И.И. БАВРИН

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ ХИМИКО-БИОЛОГИЧЕСКИХ И МЕДИЦИНСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Утверждено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов химико-биологических специальностей педагогических вузов

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2003

УДК 517
ББК 22.11
Б13

Баврин И. И. **Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей**. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 328 с. — ISBN 5-9221-0334-2.

Профессионально ориентированный учебник содержит изложение элементов аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, сопровождаемое рассмотрением математических моделей из физики, химии, биологии и медицины. Приведено много примеров и задач, иллюстрирующих понятия высшей математики и ее методы, а также упражнений для самостоятельной работы.

Может быть использован студентами других вузов и учреждений среднего профессионального образования.

Ил. 126. Библиогр. 14 назв.

Рецензенты:

кафедра высшей математики Московского государственного открытого педагогического университета им. М. А. Шолохова (зав. кафедрой доктор педагогических наук, профессор А. И. Нижников)

профессор Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, докт. физ.-матем. наук В. И. Гаврилов.

ISBN 5-9221-0334-2

ОТ АВТОРА

Математические методы исследования получили широкое распространение в естествознании и медицине. Поэтому подготовка будущих учителей специальностей «Химия», «Биология» и выпускников медицинских специальностей вузов тесно связана с получением прочных математических знаний и практических навыков. Основой этих знаний является курс «Высшей математики», читаемый студентам этих специальностей.

В связи с этим в нем особое внимание уделено понятиям и методам, имеющим прикладное значение. Это отражено как в физическом, химическом, биологическом и геометрическом истолковании основных понятий высшей математики, так и в большом числе рассмотренных примеров, задач и математических моделей из физики, химии, биологии и медицины.

Изложение теоретического материала сопровождается разобранными примерами и задачами, а также упражнениями для самостоятельной работы. (Ответы к упражнениям даются по необходимости сразу после текста в квадратных скобках).

Книга может быть использована и студентами сельскохозяйственных вузов. Она будет полезна также и студентам математических специальностей педвузов, учителям математики и учащимся школ и классов с углубленным изучением математики как материал применения математики в естествознании.

Читателям, желающим углубить свои математические знания и расширить сферу их применения в химии, биологии и медицине, следует обратиться к дополнительной литературе, список которой приведен в конце книги (ссылки на нее по мере изложения приводятся в квадратных скобках).

ЧАСТЬ I

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Введение

Роль математики в различных областях естествознания и в разное время была неодинаковой. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его основные черты и свойства на языке математических понятий и соотношений, или, как теперь принято говорить, возможность построить «математическую модель» изучаемого объекта.

Приведем простейший пример математической модели. Представим себе, что требуется определить площадь пола комнаты. Для выполнения такого задания измеряют длину и ширину комнаты, а затем перемножают полученные числа. Эта элементарная процедура фактически означает следующее. Реальный объект — пол комнаты — заменяется абстрактной математической моделью — прямоугольником. Прямоугольнику приписываются размеры, полученные в результате измерения, и площадь такого прямоугольника приближенно принимается за искомую площадь.

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. прогнозировать результаты будущих наблюдений.

Математические модели давно и весьма успешно применяются в механике, физике, астрономии.

В современный период роль математических методов в естествознании все возрастает. Они теперь широко используются и в биологии, и в химии. Здесь также успешно применяются математические модели. Данная книга содержит некоторые из этих применений.

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Метод координат на плоскости

1. Декартовы прямоугольные координаты. Выберем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy с указанными на них положительными направлениями. Прямые Ox и Oy называются *координатными осями*, точка их пересечения O — *началом координат*. Обычно полагают, что ось Ox горизонтальна, а ось Oy вертикальна относительно наблюдателя; положительное направление на Ox слева направо, на Oy — снизу вверх (рис. 1).

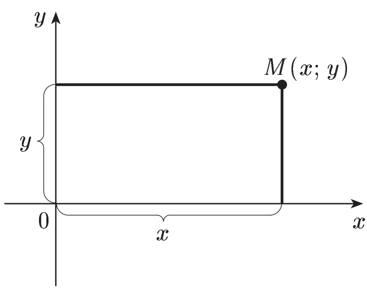

Рис. 1

Возьмем теперь некоторую единицу масштаба, с помощью которой будут производиться все измерения на плоскости xOy.

Совокупность координатных осей Ox, Oy и выбранной единицы масштаба называется *декартовой прямоугольной* (или кратко *прямоугольной*) *системой координат* на плоскости *).

Произвольной точке M плоскости поставим в соответствие два числа (рис. 1):

а) *абсциссу* x, равную расстоянию точки M от оси Oy, взятому со знаком «+», если M лежит правее Oy, и со знаком «−», если M лежит левее Oy;

б) *ординату* y, равную расстоянию точки M от оси Ox, взятому со знаком «+», если M лежит выше Ox, и со знаком «−», если M лежит ниже Ox.

Абсцисса x и ордината y называются *декартовыми прямоугольными* (или кратко *прямоугольными*) координатами точки M. Обозначение $M(x; y)$ означает: точка M с абсциссой, равной x, и ординатой, равной y.

Отметим, что *каждой точке плоскости соответствует одна пара действительных чисел* x и y (ее координат). Верно и обратное: *каждой паре действительных чисел* x *и* y *соответствует одна точка*

*) Декартова прямоугольная система координат носит имя французского математика, основателя аналитической геометрии Рене Декарта (1596–1650).

плоскости. Это значит, что на плоскости положение произвольной точки M полностью определяется ее координатами x и y.

	I	II	III	IV
x	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$

Координатные оси Ox и Oy разбивают плоскость на I, II, III и IV квадранты*). Знаки координат точек в различных квадрантах указаны в таблице. При этом если точка $M(x;y)$ лежит на оси Oy, то $x = 0$; если $M(x;y)$ лежит на оси Ox, то $y = 0$. На рисунке 2 построены точки $M_1(2;1)$, $M_2(-4;3)$, $M_3(-4;-2)$, и $M_4(0;-2)$.

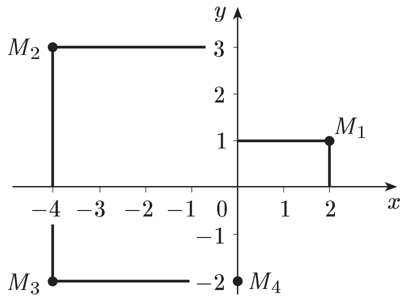

Рис. 2

2. Полярные координаты. Зафиксируем на плоскости точку O и выходящую из нее полупрямую Op, а также выберем единицу масштаба. Точка O называется *полюсом*, полупрямая Op — *полярной осью* (рис. 3).

Произвольной точке M плоскости поставим в соответствие два числа:

полярный радиус r, равный расстоянию точки M от полюса O, измеренному выбранной единицей масштаба;

полярный угол φ, равный углу между полярной осью Op и полупрямой OM.

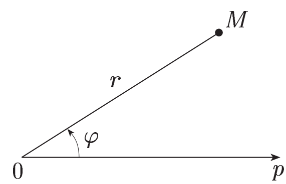

Рис. 3

Полярный угол φ измеряется в радианах, отсчет положительных (отрицательных) значений φ ведется от Op против движения (по движению) часовой стрелки. При этом обычно полагают, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Полюсу O соответствует полярный радиус $r = 0$, полярный угол для него не определен.

Запись $M(r;\varphi)$ означает: точка M с полярными координатами r и φ.

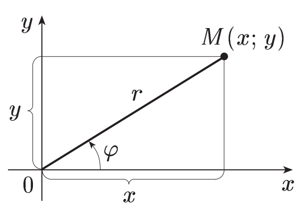

Рис. 4

Будем считать начало координат O прямоугольной системы xOy одновременно полюсом O, а положительную часть оси Ox примем за полярную ось Op (рис. 4).

Из рисунка 4 видно, что для точки $M(x;y)$ $(M(r;\varphi))$ справедливы соотношения:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \tag{1}$$

и

*) Иногда их также называют координатными углами.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Формулы (1) выражают прямоугольные координаты точки M через ее полярные координаты. Это можно доказать для любого расположения точки M на координатной плоскости. Формулы (2) выражают полярные координаты точки M через ее прямоугольные координаты и тоже верны при любом положении точки M.

Заметим, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ дает два значения φ, так как $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Поэтому для вычисления полярного угла φ точки M по ее прямоугольным координатам x и y предварительно выясняют, в каком квадранте лежит точка M.

Пример 1. Даны прямоугольные координаты точки A: $x=1$, $y=1$. Найти ее полярные координаты. По формулам (2) находим $r=\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$. Из двух значений $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ выбираем $\varphi = \frac{\pi}{4}$, так как точка A лежит в первом квадранте. Итак, полярные координаты данной точки: $r=\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Пример 2. Полярные координаты точки A таковы: $r=2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда по формулам (1) прямоугольные координаты этой точки будут:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad y = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2.$$

3. Основные задачи, решаемые методом координат.

Задача о расстоянии между двумя точками. Найдем расстояние d между двумя заданными точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ (рис. 5).

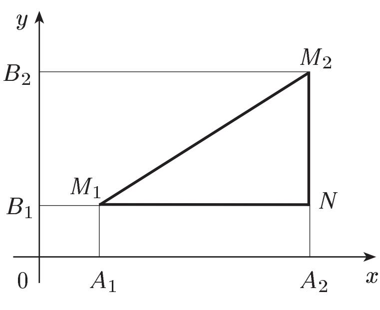

Рис. 5

Из прямоугольного треугольника M_1NM_2 по теореме Пифагора имеем:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2+|M_2N|^2}.$$

Из курса геометрии девятилетней школы известно, что расстояние d между точками A и B, расположенными на координатной прямой (оси), вычисляется по формуле $d=|AB|=|x_B-x_A|$, где x_A и x_B — координаты точек A и B этой прямой. Тогда $|M_1N| = |A_1A_2| = |x_2-x_1|$, $|M_2N| = |B_1B_2| = |y_2-y_1|$. Поэтому

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{3}$$

Пример. Найти расстояние между точками $A(-1;-2)$ и $B(-4;-2)$. По формуле (3) имеем:

$$|AB| = \sqrt{(-4+1)^2+(2+2)^2} = 5.$$

Задача о делении отрезка в данном отношении. Пусть даны точки

$M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

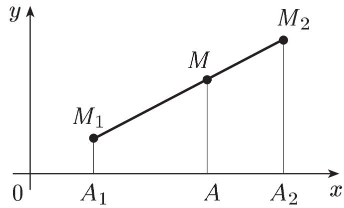

Рис. 6

Требуется найти точку $M(x; y)$, лежащую на отрезке $[M_1M_2]$ и делящую его в данном отношении

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda. \tag{4}$$

Опустим из точек M_1, M и M_2 перпендикуляры на ось Ox (рис. 6). По известному предложению из элементарной геометрии о пересечении сторон угла параллельными прямыми получим:

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|A_1A|}{|AA_2|}$$

При выбранном расположении точек имеем:

$$|A_1A| = x - x_1, \qquad |AA_2| = x_2 - x.$$

Поэтому заданное отношение (4) принимает вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda,$$

откуда:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{5}$$

Аналогично

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{6}$$

В частности, если $\lambda = 1$, т. е. при делении отрезка $[M_1M_2]$ пополам, получаем:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Примечание. Формулы (5) и (6) верны при любом расположении точек M_1 и M_2.

Пример. Вычислить координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок $[M_1M_2]$ между точками $M_1(1; 1)$ и $M_2(4; 7)$ в отношении $\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|} = 2$. Согласно формулам (5) и (6) имеем:

$$x = \frac{1 + 2\cdot 4}{3} = 3, \qquad y = \frac{1 + 2\cdot 7}{3} = 5.$$

4. Уравнение линии на плоскости. Прямоугольная и полярная системы координат позволяют задавать различные линии на плоскости их уравнениями.

Определение. *Уравнением линии* на плоскости в прямоугольной системе координат называется уравнение

$$f(x, y) = 0$$

с переменными x и y, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки плоскости, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y уравнения линии называются *текущими* координатами.

Покажем, например, что уравнение $x - y = 0$ или

$$x = y \tag{7}$$

является уравнением биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

По свойству биссектрисы угла для произвольной точки $M(x; y)$ (лежащей на биссектрисе) имеем: $|N_2M| = |N_1M|$ или $|ON_1| = |ON_2|$ (рис. 7) и поэтому $x = y$, т. е. координаты всех точек биссектрисы удовлетворяют уравнению (7). Очевидно также, что у любой точки, не лежащей на данной биссектрисе, координаты не равны между собой и не удовлетворяют уравнению (7).

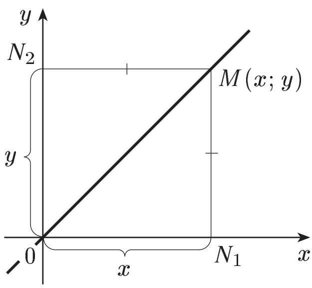

Рис. 7

Отметим, что геометрическим образом данного заранее уравнения не всегда является линия. Может случиться, что уравнению соответствует лишь несколько точек (уравнению $x^2 + y^2 = 0$, например, на плоскости соответствует только одна точка $(0; 0)$). Встречаются и такие случаи, когда заданному уравнению не соответствует на плоскости ни одной точки (например, уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$).

§ 2. Прямая линия

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть прямая l не параллельна оси Oy (рис. 8). Обозначим точку пересечения l с осью Oy через $B(0; b)$, а угол между положительным направлением оси Ox и l через φ. Угол φ, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки $(0 \leqslant \varphi < \pi)$, называется *углом наклона* прямой l к оси Ox.

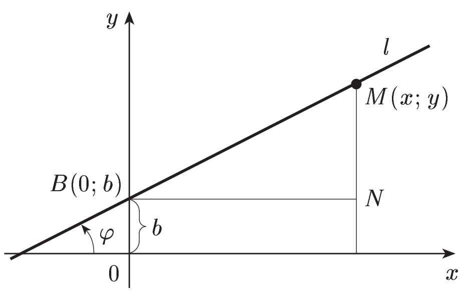

Рис. 8

Выведем уравнение прямой l.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка прямой l с текущими координатами x и y. Из прямоугольного треугольника BNM (рис. 8) имеем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y - b}{x}. \tag{1}$$

Эту величину называют угловым коэффициентом прямой и обозначают через k: $k = \operatorname{tg}\varphi$. Тогда из (1) получим:

$$k = \frac{y-b}{x},$$

откуда:

$$y = kx + b \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*; число b называется *начальной ординатой* (это ордината точки B).

Пример. Если $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $b = -3$, то $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, и уравнение данной прямой имеет вид $y = x - 3$.

Если в уравнении (2) $k = 0$, то имеем уравнение прямой

$$y = b, \tag{3}$$

параллельной оси Ox и проходящей через точку $B(0; b)$. При $b = 0$ из (3) получаем уравнение координатной оси Ox: $y = 0$.

По аналогии с уравнением (3) уравнение

$$x = a \tag{4}$$

есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $A(a; 0)$. При $a = 0$ из (4) имеем уравнение координатной оси Oy: $x = 0$.

2. Общее уравнение прямой. Уравнением с угловым коэффициентом может быть задана любая прямая на плоскости, не параллельная оси ординат. При рассмотрении уравнения первой степени

$$Ax + By + C = 0, \tag{5}$$

в котором коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, оказывается, что любую прямую без каких-либо ограничений, можно задать уравнением (5).

Теорема. *Каждая прямая на плоскости с прямоугольной декартовой системой координат определяется уравнением первой степени, и наоборот: каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую на плоскости.*

Доказательство. 1) Пусть дана прямая, не параллельная оси ординат. В этом случае прямая описывается уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, которое является частным случаем уравнения (5) при $A = k$, $B = -1$, $C = b$.

Пусть теперь прямая параллельна оси Oy. Тогда ее уравнение запишется в виде $x = a$. Это уравнение тоже частный случай уравнения (5) при $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. Итак, любая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени.

2) Покажем теперь, что произвольному уравнению первой степени (5) (A и B одновременно не равны нулю) соответствует некоторая прямая на плоскости.

Действительно, если $B \neq 0$, то уравнение (5) можно преобразовать в уравнение

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

т. е. в уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{A}{B}$ и начальной ординатой $b = -\frac{C}{B}$. Если $B = 0$, $A \neq 0$, то уравнение (5) преобразуется к виду $x = -\frac{C}{A}$, т. е. в уравнение прямой, параллельной оси Oy. Теорема доказана.

Уравнение первой степени (5) (A и B одновременно не равны нулю), описывающее на плоскости любую прямую, называется *общим уравнением прямой*.

3. Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку. Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент k. Уравнение этой прямой имеет вид:

$$y = kx + b. \tag{6}$$

Так как искомая прямая проходит через точку M_1, то

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Вычитая из равенства (6) равенство (7), получаем:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{8}$$

Это и есть уравнение искомой прямой.

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 8)$, с угловым коэффициентом $k = 1$ согласно (8) есть $y - 8 = x + 1$, или $x - y + 9 = 0$.

4. Уравнение прямой в отрезках. Предположим, что в общем уравнении прямой $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Перенеся в нем C в правую часть и разделив обе части полученного уравнения на $-C$, получим:

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Отсюда, вводя обозначения $-\frac{C}{A} = a$, $-\frac{C}{B} = b$, приходим к уравнению

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{9}$$

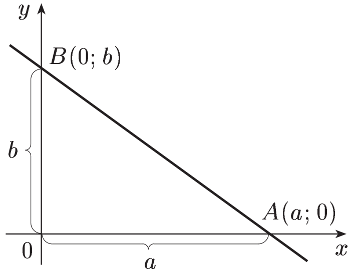

Рис. 9

Уравнение (9) называется *уравнением прямой в отрезках*. Это название объясняется тем, что числа a и b определяются отрезками $[OA]$ и $[OB]$, которые прямая отсекает на осях координат (рис. 9). Такой вид уравнения удобен для построения прямой.

Заметим, что прямые, параллельные координатным осям, и прямые, проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнениями в отрезках.

Пример. Записать уравнение прямой $2x+5y-10=0$ в отрезках и построить эту прямую. Перепишем данное уравнение в виде $2x+5y=10$, откуда $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=1$ и, значит, $a=5$, $b=2$. Наконец, откладываем на осях координат отрезки $a=5$, $b=2$ и через их концы $(5;0)$ и $(0;2)$ проводим прямую.

§ 3. Основные задачи на использование уравнений прямой

1. Угол между двумя прямыми. Рассмотрим на плоскости две прямые $l_1\colon y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ с углами наклона к оси Ox соответственно φ_1 и φ_2 (рис. 10).

Углом между прямыми l_1 и l_2 будем называть угол $(\widehat{l_1, l_2})=\varphi$ — *наименьший угол*, на который надо повернуть первую прямую l_1 вокруг точки пересечения M против часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой l_2 $(0\leqslant\varphi<\pi)$.

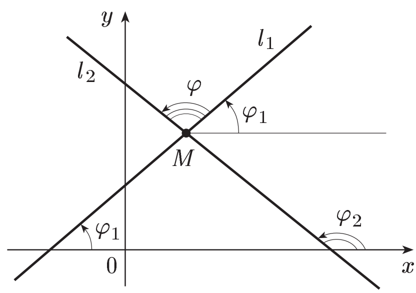

Рис. 10

Из рисунка 10 видно, что $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\cdot\operatorname{tg}\varphi_1}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}. \qquad (1)$$

Формула (1) дает выражение тангенса угла между двумя прямыми через угловые коэффициенты этих прямых.

Если прямые l_1 и l_2 параллельны, то $\varphi_1=\varphi_2$ и, следовательно, $k_1=k_2$, т. е. *параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты.*

Пусть $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, т. е. l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны. В этом случае $\varphi_2=\varphi_1+\dfrac{\pi}{2}$, откуда $\operatorname{tg}\varphi_2=\operatorname{tg}\left(\varphi_1+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\varphi_1=-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$ или $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$, т. е. *угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

Пример. Найти две прямые, проходящие через начало координат, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой $y=2x-3$. Так как искомые прямые проходят через точку $(0;0)$, то их уравнения имеют вид $y=k_1x$ и $y=k_2x$. Для данной прямой $k=2$, и отсюда, на основании условий параллельности и перпендикулярности прямых, получаем $k_1 = 2$ и $k_2 = -\frac{1}{2}$. Поэтому искомые прямые запишутся уравнениями: $y = 2x$ и $y = -\frac{1}{2}x$.

2. Взаимное расположение двух прямых. Пусть даны два уравнения прямых l_1 и l_2 в общем виде:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{2}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{3}$$

Если прямые l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке $M(x; y)$, то координаты этой точки должны удовлетворять одновременно двум уравнениям (2) и (3). Следовательно, чтобы найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2, надо решить систему уравнений (2) и (3). Если эта система имеет единственное решение, то прямые пересекаются в одной точке. Если указанная система не имеет решения или имеет бесконечно много решений, то прямые соответственно параллельны или совпадают.

Пример 1. Найти точку пересечения прямых $2x + 3y - 8 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0, \end{cases}$$

получим $x = 1$, $y = 2$. Следовательно, данные прямые пересекаются в точке $M(1; 2)$.

Пример 2. Параллельны ли прямые $5x - 3y + 1 = 0$ и $10x - 6y + 6 = 0$? Переписав эти уравнения в виде $y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$ и $y = \frac{5}{3}x + 1$, получаем, что угловые коэффициенты равны, т. е. данные прямые параллельны.

3. Расстояние от точки до прямой. Решим следующую задачу: найти расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$ (под расстоянием d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l понимается длина перпендикуляра, опущенного из M_0 на l).

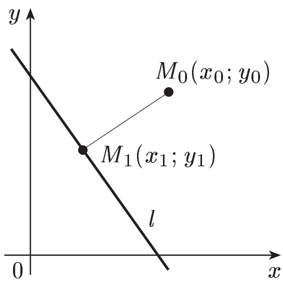

Рис. 11

Предположим, что прямая l не параллельна ни одной из координатных осей Ox и Oy. Так как угловой коэффициент прямой l есть $-\frac{A}{B}$, то уравнение перпендикуляра к прямой l, проходящего через точку $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 11), запишется в виде:

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$$

или

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$

Пусть $M_1(x_1; y_1)$ — точка пересечения перпендикуляра с прямой l. Тогда $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $B(x_1 - x_0) - A(y_1 - y_0) = 0$ и

$$d = |M_0M_1| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \tag{4}$$

Найдем значения $x_1 - x_0$ и $y_1 - y_0$.

Для этого, переписав равенство $Ax_1 + By_1 + C = 0$ в виде $A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0$, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0, \\ Ax_1 + By_1 + C = 0 \end{cases}$$

относительно $x_1 - x_0$ и $y_1 - y_0$. Имеем:

$$x_1 - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C), \tag{5}$$

$$y_1 - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C), \tag{6}$$

Из (4), (5) и (6) получаем:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{7}$$

Можно показать, что формула (7) верна и в тех случаях, когда прямая l параллельна одной из координатных осей.

П р и м е р. Найдем расстояние от точки $M_1(-1; 2)$ до прямой $2x + y - 1 = 0$. Пользуясь формулой (7), получаем:

$$d = \frac{|2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

§ 4. Кривые второго порядка

Кривыми второго порядка называются линии, уравнения которых могут быть записаны следующим образом:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E и F — некоторые действительные числа, называемые *коэффициентами* уравнения, причем по крайней мере один из коэффициентов A, B или C отличен от нуля.

К числу линий второго порядка относятся *окружность*, *эллипс*, *гипербола* и *парабола*. Они играют большую роль в математике, естествознании и технике.

1. Уравнение окружности. Как известно, *окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *центром* окружности. Выведем уравнение окружности.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — центр окружности, R — ее радиус, а $M(x; y)$ — произвольная точка окружности с текущими координатами x и y

(рис. 12). По определению окружности $|M_0M| = R$. Отсюда, согласно формуле расстояния между двумя точками,

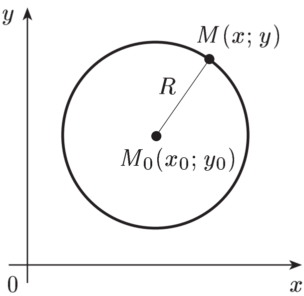

Рис. 12

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = R$$

или

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2. \tag{1}$$

Формула (1) представляет собой *каноническое* (т. е. простейшее) уравнение окружности. Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение принимает вид:

$$x^2+y^2 = R^2.$$

Пример. Написать уравнение окружности радиуса $R = 3$ с центром в точке $C(1; 2)$. Согласно формуле (1) имеем:

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 9.$$

2. Каноническое уравнение эллипса. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами эллипса*) есть величина постоянная, равная $2a$.

Выведем каноническое уравнение эллипса. Для этого выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ее ось Ox проходила через фокусы F_1 и F_2 (расстояние между фокусами обозначим через $2c$), а начало координат находилось в середине отрезка $[F_1F_2]$ (рис. 13). Тогда фокусы будут иметь координаты $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$.

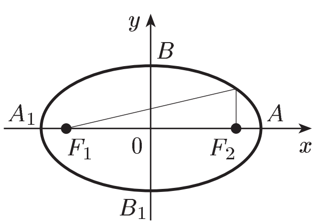

Рис. 13

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса. Согласно определению эллипса имеем:

$$|MF_1|+|MF_2| = 2a$$

или, по формуле расстояния между двумя точками,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Это и есть уравнение эллипса. Приведем его к каноническому виду. Перенося один из радикалов вправо, получим:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возведем теперь обе части последнего равенства в квадрат:

$$x^2+2xc+c^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2,$$

откуда

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2-cx. \tag{2}$$

Возведем в квадрат обе части равенства (2):

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^2 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

откуда

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Заметим, что $a^2 - c^2 > 0$, так как $2a > 2c$ или $a > c$ (сумма двух сторон треугольника больше третьей его стороны). Поэтому, обозначив $a^2 - c^2$ через b^2, получаем:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Деля обе части последнего равенства на a^2b^2, окончательно получаем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Формула (3) и есть каноническое уравнение эллипса.

Эллипс, отвечающий уравнению (3), изображен на рисунке 13.

Так как уравнение (3) содержит текущие координаты x и y только в четных степенях, то при замене x на $-x$, а y на $-y$ это уравнение не изменяется, т. е. эллипс симметричен относительно обеих осей координат. Из уравнения (3) при $y = 0$ получаем $x = \pm a$, т. е. эллипс пересекает ось Ox в двух точках $A(a; 0)$ и $A_1(-a; 0)$; при $x = 0$ получаем $y = \pm b$, т. е. эллипс пересекает ось Oy в двух точках $B(0; b)$ и $B_1(0; -b)$. Эти четыре точки называются *вершинами* эллипса. Отрезок $[A_1A]$ называется *большой осью* эллипса, а отрезок $[B_1B]$ — его *малой осью*. Следовательно, a — длина большой полуоси эллипса, b — длина его малой полуоси.

В частном случае, когда $a = b$, уравнение (3) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$ и определяет окружность с центром в начале координат. В этом случае $c = 0$.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине его большой оси, т. е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \tag{4}$$

Так как $c < a$, то для любого эллипса будет $0 \leqslant \varepsilon < 1$ (случай $\varepsilon = 0$ соответствует окружности). Эксцентриситет характеризует степень сжатия эллипса. Действительно, из (4) и того, что $b^2 = a^2 - c^2$, следует:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

и, значит,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отсюда видно, что, чем больше ε, тем меньше отношение $\dfrac{b}{a}$ и тем больше вытянут эллипс.

Эксцентриситет (ε), полуоси (a и b), расстояние между фокусами ($2c$) — параметры, которые полностью определяют эллипс с центром в начале координат.

Пример. Найти параметры a, b, c и ε эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=4$. Для этого приведем данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. Отсюда следует, что $a=8$, $b=6$,

$$c=\sqrt{64-36}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}, \qquad \varepsilon=\frac{2\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

3. Каноническое уравнение гиперболы. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, разность расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами гиперболы*) есть величина постоянная, равная $2a$. Обозначим через $2c$ расстояние между фокусами F_1 и F_2 (рис. 14).

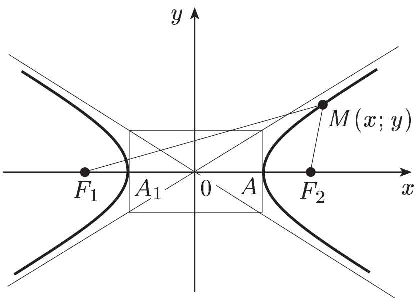

Рис. 14

Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка гиперболы. Тогда по определению $|MF_1|-|MF_2|=$ $=2a$ или $|MF_2|-|MF_1|=2a$. Эти условия, определяющие гиперболу, можно записать в виде:

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a.$$

Заметим, что $a<c$, так как $2a<2c$, что следует из определения гиперболы.

Далее вывод канонического уравнения гиперболы проводится аналогично выводу канонического уравнения эллипса. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{5}$$

где $b^2=c^2-a^2$.

Гипербола, отвечающая уравнению (5), изображена на рисунке 14. Подобно эллипсу гипербола симметрична относительно обеих осей координат. Она состоит из двух частей, которые называются ее *ветвями*. Из уравнения (5) при $y=0$ получаем $x=\pm a$, т. е. гипербола пересекает ось Ox в двух точках $A(a;0)$ и $A_1(-a;0)$, называемых вершинами гиперболы, отрезок $[A_1A]$ называется *вещественной осью* гиперболы.

Прямые

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

называются *асимптотами* гиперболы. При увеличении x по абсолютной величине ветви гиперболы все ближе прилегают к своим асимптотам. Для построения асимптот гиперболы целесообразно предварительно построить прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям, и с центром в начале координат (такой прямоугольник называется *основным прямоугольником* гиперболы).

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как $a < c$, то для любой гиперболы $\varepsilon > 1$. Учитывая, что $b^2 = c^2 - a^2$, имеем:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

и, значит,

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отсюда видно, что, чем меньше эксцентриситет гиперболы, т. е. чем ближе он к единице, тем больше вытянут основной прямоугольник по оси Ox.

Если у гиперболы (5) $a = b$, то она называется *равносторонней* (или *равнобочной*) и ее уравнение имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{6}$$

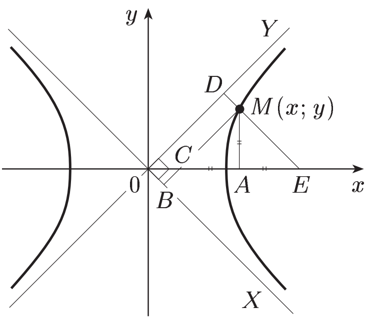

Рис. 15

Асимптотами для равносторонней гиперболы (6) служат взаимно перпендикулярные прямые $y = \pm x$. Поэтому их можно принять за оси прямоугольной системы координат (OX — за ось абсцисс, OY — за ось ординат) и рассматривать эту равностороннюю гиперболу по отношению к этим новым осям. Взяв на указанной гиперболе произвольную точку $M(x; y)$ (рис. 15), выразим новые координаты X и Y точки M через старые x и y. Из рисунка 15 видно, что

$$X = X_B = x_C \cos\frac{\pi}{4} = (x_A - y)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \tag{7}$$

$$Y = Y_D = x_E \cos\frac{\pi}{4} = (x_A + y)\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \tag{8}$$

Перемножив равенства (7) и (8) и приняв во внимание равенство (6), получаем:

$$XY = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}a^2$$

или, полагая для краткости

$$\frac{a^2}{2} = m, \qquad XY = m.$$

Следовательно, уравнению $xy = a$, где $a > 0$, соответствует равносторонняя гипербола, имеющая своими асимптотами оси координат и лежащая в I и III квадрантах (рис. 16). При $a < 0$ эта гипербола лежит во II и IV квадрантах (рис. 17).

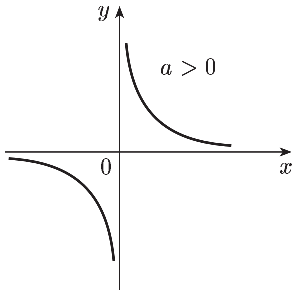

Рис. 16

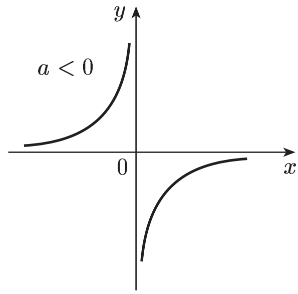

Рис. 17

П р и м е р. Найти параметры (a, b, c, ε) гиперболы, заданной уравнением $x^2 - 4y^2 = 36$. Для этого приведем данное уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$. Отсюда следует, что $a = 6$, $b = 3$, $c = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ и $\varepsilon = \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Уравнения асимптот гиперболы $y = \pm\frac{1}{2}x$.

4. Каноническое уравнение параболы. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F (называемой *фокусом* параболы) и от данной прямой l (называемой *директрисой* параболы).

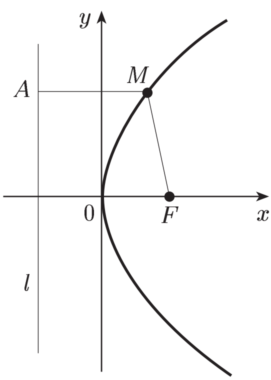

Рис. 18

Для вывода канонического уравнения параболы проведем ось Ox прямоугольной системы координат через фокус F перпендикулярно директрисе, начало координат O поместим на равных расстояниях от фокуса и директрисы (рис. 18). Расстояние от фокуса до директрисы обозначим через ρ (оно называется *параметром* параболы). В этом случае фокус будет иметь координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы будет $x = -\frac{p}{2}$.

Возьмем произвольную точку $M(x; y)$ параболы. Согласно определению параболы имеем:

$$|MF| = |MA|$$

$\Big($точка A имеет координаты $\left(-\frac{p}{2}; y\right)\Big)$ или по формуле расстояния между двумя точками

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Отсюда:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

или

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

и окончательно:

$$y^2=2px. \tag{9}$$

Формула (9) и есть каноническое уравнение параболы. Парабола, отвечающая уравнению (9), изображена на рисунке 18.

Уравнение (9) имеет смысл только для неотрицательных значений x, т. е. все точки параболы лежат в I и IV квадрантах. Так как уравнение (9) содержит y^2, то парабола симметрична относительно оси Ox. *Вершиной* параболы называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии (рис. 18). При возрастании x значения y возрастают по абсолютной величине. В отличие от гиперболы парабола не имеет асимптот. Ось симметрии параболы называется *осью* параболы. Парабола, определяемая уравнением (9), имеет ось, совпадающую с осью Ox.

П р и м е ч а н и е. Очевидно, что каждому из уравнений $y^2=-2px$, $x^2=2py$, $x^2=-2py$ соответствует парабола, по форме тождественная с

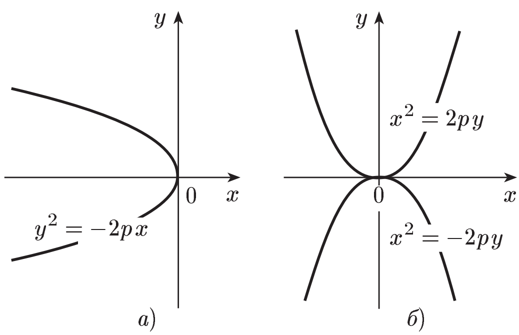

Рис. 19

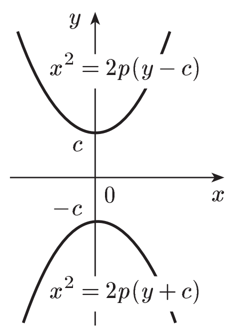

Рис. 20

параболой (9), но иначе расположенная. На рисунке 19 изображены общие виды этих парабол при $p>0$.

К параболам, например, симметричным относительно оси Oy, относятся также кривые, заданные уравнениями

$$x^2=2p(y-c) \qquad (p>0,\ c>0),$$
$$x^2=2p(y+c) \qquad (p<0,\ c>0) \qquad \text{(рис. 20)}.$$

П р и м е р. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(9;3)$ и симметрична относительно оси Ox. Написать ее каноническое уравнение. Подставляя координаты точки A в уравнение (9), найдем, что $p=\frac{1}{2}$. Значит, уравнение искомой параболы $y^2=x$.

§ 5. Простейшие сведения из аналитической геометрии в пространстве

Три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz в трехмерном пространстве (с указанными на них положительными направлениями), проходящие через некоторую точку O (рис. 21), образуют *прямоугольную декартову* систему координат пространства. Точка O называется *началом координат*, прямые Ox, Oy и Oz — *осями координат* (Ox — *ось абсцисс*, Oy — *ось ординат*, Oz — *ось аппликат*), а плоскости xOy, yOz, zOx — *координатными плоскостями*.

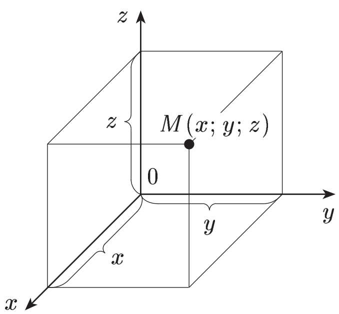

Рис. 21

Прямоугольными координатами точки M называются взятые с определенным знаком расстояния (выраженные в единицах некоторого масштаба) этой точки до координатных плоскостей yOz, zOx, xOy. Эти координаты обозначаются через x, y, z и называются соответственно *абсциссой*, *ординатой* и *аппликатой*.

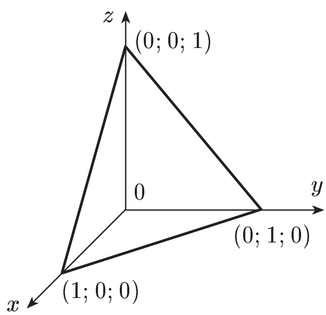

Рис. 22

При рассмотрении аналитической геометрии на плоскости было установлено (см. § 2), что уравнение первой степени с двумя переменными $Ax + By + C = 0$ (A, B не равны нулю одновременно) определяет прямую. Подобно этому уравнение первой степени с тремя переменными $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C не равны нулю одновременно) имеет в пространстве своим геометрическим образом *плоскость*, которую можно назвать *поверхностью первого порядка*. Так, уравнение $z = 1 - x - y$ представляет плоскость, проходящую через точки $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, и $(0; 0; 1)$ (рис. 22).

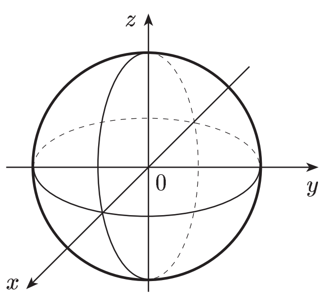

Рис. 23

Переход к уравнению с тремя переменными второй степени приводит уже к поверхности второго порядка. Простейшей поверхностью второго порядка является *сферическая* (или шаровая) поверхность с центром в начале координат. Ее уравнение по аналогии с уравнением окружности $x^2 + y^2 = R^2$ записывается в виде $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (рис. 23).

Дополнительные сведения по аналитической геометрии можно найти, например, в [5].

§ 6. Определители второго и третьего порядков

1. Определители второго порядка. Пусть дана таблица (называемая *матрицей*), состоящая из четырех чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Она имеет две строки и два столбца. Числа, составляющие эту матрицу, обозначены буквами с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, второй — номер столбца, в которых стоит данное число.

Определение. *Определителем второго порядка*, соответствующим матрице (1), называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются *элементами* определителя. Диагональ, на которой находятся элементы a_{11} и a_{22}, называется *главной*, а диагональ, на которой находятся элементы a_{12} и a_{21} — *побочной*.

Из (3) видно, что для вычисления определителя второго порядка нужно из *произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычесть произведение элементов, стоящих на побочной диагонали*.

Пример. Вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2.$$

Легко проверяются следующие свойства определителя второго порядка (с помощью правила вычисления его по формуле (3)).

Величина определителя (2)

1) *не меняется, если у него заменить строки соответствующими столбцами*;

2) *не меняется, если к элементам какой-либо его строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число*;

3) *меняет знак, если у него поменять местами строки или столбцы*;

4) *увеличивается в k раз, если элементы какого-либо его столбца или строки увеличить в k раз*;

5) *равна нулю, если элементы какой-либо его строки или столбца равны нулю*;

6) *равна нулю, если элементы двух строк или столбцов соответственно равны.*

Покажем на следующем примере, как использовать эти свойства при вычислении определителей.

Пример. С использованием свойств 4 и 2 имеем:

$$\begin{vmatrix} 325 & -132 \\ 175 & -60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25\cdot 13 & -132 \\ 25\cdot 7 & -60 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 13 & (-12)\cdot 11 \\ 7 & (-12)\cdot 5 \end{vmatrix} = 25(-12)\begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -300\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -300\cdot 6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1800(5-7) = 3600.$$

2. Определители третьего порядка. Рассмотрим таблицу (матрицу), составленную из девяти чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Определение. *Определителем третьего порядка*, соответствующим матрице (4), называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{5}$$

Структура выражения (5) довольно проста. Каждое его слагаемое представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Этому произведению приписывается соответствующий знак. Чтобы запомнить, какие произведения следует брать со знаком «плюс»,

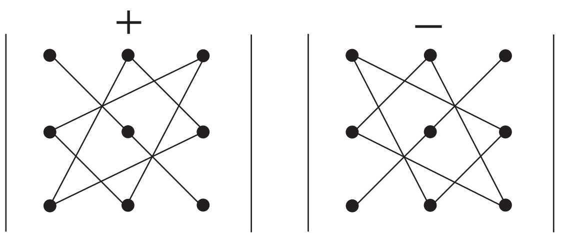

Рис. 24

какие — со знаком «минус», полезно следующее правило, называемое *правилом треугольника* (рис. 24).

Пример. По формуле (5) имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 24 + 24 - 27 - 20 - 16 = 0.$$

Все свойства определителей второго порядка (свойства 1–6) остаются справедливыми и для определителей третьего порядка (проверка идет по формуле (5)).

3. Площадь треугольника на плоскости. Найдем площадь треугольника, заданного координатами его вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Как известно, $S = \frac{1}{2}h|BC|$, где h — высота треугольника, опущенная на сторону BC. Имеем (см § 1, п. 3):

$$|BC| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}.$$

Уравнение прямой BC:

$$(x - x_2)(y_3 - y_2) - (y - y_2)(x_3 - x_2) = 0$$

(оно линейно, и точки B, C ему удовлетворяют). Отсюда согласно формуле (7) из § 3

$$h = \frac{|(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_2)|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_2 - y_1)\right|$$

или, используя понятие определителя второго порядка,

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{matrix}\right\|. \tag{6}$$

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-2; -1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$.

Имеем:

$$\begin{vmatrix} 3+2 & -1-3 \\ 5+1 & 4-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 24 = 19.$$

Отсюда искомая площадь $S = \frac{1}{2} \cdot 19 = 9{,}5$ (кв. ед.).

Упражнения

1. Найти расстояние между точками:
а) $A(-3; 9)$ и $B(3; 1)$; б) $A(2; -1)$ и $B(5; 3)$. [а) 10; б) 5.]

2. Вычислить площадь квадрата, две смежные вершины которого $A(3; -7)$ и $B(-1; 4)$. [137.]

3. Даны две противоположные вершины квадрата $A(3; 5)$ и $C(1; -3)$. Вычислить площадь квадрата. [34.]

4. Найти координаты точки C, делящей отрезок $[AB]$ между точками $A(-2; 1)$ и $B(8; 6)$ в отношении $3:2$, считая от точки A. [$C(4; 4)$.]

5. Даны вершины треугольника $A(-7; 4)$, $B(-5; 2)$ и $C(6; -3)$. Найти координаты середин всех сторон треугольника.

$\left[(-6; 3),\ \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).\right]$

6. Найти полярные координаты точек $M(2;2)$, $N(\sqrt{3};1)$.

$$\left[M\left(2\sqrt{2};\,\frac{\pi}{4}\right),\ N\left(2;\,\frac{\pi}{6}\right).\right]$$

7. Найти прямоугольные координаты точек $A\left(2;\,\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4;\,\frac{\pi}{6}\right)$.

$$[A(\sqrt{2};\sqrt{2}),\ B(2\sqrt{3};2).]$$

8. Определить, какие из точек $A(2;3)$, $B(3;3)$ и $C(4;4)$ лежат на прямой $y=\frac{1}{2}x+2$. [A и C лежат, B не лежит.]

9. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(0;b)$ и имеющей угловой коэффициент k:

а) $M(0;-2)$, $k=1$; б) $M(0;0)$, $k=-3$; в) $M(0;1)$, $k=0$;
г) $M(0;0)$, $k=0$.

$$\left[\begin{matrix}\text{а)}\ y=x-2; & \text{б)}\ y=-3x;\\ \text{в)}\ y=1; & \text{г)}\ y=0.\end{matrix}\right]$$

10. Найти координаты точки C, делящей отрезок $[AB]$ между точками $A(1;2)$ и $B(-1;4)$ в отношении $1:2$, считая от точки A.

$$\left[C\left(\frac{1}{3};\,\frac{8}{3}\right).\right]$$

11. Отрезок $[AB]$ разделен точкой $C(4;1)$ в отношении $\lambda=\frac{1}{4}$, считая от точки A. Найти:

а) координаты точки A;
б) длину отрезка $[AB]$, если известна точка $B(8;5)$.

$$\left[\begin{matrix}\text{а)}\ A(3;0),\\ \text{б)}\ 5\sqrt{2}.\end{matrix}\right]$$

12. Три последовательные вершины параллелограмма имеют координаты $A(3;-3)$, $B(-1;1)$, $C(1;6)$. Найти:

а) координаты четвертой вершины D;
б) длину отрезка $[BD]$. [а) $D(5;2)$, б) $\sqrt{37}$.]

13. Найти координаты точки C — середины отрезка $[AB]$, если:

а) $A(5;-4)$ и $B(-1;2)$;
б) $A(6;-3)$ и $B(-2;-7)$. [а) $C(2;-1)$, б) $C(2;-5)$.]

14. Построить точки по их полярным координатам: $A(6;0)$, $B\left(2;\,\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(3;\,\frac{3\pi}{4}\right)$, $D(4;\pi)$.

15. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0;y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k:

а) $M(1;2)$, $k=1$; б) $M(3;2)$, $k=\frac{4}{3}$; в) $M(-4;5)$, $k=-\frac{3}{2}$.

$$\left[\text{а)}\ y=x+1;\quad \text{б)}\ y=\frac{4}{3}x-2;\quad \text{в)}\ y=-\frac{3}{2}x-1.\right]$$

16. Прямая проходит через точки A и B:

а) $A(0;3)$, $B(4;0)$; б) $A(-2;0)$, $B(0;-5)$.

Написать уравнение прямой в отрезках.

$$\left[\text{а)}\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1;\quad \text{б)}\ -\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=1.\right]$$

17. Найти угол φ, образованный прямыми $y=3x+5$ и $y=-2x+7$.

$$\left[\varphi=\frac{\pi}{4}\right]$$

18. Найти угол φ, образованный прямыми $x\sqrt{3}+y\sqrt{2}-2=0$ и $x\sqrt{6}-3y+3=0$. $\left[\varphi=\dfrac{\pi}{2}\right]$

19. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;6)$ и параллельной прямой $5x+3y-7=0$. $[5x+3y-8=0.]$

20. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;1)$ и перпендикулярной прямой $3x-y-2=0$. $[x+3y-2=0.]$

21. Параллельны ли прямые $3x-6y+4=0$ и $5x-10y-1=0$? [Параллельны.]

22. Найти точку пересечения двух прямых:
а) $x+y-7=0$ и $x-7y+1=0$;
б) $2x+3y-12=0$ и $x-y-1=0$. [а) $(6;1)$; б) $(3;2)$.]

23. Определить координаты вершин треугольника, если даны уравнения его сторон: $y=2x-1$, $2y-x=3$, $3y+2x-5=0$.
$\left[\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{7}{3}\right),\ (1;1),\ \left(\dfrac{1}{7};\dfrac{11}{7}\right).\right]$

24. Найти расстояние от точки $A(2;5)$ до прямой $6x+8y-5=0$. $[d=4{,}7.]$

25. Найти расстояние от точки $A(-3;4)$ до прямой $12x+5y-10=0$. $[d=2.]$

26. Написать уравнение окружности с центром в точке M_0 и радиусом R, если даны:
а) $M_0(-1;2)$ и $R=5$;
б) $M_0(-2;-3)$ и $R=\sqrt{5}$;
в) $M_0(0;5)$ и $R=6$.

$$\begin{bmatrix}\text{а) } (x+1)^2+(y-2)^2=25;\\ \text{б) } (x+2)^2+(y+3)^2=5;\\ \text{в) } x^2+(y-5)^2=36.\end{bmatrix}$$

27. Написать каноническое уравнение эллипса, если даны его полуоси $a=5$, $b=4$. $\left[\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1.\right]$

28. Дан эллипс $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{81}=1$. Определить его оси и расстояние между фокусами. $[2a=30,\ 2b=18,\ 2c=24.]$

29. Дан эллипс $16x^2+25y^2=400$. Найти длины осей, координаты вершин и фокусов и эксцентриситет.

$$\begin{bmatrix}2a=10, & 2b=8, & A_1(5;0),\\ A_2(-5;0), & B_1(0;4), & B_2(0;-4),\\ F_1(3;0), & F_2(-3;0), & \varepsilon=0{,}6.\end{bmatrix}$$

30. Написать каноническое уравнение гиперболы, если даны:
а) $a=7$, $b=2$; б) $a=4$, $c=5$; в) $b=9$, $c=15$.
$\left[\text{а) } \dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{4}=1;\ \text{б) } \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1;\ \text{в) } \dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{81}=1.\right]$

31. Дана гипербола $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$. Определить расстояние между фокусами. $[2c=10.]$

32. Дана гипербола $9x^2-16y^2=144$. Определить расстояние между фокусами и эксцентриситет. $\left[2c=10,\ \varepsilon=\dfrac{5}{4}.\right]$

33. Написать уравнения двух парабол с вершиной в начале координат, зная, что координаты их фокусов равны:

а) $F(4;0)$; б) $F(-2;0)$. [а) $y^2=16x$; б) $y^2=-8x$.]

34. Определить координаты фокусов следующих парабол:

а) $y^2=10x$; б) $y^2=-12x$. $\left[\text{а)}\ F\left(\frac{5}{2};0\right);\ \text{б)}\ F(-3;0).\right]$

35. Дана парабола $y^2=12x$. Написать уравнение директрисы. [$x=-3$.]

36. Написать уравнения парабол с вершиной в начале координат, для которых директрисами служат прямые:

а) $x=-2$; б) $x=3$. [а) $y^2=8x$; б) $y^2=-12x$.]

Вычислить определители:

37. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$. [26.]

38. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}$. [−38.]

39. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$. [1.]

40. $\begin{vmatrix} 105 & 55 \\ 245 & 154 \end{vmatrix}$. [2695.]

41. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. [−10.]

42. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$. [$-2b^2$.]

43. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$. [72.]

44. Вычислить площадь треугольника с вершинами:

а) $A(0;3)$, $B(2;2)$, $C(3;0)$;

б) $A(2;3)$, $B(4;-1)$, $C(6;5)$. [а) 1,5; б) 10.]

Глава II

ФУНКЦИИ, ПРЕДЕЛЫ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 7. Определение и способы задания функций

1. Действительные числа. Будем считать, что нам известны основные свойства целых чисел $(0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Число x называется *рациональным*, если его можно представить как частное двух целых чисел m и n $(n \neq 0)$: $x=\frac{m}{n}$. Любое рациональное число x представимо в виде *конечной* или *бесконечной периодической десятичной* дроби.

Число x называется *иррациональным*, если оно представимо в виде *бесконечной непериодической десятичной* дроби $x=a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ (например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и т. д.). Каждое иррациональное число можно с любой заданной степенью точности приблизить рациональными числами; для этого достаточно брать в десятичном разложении этого числа конечное множество знаков после запятой. Поэтому на практике при различных измерениях оперируют рациональными числами. Но в общих математических законах и формулах нельзя обойтись без иррациональных чисел (например, формула длины окружности $l = 2\pi R$ включает иррациональное число π).

Множество (совокупность) всех рациональных и иррациональных чисел называется *множеством действительных* чисел. Действительные числа изображаются на числовой оси Ox точками (рис. 25).

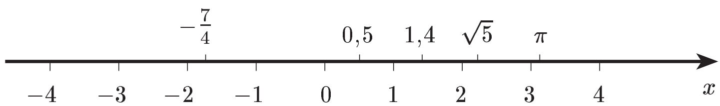

Рис. 25

При этом каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой оси и каждой точке оси соответствует определенное действительное число. Поэтому вместо слов «действительное число» можно говорить «точка».

Абсолютной величиной (или *модулем*) действительного числа x называется неотрицательное число $|x|$, определяемое соотношением

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Непосредственно из определения абсолютной величины вытекают свойства 1 и 2.

1. $|-x| = |x|$.

2. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

3. *Неравенства* $|x| \leqslant a$ и $-a \leqslant x \leqslant a$ *равносильны*.

Докажем свойство 3. Из $|x| \leqslant a$ и свойства 2 имеем $x \leqslant a$. В то же время $|x| \leqslant a$ равносильно $-a \leqslant -|x|$, откуда с учетом свойства 2 следует $-a \leqslant x$. Таким образом, получаем $-a \leqslant x \leqslant a$. Обратно, из неравенства $-a \leqslant x \leqslant a$ вытекает, что одновременно $-x \leqslant a$ и $x \leqslant a$, т. е. по определению абсолютной величины $|x| \leqslant a$.

4. *Модуль суммы двух действительных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел*:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Действительно, если $x + y \geqslant 0$, то по определению абсолютной величины и свойству 2: $|x+y| = x+y \leqslant |x|+|y|$. Если $x+y < 0$, то $|x+y| = -(x+y) = -x+(-y) \leqslant |x|+|y|$.

Примечание 1. Свойство 4 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

5. *Модуль разности двух действительных чисел больше или равен разности модулей этих чисел*:

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|.$$

По свойству 4 имеем: $|x| = |y + (x-y)| \leqslant |y| + |x-y|$, откуда: $|x-y| \geqslant |x| - |y|$.

6. *Модуль произведения двух действительных чисел равен произведению модулей этих чисел*:

$$|xy| = |x|\,|y|.$$

Примечание 2. Свойство 6 справедливо для любого конечного числа сомножителей.

7. *Модуль частного двух действительных чисел (если делитель отличен от нуля) равен частному модулей этих чисел*:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Свойства 6, 7 непосредственно следуют из определения абсолютной величины числа.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$ ($a < x < b$), называется *сегментом* или *отрезком* (*интервалом*) и обозначается $[a, b]$ ((a, b)). *Полусегментом* $[a; b)$ ($(a; b]$) называют множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ ($a < x \leqslant b$). Множества действительных чисел x, удовлетворяющих условиям $x < a$ ($x \leqslant a$) или $x > b$ ($x \geqslant b$), обозначаются соответственно $(-\infty; a)$ ($(-\infty; a]$) или $(b; +\infty)$ ($[b; +\infty)$). Множество всех действительных чисел x обозначается символом $(-\infty; +\infty)$, или $|x| < \infty$, или $\mathbf{R}$. Все указанные множества называются *промежутками*. *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку. ε-окрестностью ($\varepsilon > 0$) точки x_0 называется интервал $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, т. е. множество чисел x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \varepsilon$.

2. Погрешности вычисления. Пусть некоторая величина имеет точное значение a. В результате измерения этой величины получено ее приближенное значение x. *Абсолютной погрешностью* Δ_0 приближенного значения x называется модуль разности между числом x и точным значением a: $\Delta_0 = |x - a|$.

Если число a неизвестно (что бывает в большинстве измерений), то абсолютную погрешность вычислить нельзя. В этом случае используется *предельная абсолютная погрешность* — положительное число Δ, такое, что $\Delta_0 \leqslant \Delta$. Очевидно, что

$$x - \Delta \leqslant a \leqslant x + \Delta.$$

Кратко последнее неравенство записывается так: $a = x \pm \Delta$.

Пример 1. Если x_1 и x_2 — приближенные значения точного значения числа a, причем известно, что $x_1 \leqslant a \leqslant x_2$, то в этом случае можно положить $a = x \pm \Delta$, где

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad \Delta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

Точность измерения характеризуется с помощью *относительной погрешности*. Относительной погрешностью δ_0 приближенного значения x называется отношение абсолютной погрешности этого значения к модулю точного значения a:

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{|a|}.$$

Если точное значение a неизвестно, то используют предельную относительную погрешность — положительное число δ, такое, что $\delta_0 \leqslant \delta$.

Для вычисления относительных погрешностей часто используются приближенные формулы:

$$\delta_0 \approx \frac{\Delta_0}{|x|} \quad \text{и} \quad \delta \approx \frac{\Delta}{|x|}.$$

Эти формулы тем точнее, чем значение x ближе к точному значению a, т. е. чем меньше погрешность Δ_0 или Δ.

Пример 2. Каковы предельные абсолютная и относительная погрешности числа 1,41 — приближенного значения числа $\sqrt{2}$? Так как $1{,}410 < \sqrt{2} < 1{,}415$, то $\Delta_0 = \sqrt{2} - 1{,}410 < 0{,}005$. Следовательно, можно положить $\Delta = 0{,}005$. Далее

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{\sqrt{2}} < \frac{0{,}005}{1{,}41} < 0{,}0036,$$

откуда $\delta = 0{,}0036$, или $\delta = 0{,}36\ \%$. Как здесь (например, при делении 0,005 на 1,41), так и в ряде других примеров для облегчения вычислений можно использовать калькулятор.

