внешние накрест лежащие углы: $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$.

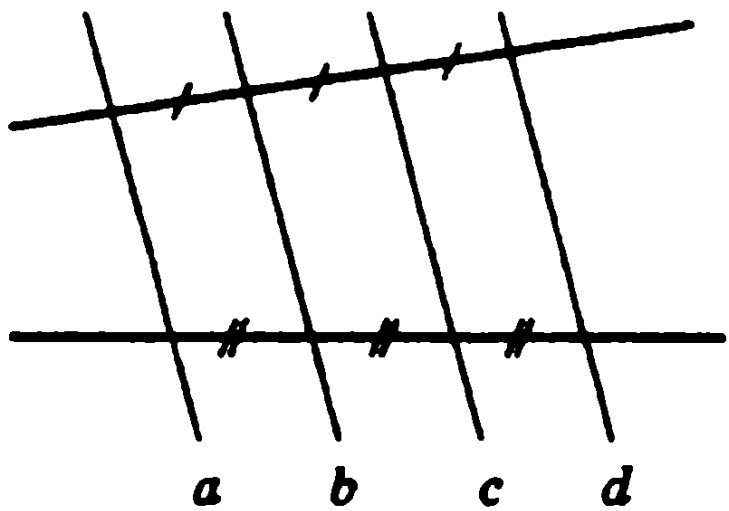
Каждые два накрест лежащих угла равны.

4. Внутренние односторонние углы: $\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$.

5. Внешние односторонние углы: $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$.

Каждая пара односторонних углов равна в сумме 180°.

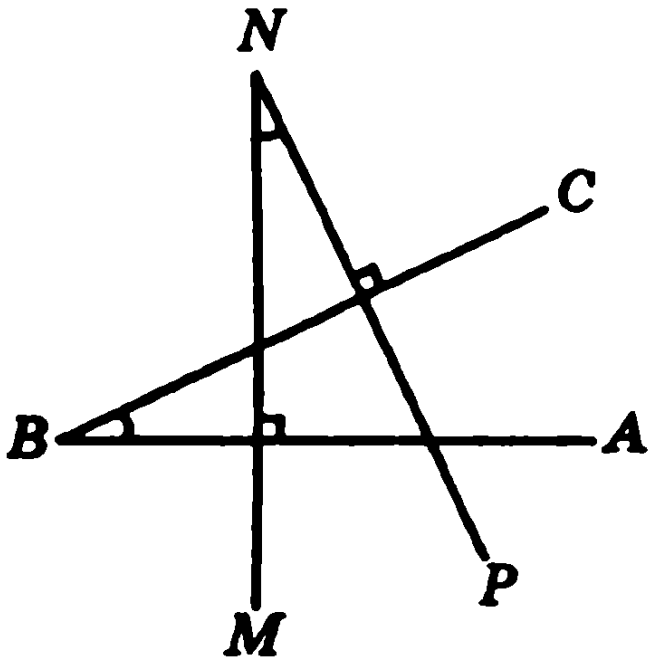
42. Теорема Фалеса

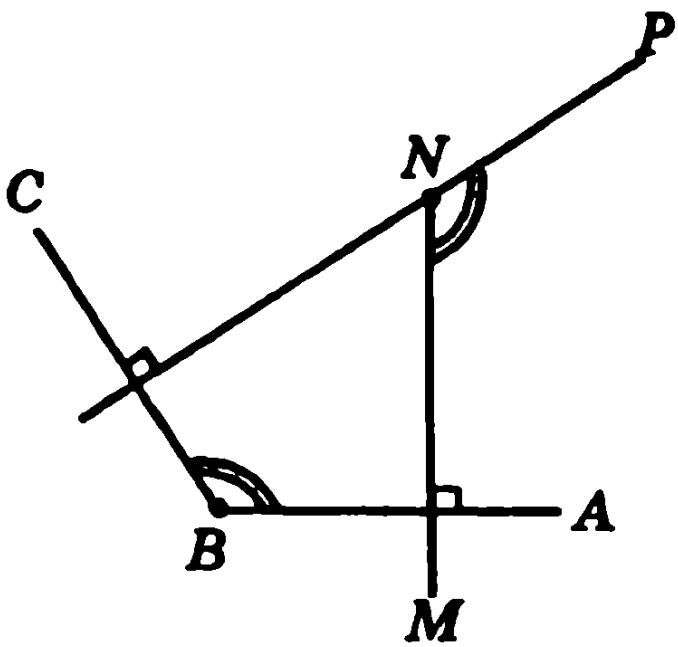


$a \parallel b \parallel c \parallel d$

43. Равенство углов со взаимно перпендикулярными сторонами

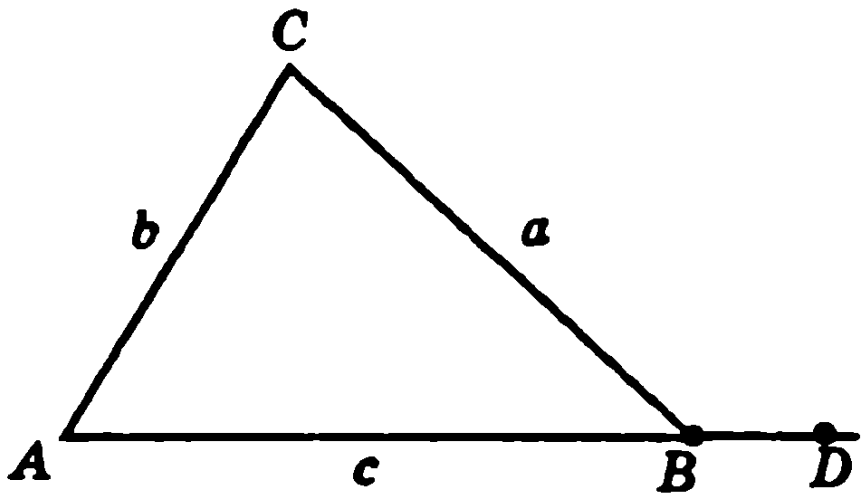
Если $AB \perp MN$ и $BC \perp NP$, то $\angle ABC = \angle MNP$.





44. Произвольный треугольник

(a, b, c — стороны, α, β, γ — противолежащие им углы; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a; l_a — биссектриса; m_a — медиана)



1. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ — *сумма углов* ΔABC.

2. $\angle CBD = \angle A + \angle B$ — *внешний угол* ΔABC.

3. *Неравенства треугольника*:

$a < b + c$,

$b < a + c$,

$c < a + b$.

4. *Определение вида* Δ *по его сторонам.*

Пусть c — наибольшая сторона. Тогда:

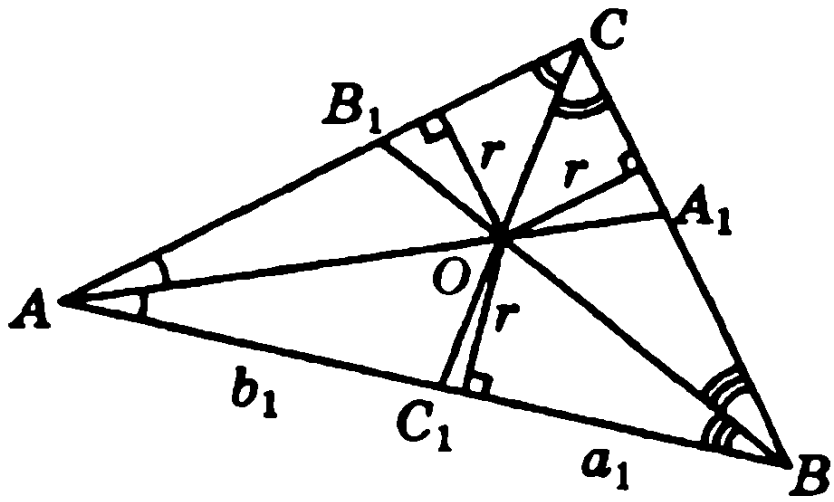
а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то Δ остроугольный;

б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то Δ прямоугольный;

в) если $c^2 > a^2 + b^2$, то Δ тупоугольный.

5. *Биссектрисы треугольника* **пересекаются в точке O — центре вписанной окружности.**

$BC = a$, $AB = c$, $AC = b$.



6. *Свойство биссектрисы внутреннего угла* Δ:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{BC_1}{AC_1}\text{, или }\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}.$$

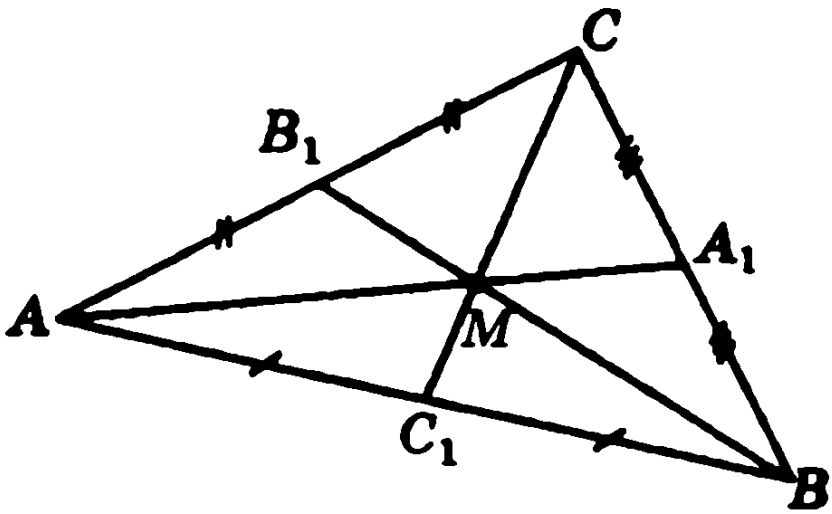
7. *Длина биссектрисы*:

$$l_c=\sqrt{ab-a_1b_1};$$

$$l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

8. *Медианы треугольника* пересекаются в одной точке (центр тяжести, или центроид Δ) и делятся в этой точке в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$AM : MA_1 = BM : MB_1 = \\ = CM : MC_1 = 2 : 1.$$



9. ***Длина медианы:***

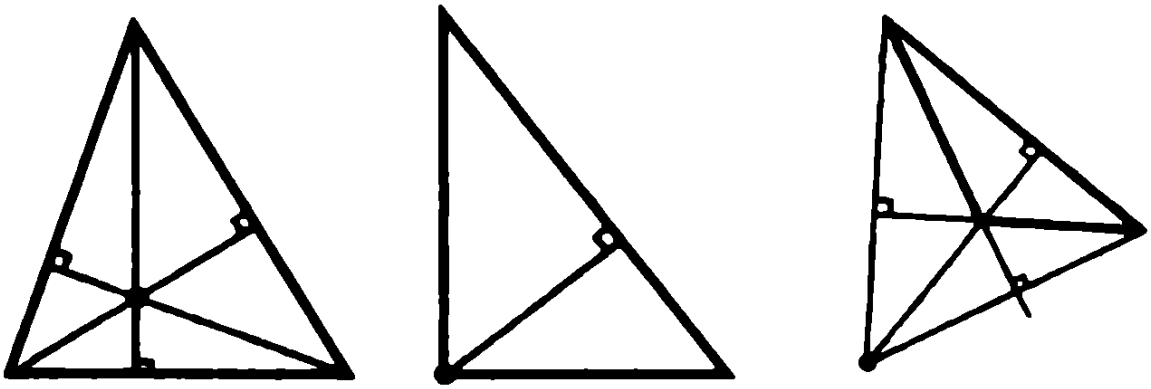
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}\ .$$

10. ***Длина высоты:***

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр, h_c — высота, проведенная к стороне c.

11. ***Высоты треугольника*** **пересекаются в одной точке (ортоцентре Δ).**



Остроугольный | Прямоугольный | Тупоугольный

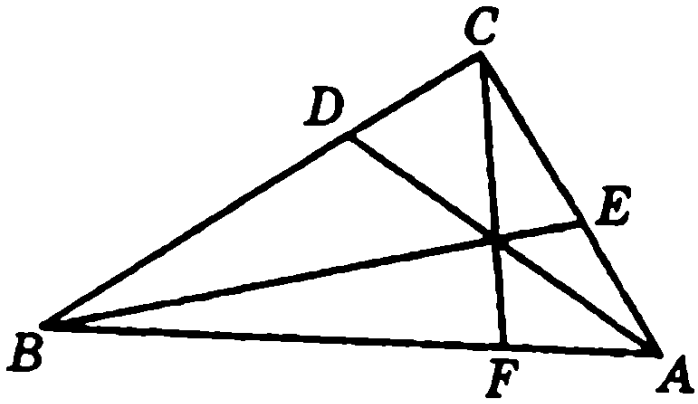
12. ***Зависимость между сторонами и высотами:***

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

13. ***Зависимость между высотами*** h_a, h_b, h_c ***и радиусом*** r ***вписанной окружности:***

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

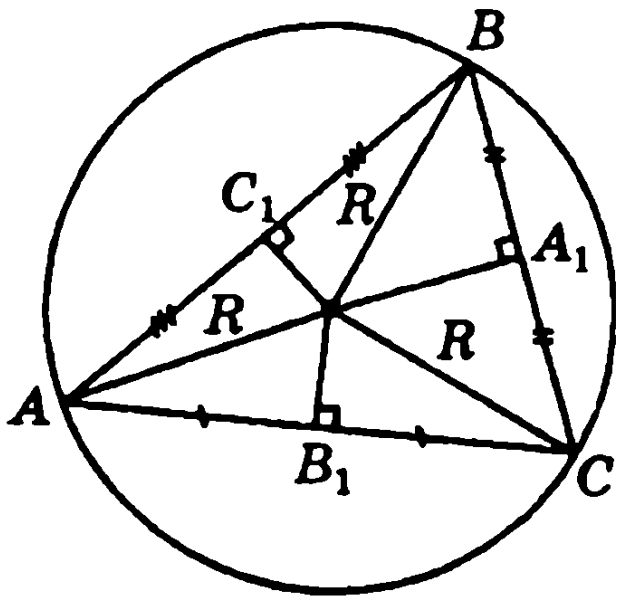
14. *Теорема Чевы:*



Для того чтобы прямые BE, AD и CF пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1.$$

15. *Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника*



пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника.

16. *Теорема синусов*:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\,.$$

17. *Теорема косинусов*:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

18. *Площадь треугольника*:

$S = \frac{1}{2}ah_a$; $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона;

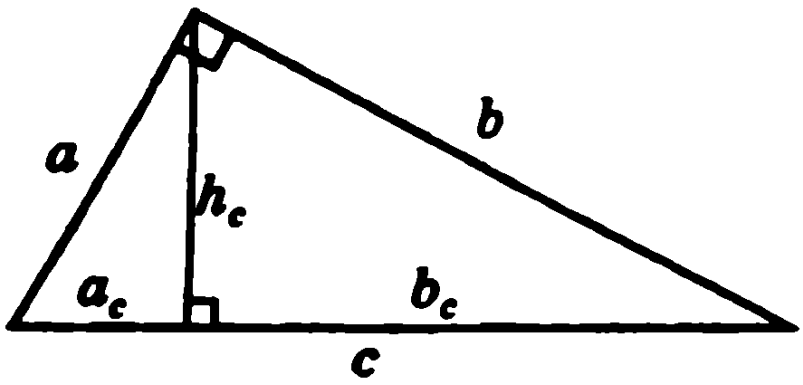
$S = p \cdot r$,

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$;

$$S = \frac{abc}{4R};\ S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

45. Прямоугольный треугольник

(a, b — катеты; c — гипотенуза; a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу)



$$S = \frac{1}{2}ab;\ S = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c);$$

$$R = \frac{1}{2}c;$$

$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора);

$h_c^2 = a_c \cdot b_c$; $a^2 = a_c \cdot c$;

$b^2 = b_c \cdot c$;

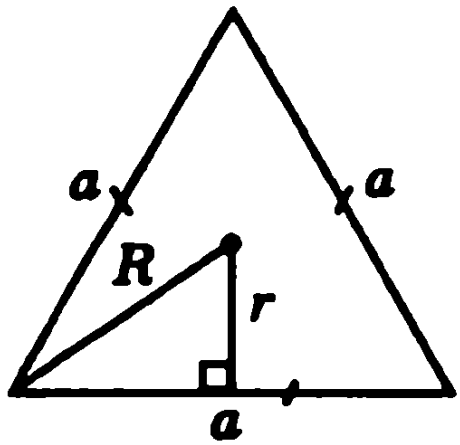
$a = c \sin \alpha = c \cos \beta =$

$= b \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \operatorname{ctg} \beta$;

$c = 2m_c$, где m_c — медиана.

56. Равносторонний (правильный) треугольник

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$



$$a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3};$$

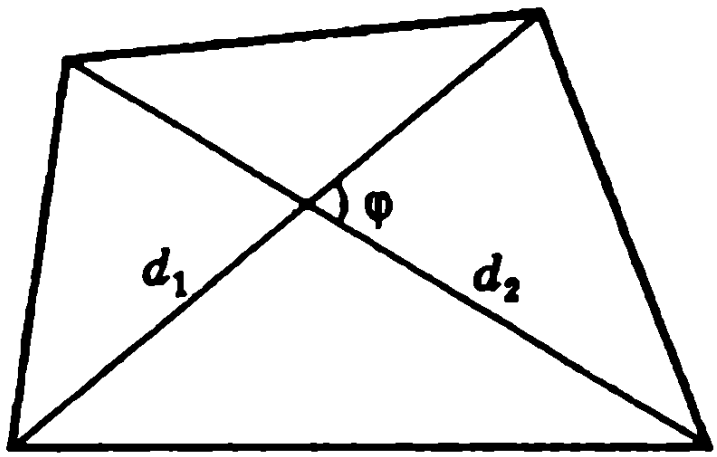
$$R = 2r;$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}};\ r = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

47. Четырехугольник

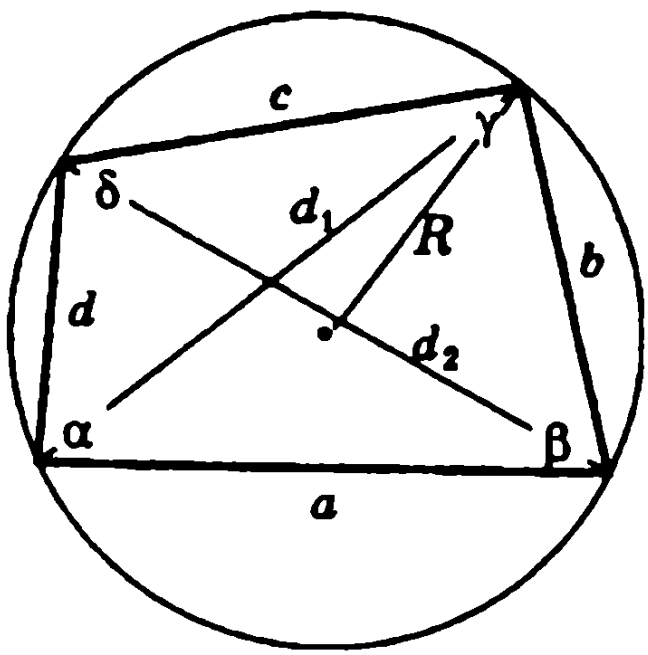
1. Произвольный выпуклый (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними).



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

2. Вписанный

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$;

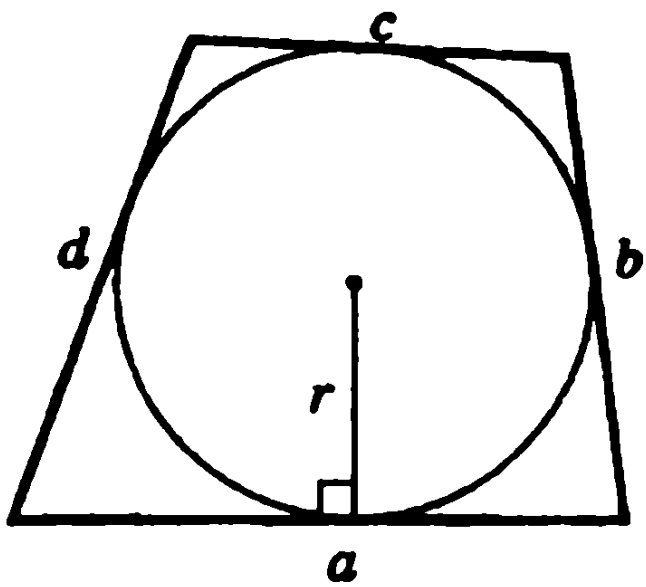


$ac + bd = d_1 d_2$ (теорема Птолемея).

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где

$p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

3. *Описанный*

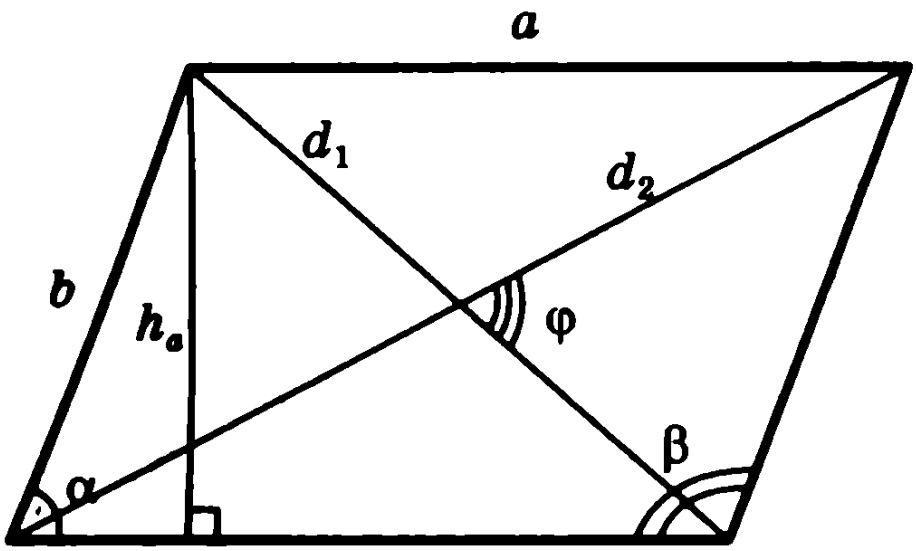


$a + c = b + d$ — суммы противоположных сторон равны:

$$S = p \cdot r.$$

48. Параллелограмм

(a и b — смежные стороны, α — угол между ними; d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними; h_a — высота к стороне a)



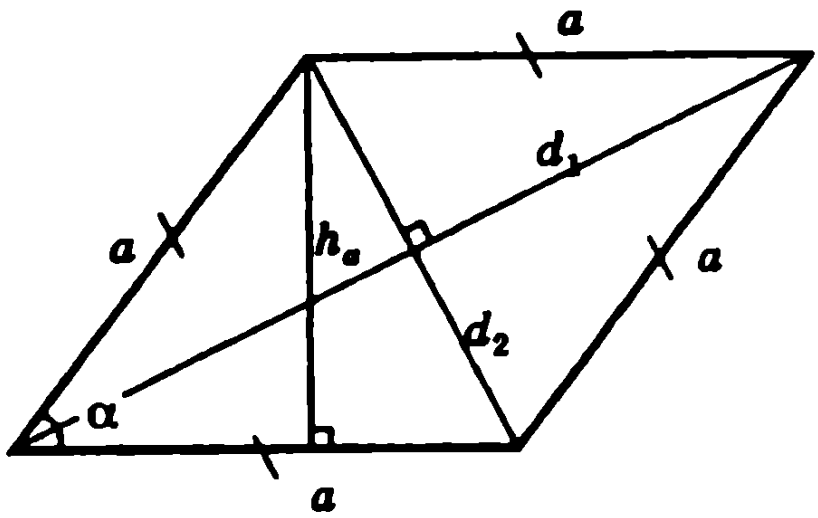
$\alpha + \beta = 180°$ — сумма углов, прилежащих к одной стороне.

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями.

$$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

49. Ромб

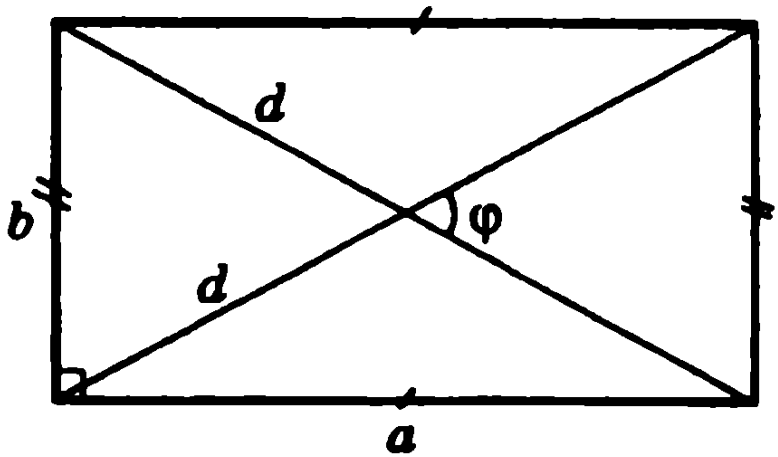


$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2;$$

$$S = ah_a = a^2 \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\, d_1 d_2.$$

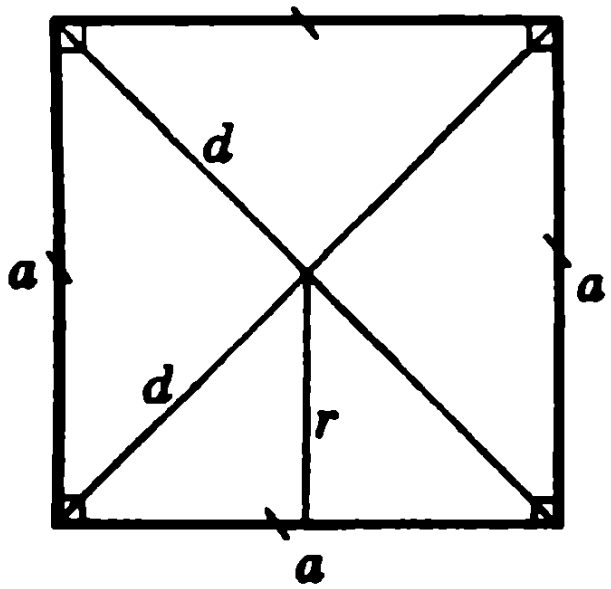
50. Прямоугольник



$$d^2 = a^2 + b^2;$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

51. Квадрат



$$d = a\sqrt{2};$$

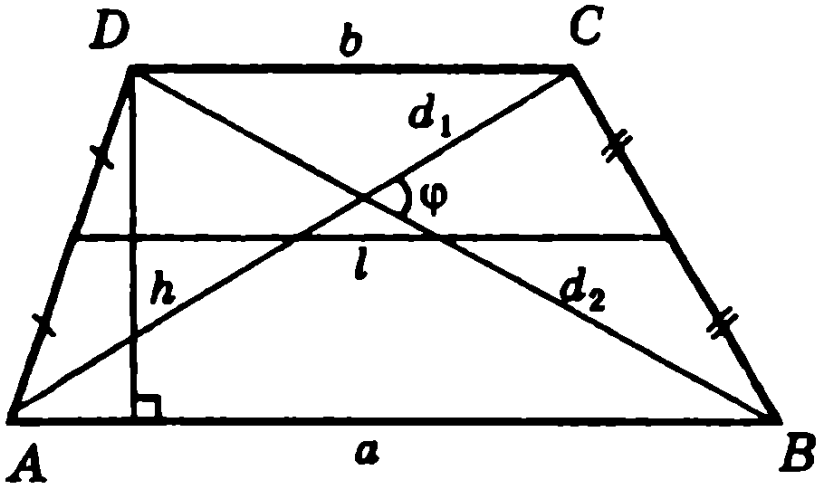
$$a = R\sqrt{2} = 2r;$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{\sqrt{2}}{2}a;$$

$$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2.$$

52. Трапеция

(a и b — основания; h — высота; l — средняя линия; d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними)

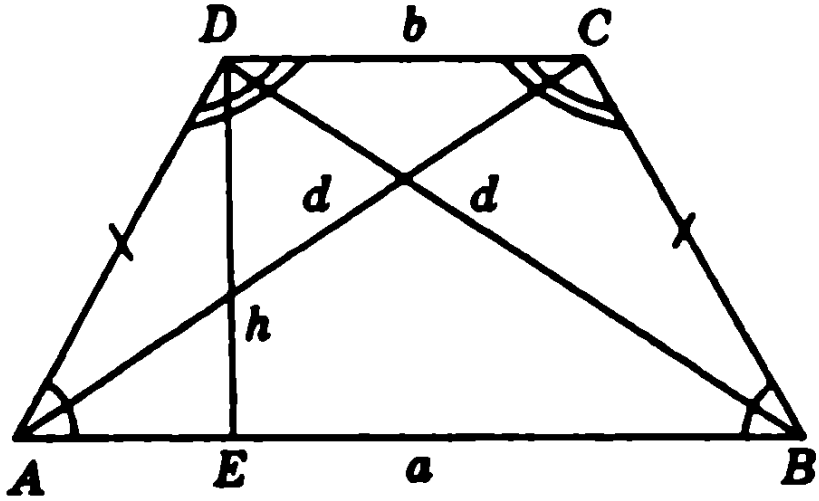


$$l = \frac{1}{2}(a + b);$$

$$\angle A + \angle D = 180°;$$
$$\angle B + \angle C = 180°.$$

$$S = lh = \frac{1}{2}(a+b)h = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

1. Равнобедренная трапеция

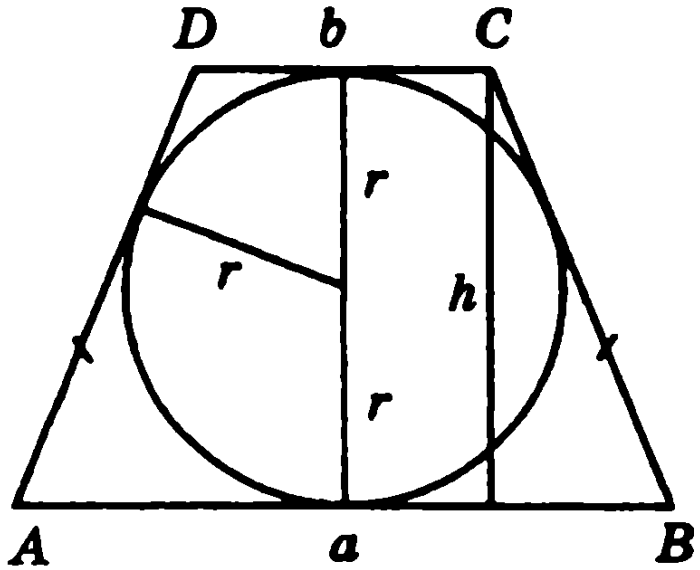


$AC = BD = d$; $AD = BC$;

$\angle A = \angle B$; $\angle D = \angle C$;

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

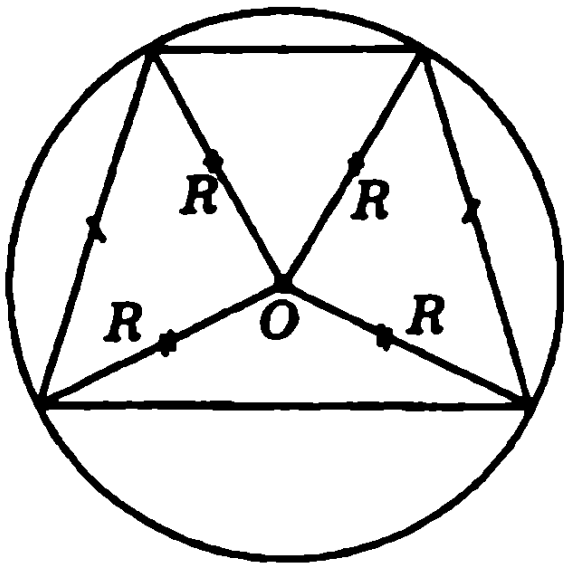
Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.



$AB + CD = 2AD.$

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности.

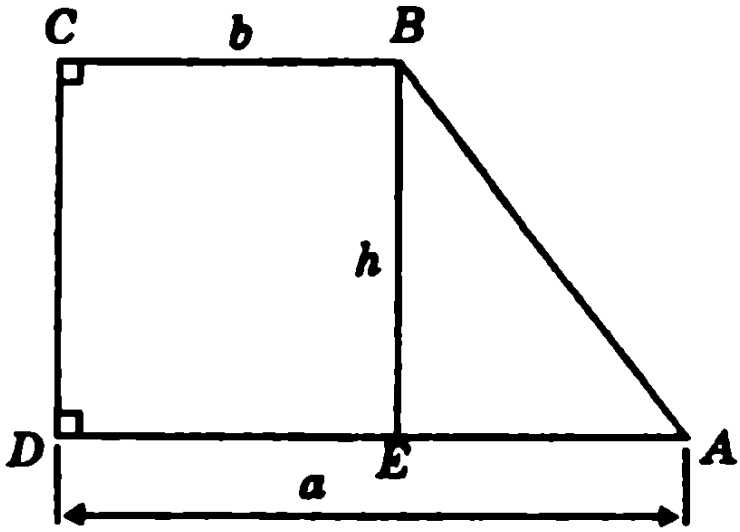
$$h = \sqrt{ab}.$$



R — радиус описанной окружности;

O — центр окружности, описанной около треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции.

2. Прямоугольная трапеция



$AE = a - b$;

$\angle D = \angle C = 90°$;

$BE = CD = h$ — высота трапеции.

53. Многоугольник (выпуклый)

(n — число сторон (углов))

Основные свойства:

1. $180°(n - 2)$ — сумма внутренних углов;

2. 360° — сумма внешних углов;

3. $\frac{1}{2}n(n-3)$ — число диагоналей.

54. Правильный многоугольник

(a_n — сторона; R_n — радиус описанной окружности; r_n — радиус вписанной окружности, α_n — величина угла; P_n — периметр; S_n — площадь)

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°;$$

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n};$$

$$a_n = 2r_n\operatorname{tg}\frac{180°}{n};$$

$$r_n = R_n \cos\frac{180°}{n};$$

$$P_n = na_n = 2nR_n \sin\frac{180°}{n};$$

$$S_n = \frac{1}{2}nR_n^2 \sin\frac{360°}{n} =$$

$$= \frac{1}{4}na_n^2 \operatorname{ctg}\frac{180°}{n}.$$

55. Длина окружности. Площадь круга и его частей

(R — радиус окружности, круга; D — диаметр; C — длина окружности; l — длина дуги; α — радианная мера центрального угла; $n°$ — градусная мера; S — площадь круга; $S_{\text{сект.}}$ — площадь сектора)

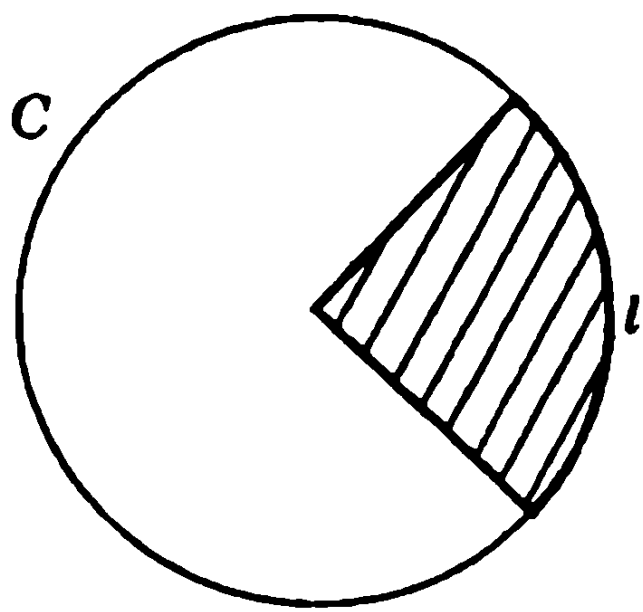
$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности.

$l = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$ — длина дуги окружности.

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{2}CR;$$

$$\pi = \frac{C}{D} \approx 3{,}14;$$

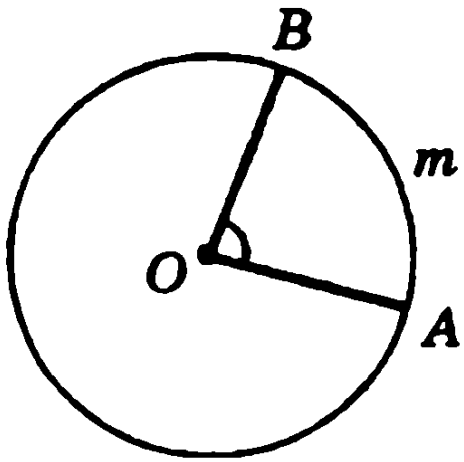
$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}R^2\alpha.$$



56. Углы и окружность

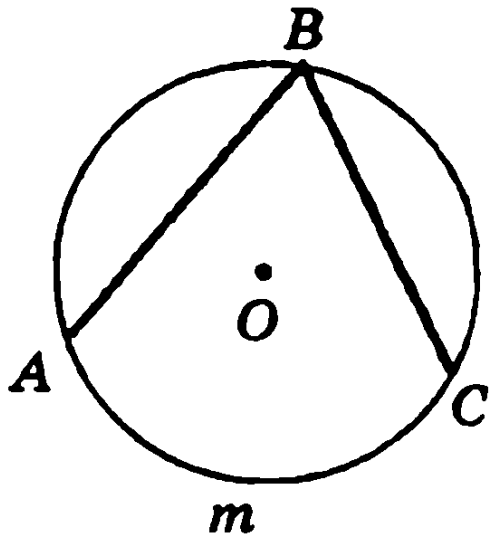
1. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается:

$$\angle AOB = \cup AmB.$$



2. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

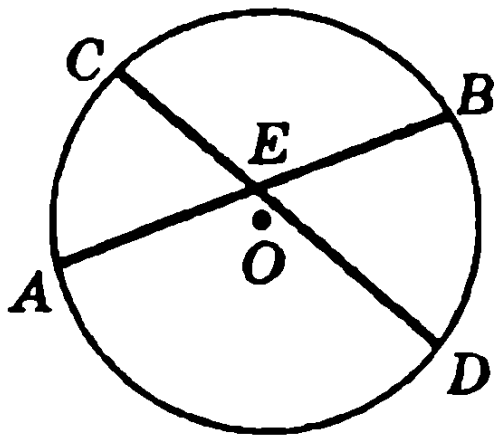
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$



47. Метрические отношения в окружности

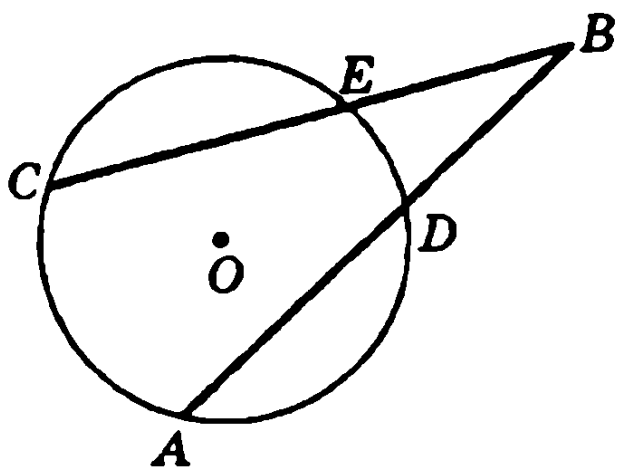
1. ***Если хорды*** AB и CD ***пересекаются*** в точке E, то

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$



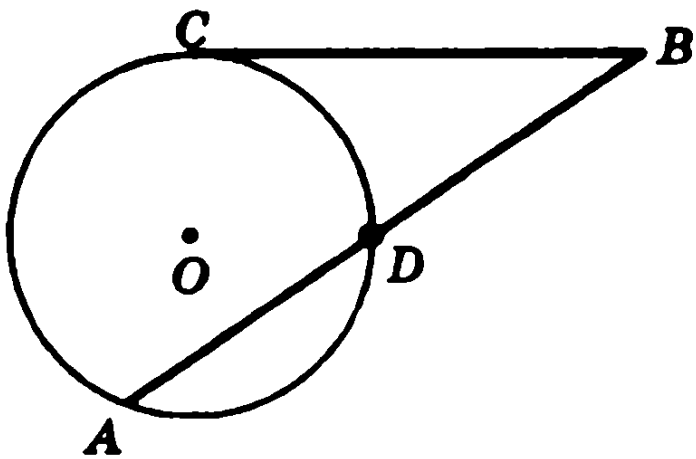
2. Если из точки B к окружности проведены две ***секущие***, то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB.$$



3. Если из точки B к окружности проведены ***секущая*** и ***касательная***, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной:

$$AB \cdot DB = BC^2.$$



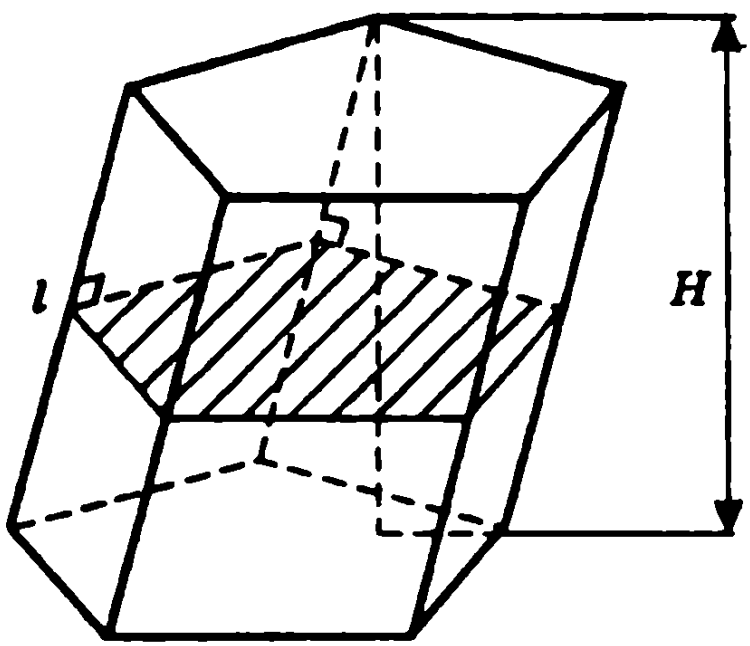
Часть 2

СТЕРЕОМЕТРИЯ

58. Призма

1. Произвольная призма

(l — боковое ребро;
P — периметр основания;
$S_{осн}$ — площадь основания;
H — высота;
$P_{сеч}$ — периметр перпендикулярного сечения;
$S_{сеч}$ — площадь сечения;



$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности;

V — объем;

$S_{бок} = P_{сеч} \cdot l;$
$V = S_{сеч} \cdot H;$
$V = S_{сеч} \cdot l.$
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}.$

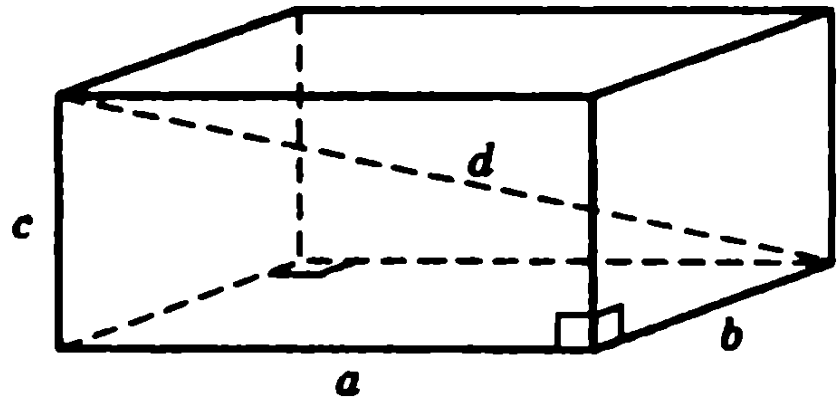
2. Прямая призма

$S_{бок} = P \cdot H;$
$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн};$
$V = S_{осн} \cdot H.$

Замечание. Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

59. Прямоугольный параллелепипед

(a, b, c — измерения, d — диагональ, S — поверхность)



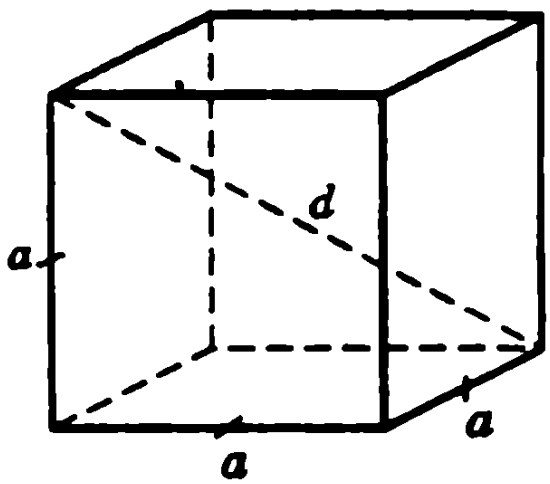
$S_{бок} = P \cdot H;$

$V = abc;$

$S = 2(ab + bc + ac);$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$

60. Куб (a — ребро)



$V = a^3;$

$d = a\sqrt{3}\ .$

$S = 6a^2.$

61. Пирамида

1. Произвольная пирамида

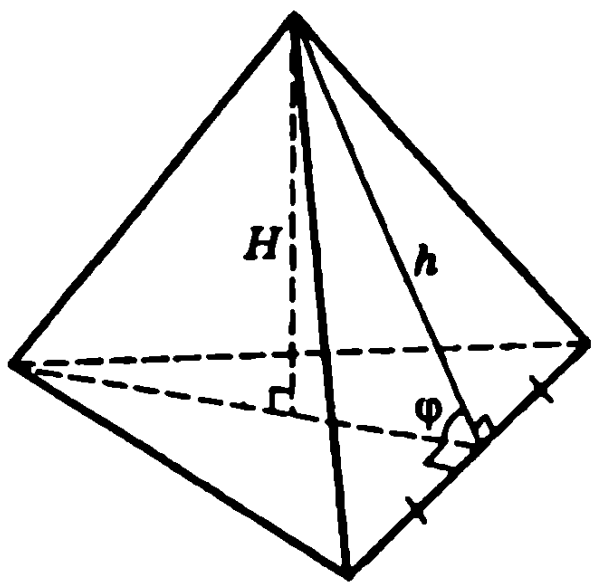
($S_{осн}$ — площадь основания;
H — высота;
V — объем).

$$S_{пол} = S_{бок} + S_{осн};$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H.$$

2. Правильная пирамида

(h — апофема, H — высота, φ — двугранный угол при основании)



$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot h;$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha};$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

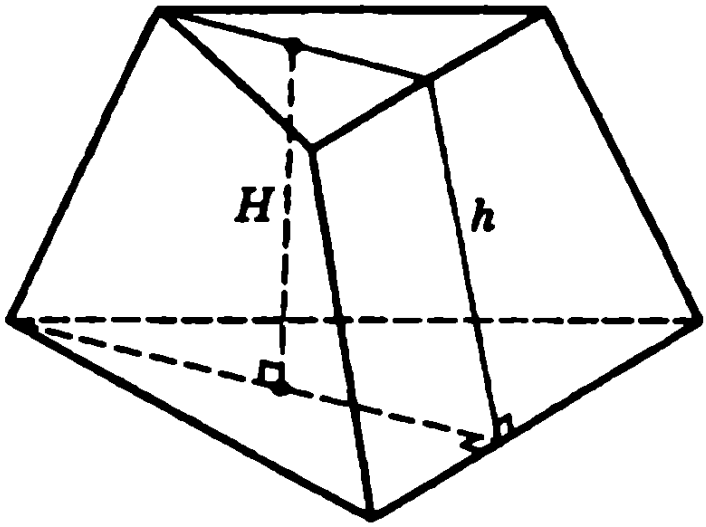
3. Произвольная усеченная пирамида

(H — высота;
S_1 и S_2 — площади оснований;
V — объем);

$$V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

4. Правильная усеченная пирамида

(h — апофема;
P_1 и P_2 — периметры оснований)

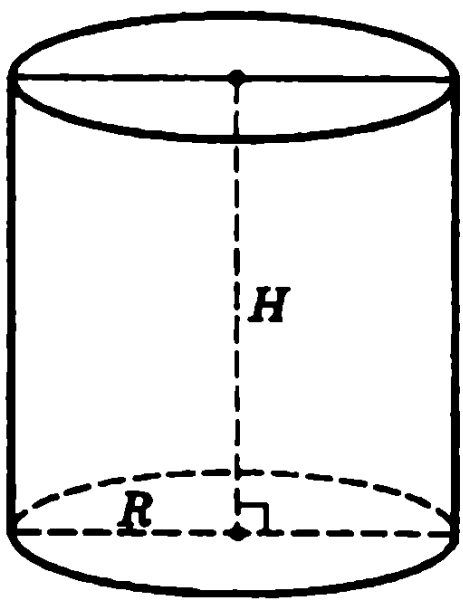


$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h;$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2.$$

62. Цилиндр

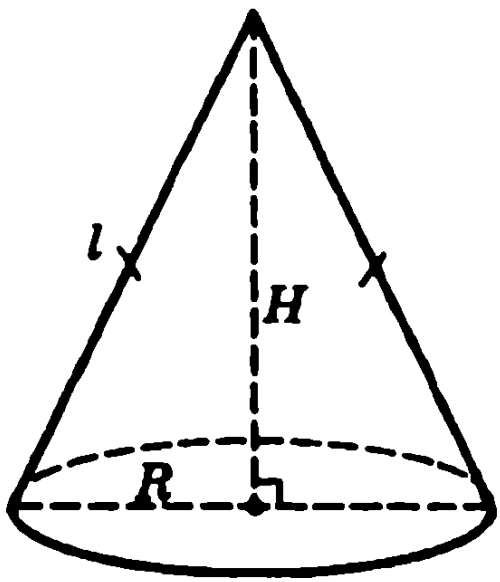
(H — высота;
R — радиус основания)



$S_{бок} = 2\pi RH;$
$S_{пол} = S_{бок} + 2S_{осн};$
$S_{пол} = 2\pi R(R + H);$
$V = \pi R^2 H.$

63. Конус

(H — высота;
R — радиус основания;
l — образующая)



$S_{бок} = \pi Rl;$
$S_{пол} = S_{бок} + S_{осн};$
$S_{пол} = \pi R(R + l);$
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$

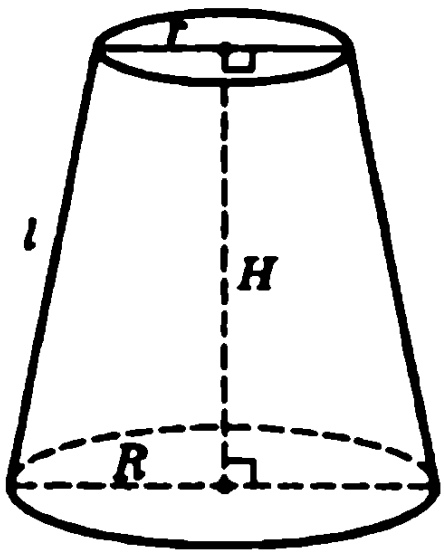
Усеченный конус

(H — высота;
l — образующая;
R и r — радиусы оснований)

$S_{бок} = \pi l(R + r)$;

$S_{пол} = S_{бок} + S_1 + S_2$;

$S_1 = \pi R^2$;

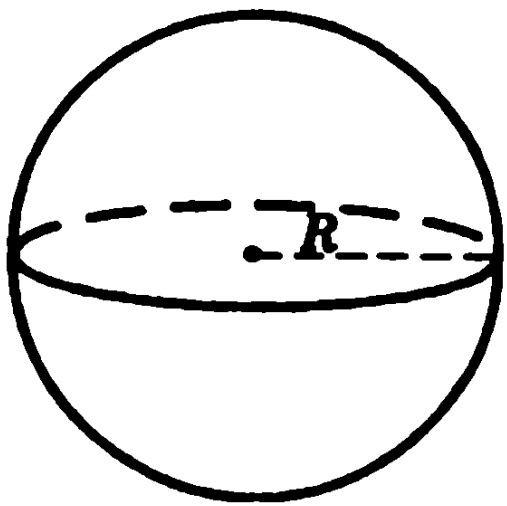


$S_2 = \pi r^2$;

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

64. Шар, сфера

(R — радиус шара;
S — площадь сферической поверхности;
V — объем;
D — диаметр)

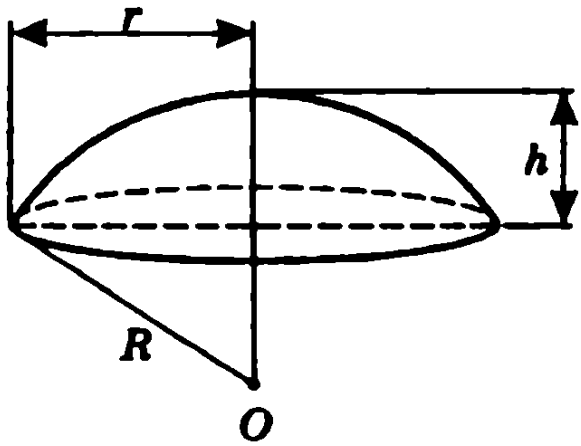


$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

65. Шаровой сегмент

(R — радиуç шара;
h — высота сегмента;
S — площадь сферической поверхности сегмента;
V — объем;
r — радиус основания)

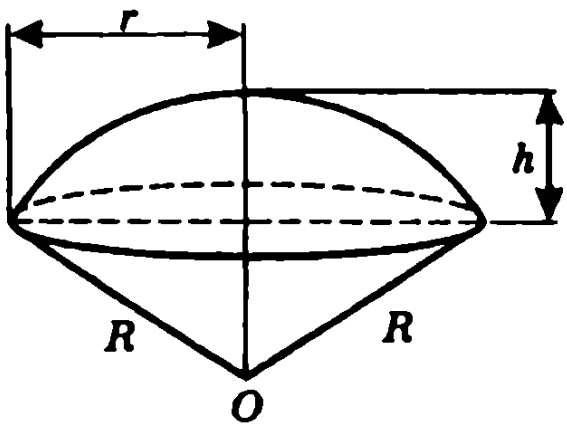


$$S = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

66. Шаровой сектор

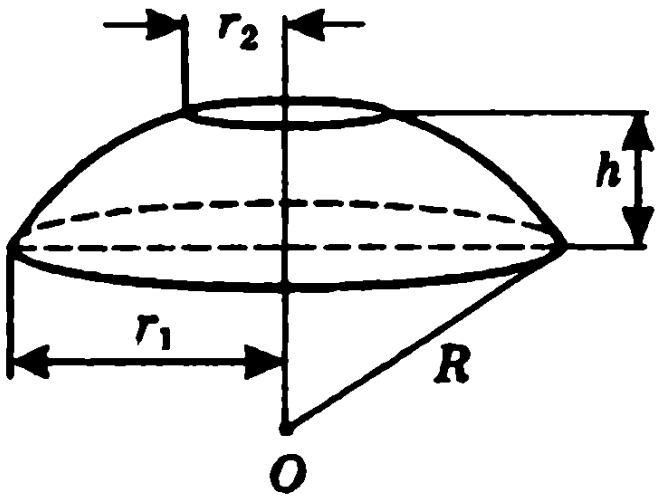


$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi D^2 h.$$

67. Шаровой пояс

(h — высота пояса;
r_1 и r_2 — радиусы оснований)



$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$

$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Глава 3

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ АЛГЕБРЫ VII–XI КЛАССОВ

§1. ЧИСЛА И ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

68. Число

Множество **натуральных чисел** обозначают символом N:

$$N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}.$$

Множество **целых чисел** обозначают символом Z:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}.$$

Множество **рациональных чисел** обозначают символом Q:

$$Q = \left\{\frac{m}{n}\right\}, \text{ где } m \in Z, n \in N.$$

Множество действительных чисел обозначают символом R. Это объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел.

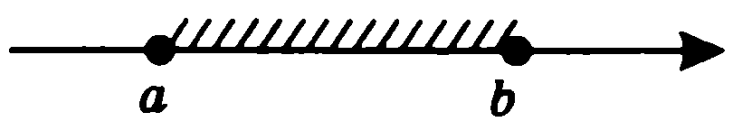
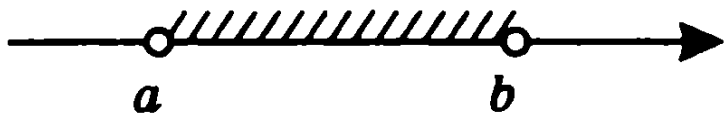
Множество комплексных чисел обозначают символом C. Это числа вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, $i^2 = -1$.

69. Числовые промежутки

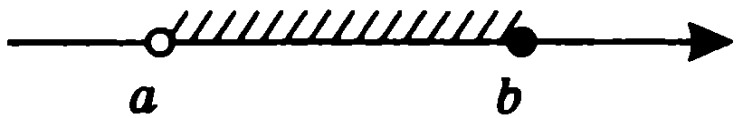
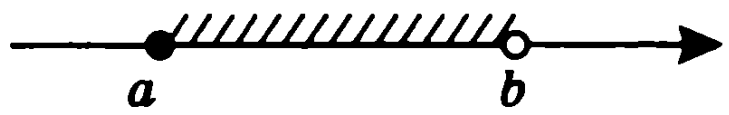
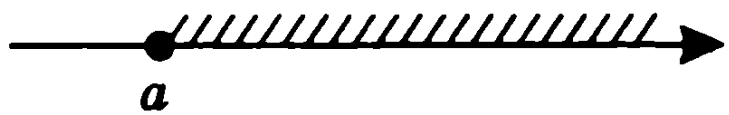
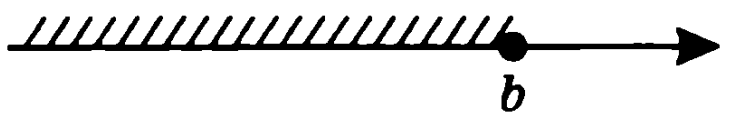
Это отрезки, интервалы и полуинтервалы, лучи.

Отрезок $[a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$, где $a \le b$. Например, отрезок $[-3; 1]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-3 \le x \le 1$.

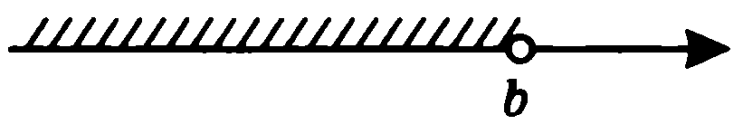
Геометрическое изображение числовых промежутков

Вид числового промежутка	Запись с помощью неравенств	Обозначение	Геометрическое изображение
Отрезок	$a \le x \le b$	$[a; b]$	
Интервал	$a < x < b$	$(a; b)$	

Продолжение табл.

Вид числового промежутка	Запись с помощью неравенств	Обозначение	Геометрическое изображение
Полуинтервал	$a < x \le b$	$(a; b]$	
	$a \le x < b$	$[a; b)$	
Луч	$x \ge a$	$[a; +\infty)$	
	$x \le b$	$(-\infty; b]$	

Окончание табл.

Вид числового промежутка	Запись с помощью неравенств	Обозначение	Геометрическое изображение
Открытый луч	$x > a$	$(a; +\infty)$	
	$x < b$	$(-\infty; b)$	
Числовая прямая	$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty; +\infty)$	

Интервал $(a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, где $a < b$. Например, интервал $(-1; 2)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-1 < x < 2$.

Полуинтервал $[a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$; **полуинтервал** $(a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leq b$, где $a < b$.

Луч — множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > a$, или $x < a$, или $x \geq a$, или $x \leq a$. Например, луч $x \geq 3$ — это множество чисел, не меньших 3.

На практике не всегда используют термины «интервал», «отрезок», «полуинтервал», «луч», заменяя их общим названием **числовой промежуток**.

70. Модуль действительного числа

По определению

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например: $|e - 2| = e - 2$, так как $e - 2 > 0$ ($e \approx 2{,}71$);

$|-7{,}1| = -(-7{,}1) = 7{,}1$, так как $-7{,}1 < 0$.

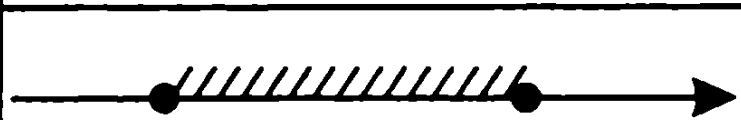
Геометрически $|a|$ — расстояние от точки 0 до точки, изображающей число a;

$|a - b|$ — расстояние между точками a и b.

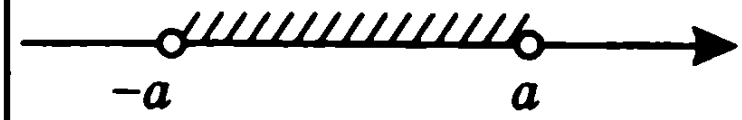
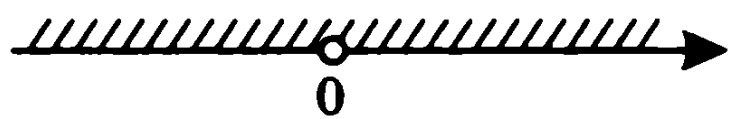
Свойства:

1) $|a| \geq 0$; 2) $|a| = |-a|$;
3) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$; 5) $|a|^2 = a^2$.

Простейшие выражения с модулем

a	Выражение	Равносильное выражение	Множество решений	Графическое решение
$a > 0$	$\lvert x\rvert = a$	$\begin{cases} x = a, \\ x = -a \end{cases}$	$\{-a;\ a\}$	
	$\lvert x\rvert \geq a$	$\left[\begin{array}{l} x \geq a, \\ x \leq -a \end{array}\right.$	$(-\infty;\ -a] \cup$ $\cup\ [a;\ +\infty)$	
	$\lvert x\rvert > a$	$\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a \end{array}\right.$	$(-\infty;\ -a) \cup$ $\cup\ (a;\ +\infty)$	
	$\lvert x\rvert \leq a$	$\begin{cases} x \leq a, \\ x \geq -a \end{cases}$	$[-a;\ a]$	

Продолжение табл.

a	Выражение	Равносильное выражение	Множество решений	Графическое решение
$a > 0$	$\|x\| < a$	$\begin{cases} x < a, \\ x > -a \end{cases}$	$(-a; a)$	
$a = 0$	$\|x\| \geq a$	—	$x \in R$	
	$\|x\| > a$	$x \neq 0$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; +\infty)$	
	$\|x\| \leq a$	$x = 0$	$\{0\}$	
	$\|x\| < a$	—	$\varnothing$	

Окончание табл.

a	Выражение	Равносильное выражение	Множество решений	Графическое решение
$a < 0$	$\|x\| \geq a$	—	$x \in R$	
	$\|x\| \leq a$	—	$\varnothing$	

71. Числовое выражение

Числовое выражение — запись, которая состоит из чисел, соединенных между собой знаками действий.

Например: $-3{,}4 \cdot (-8) + 12 : 0{,}4$ — числовое выражение.

Значением числового выражения называется число, которое получено в результате выполнения действий, указанных в этом выражении.

Например: число $57{,}2$ — значение выражения.

72. Стандартный вид числа

Стандартный вид числа — представление числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$, n — целое число,

a — мантисса числа, n — порядок числа.

Например: $342{,}7 = 3{,}427 \cdot 10^2$, т. е. $a = 3{,}427$, $n = 2$;

$0{,}009 = 9 \cdot 10^{-3}$, т. е. $a = 9$, $n = -3$.

73. Целая часть числа. Дробная часть числа

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x, где $x \in R$.

Обозначение: $[x]$.

Дробной частью числа x называется разность между данным числом и его целой частью.

Обозначение: $\{x\}$, тогда $\{x\} = x - [x]$.

Например: $[2{,}59] = 2$;

$\{2{,}59\} = 0{,}59$; $[-8{,}4] = -9$;

$\{-8{,}4\} = -8{,}4 - (-9) = 0{,}6$.

74. Погрешность приближения

Абсолютная погрешность приближения — модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением.

Обозначение: $|x - a|$, где x — точное, a — приближенное значение.

Например: запись $e = 2{,}71 \pm 0{,}01$ означает, что $|e - 2{,}71| \le 0{,}01$, т. е. число $e = 2{,}71$ с точностью до $0{,}01$.

Относительная погрешность — частное от деления абсолютной погрешности $|x - a|$ на модуль приближенного значения величины.

Обозначение: $\dfrac{|x-a|}{|a|}$, где x — точное значение, a — приближенное.

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Например: если $x = 2{,}89$, $a = 3$, то относительная погрешность будет равна

$$\frac{|3-2{,}89|}{|3|} = \frac{0{,}01}{3} = \frac{1}{300} \approx$$

$$\approx 0{,}003, \text{ или } 0{,}3\ \%.$$

75. Пропорции. Производные пропорции

Частное двух чисел называется **отношением** этих чисел.

Отношение показывает, во сколько раз I число больше II, или какую часть I число составляет от II.

Два числа, произведение которых равно 1, называются **взаимно обратными.**

Например: 5 и $\frac{1}{5}$; 0,4 и 2,5; $7\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{31}$.

Равенство двух отношений называется **пропорцией:**

$$a : b = c : d, \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Числа a и d называются **крайними членами**, а числа b и c — **средними членами** пропорции, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Основное свойство пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних.

Верно и обратное утверждение: если $a : b = c : d$, то $a \cdot d = b \cdot c$.

Если $a \cdot d = b \cdot c$, то числа a, b, c, d составляют пропорцию

$$a : b = c : d.$$

Производные пропорции:

Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$; $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$;

$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$; $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$;

$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$.

76. Периодические дроби

При обращении обыкновенной дроби в десятичную может образоваться **бесконечная десятичная дробь.**

Бесконечная десятичная дробь, которая, начиная с некоторого разряда, образуется последовательным добавлением справа одного и того же числа, называется

периодической, а повторяющееся число — ее **периодом**.

Периодические дроби, в которых повторение начинается сразу после запятой, называются **чистыми периодическими**.

Например: 0,333... = 0,(3); 21,666... = 21,(6).

Периодические дроби, в которых повторение начинается не сразу после запятой, называются **смешанными периодическими**.

Например: 7,23444... = 7,23(4); 0,19535353... = 0,19(53).

1. **Обращение чистой периодической дроби в обыкновенную.**

В качестве числителя обыкновенной дроби берут период чистой периодической дроби; в знаменателе пишут цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Например: $0,(8) = \frac{8}{9}$;

$3,(14) = 3\frac{14}{99}$.

2. Обращение смешанной периодической дроби в обыкновенную.

Для этого достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность записать в числитель, а в знаменатель написать цифру 9 столько раз, сколько цифр между запятой и периодом.

Например:

$$2,63(13) = 2\frac{6313-63}{9900} =$$

$$=2\frac{6250}{9900} = 2\frac{125}{198};$$

$$0,7(4) = \frac{74-7}{90} = \frac{67}{90};$$

$$8,(61) = \frac{861-8}{99} = \frac{853}{99};$$

$$4,3(65) = \frac{4365-43}{990} = \frac{4322}{990} = \frac{2161}{495}.$$

77. Проценты

Процентом называется сотая часть числа.

Обозначение — %.

Например: 3%, 250%, 0,02%.

Тысячная часть числа называется **промилле.**

Обозначение — ‰.

1. Если данное число принять за 1, то 1% составляет 0,01 этого

числа, 35% составляют 0,35 числа, или 7/20 этого числа, и т. д.

Следовательно, **чтобы число процентов выразить в виде дроби,** достаточно число процентов разделить на 100.

Например: $86\% = 86 : 100 = 0{,}86$.

2. Нахождение процентов данного числа.

Чтобы найти $a\%$ от числа b, надо число b умножить на $a/100$.

Например: 24% от 80 составляют $\dfrac{80 \cdot 24}{100} = 19{,}2$.

3. Нахождение числа по его процентам.

Если известно, что $a\%$ числа x равно b, то число x можно найти по формуле $x = \dfrac{b}{a} \cdot 100$.

Например, если 2% вклада в сберкассу составляют 120 руб., то этот вклад равен $\frac{120}{2} \cdot 100 =$ $= 6000$ руб.

4. Нахождение процентного отношения чисел.

Чтобы найти процентное отношение двух чисел — a и b, надо отношение этих чисел умножить на 100%, т. е. вычислить

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot 100\%.$$

5. Сложные проценты.

Если в сберегательную кассу внесен вклад в a рублей и положен на p процентов годовых (т. е. проценты начисляются один раз в

год), то через n лет сумма составит $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ руб.

Замечание. *Здесь проценты насчитываются на проценты и поэтому называются сложными.*

78. Деление числа на части прямо и обратно пропорционально данным

1. Чтобы разделить некоторое число пропорционально данным числам, надо разделить это число на сумму данных чисел и результат умножить на каждое из них.

Например:

Отрезок длиной 20 см разделить в отношении 2 : 3.

Решение.

$\frac{20}{2+3} \cdot 2 = 8$ (см); $\frac{20}{2+3} \cdot 3 = 12$ (см).

2. Чтобы разделить число на части, обратно пропорциональные данным числам, достаточно разделить это число на части, прямо пропорциональные числам, обратным данным.

Например, число 54 разделить обратно пропорционально числам 3 и 6.

Решение.

Числа, обратные данным, относятся как $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 6 : 3$. Тогда получим $\frac{54}{9} \cdot 6 = 36$; $\frac{54}{9} \cdot 3 = 18$.

§2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

79. Алгебраическое выражение и его ОДЗ

Алгебраическим выражением называется выражение, состоящее из чисел и букв, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

Например: $3a^2b^3 - ab^3(a - b)$;

$$x - y + \frac{1}{3}z;\ \frac{2m-n}{m+1}.$$

Значением алгебраического выражения называется число, которое получается в результате вычислений после замены в этом выражении букв числами.

Если алгебраическое выражение содержит только действия

сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем, то оно называется **целым рациональным выражением.**

Если кроме указанных действий входит действие деления, то выражение называется **дробно-рациональным.**

Целые рациональные и дробно-рациональные выражения вместе называются **дробно-рациональными.** Если содержится еще и действие извлечения корня, то выражение называется **иррациональным.**

Областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраического выражения называется множество всех допустимых совокупностей значений букв, входящих в это выражение.

80. Одночлен

Одночлен — выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и их степеней.

Например: $2mn^3$; $-\frac{7}{8}x^6$;

$0{,}3x^3\,(-4y^2)$ – одночлены.

Выражения $5-x$, a^6+b^3, $4m^5/n^2$ не являются одночленами, так как представляют собой сумму или частное переменных и чисел.

1. **Стандартным видом одночлена** называется одночлен, содержащий только один числовой множитель (коэффициент), стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями.

2. **Коэффициентом одночлена** называется числовой множитель

одночлена, записанного в стандартном виде.

3. **Степенью одночлена** стандартного вида называется сумма показателей степеней переменных.

Например: $23x^6y^8$ — одночлен 14-й степени, степень одночлена $7a$ равна единице, а степень одночлена 13 равна нулю.

4. Одночлены, отличающиеся только числовым коэффициентом или равные между собой, называются **подобными.**

81. Многочлен

Многочленом называется алгебраическая сумма одночленов.

Например: $6xy - 5mn$ — двучлен; $3x^2 - 8x^2y^4 - 1$ — трехчлен.

1. **Члены многочлена** — одночлены, из которых состоит многочлен.

2. **Подобные члены** — одночлены, которые отличаются только коэффициентами, или одинаковые одночлены.

3. **Привести подобные члены** — значит упростить многочлен так, что алгебраическая сумма одночленов заменяется одним одночленом.

Например: $4x^2y - 3xy^2 + xy - 2x^2y + xy^2 = 2x^2y - xy^2 + xy$.

4. Если в многочлене все одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены, то полученный многочлен называется **многочленом стандартного вида.**

Например: $2x^2y - 5xy^3 + xy^2$ — многочлен стандартного вида.

5. **Степенью многочлена** стандартного вида называется наибольшая степень одночлена, входящего в этот многочлен.

Например: $3x - 8x^3y^2 - 4{,}5x^2y^4 - 2$ — многочлен четвертой степени.

6. **Чтобы умножить многочлен на одночлен**, достаточно каждый член многочлена умножить на одночлен и полученные произведения сложить.

Аналогично производится деление многочлена на одночлен.

7. **Чтобы умножить многочлен на многочлен**, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго и полученные произведения сложить.

82. Разложение многочлена на множители

Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения двух или более многочленов (множителей). Например:

$16x^2 - 9y^2 = (4x - 3y)(4x + 3y)$;

$1 - 81a^4 = (1 - 9a^2)(1 + 9a^2) = (1 - 3a)(1 + 3a)(1 + 9a^2)$.

При разложении многочлена на множители используются следующие **способы:**

1. Вынесение общего множителя за скобку.

Например: $8xy^2 - 12y = 4y(2xy - 3)$.

2. Способ группировки.

Например: $2a^3 - a^2 + 4a - 2 = (2a^3 + 4a) - (a^2 + 2) = 2a(a^2 + 2) - (a^2 + 2) = (a^2 + 2)(2a - 1)$.

3. Применение формул сокращенного умножения.

Например:

$$\frac{1}{9}x^2 - 81y^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x - 9y\right)\left(\frac{1}{3}x + 9y\right);$$

$$64x^3 + 27y^6 = (4x)^3 + (3y^2)^3 =$$

$$= (4x + 3y^2)(16x^2 - 12xy^2 + 9y^4);$$

$$m^4 - 26m^2 + 169 = (m^2 - 13)^2.$$

83. Дробь

Дробью называется выражение вида $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$, где буквами a и b обозначены числовые выражения с переменными.

Например: $\frac{x^4 - 4y^3}{z^2}$, $\frac{3m^4 - m^3n}{x - 2}$.

1. Областью определения дроби $\frac{a}{b}$ **называется множество чисел, при которых эта дробь имеет числовое значение, т. е. множество пар чисел** (a, b)**, где**

$$b \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

2. Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же выражение, отличное от нуля, то получится равная дробь.

3. Сложение и вычитание алгебраических дробей выполняют по тем же правилам, что и для числовых дробей:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b},$$

где $b \neq 0$.

Для нахождения суммы (или разности) дробей с различными знаменателями предварительно приводят их к общему знаменателю:

$$\frac{a}{c} + \frac{m}{n} = \frac{a \cdot n}{c \cdot n} + \frac{m \cdot c}{c \cdot n} =$$

$$= \frac{an + mc}{cn}.$$

4. Умножение и деление алгебраических дробей выполняют по тем же правилам, что и для числовых дробей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ где } b \neq 0,\ d \neq 0.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \text{ где } b \neq 0,$$

$d \neq 0,\ c \neq 0.$

84. Тождество

Тождество — равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него букв. Например:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a + b)c = ac + bc$;

$\sqrt{x^2} = |x|$; $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется **тождественным преобразованием выражения.**

85. Корень n-й степени из действительного числа

1. **Корнем n-й степени**, где $n \in N$ и $n \neq 1$, из действительного числа a называется действительное число x, n-я степень которого равна a.

Обозначение: $\sqrt[n]{a}$, где n — показатель корня, a — подкоренное выражение,

По определению $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2. Нахождение корня n-й степени из числа a называется **извлечением корня.**

3. Заметим, что $\sqrt[2n]{a}$, где $n \in N$ и $a < 0$, не существует.

Например: выражения $\sqrt{-5}$, $\sqrt[4]{-49}$ — не имеют смысла.

Корень нечетной степени существует и из отрицательного числа.

Например: $\sqrt[3]{-27} = -3$, так как $(-3)^3 = -27$.

4. **Арифметическим корнем n-й степени из числа a** $(a \geq 0)$ называется неотрицательное чис-

ло b, n-я степень которого равна a, где $n > 1$, $n \in N$.

Например:

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$;

$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = |x - 2| + |x + 3|$;

$\sqrt[4]{(-7)^4} = |-7| = 7$; $\sqrt{36} = 6$ (но не ± 6).

Замечание. *В школьном курсе рассматривается только арифметическое значение корня, т. е.* $\sqrt[n]{a}$ *имеет смысл, если* $a \geq 0$ *и принимает только неотрицательные значения.*

86. Степень с целым и дробным показателем

Рассмотрим степень a^p, где $p \in Z$.

1. Если $p = 0$, то по определению $a^0 = 1$, где $a \neq 0$.

Например: $5^0 = 1$, $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$.

2. Если $p < 0$, то по определению $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$, $a \neq 0$.

Например: $6^{-1} = \frac{1}{6}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}$;

$(-9)^{-1} = -\frac{1}{9}$; $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.

Рассмотрим степень $a^{p/q}$, где p/q — рациональное число.

3. Выражение $a^{p/q}$ имеет в общем виде смысл, если $a > 0$. Если $a > 0$, $p \in Z$, $q \in N$, то по определению

$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$; $0^q = 0$.

Например: $8^{4/5} = \sqrt[5]{8^4}$.

Заметим, что выражения $(-2)^{1/2}$ ***и*** $(-13)^{2/3}$ ***не имеют смысла.***

4. Степень с рациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем.

§3. УРАВНЕНИЯ

87. Уравнение с одним неизвестным

1. **Уравнением** называется равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

2. **Корнем уравнения** называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

3. **Решить уравнение** — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

88. Основные свойства уравнений

1. Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив при этом его знак на противоположный.

2. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Два уравнения называют **равносильными**, если множества их корней совпадают.

Например, уравнения $x^2 - 9 = 0$ и $(x + 3)(3^x - 27) = 0$ равносильны, так как они оба имеют по два корня: -3 и 3. Равносильны и уравне-

ния $x^2 + 2005 = 0$ и $\sqrt{x} = -19$, поскольку они оба не имеют корней.

Уравнение A является **следствием** уравнения B, если все корни уравнения B являются одновременно корнями уравнения A.

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$, или областью допустимых значений (ОДЗ) переменной, называется множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

При решении уравнений возможно расширение области определения уравнения (ООУ).

Причины расширения ООУ

1. Освобождение уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.

2. Освобождение уравнения от знаков корней четной степени.

3. Освобождение уравнения от знаков логарифмов.

Проверка всех найденных корней уравнения обязательна в случаях, если:

1. Произошло расширение ООУ.

2. Осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень.

3. Выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (имеющее смысл во всей ООУ).

Причины потери корней при решении уравнений:

1. Деление обеих частей на одно и то же выражение $\varphi(x)$ (кроме тех случаев, когда заведомо известно, что всюду в ООУ выполняется условие $\varphi(x) \neq 0$).

2. Сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

89. Общие методы решения уравнений

1. Замена уравнения $h(f(x)) = h(g(x))$ уравнением $f(x) = g(x)$.

Этот метод применяется:

а) при решении показательных уравнений, при переходе от уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, к уравнению $f(x) = g(x)$;

б) при решении логарифмических уравнений, при переходе от уравнения $\log_a f(x) =$

$= \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;

в) при решении иррациональных уравнений, при переходе от уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ к $f(x) = g(x)$.

Заметим, что этот метод применяется в случае, если $y = h(x)$ — монотонная функция, которая каждое свое значение принимает один раз.

Например: $y = x^5$ — монотонно возрастающая функция, при которой от уравнения $(3x - 4)^5 = (8x - 3)^5$ можно перейти к равносильному уравнению $3x - 4 = 8x - 3$, откуда $x = -0{,}2$. Здесь расширение ОДЗ не произошло, т. е. это равносильное преобразование уравнения.

Если же $y = h(x)$ — немонотонная функция, то этот метод неприменим, так как возможна потеря корней. Например, уравнение $(3x - 4)^4 = (8x - 3)^4$ нельзя заменить уравнением $3x - 4 = 8x - 3$, корень которого $x = -0{,}2$, так как при этом потерян корень $x = 7/11$, удовлетворяющий исходному уравнению. Объясняется это тем, что $y = x^4$ — немонотонная функция.

2. **Метод разложения на множители**, заключающийся в том, что уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ заменяется совокупностью уравнений $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $h(x) = 0$.

Решив каждое из этих уравнений, выбираем те корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а

остальные отбрасываем как посторонние.

3. Метод введения новой переменной.

Например, заменой $y = \sqrt{x^2+5x+1}$, $y \geq 0$, уравнение $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2+5x+1} = 2$ сводится к квадратному $3y^2 + 2y - 5 = 0$ и т. д.

4. Функционально-графический метод решения уравнения $f(x) = g(x)$ заключается в том, что строят графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, находят точки их пересечения (если графики пересекаются), корнями уравнения являются абсциссы этих точек.

Этот метод дает возможность определить число корней уравне-

ния, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

Некоторые уравнения можно решать, учитывая какие-либо свойства функций (например, монотонность).

90. Система двух уравнений с двумя неизвестными

1. Если ставится задача найти такие пары значений (x, y), которые одновременно удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$ и уравнению $g(x, y) = 0$, то говорят, что данные уравнения образуют **систему уравнений:**

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases}$$

2. Пара чисел (x, y), которые при подстановке в каждое урав-

нение системы обращают ее в верное числовое равенство, называется **решением системы.**

3. **Решить систему** — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

4. При решении системы уравнений применяются следующие **способы:**

1) способ подстановки;

2) способ алгебраического сложения;

3) графический способ.

5. Две системы уравнений называются **равносильными**, если они имеют одни и те же решения или если обе системы не имеют решений.

6. Система линейных уравнений с двумя переменными может:

1) иметь единственное решение;

2) не иметь решений;

3) иметь бесконечное множество решений.

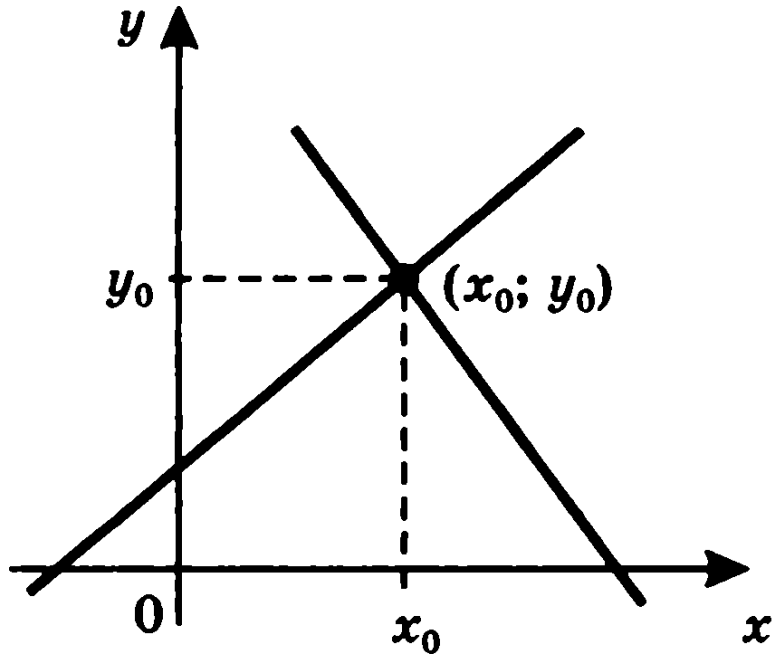
7. По коэффициентам при соответствующих неизвестных можно, не решая систему линейных уравнений, определить число ее решений.