Говорят, что приближенное значение x (записанное в виде десятичной дроби) имеет n *верных* знаков, если абсолютная погрешность этого числа меньше или равна половине единицы его n-го разряда. Например, если 9,263 имеет 3 верных знака 9, 2 и 6, то абсолютная погрешность этого числа $\Delta_0 \leqslant 0{,}005$.

3. Понятие функции. При изучении природных и технических процессов исследователи сталкиваются с величинами, одни из которых сохраняют одно и то же численное значение — они называются *постоянными*, а другие могут принимать различные численные значения и называются *переменными*. Примерами постоянных величин могут служить: температура кипения воды при нормальном давлении, скорость тела, движущегося равномерно и прямолинейно. Скорость камня, брошенного вверх, есть переменная величина: сначала она уменьшается, и, когда камень достигает наивысшей точки полета, скорость его становится равной нулю. Затем начинается свободное падение под действием силы тяжести, и скорость камня увеличивается.

В практических задачах изменение переменной величины обычно связано с изменением одной или нескольких других переменных величин. Например, путь, пройденный телом с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения: $s = v \cdot t$. Этой формулой выражена зависимость переменной s — пути, пройденного телом, от переменной t — времени движения. Видно, что переменные s и t не могут принимать произвольные значения независимо друг от друга. Придав определенное значение переменной t, мы тем самым единственным образом определим значение переменной s.

Определение. Если каждому значению, которое может принять переменная x, по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение переменной y, то говорят, что y есть однозначная *функция* от x, и обозначают $y = f(x)$ (читается «игрек равно эф от икс»).

Используются и другие обозначения функции: $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $y = y(x)$ и т. п.

Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*.

Совокупность всех значений аргумента x, для которых функция $y = f(x)$ определена, называется *областью определения* этой функции. Совокупность всех значений, принимаемых переменной y, называют *областью значений* функции $y = f(x)$.

Пример. Найти область определения функции $y = \sqrt{4 - x^2}$. Эта функция имеет смысл, если $4 - x^2 \geqslant 0$. Отсюда $x^2 \leqslant 4$ или $|x| \leqslant 2$. Следовательно, область определения данной функции есть сегмент $[-2, 2]$. Множество значений этой функции есть сегмент $[0; 2]$.

4. Способы задания функции. *Аналитический* способ — это задание функции при помощи формул. Например, $y = 2x$, $y = x + 1$, $y = \lg x$, $y = \sin x$, $y = x^2$. Если уравнение, с помощью которого задается функция, не разрешено относительно y, то функция называется *неявной*. Когда такое решение возможно, неявная функция может быть приведена к явной форме, т. е. к виду $y = f(x)$. Например, уравнение $2x + 3y - 5 = 0$ можно рассматривать как неявно задающее функцию. Решив его относительно y, мы получаем ту же функцию, но уже в явном виде: $y = \dfrac{5 - 2x}{3}$.

Отметим, что при аналитическом способе задания функции встречаются случаи, когда функция задана не одной, а несколькими формулами, например,

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Табличный способ — это способ задания функции при помощи таблицы. Примерами такого задания являются таблицы тригонометрических функций, логарифмов и т. п. Табличный способ задания функции широко используется в различного рода экспериментах и наблюдениях. Таблицы просты в обращении, для нахождения значения функции не надо производить вычисления. Недостатком табличного способа является то, что функция задается не для всех значений аргумента.

Графический способ. *Графиком* функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости xOy, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Само равенство $y = f(x)$ называется *уравнением* этого *графика*.

С построением графиков мы уже встречались в главе I. Например, графиком функции $y = 2x$ является прямая.

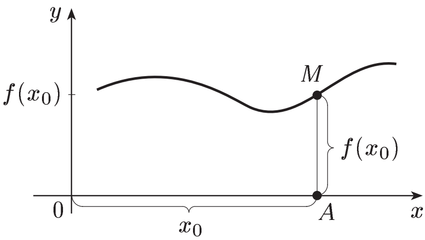

Рис. 26

Говорят, что функция задана *графически*, если на плоскости имеется ее график. Заметим, что если начерчен график функции $y = f(x)$, то для нахождения значения $y = f(x_0)$, отвечающего какому-нибудь заданному значению x_0, надо отложить это значение x_0 по оси абсцисс и из полученной точки восстановить перпендикуляр до пересечения с графиком. Длина этого перпендикуляра, взятая с соответствующим знаком, и равна $f(x_0)$. Например, на рисунке 26 имеем $|OA| = x_0$, $|AM| = f(x_0)$.

Преимуществом графического способа задания функции по сравнению с аналитическим и табличным является его наглядность.

Графический способ задания функции используется при работе различных самопишущих приборов. В медицине, например, работа сердца анализируется с помощью кардиографа.

§ 8. Обзор элементарных функций и их графиков

1. Целая рациональная функция. Многочлен вида

$$y = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$$

($a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$ — постоянные числа, называемые *коэффициентами* многочлена; m — натуральное число, называемое *степенью* многочлена) — *целая рациональная функция*. Эта функция определена при всех значениях x.

Пример. $y = kx + b$ — линейная функция. Ее график — прямая линия (см. гл. I, § 2). При $b = 0$ линейная функция $y = kx$ выражает прямо пропорциональную зависимость y от x. В этом случае ее график проходит через начало координат.

2. Дробно-рациональная функция. Эта функция определяется как отношение двух многочленов

$$y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}.$$

Она определена при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль. Дробно-рациональной функцией является, например, функция $y = \dfrac{k}{x}$, выражающая обратно пропорциональную зависимость между x и y. Ее график есть равносторонняя гипербола (см. § 4, п. 3, рис. 16, 17).

3. Степенная функция. Степенная функция — это функция вида $y = x^\alpha$, где α — действительное число. Она определена при всех значениях x, если α — натуральное число; при всех x, не равных нулю, если α — целое отрицательное число, и при всех $x > 0$, если α — произвольное действительное число.

Пример 1. $y = ax^2$. График этой функции — парабола (см. § 4, п. 4, рис. 19, *б*).

Если $\alpha = \dfrac{1}{q}$, где q — натуральное число, то степенная функция примет вид: $y = \sqrt[q]{x}$. (Символ $\sqrt[q]{}$ называют корнем степени q или радикалом.)

Функция $y = \sqrt[q]{x}$ определена при всех неотрицательных x, если q — четное, и при всех x, если q — нечетное.

Пример 2. $y = \sqrt{x}$. График этой функции (рис. 27) — верхняя ветвь параболы $y^2 = x$ (см. § 4, п. 4).

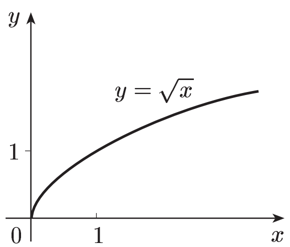

Рис. 27

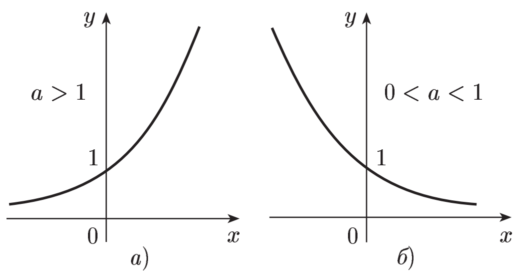

Рис. 28

4. Показательная функция. Функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *показательной*. Она определена при всех x. Ее график изображен на рисунке 28.

5. Логарифмическая функция. Функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется *логарифмической*. Она определена при $x > 0$. Ее график изображен на рисунке 29.

6. Понятие обратной функции. Между степенной функцией и радикалом, а также между показательной и логарифмической функциями существует связь, выражаемая через понятие обратной функции.

Пусть
$$y = f(x) \tag{1}$$
есть функция независимой переменной x. Это значит, что задавая значения x, мы вполне определяем значения зависимой перемен-

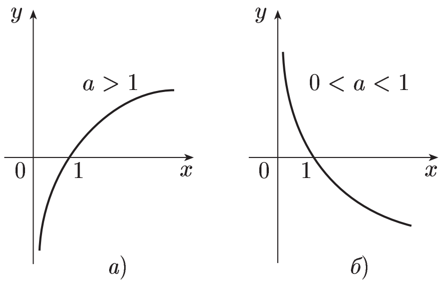

Рис. 29

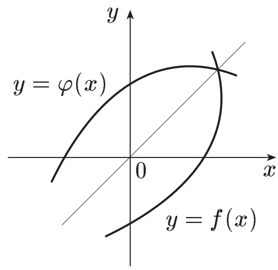

Рис. 30

ной y. Поступим наоборот, а именно: будем считать независимой переменной y, а зависимой — переменную x. Тогда x будет являться функцией переменной y, которая называется функцией, *обратной* к данной.

Предполагая, что уравнение (1) разрешено относительно x, получим явное выражение обратной функции

$$x = \varphi(y). \tag{2}$$

Обратная функция однозначной функции может быть многозначной, т. е. данному значению y может соответствовать несколько значений переменной x. Иногда удается сделать обратную функцию однозначной, вводя дополнительные ограничения на ее значения.

Пример. Двузначная функция $x = \pm\sqrt{y}$ является обратной по отношению к функции $y = x^2$. Если условиться для корня брать лишь его арифметическое значение, то обратная функция будет однозначной.

Очевидно, что если (2) есть функция, обратная к (1), то и функция (1) будет обратной по отношению к функции (2), т. е. эти функции являются *взаимно обратными*.

Иногда придерживаются стандартных обозначений: под x понимают независимую переменную, а под y — функцию, т. е. зависимую переменную. В таком случае обратную функцию следует писать в виде $y = \varphi(x)$. Например, можно говорить, что функции $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ являются взаимно обратными.

Чтобы из графика данной функции $y = f(x)$ получить график обратной ей функции $y = \varphi(x)$, очевидно, достаточно первый график симметрично отобразить относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (рис. 30).

7. Тригонометрические функции. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены для всех x. Они являются периодическими с периодом 2π, т. е. при изменении аргумента на число, кратное 2π, значение функции остается прежним. Кроме того, функция $\sin x$ нечетная $(\sin(-x) = -\sin x)$, $\cos x$ четная $(\cos(-x) = \cos x)$. Графики

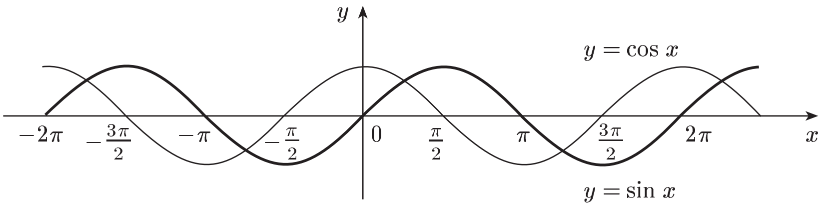

Рис. 31

этих функций — синусоида и косинусоида — изображены на рисунке 31.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена только в точках, где $\cos x = 0$, т. е. в точках $x = \dfrac{2k+1}{2} \cdot \pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, а функция $y = \operatorname{ctg} x$ не определена только в точках, где $\sin x = 0$, т. е. в точках $x = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При этом $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — нечетные функции. Графики

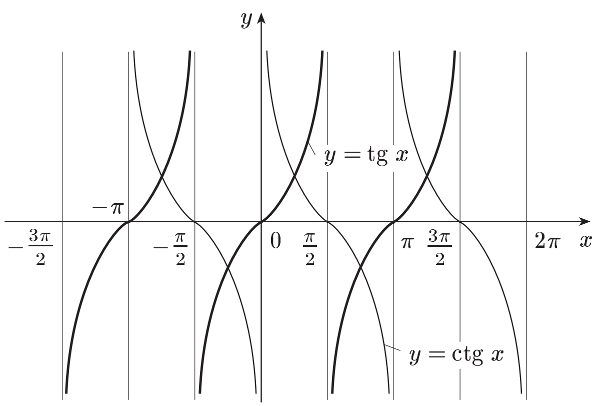

Рис. 32

функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, имеющие период π, изображены на рисунке 32.

Отметим, что в тригонометрических функциях переменная x обычно выражается в радианах.

8. Обратные тригонометрические функции. Функция $y = \arcsin x$. Здесь y — переменная из сегмента $|y| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, синус которой равен x, т. е. $x = \sin y$. Область определения этой функции — сегмент $|x| \leqslant 1$, а ее график изображен на рисунке 33.

Функция $y = \arccos x$ означает, что $x = \cos y$, причем $|x| \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$. График $y = \arccos x$ изображен на рисунке 34.

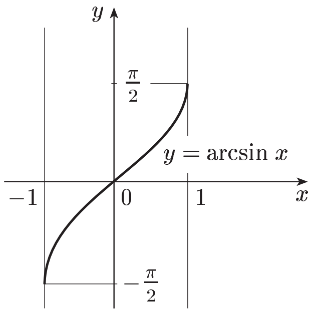

Рис. 33

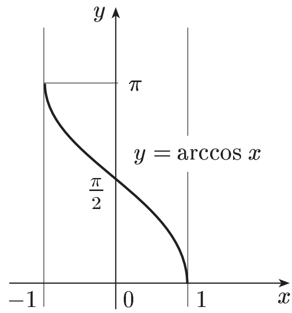

Рис. 34

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ есть переменная, тангенс которой равен x, т. е. $x = \operatorname{tg} y$, причем x любое и $|y| < \frac{\pi}{2}$ (рис. 35), а функция $y = \operatorname{arcctg} x$

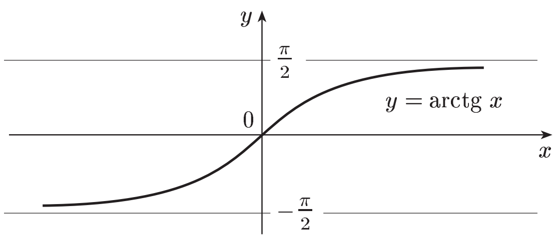

Рис. 35

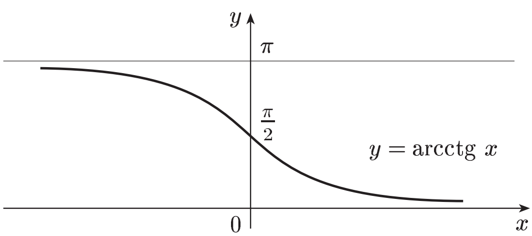

Рис. 36

есть переменная, для которой $x = \operatorname{ctg} y$, где x любое и $0 < y < \pi$ (рис. 36).

9. Сложная функция. Пусть переменная y зависит от переменной u, которая в свою очередь зависит от переменной x, т. е. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, а потому будет меняться y. Значит, y является функцией x: $y = f(\varphi(x))$. Эта функция называется *сложной функцией* (или *функцией от* *функции*), переменная u — *промежуточной*. Указанную сложную функцию называют также *суперпозицией функций* f и φ.

Пример. Если $y = \sin u$, а $u = x^2$, то $y = \sin x^2$ есть сложная функция независимой переменной x.

Функции степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, постоянная (константа) называются *основными элементарными функциями*.

Всякая функция, которая получается из основных элементарных функций путем конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий (сложение, вычитание, умножение и деление), называется *элементарной функцией*.

Например, элементарными функциями будут рассмотренные выше целая рациональная и дробно-рациональная функции.

10. Гармонические колебания. В природе и технике часто происходят явления и процессы, повторяющиеся периодически, например, колебание маятника, переменный ток, электромагнитные колебания и др.

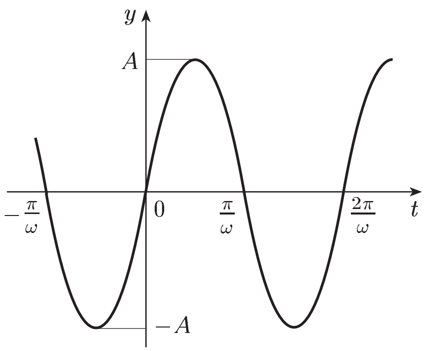

Рис. 37

Рассмотрим простейший вид колебаний, так называемое *гармоническое колебание*

$$y = A \sin \omega t \tag{3}$$

(A и ω — положительные постоянные).

График функции (3) изображен на рисунке 37.

Коэффициент A, представляющий наибольшую величину, которую может иметь y, называется *амплитудой* колебания, а ω — *частотой* колебания. Функция (3) является периодической, с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$: значения y в точках $t + k \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ одни и те же. Если считать, что t — время, то период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

показывает время, в течение которого совершается одно колебание. Поэтому $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — число колебаний за время 2π. График гармонического колебания (рис. 37) называется *простой гармоникой*.

Однако далеко не всегда периодическое явление описывается простой гармоникой. Многие из таких явлений есть результат сложения нескольких простых гармоник, который называется *сложным гармоническим колебанием*, а его график — *сложной гармоникой*.

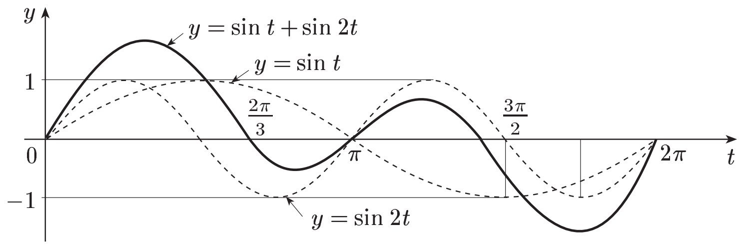

Рис. 38

На рисунке 38 изображена сложная гармоника $y = \sin t + \sin 2t$ — результат сложения двух простых гармоник $y = \sin t$ и $y = \sin 2t$.

§ 9. Предел функции

1. Предел числовой последовательности. *Бесконечной числовой последовательностью* (или просто числовой последовательностью) называется функция $a_n = f(n)$, определенная на множестве всех натуральных чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$ Значения последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются ее *членами*.

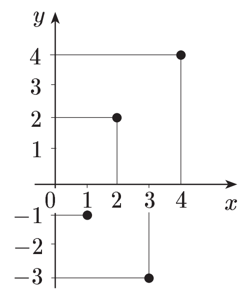

Рис. 39

Последовательность $a_n = f(n)$ иногда обозначают так: $\{a_n\}$. Это означает, что задана последовательность с *общим* членом a_n. По данному общему члену всегда можно найти любой член последовательности a_k, подставив в a_n вместо n число k. Ниже приведены примеры последовательностей, причем сначала приведена форма записи $\{a_n\}$, а затем записаны первые члены:

1) $[(-1)^n \cdot n]$; $\quad -1, 2, -3, \ldots$;

2) $[3n+1]$; $\quad 4, 7, 10, \ldots$;

3) $[2-n]$; $\quad 1, 0, -1, \ldots$;

4) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$; $\quad 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots$;

5) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$; $\quad \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots$;

6) $\left\{\dfrac{n+1}{2n}\right\}$; $\quad 1, \dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}, \ldots$;

7) $\left\{(-1)^n \dfrac{1}{n}\right\}$; $\quad -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots$;

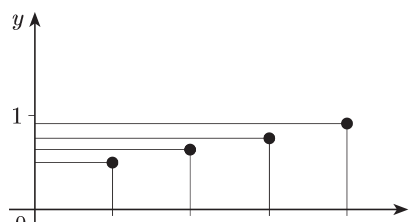

Рис. 40

Для числовой последовательности, как и для любой функции, можно построить график. Он не является линией, а состоит из отдельных точек, расположенных справа от оси Oy. На рисунках 39 и 40 построены графики последовательностей 1) и 5).

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей* (*неубывающей*), если для любого номера n справедливо неравенство $a_n \geqslant a_{n+1}$ ($a_n \leqslant a_{n+1}$).

Если $a_n > a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$), то последовательность $\{a_n\}$ *убывающая* (*возрастающая*). Например, последовательность 3) убывающая, последовательность 2) возрастающая.

Последовательности всех этих типов носят общее название *монотонных*.

Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует такое число M, что для любого номера n выполняется неравенство $a_n \leqslant M$ ($a_n \geqslant M$). Последовательность 3) ограничена сверху, например, числом 1. Последовательности, одновременно ограниченные сверху и снизу, называются *ограниченными*. Последовательность 4) ограничена.

На графике последовательности 5) (рис. 40) видно, что ординаты точек с увеличением номера n приближаются к единице. Члены последовательности 4) с возрастанием номера становятся близкими к нулю.

Определение. Число a называется *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Это обозначают так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Примеры. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n} = 0$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

Ограничимся доказательством первого из этих четырех равенств, так как доказательство трех других проводится аналогично.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

если $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Из последнего неравенства следует, что в качестве номера N можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Характер стремления последовательности к своему пределу различен. Последовательности 4) и 6) стремятся к своим пределам убывая; последовательность 5) стремится к единице возрастая; последовательность 7) стремится к нулю так, что ее члены становятся поочередно то больше, то меньше нуля.

Сформулируем без доказательства важные свойства пределов последовательностей. (Доказательство можно найти, например, в [10].)

1. *Последовательность может иметь только один предел.*

2. *Любая неубывающая (невозрастающая) и ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел.* На основании свойства 2 можно показать, например, что последовательность $\{2^{1/n}\}$ имеет предел, так как ее члены убывают, оставаясь больше единицы.

2. Число e. Рассмотрим числовую последовательность

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}. \tag{1}$$

Для доказательства существования предела этой последовательности воспользуемся свойством 2 из предыдущего пункта. Для этого покажем сначала, что наша последовательность возрастающая. Разложим общий член последовательности $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ по формуле бинома Ньютона:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

или

$$a_n = 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2\cdot 3\ldots n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{2}$$

Из равенства (2) видно, что с увеличением номера n каждое слагаемое, кроме первого, увеличивается и возрастает число таких слагаемых. Следовательно, $a_n < a_{n+1}$ для всех n, и поэтому последовательность возрастающая.

Покажем теперь, что последовательность (1) ограничена сверху. Заменим во всех членах разложения (2) выражения в круглых скобках единицами. Тогда:

$$a_n < 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Подставляя вместо множителей $3, 4, \ldots, n$ в знаменателях число 2, мы еще больше увеличим правую часть:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но по формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

Поэтому $a_n < 3$ при любом n.

По свойству 2 из предыдущего пункта последовательность (1), как возрастающая и ограниченная сверху, имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой e (так называемый *второй замечательный предел*):

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{3}$$

Число e является иррациональным и приблизительно равно 2,71828 ($e = 2{,}71828182\ldots$).

З а д а ч а. Одним из свойств радиоактивных элементов является их самораспад. Пусть в начальный момент $t=0$ имелось m_0 граммов радия. За время t масса нераспавшегося радия составила x граммов. Оказывается, как это далее будет показано (см. гл. VII, § 38), что масса x связана с начальной массой m_0 и времени t формулой

$$x = m_0 e^{-kt},$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Аналогичный же закон (показательный с основанием e) встречается при изучении целого ряда процессов, как-то: охлаждение тел, размножение бактерий и т. п. Отсюда ясно, какую важную роль играет число e в математическом анализе и его приложениях.

3. Натуральные логарифмы. Число e принято за основание системы логарифмов, называемых *натуральными логарифмами*. Оказалось, что с помощью натуральных логарифмов некоторые формулы записываются проще. Для обозначения натурального логарифма числа N пользуются символом $\ln N$.

Для отыскания приближенных значений натуральных логарифмов по таблицам десятичных логарифмов найдем связь между натуральными и десятичными логарифмами.

Если $\ln N = a$, то $N = e^a$ и логарифмирование обеих частей последнего равенства по основанию 10 дает $\lg N = a\lg e$ ($\lg e \approx 0{,}4343$) или $\lg N = \ln N\cdot\lg e$, откуда:

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} \qquad \left(\frac{1}{\lg e}\approx 2{,}3026\right).$$

4. Предел функции. Выше рассмотрено понятие предела для частного вида функций — числовых последовательностей.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x=a$, кроме, быть может, самой точки a.

О п р е д е л е н и е. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при стремлении x к a (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех $x\neq a$, удовлетворяющих условию

$$|x-a|<\delta,$$

имеет место неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Обозначают это так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x)\to A \quad \text{при} \quad x\to a.$$

Отсюда, если число A есть предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, то для всех x, достаточно близких к числу a и отличных от него, соответствующие им значения функции $f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу A (естественно в тех точках x, в которых функция $f(x)$ определена).

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|x-1| < \varepsilon$. Очевидно, здесь таким δ является ε.

Пример 2. Показать, что $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2-1| < \varepsilon$.

Если $0 < |x-1| < \delta$, то $|x+1| = |(x-1)+2| \leqslant |x-1|+2 < \delta+2$. Следовательно, $|x^2-1| = |x-1|\,|x+1| < \delta(\delta+2)$. Для выполнения неравенства $|x^2-1| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta+2) = \varepsilon$, т. е. чтобы $\delta^2+2\delta-\varepsilon = 0$. Отсюда $\delta = -1+\sqrt{1+\varepsilon}$ (второй корень $-1-\sqrt{1+\varepsilon}$ отбрасываем, так как $\delta > 0$).

Примечание. Если в формуле (3) положить $\dfrac{1}{n} = z$, то она примет вид:

$$e = \lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z}. \tag{4}$$

Оказывается, что формула (4) верна не только когда переменная z пробегает последовательность значений $z_n = \dfrac{1}{n}$, но и при любом другом законе стремления z к нулю.

При изучении свойств функции приходится рассматривать и предел функции при стремлении аргумента x к бесконечности.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при стремлении x к бесконечности (или в бесконечности), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число N, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, имеет место неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Пример 3. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3} = 1.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $N > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^3+1}{x^3}-1\right| < \varepsilon.$$

Если $|x| > N$, то $|x|^3 > N^3$ и

$$\left|\frac{x^3+1}{x^3}-1\right| = \frac{1}{|x|^3} < \frac{1}{N^3}.$$

Поэтому для выполнения неравенства

$$\left|\frac{x^3+1}{x^3}-1\right| < \varepsilon$$

достаточно найти N из условия $\frac{1}{N^3} = \varepsilon$, т. е. взять $N = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$. Следовательно, по определению

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1.$$

Рассматривают также $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ определяется аналогично $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, только в самой формулировке определения $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ условие $|x| > N$ следует заменить на $x > N$ $(x < -N)$.

§ 10. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

1. Бесконечно малые и их свойства. При изучении свойств пределов функций особую роль играют функции, предел которых при стремлении аргумента к какой-либо точке равен нулю.

Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\}$ являются бесконечно малыми: их пределами является нуль (см. § 9). Понятие бесконечно малой последовательности можно перенести на произвольные функции.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, т. е. если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Бесконечно малую функцию $\alpha(x)$ называют также бесконечно малой величиной или просто бесконечно малой.

Пример. Показать, что функция $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$. Пусть ε — произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2-1| < \varepsilon$. Как показано ранее (см. § 9, п. 4, пример 2), таким δ является $\delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon}$. Следовательно, функции $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$.

В дальнейшем в этом параграфе при рассмотрении бесконечно малых будем иметь в виду, что они являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Остановимся на основных свойствах бесконечно малых функций. Эти свойства будут верны также и для бесконечно малых последовательностей.

1. *Если функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми, то функция $\alpha_1(x) + \alpha_2(x)$ также есть бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Так как функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ бесконечно малые, то найдутся такие числа $\delta_1, \delta_2 > 0$, что при $0 < |x-a| < \delta_1$ и $0 < |x-a| < \delta_2$ имеют место соответственно неравенства:

$$|\alpha_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Обозначим через δ наименьшее из двух чисел δ_1 и δ_2. Тогда при $0 < |x-a| < \delta$ будут верны неравенства (1) и, следовательно,

$$|\alpha_1(x)+\alpha_2(x)| \leqslant |\alpha_1(x)|+|\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < |x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha_1(x)+\alpha_2(x)| < \varepsilon$, а это и означает, что $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ есть функция бесконечно малая.

Примечание 1. Свойство 1 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа бесконечно малым.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* при $x \to a$, если существуют положительные числа M и δ, такие, что при условии $0 < |x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Например, любая бесконечно малая $\alpha(x)$ является ограниченной функцией при $x \to a$.

Температура воздуха T в данной местности — ограниченная функция времени t. Изменяясь днем и ночью, зимой и летом, она никогда не достигнет $+100^0$ C и -100^0 C. Таким образом, $|T(t)| < 100$.

2. *Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — ограниченная функция при $x \to a$ и $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Тогда существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех x, достаточно близких к a. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Для ε существует такое $\delta > 0$, что при условии $0 < |x-a| < \delta$ одновременно выполняются неравенства $|f(x)| \leqslant M$ и $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Поэтому

$$|f(x)\cdot\alpha(x)| = |f(x)|\cdot|\alpha(x)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Непосредственно из свойства 2 следуют свойства 3 и 4.

3. *Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая.*

4. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.*

Примечание 2. Свойство 4 распространяется на любое конечное число бесконечно малых.

2. Бесконечно большие. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа M найдется такое натуральное число N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > M$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Последовательности $\{n\}$, $\{(-1)^n\cdot n\}$ являются бесконечно большими.

Понятие бесконечно большой последовательности можно перенести на произвольные функции.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|f(x)| > M$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$. Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Если при этом $f(x)$ положительна (отрицательна) в окрестности точки a, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty)$.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$. Действительно, при любом $M > 0$ будем иметь $\dfrac{1}{(1-x)^2} > M$, если только $(1-x)^2 < \dfrac{1}{M}$, $|1 - x| < \dfrac{1}{\sqrt{M}} = \delta$. Функция $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ принимает только положительные значения.

Примечания 1. Бесконечность (∞) не число, а символ, который употребляется, например, для того, чтобы указать, что соответствующая функция есть бесконечно большая.

2. Бесконечно большая функция $f(x)$ при $x \to a$ не имеет предела, так как предел переменной (если он существует) — некоторое число. То же в случае бесконечно большой числовой последовательности.

В дальнейшем всегда под пределом последовательности (функции) будем понимать конечный предел, т. е. число, если не оговорено противное.

Ниже рассматриваются бесконечно большие функции при $x \to a$.

Как видно из следующих свойств, которые верны и для последовательностей, бесконечно большие и бесконечно малые функции тесно связаны между собой.

1. *Если функция $f(x)$ бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая.*

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и обозначим $\dfrac{1}{\varepsilon} = M$. Так как $f(x)$ бесконечно большая, то числу M соответствует $\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > M = \dfrac{1}{\varepsilon}$, откуда $\dfrac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$.

2. *Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая и не обращается в нуль, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая.*

Доказательство. Возьмем любое $M > 0$ и обозначим $\dfrac{1}{M} = \varepsilon$. Так как $\alpha(x)$ бесконечно малая, то числу $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon = \dfrac{1}{M}$, откуда $\dfrac{1}{|\alpha(x)|} > M$.

В данном параграфе были рассмотрены функции аргумента x для случая, когда $x \to a$. Однако все предложения, установленные здесь, остаются в силе и для случая, когда x стремится к бесконечности. При этом все доказательства аналогичны.

§ 11. Основные теоремы о пределах и их применение

1. Основные теоремы о пределах. Прежде сделаем следующее замечание. Ниже рассматриваются функции аргумента x, при этом x стремится к a или x стремится к бесконечности. Все устанавливаемые в этом пункте предложения о пределах имеют место в обоих случаях; они верны также и для последовательностей. Здесь приводится доказательство для одного из этих случаев ($x \to a$), так как для другого доказательство аналогично. Это замечание относится и к пункту 4.

Теорема 1. *Для того чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в виде:*

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая.

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. функция $\alpha(x) = f(x) - A$ есть бесконечно малая и $f(x) = A + \alpha(x)$.

2) Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для x из $0 < |x-a| < \delta$ будет $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. A — предел функции $f(x)$ при $x \to a$.

Теорема 2. *Предел постоянной величины равен самой постоянной.*

Это предложение непосредственно вытекает из определения предела.

Теорема 3. *Если функция $f(x) \geqslant 0$ $(f(x) \leqslant 0)$ для всех x в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a, и в точке a имеет предел, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant 0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant 0)$.*

Доказательство. Пусть, например, $f(x) \geqslant 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Если бы было $A < 0$, то для $\varepsilon = \dfrac{|A|}{2}$ неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x-a| < \delta$ было бы невозможно ни при каком $\delta > 0$, так как влекло бы за собой отрицательность $f(x)$.

Примечание 1. Заметим, что при условии, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, из $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$, вообще говоря, не вытекает $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) < 0)$, а только $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant 0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant 0)$. Так, $|x| > 0$ для всех $x \neq 0$, но $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$.

Теорема 4. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \to a$, то при $x \to a$ имеют пределы также их сумма $f_1(x) + f_2(x)$,* *произведение* $f_1(x)\cdot f_2(x)$ *и при условии* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0$ *частное* $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x), \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x), \tag{2}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}. \tag{3}$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая суммы. Все остальные утверждения доказываются аналогично. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A_2$. Тогда согласно теореме 1

$$f_1(x)=A_1+\alpha_1(x), \qquad f_2(x)=A_2+\alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — бесконечно малые. Отсюда:

$$f_1(x)+f_2(x)=(A_1+A_2)+(\alpha_1(x)+\alpha_2(x)).$$

По свойству 1 бесконечно малых (§ 10) сумма $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ бесконечно мала. Следовательно, по теореме 1

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=A_1+A_2.$$

Примечание 2. Формула (1) распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, а формула (2) — на случай любого конечного числа сомножителей.

Следствие 1. *Если функция* $f(x)$ *имеет предел при* $x\to a$, *то*

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n,$$

где n *— натуральное число.*

Следствие 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела*:

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x); \quad c - \mathrm{const}.$$

Теорема 5. *Если для функций* $f(x)$, $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *в некоторой окрестности точки* a *выполняется неравенство*

$$f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x) \tag{4}$$

и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Доказательство. Из определения предела вытекает, что в некоторой окрестности точки a (при $x\neq a$) будут одновременно выполняться следующие неравенства:

$$|f_1(x)-A|<\varepsilon, \qquad |f_2(x)-A|<\varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число. Запишем эти неравенства, освободившись от знака абсолютной величины:

$$A-\varepsilon<f_1(x)<A+\varepsilon, \tag{5}$$

$$A-\varepsilon < f_2(x) < A+\varepsilon. \tag{6}$$

Из неравенств (4) и (5) имеем:

$$A-\varepsilon < f_1(x) \leqslant f(x),$$

откуда

$$A-\varepsilon < f(x). \tag{7}$$

Аналогично из неравенств (4) и (6) получим:

$$f(x) < A+\varepsilon. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$ или $|f(x)-A| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

2. Примеры вычисления пределов.

Пример 1. Найти

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+1).$$

Используя теоремы 4, 2, следствия 2, 1 и пример 1 из п. 4 § 9, последовательно получаем:

$$\lim_{x\to 1}(2x^2+1) = \lim_{x\to 1} 2x^2 + \lim_{x\to 1} 1 = 2(\lim_{x\to 1} x)^2 + 1 = 2+1 = 3.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+1}{x^3+1}$. Применяя теоремы 4, 2, следствия 1, 2 и пример 1 из п. 4 § 9, находим:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+1}{x^3+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^3+1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 5x + \lim\limits_{x\to 1} 1}{\lim\limits_{x\to 1} x^3 + \lim\limits_{x\to 1} 1} =$$

$$= \frac{(\lim\limits_{x\to 1} x)^2 - 5\lim\limits_{x\to 1} x + 1}{(\lim\limits_{x\to 1} x)^3 + 1} = \frac{1-5+1}{1+1} = -\frac{3}{2}.$$

Как показывают решения приведенных примеров, в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Однако не всегда можно вычислить предел с помощью формул (1), (2), (3). Так, формулы (1) и (2) утрачивают смысл, если хотя бы одна из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не имеет предела. Формула (3) неверна, если знаменатель дроби стремится к нулю. Рассмотрим здесь два случая.

а) Предел числителя не равен нулю.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x^2}$. Имеем: $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2) = 0$. Поэтому формулу (3) в этом примере использовать нельзя. Так как

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)}{\lim\limits_{x\to 1} x^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

то функция $\dfrac{1-x^2}{x^2}$ бесконечно малая при $x\to 1$ (см. § 10, п. 1). Тогда (§ 10, п. 2) функция $\dfrac{x^2}{1-x^2}$ бесконечно большая при $x\to 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{1-x^2} = \infty$.

Можно отметить, что, когда x приближается к 1 слева, т. е. оставаясь все время меньше 1 (что записывают $x \to 1-0$), функция $\dfrac{x^2}{1-x^2}$ остается все время положительной. В этом случае записывают:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

Если же x приближается к 1 справа, т. е. оставаясь все время больше 1 (что записывают $x \to 1+0$), эта функция остается все время отрицательной. В этом случае записывают:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{1-x^2} = -\infty.$$

б) Предел числителя равен нулю.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}$. Здесь $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3x) = 0+3\cdot 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x) = 0+0 = 0$. Говорят, что в этом случае имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Однако предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}$ существует, и его можно найти. Для его нахождения, т. е. раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, нужно предварительно преобразовать дробь $\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}$, разделив числитель и знаменатель почленно на x, что возможно, так как до перехода к предельному значению $x \neq 0$. Следовательно, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x+1}.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x+1} = 3$ (здесь формула (3) применима, так как $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1 \neq 0$). В результате имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+x} = 3.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$. Так как

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}\right) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x = 0,$$

то здесь также имеется неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, преобразуем дробь, стоящую под знаком предела, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}$ и сделав после чего необходимые упрощения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4-x-(4+x)}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}} = -2\cdot\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь примеры на вычисление пределов функций при $x \to \infty$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{3x+2}$. Очевидно, $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2) = \infty$. Поэтому (§ 10) функция $\dfrac{1}{3x+2}$, значит, и функция $\dfrac{4}{3x+2}$ бесконечно малая при $x \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{3x+2} = 0$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{4x+1}$. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}(4x+1) = \infty$. Говорят, что в этом случае имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия предварительно числитель и знаменатель дроби $\dfrac{3x+5}{4x+1}$ почленно разделим на x. Следовательно, получим:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{4x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}.$$

Но

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x} = 0.$$

В результате имеем:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{4x+1} = \frac{3}{4}.$$

Аналогично устанавливается, что при $x \to \infty$ дробно-рациональная функция стремится либо к нулю, либо к бесконечности, либо к конечному числу, отличному от нуля, в зависимости от того, будет ли степень числителя меньше степени знаменателя, больше ее или равна ей.

3. Первый замечательный предел. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{9}$$

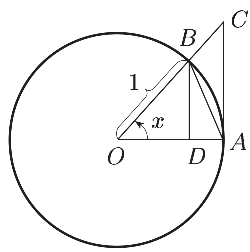

Рис. 41

Равенство (9) называется *первым замечательным пределом*. С его помощью можно вычислять пределы различных функций, содержащих тригонометрические функции и степени x.

Перейдем к доказательству равенства (9). Возьмем круг единичного радиуса и предположим, что угол x, выраженный в радианах, заключен в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ (рис. 41). Обозначим площади треугольников OAB и OAC соответственно через S_1 и S_2, а площадь сектора OAB — через S. Из рисунка 41 видно, что

$$S_1 < S < S_2. \tag{10}$$

Замечая, что $|BD| = \sin x$, $|AC| = \operatorname{tg} x$, имеем: $S_1 = \dfrac{1}{2}\sin x$, $S = \dfrac{1}{2}x$, $S_2 = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Поэтому с учетом (10) получаем:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

откуда после деления на $\sin x$ и сокращения на $\frac{1}{2}$ находим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (11)$$

Неравенства (11) получены для $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Однако $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ — четные функции: $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Тем самым неравенства (11) справедливы в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ (это следует из геометрического определения косинуса), то из (11) на основании теоремы 5 заключаем, что действительно имеет место равенство (9).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin 2x}{2x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}} = \frac{2}{5}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{2}{5}.$$

4. Сравнение бесконечно малых. Рассмотрим отношение двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ (для компактности записи будем обозначать их просто α и β). Выделим три случая.

1. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = 0$. В этом случае говорят, что α — бесконечно малая более *высокого* порядка, чем β.

Пример 1. При $x \to 2$ функция $(x-2)^3$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $x-2$, так как $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{x-2} = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ (A — число). В этом случае функции α и β называются бесконечно малыми *одного* и того же порядка.

Пример 2. При $x \to 0$ функции $5x^2$ и x^2 являются бесконечно малыми одного порядка, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2}{x^2} = 5$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = \infty$. В этом случае говорят, что α — бесконечно малая более *низкого* порядка, чем β. Можно сказать также, что β — бесконечно малая более высокого порядка, чем α.

Пример 3. При $x \to -1$ функция $x+1$ бесконечно малая более низкого порядка, чем $(x-1)(x+1)^2$, так как

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2} = \infty.$$

Определение. Если функции α и β бесконечно малые одного и того же порядка, причем $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то они называются *эквивалентными* бесконечно малыми. Символически это записывают так: $\alpha \sim \beta$.

Из определения, в частности, следует, что если $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$, т. е. если α и β — бесконечно малые одного порядка, то α и $A\beta$ будут являться эквивалентными бесконечно малыми: $\alpha \sim A\beta$.

Пример 4. Как установлено в пункте 3, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, т. е. $\sin x$ и x при $x \to 0$ являются эквивалентными бесконечно малыми.

Пример 5. Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1,$$

то $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$.

Теорема. *Если существует предел отношения двух бесконечно малых α и β, то он равен пределу отношения соответствующих им эквивалентных бесконечно малых.*

Доказательство. Действительно, если $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha}{\beta}$, то, перейдя к пределу в равенстве $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \dfrac{\beta_1}{\beta}$, получим:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta}\right) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\beta_1}{\beta} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot 1 = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Доказанная теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание предела.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{3x} = \dfrac{5}{3}$, так как $\sin 5x \sim 5x$ и $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$ при $x \to 0$.

§ 12. Непрерывность функции

1. Понятие непрерывности. Мы видели, что графиками последовательностей являются множества точек; эти точки всегда находятся на некотором расстоянии друг от друга (*дискретное* множество точек). Графиком же, например, степенной функции является кривая, которая похожа на росчерк пера, на «сплошную», «непрерывную» линию. Оказывается, эту разницу характеризует точное математическое понятие непрерывности, к введению которого и перейдем. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, x_0 и x — два произвольных значения аргумента из этого интервала. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, откуда: $x = x_0 + \Delta x$. Говорят, что для перехода от значения аргумента x_0 к значению x первоначальному значению придано приращение Δx.

Приращением Δy функции $y = f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0, называется разность

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Например, приращением функции $y = x^3$, которое соответствует приращению Δx аргумента x в точке x_0, будет величина

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Другими словами, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Пример 1. Функция $y = x$ непрерывна при любом значении $x = x_0$. В самом деле, $\Delta y = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$ и, значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$.

Пример 2. Функция $y = sinx$ непрерывна при любом значении $x = x_0$. В самом деле,

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2} = \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\Delta x.$$

Отсюда:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\Delta x \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Аналогично доказывается непрерывность функции $\cos x$.

Функция, непрерывная в каждой точке интервала, называется непрерывной на этом интервале.

Теорема 1. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой точке также их алгебраическая сумма $f_1(x) \pm f_2(x)$, произведение $f_1(x) \cdot f_2(x)$ и при условии $f_2(x_0) \neq 0$ частное $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.*

Эта теорема вытекает из аналогичной теоремы о пределах.

П р и м е ч а н и е. Для алгебраической суммы и произведения теорема 1 распространяется на любое конечное число функций.

Т е о р е м а 2. *Если функция* $u = \varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а функция* $y = f(u)$ *непрерывна в точке* $u_0 = \varphi(x_0)$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно непрерывности функции $u = \varphi(x)$ имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т. е. при $x \to x_0$ также и $u \to u_0$. Поэтому в силу непрерывности функции $f(u)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0))$, что и доказывает теорему.

Таким образом, сложная функция $y = f(\varphi(x))$, образованная из двух непрерывных функций $f(u)$ и $\varphi(x)$, является непрерывной функцией.

Например, сложная функция $y = \cos(x^2 + 2x - 1)$ непрерывна для всех значений x, так как функции $y = \cos u$ и $u = x^2 + 2x - 1$ всюду непрерывны.

Имеет место и следующая теорема:

Т е о р е м а 3. *Если* $f(x)$ — *непрерывная функция, имеющая однозначную обратную функцию, то обратная функция тоже непрерывна.*

Вместо доказательства ограничимся следующим наглядным соображением: если график функции $f(x)$ — непрерывная кривая, то график обратной к ней функции тоже непрерывная кривая.

Т е о р е м а 4. *Все основные элементарные функции непрерывны там, где они определены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Постоянная функция $y = C$ непрерывна при любом значении $x = x_0$, так как $\Delta y = C - C = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Так как функция $y = x$ непрерывна при любом x (см. пример 1 этого пункта), то согласно теореме 1 степенная функция $y = x^n$, где n — натуральное число, также непрерывна при любом x.

Непрерывность тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ имеет место всюду (см. пример 2 этого пункта); $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны всюду, где они определены, как отношение двух непрерывных функций $\sin x$ и $\cos x$.

Можно доказать непрерывность и других основных элементарных функций там, где они определены.

Из теорем 1, 2 и 4 получаем

С л е д с т в и е. *Всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.*

Имеет место следующее предложение (см. [2]):

Т е о р е м а 5. *Функция* $f(x)$, *непрерывная в точке* x_0, *не равная нулю в этой точке, сохраняет знак* $f(x_0)$ *в некоторой окрестности этой точки.*

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ *разрывна*, а точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

В качестве конкретного примера функции, имеющей точку разрыва, рассмотрим скорость тела, падающего на землю. Эта скорость вообще является непрерывной функцией времени, но для момента удара можно условно считать, что она мгновенно (скачком) падает до нуля, т. е. скорость терпит разрыв.

Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 *слева* (*справа*) называется предел, вычисляемый в предположении, что x стремится к x_0, оставаясь все время меньше (больше) значения x_0. Пределы слева и справа, называемые *односторонними* пределами, соответственно обозначают:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 *слева* (*справа*), если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ $\Big(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\Big)$.

2. Свойства функций, непрерывных на сегменте. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на сегменте* $[a; b]$, если она непрерывна в интервале $(a; b)$ и, кроме того, в точке a непрерывна справа, а в точке b — слева.

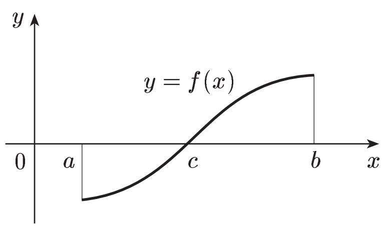

Рис. 42

Приведем без доказательства следующие свойства функций, непрерывных на отрезке. (Доказательство см. в [2].)

1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ и на концах его принимает значения разных знаков, то между точками a и b найдется точка c, такая, что $f(c) = 0$.*

Это свойство имеет простой геометрический смысл (рис. 42): если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси Ox на другую, то она пересекает ось Ox.

2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то она ограничена на нем, т. е. существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leqslant M$ при $a \leqslant x \leqslant b$.*

3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то на этом сегменте найдутся точки x_1 и x_2, такие, что значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будут соответственно наибольшим и наименьшим из всех значений функции $f(x)$ на сегменте $[a; b]$.*

3. Непрерывные и разрывные функции в биологии. Укажем несколько простых биологических явлений, которые описываются непрерывными или разрывными функциями. Заметим прежде всего, что слух, зрение, восприятие ультразвука, используемые многими биологическими видами, — все эти явления связаны с колебательными процессами, описание которых достигается с помощью тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$.

В конкретном эксперименте такие величины, как путь, биомасса популяции, численность популяции (число особей в популяции), температура, время и т. п., не могут принимать значения, равные любому действительному числу. Так, путь может быть измерен целым числом километров или миллиметров; биомасса измеряется тоннами или десятыми миллиграммов; время — годами или сотыми долями секунды. И, формально говоря, область значений и область определения упомянутых функций не являются промежутками, а представляют собой некоторые шкалы, может быть, с очень мелкими, но стандартными делениями. Величина этих делений определяется характером эксперимента и точностью приборов. Возраст крупных животных мы измеряем годами, а время жизни некоторых элементарных частиц — миллиардными долями секунды. Но дело не в величине делений, а в том, что мы можем сказать: «в этом эксперименте частица прожила 3,1 или 3,2 секунды», но не можем заявить, что она прожила π секунд. Понятно, что, имея дело с такими функциями, невозможно говорить о непрерывности. Чтобы иметь возможность пользоваться аппаратом математического анализа там, где это удобно, функции, заданные на шкале, заменяются их непрерывными аналогами. Разумеется, это не всегда удобно и целесообразно. Например, если область определения функции состоит всего из двух элементов, вряд ли стоит ее заменять промежутком. Однако, если области определения и значений функции состоят хотя и из конечного, но достаточно большого количества элементов, в каком-то смысле «близко расположенных друг к другу» (как мелкие деления на шкале), то мы вправе заменить их сплошным промежутком и функцию, определенную на одном из них со значениями в другом, считать непрерывной. Изучив эту модельную функцию, мы затем сумеем сделать выводы и относительно функции, фигурирующей в эксперименте.

Эта идея лежит в основе построения математических моделей с использованием непрерывных функций. Именно такие математические модели и приводятся в этой книге. Поэтому рассматриваемые в них функции будем считать непрерывными, в дальнейшем это специально не оговаривая.

Возвращаясь к примерам непрерывных функций в биологии, отметим, что при изучении роста численности микроорганизмов при делении клеток встречается функция

$$f(t) = ae^{kt}$$

(здесь аргументом является время t).

Посредством степенной функции

$$f(x) = Ax^{\alpha}$$

описывается зависимость интенсивности основного обмена от веса животного. Здесь x — вес животного; $f(x)$ — количество кислорода, поглощаемого животным в единицу времени; A и α — параметры, постоянные для данного класса живых существ. Для млекопитающих и птиц, например, $\alpha = 0{,}74$, $A = 70$, для рыб $\alpha = 0{,}8$, $A = 0{,}3$.

Приведем примеры разрывных функций. Рассмотрим клетку, способную возбуждаться от внешних воздействий, например нервные клетки, клетки мышц и т. п. Если величину возбуждения E измерить

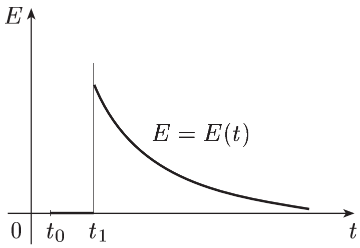

Рис. 43

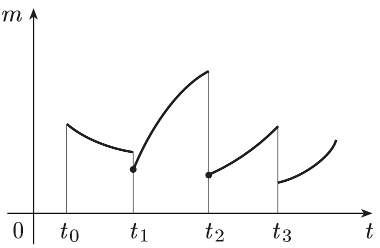

Рис. 44

в тех или иных единицах, то график возбуждения $E = E(t)$ имеет вид, изображенный на рисунке 43.

В момент t_0 клетка получает сигнал. Однако возбуждение происходит в некоторый момент $t_1 > t_0$. Отрезок $[t_0; t_1]$ называется *латентным* периодом. В момент t_1 клетка мгновенно возбуждается до максимальной величины, а затем возбуждение постепенно уменьшается до тех пор, пока не будет нового сигнала. Если сигнала нет достаточно долго, то возбуждение становится равным нулю.

Таким образом, функция, изображающая зависимость величины возбуждения от времени, имеет разрывы на концах латентных периодов.

Рассмотрим изменение биомассы микроорганизмов, чувствительных к температурным колебаниям. При увеличении температуры общая биомасса m, как правило, увеличивается — тепло способствует размножению.

Однако, когда температура слишком высока, практически вся коллония гибнет; значение m, скачкообразно меняясь, становится равным нулю. Примерно то же самое происходит и при понижении температуры: как только она достигает некоторого нижнего предела, микроорганизмы погибают. В реальных условиях температура меняется в зависимости от времени, то повышаясь, то понижаясь. Поэтому графическим изображением изменения биомассы в зависимости от времени может быть разрывная кривая (рис. 44). Точки разрыва t_1, t_2, t_3 соответствуют тем моментам времени, когда температура стала слишком высокой или слишком низкой.

§ 13. Комплексные числа

1. Определение комплексных чисел и основные операции над ними. К *комплексным* числам обычно приходят, рассматривая уравнение $x^2+1=0$. Очевидно, не существует действительных чисел, удовлетворяющих этому уравнению. Корнями этого уравнения (как и целого ряда других уравнений) оказываются комплексные числа.

Под комплексным числом понимается выражение

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где x и y — действительные числа, а i — *мнимая единица*.

Числа $x + i0 = x$ отождествляются с действительными числами; в частности, $0 + i0 = 0$. Числа $0 + iy = iy$ называются *чисто мнимыми*.

Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями числа z и обозначаются следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Под *модулем* комплексного числа z понимается неотрицательное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Сопряженным числом $\bar{z}$ к числу (1) называется комплексное число $\bar{z} = x - iy$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел определяются следующим образом.

I. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

II. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Отсюда в частности:

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1,$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

III. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$

2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Рассмотрим плоскость с прямоугольной декартовой системой координат xOy (рис. 45). Так как комплексное число

$$z = x + iy$$

является парой $(x; y)$ действительных чисел, а каждой паре $(x; y)$ действительных чисел соответствует одна точка плоскости, и наоборот (см. § 1), то каждую точку $(x; y)$ плоскости можно принять за изображение комплексного числа $z = x + iy$. В этом случае эта плоскость называется комплексной плоскостью, а z — точкой этой плоскости. На оси Ox расположены действительные числа: $z = x + i0 = x$; поэтому она называется действительной осью. На оси Oy расположены чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$; она называется *мнимой осью*.

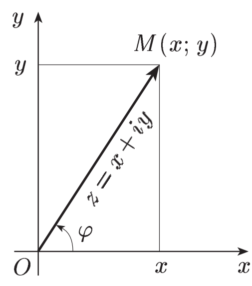

Рис. 45

Заметим, что $r = |z|$ представляет собой расстояние точки z от начала координат (см. § 1). Положение точки z на плоскости, кроме ее декартовых координат x, y, может быть определено также и полярными координатами r, φ, при этом (см. § 1)

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Число φ будем называть *аргументом* комплексного числа z и пользоваться обозначением $\varphi = \arg z$. Аргумент считается положительным или отрицательным в зависимости от того, ведется ли его отсчет от положительного направления действительной оси против или по движению часовой стрелки соответственно.

По заданной точке z ее модуль определяется единственным образом, а аргумент — с точностью до слагаемого $2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, называется *главным*.

Точка $z = 0$ является единственной точкой комплексной плоскости, для которой аргумент не определен.

3. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Из формул (1) и (2) получается *тригонометрическая форма* записи комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

Пользуясь записью (3) для комплексных чисел:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

имеем:

$$\begin{aligned} z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \\ = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)[\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)]}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\ = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \qquad (r_2 \neq 0). \end{aligned}$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

4. Возведение в степень и извлечение корня. Формула Эйлера. Следствием формулы (4) является формула

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{5}$$

(n — натуральное число).

Пусть

$$\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

где $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда на основании формулы (5) имеем:

$$z = [\rho((\cos\psi + i\sin\psi)]^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Отсюда:

$$\rho^n = r, \qquad n\psi = \varphi + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и, следовательно, $\rho = \sqrt[n]{r}$ (под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметическое значение корня),

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Здесь в качестве k достаточно брать лишь значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, так как при прочих значениях k получаются повторения уже найденных значений корня. Таким образом, окончательно:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (6)$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 1. Найти $\omega = \sqrt{-1}$. Так как $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, то на основании формулы (6) имеем:

$$\sqrt{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2}, \qquad k = 0, 1.$$

Отсюда

$$\omega_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \qquad \omega_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Пример 2. Решить уравнение $z^2 - 2z + 2 = 0$. Переписав это уравнение в виде $(z-1)^2 + 1 = 0$, имеем $z - 1 = \sqrt{-1}$, откуда $z_{1,2} = 1 \pm i$.

Формула (5) может быть переписана в виде

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

Полагая здесь $r = 1$, получим формулу

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

называемую *формулой Муавра* *). Справедлива **) и следующая формула:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

называемая *формулой Эйлера* ***).

Упражнения

1. Дано $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 3}$. Найти $f(1)$. $\left[f(1) = \dfrac{1}{4}.\right]$

2. Дано $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Показать, что $f(2) = f(3) = 0$.

3. Найти значения функции $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$ для значений аргумента, равных $-1; 0; 1; 2$.

$\left[f(-1) = -\dfrac{1}{2};\ f(0) = 1;\ f(1) = \dfrac{3}{2};\ f(2) = 1.\right]$

---

*) А. Муавр (1667–1754) — английский математик.

**) См., например, [6].

***) Леонард Эйлер (1707–1783) — великий математик, большую часть своей жизни провел в России, по происхождению швейцарец.

4. Полагая $f(x)=\cos 2x$, вычислить $f(0)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$\left[f(0)=1;\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0;\ f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

5. Найти области определения функций:

$y=3\sqrt{4-x^2}$. [[−2; 2].]

$y=\dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}$. [(−5; 5).]

$y=\dfrac{5-\sqrt{x-2}}{\sqrt{5-x}}$. [[2; 5).]

$y=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$. [[−3; 7].]

$y=\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[5]{x-3}$. [(−∞; +∞).]

$y=x\arcsin x$. [[−1; 1].]

$y=2^x$. [(−∞; ∞).]

$y=\dfrac{1+x}{1-x}$. [$x\neq 1$.]

6. Построить графики функций:

а) $y=3x+5$; б) $y=\frac{1}{2}x^2+1$; в) $y=4-4x^2$;

г) $y=\frac{5}{x}$; д) $y=x^3+1$; е) $y=\sin 2x$;

ж) $y=\cos 3x$; з) $y=\sin\frac{x}{2}$; и) $y=\cos\frac{x}{3}$;

к) $y=2\operatorname{tg} x$; л) $y=4\sin x$; м) $y=5\cos x$.