Пусть дана система

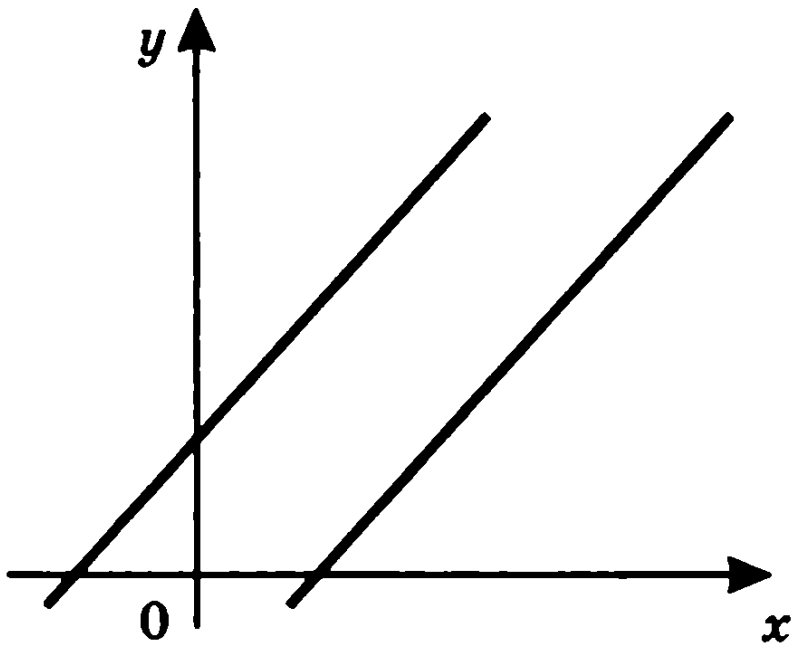
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

1. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, т. е. коэффициенты при x и y непропорциональны, то система имеет единственное решение.

В этом случае прямые пересекаются в одной точке (x_0, y_0).

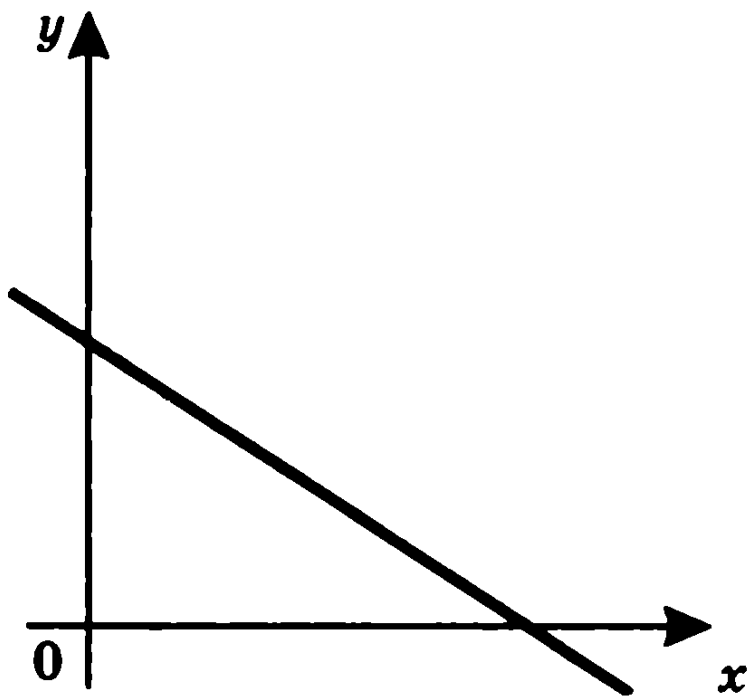


2. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений. В этом случае прямые, являющиеся графиками



уравнений системы, параллельны и не совпадают.

3. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае прямые совпадают.



91. Линейные уравнения

Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — некоторые действитель-

ные числа, называется **линейным уравнением** (или уравнением I степени).

1. Если $a \neq 0$, то линейное уравнение имеет **единственный** корень $x = -\frac{b}{a}$.

2. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение **не имеет корней.**

3. Если $a = 0$, $b = 0$, то уравнение **имеет бесконечно много корней**, т. е. $x \in R$.

92. Квадратные уравнения

Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется **квадратным.**

Если $a = 0$, то уравнение (1) будет **линейным.**

В уравнении (1) a называется **I коэффициентом** (или старшим), b — **II коэффициентом**, c — **свободным членом.**

Выражение вида $D = b^2 - 4ac$ называется **дискриминантом** (различителем) квадратного уравнения.

Наличие корней квадратного уравнения (1) зависит от знака D, поэтому решение уравнения следует начинать с вычисления D, чтобы выяснить, имеет ли квадратное уравнение (1) корни, а если имеет, то сколько?

Возможны три случая:

1. Если $D > 0$, то квадратное уравнение (1) имеет **два различных** действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \text{ где}$$

$D = b^2 - 4ac$.

2. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет **один** корень:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3. Если $D < 0$, то квадратное уравнение **не имеет действительных корней.**

Неполные квадратные уравнения

Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ и $ax^2 = 0$ называются **неполными квадратными уравнениями.**

Если в уравнении (1) $c = 0$, то получим $ax^2 + bx = 0$, которое ре-

шается разложением левой части на множители:

$$x(ax + b) = 0, \text{ откуда}$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Если $b = 0$, то уравнение (1) примет вид $ax^2 + c = 0$.

Корни уравнения $ax^2 + c = 0$ существуют, если коэффициенты a и c имеют разные знаки, тогда $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$; в противном случае корней нет.

Наконец, если $b = 0$, $c = 0$, то уравнение (1) примет вид $ax^2 = 0$, откуда $x = 0$ — единственный корень.

Квадратное уравнение приведенного вида

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, $a = 1$, то полученное уравнение называется **приведенного вида** и записывается в виде $x^2 + px + q = 0$, а корни находят по формуле

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ .$$

Если $a \neq 1$, $a \neq 0$, то оно называется квадратным уравнением **общего вида.**

Биквадратные уравнения

Биквадратные уравнения — это уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$.

Заменой неизвестного $x^2 = y$ оно сводится к квадратному.

93. Теорема Виета

Теорема Виета (прямая): если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 x_2 = q.$$

Обратная теорема Виета (для приведенного уравнения) гласит: если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

94. Иррациональные уравнения

Это уравнения, содержащие неизвестное под знаком корня (радикала).

При решении иррациональных уравнений речь идет о нахождении только действительных корней.

Основные методы решения иррациональных уравнений:

1) возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень;

2) введение новых переменных;

3) искусственные приемы решения.

Заметим, что все корни *четной* степени, входящие в уравнение, являются арифметическими, а все корни *нечетной* степени определены при любом действительном значении подкоренного выражения.

При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень следует учесть, что если n — четное число, то уравнение $(f(x))^n = (\varphi(x))^n$ является следствием уравнения $f(x) = \varphi(x)$, т. е. при переходе от уравнения $f(x) = \varphi(x)$ к уравнению $(f(x))^n = (\varphi(x))^n$ могут появиться посторонние корни.

При решении иррациональных уравнений используется формула $(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x)$, применение которой может привести к расширению области определения уравнения в случае четного n.

По этим причинам (и по другим) при решении иррациональных уравнений в большинстве случаев необходима *проверка* найденных корней.

Сам способ проверки зависит от вида найденных решений (простые или сложные), а также от способа решения уравнения.

В случае, когда при решении уравнений получаются громоздкие корни (и проверка затруднительна), целесообразнее переходить к равносильным системам уравнений и неравенств (смешанным системам).

§4. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Преобразования показательных и логарифмических выражений основаны на применении ос-

новных свойств соответствующих функций.

Логарифмом числа b по основанию a ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени x, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

$\log_a b = x$, откуда $a^x = b$ (по определению).

Если в полученное равенство подставить значение $x = \log_a b$, то получим $a^{\log_a b} = b$ — *основное логарифмическое тождество.*

95. Показательные уравнения

Это уравнения, содержащие переменную в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению

уравнений вида $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное.

Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковыми основаниями $a > 0$, $a \neq 1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Типы показательных уравнений и методы их решения

1. Решение уравнений с использованием свойств показательной функции.

2. Решение уравнений, сводящихся к квадратным.

3. Решение уравнений вынесением общего множителя за скобку.

4. Решение показательных уравнений логарифмированием обеих частей.

5. Решение уравнений с использованием свойства монотонности показательной функции.

96. Показательно-степенные уравнения

Это уравнения, содержащие неизвестное как в показателе, так и в основании степени:

$$(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}.$$

Корнями этого уравнения считаются только решения смешанной системы

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 0, \\ g(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

и те значения x, для которых $f(x) = 1$ при условии, что при этих значениях определены $g(x)$ и $\varphi(x)$.

Если условием не исключается случай $f(x) \le 0$ или $f(x) = 1$, то приходится рассматривать все случаи.

97. Логарифмические уравнения

Это уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \ne 1$, равносильное уравнению $x = a^b$.

Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно каждой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Заметим, что переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравне-

нию $f(x) = g(x)$ может привести к появлению посторонних корней.

Эти корни можно выявить либо с помощью подстановки их в исходное уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения, которая задается системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений

1. Решение уравнений, основанных на определении логарифма.

2. Решение уравнений потенцированием.

3. Применение основного логарифмического тождества.

4. Логарифмирование.

5. Замена переменной.

6. Переход к другому основанию.

§5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Это уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком тригонометрической функции.

При помощи соответствующих преобразований всякое тригонометрическое уравнение сводится к одному или нескольким простейшим уравнениям.

Главный принцип — не терять корней. Одним из возможных методов отбора корней, отсеивания посторонних является проверка. Заметим, что в отличие от алгебраических уравнений трудности, возникающие с отбором корней,

с проверкой, резко возрастают, так как проверять приходится целые серии, состоящие из бесконечного числа членов.

98. Типы тригонометрических уравнений и методы их решения

1. Простейшие тригонометрические уравнения.
2. Уравнения, решаемые разложением на множители.
3. Уравнения, сводящиеся к квадратным.
4. Однородные и сводящиеся к ним уравнения.
5. Уравнения, решаемые введением вспомогательного аргумента.
6. Уравнения, решаемые преобразованием суммы тригоно-

метрических функций в произведение.

7. Уравнения, решаемые преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму.

8. Уравнения, решаемые с применением формул понижения степени.

9. Уравнения, решаемые с применением формул двойного и тройного аргументов.

10. Уравнения, решаемые с помощью замены переменной.

11. Уравнения вида

$f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$.

12. Уравнения, решаемые с использованием ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$.

§6. НЕРАВЕНСТВА

99. Числовые неравенства

1. Два числа или два выражения с одной переменной, соединенные одним из знаков $>$, $<$, $\geq$ или $\leq$, называются **неравенством.**

2. Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ или $<$, называются **строгими**, а с помощью знаков $\leq$ или $\geq$ — **нестрогими.**

3. Неравенства вида $a > b$ и $c > d$ называются **неравенствами одинакового смысла**, а вида $a > b$ и $c < d$ — **противоположного смысла.**

4. Если два неравенства $x < a$, $a < y$ заменить неравенством $x < a < y$, то такое неравенство называется **двойным.**

5. Неравенства, содержащие только числа, называются **числовыми неравенствами.**

100. Основные свойства числовых неравенств

1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$ для любого числа c, т. е. если прибавить к обеим частям неравенства или вычесть из них одно и то же число, то знак неравенства не изменится.

Любое число можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак переносимого числа на противоположный.

3. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, и если это число **положи-**

тельно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный:

если $a > b$, то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ при $c > 0$,

$ac < bc$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ при $c < 0$.

101. Действия с неравенствами

1. При сложении неравенств одинакового смысла получается неравенство того же знака, т. е. если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

2. Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно умножать, при этом получается неравенство того же

знака, т. е. если $a > b$, $c > d$ и $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $ac > bd$.

3. Обе части неравенства с положительными членами можно возводить в одну и ту же натуральную степень, т. е. если $a > b$, то $a^n > b^n$, где $a > 0$, $b > 0$, $n \in N$.

Верно и обратное утверждение: если $a^n > b^n$, $a > 0$, $b > 0$, $n \in N$, то $a > b$.

102. Неравенства с одним неизвестным

Неравенство с одним неизвестным (линейное неравенство) — это неравенство вида $ax + b > 0$ (или $ax + b < 0$).

Например: $4x + 3 < 2x - 7$;

$$\frac{2}{5}x - 3 \geq \frac{4 - x}{2}.$$

1. Решением неравенства с одним неизвестным называется такое значение переменной, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, число 2 является решением неравенства $3 + x > 6 - 2x$, так как $3 + 2 > 6 - 2 \cdot 2$, или $5 > 2$.

2. Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

3. Если $a > 0$, то решение неравенства $ax > b$ имеет вид $x > \frac{b}{a}$, или $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то решение неравенства $ax > b$ имеет вид $x < \frac{b}{a}$, или $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.

Если $a = 0$, то решение неравенства $ax > b$ примет вид $0 \cdot x > b$, и при $b \geq 0$ оно не имеет решения, а при $b < 0$ оно верно при любых x.

4. Два неравенства называются **равносильными**, если их решения совпадают.

Заметим, что при решении различных типов неравенств (показательных, логарифмических, тригонометрических и т. д.) проверка правильности всех найденных решений неравенства подстановкой в исходное в большинстве случаев невозможна.

В этом случае при решении неравенств (и систем неравенств) нужно использовать равносильные преобразования (с учетом ОДЗ).

Если все преобразования равносильные, то нахождение ОДЗ не обязательно. В противном случае нахождение ОДЗ обязательно. При этом возможны два подхода к оформлению решения:

а) ОДЗ в виде неравенства (или системы неравенств) присоединяют к исходному неравенству (исходной системе), а затем решают полученную систему;

б) находят ОДЗ, решают данное неравенство (систему неравенств), пользуясь лишь равносильными

преобразованиями, и из полученных решений исключают те, которые не входят в ОДЗ.

103. Рациональные неравенства

Неравенство, содержащее только рациональные функции, называется **рациональным.**

Неравенства вида $P_n(x) > 0$, или $P_n(x) < 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$, или $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены соответственно степеней n и m, наиболее часто решаются методом интервалов (промежутков).

При решении неравенств методом интервалов могут встретиться следующие **типы неравенств:**

1. Простейшие неравенства, представленные в виде произведения линейных множителей.

Например:

$(x-2)(x+3)(x-6)<0.$

2. Простейшие неравенства, разлагающиеся на линейные множители.

Например: $x^3 \geq 9x$, или

$x(x-3)(x+3) \geq 0.$

3. Простейшие дробно-рациональные неравенства без кратных корней.

Например:

$$\frac{(x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(3x+1)(4x-5)} > 0.$$

4. Неравенство, содержащее множитель, не принимающий

нулевого значения на числовой прямой.

Например: $\dfrac{(2x-3)(5+x^2)}{(9-x^2)x} \le 0.$

5. Простейшие неравенства с кратными корнями.

Например:

$$\frac{(x-4)^3(x+2)^4(x-3)^5(x-5)}{x^2(x+4)^3} \le 0.$$

104. Неравенства с модулем

Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля (абсолютной величины), решаются в зависимости от их типа различными способами.

Обычный путь решения неравенств с модулем состоит в следующем.

Неравенство вида $|a| \le b$ равносильно **двойному неравенству** $-b \le a \le b$, или системе

$$\begin{cases} a \le b, \\ a \ge -b. \end{cases}$$

Заметим, что в системе должны выполняться оба неравенства, что соответствует союзу «и».

Неравенство вида $|a| \ge b$ равносильно **объединению неравенств**

$$\left[\begin{array}{l} a \ge b, \\ a \le -b. \end{array}\right.$$

Объединение неравенств означает, что должно выполняться хотя бы одно из неравенств, что соответствует союзу «или».

Другой подход к неравенствам с модулем состоит в том, что числовая прямая разбивается на про-

межутки, на каждом из которых знак модуля можно опустить на основании определения модуля.

105. Системы неравенств

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача найти все общие решения данных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называется **частным решением** системы неравенств, а множество всех частных решений представляет собой **общее решение** системы неравенств, или просто решение системы неравенств.

Решить систему неравенств — значит найти все ее частные ре-

шения. Следует отметить, что **решение системы** неравенств представляет собой **пересечение** множеств решений неравенств системы, тогда как **решение совокупности** неравенств представляет собой **объединение** множеств решений неравенств, образующих совокупность.

Неравенства, образующие систему, обозначаются **фигурной скобкой**, а неравенства, образующие совокупность, — **квадратной**.

Иногда неравенства, образующие совокупность, записываются в строчку через точку с запятой.

§7. ФУНКЦИИ

1. Зависимость переменной y от переменной x называется **функцией**, если каждому значе-

нию x соответствует единственное значение y.

Обозначение: $y = f(x)$.

2. Переменная x называется **независимой переменной**, или **аргументом**, а переменная y — **зависимой переменной**, или **функцией**.

3. Значение y, соответствующее заданному значению x, называется **значением функции**.

4. Все значения, которые принимает аргумент, называются **областью определения функции**. Все значения, которые принимает сама функция, называются **областью изменения (множеством значений) функции**.

5. $D(f)$ или $D(y)$ — область определения функции; $E(f)$ или $E(y)$ — множество значений функ-

ции, $y(x_0)$ или $f(x_0)$ — значение функции в точке x_0.

6. **Графиком функции** называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям самой функции.

106. Способы задания функции

1. Аналитический (в виде формулы).

2. Табличный (в виде пар $(x; y)$).

3. Графический.

Заметим, что не всякая кривая является графиком некоторой функции.

Для того чтобы кривая на плоскости являлась графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы каждому значению аргумента

x соответствовало *лишь одно* значение переменной y.

107. Монотонность функции

1. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на данном числовом промежутке X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_2 > x_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

2. Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на данном числовом промежутке X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_2 > x_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

3. Если функция только возрастает или только убывает на данном промежутке, то она называется **монотонной** на этом промежутке.

108. Четные и нечетные функции

1. **Четная функция** — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = y(x)$ для каждого x из области определения.

Например: $y = x^2$, $y = \cos x$ — четные функции.

2. **График четной функции** симметричен относительно оси ординат.

3. **Нечетная функция** — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = -y(x)$ для каждого x из области определения.

Например: $y = x^3$, $y = \sin x$ — нечетные функции.

4. **График нечетной функции** симметричен относительно начала координат.

Заметим, что не всякая функция является четной или нечетной.

Например: функции $y = 3x + 7$; $y = x^2 + x$ не являются ни четными, ни нечетными (не имеют класса четности).

109. Периодические функции

1. Функция f называется **периодической**, если существует число $T \neq 0$, такое, что при любом $x \in D(f)$ числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$, где T называется **периодом** функции f.

2. Если T — период функции, то kT, где $k \in Z$, $k \neq 0$, также период функции.

Следовательно, всякая периодическая функция имеет сколько угодно периодов. На практике

обычно рассматривают наименьший положительный период.

110. Обратная функция

Обратная функция к функции $y = f(x)$ — функция $y = g(x)$, которая получается при решении уравнения $f(x) = y$ относительно x и заменой x на y и y на x.

111. Экстремумы функции

1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ **возрастает** на промежутке X.

2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняет-

ся неравенство $f'(x) \le 0$ (причем уравнение $f(x) = 0$ имеет лишь конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ **убывает** на промежутке X.

3. Точка $x = x_0$ называется **точкой минимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x = x_0$) выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Значение функции в точке минимума обозначают $y_{\min}$.

4. Точка $x = x_0$ называется **точкой максимума функции** $f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x = x_0$) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Значение функции в точке максимума обозначают $y_{\max}$.

5. **Точки экстремума функции** — точки максимума и минимума.

6. Точки, в которых производная функции равна нулю, **называются стационарными**, а точки, в которых функция непрерывна, но производная функции не существует, — **критическими.**

112. Необходимое и достаточное условия экстремума функции

1. Необходимое условие экстремума (**теорема Ферма**): если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(x) = 0$.

2. Достаточное условие экстремума:

- если при переходе через стационарную точку x_0 производ-

ная функции меняет знак с «+» на «−», то x_0 — **точка максимума функции;**

- если производная меняет знак с «−» на «+», то x_0 — **точка минимума функции.**

113. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

В некоторых случаях находить наибольшее и наименьшее значения функции можно без помощи графика.

В более сложных случаях для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции используется производная. Для этого находят:

1) производную $f'(x)$;

2) стационарные и критические точки функции и выбирают те из них, которые принадлежат отрезку $[a; b]$;
3) значения функции $y = f(x)$ в стационарных и критических точках и концах отрезка, тогда меньшее из них будет наименьшим, а большее — наибольшим значением функции.

114. Область определения основных элементарных функций

1. Область определения любого многочлена — R.

2. $D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. $D(\sqrt[2n]{x}) = [0; +\infty)$.

4. $D(\sqrt[2n+1]{x}) = R$.

5. $D(\log_a x) = (0; +\infty)$.

6. $D(a^x) = R$.

7. $D(\sin x) = D(\cos x) = R$.

8. $D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1; 1]$.

9. $D(\operatorname{tg} x)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

10. $D(\operatorname{ctg} x)$: $x \neq \pi n$, $n \in Z$.

11. $D(\operatorname{arctg} x) = D(\operatorname{arcctg} x) = R$.

115. Множество (область) значений основных элементарных функций

1. Областью значений всякого многочлена **нечетной** степени является R.

2. Областью значений многочлена **четной** степени является промежуток $[a; +\infty)$, где a — наимень-

шее значение этого многочлена либо промежуток $(-\infty; b)$, где b — наибольшее значение.

3. $E\left(\dfrac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

4. $E(\sqrt[2n]{x}) = [0; +\infty)$.

5. $E(\sqrt[2n+1]{x}) = R$.

6. $E(\log_a x) = R$.

7. $E(a^x) = (0; +\infty)$.

8. $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1]$.

9. $E(\arcsin x) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

10. $E(\arccos x) = [0; \pi]$.

11. $E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R$.

12. $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

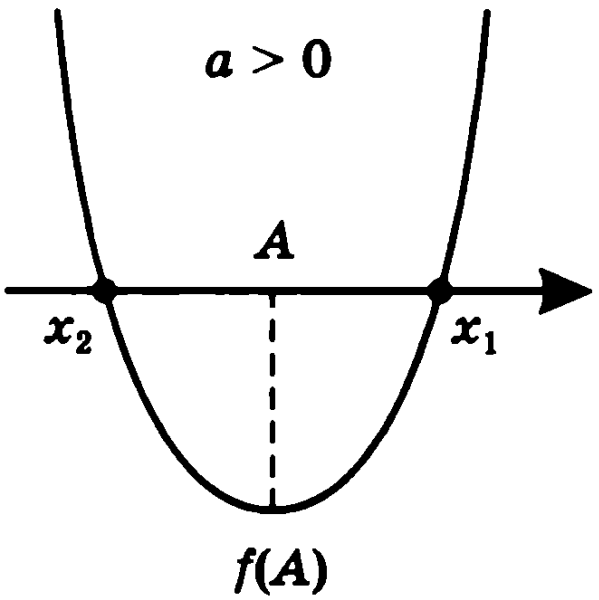
13. $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi)$.

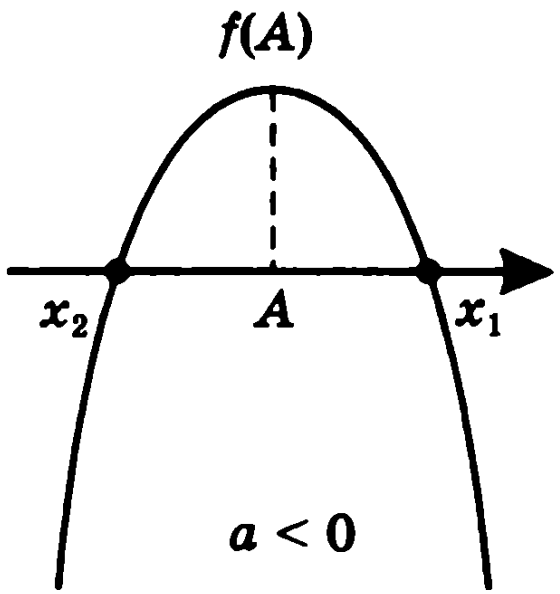
116. Расположение корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$

Рассмотрим расположение корней x_1 и x_2 относительно точек A и B, где $A < B$.

I. $\begin{cases} x_1 > A, \\ x_2 < A, \end{cases}$

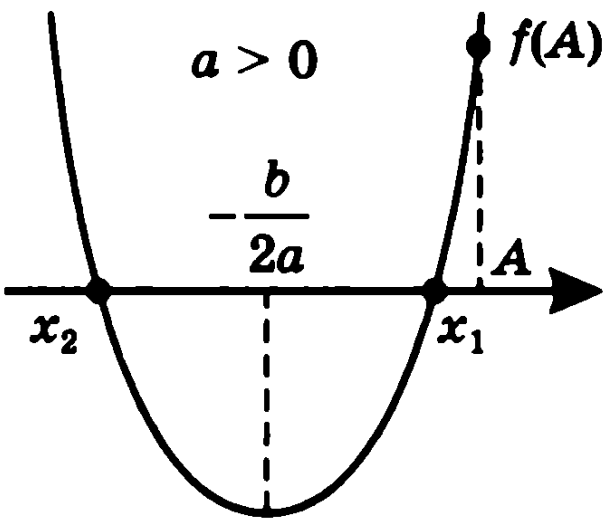
т. е. $A \in (x_2; x_1)$, что выполняется при $a \cdot f(A) < 0$.

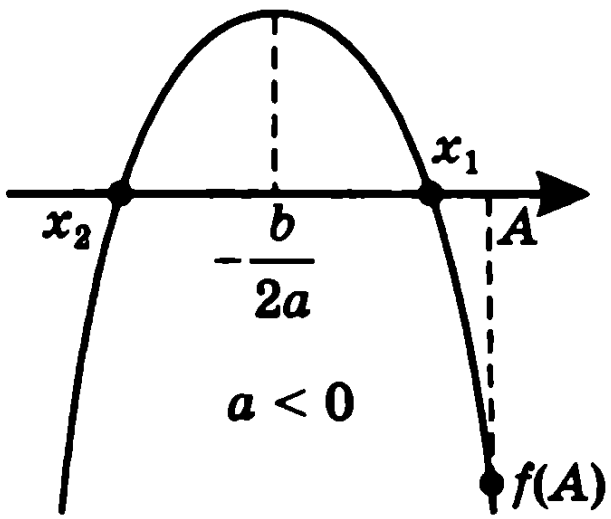




II. $\begin{cases} x_1 < A, \\ x_2 < A, \end{cases}$

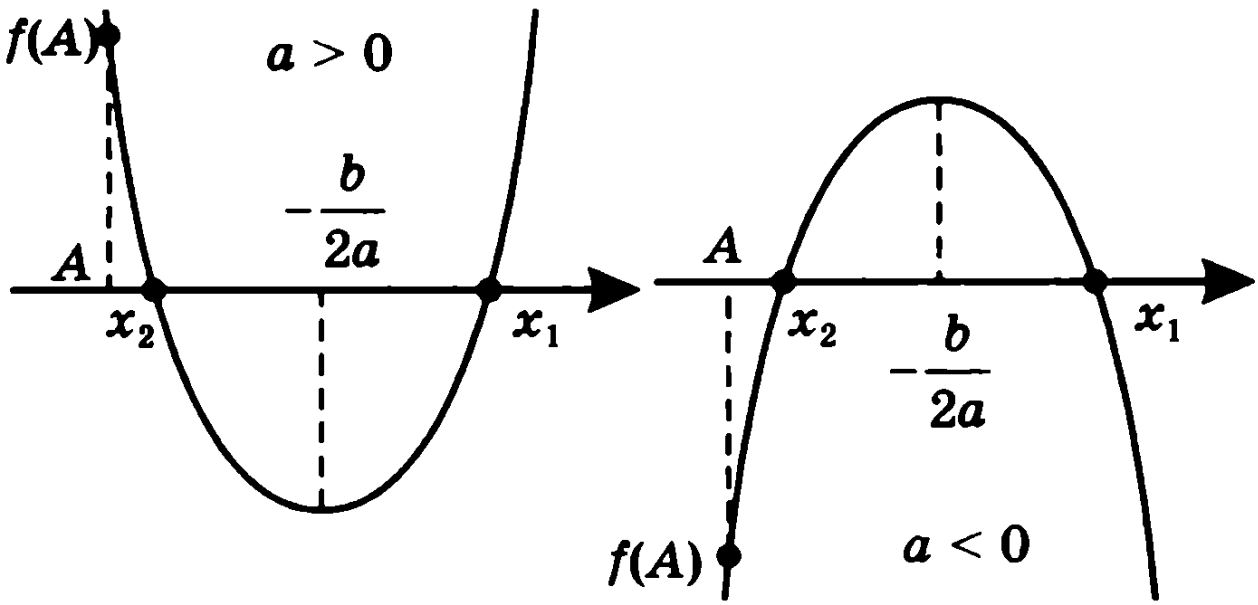
что возможно, если $\begin{cases} D > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < A, \\ a \cdot f(A) > 0. \end{cases}$





III. $\begin{cases} x_1 > A, \\ x_2 > A, \end{cases}$

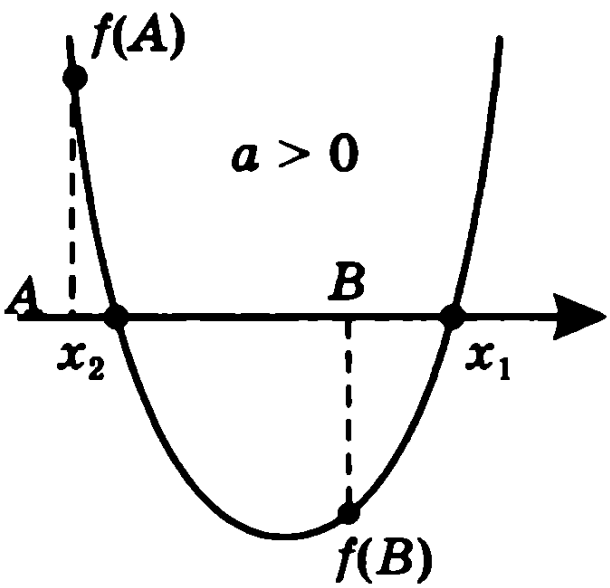
что возможно, если $\begin{cases} D > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > A, \\ a \cdot f(A) > 0. \end{cases}$

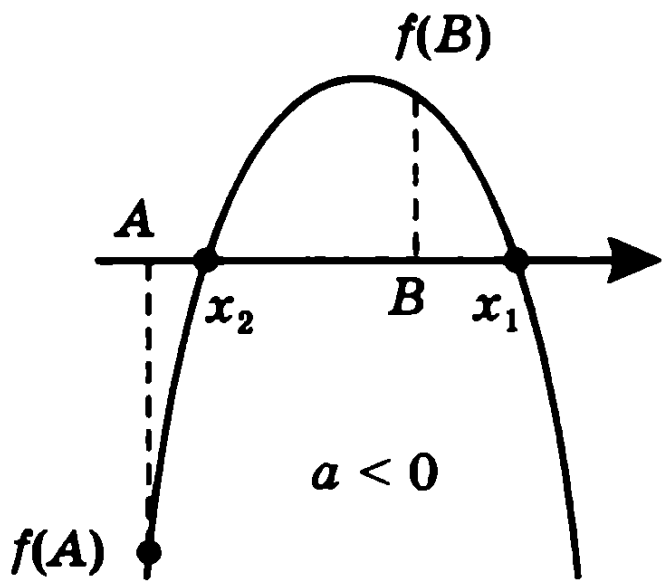


$$\text{IV.}\ \begin{cases} x_1 > x_2, \\ x_1 \in (A;B), \\ x_2 \notin (A;B), \end{cases}$$

что возможно, если $\begin{cases} f(A)\cdot f(B) < 0, \\ a\cdot f(A) > 0, \end{cases}$

или $\begin{cases} a\cdot f(B) > 0, \\ a\cdot f(A) > 0. \end{cases}$

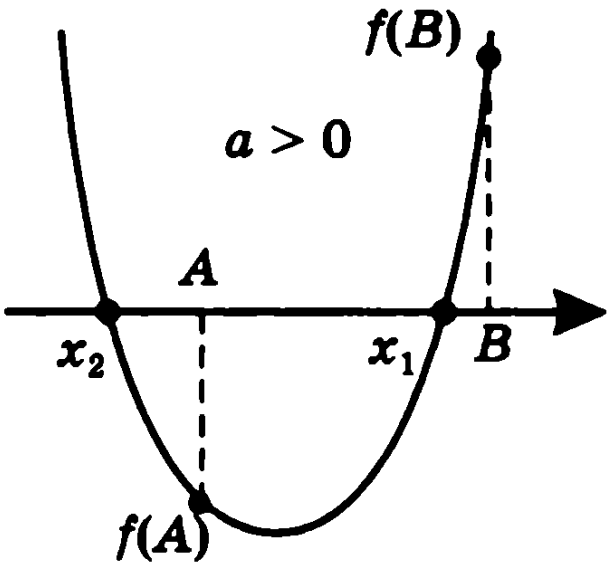


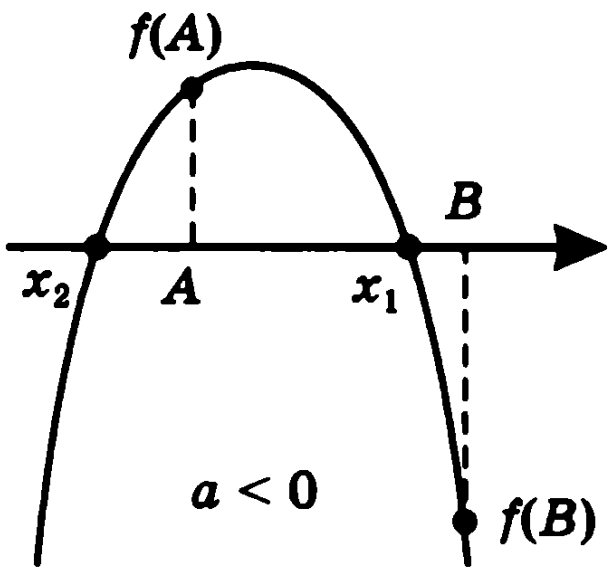


$$\text{V.}\ \begin{cases} x_1 > x_2, \\ x_1 \in (A;B), \\ x_2 \notin (A;B), \end{cases}$$

что возможно, если $\begin{cases} f(A)\cdot f(B) < 0, \\ a\cdot f(A) < 0, \end{cases}$

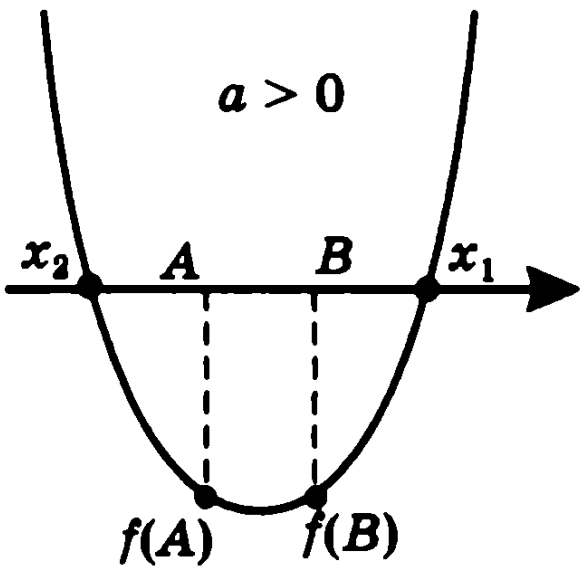
или $\begin{cases} a\cdot f(B) > 0, \\ a\cdot f(A) < 0. \end{cases}$

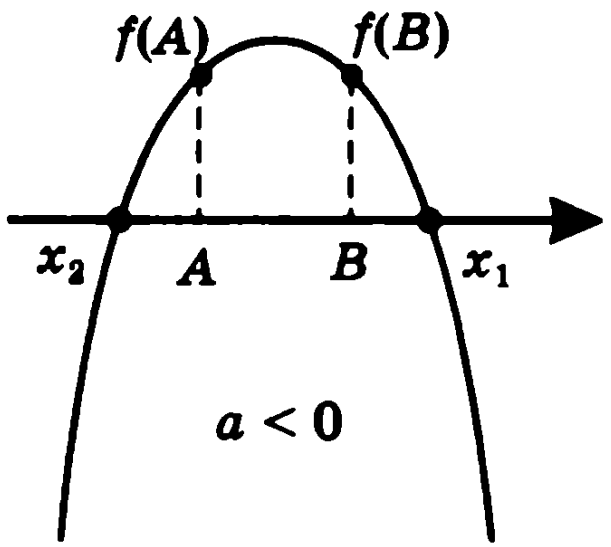




VI. $x_2 < A < B < x_1$,

что возможно, если $\begin{cases} a \cdot f(B) < 0, \\ a \cdot f(A) < 0. \end{cases}$

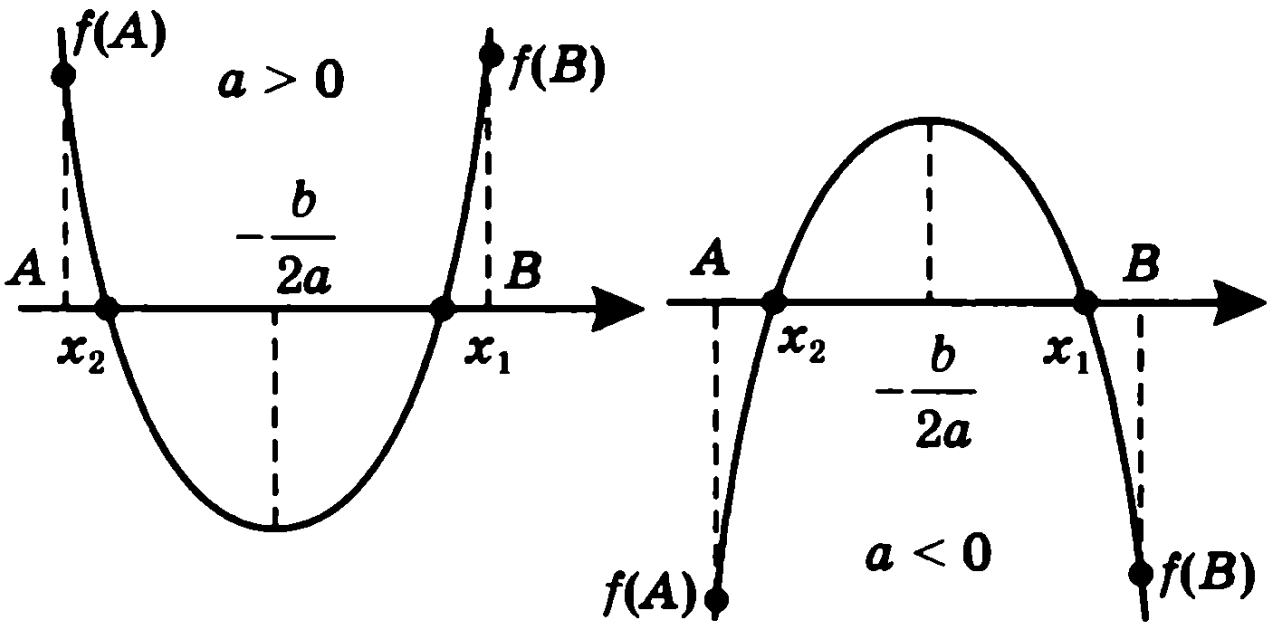




VII. $A < x_2 < x_1 < B$,

т. е. $(x_2; x_1) \subset (A; B)$, что возможно, если

$$\begin{cases} D > 0, \\ A < -\dfrac{b}{2a} < B, \\ a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) > 0. \end{cases}$$

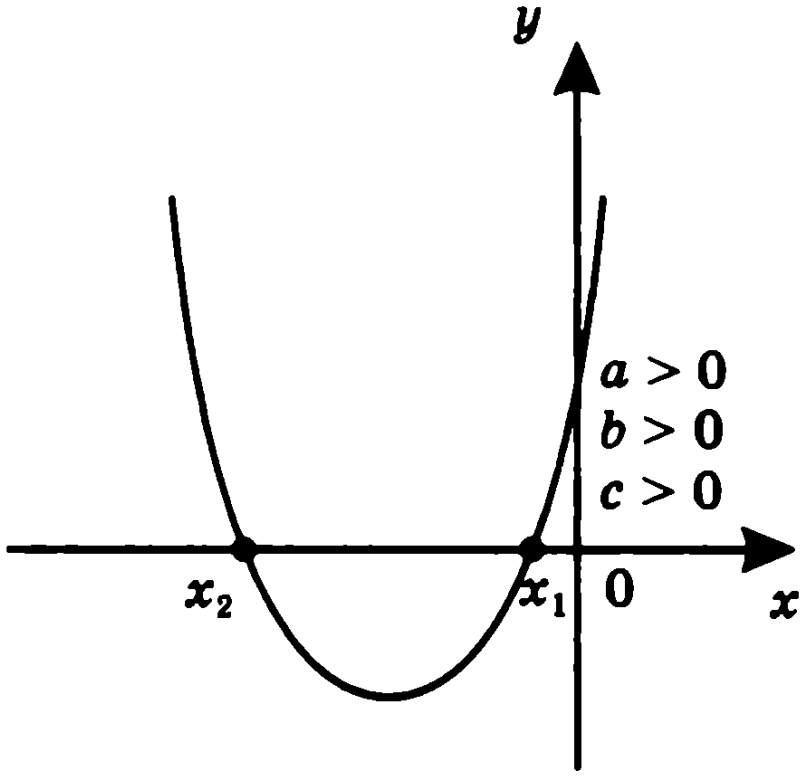


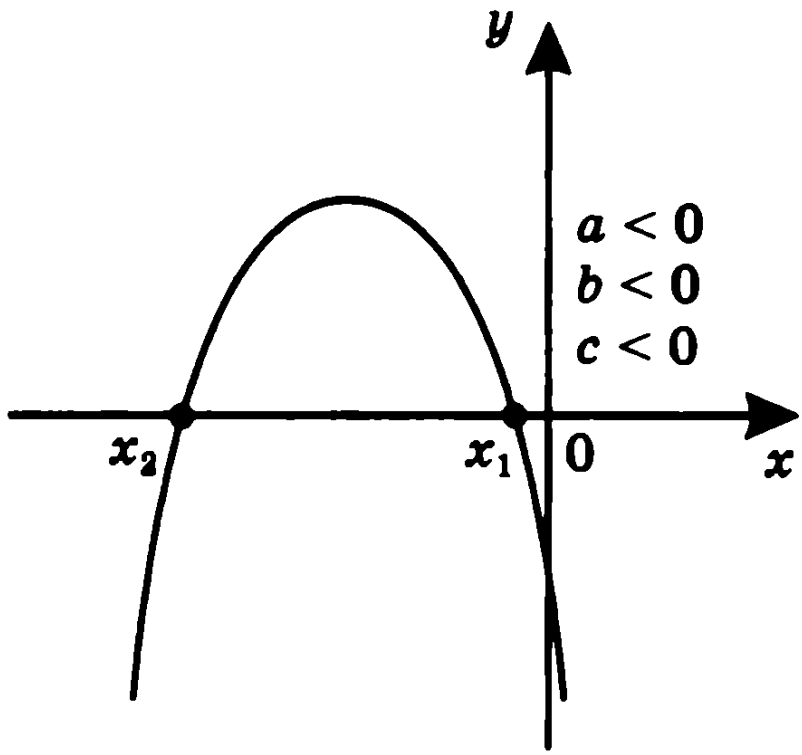
117. Применение теоремы Виета для определения корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$

Если $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, то

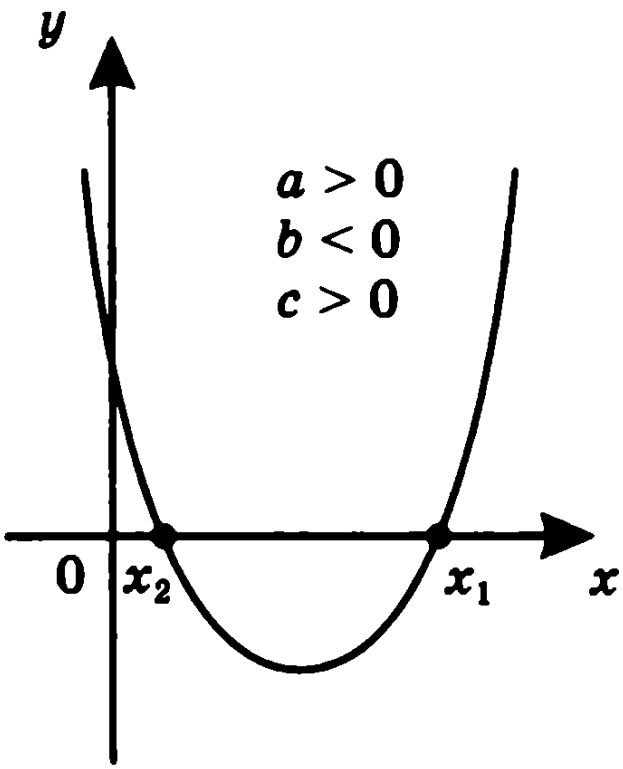
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

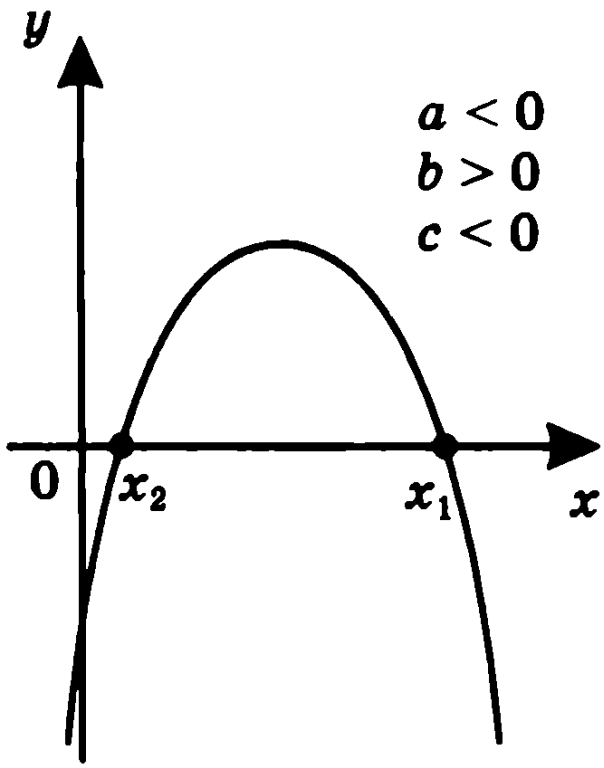
I. $\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 < 0, \end{cases}$ если $\begin{cases} D > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ \dfrac{b}{a} > 0. \end{cases}$


y
a > 0
b > 0
c > 0
x₂
x₁
0
x

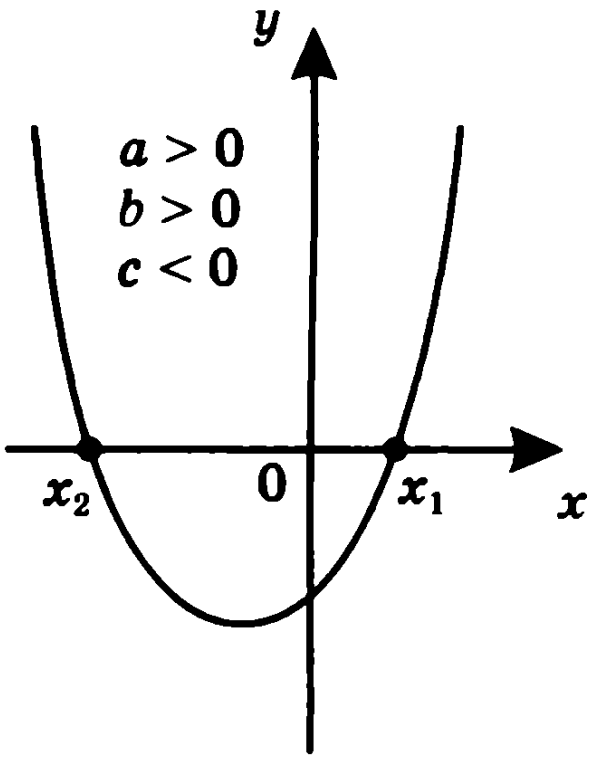

y
a < 0
b < 0
c < 0
x₂
x₁
0
x

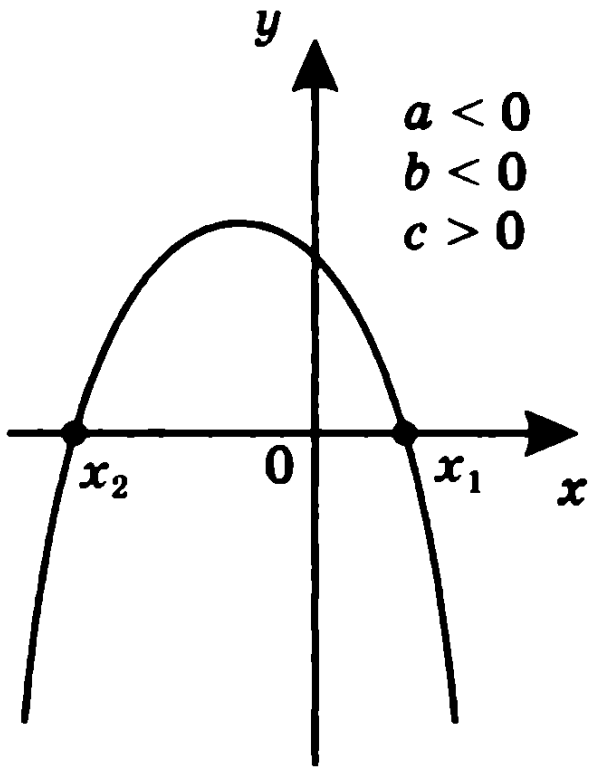
II. $\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0, \end{cases}$ если $\begin{cases} D > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ \dfrac{b}{a} < 0. \end{cases}$



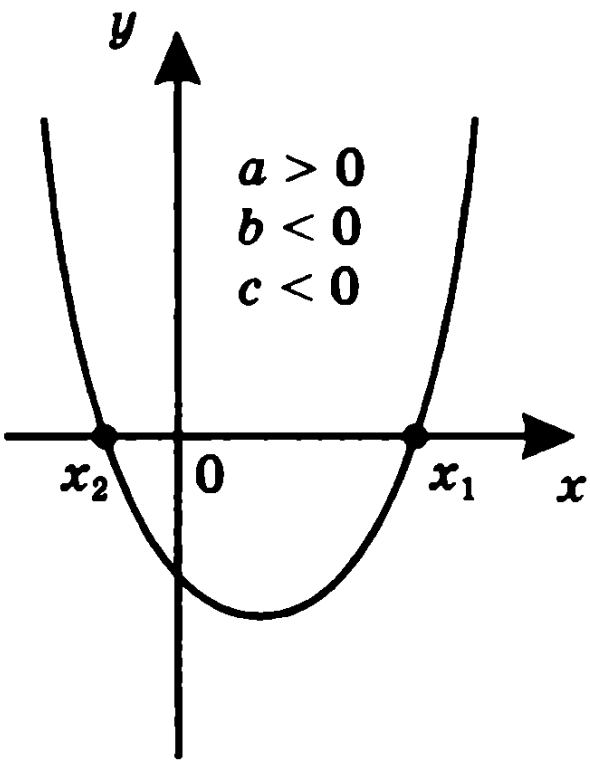


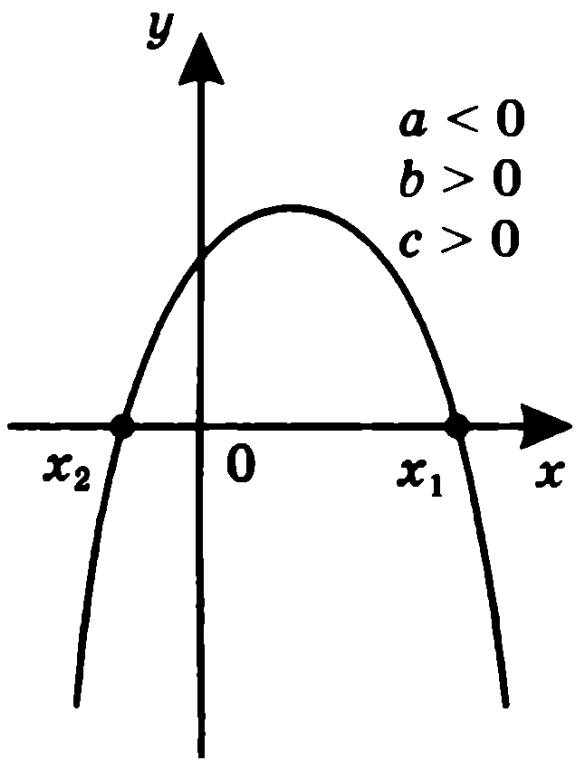
III. $\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 < 0, \\ |x_1| < |x_2|, \end{cases}$ если $\begin{cases} \dfrac{c}{a} < 0, \\ \dfrac{b}{a} > 0. \end{cases}$





IV. $\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 < 0, \\ |x_1| > |x_2|, \end{cases}$ если $\begin{cases} \dfrac{c}{a} < 0, \\ \dfrac{b}{a} < 0. \end{cases}$





Глава 4

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ ГЕОМЕТРИИ VII–XI КЛАССОВ

Часть 1. ПЛАНИМЕТРИЯ

118. Углы

Углом называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

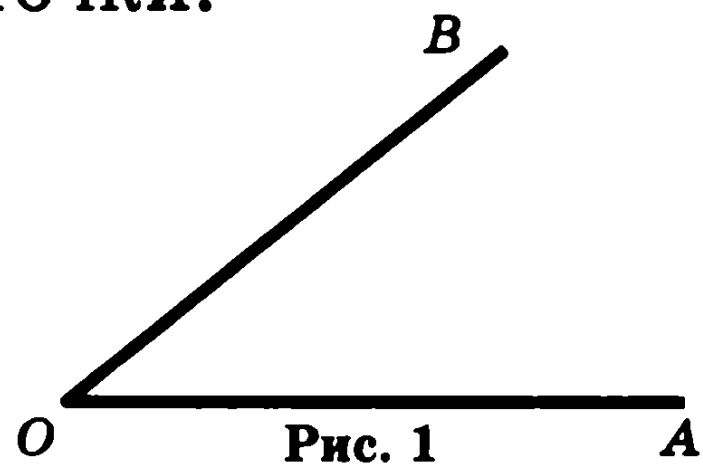


Рис. 1

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

Угол в 90° называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

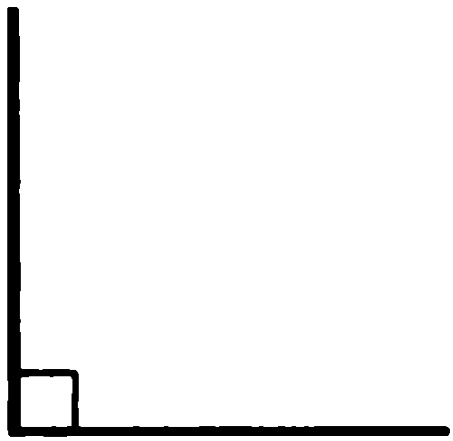


Рис. 2

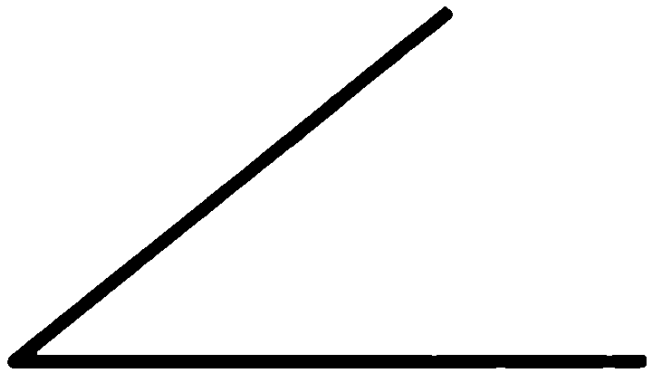


Рис. 3

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

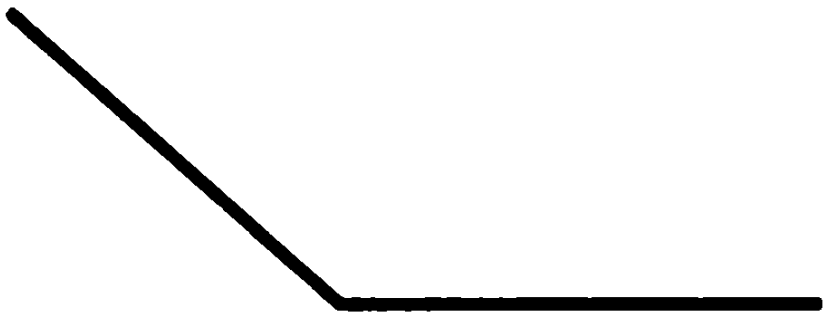


Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

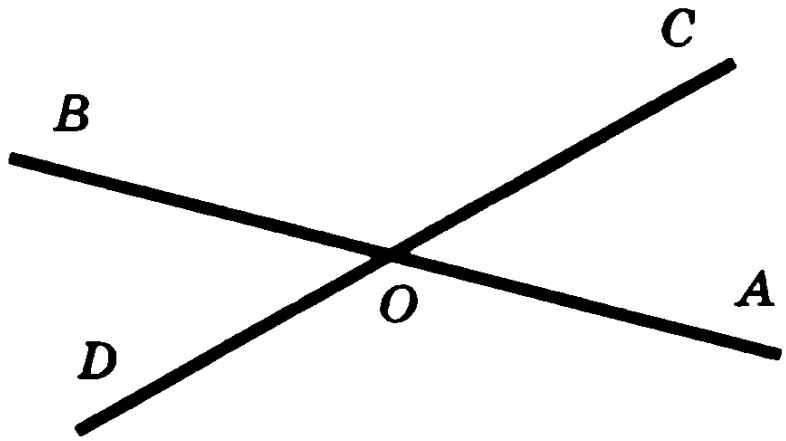


Рис. 5

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

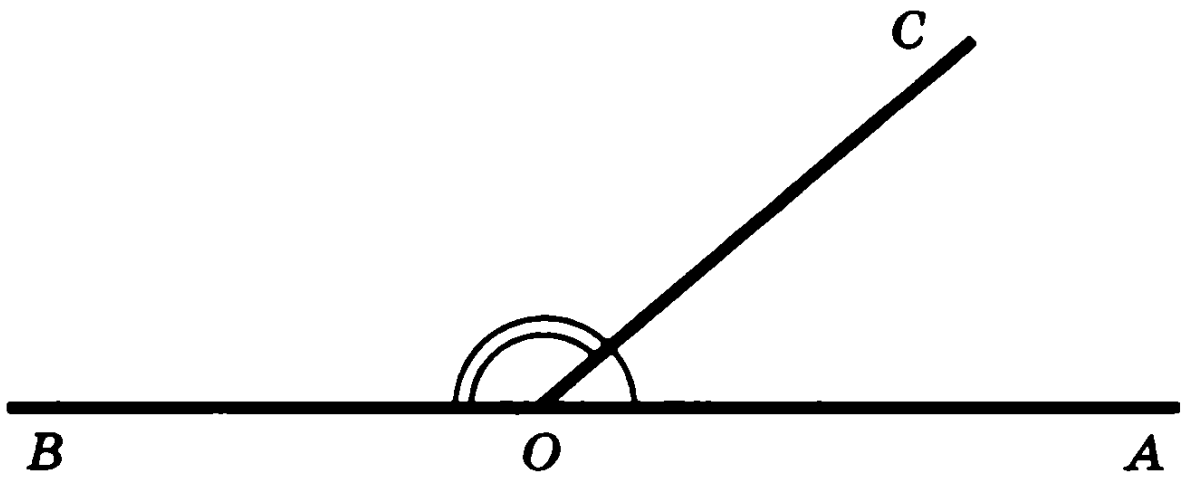


Рис. 6

Сумма смежных углов равна 180°.

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

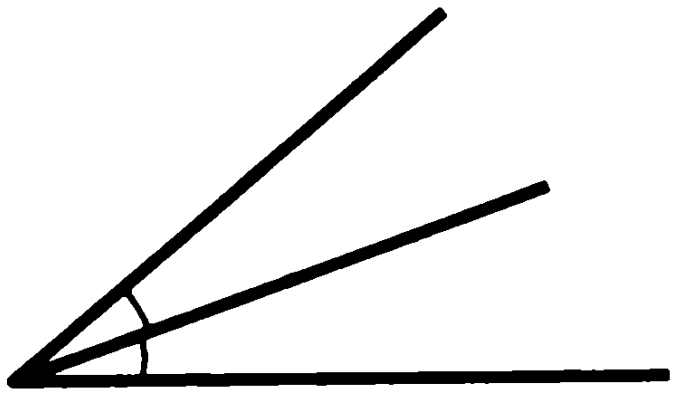


Рис. 7

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

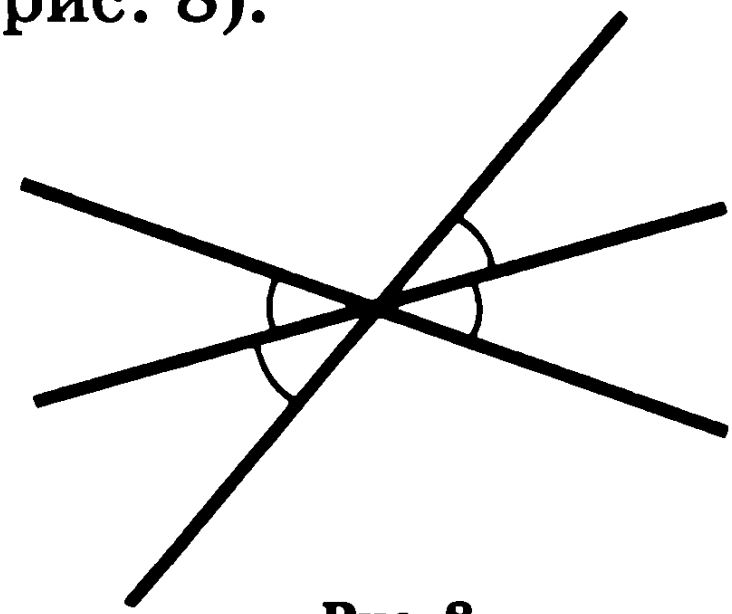


Рис. 8

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

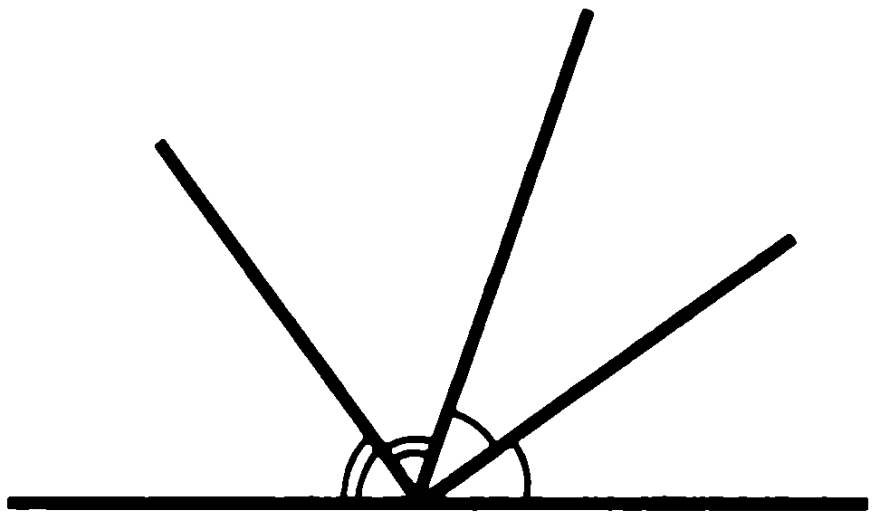


Рис. 9

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

- **соответственные углы:**

  $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$,
  $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;

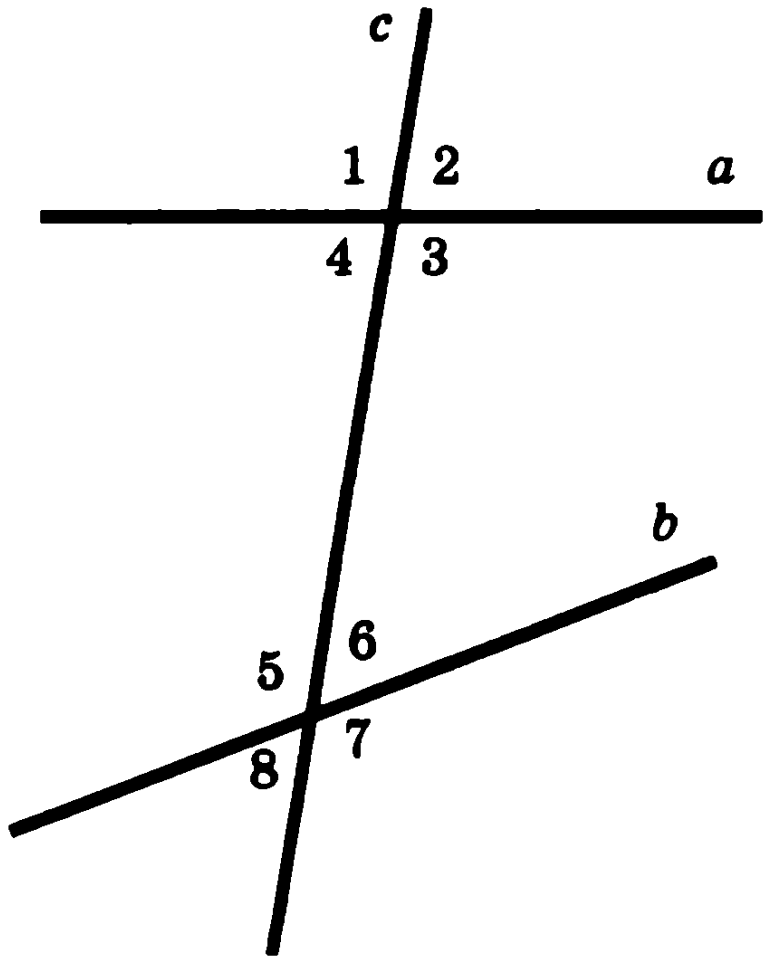


Рис. 10

• **внутренние накрест лежащие:**

$\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;

• **внешние накрест лежащие:**

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;

• **внутренние односторонние:**

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;

• **внешние односторонние:**

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

119. Многоугольник

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ — углы многоугольника; AB, BC, CD и т. д. — стороны многоугольника; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + ... + EA$ — периметр многоугольника.

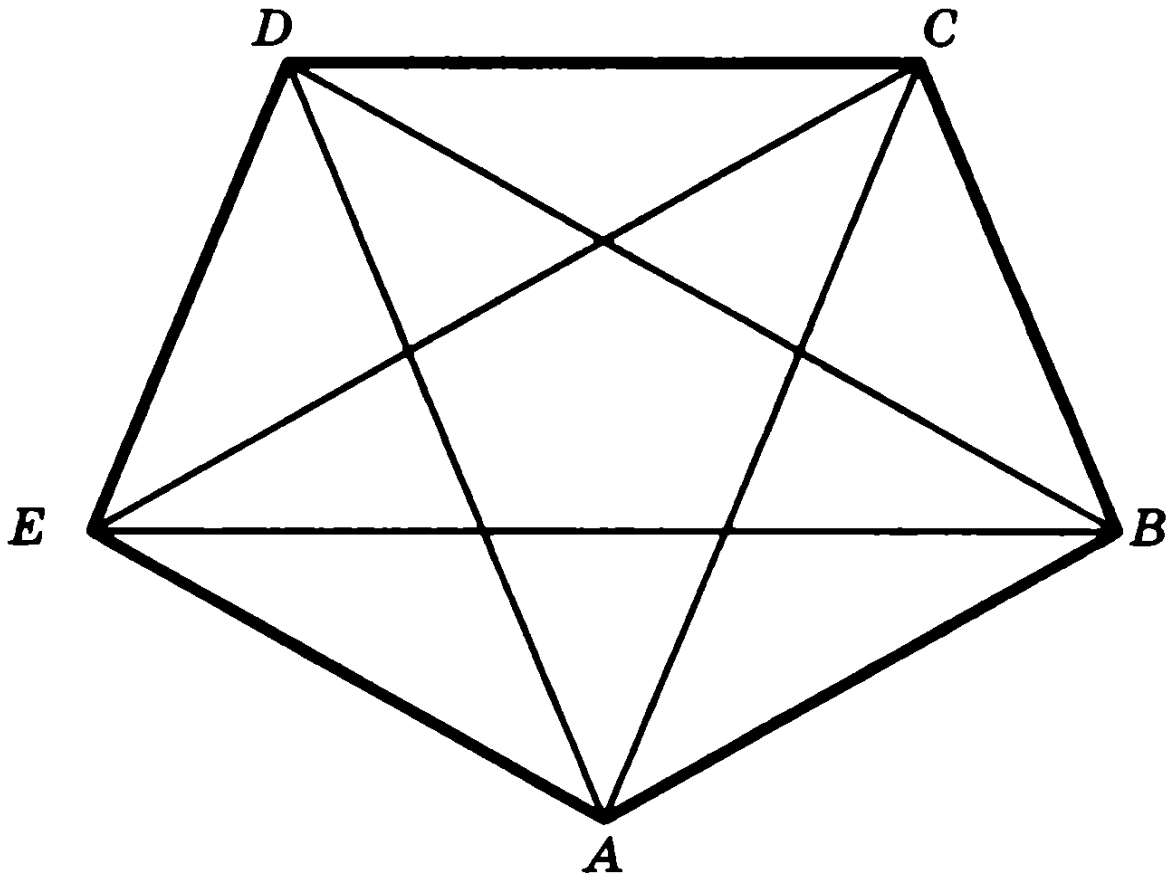


Рис. 11

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

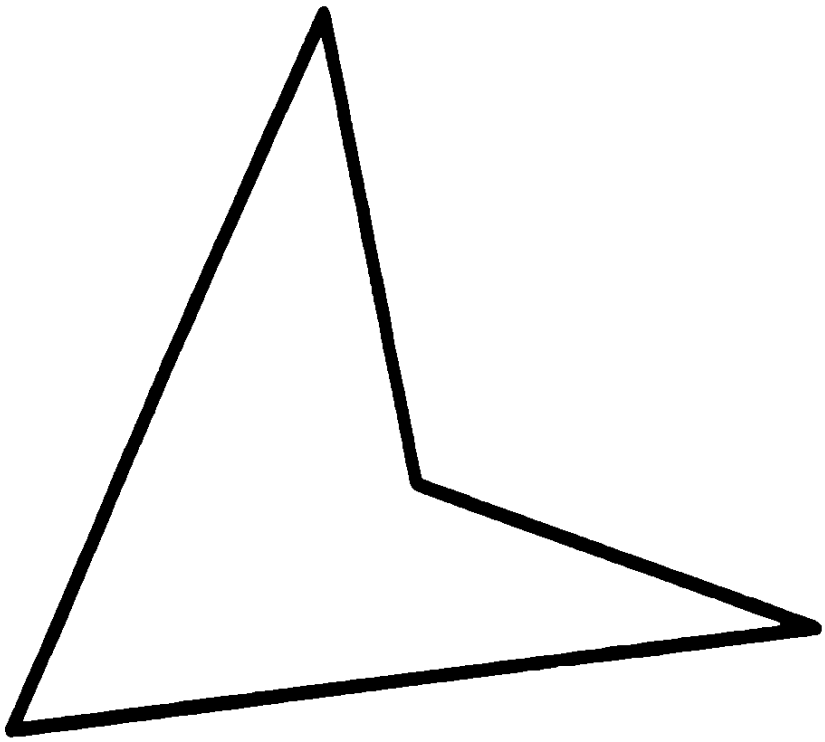


Рис. 12

Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного n-угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.
2. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.
3. В выпуклом n-угольнике из каждой вершины мож-

но провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n-угольник на $(n - 2)$ треугольников.

4. В выпуклом n-угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2} n(n - 3)$.

120. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и все стороны, называется **правильным**.

Свойства:

1. Каждый угол правильного n-угольника

$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

2. Около правильного n-угольника можно описать окружность, и притом только одну.
3. В правильный n-угольник можно вписать окружность, и притом только одну.
4. Окружность, вписанная в правильный n-угольник, касается всех сторон n-угольника в их серединах.
5. Центр окружности, описанной около правильного n-угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n-угольник.
6. Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R,

$$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

7. Длина стороны правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r,

$$a = 2r \operatorname{tg} \frac{180°}{n}.$$

121. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

Точки A, B, C — **вершины** ΔABC.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны**, $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — углы.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c, \quad BC = a, \quad AC = b.$$

$P = a + b + c$ — периметр треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

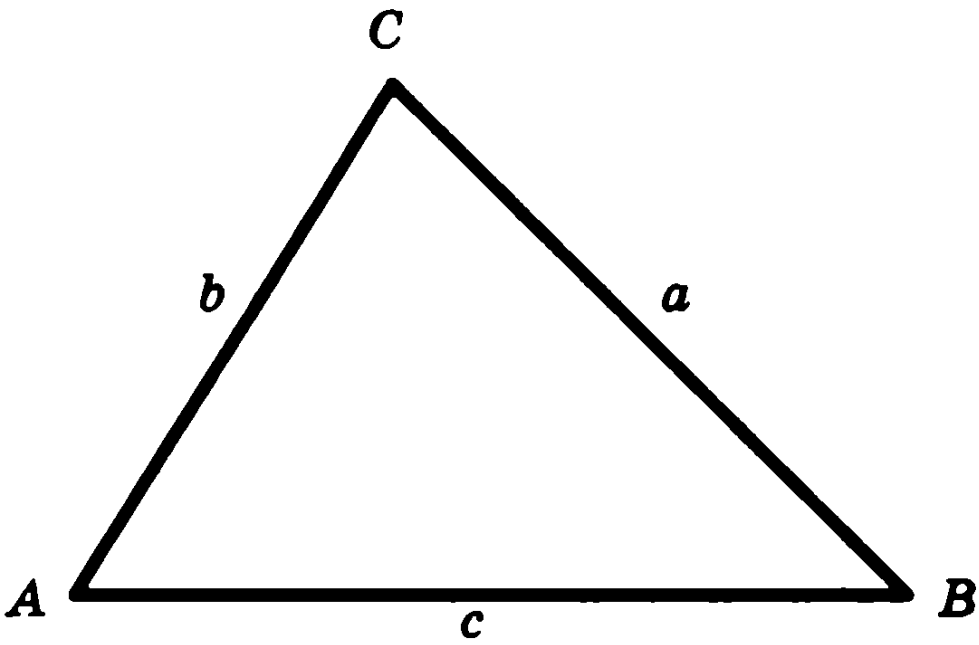


Рис. 13

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против

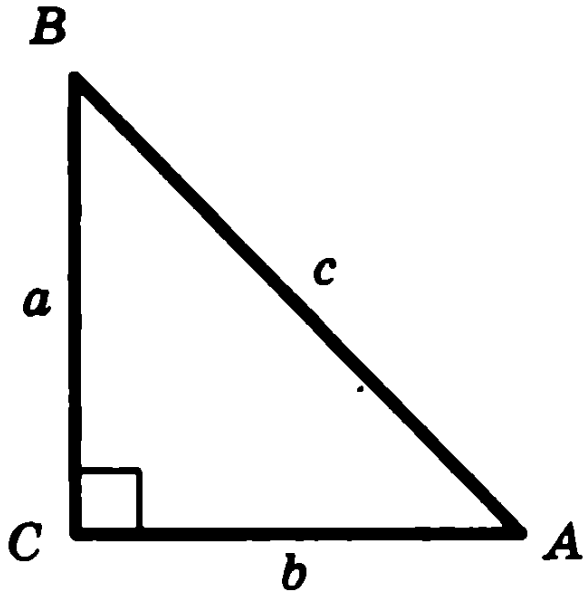


Рис. 14

прямого угла, называется **гипотенузой** (*c*).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

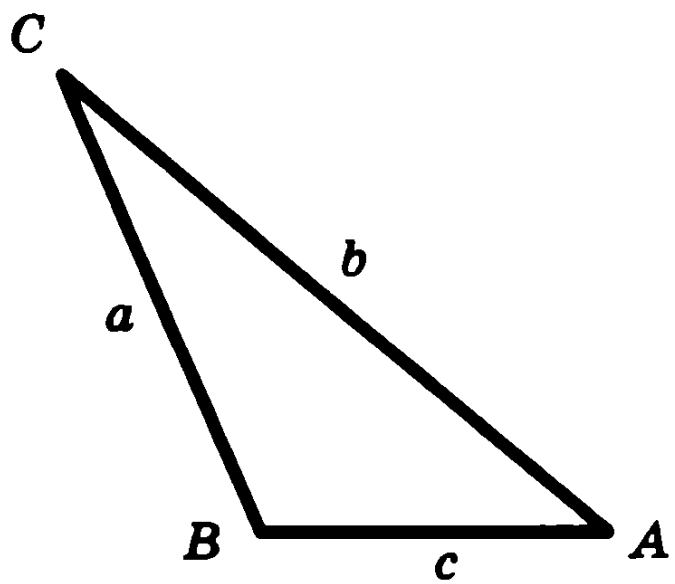


Рис. 15

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

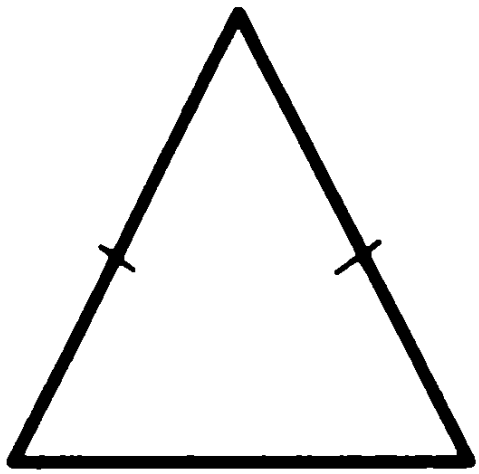


Рис. 16

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

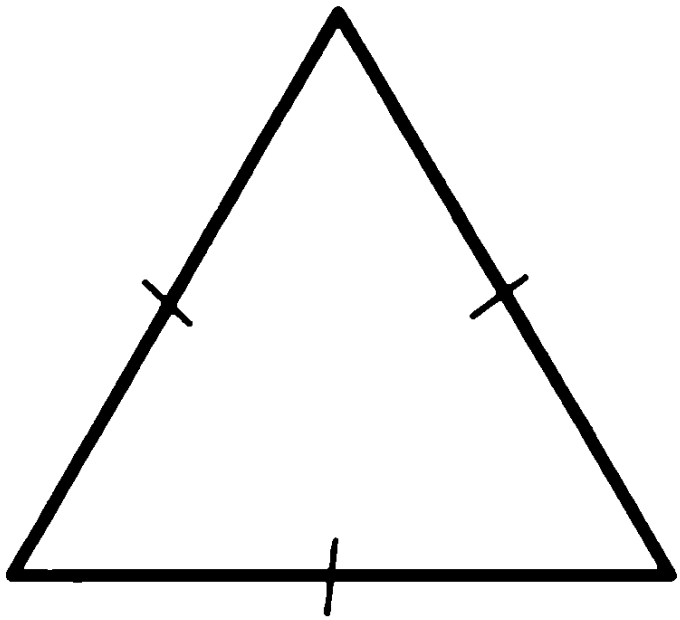


Рис. 17

Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.
4. Медиана, проведенная к основанию, является одновре-

менно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

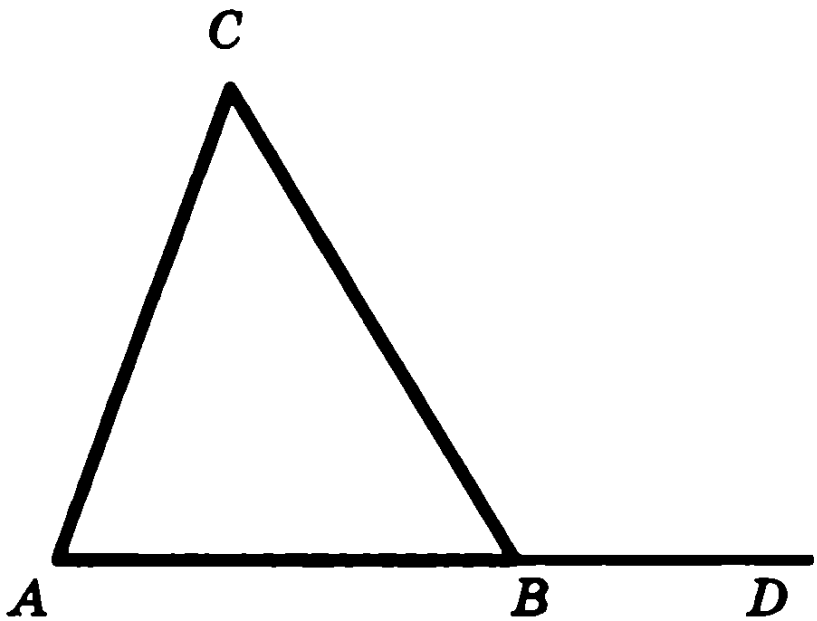


Рис. 18

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18):

$$\angle CBD = \angle A + \angle C.$$

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется средней линией треугольника (рис. 19).