7. Изобразить точками на плоскости следующие последовательности, заданные общими членами:

а) $a_n=\dfrac{1}{n+1}$; б) $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$; в) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$;

г) $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$; д) $a_n=\dfrac{3n+1}{n}$.

Вычислить указанные пределы.

8. $\lim\limits_{x\to-2}(x^2+6x+8)$. [0.]

9. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+1}$. [3.]

10. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. [−1.]

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. [3.]

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3+3x^2-x}{7x}$. $\left[-\frac{1}{7}.\right]$

13. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$. [2.]

14. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

15. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$. $\left[\frac{2}{3}.\right]$

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$. $\left[\frac{3}{2}.\right]$

17. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$. [−8.]

18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. $\left[\frac{1}{2}.\right]$

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

20. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+x}$. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. $\left[\frac{1}{2}.\right]$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$. [1.]

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$. [1.]

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$. $\left[\dfrac{15}{2}.\right]$

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$. [3.]

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$. $\left[\dfrac{5}{2}.\right]$

29. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$. $\left[\dfrac{12}{5}.\right]$

30. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(\sqrt{x-1}-2)^2}{(x-5)^2}$. $\left[\dfrac{1}{16}.\right]$

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})^3}{x^3}$. [−1.]

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-n+1}{2n^3+n^2}$. $\left[\dfrac{3}{2}.\right]$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+7x-1}$. [0.]

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n-1}{n^4+2n}$. [0.]

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x+3}{x^3-8x+5}$. [$\infty$.]

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x^3+5}{3x^4-5x^2+1}$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$. [$e$.]

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n}\right)^{n}$. [$e^4$.]

40. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. [$e$.]

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. [1.]

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$. [$e^2$.]

44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$. [2.]

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$. [2.]

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$. [0.]

47. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 2x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$. [2.]

49. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$. [$x$.]

50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$. $\left[\dfrac{m}{n}.\right]$

51. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. $\left[\dfrac{2}{\pi}.\right]$

52. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$. [$e$.]

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x}$. [0.]

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[4]{1+x^2}-1)\operatorname{tg}\frac{x}{3}}{x}$. [0.]

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)\cos\pi x}{x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

56. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$. [1.]

57. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. [$e^3$.]

Для вычисления некоторых пределов бывает необходимым использование тригонометрических формул:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

58. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2}$ [$-\sin a$.]

59. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$ [$2\cos a$.]

60. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$ $\left[\dfrac{1}{2}(n^2-m^2).\right]$

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos a}{1-\cos x}$ [$-2\cos a$.]

62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$. $\left[-\dfrac{1}{4}.\right]$

64. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\right]$

65. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}.\right]$

66. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. $\left[\dfrac{1}{4}.\right]$

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos 2-2\cos x}{2\cos x-2}$. [1.]

70. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$. [$\sqrt{2}$.]

71. Какие нижеследующие бесконечно малые при $x\to 0$ будут бесконечно малыми одного порядка, высшего порядка, низшего порядка по отношению к функции $\beta(x)=x$?

а) $\alpha(x)=3x$; б) $\alpha(x)=2\sin x$; в) $\alpha(x)=x^2$;
г) $\alpha(x)=\sin^2 x$; д) $\alpha(x)=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}$.

[Одного порядка: а), б); высшего порядка: в), г); низшего порядка: д).]

Исследовать на непрерывность следующие функции.

72. $f(x)=x+1$ в точках $x=1$ и $x=-1$. [В обеих точках непрерывна.]

73. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\geqslant 1,\\ x, & \text{если } x<1,\end{cases}$

в точке $x=1$. [В точке $x=1$ непрерывна.]

74. $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{если} \quad 0\leqslant x<3,\\ 3-x, & \text{если} \quad 3\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$

в точке $x=3$. [В точке $x=3$ разрывна.]

75. Найти $(3+5i)(4-i)$. [$17+17i$.]

76. Найти $(6+11i)(7+3i)$. [$9+95i$.]

77. Найти $\dfrac{3-i}{4+5i}$. $\left[\dfrac{7}{41}-\dfrac{19}{41}\,i.\right]$

78. Найти а) $(4-7i)^2$, б) i^{10}. [а) $-33-56i$, б) -1.]

79. Представить числа i; -2; $-i$; $1+i$; $1-i$ в тригонометрической форме.

$$\left[\begin{gathered} i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\\ -2=2(\cos\pi+i\sin\pi),\\ -i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\\ 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\\ 1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]. \end{gathered}\right]$$

Найти все значения для указанных радикалов.

80. $\sqrt[3]{1}$. $\left[1;\ -\dfrac{1}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ -\dfrac{1}{2}-i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\right]$

81. $\sqrt[4]{1}$. [1; i; -1; $-i$.]

82. $\sqrt{-5-12i}$. [$2-3i$; $-2+3i$.]

83. Используя формулу Эйлера, вычислить действительную и мнимую части, а также модуль выражений:

а) e^{3i}; б) e^{-i}.

$$\left[\begin{aligned} &\text{а) } \operatorname{Re} e^{3i}=\cos 3,\ \operatorname{Im} e^{3i}=\sin 3,\ |e^{3i}|=1;\\ &\text{б) } \operatorname{Re} e^{-i}=\cos 1,\ \operatorname{Im} e^{-i}=-\sin 1,\ |e^{-i}|=1. \end{aligned}\right]$$

Глава III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 14. Понятие производной и ее геометрический смысл

1. Задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о скорости движущейся точки. Пусть $s=s(t)$ представляет закон прямолинейного движения материальной точки. Это уравнение выражает путь s, пройденный точкой, как функцию времени t. Обозначим через Δs путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt от момента t до $t+\Delta t$, т. е. $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$. Отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* точки за время от t до $t+\Delta t$. Чем меньше Δt, т. е. чем короче промежуток времени от t до $t+\Delta t$, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t. Поэтому естественно ввести понятие скорости v в данный момент t, определив ее как предел средней скорости за промежуток от t до $t+\Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Величина v называется *мгновенной скоростью* точки в данный момент t.

Аналогично задаче о скорости прямолинейного движения рассматривается задача о скорости химической реакции.

Задача о скорости химической реакции. Пусть дана функция $m = m(t)$, где m — количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δm величины m. Отношение $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ — средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta t}$, есть скорость химической реакции в данный момент времени t.

Аналогично этим задачам рассматривается *задача о скорости роста популяции*. Пусть $p = p(t)$ — размер популяции бактерий в момент t. Тогда, рассуждая, как и выше, получим, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta p}{\Delta t}$ есть скорость роста популяции бактерий в данный момент t.

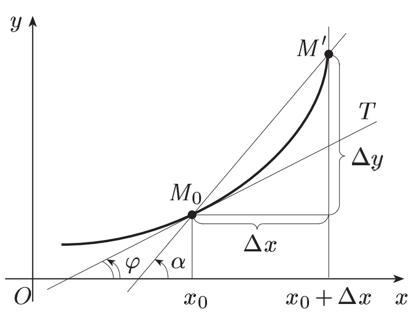

Рис. 46

Задача о касательной к данной кривой. Пусть на плоскости xOy дана кривая уравнением $y = f(x)$. Требуется провести касательную к данной кривой в данной точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Так как точка касания M_0 дана, то для решения задачи потребуется найти угловой коэффициент искомой касательной, т. е. $\operatorname{tg}\varphi$ — тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox (рис. 46).

Через точки $M_0(x_0; f(x_0))$ и $M'(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$ проведем секущую M_0M'. Из рисунка 46 видно, что угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ секущей M_0M' равен отношению

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Угловой коэффициент касательной M_0T к данной кривой в точке M_0 может быть найден на основании следующего определения: касательной к кривой в точке M_0 называется прямая M_0T, угловой коэффициент которой равен пределу углового коэффициента секущей M_0M', когда $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Определение производной. Математическая операция, требуемая для решения рассмотренных выше трех задач, одна и та же. Выясним аналитическую сущность этой операции, отвлекаясь от вызвавших ее конкретных вопросов.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $(a; b)$. Возьмем какое-нибудь значение x из $(a; b)$. Затем возьмем новое значение аргумента $x + \Delta x$ из этого промежутка, придав первоначальному значению x приращение Δx (положительное или отрицательное). Этому новому значению аргумента соответствует и новое значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, где $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Теперь составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Оно является функцией от Δx.

Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, то этот предел называется *производной* от функции $y = f(x)$ в данной точке x и обозначается через y' или $f'(x)$ (читается «игрек штрих» или «эф штрих от икс»):

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Для обозначения производной принят также и следующий символ $\dfrac{dy}{dx}$ (читается «дэ игрек по дэ икс»). Эту запись надо рассматривать пока как целый символ, а не как частное.

Если существует предел справа $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $\Bigl($или предел слева $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Bigr)$, то он называется *правой* (или *левой*) производной функции $f(x)$ в точке x.

Действие нахождения производной функции называется ее *дифференцированием*, а функцию, имеющую производную в точке x, называют *дифференцируемой* в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка, называется дифференцируемой в этом промежутке. При этом если промежуток от a до b есть отрезок $[a; b]$, то в точке a речь идет о правой производной, а в точке b — о левой производной.

Пример 1. Найти производную функции $y = C$, где C — постоянная. Имеем: $y+\Delta y = C$, $\Delta y = 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} = 0$, т. е. $y' = 0$. Следовательно, производная постоянной равна нулю.

Пример 2. Найти производную функции $y = x$. Имеем:

$$y+\Delta y = x+\Delta x, \qquad \Delta y = \Delta x, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

т. е. $y' = 1$.

Пример 3. Найти производную функции $y = \sin x$. Имеем:

$$y+\Delta y = \sin(x+\Delta x), \qquad \Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{x}\right) = \cos x$$

(здесь используется формула (9) из § 11 и непрерывность функции $\cos x$).

Из рассмотренных выше задач, приводящих к понятию производной, следует:

1. *Скорость v прямолинейного движения есть производная пути s по времени t*: $x = \dfrac{ds}{st}$. В этом состоит *механический* смысл производной. Скорость v химической реакции есть производная количества вещества m по времени t: $v = \dfrac{dm}{dt}$. Скорость роста популяции есть производная размера популяции p по времени t: $\dfrac{dp}{dt}$. По аналогии с этим производную любой функции часто называют скоростью изменения этой функции.

2. *Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x есть производная $f'(x)$*. В этом состоит *геометрический* смысл производной.

Задача 1. Точка движется по прямой по закону $s = t$, где s — путь (в см), а t — время (в с). Найти скорость движения точки в момент $t = 3$.

Решение. Имеем $v = s' = 1$ (пример 2). В частности, при $t = 3$ $v = 1$ (см/с).

Задача 2*). Размер популяции бактерий в момент t (время выражено в часах) задается формулой $p(t) = 3000 + 100t^2$. Найти скорость роста популяции в момент $t = 5$.

---

*) Много задач из биологии, иллюстрирующих методы высшей математики, содержится в книге [4]; часть этих задач используется в настоящем пособии.

Решение. Имеем $p'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{3000 + 100(t+\Delta t)^2 - 3000 - 100t^2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{100(2t+\Delta t)\,\Delta t}{\Delta t} = 100 \lim\limits_{\Delta t \to 0}(2t + \Delta t) = 200t$. В частности, при $t = 5$ скорость роста составляет 1000 бактерий в час.

Задача 3. Найти уравнение касательной и *нормали* *) к кривой $y = x^2 + 1$ в точке $A(1;2)$.

Решение. Найдем производную функции $y = x^2 + 1$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^2 + 1) - (x^2+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

В точке касания A $x = 1$ и, следовательно, угловой коэффициент касательной $k_1 = 2$, а нормали $k_2 = -\dfrac{1}{2}$ (§ 3). Поэтому (см. § 2, п. 3) искомые уравнения запишутся в виде

$$y - 2 = 2(x-1), \qquad y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

или $y = 2x$, $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Согласно формуле (1) (§ 14) и теореме 1 (§ 11, п. 1) имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ бесконечно малая. Отсюда $\Delta y = y'\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т. е. функция $y = f(x)$ непрерывна в данной точке x.

Примечание. Обратное утверждение уже не имеет места, что видно из следующего примера.

Пример 4. Функция $y = |x|$, график которой приведен на рисунке 47, непрерывна в точке $x = 0$, но ясно, что в этой точке в соответствии с геометрическим смыслом производной функция $y = |x|$ не дифференцируема, так как в ней нет определенной касательной.

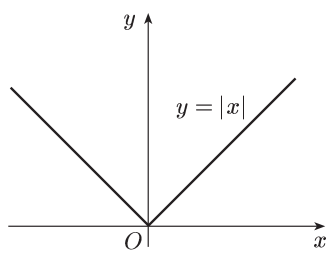

Рис. 47

Замечание. В дополнение к замечанию, сделанному в § 12 п. 3 в отношении непрерывности функций, используемых при построении математических моделей, будем в тех случаях, где нужно, считать эти функции дифференцируемыми, специально не оговаривая это в дальнейшем.

---

*) Т. е. прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к касательной к данной кривой в точке A.

§ 15. Правила дифференцирования и производные элементарных функций

1. Вывод общих правил дифференцирования. Пусть u и v — две функции аргумента x, имеющие производные u' и v'.

Производная суммы. Пусть $y = u + v$. Тогда имеем:

$$y + \Delta y = (u + \Delta y) + (v + \Delta v),$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

т. е.

$$y' = u' + v'$$

или

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Пример 1. $(x + \sin x)' = (x)' + (\sin x)' = 1 + \cos x$.

Примечание 1. Правило дифференцирования суммы двух слагаемых распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, что доказывается аналогично.

Производная произведения. Пусть $y = uv$. Тогда имеем:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

$$\Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = \\ = vu' + uv' + u' \cdot 0\,^{*)}$$

т. е.

$$y' = u'v + uv'$$

или

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{1}$$

Пример 2. $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x (\sin x)' = \sin x + x \cos x$.

Вынесение постоянного множителя за знак производной. Так как $(c)' = 0$ (см. § 14, п. 2, пример 1), то из формулы (1) непосредственно получаем:

$$(cu)' = cu'.$$

Производная частного. Пусть $y = \dfrac{u}{v}$, где $v \neq 0$. Тогда имеем:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

---

*) Мы воспользовались здесь тем, что в силу непрерывности функции v (непрерывность следует из ее дифференцируемости) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$.

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u+\Delta u)\,v - u\,(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)\,v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{(v+\Delta v)\,v},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}\,v - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)\,v}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)\,v} = \frac{vu' - uv'}{(v+0)\,v},$$

т. е.

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

или

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример 3. $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = \dfrac{(x-1)'(x+1) - (x+1)'(x-1)}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{1\cdot(x+1) - 1\cdot(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Производная сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, причем $f(u)$ имеет производную по u, а $\varphi(x)$ — по x. Тогда y будет сложной функцией от x. Требуется найти производную y по x. Имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(предполагается, что Δu при достаточно малых значениях Δx не обращается в нуль), откуда:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{2}$$

Пример 4. Найти производную от функции $y = \sin 3x$. Полагаем $u = 3x$, тогда $y = \sin u$ и, следовательно, по формуле (2) имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin u}{du}\cdot\frac{d(3x)}{dx} = (\cos u)\,3 = 3\cos 3x.$$

Примечание 2. При достаточном навыке промежуточную переменную u не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Производная обратной функции. Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции. Тогда если функция $y = f(x)$ имеет не равную нулю производную $f'(x)$, то обратная функция имеет производную $\varphi'(y)$ и

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

или, короче,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{3}$$

Действительно, так как $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции, то $x = \varphi[f(x)]$. Отсюда, используя формулу (2) дифференцирования сложной функции, получим:

$$1 = \varphi'(y)\, f'(x),$$

откуда и следует искомая формула (3).

2. Производные элементарных функций. Пусть u, как и выше, — функция аргумента x, имеющая производную u'.

Производные тригонометрических функций. Как установлено ранее (§ 14, п. 2, пример 3),

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Отсюда с учетом формулы (2):

$$(\sin u)' = u' \cos u. \tag{4}$$

На основании формулы (4) имеем:

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Отсюда с учетом (2) получаем:

$$(\cos u)' = -u' \sin u.$$

Далее имеем:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отсюда с учетом формулы (2):

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}. \tag{5}$$

Используя формулу (5), находим:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отсюда с учетом (2):

$$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Производная логарифма. Пусть $y = \ln x$. Тогда имеем:

$$y + \Delta y = \ln(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}.$$

Пользуясь известным пределом $e = \lim\limits_{z \to 0}(1 + z)^{1/z}$ (§ 9, примечание), будем иметь

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x},\quad \text{т. е.}\quad y'=\frac{1}{x}$$

или

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \tag{6}$$

Пусть теперь $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Тогда $a^y=x$. Отсюда $y\ln a=\ln x$ или $y=\dfrac{\ln x}{\ln a}$, откуда согласно (6)

$$y'=\frac{1}{x\ln a}$$

или

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}. \tag{7}$$

Из формул (6), (7) с учетом формулы (2) получаем:

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}, \tag{8}$$

$$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}.$$

В частности,

$$(\lg u)'=(\log_{10} u)'=\frac{u'}{u\ln 10}.$$

П р и м е р 1. $y=\ln\cos x$, $y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$.

Производная степенной функции. Пусть $y=x^\alpha$ (α — действительное число и $x>0$). Тогда $\ln y=\alpha\ln x$, и согласно формуле (8) $\dfrac{y'}{y}=\alpha\dfrac{1}{x}$. Отсюда $y'=\alpha y\dfrac{1}{x}=\alpha x^\alpha\dfrac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$, т. е.

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}. \tag{9}$$

Формула (9) верна и в случае, когда функция $y=x^\alpha$ определена на всей числовой оси (например, когда α — натуральное число).

Из формулы (9) с учетом формулы (2) получаем:

$$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'. \tag{10}$$

П р и м е р 2. Если $y=\sqrt{\sin x}$, то $y'=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Производная показательной функции. Пусть $y=a^u$ $(0<a\neq 1)$. Тогда $\ln y=u\ln a$, и согласно формулам (8), (10) $\dfrac{y'}{y}=u'\ln a$. Отсюда: $y'=yu'\ln a=a^u u'\ln a$, т. е.

$$(a^u)'=a^u u'\ln a.$$

В частности,

$$(e^u)'=e^u u'.$$

П р и м е р 3. $y=2^{x^2}$, $y'=2^{x^2}2x\ln 2=2^{x^2+1}x\ln 2$.

Производные обратных тригонометрических функций. Функция $y = \arcsin x$ является обратной по отношению к функции $x = \sin y$. Поэтому по правилу дифференцирования обратной функции получаем:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким же приемом получаем:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{+\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(0 < y < \pi),$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Отсюда с учетом (2) получаем:

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2},$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2},$$

Пример 4. $(\operatorname{arctg} x^2)' = \dfrac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \dfrac{2x}{1+x^4}.$

Для удобства нахождения производных различных функций сведем все правила и формулы дифференцирования в одну таблицу.

Правила дифференцирования и производные основных элементарных функций

1. $(C') = 0.$
2. $(u+v)' = u' + v'.$
3. $(uv)' = u'v + uv'.$
4. $(Cu)' = Cu'.$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}.$
6. $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}.$
7. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'.$
8. $(a^u)' = a^u u' \ln a.$
9. $(e^u)' = e^u u'.$
10. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}.$
11. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}.$
12. $(\sin u)' = u' \cos u.$
13. $(\cos u)' = -u' \sin u.$
14. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}.$
15. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}.$

16. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

17. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

18. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

19. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции; $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции, причем $y = f(x)$ имеет не равную нулю производную.

§ 16. Дифференциал функции

1. Понятие дифференциала. Из определения производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

с учетом теоремы 1 (§ 11) получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \tag{1}$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Умножим обе части равенства (1) на Δx:

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha \Delta x.$$

Пусть $y' \neq 0$. Тогда первое слагаемое $y'\Delta x$ линейно по Δx, поскольку y' не зависит от Δx. При $\Delta x \to 0$ это слагаемое бесконечно мало, но порядок его малости ниже порядка малости второго слагаемого, так как для всех значений $y' \neq 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{y'\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{y'} = 0.$$

Поэтому слагаемое $y'\Delta x$ является главной частью приращения функции. Это слагаемое называют *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначают символом dy или $df(x)$.

Итак, $dy = y'\Delta x$.

2. Геометрический смысл дифференциала. Для выяснения геометрического смысла дифференциала к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x; y)$ проведем касательную MT, обозначив через φ ее угол наклона к положительному направлению оси Ox (рис. 48).

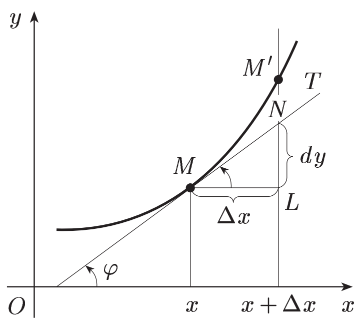

Рис. 48

Так как $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$, то

$$dy = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x.$$

Поэтому из треугольника MLN следует, что дифференциал dy есть приращение ординаты касательной, соответствующее приращению аргумента Δx.

Замечая, что $dx = x'\Delta x = \Delta x$, т. е. что дифференциал независимой переменной равен ее приращению, получаем:

$$dy = y'\,dx. \tag{2}$$

Таким образом, дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал (или приращение) независимой переменной.

Из (2) имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

т. е. производная функции равна отношению дифференциала этой функции к дифференциалу аргумента. Это оправдывает введенное ранее обозначение производной $\dfrac{dy}{dx}$.

Ввиду общности операций нахождения производной и дифференциала обе они носят название дифференцирования.

3. Таблица формул для дифференциалов. Согласно формуле (2) для получения дифференциала нужно умножить производную на dx (дифференциал независимой переменной) . Это позволяет нам из таблицы формул для производных сразу получить соответствующую таблицу формул для дифференциалов. Например, из формулы

$$(u+v)' = u' + v',$$

умножив обе части на dx, получим:

$$(u+v)'\,dx = u'\,dx + v'\,dx$$

или

$$d(u+v) = du + dv.$$

Таблица дифференциалов

1. $dC = 0.$
2. $d(u+v) = du + dv.$
3. $d(uv) = v\,du + u\,dv.$
4. $d(Cu) = C\,du.$
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$
6. $d(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1}\,du.$
7. $d(a^u) = a^u \ln a\,du.$
8. $d(e^u) = e^u\,du.$
9. $d(\log_a u) = \dfrac{du}{u\ln a}.$
10. $d(\ln u) = \dfrac{du}{u}.$
11. $d(\sin u) = \cos u\,du.$
12. $d(\cos u) = -\sin u\,du.$
13. $d(\operatorname{tg} u) = \dfrac{du}{\cos^2 u}.$
14. $d(\operatorname{ctg} u) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}.$
15. $d(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$
16. $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$
17. $d(\operatorname{arctg} u) = \dfrac{du}{1+u^2}.$
18. $d(\operatorname{arcctg} u) = -\dfrac{du}{1+u^2}.$

Здесь $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые функции.

4. Применение дифференциала для приближенных вычислений. Мы выяснили, что приращение функции Δy отличается от дифференциала dy на бесконечно малую $\alpha\Delta x$ более высокого порядка, чем $y'\Delta x$. Следовательно, для малых $|\Delta x|$

$$\Delta y \approx dy$$

или

$$\Delta y \approx y'\Delta x. \tag{3}$$

Равенство (3) может быть применено для приближенного подсчета приращения функции, так как согласно этой формуле вычисление приращения функции сводится к вычислению производной функции, что представляет собой обычно более простую задачу.

З а д а ч а. Ребро куба длиной 30 см увеличено на 0,1 см. Требуется определить величину изменения объема этого куба.

Р е ш е н и е. Обозначая ребро куба через x, имеем для объема $v = x^3$. Отсюда: $dv = 3x^2\Delta x$. В нашем случае $\Delta x = 0{,}1$ и, значит, $dv = 3\cdot 900\cdot 0{,}1 = 270$. Следовательно, $\Delta v \approx 270$ (см^3).

С помощью замены приращения функции ее дифференциалом решается также задача нахождения приближенного значения функции $f(x+\Delta x)$ по ее значению $f(x)$. Действительно,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x.$$

Отсюда:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{4}$$

П р и м е р 1. Вычислить $\sqrt{16{,}02}$. Взяв функцию $f(x) = \sqrt{x}$, имеем: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Теперь, полагая $x = 16$, $\Delta x = 0{,}02$, получаем:

$$\sqrt{16{,}02} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}\cdot 0{,}02 = 4 + \frac{1}{8}\cdot 0{,}02 = 4 + 0{,}0025 = 4{,}0025.$$

Формула (4) служит источником многих формул приближенных вычислений.

П р и м е р 2. Если $y = \sqrt[m]{x}$, $m = 2, 3, \ldots$, то $y' = \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{\sqrt[m]{x}}{x}$ и согласно (4) при малых значениях $|\Delta x|$ имеем:

$$\sqrt[m]{x+\Delta x} \approx \sqrt[m]{x} + \frac{1}{m}\,\frac{\sqrt[m]{x}}{x}\,\Delta x.$$

В частности, при $x = 1$

$$\sqrt[m]{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{m}.$$

П р и м е р 3. Если $y = \sin x$, то, как и в предыдущем примере, при малых значениях $|\Delta x|$ получаем:

$$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x\,\Delta x.$$

В частности, при $x = 0$

$$\sin\Delta x \approx \Delta x.$$

П р и м е р 4. Если $y = \ln x$, то, как и выше, при малых значениях $|\Delta x|$ получаем:

$$\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}.$$

В частности, при $x = 1$

$$\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x.$$

5. Производные и дифференциалы высших порядков. Производная $y' = f'(x)$ данной дифференцируемой функции $y = f(x)$, называемая *производной первого порядка*, представляет собой некоторую новую функцию. Возможно, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется *производной второго порядка* или *второй производной* и обозначается так: $y'' = (y')'$ или $f''(x)$. Аналогично если существует производная от производной второго порядка, то она называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается так: $y''' = (y'')'$ или $f'''(x)$ и т. д.

Вообще производная от производной порядка $n-1$ называется *производной n-го порядка* и обозначается $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$.

Дифференциалом n-го порядка называется произведение производной n-го порядка на n-ю степень приращения аргумента:

$$d^n y = y^{(n)}(\Delta x)^n = y^{(n)}(dx)^n = y^{(n)}dx^n.$$

Отсюда получается другая запись для n-й производной:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Примечание. Символ dx^n необходимо отличать от символа $d(x^n)$, обозначающего дифференциал функции x^n, т. е. $nx^{n-1}\,dx$.

Пример 1. Если $y = e^{kx}$, то $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Поэтому $y^{(n)} = k^n e^{kx}$.

Пример 2. Если $y = \sin x$, то $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому с привлечением метода математической индукции получаем $y^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$.

6. Физический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ — уравнение прямолинейного движения материальной точки. Как установлено ранее (см. § 14, п. 1), мгновенная скорость v этого движения есть производная пути s по времени t, т. е. $v = \frac{ds}{dt}$. Если теперь эту скорость рассматривать как функцию времени, то так же, как и в п. 1 (§ 14), установим, что $\frac{dv}{dt}$ есть ускорение a в момент t. Таким образом, получаем, что $a = \frac{d^2s}{dt^2}$, т. е. вторая производная пути s по времени t есть ускорение a движущейся точки в момент t. В этом и заключается физический смысл второй производной.

Задача. Точка движется по прямой по закону $s = t^3$, где s — путь (в см), а t — время (в с). Найти скорость и ускорение движения точки в момент $t = 2$ с.

Решение. Имеем: $v = s' = 3t^2$, $a = s'' = 6t$. В частности, при $t = 2$ с $v = 12\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$ и $a = 12\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

§ 17. Свойства дифференцируемых функций

1. Теорема Ферма *). *Если функция $y = f(x)$, определенная в интервале (a, b), достигает в некоторой точке c этого интервала наибольшего (или наименьшего) значения и существует производная $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Допустим, что в точке c функция $f(x)$ достигает наибольшего значения. Придадим значению c достаточно малое приращение Δx. Тогда $f(c+\Delta x) < f(c)$. Отсюда при $\Delta x < 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \geqslant 0. \qquad (1)$$

При $\Delta x > 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c) \leqslant 0. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $f'(c) = 0$.

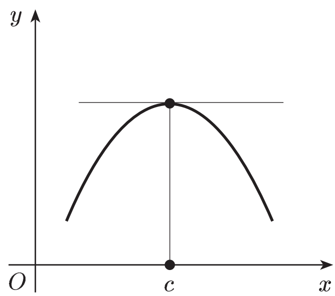

Рис. 49

Геометрический смысл заключения теоремы состоит в том, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке c параллельна оси абсцисс (рис. 49).

2. Теорема Ролля **). *Если функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a; b]$ и дифференцируемая в интервале $(a; b)$, принимает на концах этого сегмента равные значения $f(a) = f(b)$, то в интервале $(a; b)$ существует точка c, такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то по свойству 3 непрерывных функций (см. § 12, п. 2) она принимает на этом сегменте как свое наибольшее значение M, так и свое наименьшее значение m. Возможны только два случая.

1) $M = m$. Тогда $f(x)$ постоянна на $[a; b]$: в самом деле, неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ в этом случае дает $f(x) = M$ для всех x из $[a; b]$. Поэтому в любой точке интервала $(a; b)$ $f'(x) = 0$.

2) $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то хоть одно из значений M и m достигается в некоторой точке c $(a < c < b)$. Следовательно, согласно теореме Ферма $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

---

*) Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик.

**) Мишель Ролль (1652–1719) — французский математик.

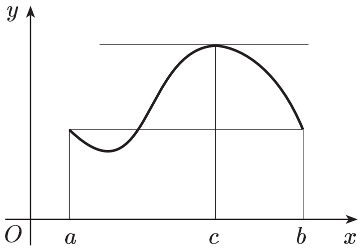

Рис. 50

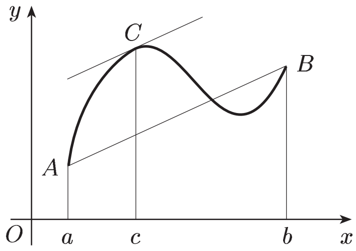

Рис. 51

Геометрически теорема Ролля означает следующее: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, где касательная параллельна оси абсцисс (рис. 50).

3. Теорема Лагранжа *). *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$, то в интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{3}$$

Доказательство. Положим:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lambda \tag{4}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x - a).$$

Эта функция удовлетворяет первым двум условиям теоремы Ролля как алгебраическая сумма трех непрерывных и дифференцируемых функций. При этом $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Следовательно, к функции $\varphi(x)$ применима теорема Ролля, т. е. существует точка c, $a < c < b$, такая, что $\varphi'(c) = 0$. Но $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$, поэтому $f'(c) - \lambda = 0$ или $\lambda = f'(c)$. Отсюда с учетом (4) получаем искомое равенство (3).

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл (рис. 51): на графике от A до B функции $y = f(x)$ есть внутренняя точка C, такая, что касательная к нему в точке C параллельна хорде AB. В самом деле, левая часть равенства (3) — угловой коэффициент хорды AB, а правая — угловой коэффициент касательной к графику в точке C.

Примечание. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля, так как если $f(a) = f(b)$, то из (3) следует $f'(c) = 0$.

Формула (3) называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений. Из нее получаем: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

*) Жозеф-Луи Лагранж (1736–1813) — французский математик и механик.

Наконец, взяв вместо a и b соответственно x_0 и x и обозначив $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, формулу Лагранжа запишем так:

$$\Delta y = f'(c)\,\Delta x.$$

Из теоремы Лагранжа вытекает следствие.

Следствие. *Если $f'(x) = 0$ в интервале $(a; b)$, то в этом интервале функция $f(x)$ постоянна.*

Доказательство. Для любых значений x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ из рассматриваемого интервала выполняется теорема Лагранжа, т. е. $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < c < x_2$. Но $f'(c) = 0$, а потому и $f(x_2) - f(x_1) = 0$, т. е. $f(x_2) = f(x_1)$ для любых значений x_1 и x_2, а это значит, что $f(x) = \mathrm{const}$ в интервале $(a; b)$.

4. Правило Лопиталя. В главе II (см. § 11) мы познакомились с некоторыми приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших, т. е. раскрытия неопределенности соответственно вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Здесь будет рассмотрен новый простой прием для раскрытия этих неопределенностей, называемый *правилом Лопиталя* *).

Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, исключая, быть может, саму точку a. Пусть далее эти функции одновременно являются бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \to a$.

Теорема. *Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний существует, т. е.*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Доказательство. Доказательство проведем для неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, причем для простоты будем предполагать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ вместе с их производными $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны в точке a и $\varphi'(a) \neq 0$. В случае неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$ доказательство несколько сложнее (см., например, [10]).

Итак, пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0 \tag{6}$$

и

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0. \tag{7}$$

*) Гильом Франсуа де Лопиталь (1661–1704) — французский математик.

Разность $f(x) - f(a)$ можно рассматривать как приращение функции $f(x)$ в точке a, соответствующее приращению аргумента $\Delta x = x - a$. Поэтому

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a); \tag{8}$$

аналогично

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a) \neq 0. \tag{9}$$

Учитывая формулы (6) и (7), при $x \neq a$ получаем:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \to a$ и используя формулы (8) и (9), будем иметь:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}. \tag{10}$$

По предположению производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны при $x \to a$, причем $\varphi'(a) \neq 0$. Поэтому

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f'(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi'(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}. \tag{11}$$

Наконец, сопоставляя равенства (10), (11), получим искомое правило Лопиталя (5).

П р и м е р 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x \ln 2}{\cos x} = \ln 2.$

П р и м е р 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1.$

Иногда правило Лопиталя приходится применять несколько раз.

П р и м е р 3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{2} = \dfrac{1}{2}.$

П р и м е ч а н и е. Правило Лопиталя верно и в том случае, когда a — символ ∞.

П р и м е р 4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

Случаи других неопределенностей

$$0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty$$

с помощью тождественных преобразований сводятся к основным типам неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

П р и м е р 5. $\lim\limits_{x \to 0+0} x \ln x.$

Здесь мы имеем неопределенность $0 \cdot \infty$. Переписывая данное выражение в виде:

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Отсюда, применяя правило Лопиталя, находим:

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

Данное выражение представляет собой неопределенность вида $\infty - \infty$. Используя, что $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x}.$$

Так как получилась неопределенность $\dfrac{0}{0}$, то применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = -\frac{0}{2} = 0.$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$. Здесь неопределенность вида 0^0. Положив $y = x^x$, имеем:

$$\ln \lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0+0} \ln y = \lim_{x\to 0+0} x\ln x = 0.$$

Следовательно, $\ln \lim\limits_{x\to 0+0} y = 0$, откуда:

$$\lim_{x\to 0+0} y = e^0 = 1, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{x\to 0+0} x^x = 1.$$

Использовавшийся в последнем примере прием логарифмирования применяется также и в случае неопределенностей ∞^0, 1^∞.

§ 18. Возрастание и убывание функций. Максимумы и минимумы. Асимптоты

1. Возрастание и убывание функций. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале $(a; b)$, если, каковы бы ни были значения x_1 и x_2 из этого интервала, из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (соответственно $f(x_2) < f(x_1)$). Если же для таких x_1 и x_2 из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ $(f(x_2) \leqslant f(x_1))$, то функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на $(a; b)$.

Функции всех этих типов носят общее название *монотонных*.

Монотонные функции часто встречаются в различных исследованиях. Высота растущего дерева, например, или вес созревающего зерна — это монотонно неубывающие функции времени; освещенность, меняющаяся по мере удаления от источника света, — монотонно убывающая функция расстояния.

Разумеется, существуют и не монотонные функции. Например, температура воздуха в течение года — не монотонная функция времени, хотя на протяжении нескольких часов она может быть и монотонной, повышаясь к полудню или понижаясь к вечеру.

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$, неубывающая (невозрастающая) на нем, то ее производная в этом интервале не отрицательна (не положительна), т. е.*

$$f'(x) \geqslant 0 \qquad (f'(x) \leqslant 0).$$

Доказательство. Пусть x — произвольное значение из интервала $(a; b)$. Придадим этому значению x приращение Δx, такое, чтобы точка $x + \Delta x$ принадлежала интервалу $(a; b)$. Если $f(x)$ неубывающая функция, то $\Delta y \geqslant 0$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta y \leqslant 0$ при $\Delta x < 0$. В обоих случаях $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$ и, следовательно, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$. Если же $f(x)$ невозрастающая функция, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$ и $f'(x) \leqslant 0$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$ удовлетворяет в нем условию $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то эта функция возрастает (убывает) в интервале $(a; b)$.*

Доказательство. Согласно формуле Лагранжа для произвольных x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ из $(a; b)$ имеем: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \times \times (x_2 - x_1)$, где $x_1 < c < x_2$. Следовательно, если $f'(x) > 0$ в $(a; b)$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$ и заданная функция возрастает в $(a; b)$. Если же $f'(x) < 0$ в $(a; b)$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$ и данная функция убывает.

Приведем несколько примеров исследования функции на возрастание и убывание.

Пример 1. Функция $y = e^x$ всюду возрастает, так как $y' = e^x > 0$ для всех x.

Пример 2. Функция $y = x^2$ убывает в промежутке $(-\infty; 0)$, так как в этом промежутке $y' = 2x < 0$. Эта же функция в промежутке $(0; +\infty)$ возрастает, так как в последнем промежутке $y' = 2x > 0$.

2. Максимумы и минимумы функций.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум* (*минимум*), если существует такая окрестность точки x_0 $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, что для всех x из этой окрестности, отличных от x_0, выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0)).$$

Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум), если для достаточно малого приращения Δx (любого знака) выполняется неравенство

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \qquad (f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)).$$

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции.

По определению максимумов и минимумов функции они могут достигаться лишь внутри области определения, концы сегментов области определения не могут служить точками, в которых функция принимает экстремум.

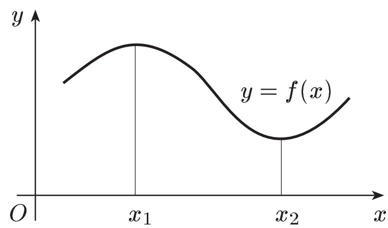

Рис. 52

На рисунке 52 изображен график функции, которая принимает в точке x_1 максимум, а в точке x_2 минимум.

Если исследуемая на экстремум функция дифференцируема, то изучение свойств ее производной дает возможность находить точки, в которых функция принимает экстремум.

Теорема 1 (необходимое условие существования экстремума). *Если функция $f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a; b)$, имеет в точке x_0, $a < x_0 < b$, экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю*:

$$f'(x_0) = 0. \tag{1}$$

Эта теорема есть непосредственное следствие теоремы Ферма.

Примечание. Условие (1), будучи необходимым условием экстремума, не является достаточным условием экстремума, что показывает следующий пример.

Пример 1. Функция $f(x) = x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0 = 0$ (разность $f(x) - f(0)$ меняет знак при изменении знака аргумента x), хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в этой точке в нуль.

Теорема 2 (достаточное условие существования экстремума). *Если производная функции $f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль (такие точки называются стационарными) и при переходе через эту точку в направлении возрастания x меняет знак плюс (минус) на минус (плюс), то в точке x_0 эта функция имеет максимум (минимум). Если же при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ не меняет знака, то в этой точке функция $f(x)$ экстремума не имеет.*

Доказательство. Допустим, что $f'(x)$ меняет знак плюс на минус. Тогда, согласно теореме 2 п. 1 настоящего параграфа, в достаточно малой окрестности точки x_0 слева от x_0 функция $f(x)$ возрастает и $f(x) < f(x_0)$, а справа от нее функция $f(x)$ убывает и снова $f(x) < f(x_0)$. Следовательно, для всех x из достаточно малой окрестности точки x_0 (кроме самой этой точки) будет выполняться неравенство $f(x) < f(x_0)$, т. е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогичное доказательство и в случае обратной смены знака.

Предположим теперь, что при переходе через точку x_0 производная функции $f(x)$ не меняет знака. Тогда по теореме 2 п. 1 настоящего параграфа как слева, так и справа от x_0 функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает и, следовательно, не может иметь экстремума в точке x_0.

Отсюда следует такое *правило исследования функции на экстремум* с помощью первой производной. Пусть в интервале $(a; b)$ дана дифференцируемая функция $f(x)$:

1) находим ее производную $f'(x)$;

2) находим корни уравнения $f'(x) = 0$;

3) выясняем знак $f'(x)$ слева и справа от каждого из этих корней и согласно теореме 2 выносим заключение об экстремуме;

4) вычисляем значения функции в точках экстремума.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = e^x - x$. Для этого находим: $f'(x) = e^x - 1$. Приравнивая ее к нулю, получаем $e^x - 1 = 0$, откуда: $x = 0$. Так как для $x < 0$ $e^x - 1 < 0$, а для $x > 0$ $e^x - 1 > 0$, то в точке $x = 0$ данная функция имеет минимум, причем $f(0) = 1$.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Для этого вычисляем производную

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$$

и находим корни уравнения $f'(x) = 0$. Имеем: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Затем согласно полученному правилу последовательно заполняем строки таблицы:

x	$x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < 1$	$x_2 = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		максимум $f(x_1) = 4$		минимум $f(x_2) = 0$	

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 + 2$. Имеем $f'(x) = 3x^2 = 0$, откуда $x = 0$. Так как при $x < 0$ и $x > 0$ $f'(x) > 0$, то функция $f(x) = x^3 + 2$ в точке $x = 0$ экстремума не имеет.

3. Исследование функций на экстремум с помощью второй производной. Следующая теорема является вторым достаточным условием существования экстремума.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее окрестности непрерывные первую и вторую производные, причем $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум (максимум), если $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$.*

Доказательство. Пусть $f''(x_0) > 0$. Так как $f''(x)$ непрерывна в точке x_0, то (см. § 12, п. 1) $f''(x) > 0$ и в некоторой окрестности точки x_0. В этой окрестности точки x_0 функция $z = f'(x)$ возрастает, так как $z' = f''(x) > 0$. Но $f'(x_0) = 0$. Следовательно, при переходе через точку x_0 в направлении возрастания $f'(x)$ меняет знак минус на плюс и потому, согласно теореме 2 п. 2 настоящего параграфа, $f(x)$

имеет в точке x_0 минимум. Доказательство в случае $f''(x_0)<0$ аналогично.

Эта теорема позволяет сформулировать *второе правило* отыскания экстремума функции, в котором меняется лишь пункт 3). Этот пункт заменяется на следующее:

находим вторую производную $f''(x)$, вычисляем ее значения для каждого из найденных корней уравнения $f'(x)=0$ и согласно только что доказанной теореме выносим заключение об экстремуме.

Заметим, что пользоваться вторым правилом обычно проще, чем первым. Но если вторая производная в корне первой производной обращается в нуль, то используют первое правило отыскания экстремума.

Пример. Применим второе правило отыскания экстремума для рассмотренной выше функции $f(x)=e^x-x$. Имеем: $f'(0)=0$, $f''(x)=e^x$, $f''(0)=1>0$, следовательно, $x=0$ дает минимум, т. е. приходим к тому же результату.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда на этом отрезке функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значений (§ 12, п. 2). Остановимся для определенности на наибольшем значении. Если эта функция достигает наибольшего значения в интервале $(a;b)$, то оно, очевидно, будет максимумом функции $f(x)$. Но функция может достигать своего наибольшего значения также на одном из концов отрезка $[a;b]$ (см. рис. 42). Таким образом, чтобы найти наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, надо найти на интервале $(a;b)$ все максимумы этой функции, затем вычислить значения функции $f(x)$ на концах отрезка $[a;b]$, т. е. $f(a)$ и $f(b)$. Наибольшее из всех этих чисел и будет наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Аналогично для нахождения наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ надо найти все минимумы этой функции на интервале $(a;b)$, затем вычислить $f(a)$ и $f(b)$. Наименьшее из всех этих чисел и будет наименьшим значением функции на отрезке $[a;b]$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=$ $=2x^3-9x^2+12x-3$ на отрезке $\left[\frac{3}{4};3\right]$.

Исследуем эту функцию на экстремум:

$$f'(x)=6x^2-18x+12,$$

$$6x^2-18x+12=0 \qquad \text{или} \qquad x^2-3x+2=0,$$

откуда: $x_1=1$, $x_2=2$. Так как $f''(x)=12x-18$, то $f''(1)=-6<0$ и $f''(2)=6>0$. Следовательно, при $x=1$ функция $f(x)$ имеет максимум, причем $f(1)=2$, а при $x=2$ эта функция имеет минимум, причем $f(2)=1$. Находим далее значения функции $f(x)$ на концах отрезка $\left[\frac{3}{4};3\right]$:

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{57}{32}; \qquad f(3)=6.$$

Таким образом, наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$ есть 6, а наименьшее равно 1.

Замечание. Очевидно, если непрерывная на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемая в интервале $(a; b)$ функция имеет в интервале $(a; b)$ только одну стационарную точку и экстремум в ней, то в этой точке она имеет наибольшее значение в случае максимума и наименьшее в случае минимума.

5. Задачи на экстремум. Теория экстремума функции имеет многочисленные практические применения.

Задача 1. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону

$$p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2},$$

где t выражается в часах. Найти максимальный размер этой популяции.

Имеем:

$$p'(t) = \frac{1000(100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}, \qquad p''(t) = -2000t \cdot \frac{300 - t^2}{(100 + t^2)^3}.$$

Так как $p'(10) = 0$ и $p''(10) < 0$, то максимальный размер популяции составляет

$$p(10) = 1000 + \frac{1000 \cdot 10}{100 + 100} = 1050$$

и достигается по прошествии 10 часов роста.

Задача 2. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенной дозы лекарства. Предположим, что x обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции y описывается функцией $y = f(x) = x^2(a - x)$, где a — некоторая положительная постоянная. При каком значении x реакция максимальна?

Имеем $f'(x) = 2ax - 3x^2$, $f''(x) = 2a - 6x$. Так как $x = \frac{2}{3}a$ — корень уравнения $f'(x) = 0$ и $f''\left(\frac{2a}{3}\right) = -2a < 0$, то $x = \frac{2a}{3}$ — тот уровень дозы, который дает максимальную реакцию.

Задача 3. Газовая смесь состоит из окиси азота (NO) и кислорода (O_2). Требуется найти концентрацию O_2, при которой содержащаяся в смеси окись азота окисляется с наибольшей скоростью.

Решение. В условиях практической необратимости скорость v реакции $2NO + O_2 = 2NO_2$ выражается формулой $v = kx^2y$, где x — концентрация NO в любой момент времени, y — концентрация O_2, k — константа скорости реакции, не зависящая от концентрации реагирующих компонентов и зависящая только от температуры. Концентрации газов будем выражать в объемных процентах. В этом случае $y = 100 - x$ и $v = kx^2(100 - x)$. Очевидно, $0 < x < 100$. Производная

$\dfrac{dv}{dx} = k(200x - 3x^2)$ между 0 и 100 имеет единственный корень $x = x_1 = 66{,}67$. Далее имеем: $\dfrac{d^2v}{dx^2} = k(200 - 6x)$, $\dfrac{d^2v(x_1)}{dx^2} < 0$, т. е. в точке x_1 — максимум. Следовательно, согласно замечанию п. 4 скорость v реакции наибольшая, когда $x = 66{,}67\,\%$ и $y = 33{,}33\,\%$.

Задача 4. Из квадратного листа жести со стороной a, вырезая по углам равные квадраты и сгибая края (рис. 53), необходимо сделать прямоугольную коробку наибольшего объема.

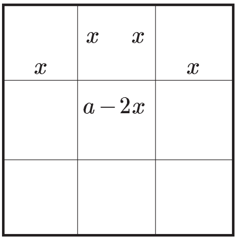

Рис. 53

Решение. Обозначим сторону вырезаемого квадрата через x. Тогда объем коробки выразится равенством $V = x(a - 2x)^2$, где x изменяется в интервале $\left(0; \dfrac{a}{2}\right)$. Производная $V' = (a - 2x)(a - 6x)$ между 0 и $\dfrac{a}{2}$ обращается в нуль в единственной точке $x = \dfrac{a}{6}$. Это значение x и доставляет объему V максимум (значит, согласно замечанию п. 4 и наибольшее значение), так как при $x = \dfrac{a}{6}$ $V'' = -4a < 0$. Таким образом, объем коробки будет наибольшим при стороне вырезаемого квадрата $x = \dfrac{a}{6}$.

6. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. На рисунке 54 построен график дифференцируемой функции $y = f(x)$. В точках A, B и C построим касательные к графику. Видно, что все точки графика, достаточно близкие к точке A и лежащие по обе стороны от нее, расположены ниже касательной. В этом случае график функции $f(x)$ называется *выпуклым в точке* A. Все точки графика, достаточно близкие к точке C и лежащие по обе стороны от нее, расположены выше касательной. В таком случае график функции $f(x)$ называется *вогнутым в точке* C.

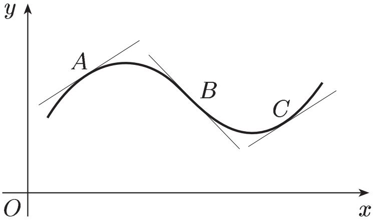

Рис. 54

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* (*вогнутым*) в интервале $(a; b)$, если он является выпуклым (вогнутым) в каждой своей точке с первой координатой из $(a; b)$. На рисунке 54 график между точками A и B является выпуклым, а между точками B и C — вогнутым.

Касательная, проведенная через точку B (рис. 54), пересекает график. При этом во всех точках графика, близких к точке B и лежащих слева от нее, график является выпуклым, а во всех точках графика, лежащих справа от точки B и близких к ней, график является вогнутым. Точка графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, при переходе через которую график меняет выпуклость на вогнутость и наоборот, называется точкой *перегиба*. В частности, на рисунке 54 точка B — точка перегиба.

Сформулируем без доказательства теоремы, позволяющие находить интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба.

Теорема 1. *Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в интервале $(a; b)$, то график этой функции является вогнутым (выпуклым) в этом интервале.*

Теорема 2. *Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ обращается в точке x_0 в нуль и при переходе через эту точку меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ графика данной функции является точкой перегиба.*

Из этих теорем вытекает схема исследования на выпуклость и вогнутость дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$:

1) находится вторая производная $f''(x)$ и решается уравнение

$$f''(x) = 0; \tag{2}$$

2) корни этого уравнения делят область определения второй производной $f''(x)$ на интервалы, в каждом из которых $f''(x)$ сохраняет свой знак. В интервалах, где $f''(x) < 0$, график функции $y = f(x)$ является выпуклым; в интервалах, где $f''(x) > 0$, график этой функции является вогнутым. Корни уравнения (2), при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак, являются точками перегиба графика.

Пример 1. Кривая $y = x^2$ вогнута на всей числовой оси, так как $y'' = 2 > 0$ (рис. 55)

Пример 2. Кривая $y = \ln x$ выпукла в промежутке $(0; +\infty)$, так как в этом промежутке $y'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ (рис. 56).

Пример 3. Кривая $y = x^3$ выпукла в промежутке $(-\infty; 0)$, так как в этом промежутке $y'' = 6x < 0$, и вогнута в промежутке $(0; +\infty)$, так как в

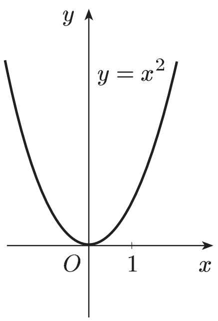

Рис. 55

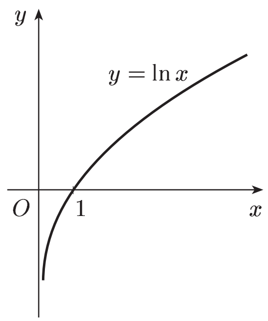

Рис. 56

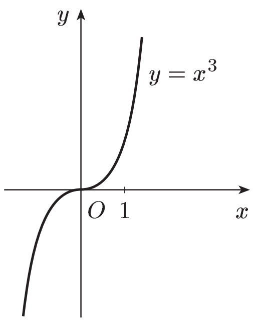

Рис. 57

нем $y'' = 6x > 0$; при $x = 0$ $y'' = 0$, следовательно, точка $(0; 0)$ — точка перегиба (рис. 57).

Точки перегиба важны в биохимии, так как они определяют условия, при которых некоторая величина, например скорость процесса, наиболее (или наименее) чувствительна к каким-либо воздействиям. Рассмотрим, например (см. [7]), способность буфера препятствовать изменению pH ($\mathrm{pH} = -\lg[\mathrm{H}^+]$), которое может быть обусловлено, к примеру, добавлением щелочи. Эта ситуация описывается уравнением

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pK}_\alpha + \lg\frac{[\text{соль}]}{[\text{кислота}]}$$

($\mathrm{pK}_\alpha = -\lg \mathrm{K}_\alpha$, K_α — константа диссоциации кислоты). Для буфера, приготовленного добавлением x моль·л$^{-1}$ NaOH к раствору уксусной кислоты HOA_c (для краткости через A_c обозначено $\mathrm{CH_3CO}$), начальная концентрация которого равна A, мы имеем:

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pK}_\alpha + \lg\frac{[\mathrm{NaOA}_c]}{[\mathrm{HOA}_c]} = \mathrm{pK}_\alpha + 0{,}4343\ln\frac{[\mathrm{NaOA}_c]}{[\mathrm{HOA}_c]} = \\ = \mathrm{pK}_\alpha + 0{,}4343\ln\frac{x}{\mathrm{A}-x}, \qquad (3)$$

поскольку до тех пор, пока x меньше A, практически все добавляемые ионы OH^- стехиометрически превращают молекулы HOA_c в ионы OA_c^-. Дифференцируя по x, получаем:

$$\frac{d\,\mathrm{pH}}{dx} = 0{,}4343\,\frac{\mathrm{A}-x}{x}\cdot\frac{\mathrm{A}-x+x}{(\mathrm{A}-x)^2} = \frac{0{,}4343\mathrm{A}}{x(\mathrm{A}-x)}.$$

Эта первая производная является мерой чувствительности pH к действию щелочи. Ясно, что буфер наиболее эффективен, когда производная минимальна (или обратная ей величина, известная под названием буферной емкости, максимальна). Для нахождения значения x, при котором $\dfrac{d\,\mathrm{pH}}{dx}$ минимальная, следует взять вторую производную

$$\frac{d^2\mathrm{pH}}{dx^2} = -0{,}4343\mathrm{A}\,\frac{\mathrm{A}-2x}{(\mathrm{A}x-x^2)^2}.$$

Отсюда видно, что вторая производная равна нулю в точке $x = \dfrac{\mathrm{A}}{2}$ и при переходе через нее в направлении возрастания x меняет знак «минус» на «плюс». Следовательно, $\dfrac{d\,\mathrm{pH}}{dx}$ минимальна в точке перегиба функции pH. Подставив это значение x в (3), найдем, что

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pK}_\alpha + 0{,}4343\ln\frac{2\mathrm{A}}{2\mathrm{A}} = \mathrm{pK}_\alpha.$$

Таким образом, буфер наиболее эффективен при pH, равном pK_α кислоты, которая участвует в нитровании.

7. Асимптоты. В § 4 (пункт 3) рассматривались асимптоты гиперболы. Многие другие линии также имеют асимптоты, т. е. прямые, к которым неограниченно приближается данная линия, когда ее точка неограниченно удаляется от начала координат.

Различают асимптоты вертикальные (т. е. параллельные оси ординат) и наклонные (т. е. не параллельные оси ординат). Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ является бесконечным, т. е. равно $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 1. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{1}{x}$, так как

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена при сколь угодно больших (по модулю) значениях аргумента; для определенности будем рассматривать положительные значения аргумента.

Прямая

$$y = kx + b \tag{4}$$

называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если эта функция представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{5}$$

где

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0. \tag{6}$$

Теорема. *График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту тогда и только тогда, когда существуют два предела*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту (4). Тогда справедливы равенства (5) и (6). Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k;$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

Обратно: пусть существуют предельные значения (7) и (8). Из (8) согласно установленной в § 11 (п. 1) теореме 1 имеем:

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \quad \text{или} \quad f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0.$$

Следовательно, прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

Примечание 1. Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается только что установленная теорема и для случая $x \to -\infty$.

Примечание 2. Для $k=0$ наклонная асимптота (4) при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ называется *горизонтальной асимптотой* при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Пример 2. График функции $y=\sqrt{x^2+1}$ имеет наклонную асимптоту $y=x$ при $x\to+\infty$. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Пример 3. Прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y=\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

§ 19. Построение графиков функций

Наиболее наглядное представление о ходе изменения функции дает ее график. Поэтому построение графика является заключительным этапом исследования функции, в котором используются все результаты ее исследования. Построение графика функции проводится по следующей схеме.

I. Находится область определения функции. Функция исследуется на четность, нечетность и периодичность. Напомним эти свойства.

Функция $f(x)$ называется четной в интервале $(-a;a)$, если в нем выполнено условие $f(-x)=f(x)$; график четной функции симметричен относительно оси ординат. Например, $y=\cos x$ или $y=\sin x$ — четные функции. Функция $f(x)$ называется нечетной в интервале $(-a;a)$, если в нем выполнено условие $f(-x)=-f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, $y=x^3$ или $y=x\cos 2x$ — нечетные функции. Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число T (период функции), такое, что $f(x+T)=f(x)$. Например, периодическими являются функции $\sin x$, $\cos x$ (период 2π), $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (период π) (см. гл. II, § 8).

II. Находятся точки разрыва функции и в них вычисляются односторонние пределы.

III. Находятся точки пересечения графика функции с осями координат.

IV. Выясняется поведение функции в бесконечности.

V. Находятся промежутки возрастания и убывания функции.

VI. Функция исследуется на экстремум.

VII. Функция исследуется на выпуклость и вогнутость. Находятся точки перегиба.

VIII. Находятся уравнения асимптот, если они существуют.

IX. Строится график функции.

Заметим, что в некоторых случаях достаточно проводить частичные исследования, опуская некоторые пункты схемы.

П р и м е р 1. Построить график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$. Функция $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ определена и непрерывна для всех значений x, кроме $x = 1$. Функция не является ни четной, ни нечетной. Ее график не имеет точек пересечения с осью Ox, так как $x^2+1>0$ для всех вещественных x. При $x=0$ $y=-1$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty,$$

т. е. прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. При $x\to+\infty$ $y\to+\infty$, а при $x\to-\infty$ $y\to-\infty$. Производная данной функции

$$y' = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

обращается в нуль в точках $x_1 = 1-\sqrt{2}$, $x_2 = 1+\sqrt{2}$. Эти точки разбивают всю числовую ось на три промежутка $(-\infty; 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}; +\infty)$, внутри каждого из которых производная y' сохраняет постоянный знак. Очевидно, что в первом и третьем промежутках $y'>0$, и, следовательно, здесь функция y возрастает, во втором промежутке $y'<0$, и, следовательно, в этом промежутке данная функция убывает. Ее вторая производная

$$y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$$

всюду отлична от нуля (значит, точек перегиба график рассматриваемой функции не имеет), в промежутке $(-\infty; 1)$ $y''<0$, и, следовательно, здесь график данной функции является выпуклым и в точке x_1 эта функция имеет максимум, причем $f(x_1) = 2-2\sqrt{2}$; в промежутке $(1; +\infty)$ $y''>0$, и, следовательно, в последнем промежутке этот график является вогнутым и в точке x_2 данная функция имеет минимум, причем $f(x_2) = 2+2\sqrt{2}$. Наконец, поскольку

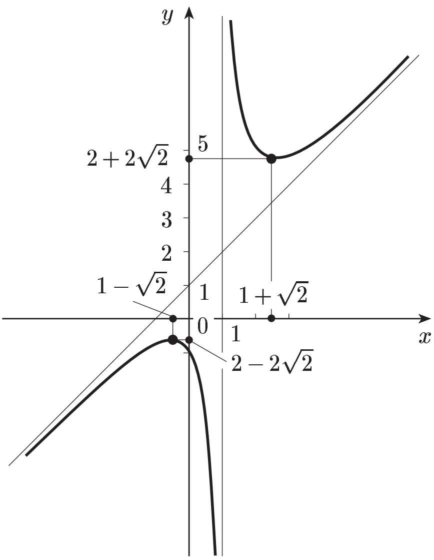

Рис. 58

$$\frac{x^2+1}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0,$$

то график данной функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$ и при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$. График функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ изображен на рисунке 58.

П р и м е р 2. Построить график функции $y = e^{-x^2}$.

Эта функция определена, непрерывна, положительна на всей числовой оси и является четной. Поэтому достаточно построить ее график в первом квадранте. При $x=0$ $y=1$; при $x\to+\infty$ $y\to 0$. Поэтому прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика данной функции при $x\to+\infty$. Производная $y'=-2xe^{-x^2}$ обращается в нуль только в точке $x_0=0$; при $x>0$ $y'<0$, т. е. при $x>0$ данная функция убывает. Ее вторая производная $y''=2(2x^2-1)\,e^{-x^2}$ в точке $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ обращается в нуль, в промежутке $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\,+\infty\right)$ $y''>0$, и, следовательно, здесь график данной функции является вогнутым, а в промежутке $[x_0;x_1)$ $y''<0$, и, следовательно, в нем этот же график является выпуклым и x_1 — абсцисса его точки

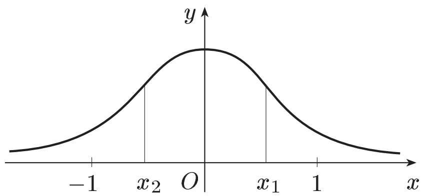

Рис. 59

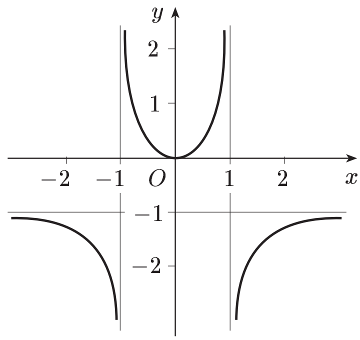

Рис. 60

перегиба (значит, ордината этой точки $\mathrm{e}^{-1/2}$), и, наконец, в точке x_0 данная функция имеет максимум. График данной функции изображен на рисунке 59. Это так называемая кривая Гаусса.

Пример 3. Построить график функции $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

График функции $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ изображен на рисунке 60.

Упражнения

Найти производные функций, пользуясь непосредственно определением производной:

1. $y=3x$. $[y'=3.]$

2. $y=8-x^2$. $[y'=-2x.]$

3. $y=(4x+1)^2$. $[y'=8(4x+1).]$

4. $y=\dfrac{x^3}{3}$. $[y'=x^2.]$

5. $y=\dfrac{1}{x-3}$. $\left[y'=-\dfrac{1}{(x-3)^2}.\right]$

6. $y=\sqrt{1+x^2}$. $\left[y'=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\right]$

Найти производные следующих функций:

7. $y=1-2x^3$. $[y'=-6x^2.]$

8. $y=\dfrac{x+2}{x}$. $\left[y'=-\dfrac{2}{x^2}.\right]$

9. $y=\dfrac{3}{x^2-1}$. $\left[y'=-\dfrac{6x}{(x^2-1)^2}.\right]$

10. $y=\dfrac{1}{x^2}$. $\left[y'=-\dfrac{2}{x^3}.\right]$

11. $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+5$. $\left[y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.\right]$

12. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{x^3}$. $\left[y' = x^2 - \dfrac{9}{x^4}.\right]$ **13.** $y = \dfrac{2x+1}{5}$. $\left[y' = \dfrac{2}{5}.\right]$

14. $y = x^2(2x-1)$. $[y' = 6x^2 - 2x.]$

15. $y = (x^3+3)(4x^2-5)$. $[y' = 20x^4 - 15x^2 + 24x.]$

16. $y = (x-5)^4(x+3)^5$. $[y' = (x-5)^3(x+3)^4(9x-13).]$

17. $y = (x-1)\sqrt{x}$. $\left[y' = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}.\right]$

18. $y = \dfrac{x^3-3}{5-x^2}$. $\left[y' = -\dfrac{x^4-15x^2+6x}{(5-x^2)^2}.\right]$

19. $y = \dfrac{5x}{(5-2x)^3}$. $\left[y' = \dfrac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}.\right]$

20. $y = \dfrac{(3x^2+5)^3}{2x-3}$. $\left[y' = \dfrac{(3x^2+5)^2(30x^2-54x-10)}{(2x-3)^2}.\right]$

21. $y = \dfrac{2}{(x^3+5)^5}$. $\left[y' = -\dfrac{30x^2}{(x^3+5)^6}.\right]$

22. $y = y = \sqrt[3]{6x^2-5}$. $\left[y' = \dfrac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2-5)^2}}.\right]$

23. $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$. $\left[y' = \dfrac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}.\right]$

24. $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^2+4}}$. $\left[y' = -\dfrac{5x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}.\right]$

25. $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$. $\left[y' = \dfrac{5}{2(x+3)\sqrt{x^2+x-6}}.\right]$

26. $y = \sin^3 x$. $[y' = 3\sin^2 x \cos x.]$ **27.** $y = \sin x^2$. $[y' = 2x\cos x^2.]$

28. $y = \cos^2 \dfrac{x}{2}$. $\left[y' = -\dfrac{\sin x}{2}.\right]$ **29.** $y = \cos \dfrac{x^3}{2}$. $\left[y' = -\dfrac{3}{2}x^2 \sin \dfrac{x^3}{2}.\right]$

30. $y = x^2 \cos x$. $[y' = x(2\cos x - s\sin x).]$

31. $y = \dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$. $\left[y' = \dfrac{5\cos x - \cos 5x}{2\cos^2 3x}.\right]$

32. $y = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x$. $[y' = x^2\cos x.]$

33. $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. $\left[y' = \dfrac{1}{1-\sin x}.\right]$

34. $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$. $\left[y' = \dfrac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.\right]$

35. $y = \operatorname{tg}^4(x^2+1)$. $\left[y' = \dfrac{8x \overset{3}{\operatorname{tg}}(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}.\right]$

36. $y = (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2$. $\left[y' = -\dfrac{16\cos 2x}{\sin^3 2x}.\right]$

37. $y = x - \operatorname{tg} x$. $\quad [y' = -\operatorname{tg}^2 x.]$ **38.** $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$. $\quad \left[y' = -\dfrac{4x - \sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}.\right]$

39. $y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x}$. $\quad \left[y' = -\dfrac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}.\right]$

40. $y = \ln^2 x$. $\quad \left[y' = \dfrac{2\ln x}{x}.\right]$

41. $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$. $\quad \left[y' = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}.\right]$

42. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. $\quad \left[y' = \dfrac{1}{\sin x}.\right]$ **43.** $y = \ln x^2$. $\quad \left[y' = \dfrac{2}{x}.\right]$

44. $y = (x-1)\,e^x$. $\quad [y' = xe^x.]$

45. $y = (x^2 - 4x + 8)\,e^{x/2}$. $\quad \left[y' = \dfrac{x^2}{2}\,e^{x/2}.\right]$

46. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. $\quad \left[y' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}.\right]$

47. $y = e^{x\ln x}$. $\quad [y' = e^{x\ln x}(1+\ln x).]$

48. $y = x^2 2^x$. $\quad [y' = (2x + x^2\ln 2)\,2^x]$

49. $y = e^{\sqrt{x}}$. $\quad \left[y' = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.\right]$

50. $y = \operatorname{tg}^3 2x \cos^2 2x$. $\quad [y' = 2\operatorname{tg}^2 2x(3 - 2\sin^2 2x.]$

51. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$. $\quad \left[y' = -\dfrac{x}{1+x}.\right]$

52. $y = \ln \dfrac{x^3 - 9}{x^3 - 1}$. $\quad \left[y' = \dfrac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}.\right]$

53. $y = x - \operatorname{arctg} x$. $\quad \left[y' = \dfrac{x^2}{1+x^2}.\right]$

54. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\arcsin x$. $\quad [y' = \sqrt{1-x^2}.]$

55. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. $\quad \left[y' = \dfrac{1}{1-x^4}.\right]$

56. $y = \ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$. $\quad \left[y' = -\dfrac{2}{(x+1)^2}\operatorname{ctg}\dfrac{2x+4}{x+1}.\right]$

57. $y = \arcsin\left(e^{x^2}\right)$. $\quad \left[y' = \dfrac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}.\right]$

58. $y = \ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$. $\quad \left[y' = \dfrac{1}{1+e^x}.\right]$

59. $y = x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}$. $\quad \left[y' = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}.\right]$

60. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{x} + \ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$. $\quad \left[y' = \dfrac{2a^3}{x^4 - a^4}.\right]$

61. $y = \arcsin \dfrac{x-2}{3}$. $\left[y' = \dfrac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}.\right]$

62. $y = \dfrac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$. $[y' = x \operatorname{arctg} x.]$

63. $y = 4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}}$. $\left[y' = 4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}} \ln 4 \cdot \dfrac{x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}.\right]$

64. $y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$. $\left[y' = -\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}} \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}}.\right]$

65. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке $A(2; 4)$. [Касательная $y = 4x - 4$.]

66. Написать уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в точке $(\pi; 0)$. [Касательная $y = \pi - x$.]

67. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = 5 - 3x^2$ в точке с абсциссой $x = -2$. $[k = 12.]$

68. Написать уравнение нормали к параболе $y^2 = 2x$ в точке $A(8; 4)$. [Нормаль $4x + y - 36 = 0$.]

69. Написать уравнение нормали к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $A(3; -4)$. [Нормаль $4x + 3y = 0$.]

70. Лифт после включения движется по закону

$$s = 1{,}5t^2 + 2t + 12,$$

где s — путь (в метрах), t — время (в секундах). Найти скорость лифта в момент времени $t = 2$. $\left[8\left(\dfrac{\text{м}}{\text{с}}\right).\right]$

71. Закон движения точки по прямой описывается уравнением

$$s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5,$$

где s — путь (в метрах), t — время (в секундах). В какие моменты времени t скорость v точки равна нулю? $[v = 0$ при $t = 1$ с.$]$

72. Разложение некоторого химического вещества протекает в соответствии с уравнением $m = m_0 e^{-kt}$, где m — количество вещества в момент времени t, k — положительная постоянная. Найти скорость разложения вещества и выразить ее как функцию от m. $[v = -km.]$

73. Зависимость количества Q вещества, получаемого в химической реакции, от времени t определяется формулой $Q = a(1 + be^{-kt})$. Определить скорость v реакции и выразить ее как функцию от Q. $[v = k(a - Q).]$

74. Атмосферное давление воздуха p на высоте h над уровнем моря можно вычислить по формуле $p = p_0 e^{-h/a}$, где p_0 — давление над уровнем моря и a — постоянная. Найти скорость v изменения давления с высотой и выразить ее как функцию от p. $\left[v = -\dfrac{p}{a}.\right]$

75. Размер популяции насекомых в момент t (время выражено в днях) задается величиной $p(t) = 1000 - 9000(1+t)^{-1}$. Вычислить скорость роста $p'(t)$ в момент t. $\left[p'(t) = \dfrac{9000}{(1+t)^2}.\right]$

76. Размер популяции бактерий в момент t (время выражено в часах) задается формулой $p(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Найти скорость роста популяции, когда $t = 1$ ч. [8000 бактерий в час.]

Найти дифференциалы следующих функций:

77. $y = (a^2 - x^2)^2$. $[dy = -4x(a^2 - x^2)\,dx.]$

78. $y = \sqrt{4+x^2}$. $\left[dy = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}.\right]$ **79.** $y = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$. $\left[dy = \dfrac{dx}{1-x^2}.\right]$

80. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$. $[dy = \sec^4 x\,dx.]$

81. $y = \operatorname{arctg}(x^2)$. $\left[dy = \dfrac{2x\,dx}{1+x^4}.\right]$

82. $y = x(2x-3)(4x+5)$. $[dy = (24x^2 - 4x - 15)\,dx.]$

83. $y = \dfrac{3x-4}{2x+3}$. $\left[dy = \dfrac{17\,dx}{(2x+3)^2}.\right]$

84. $y = e^{x^2} + x + 1$. $[dy = (2xe^{x^2} + 1)\,dx.]$

85. $y = 8^x$. $[dy = 8^x \ln 8 \cdot dx.]$ **86.** $y = \cos^2\dfrac{x}{2}$. $\left[dy = -\dfrac{1}{2}\sin x \cdot dx.\right]$

87. $y = \sin(2x+3)$. $[dy = 2\cos(2x+3)\cdot dx.]$

Найти с помощью дифференциала приближенные значения для данных выражений.

88. $\sqrt[3]{1{,}1}$. $[\sqrt[3]{1{,}1} \approx 1{,}033.]$ **89.** $\sqrt[5]{1{,}02}$. $[\sqrt[5]{1{,}02} \approx 1{,}004.]$

90. $\sqrt[3]{26{,}19}$. $[\sqrt[3]{26{,}19} \approx 2{,}97.]$ **91.** $\sin 31^0$. $[\sin 31^0 \approx 0{,}515.]$

92. $\ln 1{,}007$. $[\ln 1{,}007 \approx 0{,}007.]$ **93.** $\cos 61^0$. $[\cos 61^0 \approx 0{,}4849.]$

Найти производные высших порядков следующих функций:

94. $y = x^5 - 3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 1$; $y'' = ?$ $[y'' = 20x^3 - 36x^2 + 6x - 10.]$

95. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; $y''' = ?$ $[y''' = 12.]$

96. $y = x^3 + 3x^2 + 4$; $y^{\mathrm{V}} = ?$ $[y^{\mathrm{V}} = 0.]$

97. $y = x\ln x$; $y'' = ?$ $\left[y'' = \dfrac{1}{x}.\right]$ **98.** $y = e^{2x}$; $y''' = ?$ $[y''' = 8e^{2x}.]$

99. $y = e^x + x^2$; $y^{\mathrm{IV}} = ?$ $[y^{\mathrm{IV}} = e^x.]$

100. $y = e^{\cos x}$; $y'' = ?$ $[y'' = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x).]$

101. $y = \sin x$; $y'' = ?$ $[y'' = -4\sin 2x.]$

102. $y = \operatorname{arcctg} x$; $y'' = ?$ $\left[y'' = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}.\right]$

Используя правило Лопиталя, найти следующие пределы.

103. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 10x}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

104. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$. $[-3.]$

105. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

106. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$. $[1.]$

107. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$. $[0.]$

108. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$. $[0.]$

109. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^n\ln x \ (n>0)$. $[0.]$

110. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$. $\left[\dfrac{1}{6}.\right]$

111. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. $[0.]$

112. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. $[1.]$

113. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$. $\left[-\dfrac{3}{5}.\right]$

114. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^n-1}$. $\left[\dfrac{1}{n}.\right]$

115. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. $\left[\dfrac{a^2}{b^2}.\right]$

116. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} x-1}{\sin 4x}$. $\left[-\dfrac{1}{2}.\right]$

117. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. $[2.]$

118. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$. $\left[\dfrac{3}{5}.\right]$

119. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\ln(e^x-e^a)}{\ln(x-a)}$. $[1.]$

120. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$. $[1.]$

121. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$. $\left[\dfrac{1}{2}.\right]$

122. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. $\left[\dfrac{2}{\pi}.\right]$

123. $\lim\limits_{x\to \infty}(a^{1/x}-1)\,x \ (a>0)$. $[\ln a.]$

124. $\lim\limits_{x\to \infty} n^2(a^{1/x}+a^{-1/x}-2) \ (a>0)$. $[\ln^2 a.]$

125. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$. $[-1.]$

126. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^m}{e^{ax}}$; m — натуральное число и $a>0$. $[0.]$

127. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$. $\left[\dfrac{1}{10}.\right]$

128. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$. $\left[\dfrac{1}{5}.\right]$

129. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$. $\left[-\dfrac{1}{2}.\right]$

130. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. $[1.]$

131. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$. $[e^{-1/2}.]$

132. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$. $[e^{-1/6}.]$

133. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\sin x)^{\cos x}$. $[1.]$

134. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2+1)^{1/x}$. $[1.]$

135. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$. $\left[\dfrac{1}{e}.\right]$

Найти интервалы возрастания и убывания следующих функций.

136. $y = 3x - x^3$.
[Убывает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ и возрастает на $(-1; 1)$.]

137. $y = x^2 - 4x$. [Убывает на $(-\infty; 2)$ и возрастает на $(2; +\infty)$.]

138. $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$.
[Убывает на $(-1; 1)$ и возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$.]

139. $y = 3x + \frac{3}{x} + 5$.
[Убывает на $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ и возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$].

140. $y = 4x - 3$. [Возрастает на $(-\infty; +\infty)$].

Исследовать на экстремум следующие функции.

141. $y = 2x^2 - 8$. [Минимум при $x = 0$.]

142. $y = 2x - x^2$. [Максимум при $x = 1$.]

143. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$.
[Минимум при $x = 5$; максимум при $x = 1$.]

144. $y = x \ln x$. $\left[\text{Минимум при } x = \frac{1}{e}.\right]$

145. $y = \frac{x}{x^2 + 4}$. [Минимум при $x = -2$; максимум при $x = 2$.]

146. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.
[Минимум при $x = -1$ и $x = 3$; максимум при $x = 0$.]

Найти наименьшее и наибольшее значения следующих функций:

147. $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке $[-2; 2]$. [-13 и 3.]

148. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-1; 2]$. $\left[-\frac{7}{3} \text{ и } 3.\right]$

149. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. $\left[-\frac{4}{3} \text{ и } -1.\right]$

150. $y = \operatorname{tg} x - x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. $\left[\frac{\pi - 4}{4} \text{ и } \frac{4 - \pi}{4}.\right]$

151. Найти положительное число x, чтобы разность $x - x^2$ была наибольшей. [0,5.]

152. Найти число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение. [−0,5.]

153. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Каковы должны быть размеры этого окна, чтобы при данном его периметре $2p$ оно пропускало наибольшее количество света?

$\left[\begin{array}{l}\text{Радиус полукруга должен быть равен} \\ \text{высоте прямоугольника: } R = H = \dfrac{2p}{4 + \pi}.\end{array}\right]$

154. Нужно изготовить коническую воронку с образующей l. Какова должна быть высота H воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
$$\left[H = \frac{l\sqrt{3}}{3}.\right]$$

155. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $s(t) = 18t + 9t^2 - t^3$, где s — путь (в метрах), t — время (в секундах). В какой момент времени t скорость v движения точки будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости?
$$\left[t = 3 \text{ с}; \ v = 45 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.\right]$$

156. Скорость роста популяции x задана формулой $y = 0{,}001x(100 - x)$, когда время выражается в днях. При каком размере популяции эта скорость максимальна? [50.]

157. Реакции организма на два лекарства как функции t (время выражается в часах) составляют $r_1(t) = te^{-t}$ и $r_2(t) = t^2e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?
[У второго лекарства максимальная реакция выше.]

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

158. $y = x^5$.
[Точка перегиба $(0; 0)$; выпукла на $(-\infty; 0)$ и вогнута на $(0; +\infty)$.]

159. $y = \sqrt[3]{x-1}$
[Точка перегиба $(1; 0)$; выпукла на $(1; +\infty)$ и вогнута на $(-\infty; 1)$.]

160. $y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$.
[Точка перегиба $(5; 5)$; выпукла на $(5; +\infty)$ и вогнута на $(-\infty; 5)$.]

Найти асимптоты кривых:

161. $y = 1 - \dfrac{4}{x^2}$. [$x = 0$ и $y = 1$.] **162.** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$. [$x = 0$ и $y = x$.]

163. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$. [$x = -1$ и $y = x - 1$.]

Исследовать функции и построить их графики:

164. $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$
[Область определения: $-\infty < x < +\infty$; функция не является ни четной, ни нечетной; график проходит через начало координат и, кроме того, пересекает ось абсцисс еще в точке $(3; 0)$; убывает на $(1; 3)$, возрастает на $(-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$; при $x = 1$ максимум, $y_{\max} = 8$, при $x = 3$ минимум, $y_{\min} = 0$; выпукла на $(-\infty; 2)$ и вогнута на $(2; +\infty)$; $x = 2$ — абсцисса точки перегиба графика; асимптот нет.]

165. $y = \dfrac{x}{x^2+16}$.

[Область определения: $-\infty < x < +\infty$; функция нечетная; график проходит через начало координат; убывает на $(-\infty; -4)$ и $(4; +\infty)$, возрастает на $(-4; 4)$, при $x = 4$ максимум, $y_{\max} = \dfrac{1}{8}$, при $x = -4$ минимум, $y_{\min} = -\dfrac{1}{8}$; выпукла на $(-\infty; -4\sqrt{3})$ и $(0; 4\sqrt{3})$, вогнута на $(4\sqrt{3}; +\infty)$ и

$(-4\sqrt{3}; 0)$; $x = -4\sqrt{3}$, $x = 0$ и $x = 4\sqrt{3}$ — абсциссы точек перегиба графика; $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.]

166. $y = e^{-x^2/4}$.

[Область определения: $-\infty < x < +\infty$; функция четная, положительна на всей числовой оси, график не пересекает ось абсцисс и пересекает ось ординат в точке $(0; 1)$; убывает на $(0; +\infty)$, возрастает на $(-\infty; 0)$; при $x = 0$ максимум, $y_{\max} = 1$; выпукла на $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ и вогнута на $(-\infty; -\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}; +\infty)$; $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ — абсциссы точек перегиба графика; $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.]

Глава IV

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 20. Первообразная функция и неопределенный интеграл

1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. В III главе было введено новое действие — дифференцирование: нахождение по заданной функции ее производной. Оказывается, что для дифференцирования существует обратное действие — интегрирование: отыскание функции по заданной ее производной. К этому приводят многочисленные задачи из физики, химии и других областей науки и техники. Ранее (см. § 14, п. 1) было установлено, что если известен закон $s = s(t)$ прямолинейного движения материальной точки, выражающий зависимость пути s от времени движения t, то скорость точки выражается производной пути по времени: $v = s'(t)$. Обратная задача: известна скорость прямолинейного движения точки $v = v(t)$ как функция времени. Надо найти закон движения. Ясно, что искомой функцией $s = s(t)$ будет такая, для которой $s'(t) = v(t)$. Аналогично, если известна скорость $v = v(t)$ протекания химической реакции, показывающая количество вещества, реагирующего в единицу времени, то законом реакции будет функция $m = m(t)$ такая, что $m'(t) = v(t)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функцией для данной функции $f(x)$ (или, короче, первообразной данной функции) на данном промежутке, если на этом промежутке $F'(x) = f(x)$.

Пример. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой оси, так как при любом x $(x^3)' = 3x^2$. Отметим при этом, что вместе с функцией $F(x) = x^3$ первообразной для $f(x) = 3x^2$ является любая функция $\Phi(x) = x^3 + C$, где C — произвольное постоянное число (это следует из того, что производная постоянной равна нулю). Это свойство имеет место и в общем случае.

Т е о р е м а 1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке, то разность между ними в этом промежутке равна постоянному числу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, указанный промежуток — интервал $(a; b)$. Из определения первообразной имеем: $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$ для любого x из $(a; b)$. Пусть $\alpha(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Тогда для любого x из $(a; b)$

$$\alpha'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

следовательно (см. следствие из § 17, п. 3), $\alpha(x) = C$.

Из теоремы 1 следует, что если известна какая-нибудь первообразная $F(x)$ данной функции $f(x)$, то все множество первообразных для $f(x)$ исчерпывается функциями $F(x) + C$.

Подчеркнем важный факт: если производная для функции одна, т. е. операция дифференцирования однозначна, то нахождение первообразной для функции возможно лишь с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

О п р е д е л е н и е 2. Выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ и C — произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, причем $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, знак $\int$ — *знаком интеграла*. Таким образом, по определению, $f(x)\,dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$.

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит и неопределенный интеграл. В связи с этим вопросом приведем без доказательства следующую теорему (см. [10]).

Т е о р е м а 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то на этом сегменте у функции $f(x)$ существует первообразная.*

Ниже мы будем говорить о первообразных лишь для непрерывных функций. Поэтому рассматриваемые нами далее в этом параграфе все интегралы существуют.

2. Свойства неопределенного интеграла. Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие два свойства.

1. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$ и, значит, $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

2. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$, что может быть переписано так:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx. \tag{1}$$

Действительно, имеем:

$$\left(c\int f(x)\,dx\right)' = c\left(\int f(x)\,dx\right)' = cf(x).$$

Совершенно так же доказывается свойство 4.

4. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \qquad (2)$$

Примечание 1. Равенства (1) и (2) следует понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Примечание 2. Свойство 4 распространяется на случаи алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Задача. Рассмотрим скорость простой реакции первого порядка (подробно о химических реакциях см. в гл. VII, § 38, п. 4), которую можно представить так:

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

где x — концентрация реагирующего вещества в момент времени t, k — константа (знак «минус» показывает, что реагирующее вещество исчезает, т. е. концентрация его в ходе реакции уменьшается).

Отсюда $\dfrac{dx}{x\,dt} = -k$, или, что то же, $\dfrac{d(\ln x)}{dt} = -k$.

Значит, $\ln x = -\int k\,dt$, и потому $\ln x = -kt + C$, откуда

$$x = e^C e^{-kt}.$$

Если мы примем, что при $t=0$ $x = x_0$, то будем иметь $x_0 = e^C$. Тогда

$$x = x_0 e^{-kt}.$$

Это соотношение позволяет найти концентрацию x для любого момента времени.

3. Таблица основных интегралов. Таблица содержит формулы, легко проверяемые непосредственным дифференцированием.

1. $\displaystyle\int x^\mu\,dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\displaystyle\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C.$

5. $\displaystyle\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C.$

6. $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln|x^2+a| + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Проверим, например, формулу 2. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{x}$. Значит, формула 2 справедлива как при $x > 0$, так и при $x < 0$.

4. Примеры непосредственного интегрирования. Метод непосредственного интегрирования связан с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределенного интеграла.

Пример 1. $\displaystyle\int (5x^4-3x^2+1)\,dx = 5\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int dx = x^5 - x^3 + x + C.$

Пример 2. $\displaystyle\int \frac{x^6-x^5+1}{x^2}\,dx = \int (x^4-x^3+x^{-2})\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$

Пример 3. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \int (x - 2x^{5/6} + x^{2/3})\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{12}{11}x^{11/6} + \frac{3}{5}x^{5/3} + C = \frac{x^2}{2} - \frac{12}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C.$

§ 21. Основные методы интегрирования

1. Замена переменной интегрирования. Этот способ часто бывает полезным в тех случаях, когда интеграл $\int f(x)\,dx$ ($f(x)$ — непрерывна) не может быть непосредственно преобразован к виду табличного. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда: $f(x) = f[\varphi(t)]$, $dx = \varphi'(t)\,dt$ и

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле.*

Пример 1. Интеграл $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ найдем подстановкой $x = t^2$. Тогда: $dx = 2t\,dt$ и $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^t\,dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

Иногда вместо подстановки $x = \varphi(t)$ лучше выполнить замену переменной вида $t = \psi(x)$.

Пример 2. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. Полагая $t=e^x$, получаем $dt=e^x\,dx=t\,dx$, $dx=\frac{dt}{t}$ и $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int \frac{dt}{t(t+t^{-1})}=\int \frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t+C=\operatorname{arctg} e^x+C$.

Во многих случаях нет необходимости записывать, какое выражение мы принимаем за новую переменную. Вычисления удобно располагать так, как указано в следующих примерах.

Пример 3. $\int \sqrt{x+3}\,dx=\int (x+3)^{1/2}\,d(x+3)=\frac{2}{3}(x+3)^{3/2}+C=\frac{2}{3}\times$ $\times(x+3)\sqrt{x+3}+C$.

Пример 4. $\int xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

Пример 5. $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx=\int \ln^3 x\,d\ln x=\frac{\ln^4 x}{4}+C$.

2. Интегрирование по частям. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Как известно (см. § 16, п. 3), $d(uv)=v\,du+u\,dv$, откуда $u\,dv=d(uv)-v\,du$. Интегрируя последнее соотношение, получим:

$$\int u\,dv=\int d(uv)-\int v\,du$$

или

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \tag{2}$$

(произвольная постоянная интегрирования C здесь включена в слагаемое $\int v\,du$). Это и есть *формула интегрирования по частям.* Применение способа интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда интеграл в правой части (2) окажется более простым для вычисления, чем исходный интеграл.

Пример 1. $\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$.

К числу интегралов, вычисляемых с помощью формулы (2), относятся, например, интегралы вида: $\int P(x)\,f(x)dx$, где $P(x)$ — многочлен (в частности, степенная функция x^n), $f(x)$ — одна из следующих функций: e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$. При этом для интегралов вида $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\times$ $\times\cos ax\,dx$, за u принимается многочлен $P(x)$, а для интегралов вида $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, за u принимается $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$.

Пример 2. $\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv}=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C$.

П р и м е р 3. $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\cos x\, dx}_{dv} = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C.$

П р и м е р 4. $\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \times$ $\times \ln(1+x^2) + C.$

Иногда полезно повторное интегрирование по частям.

П р и м е р 5. $\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x\, dx}_{dv} = x^2 \sin x - 2\int \underbrace{x}_{u_1} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv_1} = x^2 \sin x +$ $+ 2x\cos x - 2\int \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$

§ 22. Интегрирование дробно-рациональных функций и некоторых тригонометрических выражений

1. Интегрирование дробно-рациональных функций. Дробно-рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена, стоящего в числителе, ниже степени многочлена в знаменателе, и *неправильной* в противном случае. Например, дроби $\frac{3x+2}{x^2-4x+12}$, $\frac{x+2}{x^2-1}$, $\frac{x^5}{x^6-1}$ — правильные, а дроби $\frac{x^5}{x^2+1}$, $\frac{x^3-1}{x+1}$, $\frac{x+1}{3x-1}$ — неправильные.

При интегрировании неправильной дроби следует предварительно перейти к правильной дроби путем выделения целой части.

П р и м е р 1. Вычислить $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$. Имеем:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1},$$

а потому

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int x\,dx + \int \frac{x\,dx}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

Рассмотрим некоторые простейшие случаи интегрирования правильных дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\,\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C,$

$k = 2, 3, 4, \ldots$

3. $I = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx.$

При вычислении интеграла I следует различать два основных случая.

а) Квадратный трехчлен x^2+px+q является полным квадратом. Тогда интеграл I сводится к уже рассмотренным интегралам в случаях 1 и 2.

б) Квадратный трехчлен x^2+px+q не является полным квадратом. Тогда его дополняют до полного квадрата, после чего интеграл I сводится к табличным интегралам 9 и 10 или 9 и 13. Поясним это на примерах.

Пример 2. $I=\int \frac{2x-2}{x^2-x+1}\,dx=\int \frac{2x-2}{(x-1/2)^2+3/4}\,dx.$

Сделаем подстановку $x-\frac{1}{2}=t$. Тогда: $x=t+\frac{1}{2}$, $dx=dt$ и

$$I=\int \frac{2t-1}{t^2+3/4}\,dt=\int \frac{2t}{t^2+3/4}\,dt-\int \frac{dt}{t^2+3/4}=\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\ln(x^2-x+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 3. $I=\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,dx=\int \frac{x+1}{(x-5/2)^2-1/4}\,dx.$

Сделаем подстановку $x-\frac{5}{2}=t$. Тогда: $x=t+\frac{5}{2}$, $dx=dt$ и

$$I=\int \frac{t+7/2}{t^2-1/4}\,dt=\int \frac{t\,dt}{t^2-1/4}+\frac{7}{2}\int \frac{dt}{t^2-1/4}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{1}{4}\right|+\frac{7}{2}\ln\frac{|t-1/2|}{|t+1/2|}+C=$$

$$=4\ln\left|t-\frac{1}{2}\right|-3\ln\left|t+\frac{1}{2}\right|+C=4\ln|x-3|-3\ln|x-2|+C.$$

Примечание. При взятии интеграла вида $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ $(a\neq b)$ полезно также воспользоваться тождеством

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right).$$

2. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений. Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx,$$

где $R(u,v)$ — рациональная функция аргументов u и v, могут быть сведены к интегралам от рациональной функции аргумента t подстановкой $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Действительно,

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Из подстановки $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ следует, что

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Таким образом,

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция t.

Пример 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

Пример 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\pi/2 - x)}{\sin(\pi/2 - x)} = -\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + C.$

Примечание. Заметим, что хотя для всякой непрерывной функции существует первообразная (§ 20, п. 1, теорема 2), но эта первообразная не для всякой функции является элементарной функцией. Например, для функции e^{-x^2} первообразная не выражается в элементарных функциях. В этом случае говорят, что интеграл $\int e^{-x^2}\,dx$ не берется в элементарных функциях.

§ 23. Понятие определенного интеграла

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

Задача о пройденном пути. Требуется найти путь, пройденный движущейся по прямой точкой за отрезок времени $[t_0; T]$, если известен закон изменения мгновенной скорости $v = v(t)$. Разобьем отрезок времени $[t_0; T]$ моментами времени (точками) $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ на n частичных отрезков времени и положим $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda = \max \Delta t_k$. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них движение можно считать равномерным, что дает приближенное выражение для пути

$$s \approx v(\tau_1)\,\Delta t_1 + v(\tau_2)\,\Delta t_2 + \ldots + v(\tau_n)\,\Delta t_n,$$

где τ_k — одна из точек сегмента $[t_{k-1}; t_k]$. Эта сумма $\Big($ее кратко будем обозначать через $\sum\limits_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k\Big)$ будет тем точнее выражать искомый путь s, чем меньше будет каждый из временных отрезков $[t_{k-1}; t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому за путь s, пройденный точкой за время $T - t_0$ со скоростью $v = v(t)$, естественно принять:

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k. \tag{1}$$

Задача о количестве вещества, вступившего в реакцию. Пусть скорость химического превращения некоторого вещества, участвующего в химической реакции, есть функция времени $v = v(t)$. Найти количество m вступившего в реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T. Проделаем последовательно те же операции, что и при решении предыдущей задачи. В результате получим:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k. \qquad (2)$$

Работа переменной силы. Пусть материальная точка под действием постоянной силы F перемещается по направлению этой силы. Если пройденный путь равен s, то, как известно из курса физики, работа P этой силы F вычисляется по формуле

$$P = Fs.$$

Пусть теперь материальная точка движется по оси Ox от точки $A(a)$ до точки $B(b)$ $(b > a)$ под действием переменной силы, направленной по Ox и являющейся функцией от x:

$$F = f(x).$$

Для нахождения работы P в этом случае разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков и положим: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda = \max \Delta x_k$. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них силу F можно считать постоянной (равной $f(\tau_k)$), что дает приближенное выражение для работы

$$P \approx \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k,$$

где τ_k — одна из точек сегмента $[x_{k-1}; x_k]$. Отсюда:

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k. \qquad (3)$$

Задачи о площади криволинейной трапеции. Пусть требуется найти площадь плоской фигуры $aABb$ (рис. 61), ограниченной графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a; b]$, и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Эта фигура называется криволинейной трапецией. Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков и положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через λ: $\lambda = \max \Delta x_k$. На каждом частичном сегменте $[x_{k-1}; x_k]$,

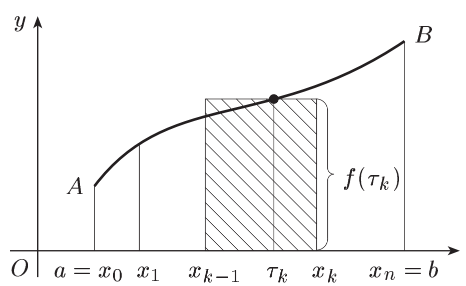

Рис. 61

$k = 1, 2, \ldots, n$, выберем произвольную точку τ_k, $x_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant x_k$. Произведение $f(\tau_k)\Delta x_k$ даст площадь прямоугольника, имеющего основание Δx_k и высоту $f(\tau_k)$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ — приближенно площадь S криволинейной трапеции $aABb$. Отсюда, как и в предыдущих задачах,

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \tag{4}$$

2. Понятие определенного интеграла. Из решения приведенных трех задач видно, что хотя они имеют различный смысл, но математический аппарат для их решения один и тот же. Во всех этих задачах получаем выражение одного и того же вида:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k. \tag{5}$$

Если существует предел (4), не зависящий от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и выбора точек τ_k, то этот предел будем называть *определенным интегралом* функции $f(x)$ на сегменте $[a; b]$ и обозначать символом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$. При этом $f(x)$ называется *подынтегральной* функцией, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным* выражением, числа a и b — *пределами интегрирования* (a — *нижний предел*, b — *верхний предел*), сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ — *интегральной суммой*.

Справедлива следующая теорема (она доказывается в подробных курсах математического анализа — см., например, [10]):

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на нем.*

В условиях рассмотренных выше задач, приведших к понятию определенного интеграла, выражения вида (1)–(4) (пределы сумм) являются определенными интегралами. Рассмотрим это подробнее.

1. Путь s, пройденный точкой за время $T - t_0$ со скоростью $v = v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0; T]$), есть $\int\limits_{t_0}^{T} v(t)\,dt$.

Аналогично количество вступившего в химическую реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T, скорость химического превращения которого $v = v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0; T]$), есть $\int\limits_{t_0}^{T} v(t)\,dt$.

2. Если переменная сила $F = f(x)$ действует в направлении оси Ox, ($f(x)$ непрерывна на $[a;b]$), то работа этой силы на отрезке $[a;b]$ равна:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука

$$F = kx,$$

где F — сила (в Н), x — величина растяжения или сжатия (в м), вызванного силой F, а k — коэффициент пропорциональности.

3. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ геометрически представляет собой *площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции* $y = f(x)$, *снизу — осью* Ox, *с боков — прямыми* $x = a$ и $x = b$.

§ 24. Основные свойства определенного интеграла

1. Свойства определенного интеграла. Ниже рассматриваем функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$. По определению полагают, что определенный интеграл от функции с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла*:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Действительно, по определению определенного интеграла, как предела интегральной суммы, имеем:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\tau_k)\,\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} c\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогично устанавливается свойство 2.

2. *Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций*:

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Примечание. Свойство 2 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

3. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Действительно, здесь соответствующие интегральные суммы различаются по знаку, ибо в одной из них все $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ положительны, в другой — аналогичные разности все отрицательны.

4. *Интеграл по сегменту равен сумме интегралов по его частям*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

где $a < c < b$.

Это свойство вытекает из определения определенного интеграла.

2. Формула Ньютона–Лейбница *).

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;b]$ и $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Формула (1) называется *формулой Ньютона–Лейбница*. Эта формула дает удобное правило вычисления определенного интеграла. Кроме того, она устанавливает связь между определенным интегралом и неопределенным интегралом.

Доказательство. Разобьем сегмент $[a,b]$ на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Согласно формуле Лагранжа и формуле $F'(x) = f(x)$ имеем:

$$\begin{aligned}
F(x_1) - F(a) &= F'(c_1)(x_1 - a) = f(c_1)\,\Delta x_1, && a < c_1 < x_1,\\
F(x_2) - F(x_1) &= F'(c_2)(x_2 - x_1) = f(c_2)\,\Delta x_2, && x_1 < c_2 < x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(b) - F(x_{n-1}) &= F'(c_n)(b - x_{n-1}) = f(c_n)\,\Delta x_n, && x_{n-1} < c_n < b.
\end{aligned}$$

Суммируя эти равенства, получим:

*) Исаак Ньютон (1643–1727) — английский математик и физик; Готфрид Лейбниц (1646–1716) — немецкий философ и математик. Ньютон и Лейбниц — создатели дифференциального и интегрального исчислений.

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a;b]$, то

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, переходя в (2) к пределу при $\lambda\to 0$, получим искомую формулу (1).

Примечание. Для краткости записи употребляются обозначения:

$$F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad \text{или} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a).$$

Поэтому формула Ньютона–Лейбница принимает вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b \quad \Big(\text{или } \Big[F(x)\Big]_a^b\Big).$$

Заметим, что в формуле (1) можно взять любую из первообразных для $f(x)$, так как $\Big[F(x)+C\Big]_a^b=F(b)+C-F(a)-C=F(b)-F(a)$.

Пример 1. $\displaystyle\int_0^1 2x\,dx=x^2\Big|_0^1=1.$

Пример 2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$

Задача 1. Скорость движения тела задана уравнением $v=12t-3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

Решение. Скорость тела равна нулю в момент начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для этого приравняем скорость к нулю и решим уравнение относительно t:

$$12t-3t^2=0, \qquad t(4-t)=0, \qquad t_1=0, \qquad t_2=4.$$

Теперь искомый путь будет:

$$S=\int_0^4 (12t-3t^2)\,dt=(6t^2-t^3)\Big|_0^4=32 \text{ (м)}.$$

Задача 2. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение. Из условия следует, что $10=k\cdot 0{,}01$, откуда $k=1000$ и, следовательно, $F=1000x$,, т. е. $f(x)=1000x$. Поэтому искомая работа

$$P = \int\limits_{0}^{0{,}04} 1000x\,dx = 500x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}8 \text{ (Дж)}.$$

3. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt,$$

где x — любая точка из $[a; b]$.

Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$, то согласно формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Отсюда:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a) = f(x).$$

Таким образом, *производная определенного интеграла с переменным верхним пределом по этому пределу равна значению подынтегральной функции для этого предела.*

4. Теорема о среднем.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, то в интервале $(a; b)$ найдется такая точка* с, *что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c). \qquad (3)$$

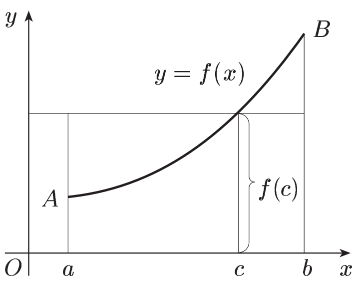

Рис. 62

Доказательство. По формуле Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$. Применяя к разности $F(b) - F(a)$ теорему Лагранжа (§ 17), получим:

$$F(b) - F(a) = (b-a)\cdot F'(c) = (b-a)\cdot f(c),$$

где $a < c < b$, что и приводит к искомой формуле (3).

Формула (3) при $f(x) \geqslant 0$ имеет простое геометрическое истолкование. Площадь криволинейной трапеции $ABba$ равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной $f(c)$ (рис. 62).

5. Замена переменной в определенном интеграле. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$, функция $x = \varphi(t)$ имеет на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную, при этом $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Пусть $F(x)$ — одна из первообразных функций для $f(x)$. Тогда $F'(x) = f(x)$ и в силу формулы производной сложной функции (см. § 15, п. 1)

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Теперь воспользуемся дважды формулой Ньютона–Лейбница:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(\beta)] - F(\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Тем самым доказана формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Пример. Подстановка $x = e^t$ дает:

$$\int_1^x \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \big[\operatorname{arctg} t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

6. Интегрирование по частям. Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые на сегменте $[a; b]$ функции. Пользуясь формулой Ньютона–Лейбница, имеем:

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b d(uv) = \int_a^b [v\,du + u\,dv] = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv,$$

откуда:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример. $\displaystyle\int_0^\pi \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = (x\sin x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = \cos x\Big|_0^\pi = -2.$

§ 25. Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла мы исходили из условий непрерывности подынтегральной функции и конечности отрезка интегрирования. Такой интеграл называется *собственным* (слово «собственный» обычно опускается). Если хотя бы одно из этих двух условий не выполнено, то интеграл называется *несобственным*.

Остановимся на интегралах с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$, т. е. для $x \geqslant a$. Тогда по определению полагают:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если последний предел существует, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится* и его значение определяется формулой (1); если этот предел не существует, то указанный интеграл называют *расходящимся*. Такому интегралу не приписывают никакого значения.

Геометрически для неотрицательной при $x \geqslant a$ функции $f(x)$ несобственный интеграл (1) (по аналогии с собственным интегралом — § 23, п. 2) представляет собой площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева отрезком прямой $x = a$, снизу осью Ox (рис. 63).

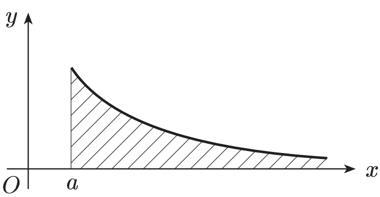

Рис. 63

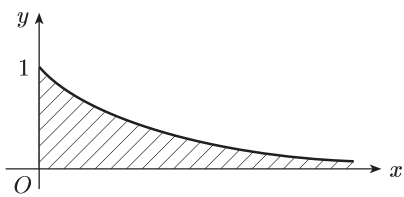

Рис. 64

Пример 1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} [1 - e^{-b}] = 1,$

т. е. данный интеграл сходится. Он равен площади заштрихованной неограниченной фигуры (рис. 64).

Пример 2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$

Это означает, что последний интеграл расходится.

Пример 3. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \cos x\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin b.$

Но предел справа не существует, следовательно, заданный интеграл расходится.

На несобственные интегралы вида (1) непосредственно распространяются многие свойства собственных интегралов. Рассмотрим одно из них.

Пусть $F(x)$ — первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$. На основании формулы (1) и формулы Ньютона–Лейбница имеем:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}[F(b) - F(a)].$$

Если ввести условное обозначение $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, то получим для сходящегося несобственного интеграла (1) *обобщенную формулу Ньютона–Лейбница*:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a). \qquad (2)$$

Примечание. Формулу (2) записывают также в виде

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} \qquad \text{или} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^{+\infty}.$$

Все изложенное непосредственно переносится на интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

(кстати, от интеграла (3) легко перейти к интегралу (1) с помощью подстановки $x = -y$).

Наконец, по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (4)$$

где c — какое-нибудь число (выбор его безразличен). Если сходятся оба интеграла правой части равенства (4), то сходится и интеграл с двумя бесконечными пределами. Если же расходится хотя бы один из интегралов правой части равенства (4), то расходится и интеграл с двумя бесконечными пределами.

§ 26. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a; b]$. Известно (см. § 23, п. 2), что если $f(x) \geqslant 0$ на $[a; b]$, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, равна интегралу

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если же $f(x) \leqslant 0$ на $[a; b]$, то $-f(x) \geqslant 0$ на $[a; b]$. Поэтому площадь S соответствующей криволинейной трапеции выразится формулой $S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$ или

$$S = \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|. \tag{2}$$

Если, наконец, кривая $y = f(x)$ пересекает ось Ox, то сегмент $[a; b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака, и к каждой такой части применить ту из формул (1) или (2), которая ей соответствует.

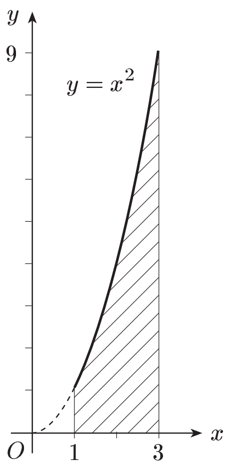

Рис. 65

Пример 1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямыми $x = 1$, $x = 3$ и осью Ox (рис. 65). Пользуясь формулой (1), находим искомую площадь

$$S = \int\limits_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\,\frac{2}{3}.$$

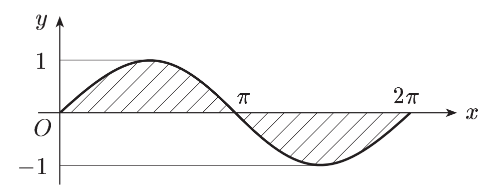

Рис. 66

Пример 2. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (рис 66). Разбиваем сегмент $[0; 2\pi]$ на два сегмента $[0; \pi]$ и $[\pi; 2\pi]$. На первом из них $\sin x \geqslant 0$, на втором — $\sin x \leqslant 0$. Следовательно, используя формулы (1) и (2), имеем, что искомая площадь

$$S = \int\limits_0^\pi \sin x\,dx + \left|\int\limits_\pi^{2\pi} \sin x\,dx\right| = -\cos x\Big|_0^\pi + \Big|-\cos x\Big|_\pi^{2\pi} = 4.$$

2. Вычисление площади в полярных координатах. Пусть требуется определить площадь сектора OAB (рис. 67), ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой AB, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ — функция, непрерывная на сегменте $[\alpha; \beta]$.

Разобьем отрезок $[\alpha; \beta]$ на n частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$ и положим: $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через λ: $\lambda = \max \Delta\varphi_k$. Разобьем данный сектор на n частей лучами $\varphi = \varphi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

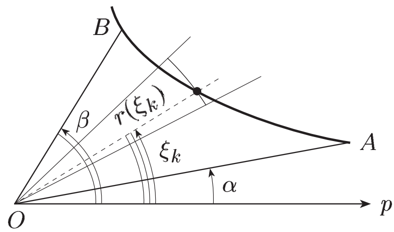

Рис. 67

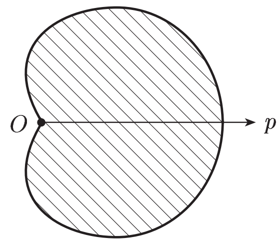

Рис. 68

Заменим k-й элементарный сектор круговым сектором радиуса $r(\xi_k)$, где $\xi_k \in [\varphi_{k-1}; \varphi_k]$. Тогда сумма $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\,\Delta\varphi_k$ — приближенно площадь сектора OAB. Отсюда:

$$S = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\,\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{3}$$

П р и м е р. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$ (рис. 68). Учитывая симметричность кривой относительно полярной оси, по формуле (3) получаем

$$S = a^2\int\limits_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int\limits_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\varphi\Big|_0^{\pi} + 2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\pi + \frac{a^2}{2}\,\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\,\pi a^2.$$

3. Вычисление длины дуги и площади поверхности вращения. Пусть дуга $\overset{\frown}{AB}$ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — функция, имеющая на сегменте $[a; b]$ непрерывную производную.

Длиной дуги $\overset{\frown}{AB}$ называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремится к нулю.

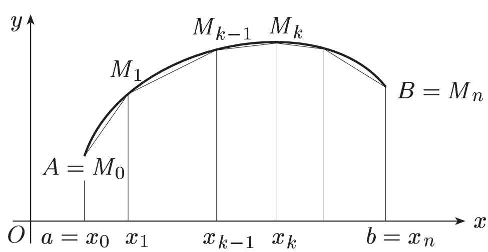

Рис. 69

Найдем длину дуги $\overset{\frown}{AB}$. Впишем в дугу $\overset{\frown}{AB}$ ломаную линию $M_0M_1M_2\ldots M_n$ (рис. 69). Пусть абсциссы точек M_0, M_1, $M_2, \ldots, M_n$ соответственно $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ (ординаты этих точек обозначим через $y_0, y_1, \ldots, y_n$). Имеем разбиение отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Длина отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ равна $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Через Δy_k обозначим приращение функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$. По теореме Пифагора $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Но по теореме Лагранжа $\Delta y_k = f'(\xi_k)\Delta x_k$, где ξ_k — некоторая промежуточная точка отрезка $[x_{k-1}; x_k]$. Отсюда: $|M_{k-1}M_k| = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$ и, следовательно, длина ломаной линии $M_0 M_1 \ldots M_n$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k.$$

Отсюда длина дуги $\smile{AB}$ $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$ или

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx \tag{4}$$

Если кривая AB задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \tag{5}$$

причем функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$ в $[\alpha; \beta]$, то путем замены переменной $x = x(t)$ в (4) получим:

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \tag{6}$$

Если плоская кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi) \qquad (\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta). \tag{7}$$

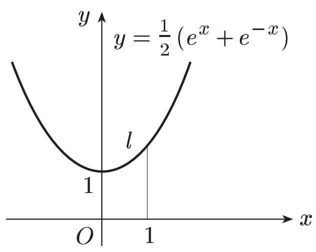

Рис. 70

то, учитывая связь между прямоугольными и полярными координатами (см. § 1, п. 2), параметрические уравнения этой кривой будут $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$. Поэтому $x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi$, $y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$ и по формуле (6) получим:

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi. \tag{8}$$

Пример 1. Найти длину дуги данной линии $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 70). Имеем $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ и по формуле (4) находим

$$l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^{2x} - 2 + e^{-2x})}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

П р и м е р 2. Вычислить длину окружности радиуса R. Напишем уравнение окружности в полярных координатах: $r = R$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, и по формуле (8) получим

$$l = \int_0^{2\pi} R\,d\varphi = 2\pi R.$$

Переходя к площади поверхности вращения, предположим, что, как и выше, дуга $\smile{AB}$ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — функция, имеющая на сегменте $[a; b]$ непрерывную производную. Поверхность, образованная вращением k-го звена ломаной $M_0M_1\ldots M_n$ вокруг оси Ox, есть боковая поверхность усеченного конуса с площадью

$$\pi(y_{k-1} + y_k)|M_{k-1}M_k|$$

или

$$2\pi f(\eta_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

где

$$f(\eta_k) = \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}.$$

Следовательно, площадь поверхности вращения ломаной $M_0M_1\ldots M_n$ вокруг оси Ox равна:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\eta_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k. \tag{9}$$

Площадь σ поверхности вращения дуги $\smile{AB}$ вокруг оси Ox определим как $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n$. Заметим при этом, что сумма (9) не является интегральной суммой для функции $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$, так как в слагаемом, соответствующем отрезку $[x_{k-1}; x_k]$, значения функций $f(x)$ и $f'^2(x)$ взяты в разных точках этого отрезка. Но можно доказать, что предел суммы (9) равняется пределу интегральной суммы для функции $2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$, т. е.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k.$$

Поэтому

$$\sigma = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{10}$$

Если данная кривая AB задана параметрическими уравнениями (5) или уравнением (7) в полярных координатах, то получим:

$$\sigma = 2\pi \int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt, \qquad \sigma = 2\pi \int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi.$$

П р и м е р 3. Найти площадь поверхности шарового пояса, образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, соответствующей изменению x от a до b $(-R \leqslant a < 0,\ 0 < b \leqslant R)$. Здесь

$$y=\sqrt{R^2-x^2},\qquad y'=-\frac{x}{y},\qquad 1+y'^2=\frac{R^2}{y^2}$$

и по формуле (10) $\sigma=2\pi R\int\limits_a^b dx=2\pi R(b-a)$. В частности, при $a=-R$, $b=R$ получаем площадь сферы: $\sigma=4\pi R^2$.

4. Вычисление объема. Рассмотрим тело B, содержащееся между плоскостями $x=a$ и $x=b$ (рис. 71). Пусть для каждого x из сегмента $[a;b]$ дана площадь сечения этого тела $Q(x)$, перпендикулярного оси Ox. Найдем объем V данного тела при условии непрерывности $Q(x)$ на $[a;b]$. Разделим сегмент $[a;b]$ на n частей и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные оси Ox. Эти плоскости разобьют B на слои.

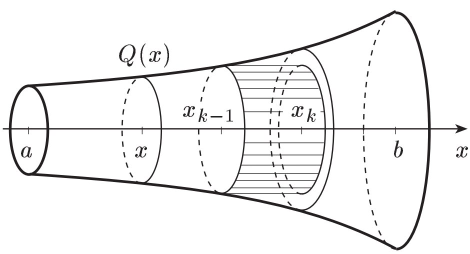

Рис. 71

Выделим k-й слой, ограниченный плоскостями $x=x_{k-1}$ и $x=x_k$. Объем этого слоя ΔV_k приближенно равен: $Q(x_{k-1})\cdot\Delta x_k$. Образуем сумму $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}Q(x_{k-1})\,\Delta x_k$.