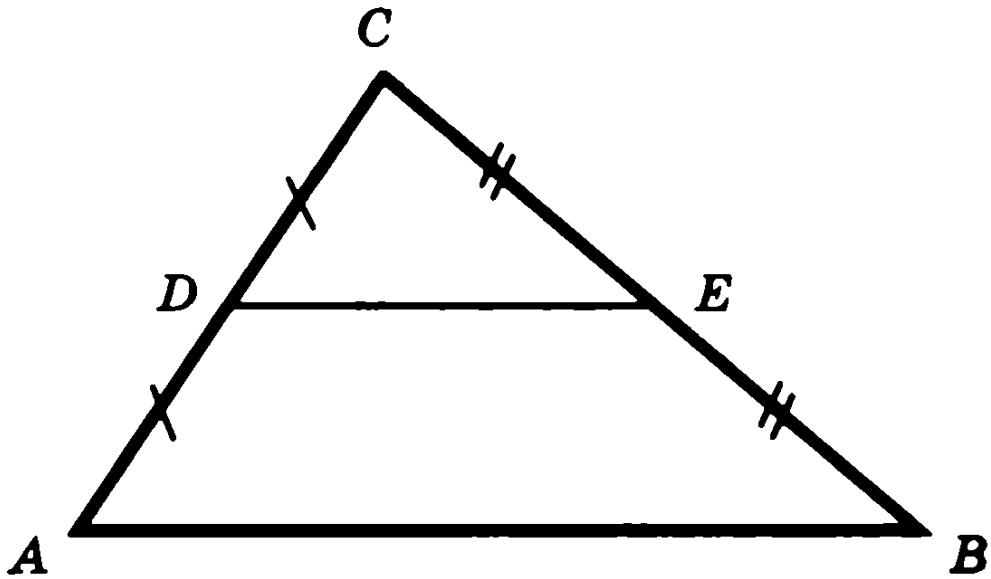


Рис. 19

122. Признаки равенства треугольников

I признак (признак равенства по двум сторонам и углу между ними):

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1.$

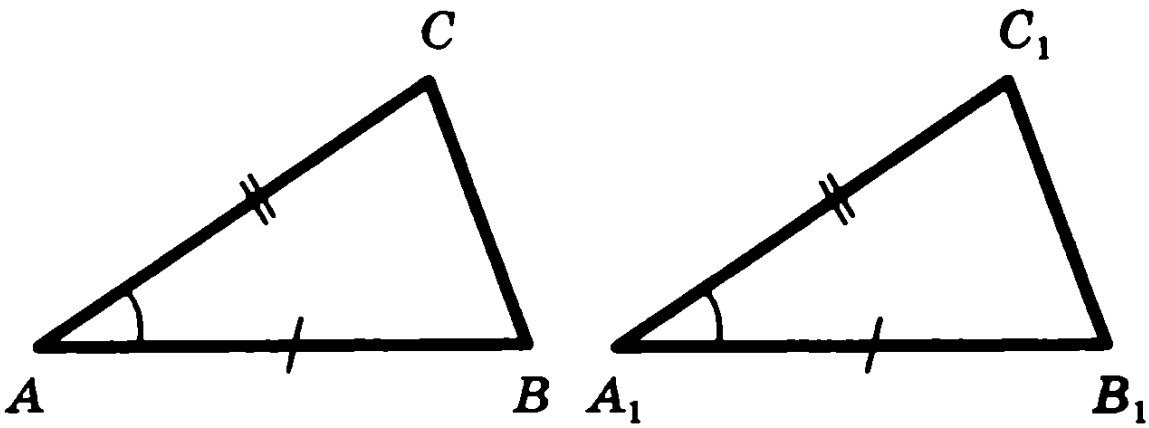


Рис. 20

II признак (признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам):

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

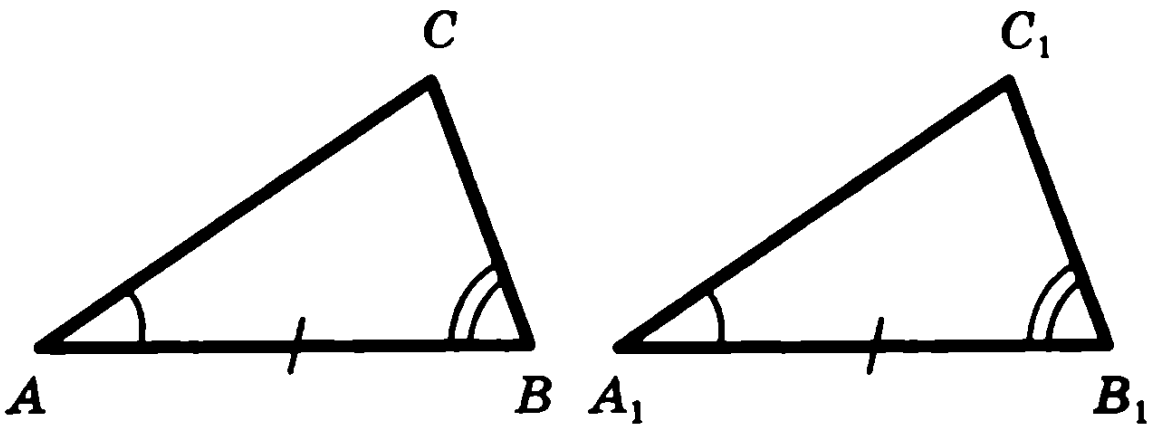


Рис. 21

III признак (признак равенства по трем сторонам):

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1,\ AC = A_1C_1.$

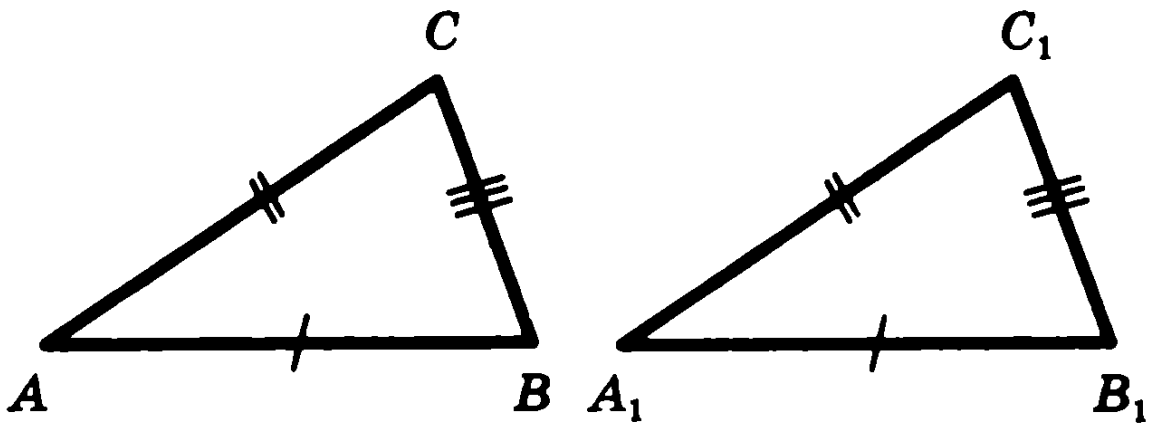


Рис. 22

123. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$a < b + c,\quad b < a + c,\quad c < a + b.$

124. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный:

в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

125. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

1) Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90^\circ.$$

2) Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (рис. 24).

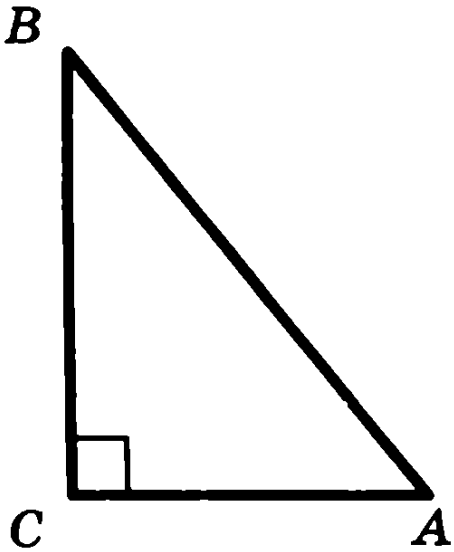


Рис. 23

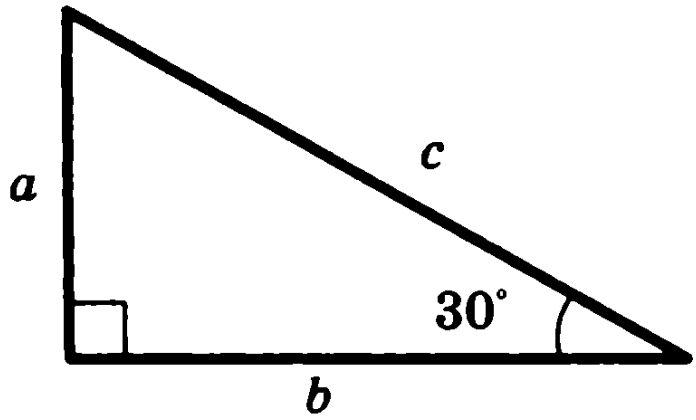


Рис. 24

$$a = \frac{1}{2}c.$$

3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

126. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. *Если катеты* одного прямоугольного треугольника со-

ответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

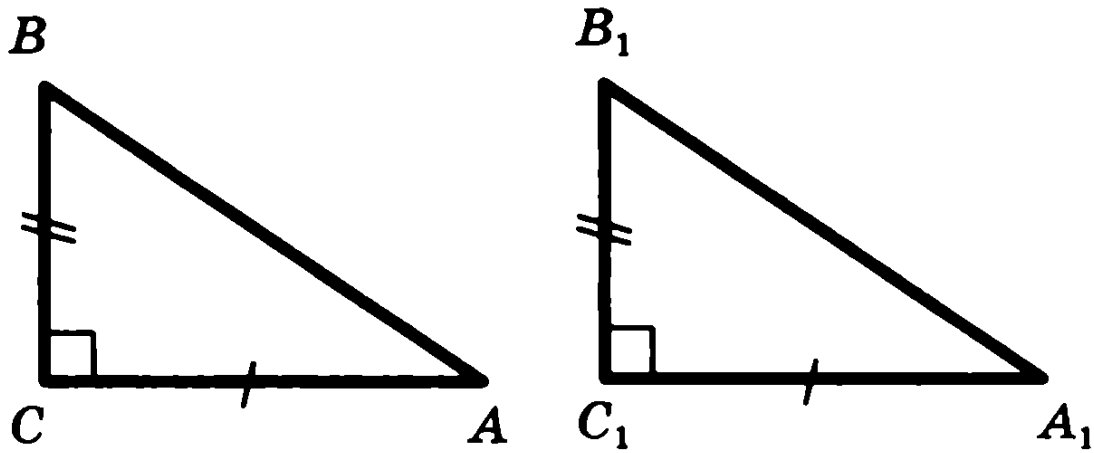


Рис. 25

2. *Если катет и прилежащий к нему острый угол* одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

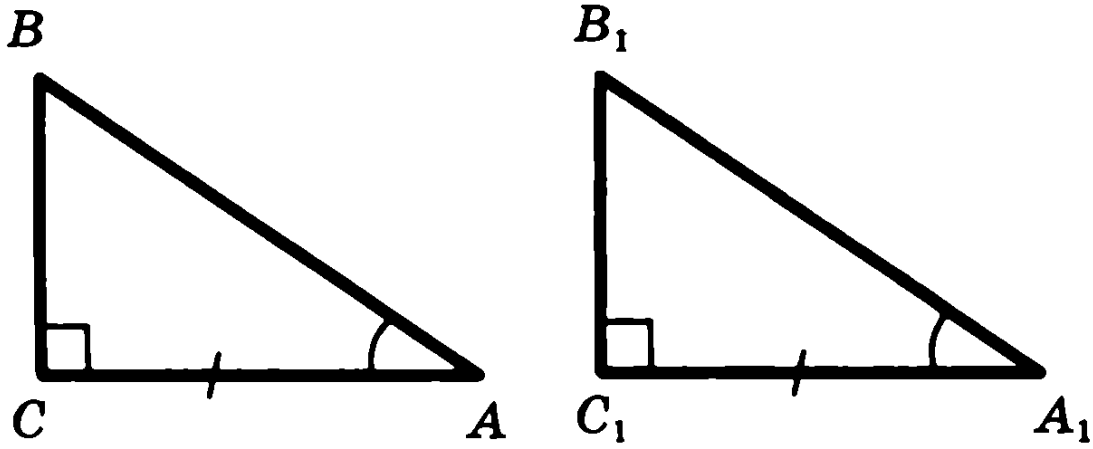


Рис. 26

3. *Если гипотенуза и острый угол* одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

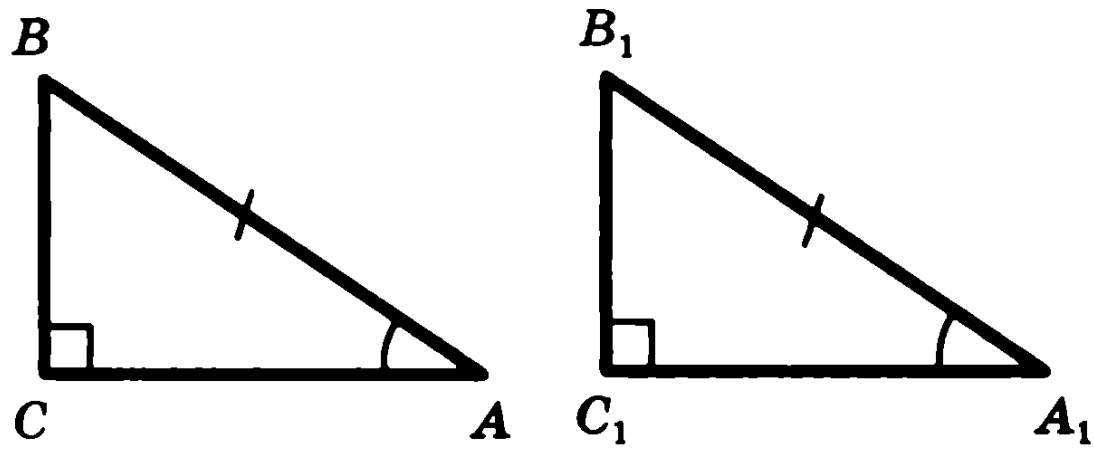


Рис. 27

4. *Если гипотенуза и катет* одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.

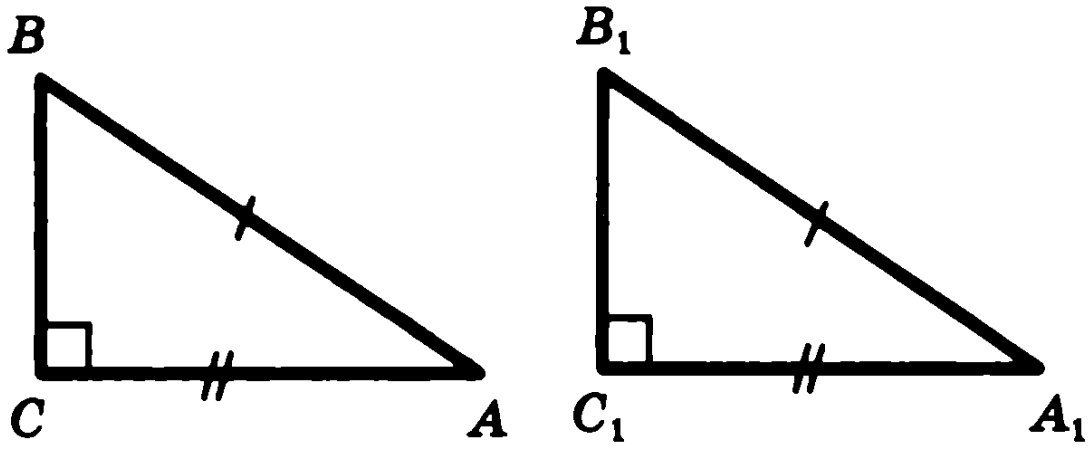


Рис. 28

127. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

1) точка пересечения медиан;

2) точка пересечения биссектрис;
3) точка пересечения высот (или их продолжений);
4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника.**

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противолежащую сторону или на ее продолжение.

В тупоугольном треугольнике (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри треугольника.

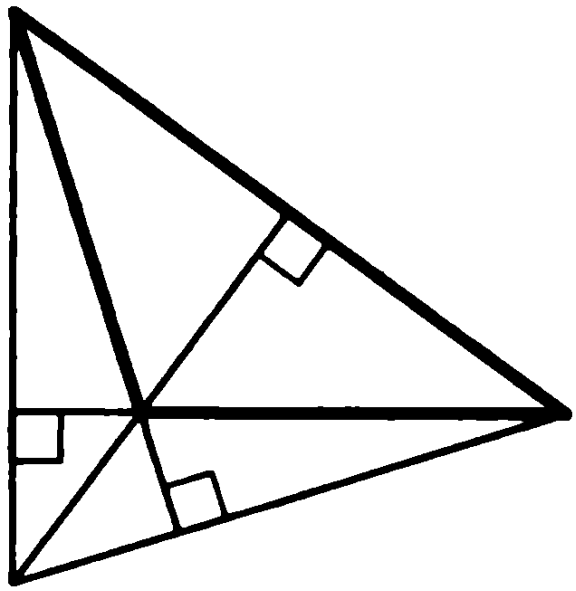


Рис. 29

В остроугольном треугольнике (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

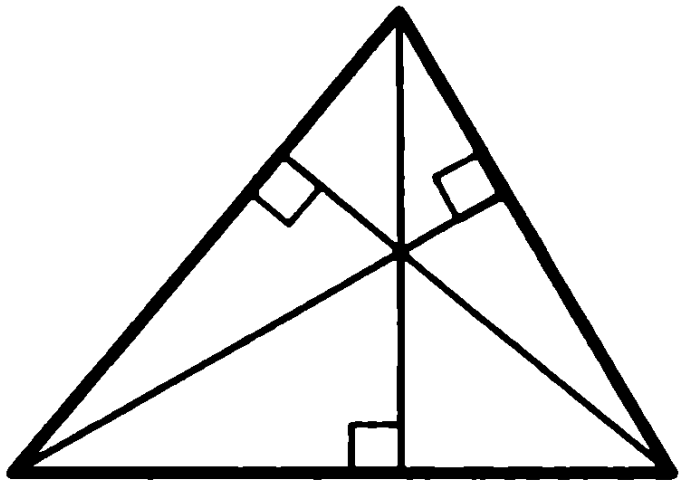


Рис. 30

В прямоугольном треугольнике катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

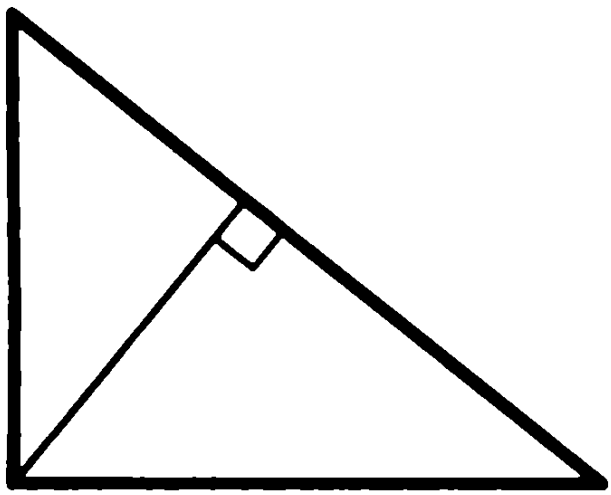


Рис. 31

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром**. В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В прямоугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вер-

шину треугольника с серединой противоположной стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника** (рис. 32).

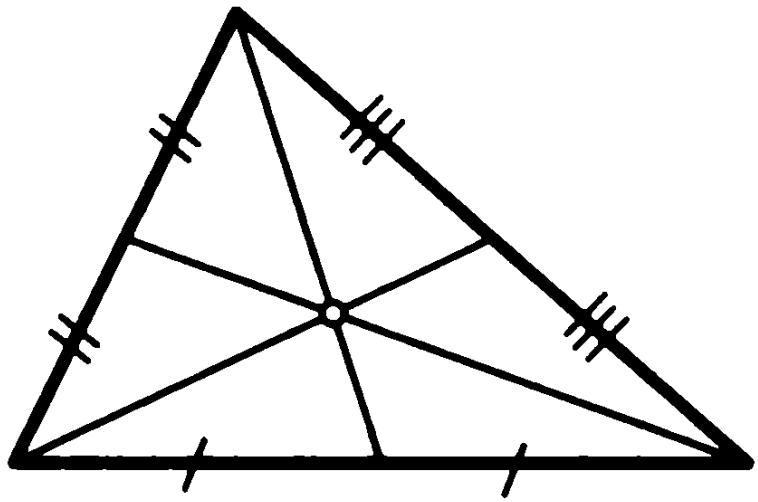


Рис. 32

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противолежащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

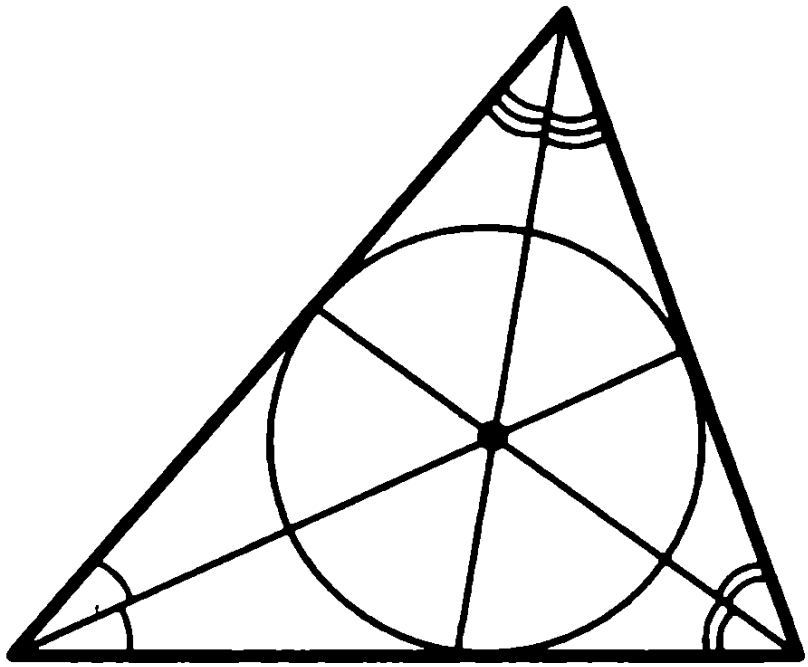


Рис. 33

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34–36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности.**

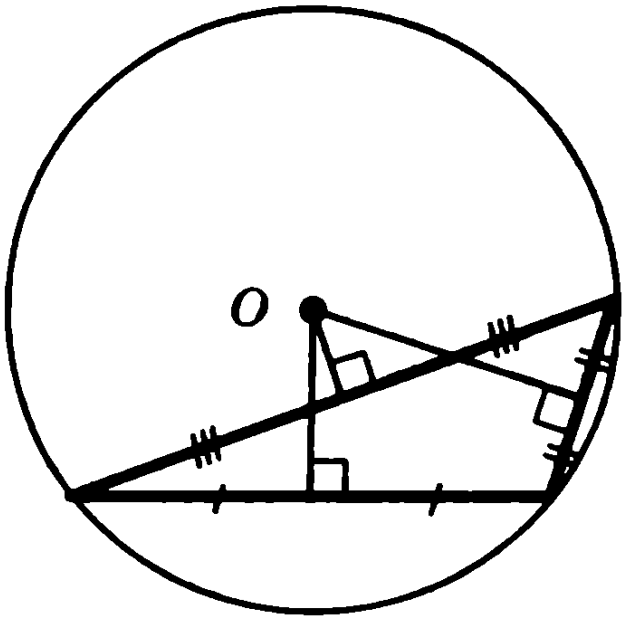


Рис. 34

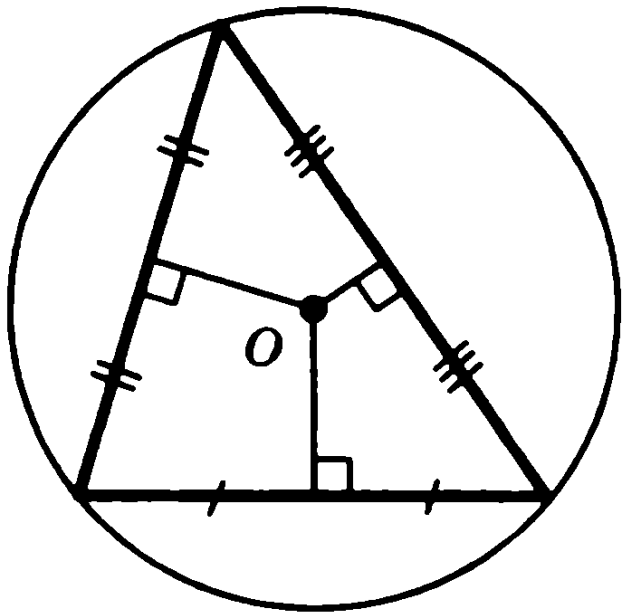


Рис. 35

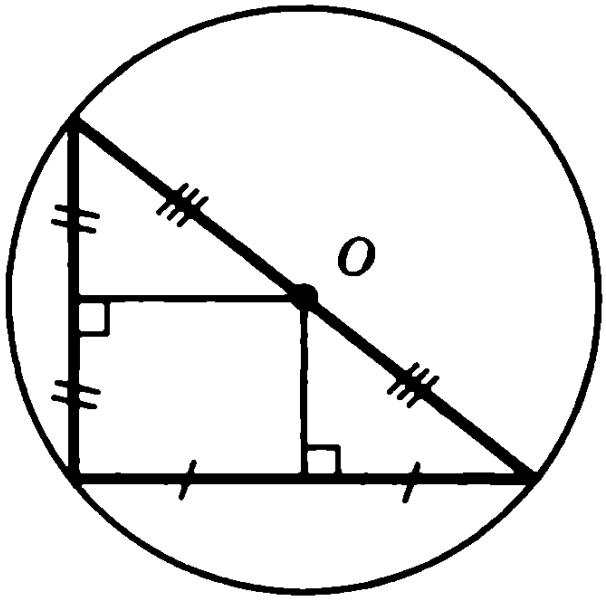


Рис. 36

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит вне треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине** гипотенузы (рис. 36).

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной

окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

128. Произвольный треугольник

Свойство биссектрисы (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

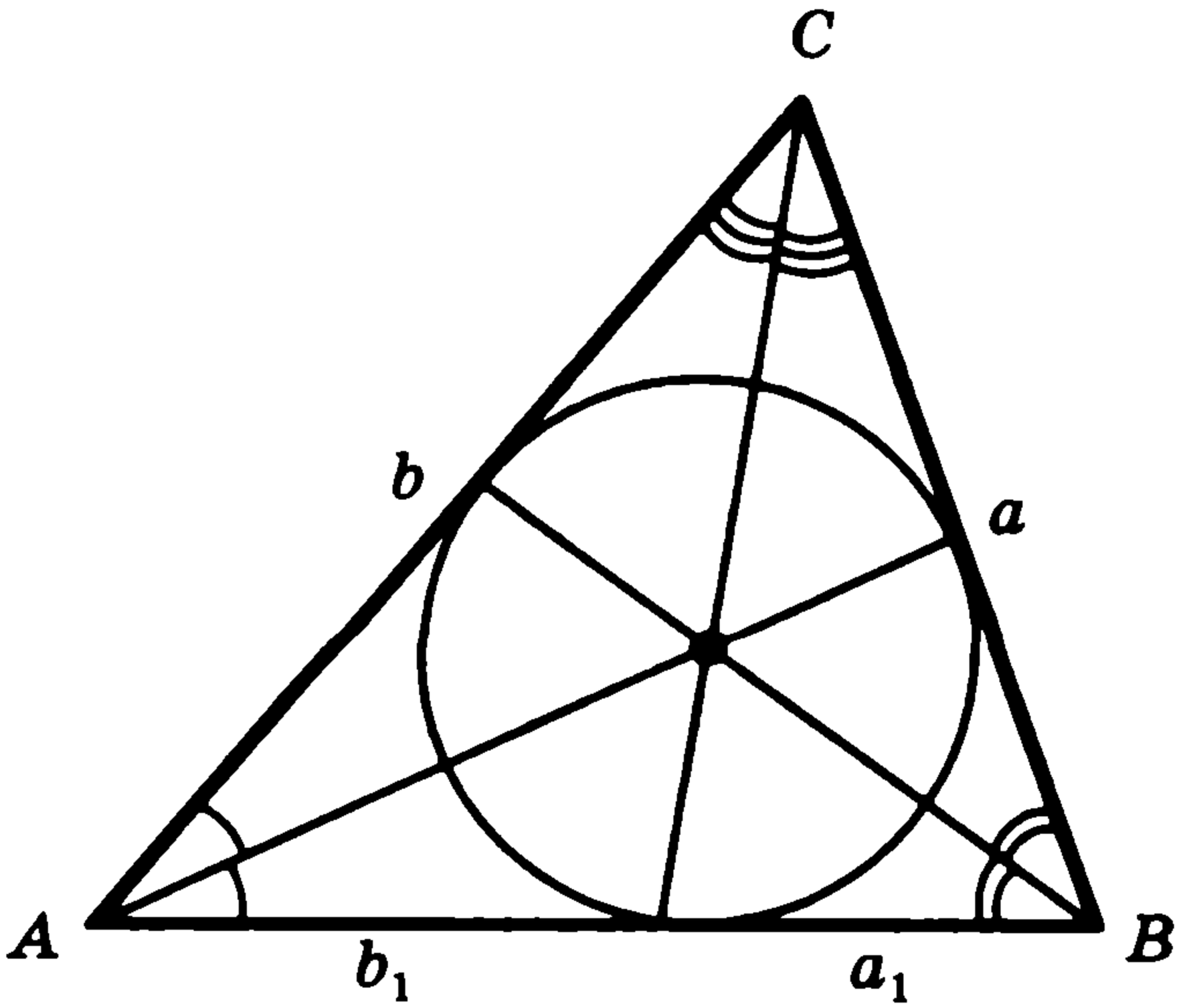


Рис. 37

129. Теорема Менелая

Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC ΔABC за

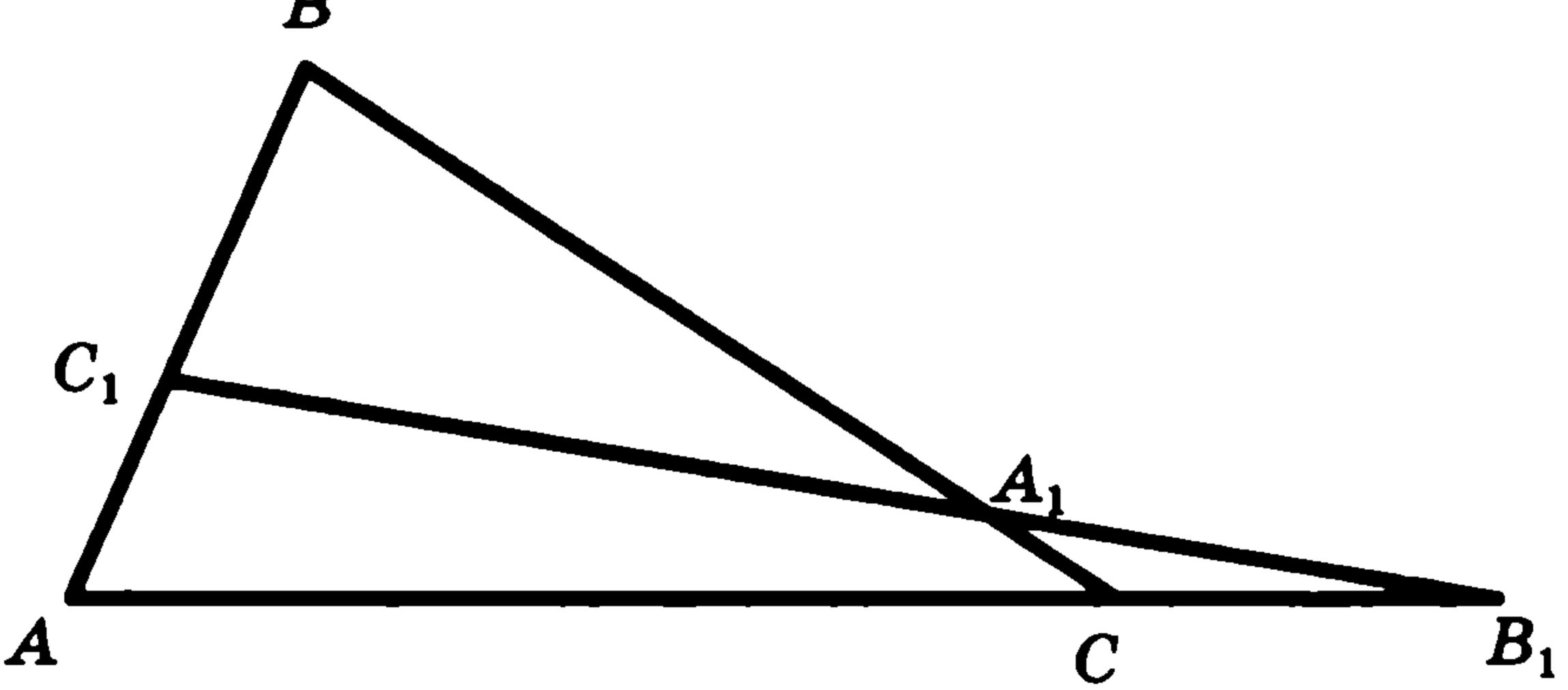


Рис. 39

точку C отмечены соответственно точки A_1, C_1 и B_1, лежащие на одной прямой (рис. 39), то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

130. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

131. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

132. Подобные треугольники

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 40).

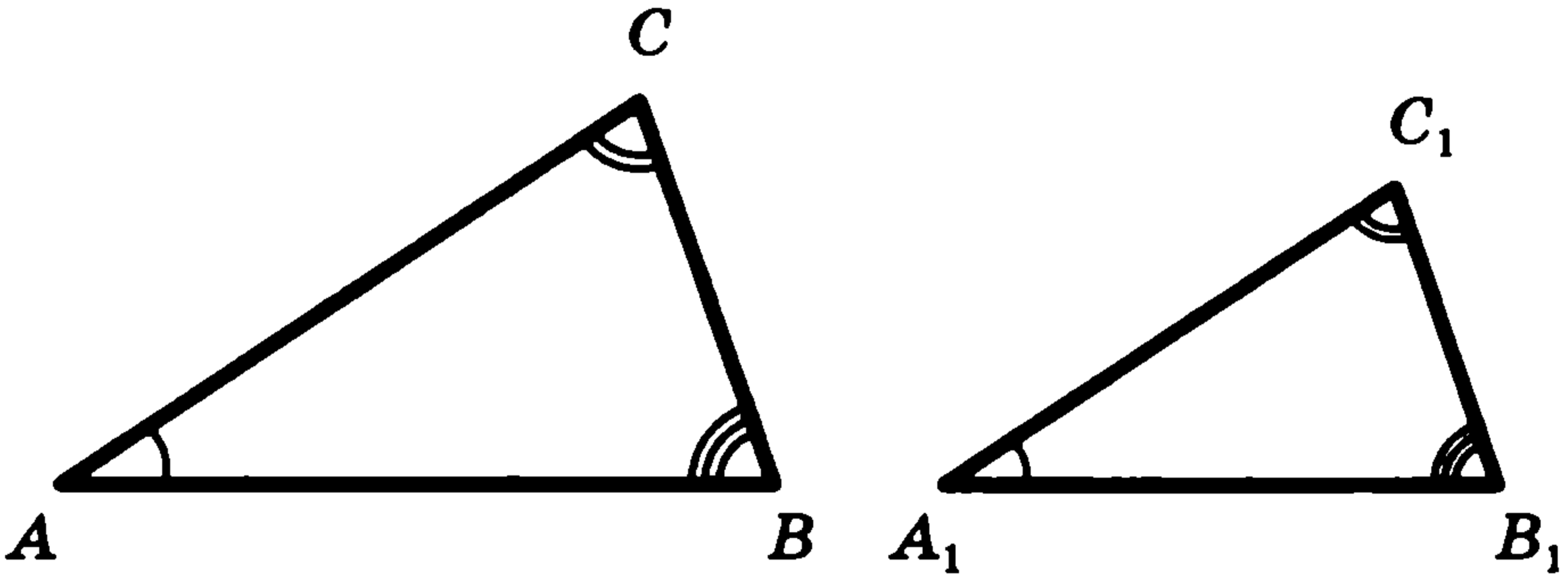


Рис. 40

AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2, т. е. $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2$.

133. Признаки подобия треугольников

I признак. *Если два угла* одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 41).

$$\angle A = \angle A_1, \ \angle B = \angle B_1.$$

II признак. *Если две стороны* одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого *и*

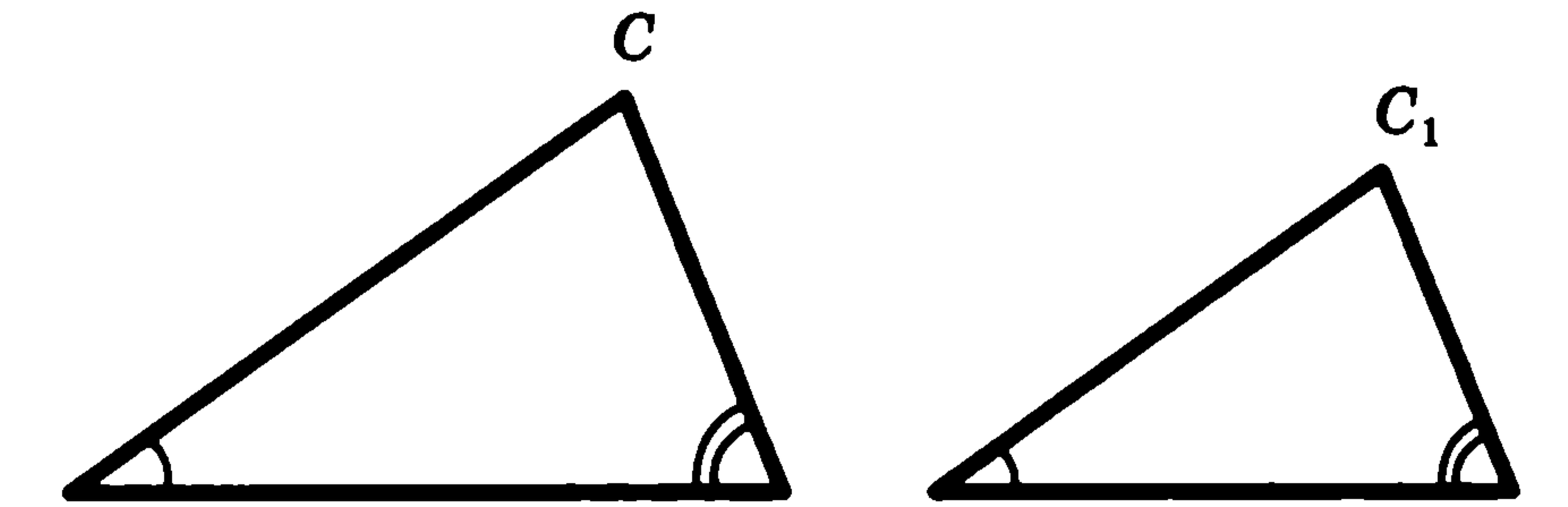


Рис. 41

углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = \angle A_1, \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

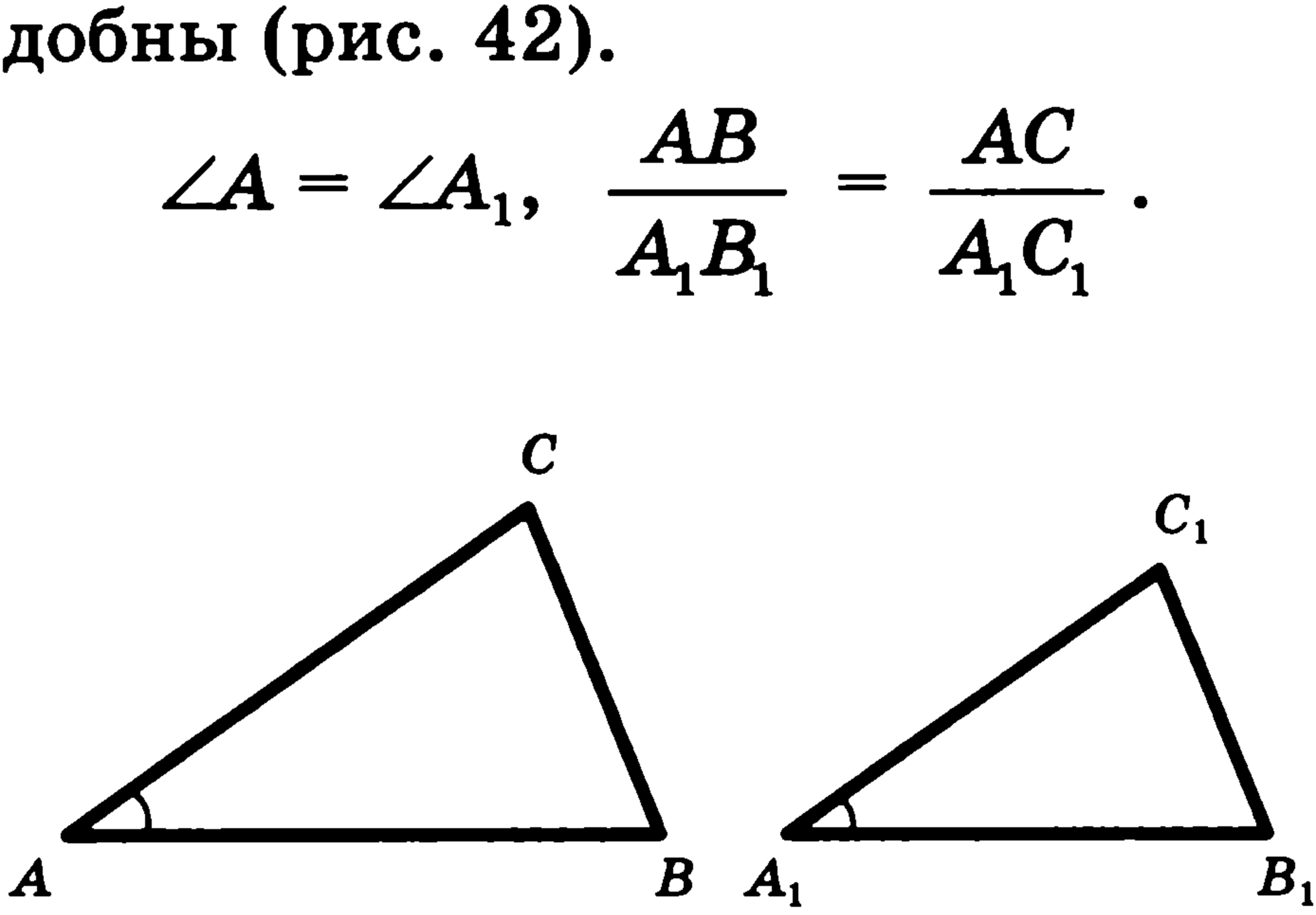


Рис. 42

III признак. *Если три стороны* одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