Объем V тела B определим как $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$. Этот предел существует в силу непрерывности $Q(x)$ на $[a;b]$ и равен $\int\limits_a^b Q(x)\,dx$. Итак,

$$V=\int\limits_a^b Q(x)\,dx.$$

В частности, если тело ограничено поверхностью вращения линии $y=f(x)$ вокруг оси Ox в пределах изменения x от a до b, то

$$Q(x)=\pi f^2(x)\quad\text{и}\quad V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx,$$

или, более кратко,

$$V=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx. \tag{11}$$

П р и м е р 1. Вычислить объем шара радиуса R. По формуле (11) при $y=\sqrt{R^2-x^2}$ получаем:

$$V=\pi\int\limits_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$ и $x = 1$, вокруг оси Ox. Это тело называется сегментом параболоида вращения (рис. 72). Согласно формуле (11) имеем:

$$V = \pi \int_0^1 x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

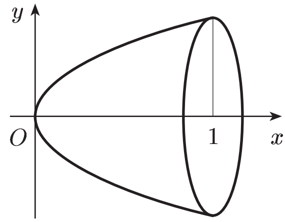

Рис. 72

5. Вычисление статических моментов и центра тяжести. *Статическим моментом* материальной точки, находящейся в плоскости xOy, относительно координатной оси Ox (или Oy) называется произведение массы этой точки на ее ординату (соответственно абсциссу). Статическим моментом системы таких точек $M_1, \ldots, M_n$ относительно координатной оси называется сумма статических моментов всех точек системы относительно этой оси.

Центром тяжести системы материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_n$ называется точка C, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу системы $m = m_1 + \ldots + m_n$, то ее статический момент по отношению к любой оси равен статическому моменту системы точек относительно той же оси. Поэтому если обозначить через S_x и S_y статические моменты системы точек относительно координатных осей Ox и Oy, то координаты x_c и y_c центра тяжести C удовлетворяют соотношениям

$$mx_c = S_y = m_1x_1 + \ldots + m_nx_n, \qquad my_c = S_x = m_1y_1 + \ldots + m_ny_n,$$

где x_k, y_k — декартовы координаты точки с массой m_k. Следовательно, центр тяжести данной системы материальных точек имеет координаты:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{k-1}^{n} m_kx_k}{m}, \qquad y_c = \frac{\sum\limits_{k-1}^{n} m_ky_k}{m}.$$

Статические моменты и координаты центра тяжести дуги плоской линии можно выразить через определенные интегралы. Пусть дуга $\smile{AB}$ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — функция, имеющая на сегменте $[a; b]$ непрерывную производную, и на этой же дуге непрерывно распределено вещество с плотностью $\rho = \rho(x)$. Разделим дугу $\smile{AB}$ на n частичных дуг $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Сосредоточим массу каждого из элементов $M_{k-1}M_k$ в одной его точке $N_k(x_k; y_k)$. Тогда получим приближенные выражения элемента массы

$$\Delta m \approx \rho(x_k)|M_{k-1}M_k|$$

и элементарных статических моментов относительно координатных осей

$$\Delta S_{x_k} \approx y_k \Delta m_k, \qquad \Delta S_{y_k} \approx x_k \Delta m_k.$$

Суммируя и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим выражение массы материальной дуги

$$m = \int\limits_a^b \rho\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{1}$$

и ее статических моментов относительно координатных осей

$$S_x = \int\limits_a^b \rho y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \qquad S_y = \int\limits_a^b \rho x\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{2}$$

Для нахождения центра тяжести $C(x_c; y_c)$ материальной дуги $\smile{AB}$ в соответствии с определением этого понятия составим равенства $mx_c = S_y$ и $my_c = S_x$, из которых следует, что

$$x_c = \frac{S_y}{m}, \qquad y_c = \frac{S_x}{m}, \tag{3}$$

где m, S_x и S_y определяются формулами (1) и (2).

Пример 1. Найти центр тяжести полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ при условии $\rho = 1$ *). Из соображений симметрии заключаем, что $x_c = 0$. Далее имеем: $m = \pi R$,

$$S_x = \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = R\int\limits_{-R}^{R} dx = Rx\Big|_{-R}^{R} = 2R^2.$$

Поэтому

$$y_c = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}637R.$$

(Здесь можно использовать калькулятор.)

Остановимся еще на статических моментах и координатах центра тяжести плоской фигуры. Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями

$$x = a, \qquad x = b, \qquad y = 0, \qquad y = f(x),$$

и на ней равномерно распределено вещество с плотностью $\rho = 1$. Разделим отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков, а криволинейную трапецию на n соответствующих частей. Заменим каждую частичную трапецию прямоугольником с основанием Δx_k и высотой $y_{k-1} = f(x_{k-1})$. Тогда приближенные выражения элемента массы $\Delta m_k \approx y_{k-1} \cdot \Delta x_k$ и элементарных статических моментов относительно координатных осей $\Delta S_{x_k} \approx \frac{1}{2} y_{k-1}\Delta m_k$, $\Delta S_{y_k} \approx x_{k-1} \cdot \Delta m$. Суммируя и переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим выражение массы и статических моментов всей фигуры

$$m = \int\limits_a^b y\,dx, \qquad S_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx, \qquad S_y = \int\limits_a^b xy\,dx. \tag{4}$$

---

*) Разумеется, результат не изменится, если плотность ρ постоянна, но отлична от 1.

Координаты центра тяжести x_c и y_c определяются так же, как и для материальной дуги, формулами (3), в которых m, S_x, S_y определяются по формулам (4).

Пример 2. Найти центр тяжести полукруга, ограниченного осью Ox и полуокружностью $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(\rho = 1)$. Из соображений симметрии заключаем, что $x_c = 0$. Далее имеем:

$$m = \frac{\pi R^2}{2}, \qquad S_x = \frac{1}{2} \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \frac{1}{2} \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{2}{3} R^3.$$

Поэтому $y_c = \dfrac{4R}{3\pi} \approx 0{,}424R$. Здесь также можно использовать калькулятор.

§ 27. Биологические приложения определенного интеграла

1. Численность популяции. Число особей в популяции (численность популяции) меняется со временем. Если условия существования популяции благоприятны, то рождаемость превышает смертность и общее число особей в популяции растет со временем. Назовем скоростью роста популяции прирост числа особей в единицу времени. Обозначим эту скорость $v = v(t)$. В «старых», установившихся популяциях, давно обитающих в данной местности, скорость роста $v(t)$ мала и медленно стремится к нулю. Но если популяция молода, ее взаимоотношения с другими местными популяциями еще не установились или существуют внешние причины, изменяющие эти взаимоотношения, например сознательное вмешательство человека, то $v(t)$ может значительно колебаться, уменьшаясь или увеличиваясь.

Если известна скорость роста популяции $v(t)$, то мы можем найти прирост численности популяции за промежуток времени от t_0 до T. В самом деле, из определения $v(t)$ следует, что эта функция является производной от численности популяции $N(t)$ в момент t, и, следовательно, численность популяции $N(t)$ является первообразной для $v(t)$. Поэтому

$$N(T) - N(t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} v(t)\, dt. \tag{1}$$

Известно, что в условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций экспоненциальна, т. е. $v(t) = ae^{kt}$. Популяция в этом случае как бы «не стареет». Такие условия можно создать, например, для микроорганизмов, пересаживая время от времени развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой. Применяя формулу (1), в этом случае получим:

$$N(T) = N(t_0) + a \int\limits_{t_0}^{T} e^{kt}\, dt = N(t_0) + \frac{a}{k}\, e^{kt}\Big|_{t_0}^{T} = N(t_0) + \frac{a}{k}\left(e^{kT} - e^{kt_0}\right). \tag{2}$$

По формуле, подобной (2), подсчитывают, в частности, численность культивируемых плесневых грибков, выделяющих пенициллин.

2. Биомасса популяции. Рассмотрим популяцию, в которой масса особи заметно меняется в течение жизни, и подсчитаем общую биомассу популяции.

Пусть τ означает возраст в тех или иных единицах времени, а $N(\tau)$ — число особей популяции, возраст которых равен τ. Пусть, наконец, $P(\tau)$ — средняя масса особи возраста τ, а $M(\tau)$ — биомасса всех особей в возрасте от 0 до τ.

Заметив, что произведение $N(\tau)\,P(\tau)$ равно биомассе всех особей возраста τ, рассмотрим разность

$$M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau),$$

где $\Delta\tau>0$. Очевидно, что эта разность, равная биомассе всех особей в возрасте от τ до $\tau+\Delta\tau$, удовлетворяет неравенствам:

$$N(\check{\tau})\,P(\check{\tau})\,\Delta\tau \leqslant M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau) \leqslant M(\widehat{\tau})\,P(\widehat{\tau})\,\Delta\tau, \tag{3}$$

где $N(\check{\tau})\,P(\check{\tau})$ — наименьшее, а $N(\widehat{\tau})\,P(\widehat{\tau})$ — наибольшее значения функции $N(\tau)\,P(\tau)$ на отрезке $[\tau,\,\tau+\Delta\tau]$. Учитывая, что $\Delta\tau>0$, из неравенств (3) имеем:

$$N(\check{\tau})\,P(\check{\tau}) \leqslant \frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau} \leqslant M(\widehat{\tau})\,P(\widehat{\tau}).$$

Из непрерывности функции $N(\tau)\mathrm{P}(\tau)$ (ее непрерывность следует из непрерывности $N(\tau)$ и $P(\tau)$) следует, что

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\left[N(\check{\tau})\,P(\check{\tau})\right] = \lim_{\Delta\tau\to 0}\left[N(\widehat{\tau})\,P(\widehat{\tau})\right] = N(\tau)\,P(\tau).$$

Поэтому согласно теореме 5 (§ 11) будем иметь:

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau} = N(\tau)\,P(\tau)$$

или

$$\frac{d(M(\tau)}{d\tau} = N(\tau)\,P(\tau).$$

Следовательно, биомасса $M(\tau)$ является первообразной для $N(\tau)\,P(\tau)$. Отсюда:

$$M(T)-M(0) = \int\limits_0^T N(\tau)\,P(\tau)\,d\tau,$$

где T — максимальный возраст особи в данной популяции. Так как $M(0)$, очевидно, равно нулю, то окончательно получаем:

$$M(T) = \int\limits_0^T N(\tau)\,P(\tau)\,d\tau.$$

3. Средняя длина пролета. В некоторых исследованиях необходимо знать среднюю длину пробега, или среднюю длину пути при прохождении животным некоторого фиксированного участка. Приведем соответствующий расчет для птиц. Пусть участком будет круг радиуса R (рис. 73). Будем считать, что R не слишком велико, так что большинство птиц изучаемого вида пересекает этот круг по прямой.

Птица может под любым углом в любой точке пересечь окружность. В зависимости от этого длина ее пролета над кругом может быть равной любой величине от 0 до $2R$. Нас интересует средняя длина пролета. Обозначим ее через l.

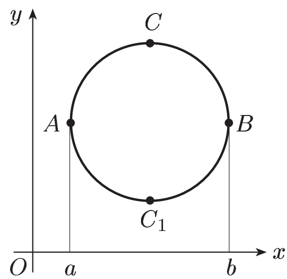

Рис. 73

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, нам достаточно ограничиться лишь теми птицами, которые летят в каком-нибудь одном направлении, параллельном оси Oy (см. рис. 73). Тогда средняя длина пролета — это среднее расстояние между дугами ACB и AC_1B. Иными словами, это среднее значение функции $f_1(x) - f_2(x)$, где $y = f_1(x)$ — уравнение верхней дуги, а $y = f_2(x)$ — уравнение нижней дуги, т. е.

$$l = \frac{\int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx}{b-a}$$

или

$$l = \frac{\int\limits_a^b f_1(x)\,dx - \int\limits_a^b f_2(x)\,dx}{b-a} \qquad (4)$$

Так как

$$\int\limits_a^b f_1(x)\,dx$$

равен площади криволинейной трапеции $aACBb$ (см. § 23), а

$$\int\limits_a^b f_2(x)\,dx$$

равен площади криволинейной трапеции aAC_1Bb, то их разность равна площади круга, т. е. πR^2. Разность $b - a$ равна, очевидно, $2R$. Подставив это в (4), получим:

$$l = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi}{2}\,R.$$

Приведенные примеры далеко не исчерпывают возможных приложений определенного интеграла в биологии [4].

Упражнения

Непосредственным интегрирование или методом замены переменной вычислить интегралы.

1. $\int x^6\,dx.$ $\left[\dfrac{x^7}{7}+C.\right]$

2. $\int \sqrt[3]{x}\,dx.$ $\left[\dfrac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x}+C.\right]$

3. $\int \dfrac{dx}{x^5}.$ $\left[-\dfrac{1}{4x^4}+C.\right]$

4. $\int (x-x^3)\,dx.$ $\left[\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+C.\right]$

5. $\int (x^5-4x^3+x-1)\,dx.$ $\left[\dfrac{x^6}{6}-x^4+\dfrac{x^2}{2}-x+C.\right]$

6. $\int (2x-3\sqrt{x})\,dx.$ $\left[x^2-2x\sqrt{x}+C.\right]$

7. $\int \left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3}{x^3}\right)dx.$ $\left[\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{3}{2x^2}+C.\right]$

8. $\int (2+\sqrt{x})^2\,dx.$ $\left[4x+\dfrac{8}{3}\,x\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{2}+C.\right]$

9. $\int \dfrac{(x\sqrt{x}-3)^2}{x^3}\,dx.$ $\left[x+\dfrac{12}{\sqrt{x}}-\dfrac{9}{2x^2}+C.\right]$

10. $\int \dfrac{(2+x)\,dx}{x}.$ $[2\ln|x|+x+C.]$

11. $\int x^2(1+2x)\,dx.$ $\left[\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{2}+C.\right]$

12. $\int \dfrac{2x^2+x-1}{x^3}\,dx.$ $\left[2\ln|x|-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+C.\right]$

13. $\int e^{-4x}\,dx.$ $\left[-\dfrac{1}{4}\,e^{-4x}+C.\right]$

14. $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx.$ $\left[\dfrac{1}{2}\,(e^{2x}-e^{-2x})-2x+C.\right]$

15. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$ $[\sqrt{x^2+1}+C.]$

16. $\int \dfrac{dx}{x^2+16}.$ $\left[\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}+C.\right]$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{25-x^2}}.$ $\left[\arcsin\dfrac{x}{5}+C.\right]$

18. $\int \sin 7x\,dx.$ $\left[-\dfrac{1}{7}\cos 7x+C.\right]$

19. $\int 3^x\,dx.$ $\left[\dfrac{3^x}{\ln 3}+C.\right]$

20. $\int (e^x+e^{-2x})\,dx.$ $\left[e^x-\dfrac{1}{2}\,e^{-2x}+C.\right]$

21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-5}}.$ $[\ln|x+\sqrt{x^2-5}|+C.]$

22. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$. $\left[\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + C.\right]$

23. $\int \cos 3x\,dx$. $\left[\frac{1}{3}\sin 3x + C.\right]$

24. $\int \frac{dx}{x^2-16}$. $\left[\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C.\right]$

25. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. $\left[-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 3x + C.\right]$

26. $\int (2+\cos x)\,dx$. $[2x+\sin x + C.]$

27. $\int (3+x-\sin x)\,dx$. $\left[3x+\frac{x^2}{2}+\cos x + C.\right]$

28. $\int e^{2x+1}\,dx$. $\left[\frac{1}{2}e^{2x+1} + C.\right]$

29. $\int 3^x\cdot 2^{2x}\,dx$. $\left[\frac{12^x}{\ln 12} + C.\right]$

30. $\int (x+5)^3\,dx$. $\left[\frac{1}{4}(x+5)^4 + C.\right]$

31. $\int \sqrt{1+2x}\,dx$. $\left[\frac{1}{3}(1+2x)\sqrt{1+2x} + C.\right]$

32. $\int x(x^2-1)^3\,dx$. $\left[\frac{1}{8}(x^2-1)^4 + C.\right]$

33. $\int (x^2+5)^7\,2x\,dx$. $\left[\frac{(x^2+5)^8}{8} + C.\right]$

34. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$. $\left[\frac{1}{3}(1+x^2)\sqrt{1+x^2} + C.\right]$

35. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.\right]$

36. $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$. $\left[-\frac{1}{3(x-1)^3} + C.\right]$

37. $\int e^{x+x^2}(1+2x)\,dx$. $[e^{x+x^2} + C.]$

38. $\int (\sin x^2)\,x\,dx$. $\left[-\frac{1}{2}\cos x^2 + C.\right]$

39. $\int \cos^5 4x\sin 4x\,dx$. $\left[-\frac{1}{24}\cos^6 4x + C.\right]$

При нахождении интегралов (№40–42) следует предварительно в подынтегральной функции выделить целую часть.

40. $\int \frac{x^3\,dx}{x+1}$. $\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln|x+1| + C.\right]$

41. $\int \frac{2x-1}{2x+3}\,dx$. $[x-2\ln|2x+3| + C.]$

42. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$. $\left[\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1| + C.\right]$

43. $\int \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}}$. $[-\ln(1+e^{-x}) + C.]$

44. $\int e^{x^3+x^2-x+1}(3x^2+2x-1)\,dx$. $[e^{x^3+x^2-x+1} + C.]$

45. $\int e^{\operatorname{tg} 3x} \sec^2 3x\, dx.$ $\left[\frac{1}{3} e^{\operatorname{tg} 3x} + C.\right]$

46. $\int \frac{dx}{4x^2+9}.$ $\left[\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C.\right]$

47. $\int \frac{dx}{9x^2-4}.$ $\left[\frac{1}{12} \ln \left|\frac{3x-2}{3x+2}\right| + C.\right]$

48. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}.$ $\left[\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{4} + C.\right]$

49. $\int \frac{5x\, dx}{\sqrt{1-x^4}}.$ $\left[\frac{5}{2} \arcsin x^2 + C.\right]$

50. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$ $[\arcsin(\ln x) + C.]$

51. $\int \frac{(4-\ln x)^2}{x}\, dx.$ $\left[-\frac{1}{3}(4-\ln x)^3 + C.\right]$

52. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x+4}}.$ $\left[2\sqrt{e^x+4} + C.\right]$

53. $\int \frac{e^{-1/x}\, dx}{x^2}.$ $\left[e^{-1/x} + C.\right]$

54. $\int 2^{x^3} x^2\, dx.$ $\left[\frac{2^{x^3}}{3\ln 2} + C.\right]$

55. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}.$ $\left[-\ln\left|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right| + C.\right]$

56. $\int \frac{x^2\, dx}{\cos^2 x^3}.$ $\left[\frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C.\right]$

57. $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}.$ $\left[-\frac{1}{x-1} + C.\right]$

58. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}.$ $\left[\arcsin \frac{2x-1}{3} + C.\right]$

59. $\int \frac{dx}{1+x+x^2}.$ $\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\right]$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$ $[\arcsin(2x-3) + C.]$

61. $\int \frac{dx}{4+2x+x^2}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.\right]$

62. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}.$ $[\operatorname{arctg}(2x-1) + C.]$

63. $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + C.\right]$

64. $\int (\cos 3x - \sin 2x)\, dx.$ $\left[\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\cos 2x + C.\right]$

65. $\int (\sin 3x + \cos 5x)\, dx.$ $\left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + C.\right]$

66. $\int \cos(x+3)\, dx.$ $[\sin(x+3) + C.]$

67. $\int \sin^3 x \cos x\, dx.$ $\left[\dfrac{\sin^4 x}{4} + C.\right]$

68. $\int \cos^5 x \sin x\, dx.$ $\left[-\dfrac{\cos^6 x}{6} + C.\right]$

При нахождении интегралов от тригонометрических функций полезно использование тригонометрических формул, приведенных ранее в главе II.

69. $\int (1-\sin^2 x)\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C.\right]$

70. $\int (1-\cos^2 x)\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C.\right]$

71. $\int \sin 2x \cos 2x\, dx.$ $\left[-\dfrac{1}{8}\cos 4x + C.\right]$

72. $\int \cos\dfrac{3}{4}x \sin\dfrac{1}{4}x\, dx.$ $\left[-\dfrac{1}{2}\cos x + \cos\dfrac{1}{2}x + C.\right]$

73. $\int \cos 3x \cos\dfrac{4}{3}x\, dx.$ $\left[\dfrac{3}{26}\sin\dfrac{13}{3}x + \dfrac{3}{10}\sin\dfrac{5}{3}x + C.\right]$

74. $\int \sin^5 x\, dx.$ $\left[-\dfrac{1}{5}\cos^5 x + \dfrac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C.\right]$

75. $\int \cos^5 x\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{5}\sin^5 x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C.\right]$

76. $\int \sin x \sin 5x\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{8}\sin 4x - \dfrac{1}{12}\sin 6x + C.\right]$

77. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{5}\cos^5 x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x + C.\right]$

78. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx.$ $\left[\dfrac{1}{16}x - \dfrac{1}{64}\sin 4x + \dfrac{1}{48}\sin^3 2x + C.\right]$

79. $\int \dfrac{dx}{3x^2+7}.$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\dfrac{3}{7}}\right) + C.\right]$

80. $\int \dfrac{dx}{5x^2-2}.$ $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{5}-\sqrt{2}}{x\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right| + C.\right]$

81. $\int \sqrt[3]{2x-3}\, dx.$ $\left[\dfrac{3}{8}(2x-3)\sqrt[3]{2x-3} + C.\right]$

82. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+x}}.$ $\left[\ln\left|x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right| + C.\right]$

83. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-2}}.$ $\left[\ln\left|x + \sqrt{x^2-2}\right| + C.\right]$

84. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$ $\left[\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C.\right]$

При нахождении следующих интегралов использовать метод интегрирования по частям

85. $\int (2x-5)\, e^{-3x}\, dx.$ $\left[\dfrac{13-6x}{9}e^{-3x} + C.\right]$

86. $\int x\cos 2x\, dx.$ $\left[\dfrac{x}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C.\right]$

87. $\int x\, e^{-2x}\, dx.$ $\left[-\dfrac{2x+1}{4}e^{-2x} + C.\right]$

88. $\int (2x-3)\sin\frac{x}{2}\,dx.$ $\left[(6-4x)\cos\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}+C.\right]$

89. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$ $\left[2\sqrt{x}\,(\ln x-2)+C.\right]$

90. $\int \arccos 2x\,dx.$ $\left[x\arccos 2x-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+C.\right]$

91. $\int \operatorname{arcctg} 3x\,dx.$ $\left[x\operatorname{arcctg} 3x+\frac{1}{6}\ln(1+9x^2)+C.\right]$

92. $\int \sqrt{x}\ln x\,dx.$ $\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C.\right]$

93. $\int (x^2+1)\,e^x\,dx.$ $\left[e^x\left(x^2-2x+3\right)+C.\right]$

94. $\int \ln^2 x\,dx.$ $\left[x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C.\right]$

95. $\int \frac{\ln x\,dx}{(x+1)^2}.$ $\left[\frac{x}{x+1}\ln x-\ln(x+1)+C.\right]$

Вычислить интегралы от дробно-рациональных функций.

96. $\int \frac{x}{x+2}\,dx.$ $[x-2\ln|x+2|+C.]$

97. $\int \frac{dx}{(x+1)^4}.$ $\left[-\frac{1}{3(x+1)^3}+C.\right]$

98. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.\right]$

99. $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}.$ $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C.\right]$

100. $\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5}.$ $\left[\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.\right]$

101. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}.$ $\left[\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.\right]$

Вычислить интегралы от следующих тригонометрических функций.

102. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}.$ $\left[\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C.\right]$

103. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$ $\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.\right]$

104. $\int \frac{dx}{2+3\cos x}.$ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)+\sqrt{5}}{\operatorname{tg}(x/2)-\sqrt{5}}\right|+C.\right]$

105. $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{(1+\cos x)\sin x}.$ $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.\right]$

Применяя формулу Ньютона–Лейбница, вычислить определенные интегралы.

106. $\int\limits_0^1 x^4\,dx.$ $\left[\frac{1}{5}.\right]$ **107.** $\int\limits_{-1}^1 (x^2+1)\,dx.$ $\left[2\,\frac{2}{3}.\right]$

108. $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx.$ $\left[4\,\frac{2}{3}.\right]$ **109.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}.$ $[\ln 2.]$

110. $\int\limits_{-1}^{0} e^{-2x}\,dx$. $\left[\dfrac{e^2-1}{2}.\right]$

111. $\int\limits_{0}^{-\pi/2} \sin 4x\,dx$. [0.]

112. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx$. [1.]

113. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \dfrac{dx}{\cos^2 x}$. [1.]

114. $\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. $\left[\dfrac{\pi}{6}.\right]$

115. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{1+x^2}$. $\left[\dfrac{\pi}{3}.\right]$

Вычислить определенные интегралы методом подстановки.

116. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. [1.]

117. $\int\limits_{1}^{4} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$. $\left[\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.\right]$

118. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$. $\left[\dfrac{4-\pi}{2}.\right]$

119. $\int\limits_{0}^{7} \sqrt{49-x^2}\,dx$. $\left[\dfrac{49}{4}\pi.\right]$

120. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 2x\,dx$. $\left[\dfrac{\pi}{4}.\right]$

121. $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{e^x}{e^x-1}\,dx$. $[\ln(1+e).]$

122. $\int\limits_{0}^{4} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$. $\left[1\,\dfrac{1}{3}.\right]$

123. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. $\left[\dfrac{1}{4}.\right]$

124. $\int\limits_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}\,dx$. $\left[64\,\dfrac{2}{3}.\right]$

125. $\int\limits_{-3}^{1} e^{-x}\,dx.$. $\left[e^3-\dfrac{1}{e}.\right]$

126. $\int\limits_{2}^{8} \dfrac{dx}{x^2+6x+8}$. $\left[\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}.\right]$

127. $\int\limits_{0}^{\pi/12} \dfrac{dx}{\sin^2(\pi/6+x)}$. $[\sqrt{3}-1.]$

128. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$. $\left[\dfrac{\pi}{2}.\right]$

129. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}}$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

130. $\int\limits_{-2}^{0} \dfrac{dx}{(1-2x)^3}$. [0,24]

131. $\int\limits_{0}^{1/2} \dfrac{5x\,dx}{(1-x^2)^3}$. $\left[\dfrac{35}{36}.\right]$

132. $\int\limits_{0}^{7} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$. [3.]

133. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$. [1.]

134. $\int\limits_{0}^{3} \dfrac{2x\,dx}{\sqrt{16+x^2}}$. [2.]

135. $\int\limits_{-1}^{2} \dfrac{2x\,dx}{(2x^2+1)^2}$. $\left[\dfrac{1}{9}.\right]$

136. $\int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2-7}\,dx$. $\left[8\,\dfrac{2}{3}.\right]$

137. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \dfrac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$. [0,5.]

138. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$. [0,5.]

139. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \dfrac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}$. $\left[2\,\dfrac{1}{3}.\right]$

Вычислить определенные интегралы, используя формулу интегрирования по частям.

140. $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$. $\left[e-2.\right]$

141. $\int\limits_1^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+1}}$. [8.]

142. $\int\limits_1^e x^2 \ln x\,dx$. $\left[\frac{2e^3+1}{9}.\right]$

143. $\int\limits_0^2 (3-2x)\,e^{-3x}\,dx$. $\left[\frac{5e^{-6}}{9}.\right]$

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

144. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

145. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$. $\left[\frac{\pi}{6}.\right]$

146. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-5x}\,dx$. $\left[\frac{1}{5}.\right]$

147. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+5}{x\,\sqrt[3]{x}}\,dx$. [Расходится]

148. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$. $\left[\frac{1}{2}.\right]$

149. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}\,dx$. $\left[-\frac{\pi^2}{8}.\right]$

150. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3}\,dx$. [Сходится.]

151. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$. [Сходится.]

152. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. [Расходится.]

153. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2+1$, осью Ox и прямыми $x=1$ и $x=4$. [24.]

154. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$, $y=0$, $x=1$, $x=e$. [1.]

155. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной полукубической параболой $y^2=x^3$ и прямой $x=4$. [25,6.]

156. Переходя к полярным координатам, вычислить площадь круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=4$. [4π.]

157. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной первым витком спирали Архимеда $r=a\varphi$ и полярной осью (рис. 74). $\left[\frac{4}{3}\pi^3a^2.\right]$

158. Найти площадь одного лепестка кривой $r=4\sin^2\varphi$ (рис. 75). [3π.]

159. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$ от начала координат до точки $A(4;8)$ (рис. 76). $\left[\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).\right]$

160. Найти длину дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ (рис. 77). [$6a$.]

161. Найти длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (рис. 78). [$8a$.]

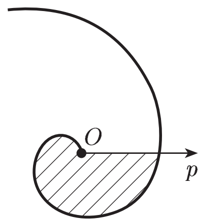

Рис. 74

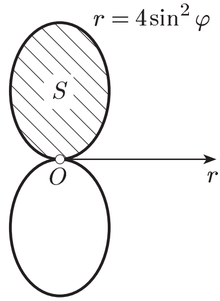

Рис. 75

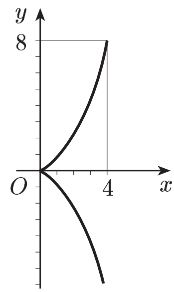

Рис. 76

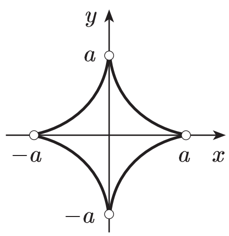

Рис. 77

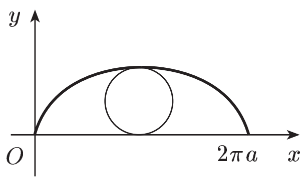

Рис. 78

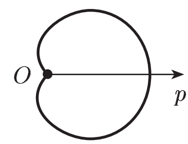

Рис. 79

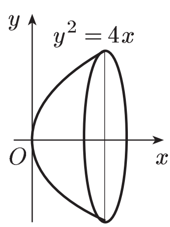

Рис. 80

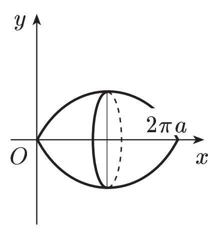

Рис. 81

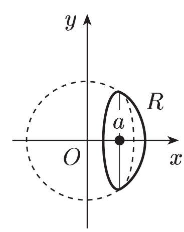

Рис. 82

162. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (рис. 79). [$8a$.]

163. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2 = 4x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$ (рис. 80). $\left[\dfrac{56}{3}\,\pi.\right]$

164. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (рис. 81). $\left[\dfrac{64}{3}\,\pi a^2.\right]$

165. Найти площадь поверхности сферического сегмента (рис. 82), образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, соответствующей изменению x от a до R $(0 < a < R)$. [$2\pi R(R-a)$.]

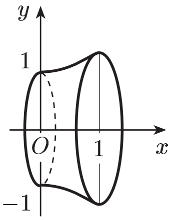

Рис. 83

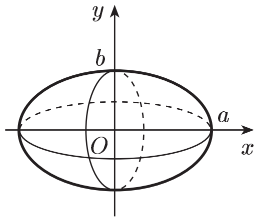

Рис. 84

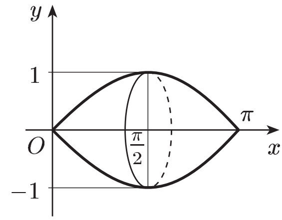

Рис. 85

166. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ (рис. 83). $\left[\dfrac{\pi}{8}(e^2 - e^{-2}) + \dfrac{\pi}{2}.\right]$

167. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$ и расположенной в I и II квадрантах (рис. 84). $\left[\dfrac{4}{3}\pi a b^2.\right]$

168. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной полуволной синусоиды $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и осью Ox (рис. 85). $\left[\dfrac{\pi^2}{2}.\right]$

169. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ и осью Ox (рис. 81). $[5\pi^2 a^3.]$

170. Найти координаты центра тяжести той четверти окружности $x^2 + y^2 = 1$ (с плотностью $\rho = 1$), которая расположена в первом квадранте. $\left[x_C = \dfrac{2}{\pi},\ y_C = \dfrac{2}{\pi}.\right]$

171. Найти координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ и расположенной в I квадранте (плотность $\rho = 1$). $\left[x_C = \dfrac{4a}{3\pi},\ y_C = \dfrac{4b}{3\pi}.\right]$

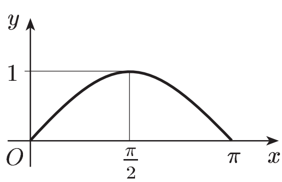

Рис. 86

172. Найти координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $y = 0$ $(\rho = 1)$ (рис.86). $\left[x_C = \dfrac{\pi}{2},\ y_C = \dfrac{\pi}{8}.\right]$

173. Найти путь, пройденный точкой за четвертую секунду, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$ (м/с). [27 м.]

174. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, зная скорость ее прямолинейного движения $v = 18t - 6t^2$ (м/с). [27 м.]

175. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3 Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05 м? [0,075 Дж.]

176. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м? [12,5 Дж.]

Глава V

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 28. Определение и основные свойства функций нескольких переменных

1. Определение функции нескольких переменных. Понятие функции одной переменной не охватывает все зависимости, существующие в природе. Даже в самых простых задачах встречаются величины, значения которых определяются совокупностью значений нескольких величин.

Пример 1. Площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y, выражается формулой $S = xy$, т. е. значения S определяются совокупностью значений x и y.

Пример 2. Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами, длины которых равны x, y, z, выражается формулой $V = xyz$, т. е. значения V определяются совокупностью значений x, y и z.

Для изучения подобных зависимостей вводится понятие *функции нескольких переменных*. Так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных, то ограничимся рассмотрением этих функций.

Переменная z называется *функцией двух независимых переменных* x и y, если некоторым парам значений x и y по какому-либо правилу или закону ставится в соответствие определенное значение z. Символически функция двух переменных обозначается так: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ и т. д.

Пара значений (x, y) может рассматриваться как точка на плоскости. Поэтому, имея дело с функцией $z = f(x, y)$, часто говорят, что z есть функция точки $(x; y)$.

Множество пар значений, которые могут принимать переменные x и y, называется *областью определения* или *областью существования* функции. В случае явного аналитического задания функции область ее существования определяется самой формулой, задающей функцию.

Пример 3. Функция $z = x^2 + y$ задана для всевозможных x и y. Поэтому пара чисел $(x; y)$ может представлять собой координаты любой точки плоскости. В связи с этим говорят, что данная функция определена на всей плоскости.

Пример 4. Функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена (здесь речь идет лишь о действительных значениях z) только при $x^2 + y^2 \leqslant 1$, т. е. в круге, ограниченном окружностью $x^2 + y^2 = 1$, включая эту окружность.

Пример 5. Функция $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ определена в круге $x^2 + y^2 < 1$, т. е. в круге, ограниченном окружностью $x^2 + y^2 = 1$, исключая эту окружность.

Таким образом, областью определения функции двух переменных служит вся плоскость или некоторая ее часть (говорят: область на плоскости — и обозначают G).

2. Геометрическое изображение функции двух переменных. Функции двух переменных допускают графическую иллюстрацию. *Графиком* функции $z = f(x, y)$, определенной на некотором множестве G точек плоскости xOy, называется множество точек $(x; y; z)$ пространства, у которых $(x; y)$ принадлежат G и $z = f(x, y)$. В наиболее простых случаях такой график представляет собой некоторую поверхность.

Пример 1. Графиком функции $z = 1 - x - y$ является плоскость, проходящая через точки $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ и $(0; 0; 1)$ (рис. 87).

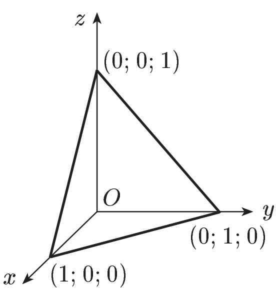

Рис. 87

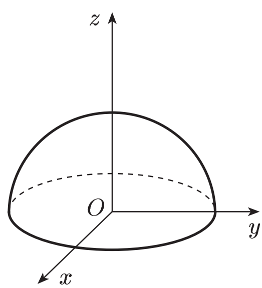

Рис. 88

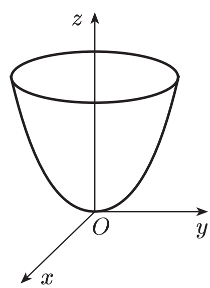

Рис. 89

Пример 2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (полусфера, рис. 88).

Пример 3. $z = x^2 + y^2$ (параболоид вращения, рис. 89).

Функции трех (и большего числа) переменных не имеют наглядного геометрического представления.

3. Непрерывность функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области G. Возьмем точку $M_0(x_0; y_0)$ из этой области и дадим x_0 и y_0 соответственно приращения Δx и Δy, такие, чтобы точка $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ принадлежала области G. Разность $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ называется *полным приращением функции* $z = f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$.

По аналогии с функцией одной переменной непрерывность функции двух независимых переменных определяется так.

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной* при $x = x_0$; $y = y_0$ или в точке $(x_0; y_0)$, если ее полное приращение Δz стремится к нулю, когда $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, т. е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0.$$

Если функция непрерывна в каждой точке области G, то она называется непрерывной в этой области G.

§ 29. Частные производные и дифференциалы

1. Частные производные первого порядка. *Частной производной* функции нескольких переменных по какой-нибудь переменной в рассматриваемой точке называется обычная производная по этой переменной, считая другие переменные фиксированными (постоянными). Например, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ частные производные определяются так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

если эти пределы существуют. Используются и другие обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z'_y, \quad f'_y(x, y).$$

Из этого определения ясно, что правила вычисления частных производных остаются теми же, что и для функций одной переменной, и только требуется каждый раз помнить, по какой переменной ищется производная.

Пример 1. Если $z = x^2 + y^2$, то $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$.

Пример 2. Если $z = xy + xy^2 - 1$, то $z'_x = y + y^2$, $z'_y = x + 2xy$.

Задача. Реакция на инъекцию x ед. лекарственного препарата описывается функцией $y = x^2(a - x)te^{-t}$, где t выражается в часах с момента инъекции. Когда при заданной дозе лекарства реакция достигает максимума?

Имеем:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x^2(a - x)e^{-t}(1 - t).$$

Отсюда в силу теоремы 2 из § 18 (п. 2) искомый максимум наступает при $t = 1$, т. е. спустя 1 час после инъекции.

2. Дифференциал функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные производные z'_x и z'_y.

Произведение $z'_x \Delta x$ называют *частным дифференциалом* по x функции z и обозначают символом $d_x z = z'_x \Delta x$ или $d_x z = z'_x\, dx$, где $dx = \Delta x$ — приращение независимой переменной x. Аналогично $d_y z = z'_y\, dy$, где $dy = \Delta y$.

Сумма частных дифференциалов функции z называется ее *полным дифференциалом* и обозначается символом dz. Таким образом,

$$dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy.$$

Пример. Если $z = (x+y)^2$, то $z'_x = z'_y = 2(x+y)$ и $dz = 2(x+y)\times\times(dx+dy)$.

Очевидно, для полного дифференциала справедливы формулы вида 1–5 из таблицы дифференциалов (гл. III, § 16, п. 3):

1. $dC = 0$.
2. $d(u+v) = du + dv$.
3. $d(uv) = v\,du + u\,dv$.
4. $d(Cu) = C\,du$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$.

Здесь C — постоянная, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ — функции, имеющие непрерывные частные производные.

3. Производные и дифференциал от сложной функции. Пусть $z = f(x, y)$ где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Тогда в конечном итоге z будет функцией одной переменной t. Предположим, что z'_x, z'_y непрерывны и $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ существуют. Найдем $\frac{dz}{dt}$. Дадим переменной t приращение Δt. Тогда x, y, а следовательно и z, получат свои приращения $\Delta x, \Delta y$ и Δz. Имеем, учитывая формулу Лагранжа (см. § 17, п. 3),

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = \\ &= [f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)] = \\ &= f'_x(x+\Theta\,\Delta x,\, y+\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x,\, y+\Theta_1\,\Delta y)\,\Delta y, \\ &\qquad 0 < \Theta < 1, \qquad 0 < \Theta_1 < 1,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x+\Theta\,\Delta x,\ y+\Delta y)\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y+\Theta_1\,\Delta y)\,\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta t \to 0$ и учитывая непрерывность частных производных z'_x, z'_y, получим:

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y)\,\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\,\frac{dy}{dt}$$

или

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}.$$

Пусть теперь $x = \varphi(t, \tau)$, $y = \psi(t, \tau)$ (здесь предполагается существование первых производных от функций x, y по t и τ). В этом случае z будет функцией двух независимых переменных t и τ и встает вопрос о вычислении частных производных z'_t и z'_τ. Но этот случай не отличается существенно от предыдущего, ибо при вычислении частной производной функции двух переменных мы одну из них фиксируем и у нас остается функция только от одной переменной. Следовательно, для этого случая только что полученную формулу можно переписать в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}.$$

Предположим еще, что x'_t, x'_τ, y'_t и y'_τ непрерывны.

Если бы x и y были независимыми переменными, то полный дифференциал функции z был бы равен $dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy$. В данном случае z зависит через посредство x, y от переменных t и τ, следовательно, $dz = z'_t\,dt + z'_\tau\,d\tau$.

Но

$$z'_t = z'_x\,x'_t + z'_y\,y'_t \quad \text{и} \quad z'_\tau = z'_x\,x'_\tau + z'_y\,y'_\tau$$

Поэтому

$$dz = (z'_x\,x'_t + z'_y\,y'_t)\,dt + (z'_x\,x'_\tau + z'_y\,y'_\tau)\,d\tau =$$
$$= z'_x(x'_t\,dt + x'_\tau\,d\tau) + z'_y(y'_t\,dt + y'_\tau\,d\tau).$$

Нетрудно видеть, что выражения, стоящие в скобках, являются дифференциалами функций x, y, поэтому можно записать:

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy.$$

Мы пришли к той же форме записи дифференциала, что и в случае, когда x и y были независимыми переменными.

Пример. Если $z = xy$, где $x = t\cos 2\tau$, $y = t^2\tau$, то $z'_t = y\cos 2\tau + 2xt\tau$, $z'_\tau = -2yt\sin 2\tau + xt^2$.

4. Неявные функции и их дифференцирование. Как уже отмечалось (см. гл. II, § 7), если уравнение, с помощью которого задается функция одной переменной x, не разрешено относительно y, то эта функция называется *неявной*. Разрешая это уравнение относительно y, мы получаем ту же функцию, но уже заданную в явной форме. Однако часто бывает, что разрешить такое уравнение относительно y невозможно (например, $2^y - 2y + x^2 - 1 = 0$) или нецелесообразно; в этом случае уравнение так и оставляют неразрешенным, в общем виде (после переноса всех членов в левую часть):

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

В связи с этим встает вопрос о том, как найти производную неявной функции, не разрешая уравнения (1) относительно y.

Если в уравнении (1), определяющем неявную функцию $y = f(x)$, задавать значения независимой переменной x, то для нахождения соответствующего значения y надо решать уравнение. Теперь если в это уравнение подставить его решение, то получится тождество. Поэтому можно сказать также, что неявная функция $y = f(x)$, определенная уравнением (1), — это такая функция, которая, будучи подставлена в уравнение (1), обращает его в тождество. Дифференцируя это тождество по x согласно правилу дифференцирования сложной функции, получим:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{где} \qquad y = f(x).$$

Отсюда при $F'_y(x, y) \neq 0$ вытекает формула для производной неявной функции

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Пример. Пусть y как функция от x задана соотношением $e^{xy} - x - y = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$. Так как для $F(x, y) = e^{xy} - x - y$ имеем:

$$F'_x(x, y) = ye^{xy} - 1, \qquad F'_y(x, y) = xe^{xy} - 1,$$

то согласно формуле для производной неявной функции

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}.$$

5. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Частные производные функции нескольких переменных сами являются функциями этих переменных и могут иметь частные производные. Для исходной функции эти последние производные будут частными производными второго порядка. Так, для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных можно определить (предполагается, что все производные существуют) четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются символами:

$$z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Частные производные z''_{xy} и z''_{yx}, отличающиеся порядком дифференцирования, называются *смешанными частными производными второго порядка.*

Аналогичным образом определяются частные производные 3-го, 4-го и старших порядков.

Пример 1. Найти частные производные второго порядка функции $z = e^{x-2y}$. Имеем: $z'_x = e^{x-2y}$, $z'_y = -2e^{x-2y}$, $z''_{x^2} = e^{x-2y}$, $z''_{xy} = -2e^{x-2y}$, $z''_{yx} = -2e^{x-2y}$, $z''_{y^2} = 4e^{x-2y}$.

Пример 2. Найти частные производные второго порядка функции $z = x \cdot \sin y$. Имеем: $z'_x = \sin y$, $z'_y = x \cdot \cos y$, $z''_{x^2} = 0$, $z''_{xy} = \cos y$, $z''_{yx} = \cos y$, $z''_{y^2} = -x \cdot \sin y$.

В обоих примерах $z''_{xy} = z''_{yx}$. Оказывается, имеет место следующее предложение, которое мы приведем без доказательства.

Теорема. *Непрерывные смешанные производные высших порядков не зависят от последовательности дифференцирования, а зависят лишь от того, по каким переменным и сколько раз по каждой переменной произведено дифференцирование* (см. [10]).

Пусть теперь имеется функция $z = f(x, y)$, обладающая непрерывными частными производными второго порядка. Рассмотрим ее полный дифференциал
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Так как $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ по предположению имеют непрерывные частные производные первого порядка, то от функции dz, в свою очередь, можно взять полный дифференциал $d(dz)$. Так получим *полный дифференциал второго* порядка (или *второй дифференциал*), который обозначается d^2z.

Аналогично, потребовав существование непрерывных частных производных третьего, четвертого, n-го порядков, можно получить полные дифференциалы соответственно третьего, четвертого, n-го порядков.

Найдем выражение второго дифференциала через вторые частные производные. Пользуясь правилами 2 и 4 (dx и dy не зависят от x и y, т. е. рассматриваются как постоянные) и приведенной выше теоремой, можно записать:
$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dy\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,(dy)^2 =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2$$
(для краткости обозначено $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$).

Последнюю сумму можно записать кратко так:
$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z.$$
Этот символ расшифровывается следующим образом. Сначала раскрываются скобки, как будто слагаемые в них числа, а число 2 — показатель степени. Затем числители полученных дробей умножаются на z. Формула для d^2z обобщается на случай d^nz:
$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n z.$$
Этот символ расшифровывается так же, как и в случае $n = 2$.

Подчеркнем, что в случае зависимых переменных x и y эти формулы для d^2z и d^nz, вообще говоря, не имеют места, так как в этом случае x и y являются функциями независимых переменных.

Пример 3. Если $z=(x+y)^2$, то $z''_{x^2}=z''_{xy}=z''_{y^2}=2$ и $d^2z=2(dx+dy)^2$.

6. Признак полного дифференциала. Выясним, при каких условиях выражение

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy, \tag{2}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка, является полным дифференциалом некоторой функции $u=F(x,y)$, или, кратко, полным дифференциалом.

Пусть (2) — полный дифференциал функции $u=F(x,y)$. Тогда имеем:

$$du=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$du=\frac{\partial F}{\partial x}\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}\,dy. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y), \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y), \tag{6}$$

откуда: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$.

Но (см. п. 5) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$. Поэтому

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{7}$$

Пусть теперь для выражения (2) выполнено соотношение (7). Рассмотрим функцию

$$F(x,y)=\int P(x,y)\,dx+\varphi(y), \tag{8}$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция от y. Функция (8) удовлетворяет соотношению (5). Чтобы имело место и соотношение (6), надо подобрать $\varphi(y)$ так, чтобы было

$$\left[\int P(x,y)\,dx+\varphi(y)\right]'_y=Q(x,y),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx+\varphi'(y)=Q(x,y),$$

или, наконец,

$$\varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx. \tag{9}$$

Обозначим правую часть равенства (9) через M. Имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right].$$

Согласно теореме пункта 5

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P(x, y)\,dx\right].$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial x}\int P(x, y)\,dx = P(x, y).$$

Поэтому

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

и в силу (7) $\dfrac{\partial M}{\partial x} = 0$, т. е. требуемую функцию найти можно.

Тем самым получена следующая теорема.

Теорема. *Выражение* (2) *есть полный дифференциал тогда и только тогда, когда выполнено* (7).

При наличии условия (7) из хода доказательства полученной здесь теоремы следует способ фактического построения полного дифференциала.

Пример. Для выражения

$$(3x^2y^2 + \cos x)\,dx + \left(2x^3y - \frac{1}{y}\right)dy \tag{10}$$

$$P(x, y) = 3x^2y^2 + \cos x, \qquad Q(x, y) = 2x^3y - \frac{1}{y}$$

и потому

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y.$$

т. е. (7) выполнено. Следовательно, согласно установленной теореме выражение (10) есть полный дифференциал некоторой функции. Найдем эту функцию. Имеем:

$$\int (3x^2y^2 + \cos x)\,dx = x^3y^2 + \sin x + \varphi(y),$$

$$\varphi'(y) = 2x^3y - \frac{1}{y} - 2x^3y = -\frac{1}{y},$$

откуда:

$$\varphi(y) = -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C.$$

Окончательно:

$$F(x, y) = x^3y^2 + \sin x - \ln|y| + C,$$

где C — произвольная постоянная.

§ 30. Экстремум функций двух переменных

Ниже в этой главе под окрестностью точки плоскости понимается внутренность любого прямоугольника, содержащего эту точку.

1. Необходимые условия существования экстремума. Понятие максимума и минимума можно распространить и на функции нескольких переменных (здесь для случая двух переменных).

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум (минимум), если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности и отличных от M_0 выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \qquad (f(x_0, y_0) < f(x, y))$$

или

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) < 0, \qquad (\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0).$$

Теорема (необходимые условия существования экстремума). *Если функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум и в этой точке существуют частные производные z_x и z_y, то*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Доказательство. Из определения экстремума следует, что функция $f(x, y_0)$, рассматриваемая как функция одной переменной x, при $x = x_0$ также имеет экстремум. Поэтому (см. § 18, п. 2) $f'_x(x_0, y_0) = 0$. Аналогично получаем равенство $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Примечание. Приведенные условия существования экстремума не являются достаточными, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 2. $z = x^3 + y^3$, $z'_x = 3x^2$, $z'_y = 3y^2$. Производные равны нулю в точке $(0; 0)$, но экстремума эта функция в точке $(0; 0)$ не имеет, так как в любой окрестности этой точки она принимает значения разных знаков, а в самой точке $(0; 0)$ $z = 0$.

2. Достаточные условия существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума для функций нескольких переменных имеют более сложный вид, чем для функций одной переменной. Приведем эти условия для случая двух переменных без доказательства (см. [8]).

Теорема (достаточные условия существования экстремума). *Пусть функция $f(x, y)$, непрерывная вместе со своими частными производными первого и второго порядков в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, удовлетворяет условиям*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Обозначим: $A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$,

$$C = f''_{y^2}(x_0, y_0), \qquad D = AC - B^2.$$

Тогда:

1) *если* $D > 0$, *то в точке* M_0 *функция* $f(x, y)$ *имеет экстремум, а именно максимум при* $A < 0$ *и минимум при* $A > 0$;

2) *если же* $D < 0$, *то в точке* M_0 *функция* $f(x, y)$ *экстремума не имеет.*

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$. Ее частные производные $z'_x = 3x^2 - 3y$, $z'_y = 3y^2 - 3x$ обращаются в нуль в точках $M_0(0; 0)$ и $M_1(1; 1)$. Ее вторые производные равны $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$. В точке M_0 имеем: $D = -9 < 0$, следовательно, экстремума в этой точке нет. В точке M_1 имеем: $D = 27 > 0$, причем $A = 6 > 0$, следовательно, в точке M_1 — минимум.

Примечание. Отметим, что в случае $D = 0$ экстремум может быть, но его может и не быть.

Пример 2. $z = x^3 + y^3$. В точке $(0; 0)$, где $D = 0$, эта функция, как показана выше (см. п. 1), экстремума не имеет.

Пример 3. $z = x^4 + y^4$. В точке $(0; 0)$, где $D = 0$, эта функция имеет минимум, потому что в любой окрестности этой точки данная функция положительна, а в самой точке $(0; 0)$ $z = 0$.

Задача. В химической реакции участвуют три вещества с концентрациями x, y и z. Скорость реакции v в любой момент времени выражается законом

$$v = kx^2yz.$$

Найти концентрации x, y и z, при которых скорость v течения реакции максимальна.

Решение. Пусть $x + y + z = 100$ (%). Тогда:

$$z = 100 - x - y$$

и

$$v = kx^2y(100 - x - y). \tag{1}$$

Найдем частные производные функции v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = k(200xy - 3x^2y - 2xy^2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = k(100x^2 - x^3 - 2x^2y).$$

Приравнивая полученные выражения к нулю, приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 200xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ 100x^2 - x^3 - 2x^2y = 0. \end{cases}$$

Так как значения $x = 0$ и $y = 0$ максимума функции (1) не дают, то сводим оба уравнения сокращением к виду:

$$\begin{cases} 200 - 3x - 2y = 0, \\ 100 - x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x = 50$, $y = 25$. Тогда $z = 25$. Легко проверить, что в точке $M_0(50, 25)$ $D > 0$ и $A < 0$.

Следовательно, при концентрациях $x = 50\,\%$, $y = 25\,\%$ и $z = 25\,\%$ скорость v течения реакции максимальна.

3. Метод наименьших квадратов. В естествознании приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основе опыта и наблюдений. Один из наилучших методов получения таких формул — это способ *наименьших квадратов*. Изложим идею этого способа, ограничиваясь случаем линейной зависимости двух величин.

Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами x и y (например, температурой и удлинением металлического стержня). Производим соответствующие измерения (например, n измерений) и результаты измерений сводим в таблицу:

x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$	y_n

(1)

Будем рассматривать x и y как прямоугольные координаты точек на плоскости. Предположим, что точки $(x_k;\, y_k)$, $k = 1, \ldots, n$, группируются вдоль некоторой прямой линии (рис 90). Естественно в этом случае считать, что между x и y существует приближенная линейная зависимость, т. е.

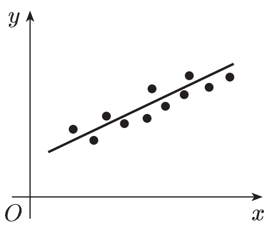

Рис. 90

$$y = ax + b \tag{2}$$

Назовем *уклонением* (или *отклонением*) разность между точным значением функции (2) в точке x_k и соответствующим значением y_k из таблицы (1): $\varepsilon_k = ax_k + b - y_k$. Сумма квадратов уклонений — функция величин a и b:

$$U(a,\, b) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2.$$

В методе наименьших квадратов на величины a и b накладывается условие — они должны доставлять минимум сумме квадратов уклонений $U(a, b)$. Требуется найти a и b, удовлетворяющие этому условию. Для этого (см. п. 1) необходимо, чтобы

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 2\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)\,x_k = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2b\sum_{k=1}^{n} x_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = 2\sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k) = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k + 2bn - 2\sum_{k=1}^{n} y_k = 0.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k + bn = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k. \end{cases} \tag{3}$$

Это — окончательный вид так называемой нормальной системы способа наименьших квадратов. Пусть $a = a_0$, $b = b_0$ — решение системы (3). Можно доказать, что a_0 и b_0 доставляют величине $U(a, b)$ минимум. Функция (2) при $a = a_0$ и $b = b_0$ дает эмпирическую формулу $y = a_0 x + b_0$.

Пример. Результаты измерения величин x и y даны в таблице.

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y = ax + b$, способом наименьших квадратов определить коэффициенты a и b. Здесь $n = 5$,

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 25, \qquad \sum_{k=1}^{5} x_k = 5, \qquad \sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 16{,}5, \qquad \sum_{k=1}^{5} y_k = 8,$$

и нормальная система (3) принимает вид:

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16,5, \\ 5a + 5b = 8. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $a = 0{,}425$, $b = 1{,}175$. Поэтому $y = 0{,}425x + 1{,}175$.

§ 31. Скалярное поле, его лапласиан

1. Скалярное поле, его задание в различных системах координат. Величины, которые полностью определяются заданием их численных значений, называются *скалярными*. Скалярными величинами, например, являются длина, площадь, объем, масса, температура тела и др.

Если каждой точке M пространства или некоторой его части V поставлено в соответствие определенное значение u некоторой скалярной физической величины, то говорят, что в V определено *скалярное поле* этой величины, т. е. функция точки M: $u = u(M)$. Эту функцию называют *функцией поля* или просто *полем*.

Пример. u может быть температурой, давлением газа и т. д.

Если величина $u = u(M)$ не зависит от времени t, то скалярное поле называется *стационарным*.

Если в пространстве ввести прямоугольную систему координат $Oxyz$, то точка M в этой системе будет иметь определенные координаты x, y, z и скалярная величина u станет функцией этих координат: $u = u(x, y, z)$. Можно ввести в пространстве и другие системы координат, например цилиндрическую и сферическую.

В цилиндрической системе координат положение точки M пространства определяется полярными координатами r и φ точки M' — проекции точки M на плоскость xOy и аппликатой z самой точки M (рис. 91). Числа r, φ, z называются *цилиндрическими координатами* точки M, причем $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, z — любое действительное число.

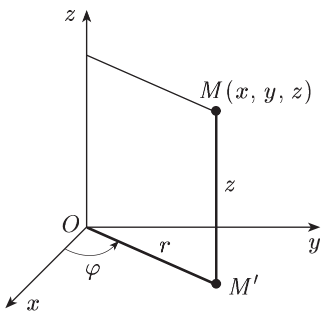

Рис. 91

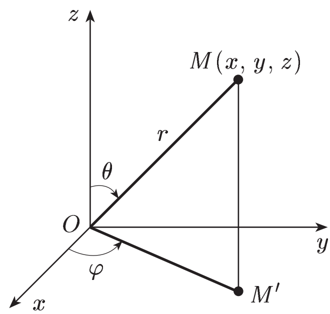

Рис. 92

Из рисунка 91 видно, что для точки $M(x, y, z)$ $(M(r, \varphi, z))$ справедливы соотношения

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z \tag{1}$$

и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

В сферической системе координат положение точки M в пространстве определяется ее расстоянием r от начала O, углом φ между положительным направлением оси Ox и проекцией отрезка OM на плоскость xOy, углом θ между положительным направлением оси Oz и отрезком OM (рис. 92). Числа r, φ и θ называются *сферическими координатами* точки M, при этом $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Из рисунка 92 видно, что для точки $M(x, y, z)$ $(M(r, \varphi, \theta))$ справедливы соотношения

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta$$

и

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

В цилиндрической системе координат функция поля имеет вид $u = u(r, \varphi, z)$, в сферической системе координат эта функция имеет вид $u = u(r, \varphi, \theta)$.

2. Лапласиан скалярного поля. Введем для скалярного поля $u = u(x, y, z)$ дифференциальный оператор второго порядка

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

называемый *оператором Лапласа* или *лапласианом*.

Найдем выражение лапласиана в цилиндрических координатах.

Подставляя в функцию $u = u(x, y, z)$ вместо x и y их выражения согласно формулам (1), получим $u = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. Выразим теперь вторые производные функции u по x и по y через производные по r и φ.

По правилу дифференцирования сложной функции (§ 29, п. 3)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{3}$$

Но из формул (2)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

и

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Или, заменяя x и y по формулам (1),

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Подставляя это в (3), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}. \end{aligned} \tag{4}$$

Перейдем к отысканию вторых производных. Согласно правилу дифференцирования сложной функции и с учетом равенства (4) имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi\,\partial r}\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r^2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \varphi}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}, \tag{7}$$

Умножим обе части равенства (6) на $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi$, а обе части равенства (7) на $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\dfrac{\sin\varphi}{r}$ и сложим. Получим (с учетом (5) и после приведения подобных членов):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}. \tag{8}$$

Совершенно аналогично найдем, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - 2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Итак, выражение оператора Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Последнее выражение часто бывает удобно записать и в таком виде

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В случае сферических координат непосредственное преобразование производных функции $u(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$ очень громоздко и потому его проводить не будем, а выпишем окончательное выражение оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Эту формулу часто записывают в виде

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

§ 32. Двойной интеграл

1. Задача об объеме цилиндроида. Пусть дана функция $f(x, y)$, непрерывная и неотрицательная в области G плоскости xOy. Найти объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью G и с боков прямой цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит замкнутый контур, ограничивающий область G (рис. 93) *).

---

*) Т. е. поверхностью, описываемой прямой, перпендикулярной плоскости xOy и пересекающей указанный замкнутый контур (он называется *направляющей* этой поверхности).

Такое тело для краткости будем называть *цилиндроидом*. В частности, когда верхнее основание цилиндроида есть плоскость, параллельная нижнему основанию, то цилиндроид называется цилиндром. Примером цилиндра служит круговой цилиндр.

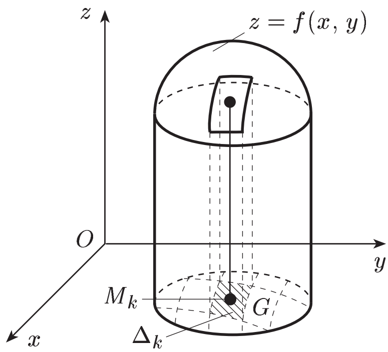

Рис. 93

Для нахождения объема V данного цилиндроида разобьем область G произвольным образом на n частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, площади которых обозначим соответственно через $\Delta w_1, \Delta w_2, \ldots, \Delta w_n$. В каждой из этих частичных областей Δ_k выберем произвольную фиксированную точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ и построим прямой цилиндрический столбик с основанием Δ_k и высотой $f(\xi_k, \eta_k)$. Объем такого столбика равен $f(\xi_k, \eta_k)\Delta w_k$.

Сумма объемов таких цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего объем данного цилиндроида. Следовательно,

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta w_k.$$

Эта сумма будет тем точнее выражать искомый объем V, чем меньше будет каждый из диаметров*) частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Поэтому за объем V естественно принять

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta w_k,$$

где λ — наибольший из диаметров частичных областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ $\ldots, \Delta_n$.

2. Определение двойного интеграла. В § 23 было показано, что к составлению выражения одного и того же вида $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_n$ для функции одной переменной приводят самые разнообразные задачи. Аналогично к составлению выражения вида

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta w_k \tag{1}$$

*) Под *диаметром фигуры* понимается наибольшее из расстояний между точками этой фигуры.

для функции двух переменных также приводят самые разнообразные задачи, а не только задача об объеме цилиндроида. Поэтому в выражении (1) $f(x, y)$ не обязательно неотрицательна.

Определение. Если существует предел (1), не зависящий от способа разбиения области G на частичные области Δ_k и выбора точек (ξ_k, η_k) в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается символом

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dw = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta w_k.$$

Функция $f(x, y)$ в этом случае называется *интегрируемой* в области G. При этом $f(x, y)$ называется *подынтегральной функцией*, dw — *элементом площади*, G — *областью интегрирования*, x и y — *переменными интегрирования*, сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta w_k$ — *интегральной суммой*.

Замечание. Для двойного интеграла используется также обозначение $\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy$.

Справедлива следующая теорема (она доказывается в более полных курсах математического анализа, см., например, [8]):

Теорема. *Если область G с кусочно гладкой*) границей Γ ограничена и замкнута**), а функция $f(x, y)$ непрерывна в области G, то эта функция интегрируема в области G.*

В дальнейшем будем предполагать, что условия этой теоремы выполнены.

Имея в виду задачу об объеме цилиндроида и определение двойного интеграла, заключаем, что искомый объем

$$V = \iint\limits_G f(x, y)\, dw \qquad (f(x, y) \geqslant 0 \text{ в } G).$$

Из этой формулы следует, что $\iint\limits_G dw$ численно равен площади области G, т. е.

$$S_G = \iint\limits_G dw.$$

---

*) Кривая называется *гладкой*, если она непрерывна и в каждой точке имеет касательную, непрерывно меняющую свое положение от точки к точке. Кривая, состоящая из конечного числа гладких кривых, называется *кусочно гладкой*.

**) Т. е. граница Γ причисляется к области G.

3. Свойства двойного интеграла. Эти свойства, как и их доказательства, аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла.

Поэтому приведем их без доказательства.

1. *Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла*:

$$\iint\limits_G cf(x, y)\,dw = c\iint\limits_G f(x, y)\,dw.$$

2. *Двойной интеграл от суммы двух функций равен сумме двойных интегралов от этих функций*:

$$\iint\limits_G [f_1(x, y) + f_2(x, y)]\,dw = \iint\limits_G f_1(x, y)\,dw + \iint\limits_G f_2(x, y)\,dw.$$

Примечание. Свойство 2 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

3. *Если область G разбита на две области G_1 и G_2, то*

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dw = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\,dw + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\,dw.$$

4. *Двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь этой области, т. е.*

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dw = f(\xi, \eta)\,S_G$$

(теорема о среднем).

4. Вычисление двойных интегралов. Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G f(x, y)\,dw$ от непрерывной функции $f(x, y)$.

Случай прямоугольной области. Пусть область G — прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ (кратко $[a, b; c, d]$). Разобьем область G на частичные области прямыми, параллельными координатным осям (рис. 94) и проходящими через точки $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_{m-1}$, $x_m = b$ оси Ox и точки $y_0 = c$, $y_1, \ldots, y_{p-1}$, $y_p = d$ оси Oy. Тогда область G разобьется на прямоугольники, наибольший из диаметров которых обозначим через λ.

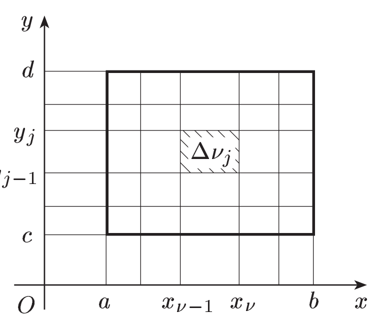

Рис. 94

Пусть $\Delta_{\nu j}$ — прямоугольник, являющийся пересечением ν столбца и j горизонтальной полосы. Площадь его будет $\Delta w_{\nu j} = \Delta x_\nu \, \Delta y_j$, где $\Delta x_\nu = x_\nu - x_{\nu-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Выберем точку $(\xi_{\nu j}, \eta_{\nu j}) \in \Delta_{\nu j}$ так, чтобы $\xi_{\nu j} = x_{\nu-1}$, $j = 1, \ldots, p$. Тогда интегральная сумма будет:

$$\sigma = \sum_{\nu j} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}) \, \Delta x_\nu \, \Delta y_j, \tag{2}$$

где сумма распространена по всем прямоугольникам, т. е. по всем значениям ν и j, $\nu = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, p$.

Сумма вида (2) с двумя индексами суммирования называется *двойной интегральной суммой*. Для ее вычисления можно сначала произвести суммирование по j при фиксированном ν, т. е. сложить слагаемые, отвечающие одному (любому) столбцу, а затем результаты просуммировать по ν. Тогда получим:

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}) \, \Delta x_\nu \, \Delta y_j \right) = \sum_{\nu=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}) \, \Delta y_j \right) \Delta x_\nu .$$

Разумеется, такой переход от двойной суммы к так называемой *повторной* можно было бы осуществить и вторым способом: первое, внутреннее суммирование произвести по ν, а второе, внешнее — по j.

Используя одно из свойств определенного интеграла (§ 24, п. 1, свойство 4) и теорему о среднем (§ 24, п. 4), будем иметь:

$$\int_c^d f(x_{\nu-1}, y) \, dy = \sum_{j=1}^{p} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_{\nu-1}, y) \, dy = \sum_{j=1}^{p} f(x_{\nu-1}, \eta_{\nu j}) \, \Delta y_j .$$

Следовательно,

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{m} \Phi(x_{\nu-1}) \, \Delta x_\nu, \tag{3}$$

где

$$\Phi(x_{\nu-1}) = \int_c^d f(x_{\nu-1}, y) \, dy. \tag{4}$$

Перейдя в (3) к пределу при $\lambda \to 0$ (при $\lambda \to 0$ $\max \Delta x_\nu \to 0$)*), будем иметь:

$$\iint_G f(x, y) \, dw = \int_a^b \Phi(x) \, dx,$$

или с учетом (4):

$$\iint_G f(x, y) \, dw = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx. \tag{5}$$

---

*) Как и прежде, λ — наибольший из диаметров частичных областей.

Обычно формулу (5) записывают в виде

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dw = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{6}$$

Выражение, стоящее в правой части последней формулы, называется *повторным интегралом*. Для его вычисления надо последовательно взять два обычных интеграла: сначала *внутренний интеграл* $\int\limits_c^d f(x, y)\,dy$, в котором x считается постоянным, а затем полученное выражение (оно зависит от x) проинтегрировать по x от a до b — *внешний интеграл*.

Аналогично при втором способе перехода от двойной интегральной суммы к повторной получили бы

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dw = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx. \tag{7}$$

Таким образом, двойной интеграл равен соответствующему повторному интегралу.

П р и м е р. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_G (x^2 + y^2)\,dw,$$

где G — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

По формуле (6) имеем:

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x^2 + y^2)\,dy = \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\,x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Этот же двойной интеграл можно вычислить и по формуле (7).

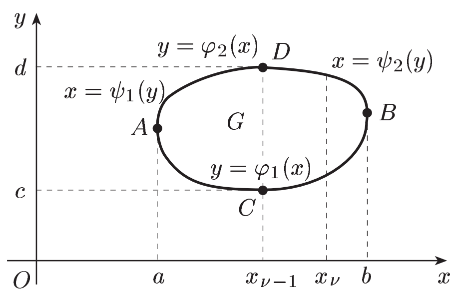

Рис. 95

С л у ч а й п р о и з в о л ь н о й о б л а с т и. Пусть теперь G — область в плоскости xOy, изображенная на рисунке 95. Тогда вывод предыдущего пункта переносится с небольшим изменением: вместо интеграла $\int\limits_c^d f(x_{\nu-1}, y)\,dy$ будем иметь интеграл

$$\int\limits_{\varphi_1(x_{\nu-1})}^{\varphi_2(x_{\nu-1})} f(x_{\nu-1}, y)\, dy.$$

Здесь

$$y = \varphi_1(x) \quad \text{и} \quad y = \varphi_2(x)$$

— уравнения нижней и верхней частей контура области G, на которые он делится точками A и B. Соответственно и окончательный результат взамен (6) запишется в виде

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dw = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{8}$$

Таким образом, пределы интегрирования во внутреннем интеграле в общем случае переменные. Пределы же у внешнего интеграла постоянные.

Можно интегрировать и в другом порядке, сначала по x, а затем по y. Тогда вместо (7) получается формула

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dw = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx, \tag{9}$$

где

$$x = \psi_1(y) \quad \text{и} \quad x = \psi_2(y)$$

— уравнения левой и правой частей контура области G (рис. 95), на которые он делится точками C и D.

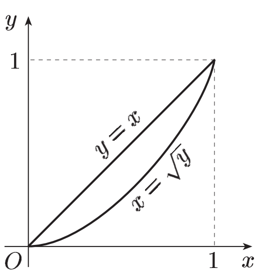

Рис. 96

Формула (8) ((9)) получена при условии, что область G пересекается прямыми, параллельными оси Oy (Ox), не более чем в двух точках. Если это условие нарушено, то область G разбивают на части.

Пример Найти

$$\iint\limits_G (x + y)\, dx\, dy$$

по области G, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$ (рис. 96).

Интегрируя сначала по y, а потом по x, получаем:

$$\iint\limits_G (x + y)\, dx\, dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x + y)\, dy = \int\limits_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Правильность результата можно проверить, изменив порядок интегрирования.

5. Двойной интеграл в полярных координатах. Пусть рассматривается двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)\,dw$ от непрерывной в области G функции $f(x,y)$, где G — область на плоскости xOy, изображенная на рисунке 97. Как известно, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Разобьем область G на частичные области посредством координатных линий полярной системы, т. е. линий $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ (рис. 97).

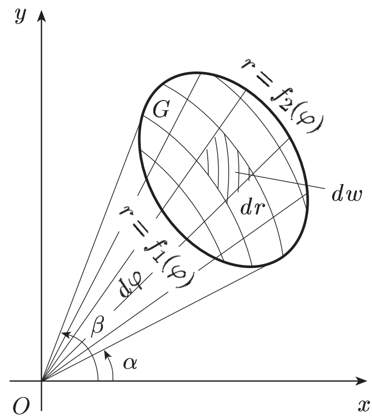

Рис. 97

Выделим частичную область, для которой центральный угол $d\varphi$ и боковая сторона dr, а радиус, соответствующий нижнему основанию этой области, r (значит, нижнее основание $r\,d\varphi$). Эту частичную область, представляющую собой криволинейный четырехугольник, можно принять приближенно за прямоугольник со сторонами dr и $r\,d\varphi$ *). Тогда $dw = r\,dr\,d\varphi$ и мы будем иметь:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dw = \iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \qquad (10)$$

Переходя в интеграле справа в равенстве (10) к повторному (это делается аналогично (9)), получим:

$$\iint\limits_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr, \qquad (11)$$

где смысл пределов интегрирования показан на рисунке 97.

З а м е ч а н и е. Если подынтегральная функция или уравнение границы области интегрирования содержит сумму $x^2 + y^2$, то в большинстве

*) Это будет замена с точностью до малых высшего порядка, так как площадь криволинейного четырехугольника будет

$$\frac{(r+dr)^2\,d\varphi}{2} - \frac{r^2\,d\varphi}{2} = r\,dr\,d\varphi + \frac{(dr)^2\,d\varphi}{2}.$$

случаев упрощение интеграла достигается преобразованием его к полярным координатам, так как данная сумма в полярных координатах получает весьма простой вид:

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2.$$

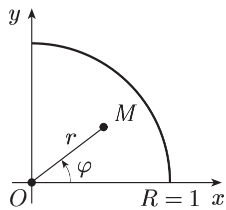

Рис. 98

П р и м е р. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_G \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

где G — первая четверть круга радиуса $R = 1$ с центром в начале координат (рис. 98).

Так как $\sqrt{x^2+y^2} = r$, то, применяя формулы (10) и (11), получим:

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 dr = \frac{\pi}{2}.$$

§ 33. Криволинейный интеграл

1. Определение криволинейного интеграла по координатам и его свойства. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \in [\alpha; \beta]$) — гладкая *) кривая L с выбранным направлением (такую линию для краткости будем называть *путем*) и $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — пара функций, непрерывных на кривой **) L.

Имеем:

$$dx = x'(t)\,dt, \qquad dy = y'(t)\,dt.$$

О п р е д е л е н и е. Под *криволинейным интегралом* от функции $P(x, y)$ ($Q(x, y)$) по кривой L по переменной $x(y)$ понимается интеграл

$$\int\limits_L P(x, y)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta P(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt$$

$$\left(\int\limits_L Q(x, y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta Q(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt\right).$$

---

*) Т. е. эта кривая непрерывна и в каждой точке имеет касательную, непрерывно меняющую свое положение от точки к точке. Для такой кривой функции $x(t)$, $y(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$ непрерывны и имеют на нем непрерывные производные, причем $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$ на $[\alpha; \beta]$.

**) Непрерывность $f(x, y)$ вдоль кривой L означает, что в любой точке $(x_0; y_0)$ этой кривой $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0$, причем $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ также точка кривой L.

Сумму интегралов $\int\limits_L P(x, y)\,dx$ и $\int\limits_L Q(x, y)\,dy$ называют криволинейным интегралом (общего вида) и обозначают

$$\int\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (1)$$

В силу предыдущего имеем формулу

$$\int\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt.$$

Из определения криволинейного интеграла непосредственно вытекают следующие свойства:

1. *При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл изменяет свой знак на обратный*. Записывается это так: $\int\limits_{L^-} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{L^+} P\,dx + Q\,dy$ *), где через L^- и L^+ обозначена линия L при двух ее взаимно противоположных направлениях.

2. *Если путь интегрирования L состоит из двух частей*: $L = L_1 + L_2$, то

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{L_1} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{L_2} P\,dx + Q\,dy.$$

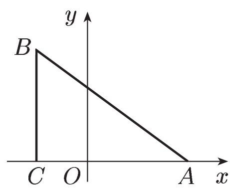

Рис. 99

Пример. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AB} 2xy\,dx + x\,dy,$$

где точки $A(2; 0)$ и $B(-1; 3)$ соединены: 1) прямой AB; 2) ломаной ACB (рис. 99).

Решение. 1) Вдоль прямой AB имеем $y = 2 - x$, $dy = -dx$, и потому $I = \int\limits_2^1 [2x(2 - x) - x]\,dx = \frac{3}{2}$.

2) Вдоль ломаной ACB на участке AC имеем $y = 0$ и $dy = 0$; на участке CB имеем $x = -1$, $dx = 0$. Поэтому

$$I = \int\limits_{AC} 2xy\,dx + x\,dy + \int\limits_{CB} 2xy\,dx + x\,dy = -\int\limits_0^3 dy = -3.$$

2. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Пусть $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ — непрерывные функции в области G. Рассмотрим две произвольные точки A и B этой области. Эти точки можно соединить различными

*) Для сокращения записи пишем P и Q вместо соответственно $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

путями (A — начало пути, B — конец пути), лежащими в области G, вдоль которых значения криволинейного интеграла (1), вообще говоря, различны. Так, рассмотренный выше пример (см. п. 1) показывает, что криволинейный интеграл $\int\limits_L 2xy\,dx + x\,dy$ зависит от пути интегрирования, т. е. зависит от вида линии, соединяющей точки A и B. Наоборот, как легко проверить, криволинейный интеграл $\int\limits_L 2xy\,dx + x^2\,dy$ вдоль тех же линий, что и в указанном примере, соединяющих точки $A(2;0)$ и $B(-1;3)$, дает одно и то же значение, равное 3.

Если криволинейный интеграл (1) по любому из путей, лежащих в G и соединяющих ее точки A и B, принимает одно и то же значение, то говорят, что он *не зависит от пути интегрирования в* G.

В этом случае нет необходимости указывать путь интегрирования, а достаточно отметить лишь его начальную точку $A(x_1;y_1)$ и его конечную точку $B(x_2;y_2)$ пути. Поэтому здесь употребляется обозначение

$$\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P\,dx + Q\,dy. \tag{2}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема. *Если в области G выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом*) некоторой функции $u = u(x,y)$, т. е.*

$$du = P\,dx + Q\,dy \qquad ((x;y) \in G), \tag{3}$$

то криволинейный интеграл (1) не зависит от пути интегрирования в области G.

Доказательство. Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(t \in [\alpha;\beta])$, L — произвольный путь в области G, соединяющий точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, причем

$$\varphi(\alpha) = x_1, \quad \psi(\alpha) = y_1; \qquad \varphi(\beta) = x_2, \quad \psi(\beta) = y_2.$$

Из формулы (3) имеем:

$$P\,dx + Q\,dy = du(\varphi(t), \psi(t)).$$

Отсюда получаем:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \int\limits_\alpha^\beta du(\varphi(t), \psi(t)) = u(\varphi(t), \psi(t))\Big|_\alpha^\beta =$$
$$= u(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - u(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = u(B) - u(A). \tag{4}$$

Таким образом, значение интеграла (4) одно и то же при любом выборе функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и, следовательно, этот интеграл не зависит от вида пути, соединяющего точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$.

*) См. § 29, п. 6.

Следствие 1. *Если выполнено соотношение* (3), *то в силу* (4) *имеем*:

$$\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P\,dx+Q\,dy = u(x_2;y_2)-u(x_1;y_1) \tag{5}$$

(*обобщенная формула Ньютона–Лейбница*).

Следствие 2. *Если выражение* $P\,dx+Q\,dy$ *есть полный дифференциал и путь интегрирования* L *замкнутый, то* $\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy = 0$ (кружок при интеграле обозначает интегрирование вдоль замкнутого пути L).

Пример. Найти

$$I = \int\limits_{(1;2)}^{(3;4)} y\,dx+x\,dy.$$

Здесь $y\,dx+x\,dy$ — полный дифференциал, так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (см. § 29, п. 6). Имеем $y\,dx+x\,dy=d(xy)$.

Поэтому по формуле (5)

$$I = \int\limits_{(1;2)}^{(3;4)} d(xy) = xy\Big|_{(1;2)}^{(3;4)} = 3\cdot 4-1\cdot 2=10.$$

Упражнения

Найти область существования следующих функций.

1. $u=4-x+2y$. [Вся плоскость xOy.]

2. $u=\dfrac{3}{x^2+y^2}$. [Вся плоскость xOy, кроме точки $(0;0)$.]

3. $u=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$. [I и III квадранты: $x>0$, $y>0$ и $x<0$, $y<0$.]

4. $u=\arccos(x+y)$. [Полоса $-1\leqslant x+y\leqslant 1$.]

5. $u=\ln(x+y)+x-y+1$. [Полуплоскость $x+y>0$.]

6. $u=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. [Круг $x^2+y^2<4$.]

7. $u=\arcsin(x^2+y^2)$. [Круг $x^2+y^2\leqslant 1$.]

8. $u=\dfrac{xy}{x-y}$. [Вся плоскость xOy, кроме прямой $y=x$.]

9. $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$. [Вся плоскость xOy, кроме осей Ox и Oy.]

10. $u=\ln x\cdot\ln y$. [I квадрант $x>0$, $y>0$.]

11. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$. [I квадрант $x>0$, $y>0$.]

Найти частные производные первого порядка от следующих функций.

12. $u=x^3+3x^2y-y^3$. [$u'_x=3x^2+6xy$, $u'_y=3x^2-3y^2$.]

13. $u = x^3 + 3x^2y - y^2$. $\quad [u'_x = 3x^2 + 6xy,\ u'_y = 3x^2 - 2y.]$

14. $u = \sqrt{x + 3y}$. $\quad \left[u'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3y}},\quad u'_y = \dfrac{3}{2\sqrt{x+3y}}.\right]$

15. $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$. $\quad \left[u'_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2},\quad u'_x = \dfrac{x}{x^2+y^2}.\right]$

16. $u = \operatorname{arctg}(2x - y)$. $\quad \left[u'_x = \dfrac{2}{1+(2x-y)^2},\quad u'_y = -\dfrac{1}{1+(2x-y)^2}.\right]$

17. $u = (1-x)^{y^2}$ $\quad [u'_x = -y^2(1-x)^{y^2-1},\quad u'_y = 2y(1-x)^{y^2}\ln(1-x).]$

18. $u = (1+xy)^y$. $\quad \left[u'_x = \dfrac{y^2u}{1+xy},\quad u'_y = u\left[\ln(1+xy) + \dfrac{xy}{1+xy}\right].\right]$

19. $u = x^3y^2 + 2x\ln y + x^y$

$$\left[\begin{aligned} &u'_x = 3x^2y^2 + 2\ln y + yx^{y-1},\\ &u'_y = 2x^3y + \frac{2x}{y} + x^y\ln x. \end{aligned}\right]$$

20. $u = x^3\sin y + y^4$. $\quad [u'_x = 3x^2\sin y,\quad u'_y = x^3\cos y + 4y^3.]$

21. $u = x^6 - y^4$. $\quad [u'_x = 6x^5,\quad u'_y = -4y^3.]$

В следующих примерах для функции u найти u'_x и u'_y в указанной точке.

22. $u = \dfrac{x+y}{x-y}$; $A(2;1)$. $\quad$ [В точке $A(2;1)$ $u'_x = -2,\quad u'_y = 4.$]

23. $u = \dfrac{1-xy}{1+xy}$; $A(0;1)$. $\quad$ [В точке $A(0;1)$ $u'_x = -2,\quad u'_y = 0.$]

24. $u = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$; $B(1;1)$. $\quad$ $\left[\text{В точке } B(1;1)\ u'_x = \dfrac{2}{3},\quad u'_y = \dfrac{3}{2}.\right]$

25. При лечении некоторого заболевания одновременно назначаются два препарата. Реакция на инъекцию x ед. первого препарата и y ед. второго препарата выражается функцией $z = x^2y^2(a - x)(b - y)$. Какое количество y второго препарата вызывает максимальную реакцию при фиксированном количестве x первого препарата? $\quad \left[\dfrac{2b}{3}.\right]$

Найти полные дифференциалы первого порядка от функций.

26. $u = \dfrac{5x+3y}{9x-2y}$. $\quad \left[du = \dfrac{37(-y\,dx + x\,dy)}{(9x-2y)^2}.\right]$

27. $u = \ln(3x + 2y)$. $\quad \left[du = \dfrac{3dx + 2dy}{3x+2y}.\right]$

28. $u = e^{2x}\sin 3y$. $\quad [du = e^{2x}(2\sin 3y\,dx + 3\cos 3y\,dy).]$

29. $u = xe^{-xy}$. $\quad [du = e^{-xy}[(1-xy)\,dx - x^2\,dy].]$

30. $u = x^2 + 3xy$. $\quad [du = (2x+3y)\,dx + 3x\,dy.]$

31. $u = x^2 - 2xy - y^2$. $\quad [du = 2[(x-y)\,dx - (x+y)\,dy].]$

32. $u = x^y$. $\left[du = x^y\left[\frac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy\right].\right]$

33. $u = \frac{x}{y}$. $\left[du = \frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy.\right]$

34. $u = \ln(xy)$. $\left[du = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.\right]$

35. $u = x^2 + xy^2 + \sin y$. $[du = (2x + y^2)\,dx + (2xy + \cos y)\,dy.]$

В следующих упражнениях считать, что $x = x(t)$, $y = y(t)$, и найти $\frac{du}{dt}$.

36. $u = ye^x + 1$. $\left[\frac{du}{dt} = e^x\left(y\,\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right).\right]$

37. $u = \cos\frac{x}{y}$. $\left[\frac{du}{dt} = \frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\,\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\right).\right]$

38. $u = \ln(4 + x^2 + y^2)$. $\left[\frac{du}{dt} = \frac{2}{4 + x^2 + y^2}\left(x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}\right).\right]$

Найти $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, считая, что $x = x(t, \tau)$, $y = y(t, \tau)$.

39. $u = e^{y^2/x}$.
$$\left[\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{y}{x}\,e^{y^2/x}\left(-\frac{y}{x}\,\frac{\partial x}{\partial t} + 2\,\frac{\partial y}{\partial t}\right),\\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{y}{x}\,e^{y^2/x}\left(-\frac{y}{x}\,\frac{\partial x}{\partial \tau} + 2\,\frac{\partial y}{\partial \tau}\right).\end{aligned}\right]$$

40. $u = x\,\mathrm{tg}\,y$.
$$\left[\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{tg}\,y\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{\cos^2 y}\,\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{1}{\cos y}\left(\sin y\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{x}{\cos y}\,\frac{\partial y}{\partial t}\right),\\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{\cos y}\left(\sin y\,\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{x}{\cos y}\,\frac{\partial y}{\partial \tau}\right).\end{aligned}\right]$$

41. Найти $\frac{dy}{dx}$ от функций, заданных неявно:

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; б) $xy - \ln y = 0$; в) $ye^x + e^y = 0$.

$\left[\text{а) } \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x};\quad \text{б) } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - xy};\quad \text{в) } \frac{dy}{dx} = -\frac{ye^x}{e^x + e^y}.\right]$

Найти частные производные второго порядка от функций.

42. а) $u = x^3 - 4x^2y + 5y^2$. $[u''_{x^2} = 6x - 8y,\ u''_{xy} = -8x,\ u''_{y^2} = 10.]$

б) $u = e^x \ln y$. $\left[u''_{x^2} = e^x \ln y,\ u''_{xy} = \frac{e^x}{y},\ u''_{y^2} = -\frac{e^x}{y^2}.\right]$

43. $u = \sin(x + y)$. $[u''_{x^2} = u''_{xy} = u''_{y^2} = -\sin(x + y).]$

44. $u = x\,\mathrm{arctg}\,y$. $\left[u''_{x^2} = 0,\ u''_{xy} = \frac{1}{1 + y^2},\ u''_{y^2} = -\frac{2xy}{(1 + y^2)^2}.\right]$

45. $u = e^{-y/x}$.
$$\left[\begin{aligned}u''_{x^2} &= \frac{y}{x^3}\,e^{-y/x}\left(\frac{y}{x} - 2\right),\\ u''_{xy} &= \frac{1}{x^2}\,e^{-y/x}\left(1 - \frac{y}{x}\right),\quad u''_{y^2} = \frac{1}{x^2}\,e^{-y/x}.\end{aligned}\right]$$

Найти указанные частные производные третьего порядка от функций.

46. $u = x^5 + 3y^3 + 2x - y$. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = ?$ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = ?$ $\left[\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 60x^2;\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 18.\right]$

47. $u = \cos(x - y)$. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = ?$ $\left[\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = -\sin(x - y).\right]$

48. $u = \dfrac{y}{x} + 10$. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = ?$ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = ?$ $\left[\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = 0;\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = \dfrac{2}{x^3}.\right]$

49. $u = y\ln x$. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = ?$ $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = ?$ $\left[\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \dfrac{2y}{x^3};\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = 0.\right]$

Написать дифференциалы второго порядка для следующих функций.

50. $u = x^2 + y^2$. $[2(dx^2 + dy^2).]$

51. $u = x + xy + 1$. $[2dx\,dy.]$

52. $u = x\sin^2 y$. $[2\sin 2y\,dx\,dy + 2x\cos 2y\,dy^2.]$

53. $u = e^{x+y^2}$. $[e^{x+y^2}(dx^2 + 4y\,dx\,dy + (2 + 4y^2)\,dy^2).]$

54. Выяснить, какие из данных выражений являются полными дифференциалами:

$$(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy; \qquad \frac{2x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}\,dy; \qquad 2y\,dx - 2x\,dy.$$

[Первые два выражения являются полными дифференциалами, третье — нет.]

55. Найти функцию $F(x, y)$, если ее полный дифференциал

$$dF = x^2\,dx + y^2\,dy.$$

$\left[F(x, y) = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3) + C\right.$, где C — произвольная постоянная.$\left.\right]$

56. Проверить, является ли выражение $4(x^2 - y^2)(x\,dx - y\,dy)$ полным дифференциалом некоторой функции, и если да, то найти эту функцию.
[$F(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + C$, где C — произвольная постоянная.]

Исследовать на экстремум следующие функции.

57. $u = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$. $\left[u_{\min} = 422{,}25\right.$ в точке $\left.\left(\dfrac{17}{2}; -\dfrac{11}{2}\right).\right]$

58. $u = 2x^3 + xy^2 - 216x$.

[В точке $(-6; 0)$ функция имеет максимум ($u_{\max} = 864$); в точке $(6; 0)$ — минимум ($u_{\min} = -864$). В точках $(0; 6\sqrt{6})$ и $(0; -6\sqrt{6})$ функция не имеет экстремума.]

59. $u = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$. [$u_{\min} = -7$ в точке $(1; 2)$.]

60. $u = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$. [Экстремума нет.]

61. $u = xy(1 - x - y)$

$\left[u_{\max} = \dfrac{1}{27}\right.$ в точке $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$; в точках $(0; 0)$ $(1; 0)$ и $(0; 1)$ экстремума нет.$\left.\right]$

62. $u = x^3 - y^3 - 3xy$.

[$u_{\max} = 1$ в точке $(-1; 1)$, в точке $(0; 0)$ экстремума нет.]

63. $u = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$\left[u_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ в точке } \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right).\right]$

64. $u = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

[В точке $(0; 3)$ функция имеет максимум ($u_{\max} = 9$).]

65. $u = e^{x/2}(x + y^2)$.

$\left[\text{В точке } (-2; 0) \text{ функция имеет минимум } \left(u_{\min} = -\frac{2}{e}\right).\right]$

66. Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объема при данной сумме $12a$ всех его ребер. [Куб.]

67. Найти размеры открытого прямоугольного бассейна объема V, на облицовку которого нужно затратить минимум материала.

$\left[x = y = \sqrt[3]{2V},\ H = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \text{ где } x \text{ и } y \text{ размеры дна и } H \text{ — высота.}\right]$

68. В химической реакции участвуют три вещества с концентрациями x, y и z. Скорость реакции V в любой момент времени выражается законом $v = kxy^2z$.

Найти концентрации x, y и z, при которых скорость течения реакции максимальная. [$x = 25\,\%$, $y = 50\,\%$, $z = 25\,\%$.]

69. Полагая, что x и y связаны линейной зависимостью $y = ax + b$, определить коэффициенты a и b по способу наименьших квадратов, если данные опыта представлены в виде таблицы значений переменных x и y.

x	1	2	3	4	5
y	2,9	6,1	9,2	11,8	16

[$a = 3{,}19$; $b = -0{,}37$.]

70. Приводятся данные о внесении минеральных удобрений и урожае сахарной свеклы с гектара посева за 5 лет:

Год	1971	1972	1973	1974	1975
Минеральные удобрения, ц	4	5	6	8	9
Урожай с 1 га, т	20	24	29	35	50

Предполагая линейную зависимость урожайности от количества внесенных удобрений $y = ax + b$, найти по этим данным коэффициенты a и b, применяя способ наименьших квадратов. [$a \approx 5{,}4$; $b \approx -2{,}9$.]

71. Найти оператор Лапласа следующих скалярных полей:

а) $u = x^2 + y^2 - 5x + 2y + 1$; б) $u = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} + z$;

в) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$\left[\text{а) } \Delta u = 2; \quad \text{б) } \Delta u = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \text{в) } \Delta u = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\right]$

Вычислить интегралы.

72. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x 3\,dy.$ [6.] **73.** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (2x-y)\,dy.$ [0,9.]

74. $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,dx\,dy$, где D — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

75. $\iint\limits_D y\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями $y^2 = x$, $y = x-2$. $\left[\dfrac{9}{4}.\right]$

76. $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями $x+y=2$, $y=x$, $y=0$. $\left[\dfrac{2}{3}.\right]$

Поменять порядок интегрирования в интегралах.

77. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy.$ $\left[\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)\,dx.\right]$

78. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy.$ $\left[\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dx.\right]$

79. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$

$$\left[\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.\right]$$

80. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{y+2} f(x,y)\,dx.$

$$\left[\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_{x-2}^1 f(x,y)\,dy.\right]$$

Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы.

81. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где D — круг $x^2+y^2 \leqslant 1$. $[\pi(e-1).]$

82. $\iint\limits_D (x^2+y^2)^2\,dx\,dy$, где D — круг $x^2+y^2 \leqslant 4$. $\left[\dfrac{64}{3}\pi.\right]$

83. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, где область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 \leqslant 2x$. $\left[\dfrac{3}{2}\pi.\right]$

84. $\iint\limits_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, где D — четверть круга $x^2+y^2 \leqslant 1$, лежащая в первом квадранте. $\left[\dfrac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1).\right]$

Записать двойными интегралами и вычислить площади плоских фигур, ограниченных линиями (в задачах 89, 90 перейти к полярным координатам).

85. $x+y=2,\ x=0,\ y=0.$ $\left[2.\right]$

86. $y=x^2,\ 4y=x^2,\ x=\pm 2.$ $\left[4.\right]$

87. $y^2=4+x,\ x+3y=0.$ $\left[20\,\frac{5}{6}.\right]$

88. $x=4y-y^2,\ x+y=6.$ $\left[\frac{1}{6}.\right]$

89. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ (лемниската, рис. 100). $\left[a^2.\right]$

90. $x^3+y^3=xy$ (лист Декарта, рис. 101). $\left[\frac{1}{6}.\right]$

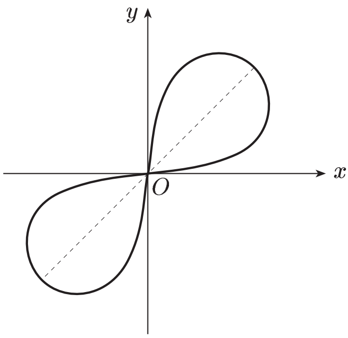

Рис. 100

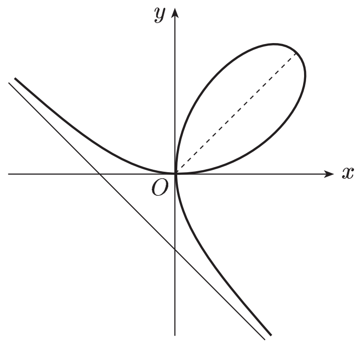

Рис. 101

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями (в задачах 94–97 перейти к полярным координатам).

91. $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$ $\left[\frac{1}{6}.\right]$

92. $z=1+x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$ $\left[\frac{5}{6}.\right]$

93. $z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$ $\left[\frac{1}{3}.\right]$

94. $z=x^2+y^2,\ x=1,\ y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$ $\left[\frac{2}{3}.\right]$

95. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$ $\left[\frac{88}{105}.\right]$

96. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=1,\ z=0.$ $\left[\frac{\pi}{2}.\right]$

97. $z=1-x^2-y^2,\ z=0.$ $\left[\frac{\pi}{2}.\right]$

Вычислить криволинейные интегралы.

98. $\int\limits_{AB}(x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$, если путь от $A(1;1)$ до $B(3;4)$ — отрезок прямой. $\left[\frac{67}{6}.\right]$

99. $\int\limits_{AB} x\,dy - y\,dx$ по параболе $y = x^2$ между точками $A(0;0)$ и $B(2;4)$. $\left[\frac{8}{3}.\right]$

100. $\int\limits_{AB} (4x - y)\,dx + 5x^2y\,dy$, если AB — дуга параболы $y = 3x^2$, $A(0;0)$, $B(1;3)$. [16.]

101. $\int\limits_{L} (x-y)^2\,dx + (x+y)^2\,dy$, если L — ломаная OAB, где $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$. $\left[\frac{136}{3}.\right]$

102. $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} x\,dy + y\,dx$. [8.] **103.** $\int\limits_{(0;1)}^{(3;-4)} x\,dx + y\,dy$. [12.]

104. $\int\limits_{(1;-1)}^{(1;1)} (x-y)\,dx + (y-x)\,dy$. [−2.]

105. $\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$. [48.]

Глава VI

РЯДЫ

§ 34. Числовые ряды

1. Основные понятия. Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Определение. Символ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_1 + \ldots \tag{1}$$

называется *числовым рядом*, или просто *рядом*, а числа $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ называются *членами* ряда. Вместо (1), пользуясь знаком суммы, кратко пишут так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Суммы конечного числа членов ряда (1) $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, ... называются *частичными суммами* (или *отрезками* ряда (1)).

Рассмотрим последовательность

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots \tag{2}$$

Определение. Если существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (1) называется *сходящимся*, а число S — суммой этого ряда. В этом случае пишут:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если последовательность (2) не имеет предела, то ряд (1) называется *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Пример 1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots \tag{3}$$

Если $q \neq 1$, то, как известно,

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^{n-1} \cdot q - 1}{q - 1},$$

или

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

При $|q| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, т. е. ряд (3) при $|q| < 1$ сходится.

При $q = 1$ получаем ряд $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ Следовательно, $S_n = n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (3) при $q = 1$ расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Очевидно,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится и его сумма равна 1.

2. Основные свойства рядов. Если в ряде (1) отбросить конечное число первых членов, например m членов, то получим ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots, \tag{4}$$

который называется *остатком* ряда (1) после m-го члена или кратко *остаток* m.

Теорема 1. *Ряд* (4) *сходится* (*или расходится*) *одновременно с рядом* (1).

Доказательство. Обозначим

$$S'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}.$$

Имеем:

$$S'_k = S_{m+k} - S_m. \tag{5}$$

Отсюда видно, что существование или отсутствие предела при $k \to \infty$ частичной суммы одного ряда влечет за собой существова ние или отсутствие предела частичной суммы другого ряда. Теорема доказана.

Следствие 1. *При исследовании ряда на сходимость можно игнорировать конечное число его первых членов.*

Пусть ряд (1) сходится. Тогда согласно теореме 1 сходится и ряд (4), значит, существует его сумма. Обозначим ее через R_m. Тогда, перейдя к пределу в (5) при $k \to \infty$, получим:

$$R_m = S - S_m.$$

R_m есть та погрешность, которую мы допускаем, если вместо суммы S сходящегося ряда (1) берем сумму m первых его членов. Так как

$$\lim_{m\to\infty} R_m = \lim_{m\to\infty}(S - S_m) = S - S = 0,$$

то погрешность уменьшается с ростом m. Следовательно, абсолютная величина остатка

$$|R_m| = |S - S_m|$$

будет как угодно мала, если только число m взято достаточно большим. Таким образом, мы всегда имеем возможность подсчитать приближенно сумму сходящегося ряда, взяв достаточно большое число первых его членов.

Теорема 2. (необходимый признак сходимости ряда). *Общий член a_n сходящегося ряда* (1) *стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть ряд (1) сходится. Имеем: $a_n = S_n - S_{n-1}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Следствие 2. *Если общий член a_n ряда* (1) *при $n \to \infty$ не стремится к нулю, то этот ряд расходится.*

Пример. Для ряда (1), у которого $|q| \geqslant 1$, имеем $|q|^n \geqslant 1$ для $n = 1, 2, \ldots$ т. е. q^n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому такой ряд расходится.

Примечание. Отметим, что условие (6) не является достаточным для сходимости ряда. Действительно, для ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{7}$$

называемого *гармоническим рядом*, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Однако этот ряд расходится, что можно установить рассуждениями от противного. Предположим, что ряд (7) сходится и его сумма равна S. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0,$$

что противоречит неравенству

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

Теорема 3. *Если ряд* (1) *сходится и его сумма равна* S, *то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n, \tag{8}$$

где c — *произвольное число, также сходится и его сумма равна* cS.

Доказательство. Пусть S_n и σ_n — частичные суммы соответственно рядов (1) и (8). Тогда

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cS_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Если ряды*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{A}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{B}$$

сходятся и их суммы соответственно равны A *и* B, *то и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \tag{C}$$

сходится и его сумма равна $A \pm B$.

Доказательство. Пусть A_n, B_n и C_n — частичные суммы соответственно рядов (A), (B), (C). Тогда

$$C_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = A_n \pm B_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} (A_n \pm B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n = A \pm B.$$

Теорема доказана.

3. Положительные ряды. *Положительным рядом* называется ряд, члены которого неотрицательны.

Пусть ряд (1), т. е. ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, будет положительный, т. е. $a_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда, очевидно, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ является неубывающей.

Это с учетом приведенного в § 9 (п. 1) свойства 2 позволяет сформулировать следующее утверждение:

Теорема 1. *Для того чтобы положительный ряд* (1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена сверху.*

Т е о р е м а 2 (признак сравнения рядов). *Пусть даны два положительных ряда*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{A}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{B}$$

Если члены ряда (A) *не превосходят соответствующих членов ряда* (B):

$$a_n \leqslant b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

то из сходимости ряда (B) *следует сходимость ряда* (A), *а из расходимости ряда* (A) *следует расходимость ряда* (B).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначив через A_n и B_n соответственно частичные суммы рядов (A) и (B), в силу неравенства (9) будем иметь:

$$A_n \leqslant B_n. \tag{10}$$

Если ряд (B) сходится, то по теореме 1 частичные суммы B_n ограничены сверху:

$$B_n \leqslant L (L - \text{const}), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Из соотношений (10) и (11) имеем:

$$A_n \leqslant L, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и, значит, согласно той же теореме 1 ряд (A) сходится.

Пусть теперь ряд (A) расходится. Тогда расходится и ряд (B). В противном случае согласно по только что доказанному сходился бы и ряд (A).

П р и м е ч а н и е 1. Теорема 2 остается справедливой, если условие (9) выполняется не для всех n, а лишь начиная с некоторого n (см. п. 2, следствие 1).

П р и м е р 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Сравнивая данный ряд со сходящимся рядом (см. п. 1, пример 2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

имеем

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Отсюда согласно теореме 2 получаем, что данный ряд сходится. Попутно отметим, что тогда в силу следствия 1 из п. 2 сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

П р и з н а к Д а л а м б е р а. *Если члены положительного ряда* (1) *таковы, что существует предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho,$$

то при $\rho<1$ *ряд* (1) *сходится, а при* $\rho>1$ *ряд* (1) *расходится.*

Доказательство. В силу определения предела последовательности для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число $N=N(\varepsilon)$, что для всех $n>N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho\right|<\varepsilon.$$

Отсюда

$$-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho<\varepsilon,$$

или

$$\rho-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon. \tag{12}$$

Если $\rho<1$, то выберем ε столь малым, чтобы $\rho+\varepsilon$ было меньше единицы. Полагая $\rho+\varepsilon=q$, на основании соотношения (12) имеем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q, \qquad \text{или} \qquad a_{n+1}<a_nq,$$

для $n=N+1,\ N+2,\ \ldots$ Давая n эти значения, из последнего неравенства получаем:

$$\begin{aligned}
&a_{N+2}<a_{N+1}q,\\
&a_{N+3}<a_{N+2}q<a_{N+1}q^2,\\
&a_{N+4}<a_{N+3}q<a_{N+2}q^2<a_{N+1}q^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

т. е. члены ряда

$$a_{N+2}+a_{N+3}+a_{N+4}+\ldots \tag{13}$$

меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$$a_{N+1}q+a_{N+1}q^2+a_{N+1}q^3+\ldots$$

Тогда по признаку сравнения ряд (13) сходится, и, следовательно, согласно теореме 1 из п. 2 сходится и ряд (1).

Пусть теперь $\rho>1$. Возьмем ε столь малым, чтобы $\rho-\varepsilon>1$. Тогда при $n>N$ в силу соотношения (12) будет выполняться неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$, или $a_{n+1}>a_n$. Таким образом, члены ряда, начиная с номера $N+1$, возрастают с увеличением их номеров, т. е. общий член ряда a_n не стремится к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, согласно следствию 2 из п. 2 ряд (1) расходится.

Примечание 2. При $\rho=1$ признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не дает. В самом деле, для гармонического ряда $\rho=1$, причем этот ряд расходится (см. п. 2). Вместе с тем для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}$ также $\rho=1$, но этот ряд сходится (см. п. 3, пример 1).

Примечание 3. Из доказательства признака Даламбера следует, что при $\rho > 1$ общий член a_n ряда (1) не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Примечание 4. Ряд (1) будет расходиться и в том случае, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, так как тогда, начиная с некоторого номера N, будет $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, и, значит, a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

4. Знакочередующиеся ряды. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots, \tag{14}$$

где $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 1 (теорема Лейбница). *Если члены ряда* (14) *по абсолютной величине монотонно убывают*:

$$a_{n+1} < a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

и общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{16}$$

то ряд (14) *сходится*.

Доказательство. Частичную сумму S_{2m} можно представить двояко:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}), \tag{17}$$

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}. \tag{18}$$

Здесь в каждой круглой скобке разность положительная в силу условия (15). Из (17) следует, что $S_{2m} > 0$ и последовательность $\{S_{2m}\}$ монотонно возрастающая. Из (18) видно, что $S_{2m} < a_1$, т. е. последовательность $\{S_{2m}\}$ ограничена сверху. Следовательно (§ 9, п. 1), эта последовательность имеет предел:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S, \tag{19}$$

причем

$$0 < S < a_1. \tag{20}$$

Далее, с учетом (19) и (16) имеем:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S. \tag{21}$$

Из (19) и (21) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т. е. ряд (14) сходится.

П р и м е р. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

сходится, так как условия теоремы 1 здесь выполнены.

Т е о р е м а 2. *Остаток R_n знакочередующегося ряда* (14), *удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Если n — четное, то

$$R_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots$$

Так как этот ряд удовлетворяет теореме Лейбница, то согласно (20) имеем: $0 < R_n < a_{n+1}$.

Если n — нечетное, то

$$R_n = -a_{n+1} + a_{n+2} - \ldots$$

Отсюда

$$-R_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots$$

и согласно (20)

$$0 < -R_n < a_{n+1},$$

откуда $R_n < 0$ и $|R_n| < a_{n+1}$.

Теорема доказана.

П р и м е р. Вычислить с точностью до 0,1 сумму сходящегося ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \tag{22}$$

В качестве приближенного значения суммы S ряда (22) мы должны взять ту частичную сумму S_n, для которой $|R_n| < 0{,}1$. Согласно теореме 2 $|R_n| < a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Следовательно, достаточно положить $n + 1 = 10$, т. е. $n = 9$, тогда

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0{,}74.$$

Отсюда $S \approx 0{,}7$ с точностью до 0,1.

5. Абсолютная и условная сходимость. Перейдем теперь к рядам с членами, имеющими любой знак. С каждым таким рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{23}$$

связан ряд с неотрицательными членами, составленный из модулей членов данного ряда, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{24}$$

Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 1. *Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Доказательство. Составим два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{25}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{26}$$

где

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{если} \quad a_n > 0, \\ 0 & \text{если} \quad a_n \leqslant 0, \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad a_n \geqslant 0, \\ |a_n|, & \text{если} \quad a_n < 0. \end{cases}$$

Так как при $n = 1, 2, \ldots$ $b_n \leqslant |a_n|$ и $c_n \leqslant |a_n|$, то по теореме 2 из п. 3 § 34 ряды (25) и (26) сходятся. Обозначим их суммы соответственно через B и C. Частичную сумму S_n данного ряда (23) можно с помощью обозначений для b_n и c_n переписать в виде

$$S_n = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = B - C. \tag{27}$$

Следовательно, ряд (23) сходится.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *неабсолютно* или *условно сходящимся*.

Примечание. Равенство (27) показывает, что сумма абсолютно сходящегося ряда равна разности сумм двух положительных рядов, составленных из всех его положительных членов и из абсолютных величин всех его отрицательных членов.

Пример. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

абсолютно сходится, так как сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(см. п. 3, пример 1); ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{28}$$

по теореме Лейбница сходится, но ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

расходится как гармонический. Следовательно, ряд (28) сходится условно.

§ 35. Степенные ряды

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, каждый член которого является функцией от x. Такие ряды называются *функциональными*. Ограничимся рассмотрением двух наиболее употребительных видов функциональных рядов — *степенных* и *тригонометрических*.

1. Интервал сходимости. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — постоянные вещественные числа, называется *степенным рядом*. Иногда рассматривают степенной ряд более общего вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{2}$$

где x_0 — некоторое постоянное число. Ряд (2) легко приводится к виду (1), если положить

$$x - x_0 = y.$$

Поэтому в дальнейшем почти исключительно будем заниматься степенными рядами вида (1).

При каждом конкретном значении x ряд (1) становится числовым, который в зависимости от x сходится или расходится.

Очевидно, всякий степенной ряд (1) сходится при $x = 0$. Существуют степенные ряды вида (1), сходящиеся лишь при $x = 0$ (ряды I класса, см. ниже пример 2), а также степенные ряды вида (1), сходящиеся на всей числовой прямой (ряды II класса, см. ниже пример 3). Остальные степенные ряды вида (1) относят к рядам III класса.

В подробных курсах математического анализа (см., например, [6]) доказывается, что для *каждого степенного ряда* (1) III *класса существует положительное число* R, *такое, что этот ряд абсолютно сходится при* $|x| < R$ *и расходится при* $|x| > R$.

Это число R называется *радиусом сходимости* рассматриваемого ряда, а интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* этого ряда.

Примечание 1. На концах интервала сходимости, т. е. в точках $x = -R$ и $x = R$ степенной ряд (1) может быть как сходящимся, так и расходящимся. Это зависит от конкретного исследуемого ряда.

Примечание 2. Для ряда I класса полагают $R = 0$, для ряда II класса полагают $R = +\infty$.

В простейших случаях радиус сходимости R степенного ряда (1) III класса может быть определен с помощью признака Даламбера. Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \neq 0.$$

Образовав ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|, \tag{3}$$

применим к нему признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L|x|.$$

В соответствии с этим признаком ряд (1) сходится, если $L|x| < 1$, т. е. если $|x| < \dfrac{1}{L}$, и расходится, если $L|x| > 1$, т. е. если $|x| > \dfrac{1}{L}$ (в этом случае согласно примечанию 3 из п. 3 § 34 общий член ряда (3), а значит, и ряда (1) не стремится к нулю при $n \to \infty$). Следовательно, ряд (1) сходится абсолютно при $|x| < \dfrac{1}{L}$ и расходится при $|x| > \dfrac{1}{L}$, т. е. $R = \dfrac{1}{L} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Примечание 3. Если $L = 0$, то при любом x из числовой оси $L|x| = 0 < 1$ и ряд (3), а значит, и ряд (1) сходятся на всей числовой оси, т. е. $R = +\infty$. Если же $L = +\infty$, то при любом $x \neq 0$ из числовой оси $L|x| = +\infty$ и, значит, в силу примечания 4 из п. 3 § 34 ряд (1) при любом $x \neq 0$ расходится, т. е. $R = 0$.

Пример 1. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n \tag{4}$$

$L = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \dfrac{1}{3}$. Следовательно, $R = 3$. Поэтому данный ряд абсолютно сходится в интервале $(-3; 3)$ и расходится вне отрезка $[-3; 3]$. В точке $x = 3$ получаем гармонический ряд, т. е. в этой точке ряд (4) расходится. В точке $x = -3$ имеем ряд $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots$, который сходится в силу теоремы Лейбница (§ 34, п. 4). Значит, в точке $x = -3$ ряд (4) сходится условно.

Пример 2. В случае ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Значит, $R = 0$.

Пример 3. Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Следовательно, $R = \infty$.

2. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Сумма сходящегося степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{5}$$

представляет собой функцию от x, определенную в интервале сходимости $(-R; R)$ $(R > 0)$ этого ряда.

В более полных курсах (см., например, [6]) доказывается, что *функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(-R; R)$ и ее производная $f'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием ряда* (5), т. е.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$

Аналогично могут быть вычислены и производные старших порядков. При этом получаемые здесь ряды имеют тот же интервал сходимости, что и ряд (5).

Доказывается также ([6]), что *для всякого x из интервала $(-R; R)$ ряд* (5) *можно почленно интегрировать на отрезке* $[0; x]$, т. е.

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Последний ряд имеет тот же интервал сходимости, что и ряд (5).

3. Разложение функций в степенные ряды. Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ *разлагать в степенной ряд*, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда, так как тем самым мы получаем возможность просто вычислять значения этой функции с любой степенью точности.

Разберем частные случаи.

Рассмотрим степенной ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Этот ряд (см. § 34, п. 1, пример 1) сходится при $|x| < 1$, причем сумма его равна $\dfrac{1}{1-x}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{6}$$

и это равенство справедливо при всех x из $(-1; 1)$.

Формула (6) называется *разложением функции* $\dfrac{1}{1-x}$ *в степенной ряд*.

Формула (6) является источником новых разложений.

Разложение функции $\ln(1+x)$. Заменяя в разложении (6) x на $-t$, получим

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \tag{7}$$

Считая $|x| < 1$, можно ряд (7) проинтегрировать по t в пределах от 0 до x. Получим:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x t^3\,dt + \ldots + (-1)^n \int_0^x t^n\,dt + \ldots$$

Отсюда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \tag{8}$$

если $|x| < 1$. Можно показать, что это разложение справедливо также при $x = 1$.

Разложение функции $\operatorname{arctg} x$. Аналогично, полагая в (6) $x = -t^2$ и интегрируя полученное равенство по t от 0 до x, получим разложение функции $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \tag{9}$$

справедливое для $|x| < 1$. Можно доказать, что это разложение остается верным и при $x = 1$, и при $x = -1$.

Теорема единственности. *Если функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ разлагается в степенной ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \tag{10}$$

то это разложение единственно.