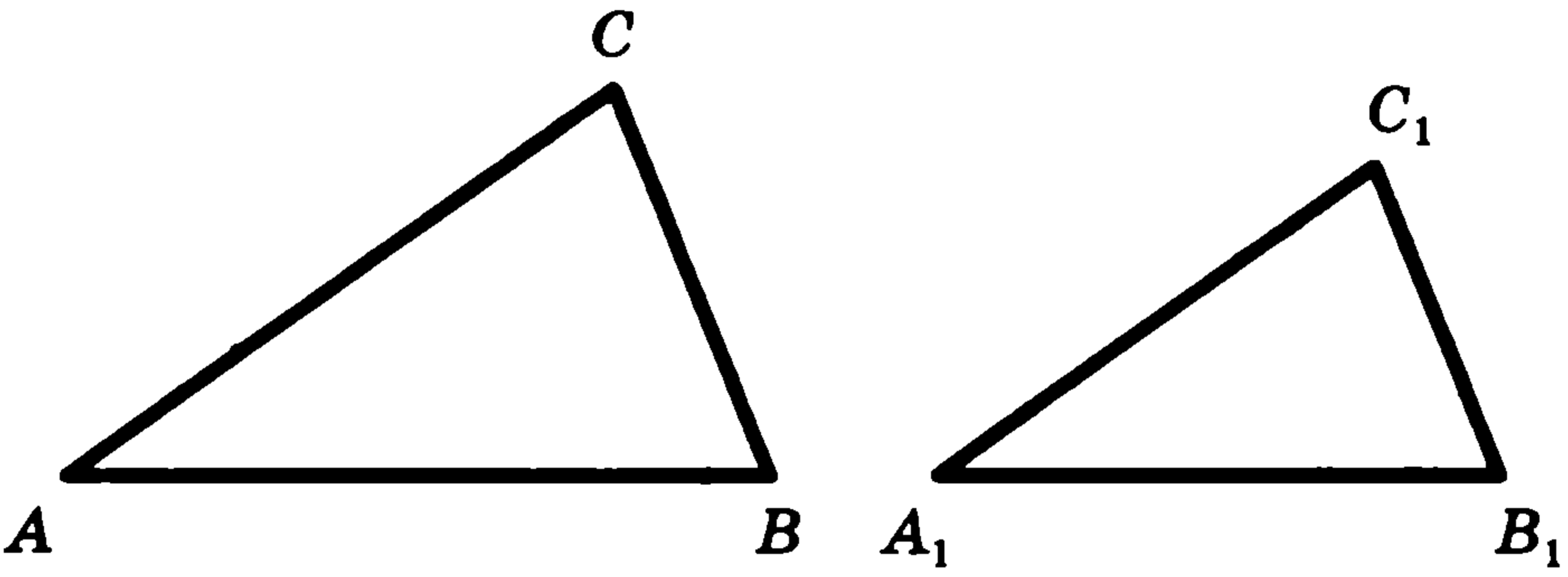


Рис. 43

Площади подобных фигур (в частности, многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности, площади кругов относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

134. Четырехугольник

1. Произвольный выпуклый (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними) (рис. 44).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

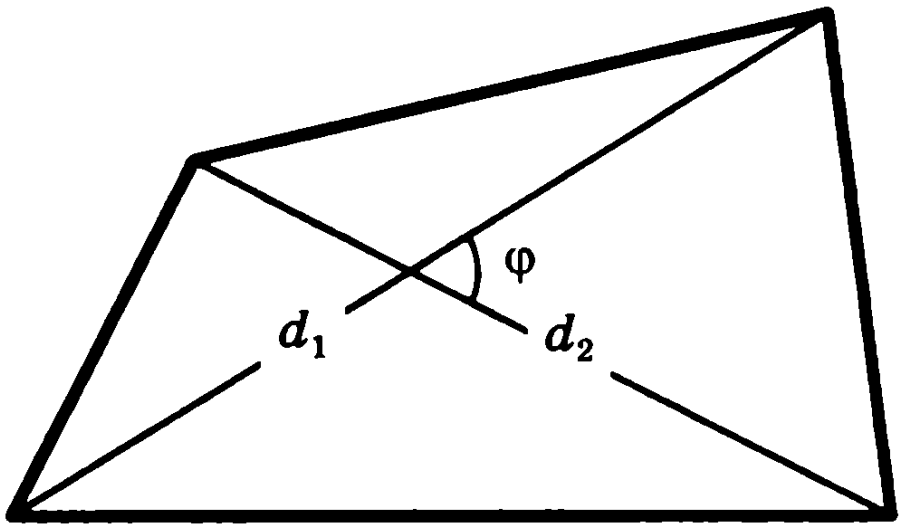


Рис. 44

2. Вписанный (рис. 45).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

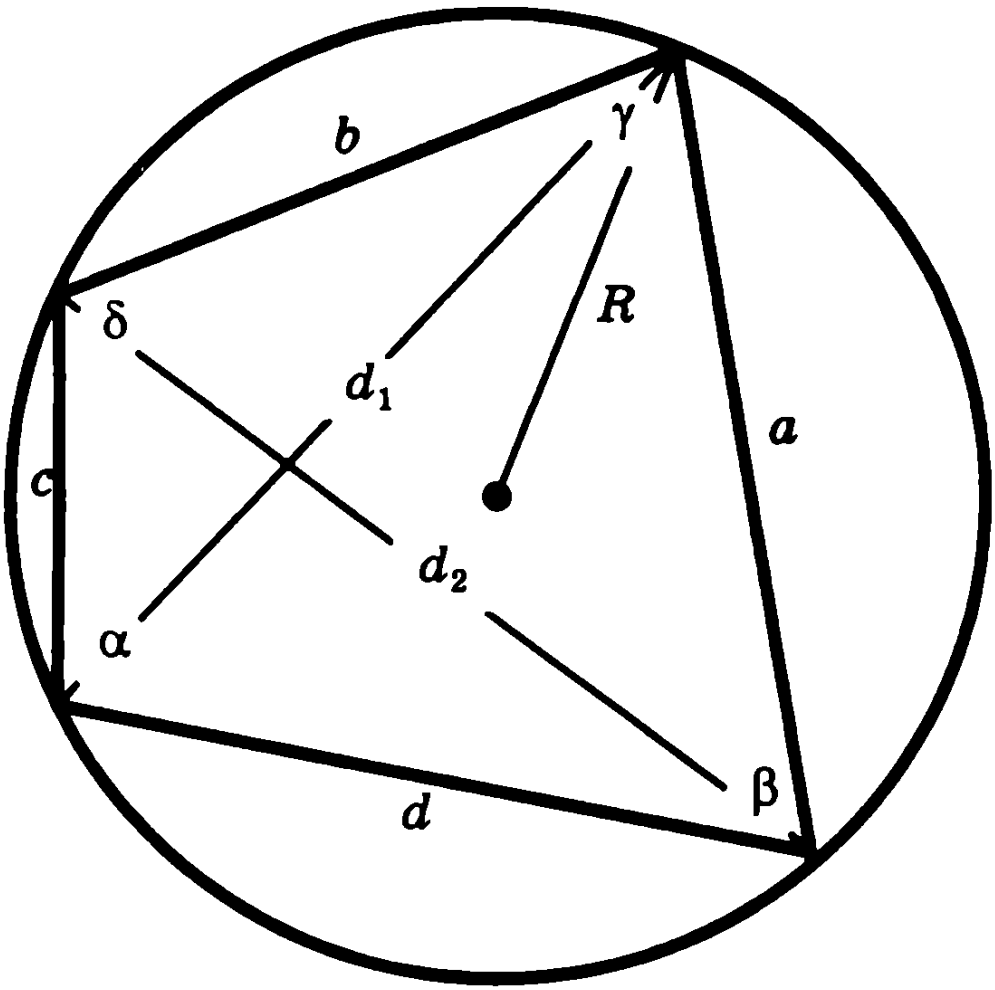


Рис. 45

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Верно и обратное.

$ac + bd = d_1 d_2$ (теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

3. Описанный.

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 46).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

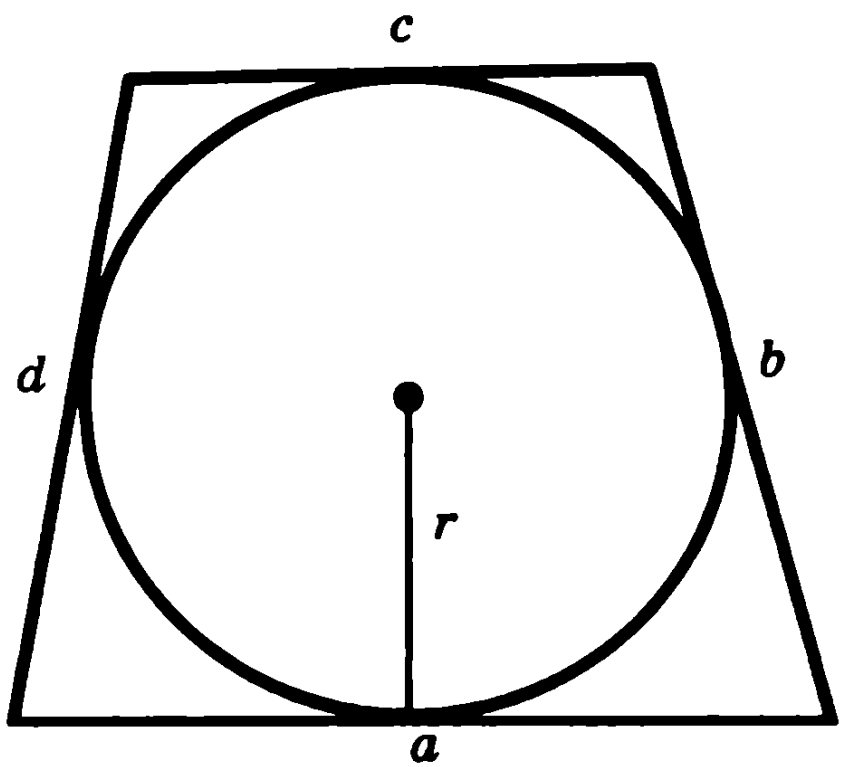


Рис. 46

135. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 47).

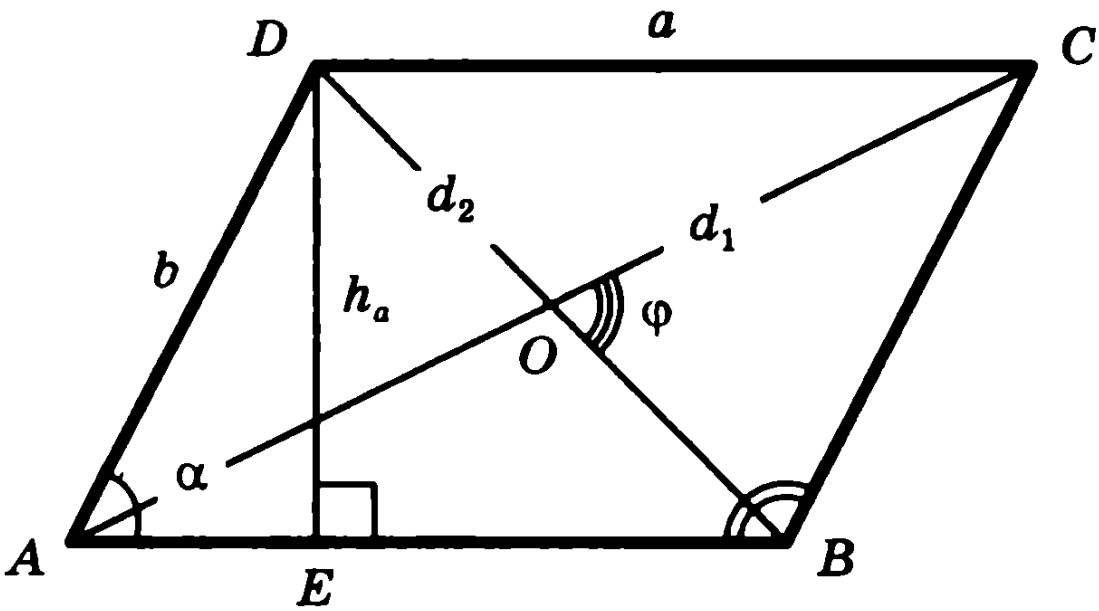


Рис. 47

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

(a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a).

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями;

$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha =$

$= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ — площадь параллелограмма.

Некоторые свойства:

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ($AB = DC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$).
2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ($AO = OC$; $BO = OD$).
3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° ($\angle A + \angle B = 180^\circ$ и т. д.).

4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ($\Delta ADC = \Delta ABC$, $\Delta ABD = \Delta BCD$).
5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 48).

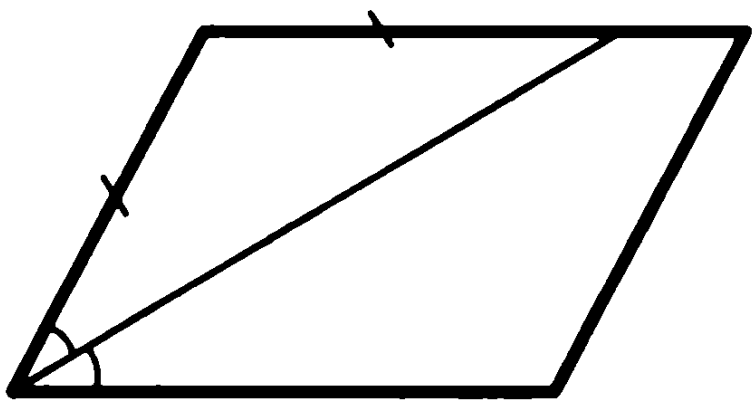


Рис. 48

Признаки параллелограмма (см. рис. 44)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel CD$), то

такой четырехугольник параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = BC$), то такой четырехугольник параллелограмм.
3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник параллелограмм.
4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник параллелограмм.

136. Трапеция

a и b — основания; h — высота; d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними (рис. 49).

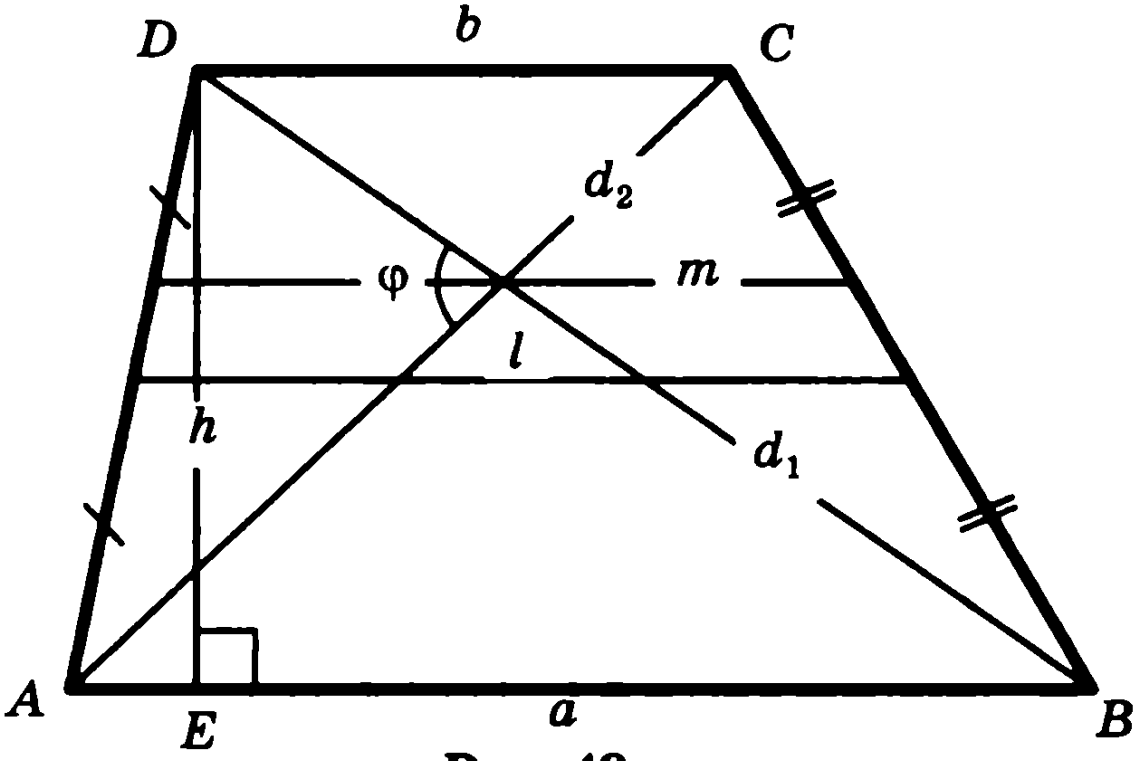


Рис. 49

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две непараллельны.

$AB \parallel DC$, AB и DC — основания трапеции, AD и BC — боковые стороны.

Отрезок l, соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции.**

$l = \frac{1}{2}(a + b)$ — длина средней линии трапеции.

$$m \parallel a \parallel b,\ m = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$\angle A + \angle D = 180^\circ;\ \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

$$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h =$$

$= \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi$ — площадь трапеции.

1. Равнобедренная трапеция.

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется **равнобедренной** (рис. 50).

$$AD = BC.$$

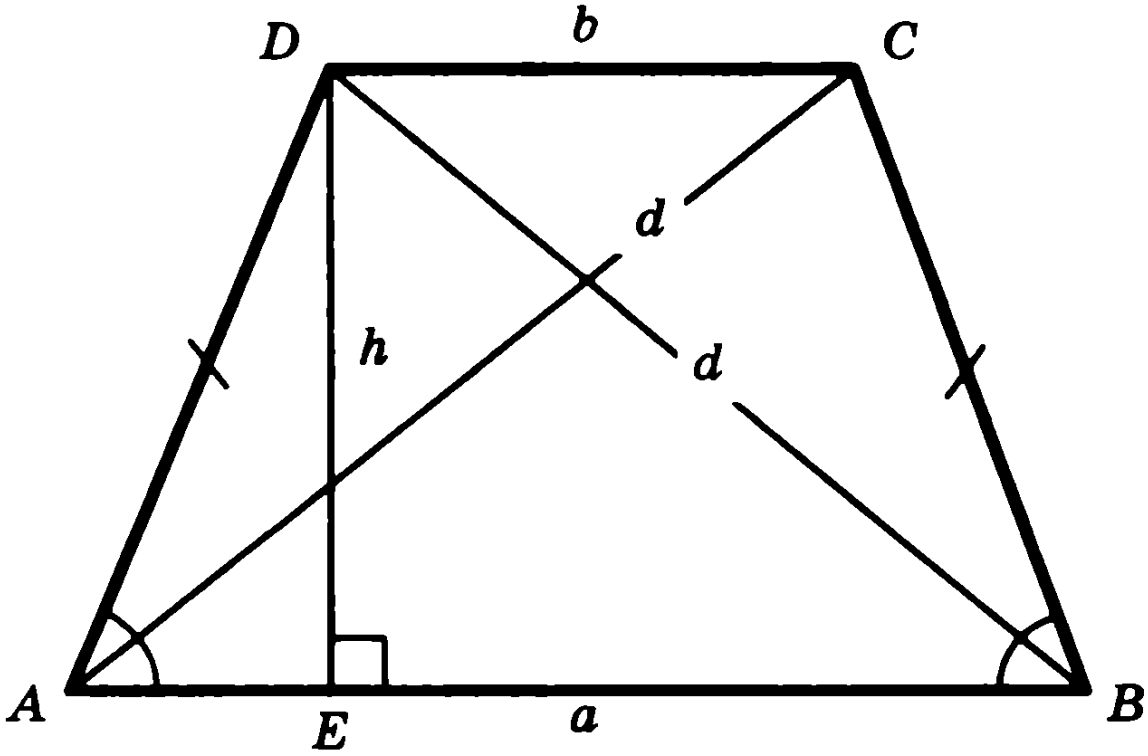


Рис. 50

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ($\angle A = \angle B$; $\angle C = \angle D$) и диагонали равны ($AC = BD$).

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.

$AB + CD = 2AD$ (рис. 51).

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности; $h = \sqrt{ab}$.

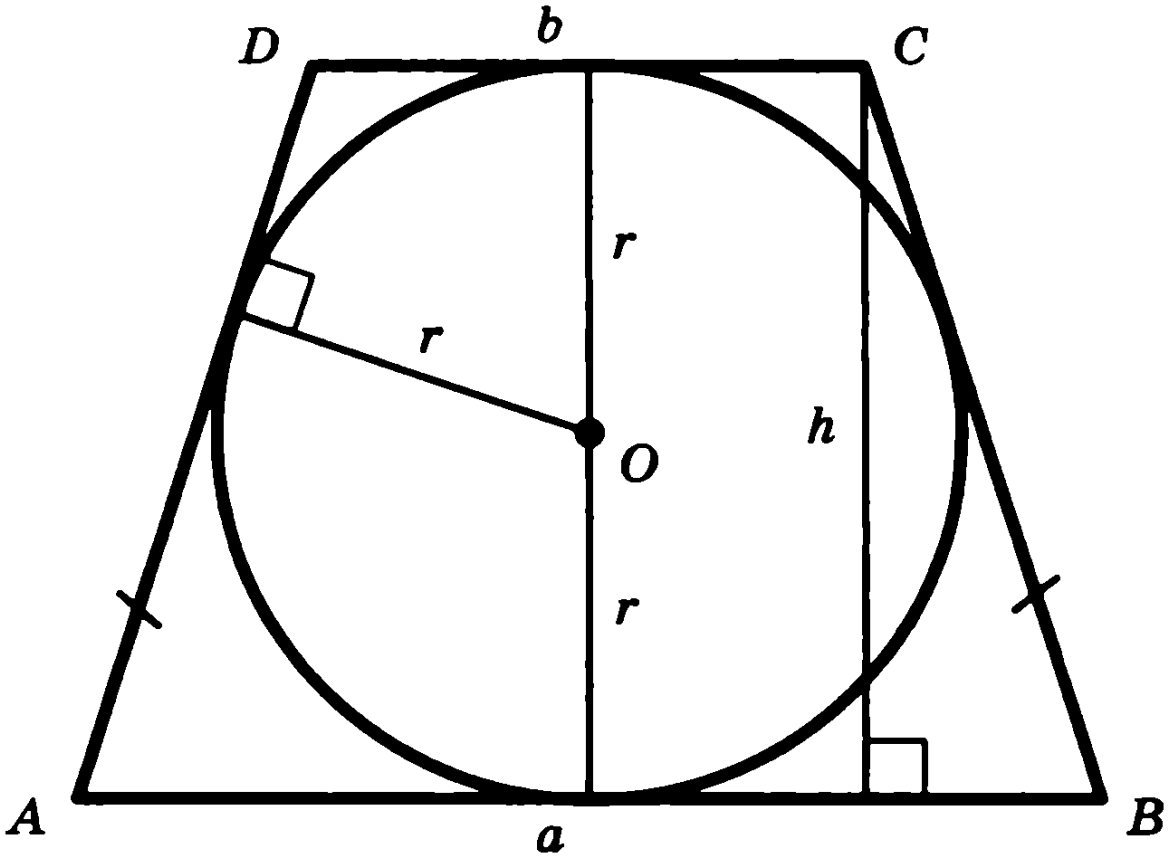


Рис. 51

R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 52).

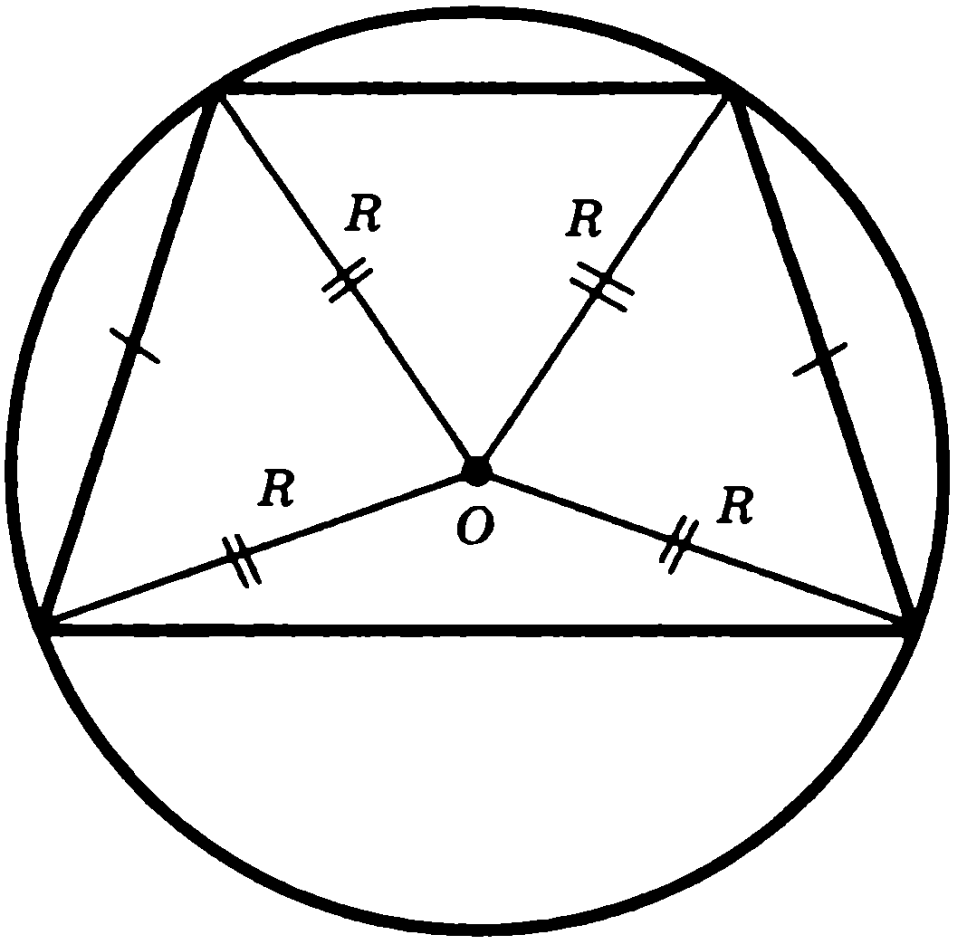


Рис. 52

2. Прямоугольная трапеция.

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется **прямоугольной** (рис. 53).

$\angle D = \angle C = 90^\circ$.

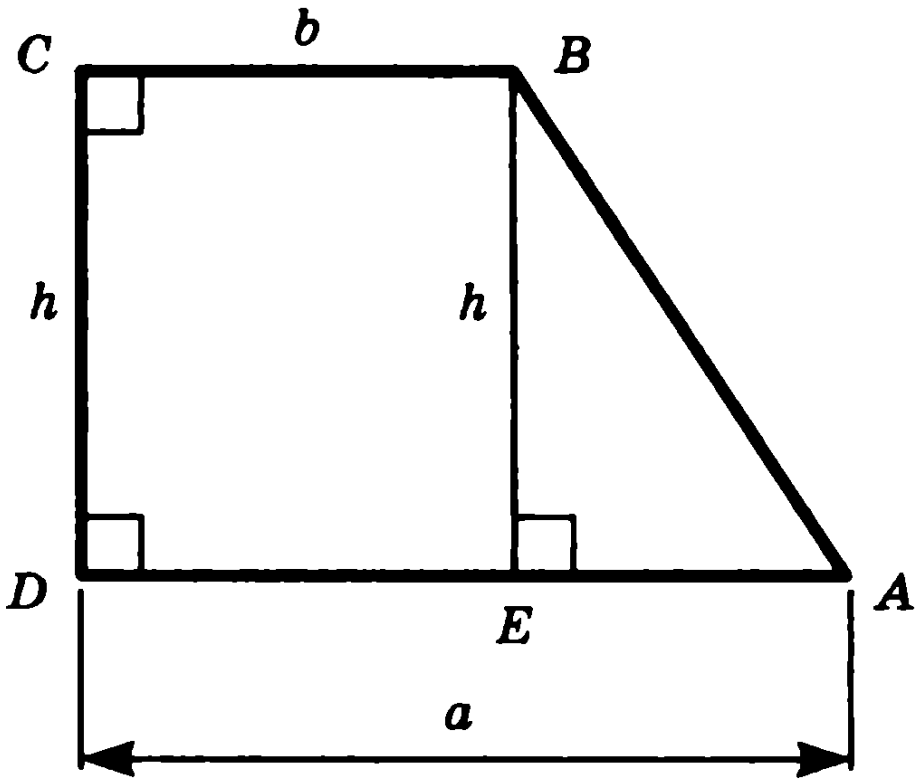


Рис. 53

$BE = CD = h$ (высота трапеции).

$AE = a - b$.

137. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 54).

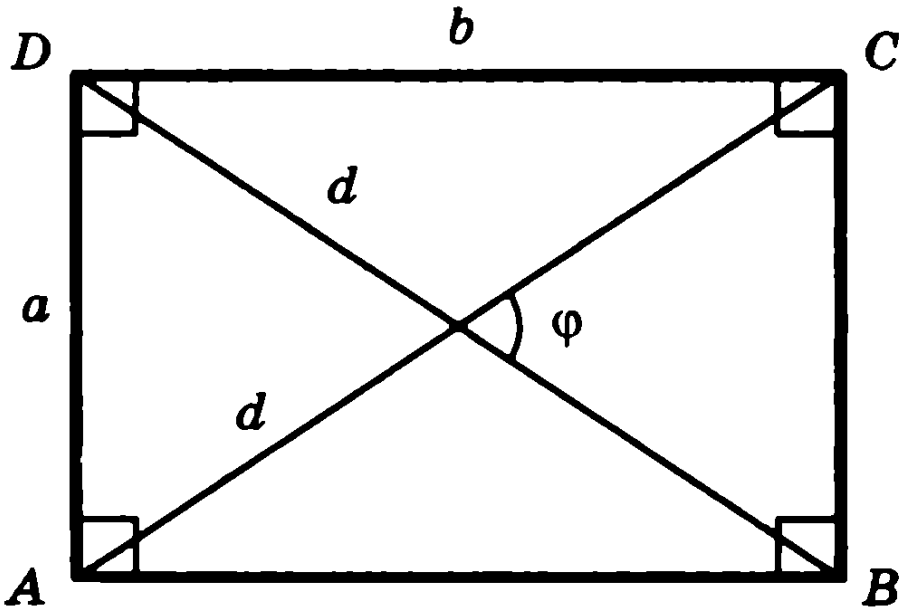


Рис. 54

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, **у прямоугольника диагонали равны.**

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

138. Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 55).

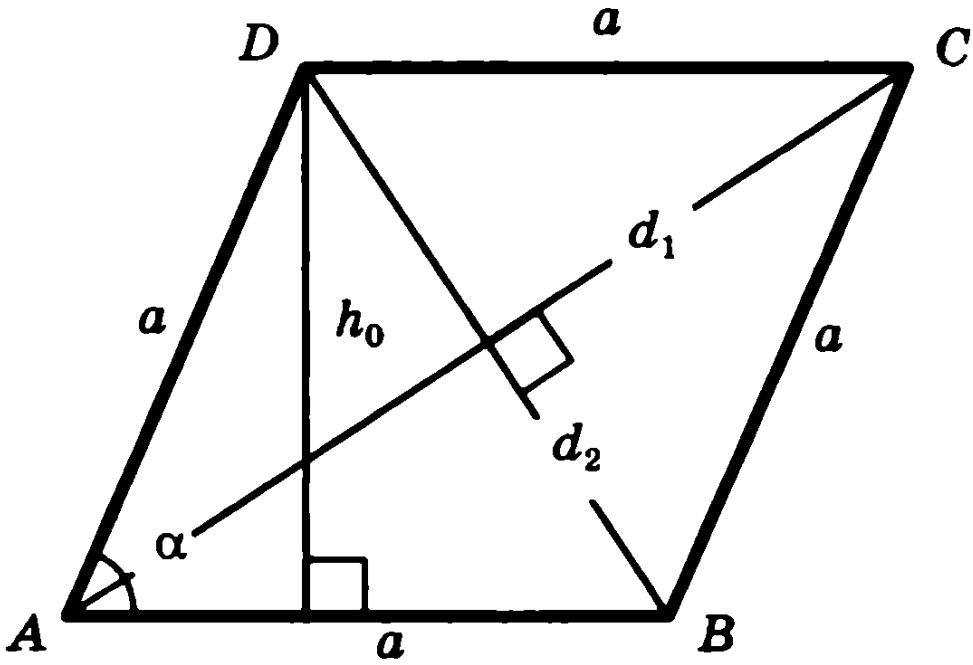


Рис. 55

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

$AC \perp BD$.

AC — биссектриса углов A и C; BD — биссектриса углов B и D.

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 —$$

площадь ромба.

139. Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 56).

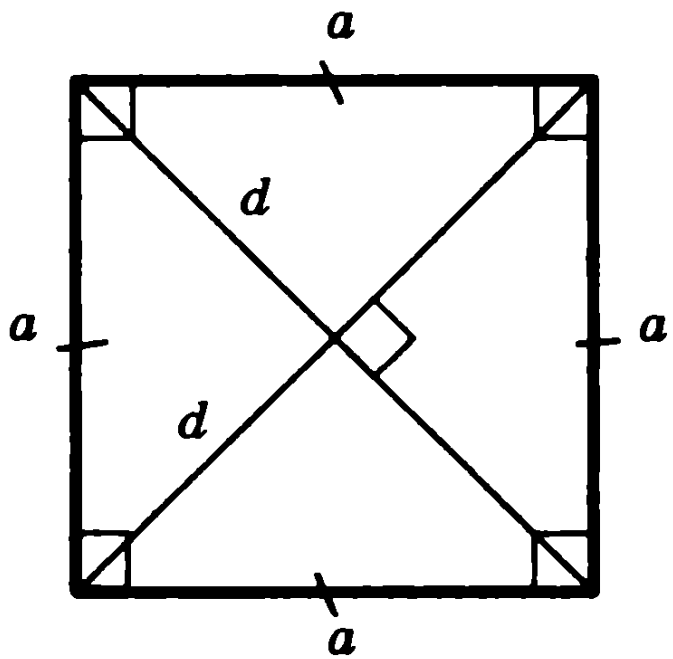


Рис. 56

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Основные свойства

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

140. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 57).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом.**

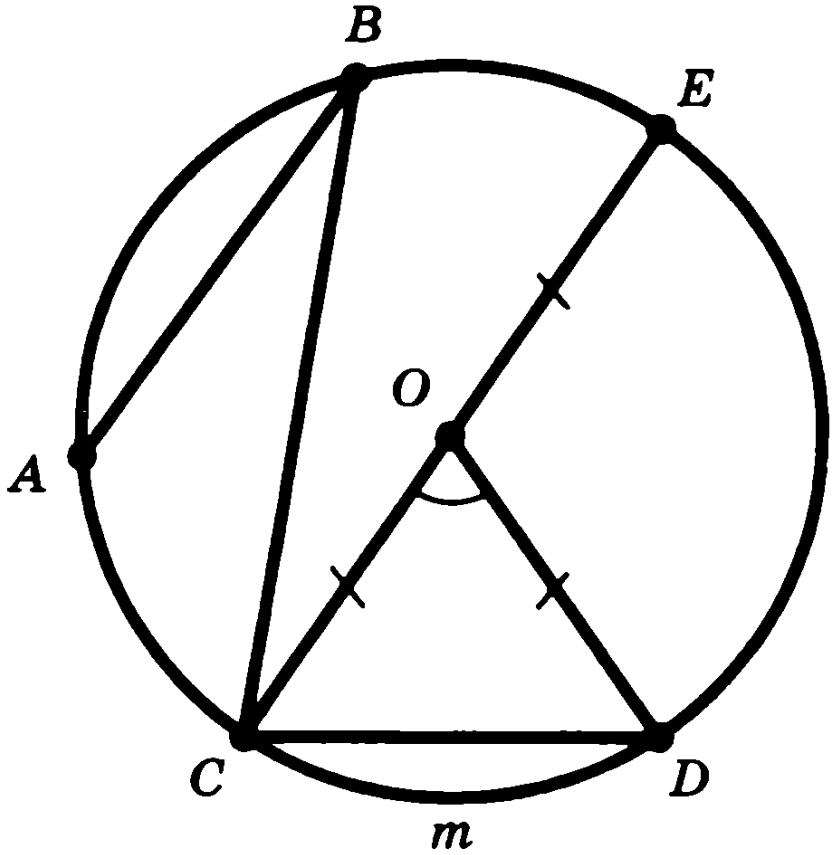


Рис. 57

Обозначение: r или R.

На рис. 57 $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется **дугой.**

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, называется **диаметром.**

AB, BC, CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D.

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом**.

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором**.

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральным** ($\angle COD$ на рис. 57).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например, $\angle ABC$).

141. Свойства касательных к окружности

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется **описанным** ($\angle ACB$ на рис. 58).

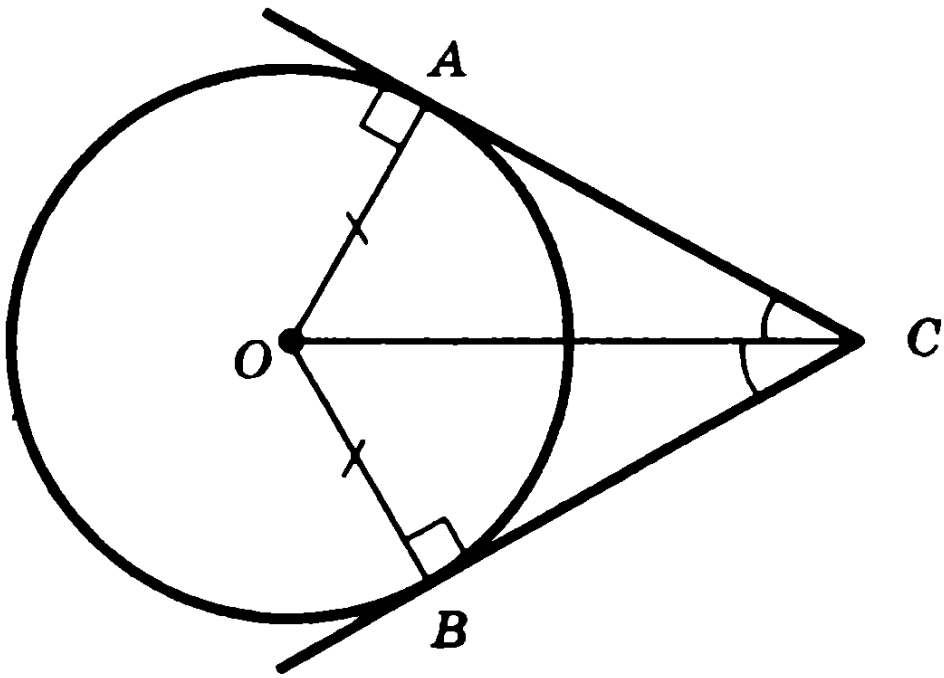


Рис. 58

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.
2. Две касательные, проведенные к окружности из од-

ной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

142. Окружность и треугольник

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 59).

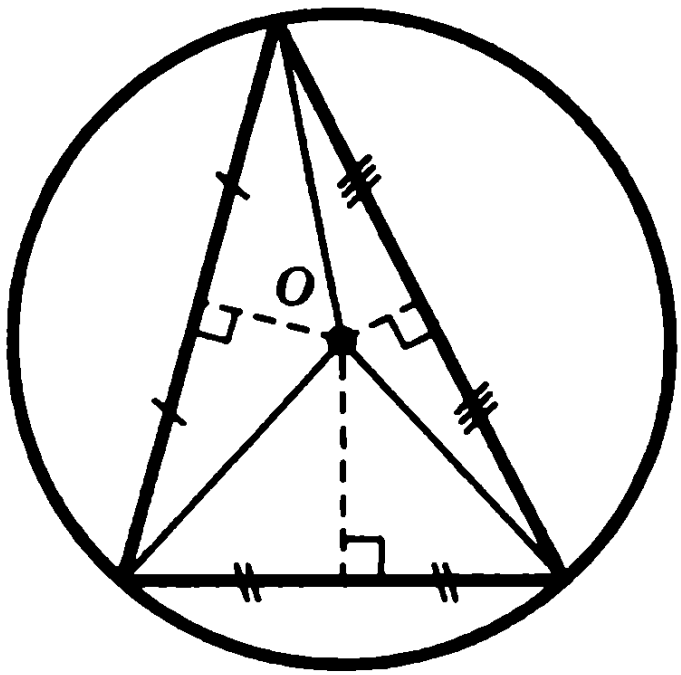


Рис. 59

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 60).

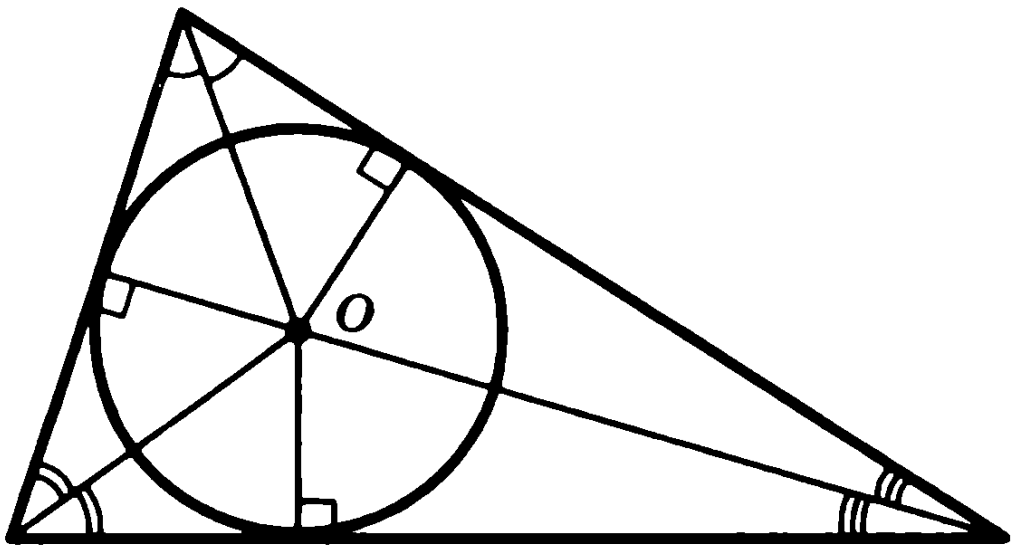


Рис. 60

143. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 61).