Доказательство. Согласно результатам *) п.2

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots,$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots,$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + (n-2)(n-1)\,na_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\,na_n + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n(n+1)\,a_{n+1}(x - x_0) + \ldots,$$

. . . .

Полагая в этих равенствах и в равенстве (10) $x = x_0$, найдем, что

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots \tag{11}$$

Подставляя полученные выражения коэффициентов в равенство (10), получим ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

который называется *рядом Тейлором* функции $f(x)$.

*) Они, как и другие результаты этого параграфа, распространяются и на ряды вида (2) в силу подстановки $x - x_0 = y$.

Таким образом, *если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд по степеням $x-x_0$, то этот ряд обязательно является рядом Тейлора этой функции.*

Если в ряде Тейлора положить $x_0 = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называется *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Отсюда следует, что ряды (6), (8), (9) представляют собой соответственно ряды Маклорена функций $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$; чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить коэффициенты указанных рядов по формулам (11) (предоставляем это сделать читателю самостоятельно).

Разложение функции e^x. Пусть $f(x) = e^x$. Имеем $f^{(n)}(x) = e^x$, $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда $f^{(n)}(0) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Значит, функция e^x имеет следующий ряд Маклорена:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Ранее (см. п. 1, пример 3) установлено, что этот ряд сходится на всей числовой оси. В подробных курсах (см., например, [6]) доказывается, что сумма этого ряда для любого значения x равна e^x, т. е.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{12}$$

Разложение функции $\sin x$. Пусть $f(x) = \sin x$. Здесь $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$, откуда $f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} = 0$ при $k = 2n$ и $f^{(k)}(0) = (-1)^n$ при $k = 2n+1$. Поэтому функция $\sin x$ имеет следующий ряд Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Последний ряд, как и ряд (12), также сходится при любом x, и его сумма равна $\sin x$, т. е.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{13}$$

Разложение функции $\cos x$. Продифференцировав почленно ряд (13), получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots,$$

при этом это разложение также справедливо для любого x.

Разложение функции $(1+x)^\alpha$. Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α — любое вещественное число. Здесь

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

и

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

Можно доказать (см., например, [6]), что равенство

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (14)$$

верно при $|x| < 1$.

Ряд (14) называется *биномиальным*.

Если $\alpha = m$ (m — натуральное), то имеем так называемый бином Ньютона:

$$(1+x)^m = 1+mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)n}x^n.$$

4. Приложения степенных рядов к приближенным вычислениям. Степенные ряды являются мощным вычислительным средством. С их помощью можно, например, вычислять приближенные значения функций, приближенно вычислять некоторые «неберущиеся» определенные интегралы.

П р и м е р 1. Вычислить значение $e^{0,2}$ с точностью до 0,0001.

Согласно формуле (12) имеем:

$$e^{0,2} = 1 + 0{,}2 + \frac{0{,}2^2}{2!} + \frac{0{,}2^3}{3!} + \frac{0{,}2^4}{4!} + \ldots$$

Оценим погрешность, получаемую при отбрасывании всех членов этого ряда, начиная с пятого:

$$R_4 = \frac{0{,}2^4}{4!} + \frac{0{,}2^5}{5!} + \frac{0{,}2^6}{6!} + \ldots = \frac{0{,}2^4}{4!}\left(1 + \frac{0{,}2}{5} + \frac{0{,}2^2}{5\cdot 6} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{0{,}2^4}{4!}\left(1 + \frac{0{,}2}{5} + \left(\frac{0{,}2}{5}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{0{,}0016}{24}\cdot\frac{1}{1-\frac{0{,}2}{5}} < 0{,}0001.$$

Значит, с точностью до 0,0001 имеем:

$$e^{0,2} \approx 1 + 0{,}2 + \frac{0{,}2^2}{2!} + \frac{0{,}2^3}{3!} = 1{,}2 + \frac{0{,}04}{2} + \frac{0{,}008}{6} \approx 1{,}2213$$

(здесь можно использовать калькулятор).

П р и м е р 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,0001.

В силу формулы (12)

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Отсюда (п. 2)

$$\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{1/4} dx - \int\limits_0^{1/4} x^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{1/4} x^4\,dx - \frac{1}{3!}\int\limits_0^{1/4} x^6\,dx + \ldots =$$

$$= 0{,}25 - \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{10\cdot 4^5} - \frac{1}{42\cdot 4^7} + \ldots \qquad (15)$$

Это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий теореме Лейбница (см. § 34, п. 4). Так как

$$\frac{1}{10 \cdot 4^5} = \frac{1}{10\,240} < \frac{1}{10000} = 0{,}0001,$$

то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда (15):

$$\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx \approx 0{,}25 - \frac{1}{3 \cdot 4^3} \approx 0{,}25 - 0{,}0052 = 0{,}2448$$

(здесь также можно использовать калькулятор).

§ 36. Ряд Фурье

1. Тригонометрические ряды. Степенные ряды, рассмотренные в предыдущем параграфе, позволили нам представить функцию $f(x)$ в виде суммы (с некоторыми коэффициентами) простейших функций — степеней x:

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

В этом параграфе рассмотрим функциональные ряды, в которых вместо степеней x выбраны другие, также достаточно простые и хорошо изученные функции — тригонометрические:

$$1, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \sin 2x, \quad \cos 2x, \quad \ldots, \quad ,\sin nx, \quad \cos nx, \quad \ldots \tag{1}$$

Иными словами, будем рассматривать ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots$$
$$\ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots$$

Такие ряды называются *тригонометрическими*.

2. Тригонометрическая система функций, ее ортогональность. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными* друг другу на промежутке $[a; b]$, если

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = 0.$$

Система функций называется *ортогональной* на промежутке $[a; b]$, если каждые две функции из этой системы ортогональны друг другу на этом промежутке.

Пример. Тригонометрическая система функций (1) ортогональна на промежутке $[-\pi; \pi]$.

В самом деле, если $k \neq 0$ и целое, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \tag{2}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \tag{3}$$

Это значит, что единица ортогональна ко всем остальным функциям системы (1).

Заметим теперь, что при натуральных m, n произведения $\sin nx \sin mx$ $(m \neq n)$, $\cos nx \cos mx$ $(m \neq n)$, $\sin nx \cos mx$ всегда можно представить суммой функций вида $\sin kx$ или $\cos kx$. Например,

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}\,[\cos(n-m)\,x + \cos(n+m)\,x].$$

Поэтому интеграл от $-\pi$ до π от этих произведений также равен нулю.

Укажем еще на одно свойство системы (1), заключающееся в том, что при любом натуральном n

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi. \tag{4}$$

Например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos 2nx)\,dx = \frac{1}{2}\left(x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2n}\sin 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \pi.$$

3. Разложение функций в ряд Фурье. Предположим теперь, что некоторая функция $f(x)$, которую для определенности считаем непрерывной на $[-\pi;\pi]$, представима на этом промежутке суммой тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1 \sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots$$
$$\ldots + a_n\cos nx + b_n \sin nx + \ldots \tag{5}$$

Предположим также, что, подобно степенным рядам, ряд (5) можно почленно интегрировать (на выяснении условий, при которых это возможно, здесь не останавливаемся). Тогда в силу (2) и (3) будем иметь:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx = \frac{a_0}{2}\,2\pi = a_0\pi.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{6}$$

Умножим теперь ряд (5) на $\cos nx$, $n > 0$, и снова проинтегрируем от $-\pi$ до π. Тогда в силу ортогональности тригонометрической системы все слагаемые проинтегрированного ряда обратятся в нуль, за исключением слагаемого, содержащего a_n. Получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos^2 nx\,dx,$$

или согласно формуле (4): $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\pi$, откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Аналогично, умножая обе части равенства (5) на $\sin nx$ и интегрируя полученное равенство от $-\pi$ до π, получим:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Таким образом, если непрерывная функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, допускающий почленное интегрирование, то коэффициенты этого ряда a_0, a_n, b_n выражаются через $f(x)$ посредством формул (6)–(8).

Пусть теперь в промежутке $[-\pi; \pi]$ задана произвольная непрерывная функция $f(x)$. Для такой функции, ничего заранее не предполагая о возможности ее представления суммой тригонометрического ряда, можем по формулам (6)–(8) определить числа a_0, a_n, b_n и составить с этими числами тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$
$$\ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \tag{9}$$

Числа a_0, a_n, b_n, найденные по формулам (6)–(8), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (9) с этими коэффициентами называется *рядом Фурье* для этой функции.

Как и при изучении степенных рядов, возникает вопрос: что нужно потребовать от функции $f(x)$, чтобы ряд Фурье, составленный для нее, сходился к самой функции?

Имеет место следующая теорема:

Теорема разложения. *Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-\pi; \pi]$ и в каждой точке этого отрезка имеет производную $f'(x)$. Тогда ряд Фурье этой функции сходится на всей числовой оси, причем сумма его $S(x)$ равна $f(x)$ в точках, для которых $-\pi < x < \pi$, и*

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}. \tag{10}$$

Эту теорему примем без доказательства.

Замечание 1. В теореме говорится о том, какова сумма ряда $S(x)$ в точках, принадлежащих отрезку $[-\pi; \pi]$. Однако поскольку эта сумма 2π периодична, то ее значения на $[-\pi; \pi]$ определяют собой и все остальные значения.

Замечание 2. Теорема гарантирует разложимость всякой дифференцируемой на $[-\pi; \pi]$ функции в ее ряд Фурье не на всем этом отрезке, а лишь на интервале $(-\pi; \pi)$. Однако если разлагаемая функция удовлетворяет еще дополнительному условию

$$f(-\pi) = f(\pi), \tag{11}$$

то, как это видно из (10), она будет представима своим рядом Фурье на всем отрезке $[-\pi; \pi]$.

4. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Если $f(x)$ — четная функция на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ее коэффициенты Фурье b_n в ряду (9) равны нулю. В самом деле,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right].$$

В первом интеграле сделаем замену переменной $x = -t$. Тогда, пользуясь четностью $f(x)$ и нечетностью синуса, получим:

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)\sin n(-t)\,dt = -\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Отсюда и из предыдущего равенства следунт наше утверждение.

Коэффициенты a_n в этом случае (это тоже легко показать) можно подсчитать по формулам

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Аналогично показывается, что если $f(x)$ — нечетная функция, то $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Таким образом, если функция четная, то ее ряд Фурье (9) содержит только косинусы, а если нечетная — только синусы. Говорят, что функция разлагается в *неполный ряд по косинусам* или соответственно *по синусам*.

Пример 1. Пусть $f(x) = x$. В силу (13) имеем:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}. \tag{14}$$

Следовательно, согласно теореме разложения при $-\pi < x < \pi$

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right). \tag{15}$$

В точках же $x = \pm\pi$ равенство (15) заведомо неверно, ибо сумма ряда в этих точках равна нулю. В силу 2π-периодичности суммы $S(x)$ ряда (15) график этой суммы имеет вид, изображенный на рисунке 102 жирной линией.

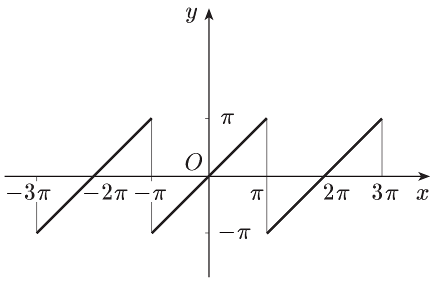

Рис. 102

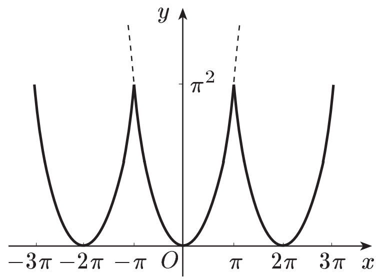

Рис. 103

Интересно, что $S(x)$ оказывается разрывной функцией (хотя все члены ряда непрерывны!).

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$. Согласно (12) имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right] = -\frac{4}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$(n = 1,\, 2,\, \ldots),$$

откуда с учетом равенства (14) $a_n = (-1)^n\,\dfrac{4}{n^2}$. Значит, по теореме разложения при $-\pi < x < \pi$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right). \qquad (16)$$

Так как функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет условиям (11), то формула (16) верна на всем отрезке $[-\pi; \pi]$.

Благодаря 2π-периодичности суммы ряда (16) график ее имеет вид, изображенный на рисунке 103.

Функция $S(x)$ оказывается непрерывной, но не гладкой.

5. Ряды Фурье с периодом $2l$. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы разложения (п. 3) в случае произвольного отрезка $[-l; l]$, то в этом случае вместо (5) будем иметь разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (-l < x < l),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

При этом если $f(x)$ — четная функция, то $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; если же $f(x)$ — нечетная функция, то $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Упражнения

Найти сумму ряда.

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ [2.]

2. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$ $\left[\frac{3}{4}.\right]$

3. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots$ $\left[\frac{1}{3}.\right]$

4. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$ $\left[\frac{1}{2}.\right]$

5. $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \ldots$ $\left[\frac{11}{18}.\right]$

Исследовать сходимость ряда.

6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots$ [Расходится.]

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$. [Расходится.]

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+n)^n}$. [Расходится.]

9. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$ [Расходится.]

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$. [Сходится.]

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$. [Расходится.]

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. [Расходится.]

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$. [Расходится.]

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$. [Сходится.]

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$. [Сходится.]

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\alpha}{3^n}$, $0 < \alpha < 3\pi$. [Сходится.]

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$. [Сходится.]

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}}$. [Сходится.]

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$. [Сходится.]

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$. [Сходится.]

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. [Сходится.]

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$. [Расходится.]

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд.

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. [Условно сходится.]

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n^3}{2^n}$. [Абсолютно сходится.]

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}$. [Расходится.]

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{100n+1}$. [Условно сходится.]

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$. [Расходится.]

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$. [Абсолютно сходится.]

Найти интервал сходимости ряда.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n x^n$. $\left[|x|<\dfrac{1}{3}.\right]$ **30.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^2 x^n$. $[|x|<1.]$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$. [$|x|<1$; при $x=1$ условно сходится.]

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3x^n}{n+1}$. $[|x|<1.]$ **33.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{e^n}$. $[|x|<e.]$

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 7^n}$. [$|x|<7$; при $x=-7$ условно сходится.]

35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(2n)!}$. $[-\infty<x<+\infty.]$

Разложить в ряд по степеням x следующие функции:

36. e^{-x^2}. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!},\ |x|<\infty.\right]$

37. x^2e^{-2x}. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^nx^{n+2}}{n!},\ |x|<\infty.\right]$

38. $\sin x^2$. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!},\ |x|<\infty.\right]$

39. $\cos^2 x$. $\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ |x|<\infty.\right]$

40. $\dfrac{1}{1-x^2}$. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n},\ |x|<1.\right]$

41. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ |x|<1.\right]$

42. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\ |x|<1.\right]$

43. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\ |x|<1.\right]$

44. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)},\ |x|\leqslant 2.\right]$

Пользуясь соответствующими разложениями, вычислить с точностью до 0,001.

45. $\sqrt{e}$. [1,649.] **46.** $\sin 18^\circ$. [0,309.]

47. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$. [0,747.]

48. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ в промежутке $[-\pi;\pi]$.

$$\left[\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\right]$$

49. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\pi+x$ в промежутке $[-\pi;\pi]$.

$$\left[\pi+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.\right]$$

Глава VII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 37. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

В различных областях науки и техники весьма часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить одно или несколько уравнений, содержащих производные искомых функций. Такие уравнения называются *дифференциальными*. Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. На плоскости xOy найти кривую, проходящую через точку $O(0;0)$, у которой угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке кривой, равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y=f(x)$ — уравнение искомой кривой. По условию задачи в каждой точке $M(x;f(x))$ есть касательная к этой кривой, угловой коэффициент которой, т. е. $f'(x)$, равняется $2x$. Таким образом, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=2x. \tag{1}$$

Это дифференциальное уравнение, так как оно содержит производную искомой функции. Из уравнения (1) следует, что функция y есть первообразная функции $2x$. Следовательно,

$$y = \int 2x\,dx$$

или

$$y = x^2 + C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная.

Из формулы (2) следует, что дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, т. е. уравнению (1) удовлетворяет не одна кривая, а бесконечное множество кривых — парабол (рис. 104). Чтобы из этого множества кривых выбрать нужную нам кривую, надо воспользоваться тем, что искомая кривая проходит через точку $O(0; 0)$. Следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (2). Поэтому $0 = 0 + C$, т. е. $C = 0$. Значит, искомая кривая будет $y = x^2$.

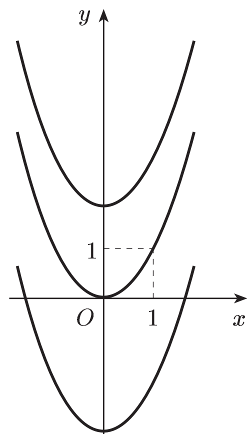

Рис. 104

З а д а ч а 2. Найти закон движения свободно падающего в пустоте тела, если пройденный путь начинает отсчитываться от момента времени $t = 0$ и начальная скорость падения равна нулю. Скорость в этом случае выражается, как известно, формулой $v = gt$.

Р е ш е н и е. Как уже отмечалось (см. § 14, п. 2), скорость прямолинейного движения есть производная пути по времени. Поэтому

$$v = \frac{ds}{dt} = gt. \tag{3}$$

Из этого уравнения следует, что функция s есть первообразная функции gt. Следовательно,

$$s = \int gt\,dt$$

или

$$s = \frac{gt^2}{2} + C. \tag{4}$$

Для определения произвольной постоянной C используем то условие, что начало отсчета пути совпадает с началом отсчета времени, т. е. при $t = 0$ $s = 0$. Подставляя эти значения в равенство (4), находим: $0 = 0 + C$, т. е. $C = 0$, и, следовательно, окончательно получаем:

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

В рассмотренных двух задачах мы приходим к дифференциальному уравнению вида $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)$. Это уравнение является простейшим дифференциальным уравнением. Однако в большинстве случаев естественные и технические процессы описываются гораздо общими и сложными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные. Если искомая функция есть функция одного независимого переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. В этой главе (за исключением § 41) будем заниматься обыкновенными дифференциальными уравнениями. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* данного уравнения. Следовательно, общий вид дифференциального уравнения n-го порядка следующий:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{5}$$

причем в частных случаях в это уравнение могут и не входить x, y и отдельные производные порядка ниже, чем n. Например, уравнения $y' - \frac{y}{x} = x$, $y'' + y' = 1$ имеют соответственно первый и второй порядок.

Всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (5), обращает его в тождество, называется *решением* этого уравнения.

Пример. Функция $y = e^{x^3/3}$ является решением уравнения $y' - x^2 y = 0$, так как она обращает это уравнение в тождество.

§ 38. Дифференциальные уравнения первого порядка, их частные случаи. Приложения в естествознании

1. Дифференциальное уравнение первого порядка, его общее решение и начальные условия. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет общий вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

или (если это уравнение можно разрешить относительно y') вид:

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Будем рассматривать в уравнении (1) переменные x и y как декартовы прямоугольные координаты точки на плоскости xOy. Пусть $y = \varphi(x)$ решение уравнения (1); тогда кривая, определяемая уравнением $y = \varphi(x)$, называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (1). Рассмотрим на интегральной кривой произвольную точку $M(x, y)$. Согласно геометрическому смыслу производной в этой точке имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол, образуемый касательной к этой кривой в точке M с осью Ox. Из последнего равенства и из (1) получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y),$$

где x, y — координаты точки M. Таким образом, угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в каждой ее точке равен значению в этой точке правой части уравнения (1). Итак, уравнение (1) определяет в каждой точке интегральной кривой направление касательной к этой кривой.

Каждой точке $M(x, y)$ той области, где определена функция $f(x, y)$ (правая часть уравнения (1)), сопоставим отрезок с угловым коэффициентом $k = f(x, y)$, где (x, y) — координаты точки M. Мы получаем совокупность направлений, или, как говорят, поле направлений данного дифференциального уравнения.

Таким образом, уравнению (1) соответствует его поле направлений. В этом состоит геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (1). Проведя указанные выше отрезки для достаточно большого числа точек области, получим наглядное изображение поля направлений. Так как касательная в точке интегральной кривой имеет то же направление, что и отрезок в этой точке, то задачу решения (интегрирования) уравнения (1) геометрически можно истолковать следующим образом: найти такую кривую, чтобы ее касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Приведенные рассуждения хорошо иллюстрировать на известном опыте с железными опилками, помещенными в магнитное поле. Сами опилки образуют поле направлений, а интегральной кривой служит одна из магнитных силовых линий.

В задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям, точнее в их решения (см. (2) и (4) § 37) входит произвольная постоянная C. Такие решения называются общими решениями этих уравнений. Аналогично решение уравнения (1), содержащее произвольную постоянную C, т. е. имеющее вид:

$$y = \varphi(x, C), \tag{2}$$

называется *общим решением* этого уравнения. Иногда, впрочем, это решение получается в неявной форме $\Phi(x, y, C) = 0$ или $\psi(x, y) = C$. В этом случае соотношение $\Phi(x, y, C) = 0$ (или $\psi(x, y) = C$) называется *общим интегралом* уравнения (1).

Решить или *проинтегрировать* данное дифференциальное уравнение — значит найти его общее решение в той или иной форме.

Решение, которое получается из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C, называется *частным решением*. Например, функции $y = x^2$, $s = \dfrac{gt^2}{2}$ — частные решения соответственно уравнений (1), (3), рассмотренных в § 37.

Для уравнения (1) справедлива следующая теорема, называемая теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (1).

Теорема*). *Если в уравнении* (1) *функция* $f(x, y)$ *и ее частная производная* $f'_y(x, y)$ *непрерывны в некоторой области* D *на плос-*

*) Доказательство этой теоремы выходит за рамки настоящей книги (читатель может найти его, например, в книге [12]).

кости xOy, содержащей некоторую точку (x_0, y_0), то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию: при $x = x_0$ $y = y_0$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что существует и притом единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется *начальным условием*. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения (2) частное решение. Действительно, из уравнения $y_0 = \varphi(x_0, C)$ определится конкретное значение $C = C_0$, и тогда искомое частное решение запишется в виде $y = \varphi(x, C_0) = \psi(x)$.

2. Уравнения с разделяющимися переменными. Запишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{или} \quad dy = f(x, y)\,dx.$$

Такому уравнению можно придать следующую форму:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{3}$$

Форма (3) удобна тем, что здесь переменные x и y равноправны, т. е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой. Предположим, что функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ можно представить произведениями

$$M(x, y) = M_1(x)\,M_2(y), \qquad N(x, y) = N_1(x)\,N_2(y),$$

в которых сомножители зависят только от одной переменной. Тогда уравнение (3) перепишется в виде:

$$M_1(x)\,M_2(y)\,dx + N_1(x)\,N_2(y)\,dy = 0, \tag{4}$$

откуда, деля почленно на произведение $M_2(y)\,N_1(x)$ (предполагаем, что оно не равно нулю), имеем:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0. \tag{5}$$

Заметим, что в уравнении (5) множитель перед dx — функция только одной переменной x, а множитель перед dy — функция только одной переменной y.

Уравнение (5) называется уравнением с *разделенными* переменными, а уравнение (4) — уравнением с *разделяющимися* переменными. Итак, уравнение с разделяющимися переменными (4) сводится к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих частей уравнения (4) на произведение $M_2(y)\,N_1(x)$. Эта операция называется «разделением» переменных.

Покажем, что соотношение

$$F(x, y) = C, \tag{6}$$

где

$$F(x, y) = \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy,$$

есть общий интеграл уравнения (5) и уравнения (4). Действительно, пусть $y = \varphi(x, C)$ (или кратко $y = \varphi$) — функция, определяемая уравнением (6). Тогда имеем тождество

$$F(x, \varphi) \equiv C.$$

Дифференцируя это тождество по x, получим тождество

$$F'_x(x, \varphi) + F'_y(x, \varphi)\,\varphi' \equiv 0$$

или

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy \equiv 0.$$

Следовательно, функция $y = \varphi(x, C)$ оказывается общим (поскольку зависит от C) решением уравнения (5), а следовательно, и уравнения (4). Значит, соотношение (6) или соотношение

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = C$$

есть общий интеграл уравнения (5) и уравнения (4).

Примечание. В общем случае, деля на произведение $M_2(y)\,N_1(x)$, мы рискуем потерять те решения уравнения (4), которые обращают это произведение в нуль. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $y = b$, где b — корень уравнения $M_2(y) = 0$, есть решение уравнения (4). Аналогично, функция $x = a$, где a — корень уравнения $N_1(x) = 0$, также является решением уравнения (4).

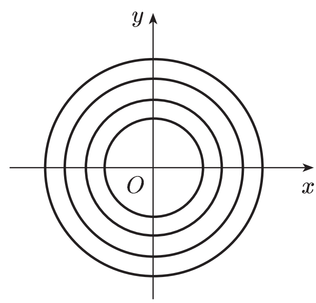

Рис. 105

Пример 1. Решить уравнение $x\,dx + y\,dy = 0$. Интегрируя, находим $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$. Так как левая часть последнего равенства неотрицательна, то и правая часть тоже неотрицательна. Обозначив $2C_1$ через C^2, будем иметь $x^2 + y^2 = C^2$. Это — уравнение семейства концентрических окружностей (рис. 105) с центром в начале координат и радиусом C.

Пример 2. Решить уравнение $x\,dy = y\,dx$. Разделяя переменные, получим: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя последнее уравнение, будем иметь:

$$\ln y = \ln x + C\,^{*)}. \tag{7}$$

---

*) Строго говоря, мы должны писать $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, где $C > 0$. Однако допущенная в (7) «вольность» не отразится на окончательном результате, если после потенцирования произвольную постоянную C считать действительным числом. Это следует иметь в виду и для дальнейшего.

В (7) произвольная постоянная взята в логарифмической форме, что законно, так как всякое положительное или отрицательное число C_1 может быть представлено как логарифм другого числа: $C_1 = \ln C$, где $C = e^{C_1}$.

Потенцируя равенство (7), получим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = xC \quad \text{или} \quad y = Cx.$$

Это семейство прямых, проходящих через начало координат (рис. 106).

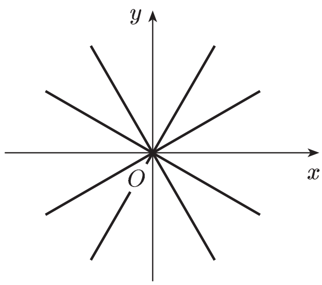

Рис. 106

Пример 3. Найти частное решение уравнения $(1+y^2)\,dx = xy\,dy$, если $y=1$ при $x=2$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dx}{x} = \frac{y}{1+y^2}\,dy,$$

$$\ln x = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln C,$$

что после потенцирования дает:

$$x^2 = C^2(1+y^2).$$

Используя начальное условие, имеем:

$$4 = 2C^2,$$

откуда: $C^2 = 2$.

Итак, частным решением данного уравнения, соответствующим начальному условию: $y=1$ при $x=2$, является функция $y = \sqrt{\dfrac{x^2}{2} - 1}$.

3. Задачи из естествознания. Рассмотрим несколько примеров приложений дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными к задачам естествознания, выделив отдельно химические реакции (п. 4) и оставив более содержательные задачи из биологии для специального рассмотрения (§ 42).

Задача 1. (*Об охлаждении тела.*) Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20° С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60° С. Определить закон изменения температуры Θ тела в зависимости от времени t.

Решение. Согласно условию задачи имеем:

$$\frac{d\Theta}{dt} = k(\Theta - 20),$$

где k — коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{d\Theta}{\Theta - 20} = k\,dt, \qquad \ln(\Theta - 20) = kt + \ln C,$$

что после потенцирования дает:

$$\Theta - 20 = Ce^{kt}$$

и, следовательно,

$$\Theta = 20 + Ce^{kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t=0$ $\Theta=100$. Отсюда: $C=80$. Поэтому

$$\Theta = 20+80e^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t=20$ $\Theta=60$. Отсюда:

$$60 = 20+80e^{20k} \quad \text{или} \quad e^{20k}=\frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Итак, искомая функция

$$\Theta = 20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}.$$

Задача 2. (*О радиоактивном распаде.*) Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличной массе. Найти закон распада радия, если известно, что в начальный момент $t=0$ имелось m_0 г радия и период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение. Пусть в момент времени t масса радия составляет x г. Тогда скорость распада радия равна:

$$\frac{d(m_0-x)}{dt} = -\frac{dx}{dt}.$$

По условию задачи

$$-\frac{dx}{dt} = kx, \tag{8}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Разделяя в уравнении (8) переменные и затем интегрируя, получаем:

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt, \qquad \ln x = -kt+\ln C,$$

что после потенцирования дает:

$$x = Ce^{-kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t=0$ $x=m_0$. Имеем: $C=m_0$ и, значит,

$$x = m_0e^{-kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t=1590$ $x=\frac{m_0}{2}$. Имеем:

$$\frac{m_0}{2} = m_0e^{-1590k} \quad \text{или} \quad e^{1590k}=2$$

и, следовательно, $e^k = 2^{1/1590}$. Поэтому искомая функция

$$x = m_0 2^{-t/1590}.$$

Задача 3. (*О скорости размножения бактерий.*) Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент $t=0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 ч?

Решение. Пусть x — количество бактерий, имеющихся в данный момент. Тогда согласно условию дифференциальное уравнение задачи:

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Как и при решении уравнения (8) в предыдущей задаче, находим:

$$x = Ce^{kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t=0$ $x=100$. Имеем: $C=100$, и, значит,

$$x = 100e^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: при $t=3$ $x=200$. Имеем:

$$200 = 100e^{3k} \quad \text{или} \quad 2 = e^{3k},$$

и, следовательно, $e^k = 2^{1/3}$. Поэтому искомая функция

$$x = 100 \cdot 2^{t/3},$$

откуда при $t=9$ $x=800$. Следовательно, в течение 9 ч количество бактерий увеличивается в 8 раз.

Задача 4. (*Об увеличении количества фермента.*) В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна наличному его количеству x. Первоначальное количество фермента a в течение часа удвоилось. Во сколько раз оно увеличится через 3 ч?

Решение. По условию задачи дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt} = kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Поэтому (см. решение предыдущих задач)

$$x = Ce^{kt}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t=0$ $x=a$. Имеем: $C=a$ и, значит,

$$x = ae^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности определяем из дополнительного условия: при $t=1$ ч $x=2a$. Имеем: $2a = ae^k$ или $e^k = 2$. Поэтому

$$x = a2^t,$$

откуда при $t=3$ ч $x=8a$. Следовательно, количество фермента через 3 ч увеличится в 8 раз.

Задача 5. (*О концентрации раствора.*) В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси (рис. 107). Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

Решение. Пусть x — количество соли в резервуаре в момент времени t, $-dx$ — количество соли, выходящее из резервуара за время dt (знак минус обусловлен тем, что x — убывающая функция времени). Объем смеси в резервуаре в момент времени t, очевидно, равен:

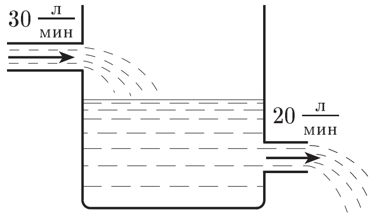

Рис. 107

$$v = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t,$$

поэтому концентрация соли (т. е. количество соли, содержащейся в одном литре смеси) в момент времени t будет равна:

$$\frac{x}{100+10t}.$$

Следовательно, за короткий промежуток времени dt количество соли уменьшится на

$$\frac{x}{100+10t}\cdot 20\,dt.$$

Отсюда имеем дифференциальное уравнение:

$$-dx = \frac{20x\,dt}{100+10t} \quad \text{или} \quad -dx = \frac{2x\,dt}{10+t}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2\,dt}{10+t}, \qquad \ln x = -2\ln(10+t) + \ln C$$

и, следовательно,

$$x = \frac{C}{(10+t)^2}.$$

При $t=0$ $x=10$. Поэтому $C=1000$. Итак, закон изменения количества соли в кг, находящейся в резервуаре, в зависимости от прошедшего времени t в мин задается формулой

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}. \tag{9}$$

Заметим, что из формулы (9), зная количество соли, оставшейся в резервуаре (последнее легко установить, измеряя объем резервуара и концентрацию соли в нем), можно определить, сколько времени прошло от начала процесса. На этой идее основано вычисление возраста морей и океанов.

4. Химические реакции. Порядок химической реакции равен общему числу молекул, входящих в левую часть химического уравнения. Так, $\mathrm{Ra}B \to \mathrm{Ra}C$ есть реакция первого порядка. Скорость реакции есть скорость v, с которой система компонентов левой части превращается в систему компонентов правой части уравнения реакции.

Действующая масса или концентрация реагирующего вещества A есть количество молей *) этого вещества в единице объема. Согласно закону действующих масс скорость реакции пропорциональна действующим массам в данный момент.

Химические реакции первого порядка. Если a — начальная концентрация вещества A, x — количество молей на литр, прореагировавших за время t от начала реакции, то скорость реакции $\frac{dx}{dt}$, а действующая масса к этому моменту $a-x$. Согласно закону действующих масс

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x), \tag{10}$$

где k — коэффициент пропорциональности (константа скорости), зависящий от рода и условий химического процесса. Разделяя в уравнении (10) переменные и затем интегрируя, получаем:

$$\frac{dx}{a-x}=k\,dt, \qquad -\ln(a-x)+\ln C=kt$$

или

$$\ln\frac{C}{a-x}=kt.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t=0$ $x=0$. Имеем: $C=a$, и, значит,

$$\ln\frac{a}{a-x}=kt,$$

откуда:

$$\frac{a}{a-x}=e^{kt} \quad \text{или} \quad a-x=ae^{-kt}$$

и

$$x=a(1-e^{-kt}).$$

Задача 1. Радиоактивный элемент RaB распадается наполовину, образуя радиоактивный элемент RaC, в течение 26,7 мин. Найти время распада 0,2 первоначального количества RaB.

Решение. Здесь имеет место реакция первого порядка: Ra$B\to$ $\to$ RaC. Поэтому согласно предыдущему дифференциальное уравнение реакции

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)$$

и, значит,

$$\ln\frac{a}{a-x}=kt,$$

откуда:

$$t=\frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-x}.$$

Коэфициент погрешности k определяем из дополнительного условия при $t=26{,}7$ мин $x=\frac{a}{2}$. Имеем:

*) Моль (или грамм-молекула) вещества — число граммов этого вещества, равное его молекулярному весу. Например, 1 моль кислорода равен 16 г, 1 моль воды — 18 г.

$$26{,}7 = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-a/2} = \frac{1}{k}\ln 2 \quad \text{или} \quad k = \frac{\ln 2}{26{,}7}.$$

Теперь искомое время

$$t = \frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{a}{a-0{,}2a} = \frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{1}{0{,}8} = \frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{5}{4} \approx 8{,}6 \text{ (мин)}.$$

Как и прежде, для облегчения вычислений здесь можно использовать калькулятор. То же в задаче 3.

Задача 2. Вещество A превращается в вещество B. Спустя 1 ч после начала реакции осталось 44,8 г вещества A, а после 3 ч 11,2 г вещества. Определить первоначальное количество a вещества A и время, когда останется половина этого вещества.

Решение. Здесь имеет место реакция первого порядка. Поэтому дифференциальное уравнение реакции

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)$$

и, значит, как установлено выше,

$$x = a(1-e^{-kt}).$$

Используя дополнительные условия (при $t=1$ $x=a-44{,}8$, при $t=3$ $x=a-11{,}2$), имеем:

$$\begin{aligned} a-44{,}8 &= a(1-e^{-k}),\\ a-11{,}2 &= a(1-e^{-3k}) \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 44{,}8 = ae^{-k},\\ 11{,}2 = ae^{-3k}. \end{cases}$$

Из последней системы находим: $e^{-k}=2^{-1}$, $a=89{,}6$ г. Теперь находим искомое время. Имеем:

$$\frac{a}{2} = a(1-2^{-t}),$$

откуда:

$$\frac{1}{2} = 2^{-t} \quad \text{или} \quad 2^{-1} = 2^{-t}$$

и, следовательно, $t=1$ ч.

Химические реакции второго порядка. Пусть a и b — начальные концентрации веществ A и B; x — число прореагировавших к моменту t молей вещества A, а следовательно, и вещества B, так как каждый моль вещества A соединяется с молем вещества B, и поэтому число прореагировавших молей обоих веществ одинаково. В момент t скорость реакции будет $\frac{dx}{dt}$. Действующая масса вещества A равна $a-x$; действующая масса вещества B будет $b-x$. Согласно закону действующих масс

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x),$$

где k — коэффициент пропорциональности. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = k\int dt + C.$$

Если $a = b$, то имеем: $\frac{1}{a-x} = kt + C$. Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C = \frac{1}{a}$ и поэтому

$$x = a - \frac{a}{1+akt}.$$

Если $a \neq b$, то (§ 22, п. 1, примечание):

$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{b-x}{a-x} = kt + C.$$

Так как при $t=0$ $x=0$, то $C = \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a}$ и поэтому

$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{b-x}{a-x} = kt + \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad kt = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)},$$

откуда:

$$\frac{b-x}{a-x} = \frac{b}{a} e^{(b-a)kt} \quad \text{и} \quad x = \frac{ab[e^{(b-a)kt} - 1]}{b \cdot e^{(b-a)kt} - a}.$$

З а д а ч а 3. В реакции омыления уксусноэтилового эфира гидроксидом натрия

$CH_3COOC_2H_5$	$+ NaOH \rightarrow$	CH_3COONa	$+ C_2H_5OH$
уксусноэтиловый эфир	гидроксид натрия	ацетат натрия	этиловый спирт

первоначальные концентрации уксусноэтилового эфира и гидроксида натрия соответственно $a = 0{,}01$ и $b = 0{,}002$. Спустя 23 мин концентрация уксусноэтилового эфира уменьшилась на 10 %. В какое время она уменьшится на 15 %?

Р е ш е н и е. Здесь имеет место реакция второго порядка. Поэтому дифференциальное уравнение реакции

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

и, значит, как установлено выше,

$$kt = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)}.$$

Коэффициент пропорциональности k определим из дополнительного условия: при $t = 23$ мин $x = 0{,}01 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$. Имеем:

$$23k = \frac{1}{0{,}002 - 0{,}01} \ln \frac{0{,}01(0{,}002 - 0{,}001)}{0{,}002(0{,}01 - 0{,}001)} \quad \text{или} \quad k = \frac{125}{23} \ln 1{,}8.$$

Теперь находим искомое время. Имеем:

$$\frac{125 \ln 1{,}8}{23} t = \frac{1}{0{,}002 - 0{,}01} \ln \frac{0{,}01(0{,}002 - 0{,}0015)}{0{,}002(0{,}01 - 0{,}0015)}$$

или

$$t = 23 \frac{\ln 3{,}4}{\ln 1{,}8} \approx 47{,}9 \text{ (мин)}.$$

Примечание. Аналогично рассматриваются реакции и более высокого порядка (см. [11]).

5. Однородные уравнения. Функция $f(x, y)$ называется *однородной измерения* m, если имеет место тождество

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Пример 1. Функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ является однородной функцией измерения 2, так как

$$(tx)^2 + 2(ty)^2 - (txty) = t^2(x^2 + 2y^2 - xy).$$

С понятием однородной функции связано понятие однородного дифференциального уравнения. Уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{11}$$

называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения.

Можно показать, что с помощью подстановки $y = ux$, где u — новая искомая функция от x, однородное уравнение (11) легко приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Заметим, что

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

Иногда целесообразно вместо подстановки $y = ux$ использовать подстановку $x = uy$.

Пример 2. Решить уравнение $(y^2 - 3x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$, если $y = 0$ при $x = 0$. Применяя подстановку $y = ux$, имеем:

$$(u^2x^2 - 3x^2)\,dx + 2x^2u(u\,dx + x\,du) = 0,$$

откуда:

$$3(u^2 - 1)\,dx + 2xu\,du = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{3\,dx}{x} + \frac{2u\,du}{u^2 - 1} = 0, \qquad 3\ln x + \ln(u^2 - 1) = \ln C,$$

что после потенцирования дает $x^3(u^2 - 1) = C$. Так как $u = \dfrac{y}{x}$, то $x^3 \times \times \left(\dfrac{y^2}{x^2} - 1\right) = C$ и общий интеграл $x(y^2 - x^2) = C$. Используя начальное условие, имеем: $C = 0$. Поэтому искомыми частными решениями являются $y = \pm x$.

6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение

$$y' + py = q, \tag{12}$$

где $p = p(x)$ и $q = q(x)$ — заданные непрерывные в интервале $(a; b)$ функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для решения уравнения (12) применим подстановку $y = uv$, причем функцию $u = u(x)$ будем считать новой неизвестной функцией, а функцию $v=v(x)$ мы выбираем произвольно. Эта подстановка дает $u'v+uv'+puv=q$ или $v\dfrac{du}{dx}+\left(\dfrac{dv}{dx}+pv\right)u=q$. Используя произвольный выбор функции v, подчиним ее условию $\dfrac{dv}{dx}+pv=0$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{dv}{v}=-p\,dx, \qquad \ln v=-\int p\,dx,$$

откуда:

$$v=e^{-\int p\,dx}.$$

Поэтому имеем уравнение

$$e^{-\int p\,dx}\frac{du}{dx}=q.$$

Решая его, получаем:

$$u=\int qe^{\int p\,dx}dx+C.$$

Возвращаясь к переменной y, находим общее решение уравнения (12):

$$y=e^{-\int p\,dx}\left[\int qe^{\int p\,dx}dx+C\right]. \tag{13}$$

Примечание. Если в уравнении (12) $q(x)=0$, то оно называется линейным однородным уравнением первого порядка, в противном случае линейным неоднородным уравнением первого порядка. Следовательно, линейное однородное уравнение первого порядка имеет вид:

$$y'+py=0. \tag{14}$$

Из формулы (13) следует формула общего решения уравнения (14):

$$y=Ce^{-\int p\,dx}. \tag{15}$$

Пример. Решить уравнение

$$y'-\frac{y}{x}=x.$$

Согласно формуле (13) имеем:

$$y=e^{\int\frac{dx}{x}}\left(C+\int xe^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right)=$$
$$=e^{\ln x}\left(C+\int xe^{-\ln x}\,dx\right)=x\left(C+\int dx\right)=Cx+x^2.$$

7. Применение линейных уравнений в естествознании.

Задача 1. Рассмотрим колонию микроорганизмов, обитающую в условиях неограниченных ресурсов питания. Предположим, что колония не подавляется никаким другим видом. В силу размножения и смертности число живых организмов в этой колонии будет меняться с течением времени. Найдем закон этого изменения.

Р е ш е н и е. Пусть $x = x(t)$ обозначает число живых организмов в момент t, а $x(t+\Delta t)$ — в момент $t+\Delta t$. Тогда разность

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \Delta x$$

дает приращение функции $x(t)$ за промежуток времени от t до $t+\Delta t$.

Из чего складывается это приращение? За время Δt все взрослые особи или часть их произведут потомство; часть особей может погибнуть.

Таким образом,

$$\Delta x = G - H,$$

где G — число родившихся за время от t до $t+\Delta t$, а H — число погибших за это время.

Число G зависит от длины промежутка Δt (чем больше Δt, тем больше G) и от количества «родителей» (чем больше взрослых особей, тем больше потомство). Таким образом,

$$G = \Phi(x, \Delta t),$$

где функция $\Phi(x, \Delta t)$ растет с ростом x или Δt и равна нулю, если равна нулю одна из этих переменных.

Что касается переменной Δt, то самые простые эксперименты показывают, что она должна входить линейно: если промежуточные наблюдения увеличить, например, в два раза, то и прирост потомства микроорганизмов увеличится в два раза. Таким образом,

$$\Phi(x, \Delta t) = f(x)\,\Delta t.$$

Вопрос о характере функции $f(x)$ сложнее. Пока мы знаем только, что она монотонно возрастает с ростом x и равна нулю при $x = 0$. Но каков этот рост? Он существенно зависит от биологических особенностей исследуемого вида, и для его описания могут понадобиться те или иные положительные степени x, рациональная функция и т. п. Ограничимся простейшим случаем, когда численность потомства пропорциональна количеству «родителей», $f(x) = \alpha x$, $\alpha = \text{const}$.

Этот случай реализуется, например, при делении клеток.

Итак,

$$G = \alpha x\,\Delta t.$$

По аналогии

$$H = \beta x\,\Delta t$$

и, следовательно,

$$\Delta x = \alpha x\,\Delta t - \beta x\,\Delta t$$

или

$$\Delta x = \gamma x\,\Delta t, \tag{16}$$

где

$$\gamma = \alpha - \beta.$$

Разделим обе части равенства (16) на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Вспомнив, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt},$$

в результате получим:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \tag{17}$$

или

$$\frac{dx}{dt} - \gamma x = 0.$$

Имеем линейное однородное уравнение первого порядка. Согласно формуле (15) общее решение

$$x = Ce^{\gamma t}. \tag{18}$$

Начальное условие: при $t = t_0$ $x = x(t_0)$, где t_0 — время начала наблюдения за колонией, $x(t_0) = x_0$ — количество живых организмов в колонии в начальный момент. Используя начальное условие, из (18) имеем:

$$C = x_0 e^{-\gamma t_0}.$$

Подставляя это в (18), получаем искомый закон изменения числа организмов с течением времени:

$$x = x_0 e^{\gamma(t - t_0)}. \tag{19}$$

Однако найденный закон носит пока предположительный характер. Вопрос о том, насколько эта модель соответствует реальности, решает экспериментальная проверка. Из формулы (19) следует, что с ростом t численность поголовья растет неограниченно как экспонента. Однако ни в одной реально существующей популяции такой рост не наблюдается. Это и понятно. Те предположения, на основе которых мы вывели уравнение (17) (неограниченность ресурсов питания, отсутствие влияния других видов и т. п.), в реальных природных условиях не выполняются. Таким образом, уравнение (17) либо имеет смысл в теоретическом аспекте (оно показывает, как развивалась бы популяция, если бы ей не мешали и неограниченно подкармливали), либо описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой популяции (например, популяции грибков, выделяющих пенициллин, о которых говорилось в § 27).

Уравнение (17) впервые в 1802 г. получил Мальтус. Заблуждение Мальтуса заключалось в том, что это уравнение, справедливое для очень узкого класса популяций, он считал универсальным законом не только для всей природы, но и для человеческого общества.

Задача 2. (Модель сезонного роста.) Дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dx}{dt} = rx(t)\cos t$, где r — положительная постоянная, можно рассматривать как простую модель сезонного роста. Скорость роста $\frac{dx}{dt}$ популяции $x(t)$ становится попеременно то положительной, то отрицательной, и популяция то возрастает, то убывает. Это может вызываться такими сезонными факторами, как доступность пищи. Переписав данное уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt} - (r\cos t)\,x = 0,$$

согласно формуле (15) имеем:

$$x = Ce^{\int r\cos t\,dt} = Ce^{r\sin t}.$$

Полагая $t = 0$, получим $C = x(0)$, т. е. размер популяции в момент t есть $x = x(0)\,e^{r\sin t}$. Максимальный размер популяции, равный $e^r x(0)$, достигается при $t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$, когда $\sin t = 1$. Минимальный размер, равный $e^{-r}x(0)$, достигается при $t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$, когда $\sin t = -1$.

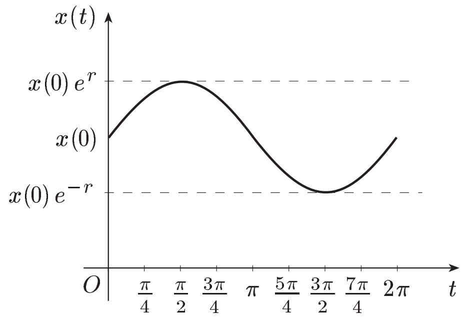

Рис. 108

В этой модели размер популяции колеблется от $e^r x(0)$ до $e^{-r}x(0)$ с периодом 2π. Моменты времени $t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ можно считать серединами сезонов наибольшей доступности пищи (летних сезонов), а моменты $t = \pi, 3\pi, \ldots$ соответствуют серединам сезонов наибольшей нехватки пищи (зимних сезонов). Продолжительность одного года соответствует 2π ед. времени. Это показано на рисунке 108.

Задача 3. (Внутреннее питание глюкозой). Вливание глюкозы в кровеносную систему является важной лечебной процедурой. Для изучения этого процесса определим $\tau = \tau(t)$ как количество глюкозы в крови пациента в момент времени t. Допустим, что глюкоза вводится в кровь с постоянной скоростью c (г/мин). В то же время глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы.

Пусть c_1 — скорость удаления глюкозы из кровеносной системы и $\tau(0)$ — начальное количество глюкозы в крови пациента. Имеем $\frac{d\tau(t)}{dt} = c - c_1$. Но в силу условия задачи $c_1 = k\tau(t)$, где k — положительная постоянная. Таким образом, $\frac{d\tau(t)}{dt} = c - k\tau(t)$, или, что то же,

$$\frac{d\tau}{dt} + k\tau = c.$$

Это — неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Согласно формуле (13) имеем:

$$\tau = e^{-\int k\,dt}\left(C + \int ce^{\int k\,dt}dt\right) = e^{-kt}\left(C + c\int e^{kt}\,dt\right) =$$

$$= e^{-kt}\left(C + \frac{c}{k}e^{kt}\right) = Ce^{-kt} + \frac{c}{k}.$$

Постоянную C можно выразить через начальное количество глюкозы в крови $\tau(0)$. Имеем $\tau(0) = C + \frac{c}{k}$. Значит, общее решение может быть записано в виде

$$\tau(t) = \frac{c}{k} + \left[\tau(0) - \frac{c}{k}\right] e^{-kt}.$$

С увеличением времени величина $\tau(t)$ приближается к пределу, равному $\frac{c}{k}$. Это есть равновесное количество глюкозы в крови.

Задача 4. (Закон перехода вещества в раствор.) Рассмотрим процесс перехода вещества в раствор. Известно, что при фиксированной температуре количество вещества, содержащееся в определенном объеме растворителя, не может превзойти некоторого, определенного для каждого вещества числа P, соответствующего насыщенному раствору. Известно также, что по мере приближения к насыщенному раствору уменьшается количество вещества, переходящего в раствор за единицу времени. Иными словами, чем больше вещества перешло в раствор, тем меньше скорость перехода.

Пусть $x = x(t)$ — количество вещества, перешедшего в раствор к моменту времени t. Тогда $\frac{dx}{dt}$ — скорость перехода, и в соответствии со сказанным можно написать:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ стремится к нулю при $x \to P$ $(x < P)$. Эксперименты показывают, что для многих веществ функция $\Phi(x)$ пропорциональна разности $P - x$, т. е. $\Phi(x) = k(P - x)$, и, следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = k(P - x),$$

где k $(k > 0)$ — коэффициент пропрциональности, или

$$\frac{dx}{dt} + kx = kP.$$

Это — неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Согласно формуле (13) имеем:

$$x = e^{-\int k\,dt}\left(C + \int kPe^{\int k\,dt}dt\right) = e^{-kt}\left(C + kP\int e^{kt}\,dt\right) =$$

$$= Ce^{-kt} + \frac{k}{k}Pe^{-kt}e^{kt} = Ce^{-kt} + P.$$

Пусть t_0 — момент времени, с которого начался процесс перехода вещества в раствор. Очевидно, $x(t_0) = 0$. Поэтому $P + Ce^{-kt_0} = 0$, откуда $C = -Pe^{kt_0}$, и, значит,

$$x(t) = P[1 - e^{-k(t-t_0)}]. \tag{20}$$

Значения k и P определяются характером растворенного вещества и растворителя. Из (20) видно, что при любых $k > 0$ и P величина $x(t)$ стремится к P, если $t \to \infty$. Вид функции $x(t)$ хорошо согласуется с экспериментальными данными. Поэтому формулу (20) можно рассматривать как закон перехода вещества в раствор.

З а д а ч а 5. Конденсатор емкостью Q включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Р е ш е н и е. Сила I электрического тока представляет производную от количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени t

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

В момент t заряд конденсатора q и сила тока $I = \dfrac{dq}{dt}$; в цепи действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\dfrac{q}{Q}$, т. е.

$$E = U - \frac{q}{Q}.$$

Согласно закону Ома

$$I = \frac{E}{R}.$$

Поэтому

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{Q}}{R}.$$

Отсюда:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{QR} = \frac{U}{R}.$$

Теперь согласно формуле (13) имеем:

$$q = e^{-\int \frac{dt}{QR}} \left(C + \int \frac{U}{R} e^{\int \frac{dt}{QR}} dt \right) = e^{-\frac{t}{QR}} \left(C + \frac{U}{R} \int e^{\frac{t}{QR}} dt \right) =$$

$$= e^{-\frac{t}{QR}} \left(C + \frac{UQR}{R} e^{\frac{t}{QR}} \right) = Ce^{-\frac{t}{QR}} + UQ.$$

По условию при $t = 0$ $q = 0$ и потому $0 = C + UQ$ и $C = -UQ$.

Таким образом, в момент времени t

$$q = UQ\left(1 - e^{-\frac{t}{QR}}\right).$$

З а д а ч а 6. Скорость v, путь s и время t связаны уравнением $v\cos t + s\sin t = 1$. Найти закон движения, если при $t = 0$ $s = 2$.

Р е ш е н и е. Так как $v = \dfrac{ds}{dt}$, то, подставляя это значение v в данное уравнение, получаем дифференциальное уравнение движения

$$\frac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1 \quad \text{или} \quad \frac{ds}{dt} + s\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}.$$

Теперь согласно формуле (13) имеем:

$$s = e^{-\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt}\left(C + \int \frac{1}{\cos t} e^{\int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt}\,dt\right) =$$

$$= e^{\int \frac{d\cos t}{\cos t}}\left(C + \int \frac{1}{\cos t} e^{-\int \frac{d\cos t}{\cos t}}\,dt\right) =$$

$$= e^{\ln\cos t}\left(C + \int \frac{1}{\cos t} e^{-\ln\cos t}\,dt\right) = \cos t\cdot\left(C + \int \frac{dt}{\cos^2 t}\right) =$$

$$= \cos t\cdot(C + \operatorname{tg} t) = C\cos t + \sin t.$$

По условию при $t=0$ $s=2$ и потому $C=2$. Таким образом, искомый закон движения $s = \sin t + 2\cos t$.

§ 39. Дифференциальные уравнения второго порядка

1. Дифференциальное уравнение второго порядка, его общее решение и начальные условия. Дифференциальное уравнение *второго порядка*, разрешенное относительно y'', имеет вид:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1}$$

В общее решение уравнения первого порядка входит одна произвольная постоянная C. Естественно ожидать, что в общее решение уравнения (1) будут входить уже две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, удовлетворяющая уравнению (1), называется его *общим решением*.

Так как в функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ входят две произвольные постоянные C_1 и C_2, то для выделения из общего решения уравнения (1) некоторого частного решения необходимо иметь два начальных условия: при $x = x_0$ $y = y_0$, $y' = y_0'$. Тогда:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y_0' = \varphi_x'(x_0, C_1, C_2). \end{cases}$$

Из этой системы можно, вообще говоря, определить постоянные C_1 и C_2 и тем самым найти *частное* решение уравнения (1).

Пример. Найти решение уравнения $y'' = 2$, удовлетворяющее начальным условиям: $y=1$ и $y'=2$ при $x=0$. Интегрируя данное уравнение по x последовательно два раза, получим: $y' = 2x + C_1$, а затем $y = x^2 + C_1 x + C_2$. Используя теперь начальные условия, найдем: $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. Следовательно, искомое решение $y = x^2 + 2x + 1$ или $y = (x+1)^2$.

2. Понижение порядка дифференциального уравнения. Рассмотрим два частных случая, когда уравнение второго порядка сводится к дифференциальному уравнению первого порядка.

I. Уравнение вида:

$$y'' = f(x) \tag{2}$$

с непрерывной в интервале (a, b) функцией $f(x)$ может быть интегрировано последовательно. В результате получим общее решение уравнения (2) $y = \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2$.

З а д а ч а 1. Тело движется прямолинейно с ускорением $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 12t^2 + 6t$. Найти закон движения тела, если в начальный момент движения пройденный путь и скорость равнялись нулю.

Р е ш е н и е. Решая данное уравнение по типу уравнения (2), получаем: $s(t) = t^4 + t^3 + C_1 t + C_2$. Теперь, используя начальные условия $s(0) = 0$, $\frac{ds(0)}{dt} = 0$, находим: $C_2 = 0$, $C_1 = 0$. Следовательно, $s(t) = t^4 + t^3$.

II. Пусть уравнение (1) имеет вид: $y'' = f(y)$. Полагаем: $y' = p$. Тогда: $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ и данное уравнение принимает вид: $p\frac{dp}{dy} = f(y)$ или $p\,dp = f(y)\,dy$, т. е. приходим к уравнению первого порядка с разделенными переменными.

З а д а ч а 2. Материальная точка массой m движется по прямой линии к центру O (рис. 109), притягивающему ее силой $\frac{km}{r^3}$, где r — расстояние точки от центра. Движение начинается с состояния покоя при $r = a$. Найти время, за которое точка достигнет цента O.