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

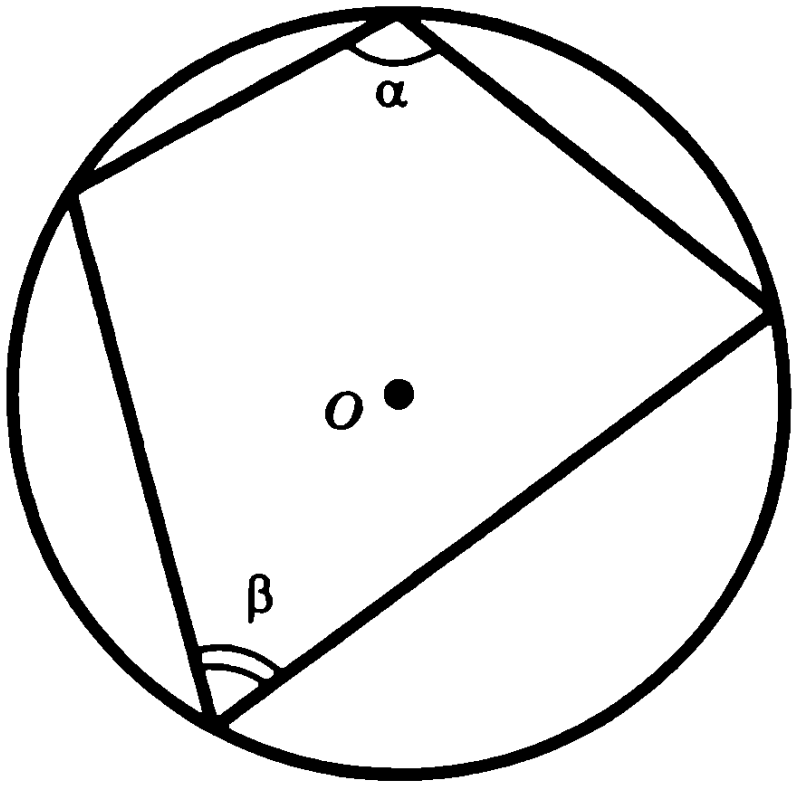


Рис. 61

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 62).

$$a + c = b + d.$$

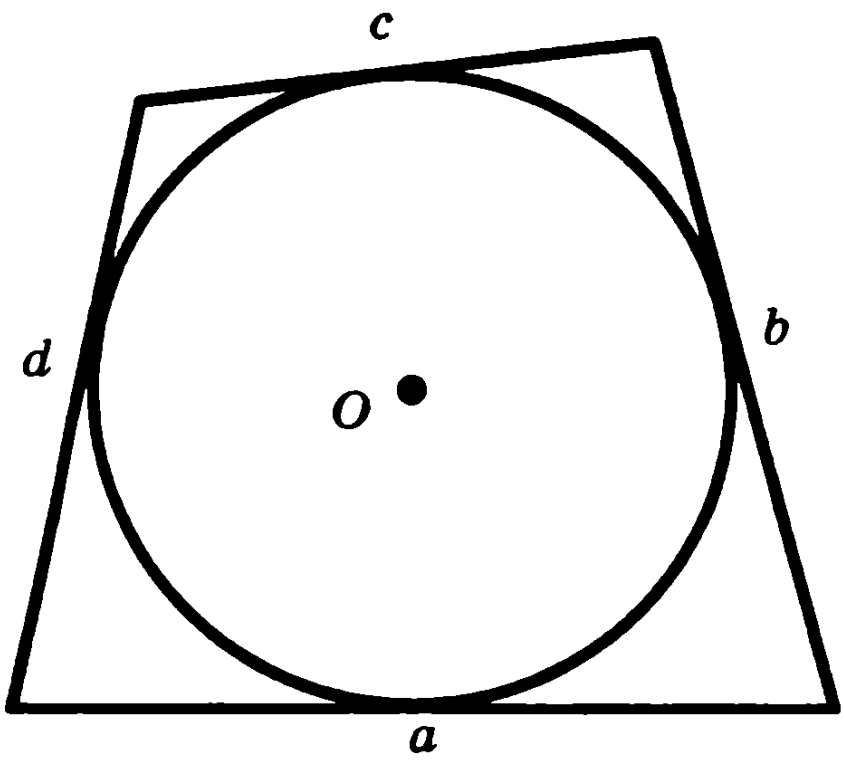


Рис. 62

144. Углы и окружность

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 63):

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 64):

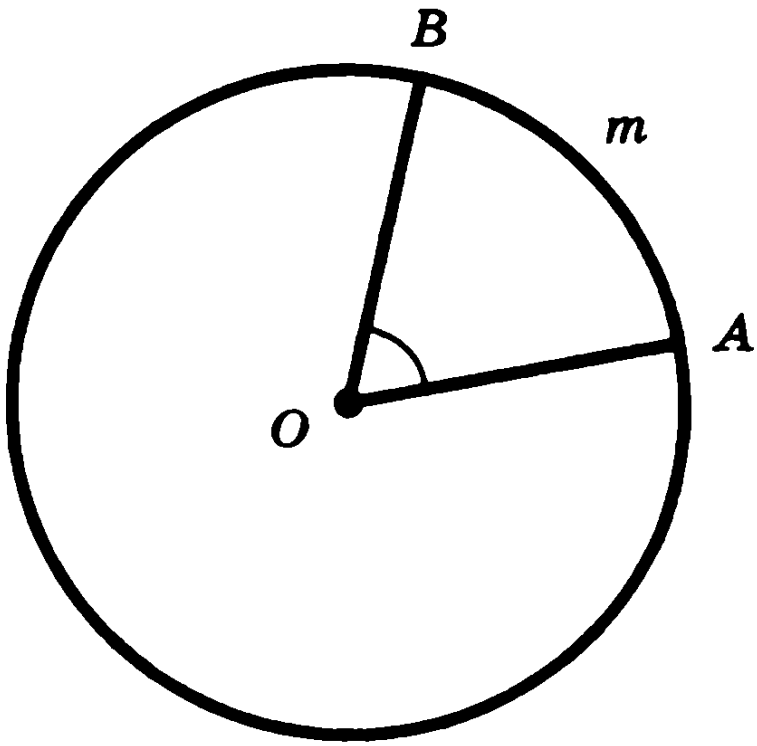


Рис. 63

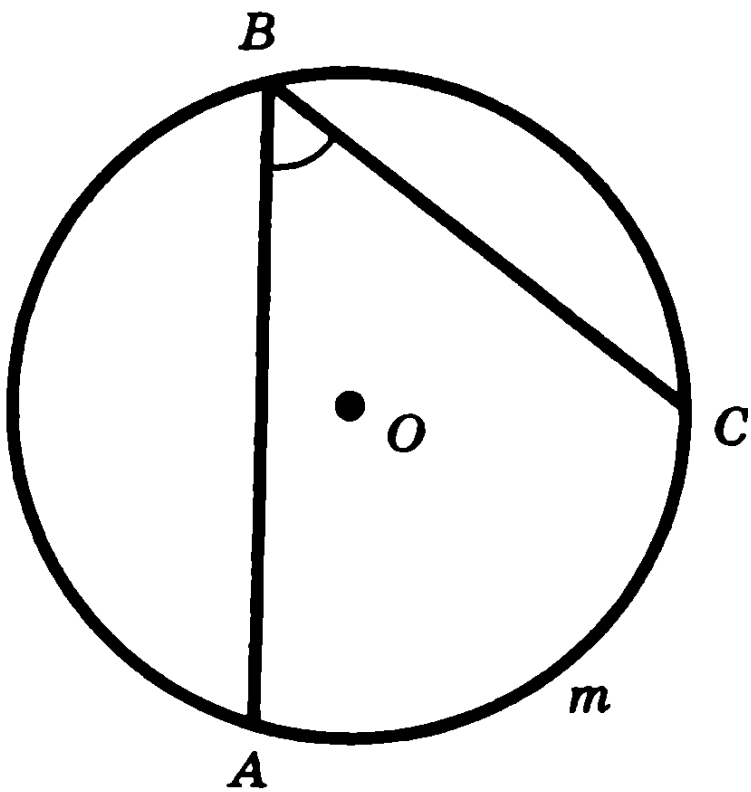


Рис. 64

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 65):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

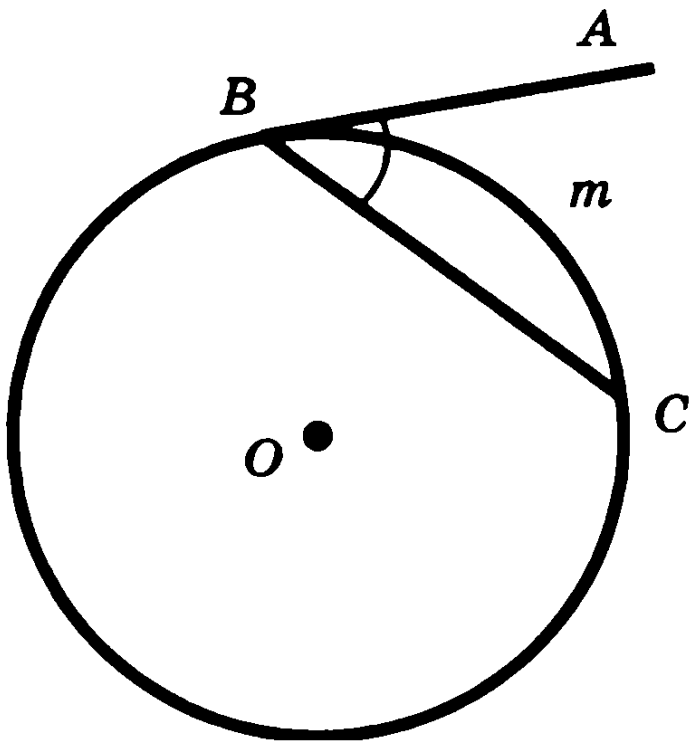


Рис. 65

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 66):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup AnC).$$

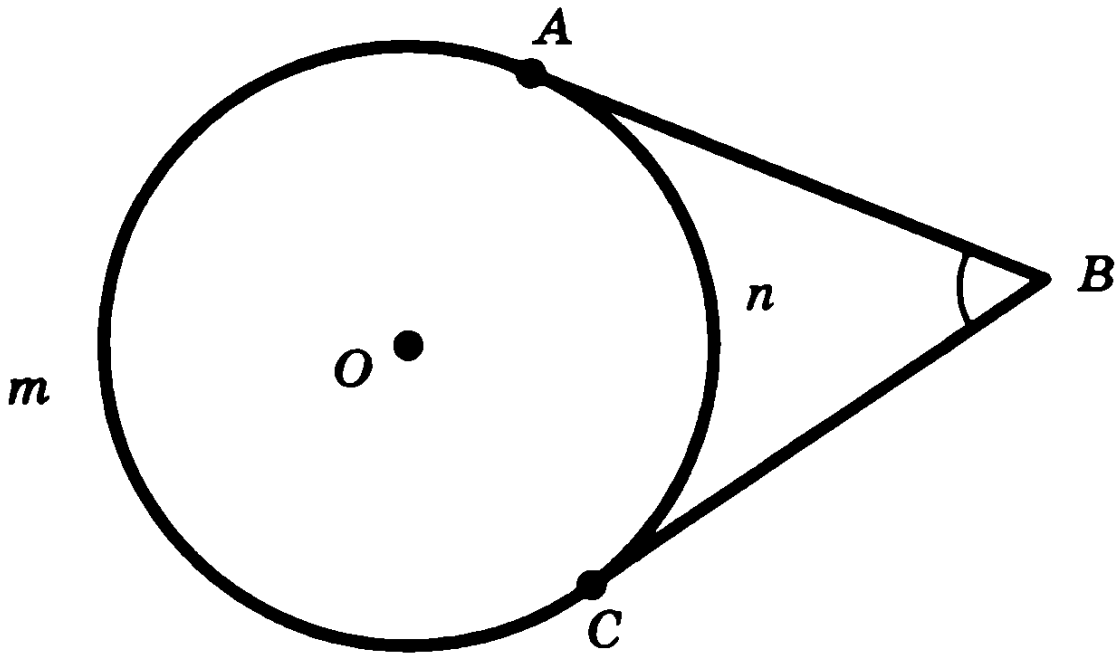


Рис. 66

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 67):

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\cup AmC + \cup BnD).$$

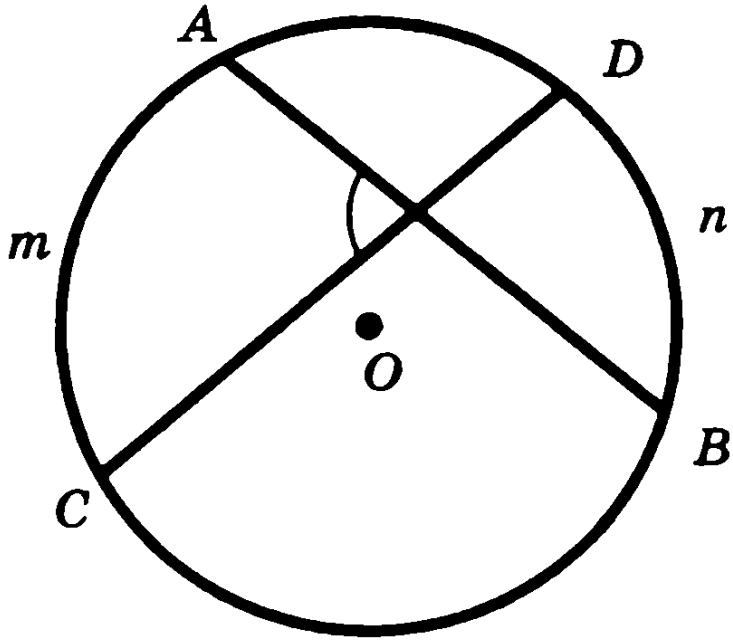


Рис. 67

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 68):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup EnD).$$

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 69):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup CnD).$$

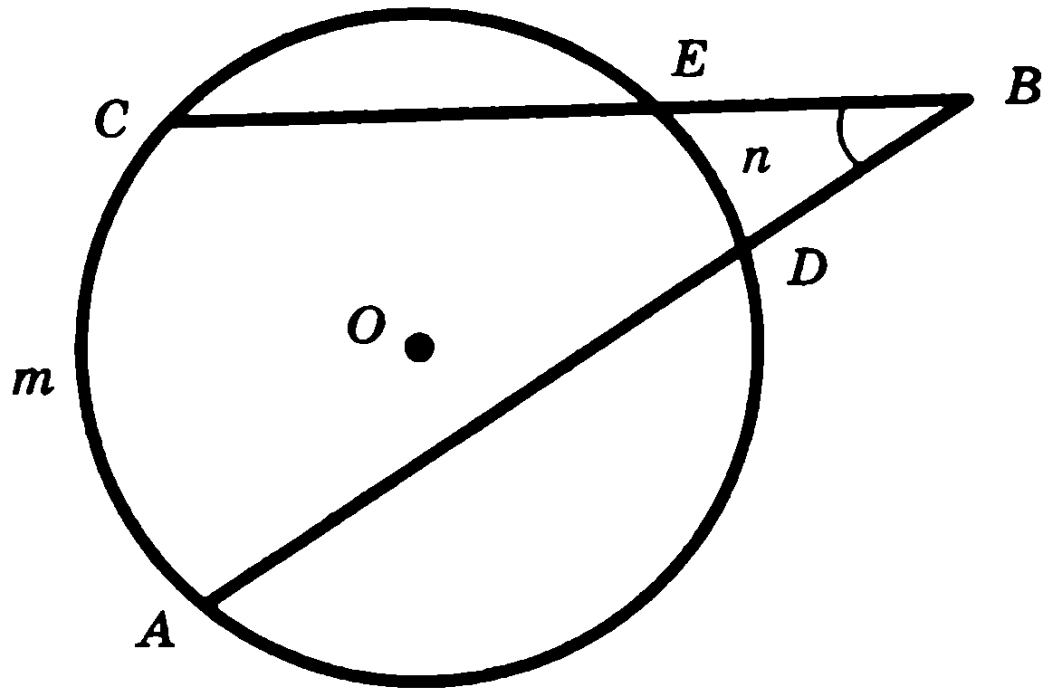


Рис. 68

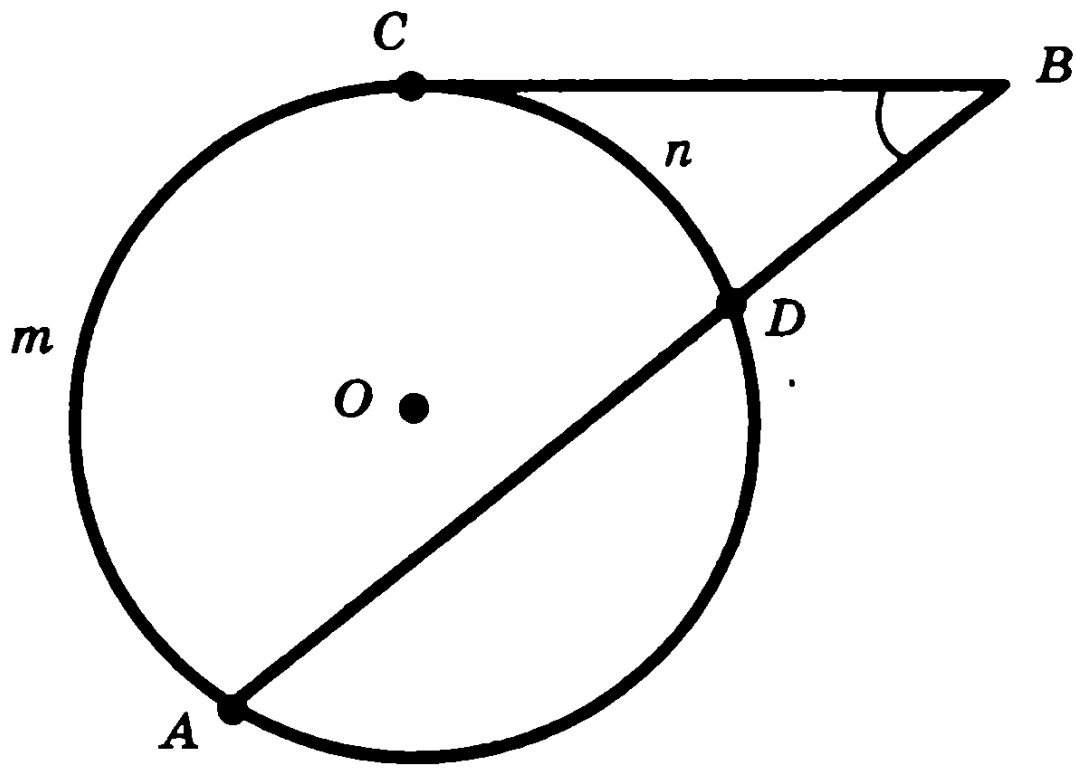


Рис. 69

145. Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке E, то **произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой** (рис. 70):

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

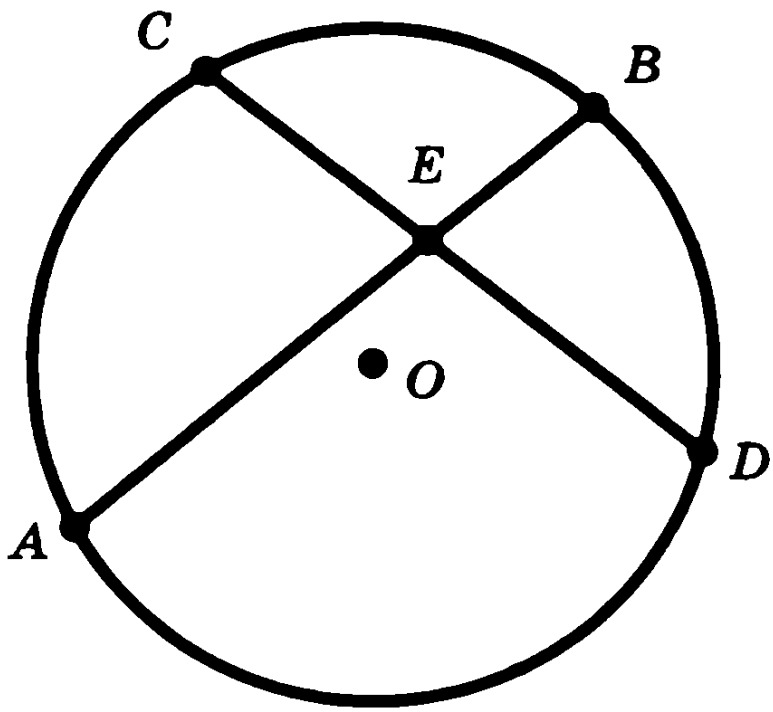


Рис. 70

Если из точки B к окружности проведены две секущие BDA и BEC, то

$DB \cdot AB = EB \cdot CB$ (рис. 71).

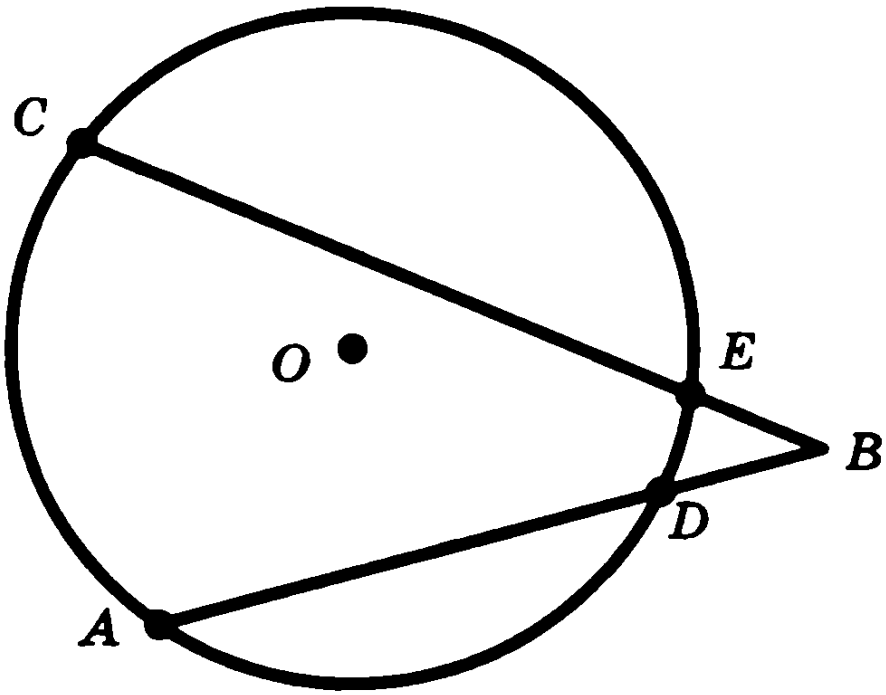


Рис. 71

Если из точки B к окружности проведены секущая BDA и касательная BC, то **произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной** (рис. 72):

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

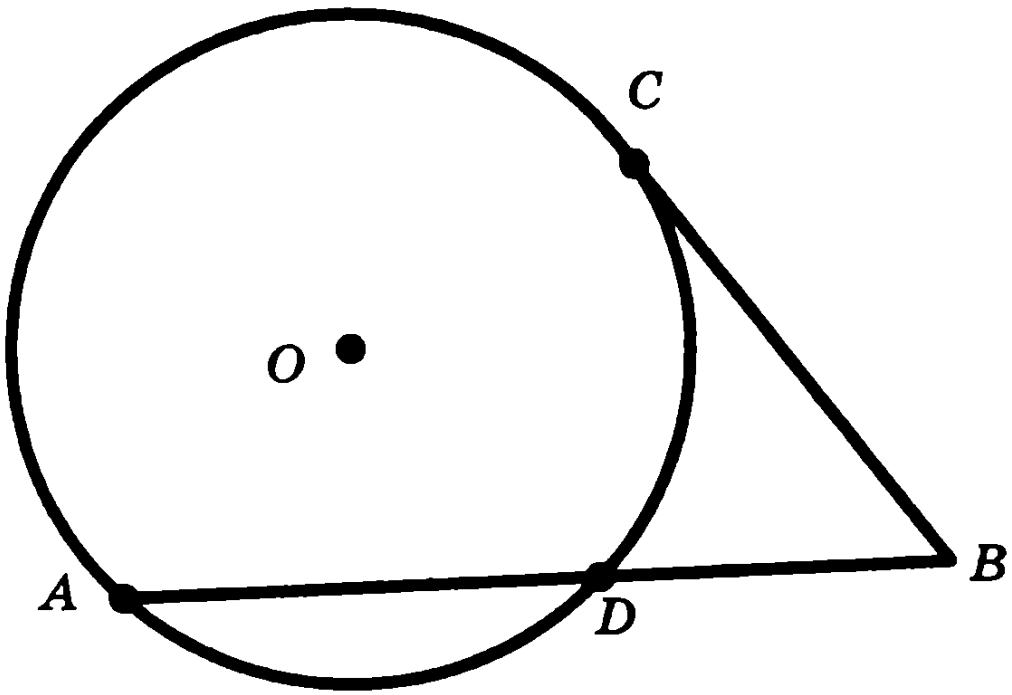


Рис. 72

146. Длина окружности. Площадь круга и его частей (рис. 73)

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности;

$$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$$ — длина дуги окружности;

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{2}CR$$ — площадь круга;

$$\pi = \frac{C}{D} \approx 3{,}14$$ — отношение длины окружности к ее диаметру.

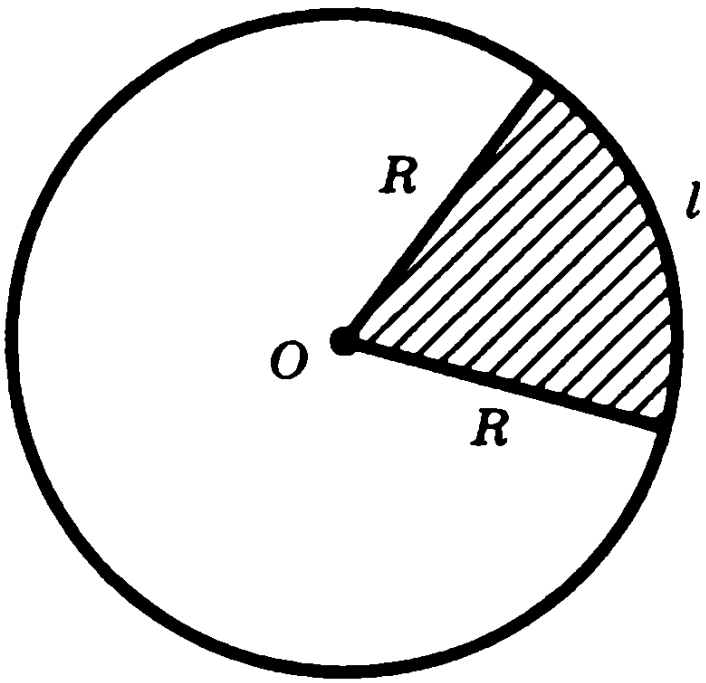


Рис. 73

Часть 2. СТЕРЕОМЕТРИЯ

МНОГОГРАННИКИ

Многогранником называется тело, граница которого состоит из многоугольников.

Эти многоугольники называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами многоугольника**.

Отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями многогранника**.

Многогранники бывают **выпуклые** и **невыпуклые**.

Если многогранник целиком расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани, то он называется **выпуклым**.

Например, тетраэдр, октаэдр, параллелепипед — выпуклые многогранники.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°.

147. Призма

Призмой (рис. 74) называется многогранник, у которого две грани $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (**основания призмы**) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани (AA_1B_1B; BB_1C_1C и т. д.) — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой (AA_1, BB_1 и т. д.).

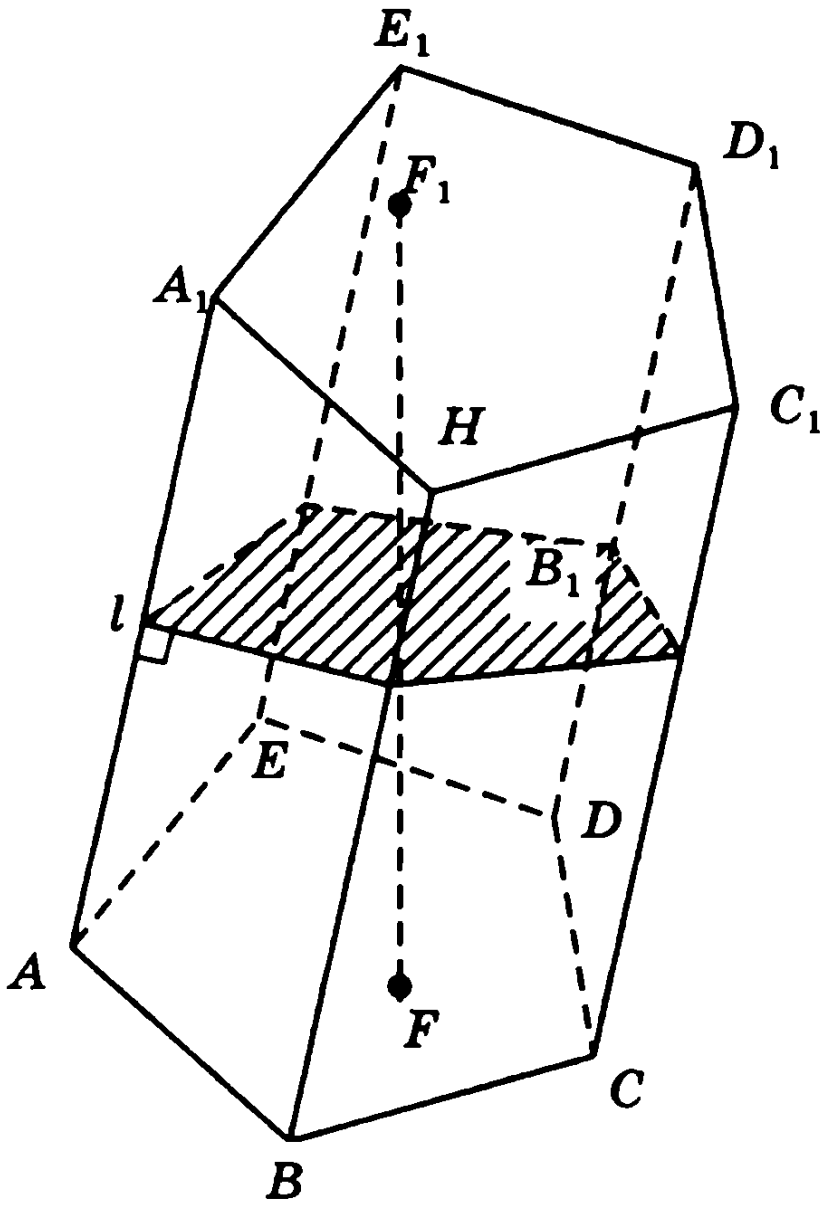


Рис. 74

Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями**, а ребра AA_1, BB_1 и т. д. называются **боковыми**.

Перпендикуляр FF_1, опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы.

Если в основании призмы лежит треугольник, четырехугольник и т. д., то призма называется соответственно **треугольной**, **четырехугольной** и т. д.

Призма называется **прямой**, если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, в противном случае призма называется **наклонной**.

Если в прямой призме основание — правильный многоугольник, то призма называется **правильной**.

У правильной призмы все боковые грани — **равные прямоугольники**.

Сечение, которое образовано плоскостью, перпендикулярной боковому ребру призмы, называется **перпендикулярным сечением** (см. рис. 74).

Произвольная призма

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot l; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H;$$
$$V = S_{\text{сеч.}} \cdot l; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Прямая призма

$$S_{\text{бок.}} = P \cdot H;$$
$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}};$$
$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Замечание. Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

148. Параллелепипед

Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм (рис. 75).

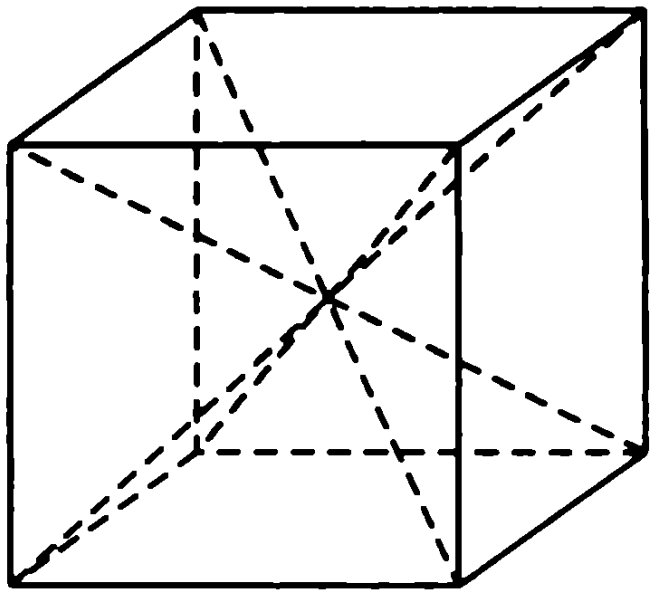


Рис. 75

У параллелепипеда **6 граней**, и все они параллелограммы.

Противоположные грани попарно равны и **параллельны**.

Параллелепипед имеет **4 диагонали**, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Любая грань параллелепипеда может быть принята за **основание.**

Параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники, называется **прямым.**

Прямой параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 76).

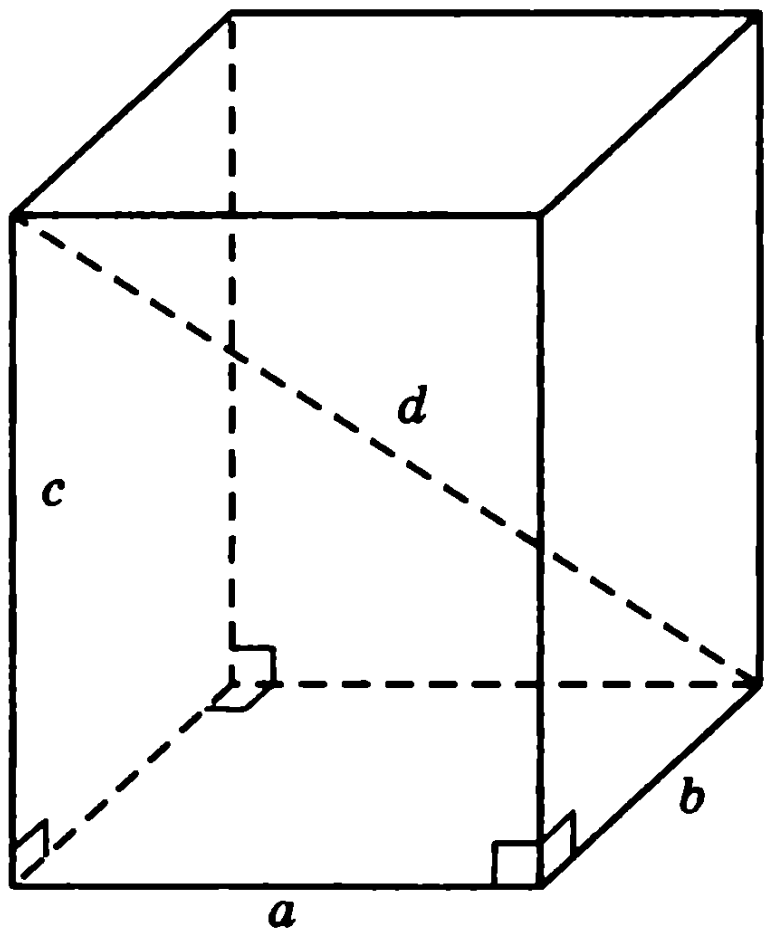


Рис. 76

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани квадраты, называется **кубом.**

Прямоугольный параллелепипед (рис. 76):

$S_{\text{бок.}} = P \cdot H = 2(a + b)c;$
$V = abc;$
$S_{\text{полн.}} = 2(ab + bc + ac);$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$

Куб

Если a — ребро куба, то

$$V = a^3;\ d = a\sqrt{3};\quad S_{\text{полн.}} = 6a^2.$$

149. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань — **основание пирамиды** — произ-

вольный многоугольник $ABCDE$ (рис. 77), а остальные **боковые грани** — треугольники с общей вершиной M.

Перпендикуляр MO, опущенный из вершины на основание, называется **высотой пирамиды.**

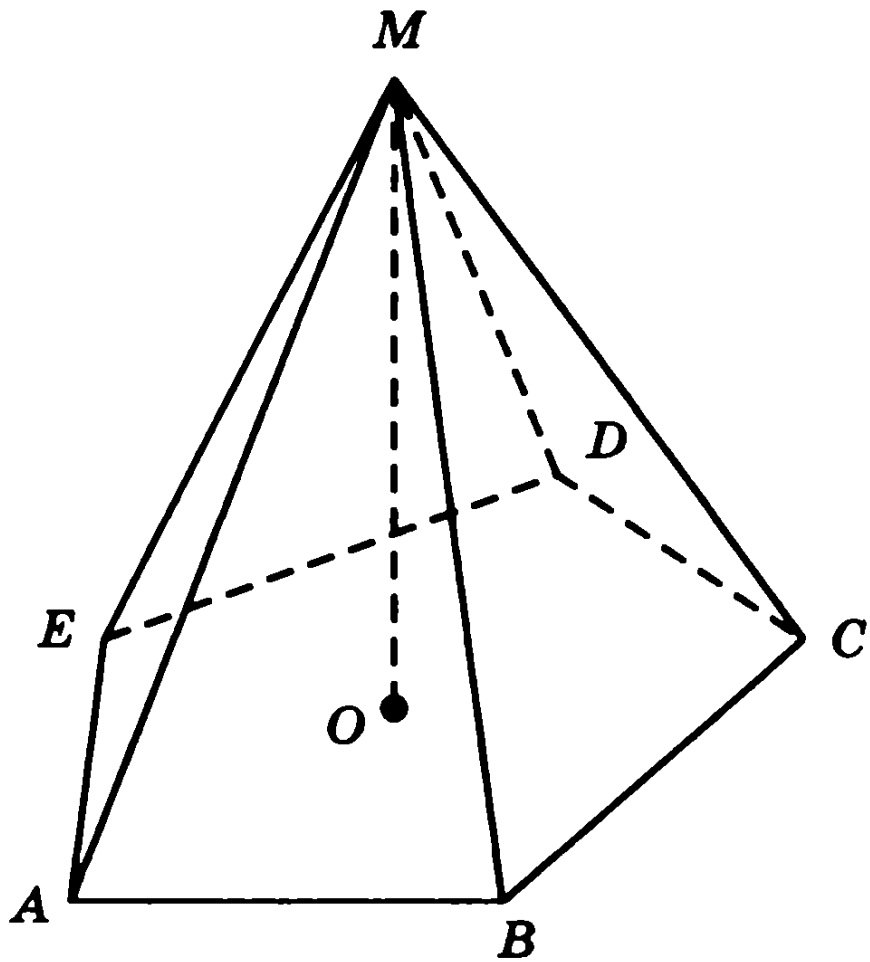


Рис. 77

Если в основании пирамиды треугольник, четырехугольник и т. д., то пирамида называется треугольной, четырехугольной и т. д.

Треугольная пирамида называется тетраэдром (четырехгранником) (рис. 78).

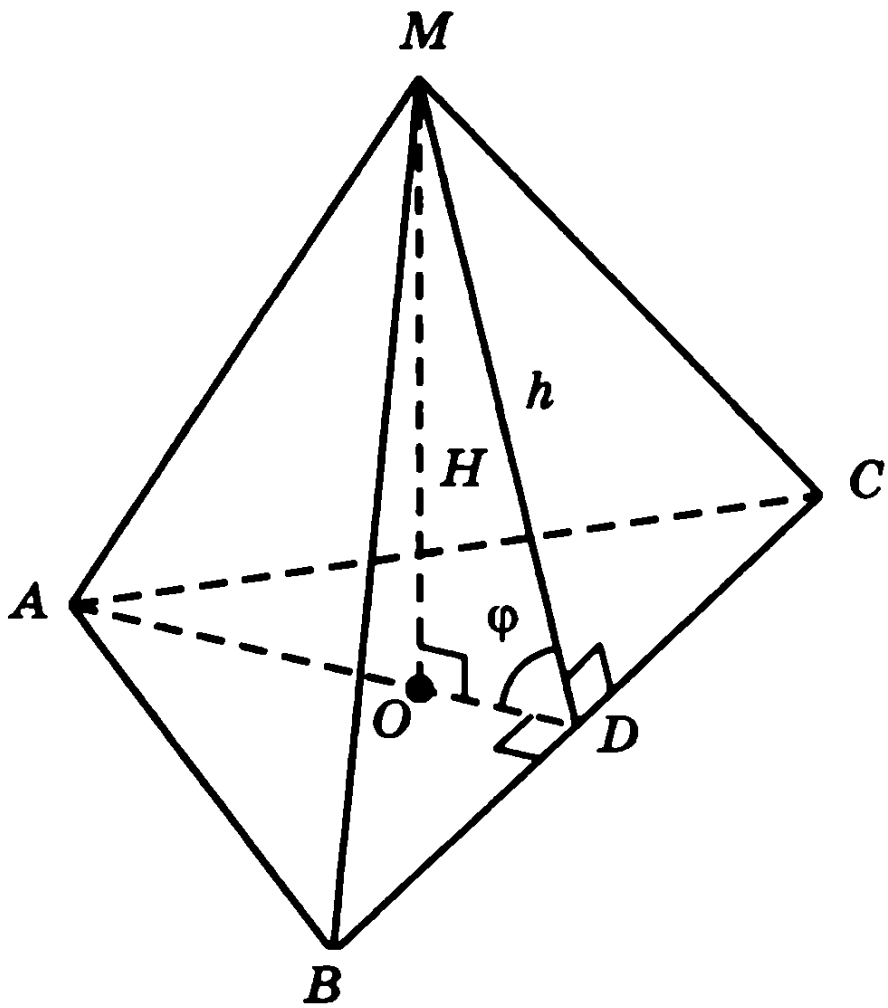


Рис. 78

Если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник, а высота проецируется в центр основания, то пирамида называется **правильной** (рис. 78).

В правильной пирамиде все боковые ребра равны, все боковые грани — равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани MD называется **апофемой** правильной пирамиды.

Произвольная пирамида

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Правильная пирамида (рис. 78)

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h; \quad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi};$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

Если в пирамиде провести сечение, параллельное основанию, то часть пирамиды, заключенная между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой** (рис. 79).

Параллельные грани усеченной пирамиды (ABC и $A_1B_1C_1$) называются ее **основаниями**; расстояние между ними (OO_1) — **высотой.**

Усеченная пирамида называется **правильной**, если пирамида,

из которой она получена, была правильной.

Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции.

Высота боковой грани называется **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

Произвольная усеченная пирамида

$$V = \frac{H}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \ .$$

Правильная усеченная пирамида (рис. 79)

$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, где P_1, P_2 — периметр основания.

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2$, где S_1, S_2 — площади оснований.

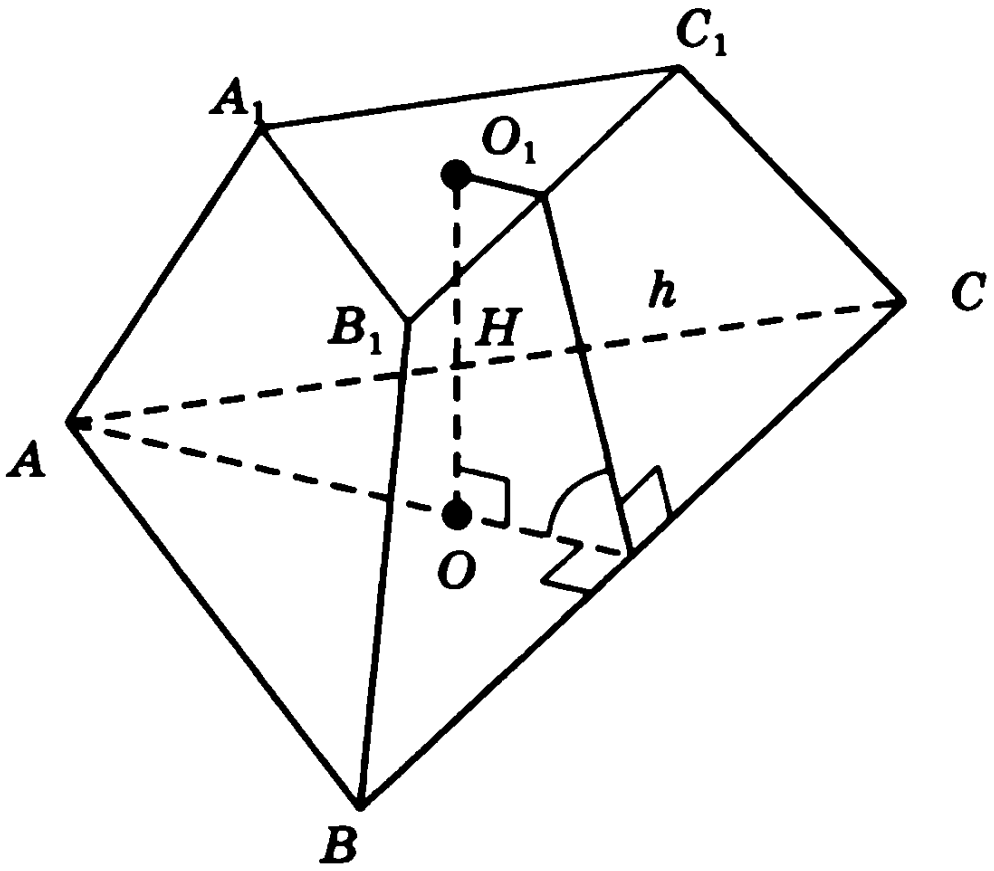


Рис. 79

150. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды

1. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы

(рис. 80), длины всех боковых ребер равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта точка O является также точкой пересечения серединных перпендику-

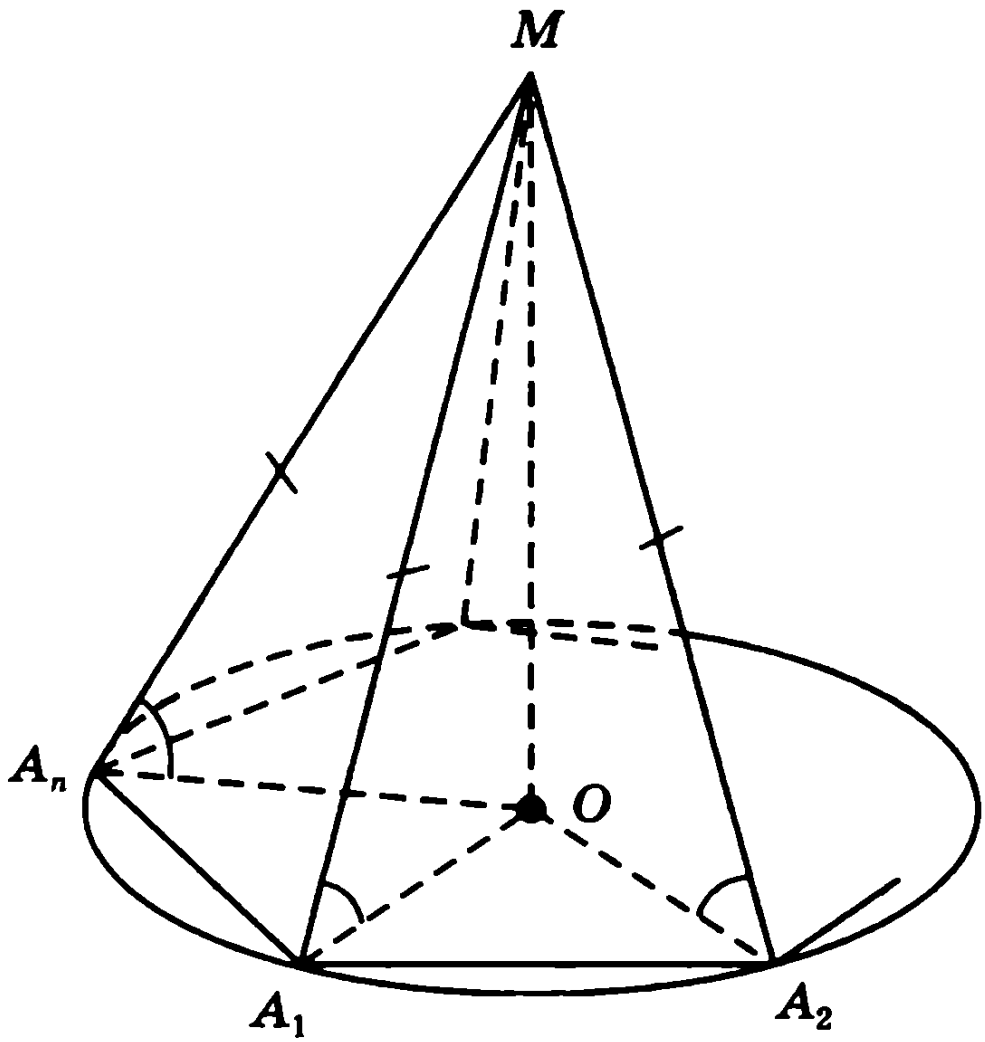


Рис. 80

ляров, проведенных к сторонам основания пирамиды).

2. Если в пирамиде $MA_1A_2...A_n$ все боковые грани образуют с основанием равные углы и длины всех апофем боковых граней равны, то вершина M пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Эта точка является также точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды (рис. 81).

3. Если высота треугольной пирамиды $MABC$ проходит через точку пересечения высот ΔABC, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны, т. е. $AM \perp BC$, $MC \perp AB$ и $MB \perp AC$. Справедливо и обратное утверждение (рис. 82).

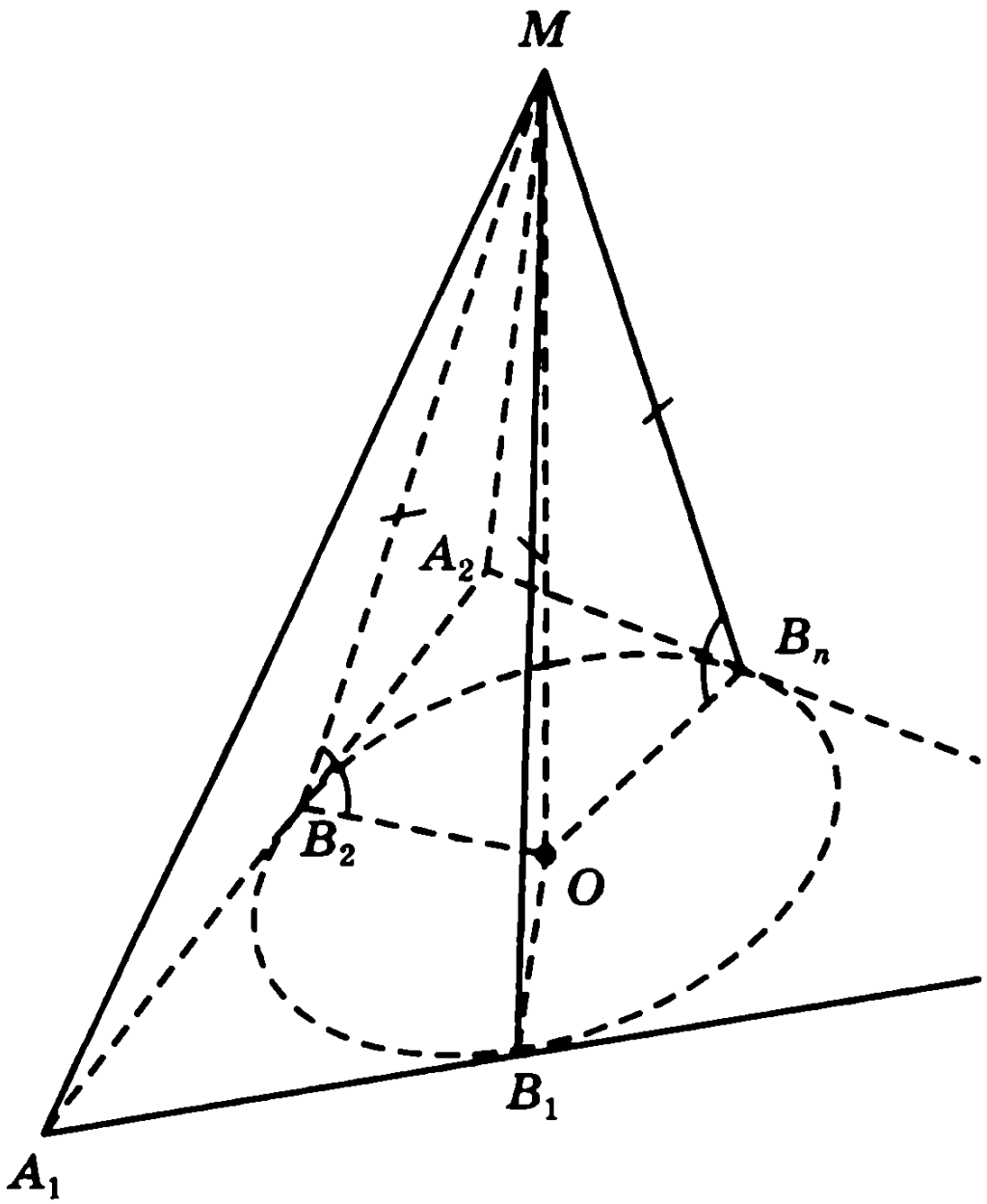


Рис. 81

4. Если MO — высота пирамиды $MABC$ и $MA \perp BC$, то $(MAO) \perp BC$ (рис. 82).

5. Если в наклонной призме $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ боковое ребро

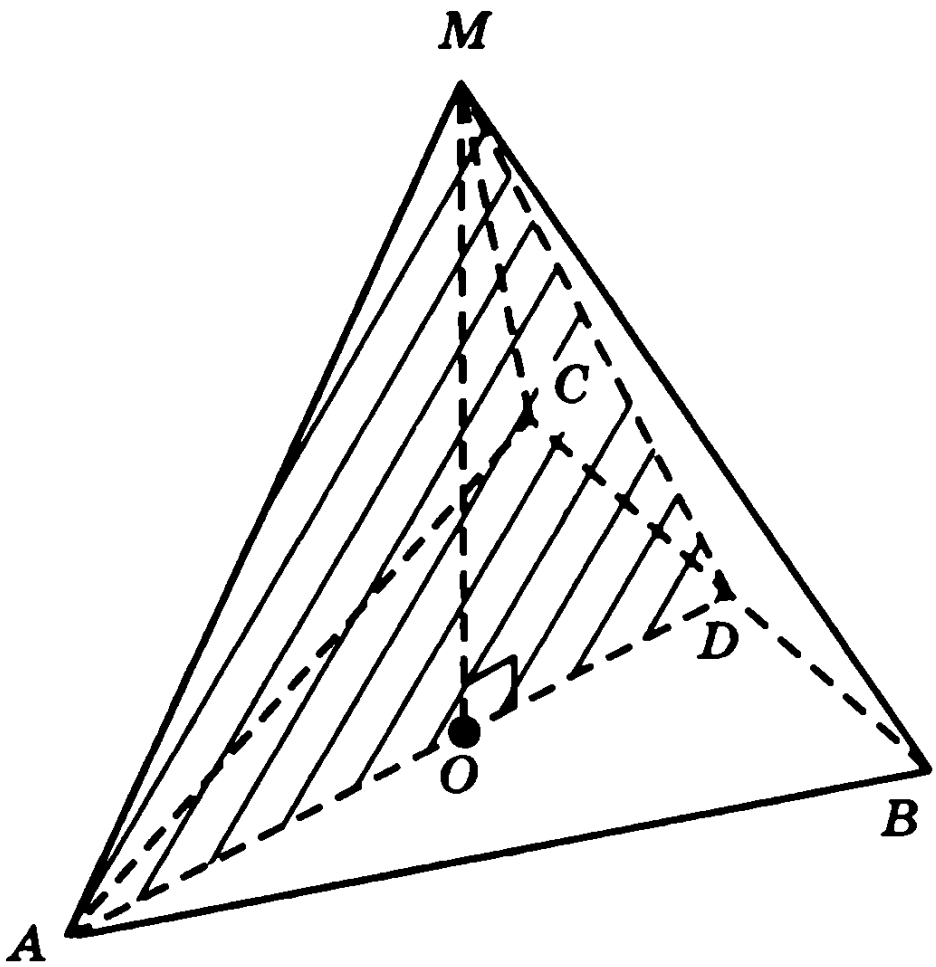


Рис. 82

A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1, то точка O основания высоты B_1O лежит на биссектрисе $\angle A_1$ (рис. 83).

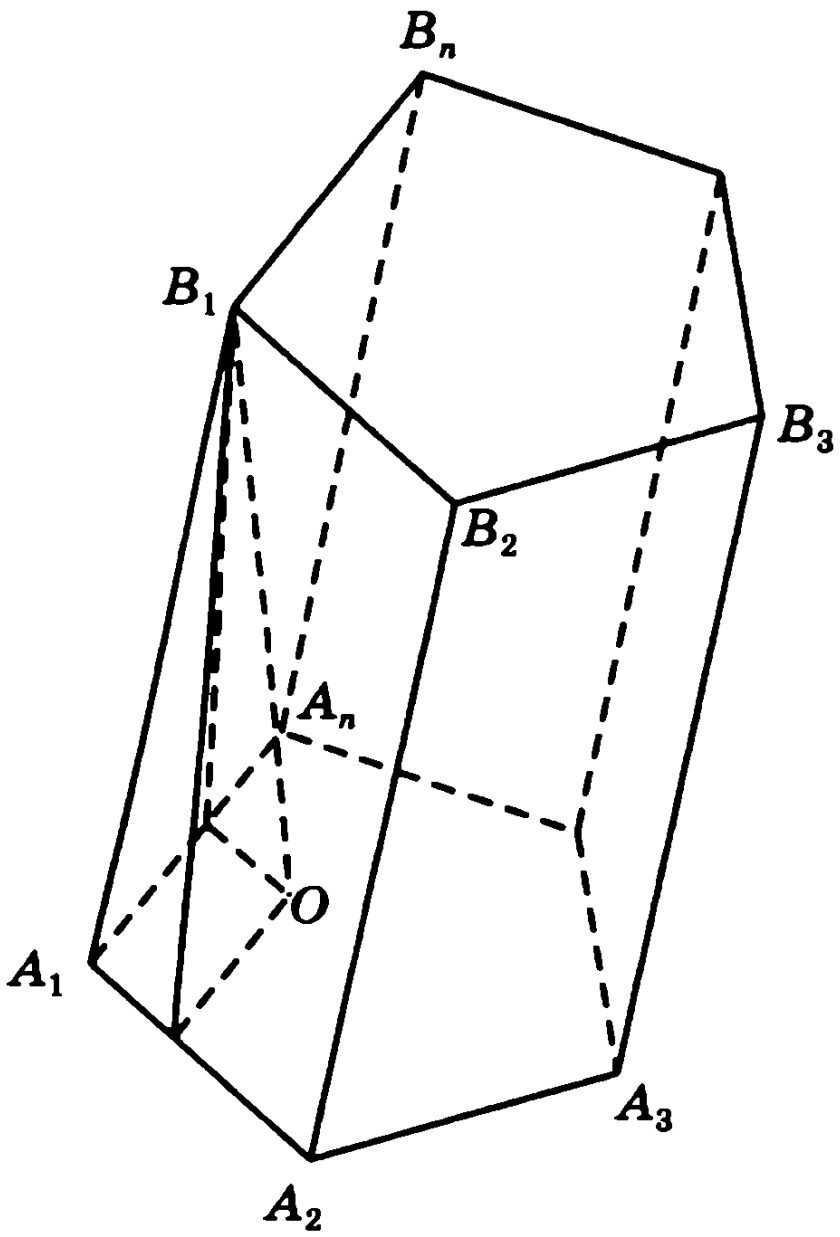


Рис. 83

151. Круглые тела

Заметим, что круглые тела по сравнению с многогранниками относительно трудно поддаются

изображению. Это замечание прежде всего относится к шару. По этой причине при решении стереометрических задач, как правило, сам шар (а тем более шары) стараются не изображать, так как многие задачи на круглые тела сводятся к задачам планиметрии.

При решении задач, связанных с цилиндром, используются такие понятия, как высота, образующая, радиус основания, осевое сечение, основание, поверхность (боковая и полная), и, соответственно, параметры: площадь осевого сечения, площадь боковой и полной поверхностей, площадь основания, объем цилиндра, радиус основания.

Что касается прямого кругового конуса (или просто конуса), то здесь добавляются угол при

вершине осевого сечения и угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

152. Цилиндр

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется **цилиндром** (рис. 84).

Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги — **основаниями цилиндра**.

Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра**, а длина образующей — **высотой цилиндра**.

Прямая OO_1 называется **осью цилиндра**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось

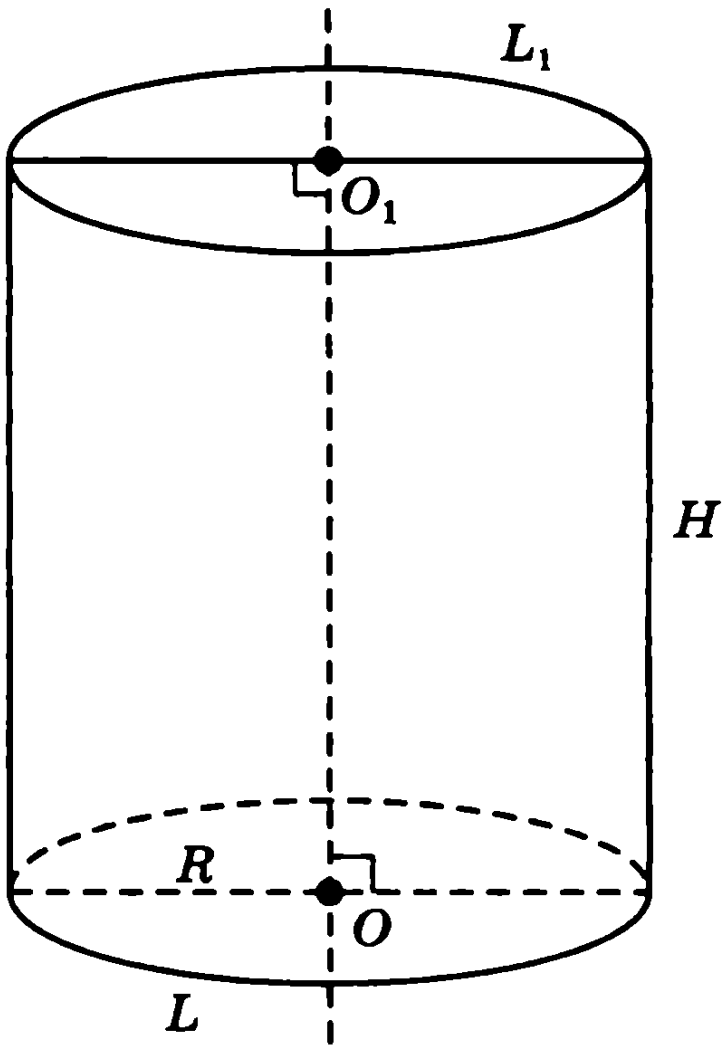


Рис. 84

цилиндра, представляет собой **прямоугольник**, у которого две стороны — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра, а само сечение называется **осевым**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси, является **кругом.**

$S_{бок.} = 2\pi RH$; $S_{полн.} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$;

$S_{полн.} = 2\pi R(R + H)$; $V = \pi R^2 H$.

153. Конус

Конусом называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L (рис. 85).

Коническая поверхность называется **боковой поверхностью конуса**, а круг — **основанием конуса.**

Точка C — **вершина конуса**, а образующие конической поверхности — **образующие конуса.**

Прямая OC называется **осью конуса**, а отрезок OC называется **высотой конуса.**

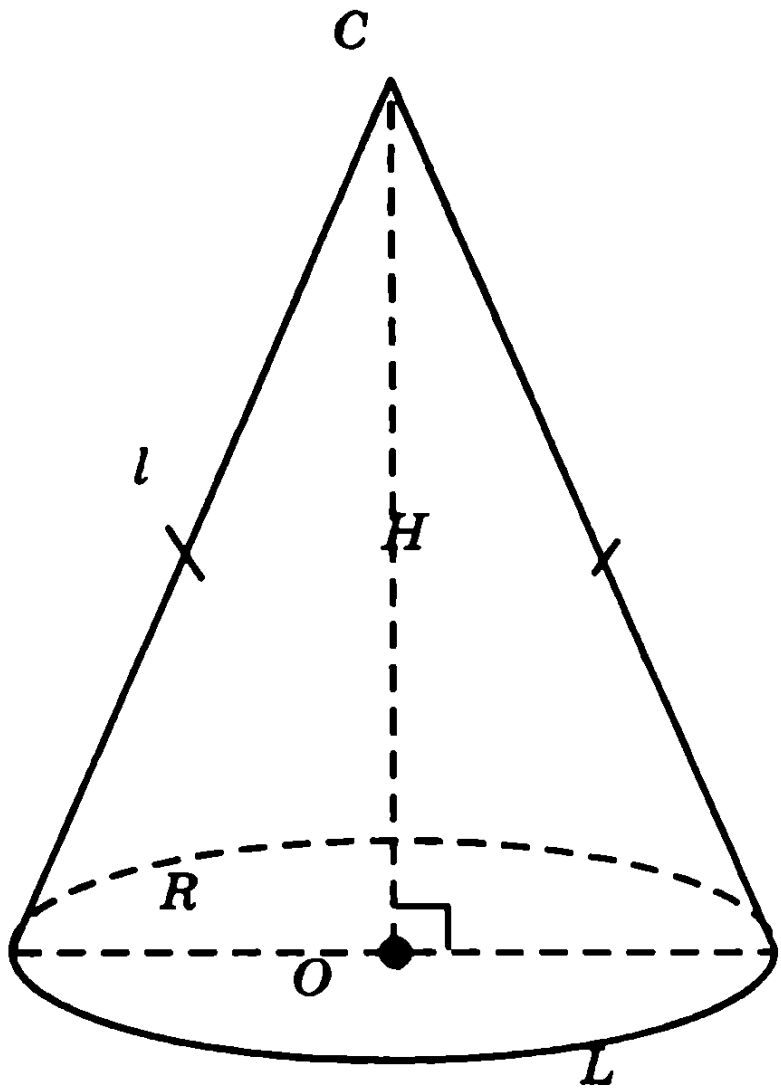


Рис. 85

Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется

вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым**.

$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l); \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H .$$

Если конус пересечь плоскостью, перпендикулярной к его оси, то та часть конуса, которая заключена между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченным конусом** (рис. 86).

Отрезок, соединяющий центры оснований, называется **высотой** усеченного конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки обра-

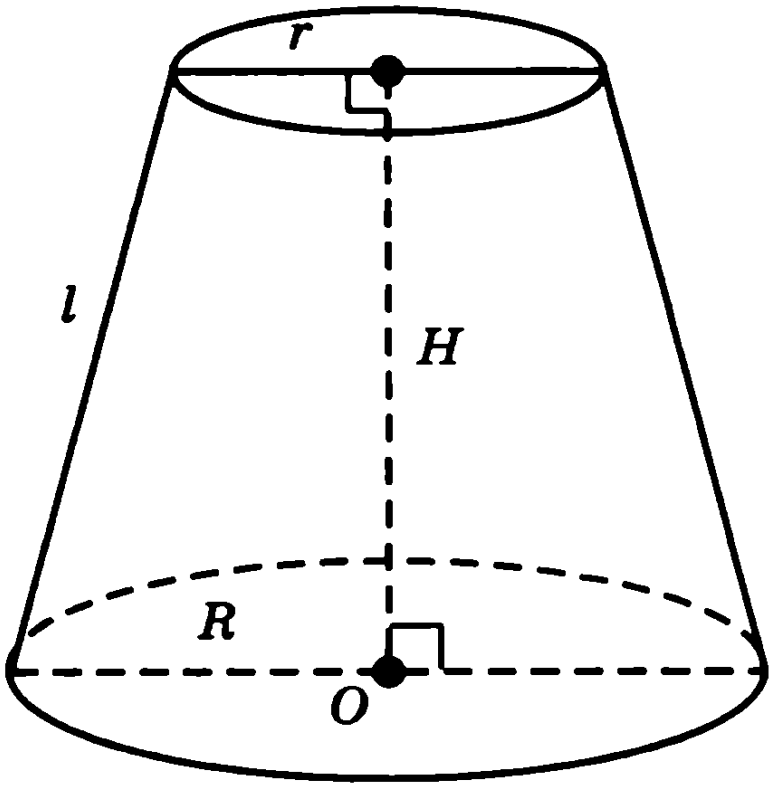


Рис. 86

зующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r);$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2;\ \ S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2;\ \ V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

154. Шар

Шаровой, или **сферической**, **поверхностью** (или просто **сферой**) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки — **центра** шара (точка O, рис. 87).

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется **шаром**.

Шар можно получить вращением полукруга (или круга) около его диаметра.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр O, представляет собой наибольший круг.

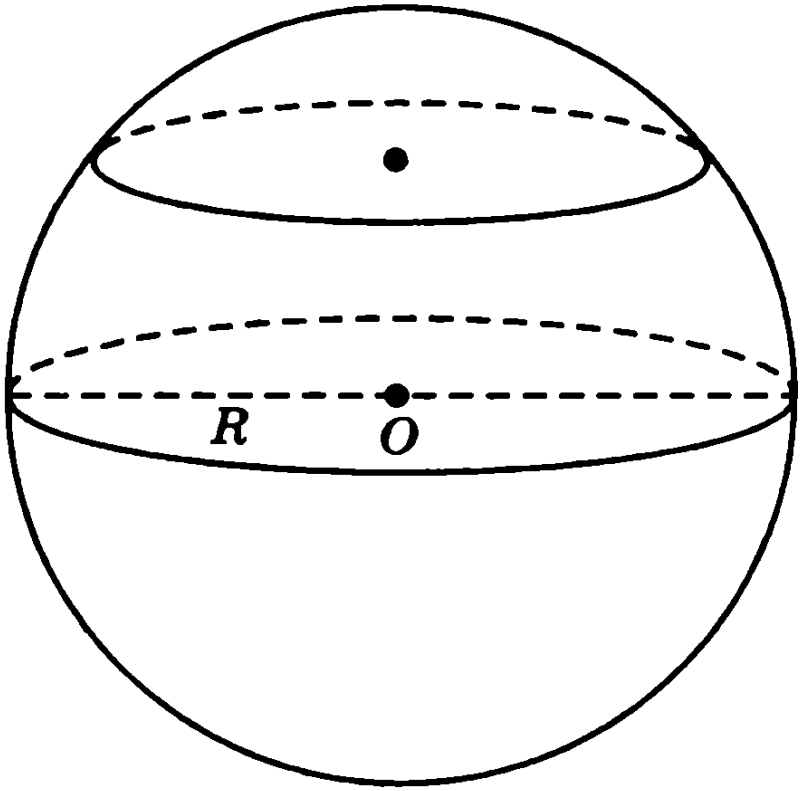


Рис. 87

Если плоскость имеет со сферой только одну общую точку, то она называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка — **точкой касания** плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости. Верно и обратное.

Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется **вписанной в многогранник.**

Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около многогранника.**

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \pi D^2;$$

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3 .$$

1. Шаровой сегмент (рис. 88).

Если S — площадь сферической поверхности сегмента, h — высота, V — объем, r — радиус основания, то

$$S = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) .$$

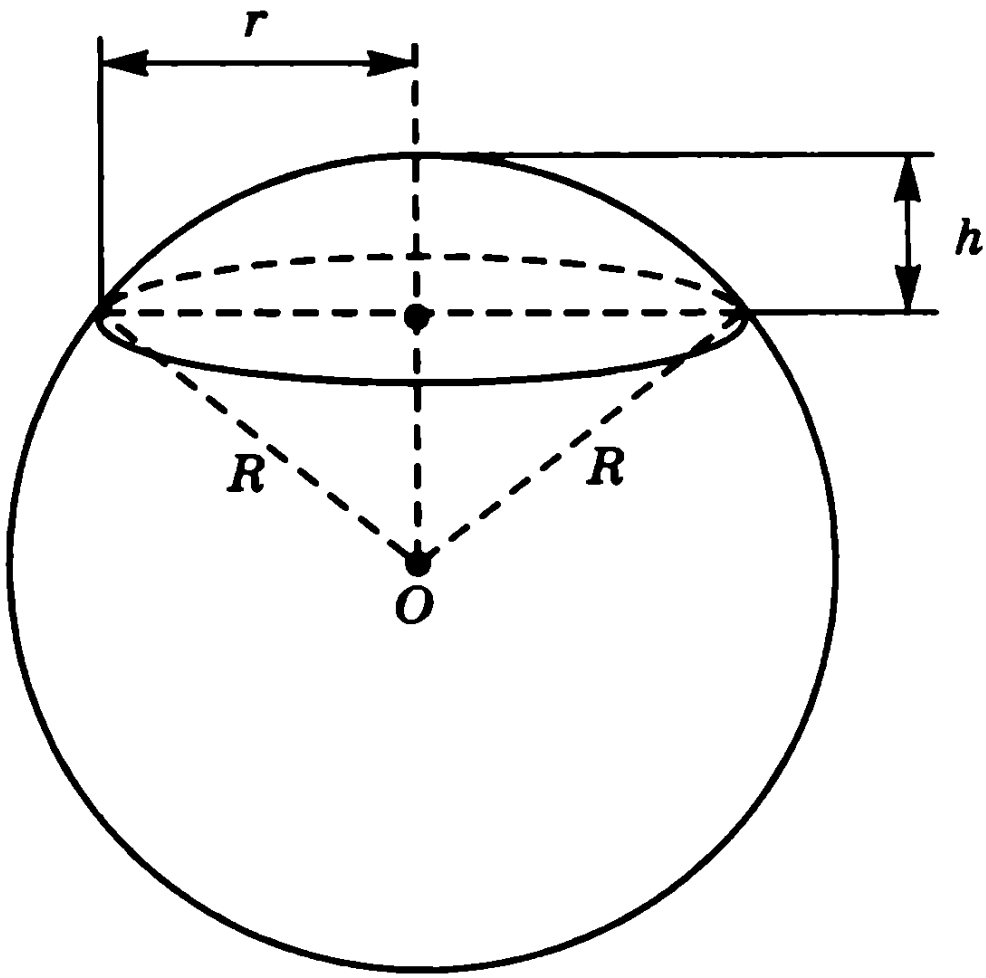


Рис. 88

2. Шаровой сектор (рис. 88).

$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi d^2 h \ .$$

3. Шаровой пояс (рис. 89).

Если h — высота шарового пояса, r_1 и r_2 — радиусы оснований, то

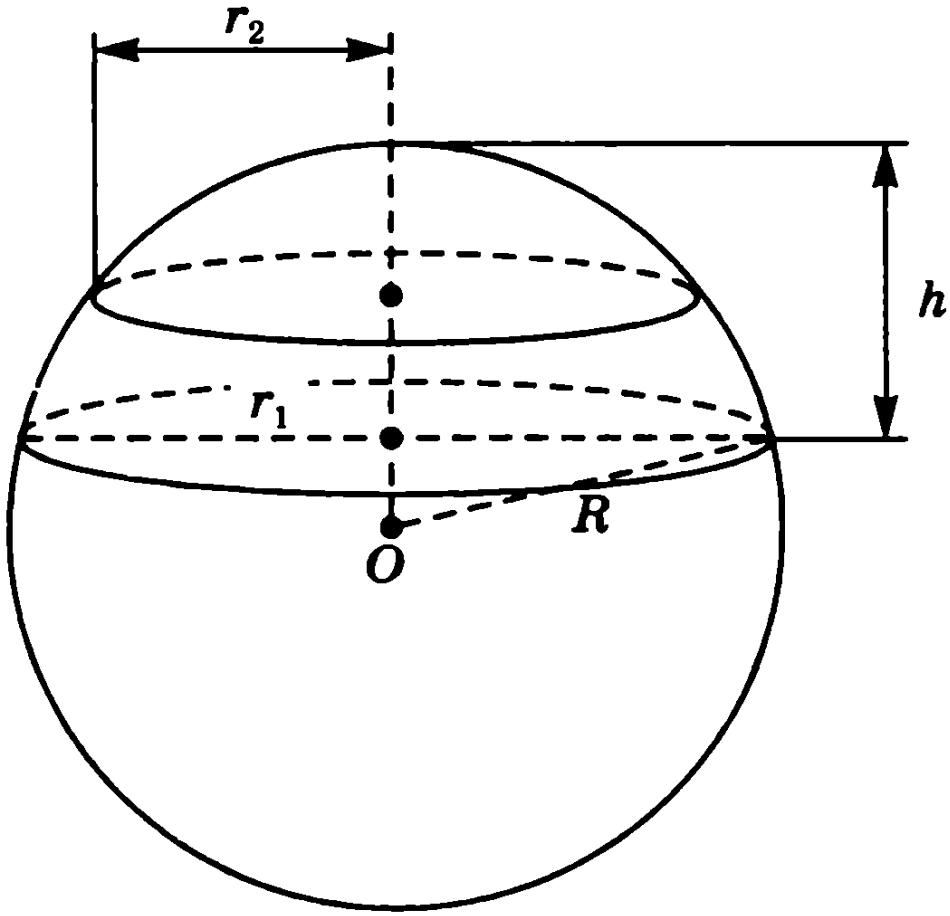


Рис. 89

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$

$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения 3

Таблицы 8

Квадраты натуральных чисел от 1 до 99.... 8
Кубы натуральных чисел от 1 до 99..... 8
Степени некоторых числе 9
Простые числа до 997 9

Глава 1. **Основные формулы** 10

Часть 1. Алгебра и начала анализа 10

1. Уравнение I степени (линейное) 10
2. Система линейных уравнений 11
3. Уравнение II степени (квадратное).....12
4. Теорема Виета.....14
5. Разложение квадратного трехчлена на множители 15
6. Биквадратное уравнение 16
7. Возвратное уравнение IV степени 16
8. Свойства степеней 18
9. Формулы сокращенного умножения ..18
10. Свойства арифметических корней.....20
11. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.....21

12. Формулы сложения 22
13. Формулы двойных и тройных аргументов 23
14. Формулы половинного аргумента (для функции sin и cos — формулы понижения степени) 24
15. Универсальные тригонометрические подстановки 25
16. Формулы преобразования суммы в произведение 25
17. Формулы преобразования произведения в сумму 28
18. Радианная и градусная меры углов ... 29
19. Знаки тригонометрических функций 30
20. Формулы приведения 31
21. Значения тригонометрических функций для некоторых углов 32
22. Периоды тригонометрических функций 33
23. Обратные тригонометрические функции 34
24. Значения обратных тригонометрических функций некоторых углов 37
25. Простейшие тригонометрические уравнения 38
26. Средние величины 39
27. Некоторые важные неравенства 40
28. Прогрессии 41

29. Логарифмы и их свойства 43
30. Неравенства 45
31. Таблица производных
и первообразных элементарных
и сложных функций 53
32. Правила дифференцирования 55
33. Уравнение касательной 56
34. Правила нахождения первообразных 57
35. Формула Ньютона–Лейбница 57
36. Площадь криволинейной трапеции ...58
37. Площадь фигуры, заключенной
на отрезке 59
38. Объем тела вращения 60
39. Формула Лагранжа 60

Глава 2. **Геометрия 65**

Часть 1. **Планиметрия 65**
40. Классификация углов.....65
41. Углы при параллельных прямых 66
42. Теорема Фалеса 67
43. Равенство углов со взаимно
перпендикулярными сторонами 68
44. Произвольный треугольник 69
45. Прямоугольный треугольник 76
46. Равносторонний (правильный)
треугольник 77
47. Четырехугольник 78
48. Параллелограмм.....80
49. Ромб.....81

50. Прямоугольник 81
51. Квадрат 82
52. Трапеция 83
53. Многоугольник (выпуклый) 86
54. Правильный многоугольник 87
55. Длина окружности. Площадь круга и его частей 88
56. Углы и окружность 90
57. Метрические отношения в окружности 91

Часть 2. **Стереометрия 93**
58. Призма 93
59. Прямоугольный параллелепипед 94
60. Куб (a — ребро) 95
61. Пирамида 96
62. Цилиндр 98
63. Конус 99
64. Шар, сфера 101
65. Шаровой сегмент 102
66. Шаровой сектор 103
67. Шаровой пояс 103

Глава 3. **Краткие теоретические сведения по курсу алгебры VII–XI классов 104**

§1. Числа и числовые выражения 104
68. Число 104

69. Числовые промежутки 105
70. Модуль действительного числа 110
71. Числовое выражение 114
72. Стандартный вид числа 114
73. Целая часть числа. Дробная часть числа 115
74. Погрешность приближения 116
75. Пропорции. Производные пропорции... 117
76. Периодические дроби 119
77. Проценты 122
78. Деление числа на части прямо и обратно пропорционально данным 125

§2. Алгебраические выражения 127

79. Алгебраическое выражение и его ОДЗ 127
80. Одночлен 129
81. Многочлен 130
82. Разложение многочлена на множители 133
83. Дробь 134
84. Тождество 137
85. Корень n-й степени из действительного числа 137
86. Степень с целым и дробным показателем 139

§3. Уравнения 141

87. Уравнение с одним неизвестным 141

88. Основные свойства уравнений 142
89. Общие методы решения уравнений . 145
90. Система двух уравнений с двумя неизвестными..... 149
91. Линейные уравнения..... 152
92. Квадратные уравнения 153
Неполные квадратные уравнения ... 156
Квадратное уравнение приведенного вида 158
Биквадратные уравнения 158
93. Теорема Виета 159
94. Иррациональные уравнения..... 160

§4. Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений 162
95. Показательные уравнения..... 163
96. Показательно-степенные уравнения 165
97. Логарифмические уравнения..... 166

§5. Тригонометрические уравнения 168
98. Типы тригонометрических уравнений и методы их решения 169

§6. Неравенства 171
99. Числовые неравенства 171

100. Основные свойства числовых неравенств 172
101. Действия с неравенствами 173
102. Неравенства с одним неизвестным. 174
103. Рациональные неравенства 178
104. Неравенства с модулем 180
105. Системы неравенств 182

§7. Функции 183
106. Способы задания функции 185
107. Монотонность функции 186
108. Четные и нечетные функции 187
109. Периодические функции 188
110. Обратная функция 189
111. Экстремумы функции 189
112. Необходимое и достаточное условия экстремума функции 191
113. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке 192
114. Область определения основных элементарных функций 193
115. Множество (область) значений основных элементарных функций ... 194
116. Расположение корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ 196
117. Применение теоремы Виета для определения корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ 203

Глава 4. **Краткие теоретические сведения по курсу геометрии VII–XI классов 208**

Часть 1. **Планиметрия 208**

118. Углы 208
119. Многоугольник 214
120. Правильные многоугольники..... 217
121. Треугольник 219
122. Признаки равенства треугольников... 226
123. Неравенства треугольника..... 228
124. Определение вида треугольника по его сторонам 229
125. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства) 229
126. Признаки равенства прямоугольных треугольников 230
127. Четыре замечательные точки треугольника 233
128. Произвольный треугольник..... 240
129. Теорема Менелая..... 241
130. Теорема синусов..... 242
131. Теорема косинусов 242
132. Подобные треугольники..... 243
133. Признаки подобия треугольников . 244
134. Четырехугольник..... 247
135. Параллелограмм 250
136. Трапеция 254
137. Прямоугольник..... 259

138. Ромб 261
139. Квадрат 262
140. Окружность 263
141. Свойства касательных к окружности 266
142. Окружность и треугольник 267
143. Окружность и четырехугольник 268
144. Углы и окружность 270
145. Метрические соотношения в окружности 276
146. Длина окружности. Площадь круга и его частей 278

Часть 2. **Стереометрия 280**
147. Призма 281
148. Параллелепипед 285
149. Пирамида 287
150. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды 293
151. Круглые тела 298
152. Цилиндр 300
153. Конус 302
154. Шар 306

Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

МАТЕМАТИКА

Справочник для подготовки к ГИА и ЕГЭ

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Подписано в печать 12.06.2013.
Формат 70 × 100 1/64. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 6,65. Тираж 5000 экз.
Заказ № 4337.

ООО «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.
Сайт издательства www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин www.phoenixbooks.ru

Отпечатано с готовых файлов заказчика
в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.