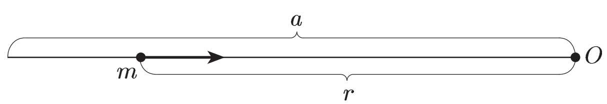

Рис. 109

Р е ш е н и е. По условию задачи в любой момент времени t на точку действует сила $F = -\frac{km}{r^3}$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{km}{r^3}$$

или

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k}{r^3}. \tag{3}$$

Обозначим $\frac{dr}{dt} = p$. Тогда $\frac{d^2 r}{dt^2} = p\frac{dp}{dr}$ и уравнение (3) перепишется в виде:

$$\frac{p\,dp}{dr} = -\frac{k}{r^3}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь:

$$p\,dp = -\frac{k}{r^3}\,dr, \qquad p^2 = \frac{k}{r^2} + C_1$$

откуда:

$$p = \frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{k}{r^2} + C_1}$$

$\Big($перед радикалом ставится знак минус, так как по смыслу задачи функция r убывает и $\frac{dr}{dt} < 0\Big)$ или

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\sqrt{k + C_1 r^2}}{r}.$$

Разделяя переменные в последнем уравнении и затем интегрируя, получаем:

$$-\frac{dr}{\sqrt{\frac{k}{r^2} + C_1}} = dt \quad \text{или} \quad -\frac{r\,dr}{\sqrt{k + C_1 r^2}} = dt,$$

$$-\frac{\sqrt{k + C_1 r^2}}{C_1} = t + C_2.$$

Используя начальные условия, имеем: при $t = 0$ $r = a$, $\frac{dr}{dt} = 0$. Получим:

$$C_2 = -\frac{\sqrt{k + C_1 a^2}}{C_1}, \qquad 0 = -\frac{\sqrt{k + C_1 a^2}}{r},$$

откуда: $C_1 = -\frac{k}{a^2}$, $C_2 = 0$. Поэтому

$$t = \frac{a\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{k}}.$$

Когда точка достигает центра O, расстояние $r = 0$ и искомое время $t = \frac{a^2}{\sqrt{k}}$.

§ 40. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

1. Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка. Уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{1}$$

где $p = p(x)$, $q = q(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции в интервале (a, b), называется *неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка*, функции p, q — его *коэффициентами*. Если $f(x) = 0$ в этом интервале, то уравнение принимает вид:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

и называется *однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка*. Если уравнение (2) имеет те же коэффициенты, как (1), то оно называется *однородным уравнением*, *соответствующим неоднородному уравнению* (1).

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$, определенные и непрерывные в интервале (a, b), называются *линейно зависимыми* в этом интервале, если существуют постоянные числа α_1 и α_2 (причем по крайней мере одно из них не равно нулю), такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождественное соотношение

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0. \tag{3}$$

Функции y_1 и y_2 называются *линейно независимыми* в интервале $(a; b)$, если тождество (3) может иметь место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Теорема 1. *Если y_1 и y_2 — линейно независимые частные решения линейного однородного уравнения второго порядка* (2), *то общее решение этого уравнения имеет вид*:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Доказательство. Так как y_1 и y_2 — решения уравнения (2), то имеем тождества:

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0, \qquad y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0.$$

Используя их, получаем тождество

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$
$$= C_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) = 0.$$

Следовательно, выражение (4) является решением уравнения (2), и поскольку это решение содержит две произвольные постоянные, то оно является общим решением однородного уравнения (2). Теорема доказана.

Пусть y_1 и y_2 — два линейно зависимых решения уравнения (2). Тогда:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0,$$

где либо $\alpha_1 \neq 0$, либо $\alpha_2 \neq 0$. Предположим для определенности, что $\alpha_2 \neq 0$. Тогда из (3) $y_2 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} y_1$ или $y_2 = a y_1$ $\left(a = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$. Подставляя это в (4), получаем: $y = C_1 y_1 + C_2 a y_1 = (C_1 + aC_2)\, y_1 = C y_1$, где $C = C_1 + aC_2$. Отсюда видно, что если y_1 и y_2 — линейно зависимые решения однородные уравнения (2), то решение (4) содержит только одну произвольную постоянную C и, следовательно, не является общим.

Для общего решения неоднородного уравнения (1) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Общее решение неоднородного уравнения* (1) *равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения* (2) *и любого частного решения данного неоднородного уравнения.*

Доказательство. Пусть $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ — общее решение уравнения (2) и z — любое частное решение уравнения (1). Имеем тождества $Y'' + pY' + qY = 0$, $z'' + pz' + qz = f(x)$. Складывая почленно эти два тождества, получим тождество $(Y + z)'' + p(Y + z)' +$

$+q(Y+z)=f(x)$. Следовательно, функция $y=Y+z=C_1y_1+C_2y_2+$ $+z$ — решение уравнения (1) и при этом общее, так как в эту функцию входят две произвольные постоянные C_1 и C_2.

2. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Пусть в линейном однородном уравнении

$$y''+py'+qy=0 \tag{5}$$

p и q — постоянные действительные числа.

Частное решение уравнения (5) будем искать в виде функции

$$y=e^{kx}, \tag{6}$$

где k — действительное или комплексное число, подлежащее определению. Дифференцируя по x выражение (6), получим:

$$y'=ke^{kx}, \qquad y''=k^2e^{kx}. \tag{7}$$

Внося выражения (6) и (7) в уравнение (5), будем иметь:

$$e^{kx}(k^2+pk+q)=0.$$

Отсюда, учитывая, что $e^{kx}\neq 0$, имеем:

$$k^2+pk+q=0. \tag{8}$$

Алгебраическое уравнение (8) называется *характеристическим* уравнением однородного уравнения (5). Характеристическое уравнение и дает возможность найти k. Уравнение (8) есть уравнение второй степени и потому имеет два корня. Обозначим их через k_1 и k_2. Возможны три случая.

1) Корни k_1 и k_2 действительные и разные ($k_1\neq k_2$). В этом случае по формуле (6) получим два частных решения уравнения (5) $y_1=e^{k_1x}$, $y_2=e^{k_2x}$, которые являются линейно независимыми. Действительно, если бы эти решения были линейно зависимы, то в интервале (a,b) должно было бы выполняться тождество $\alpha_1e^{k_1x}+$ $+\alpha_2e^{k_2x}=0$ (α_1 и α_2 одновременно не нули) или тождество $\alpha_1e^{k_1x}=$ $=-\alpha_2e^{k_2x}$. Отсюда $\alpha_1e^{(k_1-k_2)x}=-\alpha_2$, что невозможно, так как справа в последнем тождестве постоянное число, а слева функция от x. По теореме 1 следует, что общее решение уравнения (5) будет $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$.

Пример 1. Решить уравнение $y''-3y'+2y=0$. Его характеристическое уравнение $k^2-3k+2=0$ имеет два различных действительных корня $k_1=1$ и $k_2=2$. Поэтому общее решение есть $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2) Корни k_1 и k_2 действительные и равные ($k_1=k_2$). В этом случае одно частное решение уравнения (5) выразится фунцкией $y_1=e^{k_1x}$. Частным решением уравнения (5) в случае 2) будет также функция $y_2=xe^{k_1x}$. Действительно, $y_2''+py_2'+qy_2=(2+k_1x)\times$ $\times k_1e^{k_1x}+p(1+k_1x)e^{k_1x}+qxe^{k_1x}=e^{k_1x}[(k_1^2+pk_1+q)x+2k_1+p]=$ $=e^{k_1x}(-p+p)=0$. Заметим, что решения e^{k_1x} и xe^{k_1x} были линейно

независимы, так как если бы функции e^{k_1x} и xe^{k_1x} были линейно зависимы, то в интервале $(a;b)$ выполнялось бы тождество $\alpha_1 e^{k_1x} + \alpha_2 xe^{k_1x} = 0$ (α_1 и α_2 одновременно не нули) и, значит, тождество $\alpha_1 + \alpha_2 x = 0$, что невозможно. Следовательно, общее решение уравнения (5) в данном случае

$$y = C_1 e^{k_1x} + C_2 xe^{k_1x} = e^{k_1x}(C_1 + C_2x).$$

Пример 2. Уравнению $y'' - 6y' + 9y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$, имеющее равные корни $k_1 = k_2 = 3$. Поэтому общее решение будет $y = (C_1 + C_2x)\,e^{3x}$.

3) Корни $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ комплексные. Можно показать, что общее решение уравнения (5) в этом случае

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

Пример 3. $y'' - 2y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$. Следовательно, общим решением будет функция $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим теперь решение некоторых типов линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{9}$$

где p, q — постоянные действительные числа, $f(x)$ — известная непрерывная функция в интервале $(a;b)$. По теореме 2 для нахождения общего решения уравнения (9) надо знать общее решение Y соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ (для этого используются результаты пункта 2 настоящего параграфа) и частное решение z уравнения (9).

Вид частного решения уравнения (9) зависит от вида правой части этого уравнения. Укажем на некоторые случаи.

а) $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ ($a_0 \neq 0$). Если $q \neq 0$, то частное решение z уравнения (9) ищется также в форме квадратного трехчлена: $z = A_0x^2 + A_1x + A_2$, где A_0, A_1 и A_2 — неопределенные коэффициенты. Отсюда $z' = 2A_0x + A_1$, $z'' = 2A_0$. Подставляя эти выражения в уравнение (9), в котором $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, получим:

$$A_0qx^2 + (2A_0p + A_1q)\,x + 2A_0 + A_1p + A_2q = a_0x^2 + a_1x + a_2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего соотношения, имеем:

$$A_0q = a_0, \qquad 2A_0p + A_1q = a_1, \qquad 2A_0 + A_1p + A_2q = a_2. \tag{10}$$

Так как $q \neq 0$, то из (10) для коэффициентов A_0, A_1 и A_2 получаются определенные числовые значения. Тем самым частное решение z будет вполне определено. Если $q = 0$, то частное решение z уравнения (9) ищется в форме $z = x(A_0x^2 + A_1x + A_2)$, когда 0 — однократный корень характеристического уравнения (8), и в форме

$z = x^2(A_0x^2 + A_1x + A_2)$, когда 0 — двукратный корень характеристического уравнения (8). Аналогично обстоит дело, если $f(x)$ — многочлен $P_n(x)$ степени n.

П р и м е р 1. Решить уравнение $y'' - y = x^2$. Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения будет $Y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. Частное решение данного уравнения ищем в виде $z = A_0x^2 + A_1x + A_2$. Находим: $z' = 2A_0x + A_1$, $z'' = 2A_0$. Подставив эти выражения в данное уравнение, получим: $2A_0 - A_0x^2 - A_1x - A_2 = x^2$, откуда: $-A_0 = 1$, $A_1 = 0$, $2A_0 - A_2 = 0$. Поэтому $z = -x^2 - 2$ и общее решение данного уравнения будет $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 - 2$.

б) $f(x) = ae^{bx}$ $(a \neq 0)$. Частное решение ищется в форме показательной функции $z = Ae^{bx}$, где A — неопределенный коэффициент. Отсюда $z' = Abe^{bx}$, $z'' = Ab^2e^{bx}$. Подставляя эти выражения в уравнение (9), в котором $f(x) = ae^{bx}$, после сокращения на e^{bx} будем иметь: $A(b^2 + pb + q) = a$. Отсюда видно, что если b не является корнем характеристического уравнения, то

$$z = \frac{ae^{kx}}{b^2 + pb + q}.$$

Если b — корень характеристического уравнения, то частное решение уравнения (9) ищется в форме $z = Axe^{bx}$, когда b — однократный корень, и в форме $z = Ax^2e^{bx}$, когда b — двукратный корень.

П р и м е р 2. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 2e^x$. Имеем: $k^2 - 2k + 1 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$, $Y = (C_1 + C_2x)\,e^x$. Так как в данном уравнении $b = 1$ — корень кратности 2 характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде: $z = Ax^2e^x$. Далее имеем:

$$z' = Ax(x+2)\,e^x, \qquad z'' = A(x^2 + 4x + 2)\,e^x,$$

$$Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2Axe^x(x+2) + Ax^2e^x = 2e^x, \qquad A = 1,$$

$$z = x^2e^x, \qquad y = (C_1 + C_2x)\,e^x + x^2e^x.$$

в) $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ (a и b не нули одновременно). В этом случае частное решение z ищется также в форме тригонометрического двучлена

$$z = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

(A и B — неопределенные коэффициенты); отсюда:

$$z' = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x, \qquad z'' = -A\omega^2\cos\omega x - B\omega^2\sin\omega x.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9), в котором $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$, получим:

$$(-A\omega^2 + Bp\omega + Aq)\cos\omega x + (-B\omega^2 - Ap\omega + Bq)\sin\omega x \equiv \equiv a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

Так как последнее равенство представляет собой тождество, то коэффициенты при $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$ в левой и правой частях этого равенства должны быть соответственно равны друг другу. Поэтому

$$A(q-\omega^2)+Bp\omega=a, \qquad -Ap\omega+B(q-\omega^2)=b.$$

Эти уравнения определяют коэффициенты A и B, кроме случая, когда $p=0$, $q=\omega^2$ (или когда $\pm\omega i$ — корни характеристического уравнения). В последнем случае частное решение уравнения (9) ищется в виде: $z=x(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$.

Пример 3. Решить уравнение $y''+y=\cos x$. Имеем:

$$k^2+1=0, \qquad k_1=i, \qquad k_2=-i, \qquad Y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Так как $\pm i$ — корни характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде: $z=x(A\cos x+B\sin x)$.

Далее имеем:

$$z'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x),$$

$$z''=-2A\sin x+2B\cos x-x(A\cos x+B\sin x),$$

$$-2A\sin x+2B\cos x=\cos x, \qquad A=0, \qquad B=\frac{1}{2}, \qquad z=\frac{x}{2}\sin x,$$

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x.$$

4. Гармонический осциллятор. Резонанс. Пусть на идеально гладком столе лежит шарик массы m, прикрепленный к пружине с

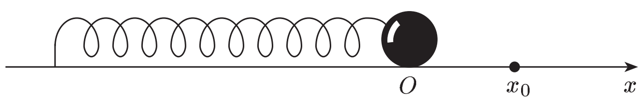

Рис. 110

коэффициентом жесткости $\lambda>0$ (рис. 110). Направим ось Ox вдоль пружины, а за начало координат примем ту точку, в которой шарик находится в положении равновесия (пружина не растянута). Отведем теперь шарик от положения равновесия на расстояние x_0 и отпустим его. Тогда со стороны пружины на шарик будет действовать сила F, стремящаяся вернуть его в положение равновесия. Из физики известно, что эта сила равна (для малых x)

$$F(x)=-\lambda x \tag{11}$$

(знак минус поставлен потому, что направление действующей силы обратно по знаку смещению x).

Запишем второй закон Ньютона для шарика

$$F=ma, \tag{12}$$

где ускорение $a=\dfrac{d^2x}{dt^2}$ (см. § 16, п. 6).

Из (11, (12) имеем:

$$ma = -\lambda x \quad \text{или} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x.$$

Отсюда:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{13}$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{\lambda}{m}}$.

Для уравнения (13) запишем характеристическое уравнение

$$k^2 + \omega^2 = 0.$$

Его корнями будут: $k_1 = \omega i$, $k_2 = -\omega i$. Поэтому общее решение уравнения (13) имеет вид:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \tag{14}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Выясним теперь, каковы начальные условия. В момент времени $t = 0$ $x = x_0$, а скорость равна нулю; значит,

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Но из (14) следует, что

$$\frac{dx}{dt} = -C_1\omega \sin\omega t + C_2\omega \cos\omega t.$$

Поэтому (15) перепишется в виде:

$$\begin{cases} C_1 + 0 = x_0, \\ 0 + C_2\omega = 0. \end{cases}$$

Отсюда: $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$ и

$$x = x_0 \cos\omega t. \tag{16}$$

Другими словами, шарик будет совершать гармонические колебания с амплитудой $|x_0|$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$$

(ω называется частотой колебаний) *).

Как говорят в физике, мы имеем здесь гармонический осциллятор.

В действительности мы знаем, что шарик не может колебаться бесконечно долго, и амплитуда колебаний стремится к нулю. Это происходит потому, что в любом реальном опыте присутствует сила трения, которой мы пренебрегли при выводе уравнения (13).

Однако если сила трения очень мала, а промежуток времени не слишком большой, то (13) и (16) описывают процесс с хорошим приближением.

Пусть теперь на шарик действует еще одна сила F_1, направленная вдоль оси Ox и изменяющаяся по закону

*) Период T находим из формулы $\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$, где 2π — период косинуса.

$$F_1 = F_0 \sin pt$$

(F_0 и p — положительные постоянные).

Тогда второй закон Ньютона примет вид:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda x + F_0 \sin pt$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \alpha_0 \sin pt, \tag{17}$$

где $\alpha_0 = \dfrac{F_0}{m}$.

Уравнение (17) называется уравнением *вынужденных колебаний*, а уравнение (13) — уравнением *свободных колебаний*.

Найдем частное решение неоднородного уравнения (17).

1) Пусть $p \neq \omega$, т. е. частота внешней силы не совпадает с частотой свободных колебаний. Частное решение ищем в виде:

$$z = A\cos pt + B\sin pt,$$

откуда

$$z' = -pA\sin pt + pB\cos pt, \qquad z'' = -p^2A\cos pt - p^2B\sin pt.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (17), получим:

$$-p^2(A\cos pt + B\sin pt) + \omega^2(A\cos pt + B\sin pt) = \alpha_0 \sin pt,$$

$$A(\omega^2 - p^2)\cos pt + B(\omega^2 - p^2)\sin pt = \alpha_0 \sin pt.$$

Отсюда:

$$A(\omega^2 - p^2) = 0, \qquad B(\omega^2 - p^2) = \alpha_0$$

и, следовательно, $A = 0$, $B = \dfrac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2}$. Поэтому

$$z = \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2}\sin pt$$

и общее решение уравнения (17) для случая $p \neq \omega$ будет:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{\alpha_0}{\omega^2 - p^2}\sin pt.$$

Это решение представляет собой наложение двух гармонических колебаний с частотами ω и p, причем колебания ограничены.

2) $p = \omega$, т. е. частота внешней силы совпадает с частотой свободных колебаний. В этом случае частное решение уравнения (17) ищем в виде:

$$z = t(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Отсюда:

$$z' = A\cos\omega t + B\sin\omega t + t\omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t),$$

$$z'' = 2\omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t) - t\omega^2(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (17), получим:

$$2\omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t) = \alpha_0\sin\omega t,$$

откуда:

$$-2A\omega = \alpha_0, \qquad 2B\omega = 0$$

или $A = -\dfrac{\alpha_0}{2\omega}$, $B = 0$. Поэтому

$$z = -\frac{\alpha_0 t}{2\omega}\cos\omega t$$

и общее решение уравнения (17) в случае $p = \omega$ будет:

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \frac{\alpha_0 t}{2\omega}\cos\omega t.$$

Последняя формула показывает, что размах колебаний x неограниченно растет вместе со временем t (рис. 111). Это явление носит

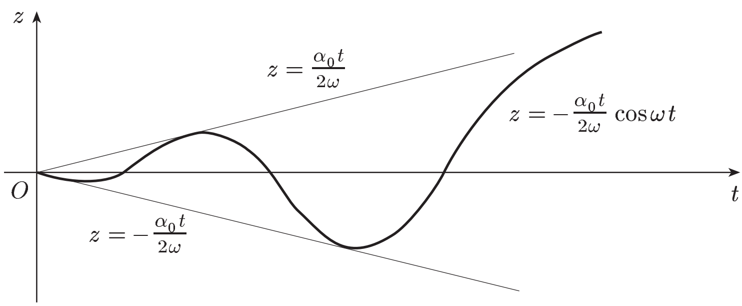

Рис. 111

название резонанса. При работе многих механизмов резонанс крайне нежелателен, так как он приводит к нарушению их правильной работы и даже к разрушению.

§ 41. Волновое уравнение и уравнение Лапласа

1. Уравнение в частных производных. Пусть функция u описывает некоторый физический процесс. Всякий процесс протекает в пространстве, точки которого можно характеризовать декартовыми прямоугольными координатами (x, y, z), и во времени t. Поэтому в общем случае функция u является функцией четырех переменных: $u = u(x, y, z, t)$. Дифференцируя функцию u, получаем частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и т. д. В данном процессе эти производные связаны известными соотношениями, и, таким образом, приходим к *дифференциальному уравнению, содержащему частные производные*.

Для физических приложений особый интерес представляют дифференциальные уравнения, для которых входящие в них старшие частные производные имеют второй порядок (так называемые *дифференциальные уравнения второго порядка*). К числу их относятся уравнения газовой динамики, уравнения гидродинамики, математические уравнения электромагнетизма (уравнения Максвелла) и многие другие. Поэтому дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка получили название *уравнений математической физики*.

Ограничимся для простоты случаем двух независимых переменных x, y: $u = u(x, y)$. Тогда общий вид дифференциального уравнения с частными производными второго порядка для неизвестной функции u следующий:

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{x^2}, u''_{xy}, u''_{y^2}) = 0, \tag{1}$$

где F — известная функция.

Всякая функция $u = \varphi(x, y)$, обращающая уравнение (1) в тождество, называется его *решением*. Такое решение по аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями называется *частным*.

Нахождение частного решения, удовлетворяющего тем или иным условиям, — основная задача теории дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь мы не будем заниматься этой задачей в сколько-нибудь общей форме, а остановимся только на одной из таких задач.

2. Задача о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах. Рассмотрим однородную упругую струну, натянутую вдоль оси Ox и закрепленную за два конца. Пусть в какой-то момент времени струна выводится из этого состояния покоя (например, щипком или нажимом в какой-либо ее точке) и затем внешнее механическое воздействие на струну прекращается. Струна начинает колебаться, и ее колебания будем называть *свободными колебаниями*. Предположим, что колебания происходят так, что каждая точка струны отклоняется по перпендикуляру к оси Ox и все эти перпендикуляры лежат в одной и той же плоскости. Будем, кроме того, изучать «малые» колебания струны, т. е. такие колебания, при которых наклон струны к оси Ox (т. е. угол между касательной к струне и осью Ox) остается все время очень малым.

В учебниках по математической физике (см., например, [9]) выводится уравнение движения точек струны при сделанных выше предположениях.

Если обозначить через $u(x, t)$ смещение (по перпендикуляру к оси Ox) точки струны с абсциссой x в любой момент времени t, то уравнение свободных малых колебаний струны имеем вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где a^2 есть положительная постоянная, величина которой определяется материалом струны и ее натяжением. Уравнение (2) представляет собой дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка. Его называют *одномерным волновым уравнением*.

Для полного определения движения струны одного уравнения (2) недостаточно. Искомая функция $u(x, t)$ должна еще удовлетворять *граничным* (*краевым*) *условиям*, указывающим, что делается на концах струны ($x = 0$ и $x = l$), и начальным условиям, описывающим состояние струны в начальный момент ($t = 0$).

Пусть, например, как мы полагаем, концы струны при $x = 0$ и $x = l$ неподвижны. Тогда при любом t должны выполняться равенства

$$u(0, t) = 0, \tag{3}$$

$$u(l, t) = 0. \tag{4}$$

Эти равенства являются граничными условиями для нашей задачи.

В начальный момент $t = 0$ струна имеет определенную форму, которую мы ей придали. Пусть эта форма определяется функцией $f(x)$. Таким образом, должно быть

$$u(x, 0) = u\big|_{t=0} = f(x). \tag{5}$$

Далее, в начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая пусть определяется функцией $\varphi(x)$. Таким образом, должно быть

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi(x). \tag{6}$$

Условия (5) и (6) являются начальными условиями.

3. Метод Фурье. Уравнение (2) будем решать методом разделения переменных (методом Фурье). Суть его заключается в том, что мы отыскиваем частные решения уравнения (2), удовлетворяющие пока только краевым условиям (3), (4), в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

При этом мы ищем нетривиальные решения, т. е. тождественно не равные нулю.

Подставим функцию $u(x, t) = X(x)T(t)$ в уравнение (2):

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t) \quad \text{или} \quad \frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Мы получили равенство, в котором левая часть не зависит от x, а правая — от t. Следовательно, обе части равенства не зависят ни от x, ни от t, т. е. являются постоянными. Обозначим эту постоянную*) символом $-\lambda^2$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Тогда

*) Если она положительна или равна нулю, то придем к тривиальному решению (см. [9]).

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0,$$
$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$T(t) = A\cos\lambda at + B\sin\lambda at,$$
$$X(x) = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x.$$

Таким образом,

$$u(x,\, t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x).$$

Полагая здесь $x = 0$, получим:

$$u(0,\, t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)\, C \equiv 0.$$

Значит, $C = 0$. Далее, поскольку

$$u(l,\, t) = (A\cos\lambda at + B\sin\lambda at)\, D\sin\lambda l \equiv 0,$$

то λ следует выбрать так, чтобы

$$\sin\lambda l = 0, \qquad \lambda l = k\pi, \qquad \lambda = \frac{k\pi}{l}.$$

Эти значения λ называются *собственными значениями* для данной краевой задачи, а соответствующие им функции $X(x) = D\sin\dfrac{k\pi}{l}x$ — *собственными функциями*.

Итак, частное решение уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям (3), (4), найдено:

$$u_k(x,\, t) = \left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Здесь числа $a_k = AD$, $b_k = BD$ произвольны.

Заметим теперь, что уравнение (2) линейное и однородное, и потому сумма его решений также будет решением. Так что функция

$$u(x,\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

является решением уравнения (2). Ясно, что эта функция удовлетворяет краевым условием (3), (4), так как им удовлетворяет каждая из функций $u_k(x,\, t)$.

Подберем теперь числа a_k и b_k так, чтобы удовлетворить и начальным условиям (5), (6). Имеем:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Это — разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам. Следовательно,

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

(см. гл. VI, § 36, п. 5).

Далее, так как
$$u'_t(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x,$$
то
$$\frac{k\pi a}{l} b_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$
откуда
$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \tag{8}$$

Таким образом, найдено решение уравнения свободного колебания струны, удовлетворяющее указанным краевым и начальным условиям:
$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t\right) \sin \frac{k\pi}{l} x,$$
где a_k и b_k находятся из равенств (7) и (8).

Пример. Струна, закрепленная на концах $x = 0$, $x = l$, имеет в начальный момент форму параболы
$$u = \frac{4h}{l^2} x(l - x).$$
Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют (рис. 112).

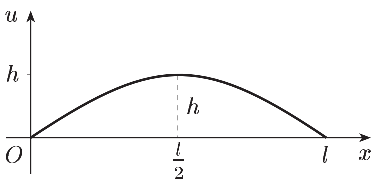

Рис. 112

Здесь
$$f(x) = \frac{4h}{l^2} x(l - x), \qquad \varphi(x) = 0.$$

Находим коэффициенты ряда, определяющего решение уравнения колебаний струны:
$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{8h}{l^3} \int_0^l \underbrace{(lx - x^2)}_{u_1} \underbrace{\sin \frac{k\pi x}{l} dx}_{dv_1} =$$
$$= -\frac{8h}{l^3} (lx - x^2) \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{8h}{k\pi l^2} \int_0^l (l - 2x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx =$$
$$= \frac{8h}{k\pi l^2} \int_0^l (l - 2x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{8h}{k^2\pi^2 l} (l - 2x) \sin \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l + \frac{16h}{k^2\pi^2 l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx =$$
$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3} \cos \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l = -\frac{16h}{k^3\pi^3} (\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3} [1 - (-1)^k];$$
$$b_k = 0.$$

Но при $k = 2n$ $a_k = 0$, поэтому
$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

4. Уравнение Лапласа. *Уравнением Лапласа* называется уравнение
$$\Delta u = 0,$$
где Δu — лапласиан (см. § 31, п. 2), имеющий в декартовых координатах следующий вид:
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Уравнение Лапласа играет важную роль в приложениях. К исследованию этого уравнения приводит, например, рассмотрение задач о стационарном тепловом состоянии, задач диффузии и т. д. (см. [13]).

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической функцией*.

Пример. Для функции $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ имеем:
$$u'_x = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad u''_{x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$
Аналогично
$$u''_{y^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad u''_{z^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$
Поэтому $\Delta u = 0$. Следовательно, данная функция гармоническая всюду в трехмерном пространстве, кроме точки $(0, 0, 0)$.

Рассмотрим выражения
$$u_0(x, y, z) = a_{000}, \tag{9}$$
$$u_1(x, y, z) = a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z, \tag{10}$$
$$u_2(x, y, z) = a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + \\ + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{110}xy + a_{101}xz + a_{011}yz, \tag{11}$$
где $a_{000}, a_{100}, a_{010}, \ldots, a_{011}$ — постоянные числа.

Выражения (9), (10) и (11) являются многочленами по переменным x, y, z соответственно нулевой, первой и второй степени.

Определение. Многочлен по переменным x, y, z, удовлетворяющий уравнению Лапласа, называется *гармоническим многочленом*.

Очевидно, многочлены (9), (10) являются гармоническими, а многочлен (11) является гармоническим при условии, что $a_{200} + a_{020} + a_{002} = 0$.

Если в (10), (11) перейти к сферическим координатам, то получим:
$$u_1(x, y, z) = a_{000} + rY_1(\theta, \varphi),$$
$$u_2(x, y, z) = a_{000} + rY_1(\theta, \varphi) + r^2Y_2(\theta, \varphi),$$
где функции
$$Y_1(\theta, \varphi) = a_{100}\sin\theta\cos\varphi + a_{010}\sin\theta\sin\varphi + a_{001}\cos\theta,$$
$$Y_2(\theta, \varphi) = a_{200}\sin^2\varphi\cos^2\varphi + a_{020}\sin^2\theta\sin^2\varphi + a_{002}\cos^2\theta + \\ + a_{110}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + a_{101}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + a_{011}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi$$

называются *сферическими функциями Лапласа* соответственно первого и второго порядка.

§ 42. Дифференциальные уравнения в биологии

1. Динамика численности популяции. Динамика численности популяции (т. е. изменение общего количества живых особей в популяции в связи с рождаемостью и смертностью) — один из важнейших вопросов экологии популяций. Изучая дифференциальные уравнения первого порядка, мы рассмотрели (см. § 38, п. 7) простейшую задачу из этой области. Было показано, что если считать популяцию изолированной, ресурсы питания неограниченными, а прирост поголовья пропорциональным количеству взрослых особей, то динамика численности популяции описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — численность популяции в момент времени t.

Решением этого уравнения (см. § 38, п. 7) является функция

$$x = x_0 e^{\gamma(t-t_0)},$$

где x_0 — численность популяции в начальный момент t_0.

Как уже отмечалось (см. § 38, п. 7), уравнение (1) либо имеет смысл в теоретическом аспекте, либо описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой популяции.

Более точное описание развития популяции дает уравнение *Ферхюльста–Перла*, полученное в 1845 г. Оно учитывает так называемый «фактор самоотравления» популяции, или внутривидовую борьбу в популяциях. Этот фактор, снижающий скорость роста популяции, объясняется многими причинами: конкурентной борьбой за место и пищу, распространением инфекций из-за тесноты и т. п. Желая учесть этот эффект, мы должны при подсчете прироста Δx (см. § 38, п. 7) от величины $\gamma x\,\Delta t$ вычесть некоторую величину $h(x, \Delta t)$:

$$\Delta x = \gamma x\,\Delta t - h(x, \Delta t).$$

Функция $h(x, \Delta t)$ для многих популяций может быть взята в виде произведения

$$h(x, \Delta t) = \delta x^2\,\Delta t,$$

где δ — коэффициент самоотравления (или внутренней борьбы в популяции).

Линейная зависимость по Δt объясняется так же, как и в первом слагаемом (см. § 38, п, 7). А вид функции x^2 обосновывается следующим образом. Величина $h(x, \Delta t)$ отражает снижение скорости роста популяции из-за внутривидовой конкуренции. Но конкуренция тем выше, чем больше количество встреч между особями, а количество встреч пропорционально произведению xx, т. е. x^2. Здесь в порядке сравнения следует заметить, что количество встреч между особями двух разных видов пропорционально как численности одного, так и численности другого, т. е. пропорционально произведению xy, где x и y — соответствующие численности видов. При встречах особей одного вида место y занимает x, и мы получаем x^2. Итак,

$$\Delta x = \gamma x\,\Delta t - \delta x^2\,\Delta t. \tag{2}$$

Равенство (2) делим почленно на Δt:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma x - \delta x^2$$

и после перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \delta x^2. \tag{3}$$

Это и есть уравнение Ферхюльста–Перла.

Уравнение (3) часто записывают в ином виде. Вынеся за скобки γx в правой части уравнения (3), получим:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x\left(1 - \frac{\delta}{\gamma}\,x\right)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x \cdot \frac{\frac{\gamma}{\delta} - x}{\frac{\gamma}{\delta}}. \tag{4}$$

Введя обозначение $\frac{\gamma}{\delta} = \mu$, уравнение (4) перепишется в виде:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x\,\frac{\mu - x}{\mu}. \tag{5}$$

Величина μ имеет определенный биологический смысл. Мы выясним его после интеграции, а сейчас отметим только, что если начальное значение $x_0 < \mu$, то для всех моментов времени $t > t_0$ $x(t) < \mu$. В самом деле, $x(t)$ — дифференцируемая функция. Из уравнения (5) следует, что пока $x(t) < \mu$, производная $\frac{dx}{dt}$ положительна, и, следовательно, $x(t)$ растет (§ 18, п. 1). Отсюда следует, что принимать

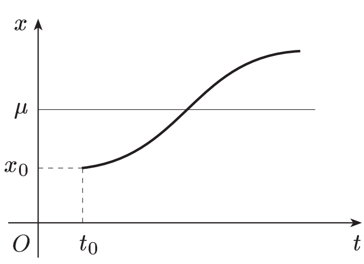

Рис. 113

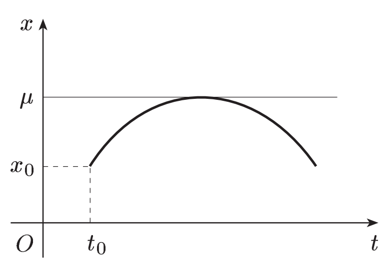

Рис. 114

значение, равное μ, $x(t)$ может либо возрастая и пересекая прямую $x = \mu$ (рис. 113), либо касаясь этой прямой рис. 114).

В первом случае справа от точки пересечения имеем: $x(t) > \mu$ и $x'(t) > 0$. Это противоречит уравнению (5). Во втором случае справа от точки касания $x(t) < \mu$ и $x'(t) < 0$, что тоже противоречит уравнению (5). Таким образом $x(t)$ не может достигать значения, равного μ, если $x_0 < \mu$. Проинтегрируем теперь уравнение (5). Разделяя переменные, получим:

$$\frac{\mu\,dx}{x(\mu-x)} = \gamma\,dt \quad \text{или} \quad \frac{(\mu-x)+x}{x(\mu-x)}\,dx = \gamma\,dt,$$

откуда:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\mu-x}\right)dx = \gamma\,dt.$$

Считая $x_0 < \mu$, после интеграции будем иметь:

$$\ln x - \ln(\mu - x) = \gamma t + \ln C,$$

откуда, потенцируя, получаем:

$$\frac{x}{\mu-x} = Ce^{\gamma t}. \tag{6}$$

Пусть для простоты $t_0 = 0$ и $x(0) = x_0 < \mu$. Подставляя в (6) эти начальные данные, найдем: $C = \dfrac{x_0}{\mu - x_0}$.

Подставив это значение C в (6), получим:

$$\frac{x}{\mu-x} = \frac{x_0}{\mu-x_0}\,e^{\gamma t}.$$

Отсюда искомый закон (модель Ферхюльста–Перла):

$$x = \frac{x_0\mu e^{\gamma t}}{\mu - x_0 + x_0 e^{\gamma t}}. \tag{7}$$

Исследуем график этой функции. Воспользовавшись самим уравнением (5), заключаем, что поскольку $x < \mu$, то $x'(t)$ всюду положительна. Дифференцированием из (5) получаем:

$$x''(t) = \left(\gamma\,\frac{\mu-x}{\mu} - \frac{\gamma x}{\mu}\right)x'(t) = \gamma\left(1 - \frac{2x}{\mu}\right)x'(t).$$

Подставив сюда выражение для x из (7), найдем:

$$x''(t) = \gamma\left(\frac{\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t}}{\mu - x_0 + x_0 e^{\gamma t}}\right)x'(t). \tag{8}$$

Отсюда видно, что при $\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} > 0$ производная $x''(t) > 0$ и, следовательно, функция $x(t)$ вогнута; при $\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} < 0$ производная $x''(t) < 0$ и, следовательно, функция $x(t)$ выпукла. Из первого неравенства находим область вогнутости:

$$\mu - x_0 - x_0 e^{\gamma t} > 0, \quad \text{т. е.} \quad e^{\gamma t} < \frac{\mu - x_0}{x_0}.$$

Следовательно, область вогнутости определяется неравенством

$$0 < t < \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0}.$$

Аналогично область выпуклости определяется неравенством

$$\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0} < t < +\infty.$$

Так как при $t = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0}$ $x''(t) = 0$ и $x = \frac{\mu}{2}$, то точка

$$M\left(\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0}; \frac{\mu}{2}\right)$$

является точкой перегиба.

Далее, так как производная $x'(t)$ для всех t больше нуля, то это значит, что искомая кривая нигде не имеет экстремумов. Наконец, из формулы (7) с учетом того, что $x < \mu$, видно, что $x(t) \to \mu$ снизу при $t \to +\infty$, а из начальных данных следует, что при $t = 0$ $x(0) = x_0$. Всего этого достаточно, чтобы представить себе вид кривой (рис. 115). Из рисунка видно, что если в начальный момент популяция была небольшая $\left(x_0 < \frac{\mu}{2}\right)$, то развитие популяции идет по вогнутой кривой до точки

$$\left(\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\mu - x_0}{x_0}; \frac{\mu}{2}\right).$$

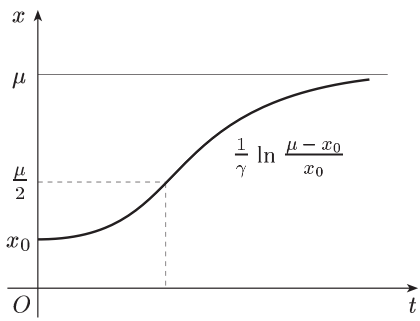

Рис. 115

В этой точке кривая перегибается, становясь далее выпуклой, и при $t \to +\infty$ стремится к прямой $x = \mu$, никогда не достигая этой прямой. Поэтому величину μ называют максимальной численностью популяции (теоретически), возможной в данных условиях.

График $x = x(t)$ напоминает вытянутую букву S. Поэтому его называют S-образной кривой (иногда *логистической* кривой). Для многих популяций эта кривая хорошо совпадает с экспериментальными данными.

Совершенно аналогично исследуется случай, когда $x_0 = x(t_0) > \mu$. В этом случае решение $x(t)$ при $t \to +\infty$ стремится к μ, мотононно уменьшаясь.

2. Дифференциальные уравнения в теории эпидемий. Более полно этот вопрос рассмотрен, например, в [1]. Ниже мы ограничимся лишь рассмотрением эпидемий простейшего вида. Предположим, что изучаемое заболевание носит длительный характер, так что процесс передачи инфекции — значительно более быстрый, чем течение самой болезни. Нас будет интересовать именно первый процесс — процесс передачи инфекции. При этом будем предполагать, что зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным.

Пусть a и n — соответственно число зараженных и незараженных в начальный момент, $x = x(t)$ — число незараженных в момент t, а $y = y(t)$ — число зараженных к моменту t. Для всех моментов времени из некоторого не слишком большого отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$ *) имеет место равенство

$$x + y = n + a. \tag{9}$$

Так как инфекция передается при встречах зараженных с незараженными, то число незараженных будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между теми и другими, т. е. пропорционально произведению xy. Поэтому скорость убывания числа незараженных равна:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy, \tag{10}$$

где β — коэффициент пропорциональности. Подставив в равенство (10) выражение y из (9), получим:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n + a - x). \tag{11}$$

Разделяя в уравнении (11) переменные, находим:

$$\frac{dx}{x(n+a-x)} = -\beta\, dt \quad \text{или} \quad \frac{(n+a-x)+x}{x(n+a-x)}\, dx = -\beta(n+a)\, dt,$$

откуда:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dx}{n-x+a} = -\beta(n+a)\, dt.$$

Интегрируя, будем иметь:

$$\ln x - \ln(n - x + a) = -\beta(n+a)\,t + \ln C$$

или

$$\ln \frac{x}{n-x+a} = -\beta(n+a)\,t + \ln C.$$

Потенцируя, получим

$$\frac{x}{n-x+a} = Ce^{-\beta(n+a)\,t}.$$

Для определения C используем начальное условие: при $t = 0$ число незараженных равно n, т. е. при $t = 0$ $x = n$. Имеем: $C = \dfrac{n}{a}$, и, значит,

$$\frac{x}{n-x+a} = \frac{n}{a}\, e^{-\beta(n+a)\,t}.$$

Разрешая последнее уравнение относительно x, получим окончательно:

$$x = \frac{n(n+a)}{n + ae^{\beta(n+a)\,t}}.$$

Эта формула дает закон убывания x с течением времени.

*) Точнее отрезок $[0, T]$ должен быть меньше времени жизни одного поколения. Тогда в наших уравнениях мы можем не учитывать естественную смертность особей.

3. Плотность муравьев вне муравейника. Хорошо известен общинный характер жизни муравьев. Найденную пищу или строительный материал муравьи не употребляют на месте, а несут в муравейник. Поэтому вблизи муравейника муравьев всегда больше, чем вдали от него.

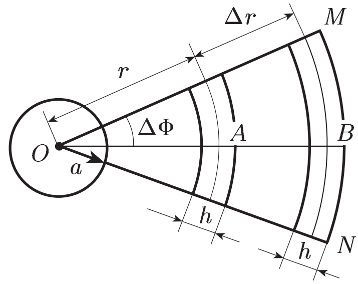

Рис. 116

Будем считать для простоты, что основанием муравейника служит круг радиуса a (рис. 116) и что пространство вне муравейника однородно и по распределению питательных веществ и по проходимости. Это значит, что все точки, лежащие на окружности радиуса r, равноправны в смысле ценности их окрестности для муравьев. Поэтому плотность муравьев во всех точках окружности радиуса r $(r > a)$ будет одной и той же. (Плотность насекомых — отношение их количества, находящегося в некоторой окрестности, к площади этой окрестности.) Отсюда следует, что при анализе плотности как функции от расстояния r мы можем ограничиться рассмотрением точек, лежащих на одном луче.

Для простоты рассматриваем стационарный случай, т. е. такой, когда плотность в каждой точке не меняется со временем. Это не значит, что муравьи не перемещаются. В поисках пищи они переходят с одного места на другое до тех пор, пока что-нибудь не найдут. Мы считаем их поисковые перемещения случайными, т. е. если некоторое количество муравьев покинуло какую-нибудь окрестность за единицу времени, то примерно такое же количество пришло в эту окрестность из соседних участков. Точно так же если некоторое количество скрылось в муравейнике с пищей, то примерно такое же количество вышло из муравейника в поисках новой пищи. Описанная ситуация осуществляется в реальных муравейниках в течение нескольких дневных часов.

Рассмотрим две соседние точки, лежащие на одном луче: точку A, отстоящую от центра муравейника на расстоянии r, и точку B, отстоящую на расстоянии $r + \Delta r$ (рис. 116). Проследим за обменом муравьями между окрестностями этих точек. Пусть $Q(r)$ — количество муравьев в окрестности точки A, а $Q(r + \Delta r)$ — соответствующее количество в окрестности точки B. В поисках пищи муравьи разбегаются в разных направлениях, при этом ни одно из направлений не является предпочтительным, так как пространство однородно. Поэтому доля муравьев (от общего числа муравьев в окрестности), выходящих в поисках пищи, не зависит от направления выхода: сколько процентов вышло на запад, столько же выйдет на восток, столько же на север, столько же на юг и т. д. Следовательно, если из окрестности точки A в направлении к точке B вышло $\alpha Q(r)$, $\alpha < 1$ муравьев, то из окрестности точки B в направлении к точке A выйдет $\alpha Q(r+\Delta r)$ муравьев. Существенно здесь то, что коэффициент α в обоих случаях один и тот же. Он определяет долю муравьев, выходящих в фиксированном направлении.

Однако не все муравьи, вышедшие из окрестности точки A в направлении к точке B, дойдут до окрестности этой точки. Часть из них, найдя по дороге пищу, вернется в муравейник. Понятно, что эта часть будет тем больше, чем длиннее путь, т. е. чем больше Δr — расстояние между A и B. Таким образом количество муравьев, вышедших из окрестности точки A и дошедших до окрестности точки B, выразится разностью

$$Q_{AB} = \alpha Q(r) - \beta\alpha Q(r)\,\Delta r,$$

где β — коэффициент пропорциональности, определяющий долю вернувшихся. Этот коэффициент зависит от ценности пространства. Так как пространство вне муравейника однородно, то для данного пространства β постоянно.

Что же касается величины $\alpha Q(r+\Delta r)$, то к этому случайному количеству прибавятся еще муравьи, которые вышли из окрестности точки B не в направлении к точке A, но по дороге что-то нашли и, изменив направление, пошли к муравейнику. Такие муравьи, если они еще не успели выйти за пределы сектора OMN (рис. 116), также попадут в окрестность точки A, и их будет тем больше, чем больше Δr. Таким образом, количество муравьев, вышедших из окрестности точки B и попавших в окрестность точки A, выразится суммой

$$Q_{BA} = \alpha Q(r+\Delta r) + \beta_1\alpha Q(r+\Delta r)\,\Delta r,$$

где β_1 — коэффициент пропорциональности, определяющий долю муравьев, изменивших направление в сторону муравейника.

Так как мы находимся в условиях стационарного случая, когда количество муравьев в окрестности каждой точки должно оставаться постоянным, то должно выполняться равенство $Q_{AB} = Q_{BA}$, т. е.

$$\alpha Q(r) - \beta\alpha Q(r)\,\Delta r = \alpha Q(r+\Delta r) + \beta_1\alpha Q(r+\Delta r)\,\Delta r.$$

Это основное балансовое соотношение. Из него мы получим дифференциальное уравнение. Поскольку количество муравьев равно плотности, умноженной на площадь, то последнее равенство можем переписать (сократив предварительно на α) так:

$$n(r)\,S_A - \beta n(r)\,S_A\,\Delta r = n(r+\Delta r)\,S_B + \beta_1 n(r+\Delta r)\,S_B\,\Delta r, \qquad (12)$$

где через $n(r)$ и $n(r+\Delta r)$ обозначены плотности в окрестностях точек A и B соответственно; S_A и S_B — площади этих окрестностей.

Подсчитав площади в полярных координатах, будем иметь (рис. 116):

$$S_A \approx hr\,\Delta\Phi; \qquad S_B \approx h(r+\Delta r)\,\Delta\Phi.$$

Подставив эти выражения в равенство (12), получим:

$$n(r)\,hr\,\Delta\Phi - \beta n(r)\,hr\,\Delta\Phi\,\Delta r =$$
$$= n(r+\Delta r)\,h(r+\Delta r)\,\Delta\Phi + \beta_1 n(r+\Delta r)\,h(r+\Delta r)\,\Delta\Phi\,\Delta r.$$

Отсюда, сократив на $h\,\Delta\Phi$ и сгруппировав слагаемые, будем иметь:

$$(r+\Delta r)\,n(r+\Delta r) - rn(r) = -[\beta_1 n(r+\Delta r)(r+\Delta r) + \beta n(r)\,r]\,\Delta r.$$

Разделим теперь это равенство на Δr и перейдем к пределу при $\Delta r \to 0$. Получим:

$$\frac{d}{dr}\,(rn(r)) = -(\beta_1+\beta)\,rn(r). \tag{13}$$

Обозначим для краткости $\beta_1+\beta=\gamma$ и перепишем уравнение (13) в виде:

$$\frac{d[rn(r)]}{rn(r)} = -\gamma\,dr. \tag{14}$$

Мы получили дифференциальное уравнение для плотности $n(r)$.

Пусть $n(a)$ — значение плотности на границе муравейника $(r=a)$. Интегрируя уравнение (14), получаем:

$$\ln[rn(r)] = -\gamma r + C. \tag{15}$$

Используя только что указанное начальное условие, находим, что $C=\ln[an(a)]+\gamma a$. Подставляя это в (15), получаем:

$$\ln\frac{rn(r)}{an(a)} = -\gamma(r-a),$$

откуда:

$$n(r) = \frac{a}{r}\,n(a)\,e^{-\gamma(r-a)}. \tag{16}$$

Это и есть уравнение искомой кривой. График ее легко построить, если известны значения a, $n(a)$ и γ (рис. 117). Эта кривая убывает с ростом r. Величины a и $n(a)$ несложно найти экспериментальным путем. Коэффициент γ подсчитать гораздо труднее. Однако можно поступить следующим образом. Если считать, что построенная модель достаточно верно отражает суть дела и, следовательно, существует некоторое число γ, с которым формула (16) дает зависимость плотности от расстояния, то эту γ можно вычислить из самой формулы (16). В самом деле, если формула (16) верна, то она верна для всех $r>a$, и, в частности, для некоторого $r=b$. Подставив $r=b$ в (16), получим:

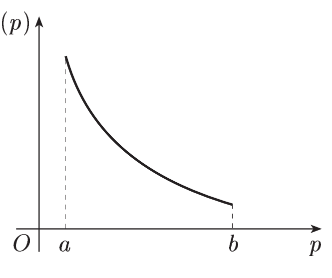

Рис. 117

$$n(b) = \frac{a}{b}\,n(a)\,e^{-\gamma(b-a)},$$

откуда:

$$\gamma = \frac{1}{b-a}\ln\frac{an(a)}{bn(b)}. \tag{17}$$

Таким образом, чтобы вычислить γ по формуле (17), нам, кроме $n(a)$, нужно знать значение плотности n еще в одной точке $r = b$. Это значение можно найти экспериментально так же, как и $n(a)$. Подставив найденное значение γ в формулу (16), мы получим конкретную кривую плотности $n(r)$. Эта теоретическая кривая, найденная на основе модели, хорошо согласуется с кривыми, полученными экспериментально. При этом надо учесть следующие два замечания.

Примечание 1. Из формулы (16) следует, что $n(r)$ отлична от нуля при любых сколь угодно больших r. В реальных муравейниках это, конечно, не так. Однако при больших r величина $n(r)$, подсчитываемая по формуле (16), становится исчезаюше малой, и мы без особой погрешности можем ею пренебречь.

Примечание 2. Величина γ есть объективная характеристика вида муравьев. Точнее говоря, это характеристика взаимоотношения данного вида с данной питательной средой. В нашей модели мы считаем среду неизменной. Это значит, что либо деятельность муравьев мало меняет среду (например, за короткий промежуток времени), либо среду искусственно восстанавливают. Тем не менее величина γ, вообще говоря, зависит от времени, так как ночью, например, и в полуденную жару активность муравьев меньше, чем в другое время.

Измеряя пару значений $n(a)$ и $n(b)$ в разное время суток, мы по формуле (17) найдем соответствующие этим парам значения γ. Подставив эти γ в (16), получим для каждого времени суток свою кривую плотности.

4. Рост листьев растения. Скорость увеличения площади молодого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна длине окружности листа и количеству солнечного света, падающего на него. Последнее пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью к листу. Найти зависимость между площадью S листа и временем t, если в 6 ч утра эта площадь равнялась 1600 см^2, а в 18 ч того же дня — 2500 см^2.

Принять, что угол между направлением луча Солнца и вертикалью в 6 ч утра и в 18 ч (без учета знака) равен 90°, а в полдень — 0°.

Пусть t — время, отсчитываемое от полуночи. Если S — переменная площадь листа, то скорость роста листа

$$\frac{dS}{dt} = k_1 2\pi r Q,$$

где $2\pi r$ — длина окружности листа, Q — количество солнечного света, k_1 — коэффициент пропорциональности.

Площадь листа $S = \pi r^2$, откуда:

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Тогда:

$$\frac{dS}{dt} = k_1 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{S}\, Q. \tag{18}$$

По условию

$$Q = k_2 S \cos\alpha, \tag{19}$$

где α — угол между направлением лучей и вертикалью, k_2 — коэффициент пропорциональности. Угол α является линейной возрастающей функцией аргумента t:

$$\alpha = k_3 t + b.$$

Параметры k_3 и b находим из дополнительных условий:

при $t = 6 \quad \alpha = -\dfrac{\pi}{2}$,

при $t = 12 \quad \alpha = 0$,

при $t = 18 \quad \alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Из двух последних условий имеем:

$$\begin{cases} 0 = 12k_3 + b, \\ \dfrac{\pi}{2} = 18k_3 + b. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$k_3 = \frac{\pi}{12}, \qquad b = -\pi.$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{\pi}{12}(t - 12).$$

Значение α подставляем в равенство (19), откуда:

$$Q = k_2 S \cos\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right].$$

Подставив это в уравнение (18), получаем:

$$\frac{dS}{dt} = k_1 k_2 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} S\sqrt{S} \cos\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right].$$

Введем обозначение $k = k_1 k_2$. Тогда после разделения переменных

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}} = k\,\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \cos\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right] dt.$$

Интегрируя, получим:

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24k}{\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{12}(t - 12)\right] + C. \tag{20}$$

Начальные условия: при $t = 6 \quad S = 1600$ и при $t = 18 \quad S = 2500$. Отсюда:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{20} = -\dfrac{24k}{\sqrt{\pi}} + C, \\ -\dfrac{1}{25} = \dfrac{24k}{\sqrt{\pi}} + C. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$C = -\frac{9}{200}, \qquad k = \frac{\sqrt{\pi}}{24 \cdot 200}.$$

Подставляя эти значения в (20), получаем:

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24\sqrt{\pi}}{24 \cdot 200\sqrt{\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right] - \frac{9}{200},$$

откуда:

$$S = \frac{160\,000}{\left\{9 - \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-12)\right]\right\}^2}.$$

5. Рост дерева. Почему даже в самых благоприятных условиях рост дерева не превышает некоторого предела? Почему все деревья независимо от породы растут сначала быстро, а затем их рост замедляется, пока, наконец, совсем не прекращается?

Интуитивно ясно, что с ростом кроны, с одной стороны, увеличивается приток энергии благодаря фотосинтезу, а с другой — увеличиваются трудности, связанные, например, с транспортировкой питательных веществ, и, следовательно, увеличивается расход энергии на подобные нужды. В конце концов притока энергии уже не хватает для покрытия расходов, и дерево перестает расти.

На основе этих интуитивных соображений сформулируем основные предположения, на которых будет основано составление уравнения баланса энергии, т. е. построена математическая модель.

1. Зрелое растение в процессе роста сохраняет геометрическое подобие. Это значит, что у зрелого растения с ростом не меняются отношения геометрических размеров, например отношение высоты к диаметру и т. п.

2. Свободную энергию (или активное вещество) растение получает только путем фотосинтеза.

3. Свободная энергия расходуется на фотосинтез, на построение живой ткани (рост) и на подъем раствора из почвы.

4. В среднем за большие отрезки времени растение получает постоянное количество света на единицу поверхности и может поглощать необходимые вещества из неограниченного запаса.

Приступим к составлению уравнения баланса энергии.

Пусть x обозначает линейный размер растения. Это значит, что высоту растения мы будем измерять величиной x, площадь поверхности листьев — величиной x^2, наконец, объем растения будет выражаться величиной x^3. Ясно, что x изменяется со временем: $x = x(t)$. При этом пусть $x(t_0) = 0$. Постараемся выразить все величины, входящие в уравнение баланса, через x.

Сначала найдем выражение для поступающей свободной энергии E. Эта энергия образуется благодаря фотосинтезу в зеленой части растения, и ее тем больше, чем больше поверхность зеленой части. Таким образом, можем считать, что E пропорциональна x^2:

$$E = \alpha x^2,$$

где α — коэффициент пропорциональности (он зависит от размеров и формы листьев и от интенсивности фотосинтеза).

Других источников энергии в силу наших предположений нет, и мы должны теперь проследить за расходом энергии. Энергия прежде всего тратится на нужды самого процесса фотосинтеза. Этот расход также пропорционален x^2, и мы можем записать его в виде βx^2, где β — некий коэффициент пропорциональности, меньший α.

Далее энергия расходуется на транспортировку питательного раствора во все части растения. Ясно, что этот расход будет тем больше, чем больше путей транспортировки, т. е. чем больше объем растения. Кроме того, этот расход связан с преодолением силы тяжести и, следовательно, будет тем больше, чем на большую высоту приходится поднимать питательные вещества. Таким образом, этот расход пропорционален как объему x^3, так и высоте x, и мы можем его считать пропорциональным их произведению, т. е. равным $\gamma x^3 x$.

Наконец, энергия расходуется на увеличение массы растения (т. е. на рост). Этот расход пропорционален скорости роста, т. е. производной по времени от массы $m = \rho x^3$ (ρ — средняя плотность растения, x^3 — объем). Таким образом, последний расход может быть выражен как $\delta \frac{d}{dt}(\rho x^3)$.

В силу закона сохранения энергии расход энергии должен быть равен ее притоку, и мы получаем:

$$E = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d}{dt}(\rho x^3)$$

или

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3\delta \rho x^2 \frac{dx}{dt}. \tag{21}$$

Это и есть искомое балансовое соотношение.

Разделив уравнение (21) на $3\delta\rho x^2$ и обозначив

$$\frac{\alpha-\beta}{3\delta\rho} = a, \qquad \frac{\gamma}{3\delta\rho} = b,$$

получим:

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2, \qquad a > 0, \qquad b > 0. \tag{22}$$

Так как дерево растет, то производная $\frac{dx}{dt}$ положительна. Это значит, что $a - bx^2 > 0$ и, следовательно, $x^2 < \frac{a}{b}$. Поэтому, переписав уравнение (22) в виде

$$-\frac{dx}{b\left(x^2 - \frac{a}{b}\right)} = dt$$

и интегрируя последнее, будем иметь:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = t + C.$$

Используя начальное условие $x(t_0) = 0$, получаем, что $C = -t_0$ и, значит,

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = t - t_0. \tag{23}$$

Разрешая уравнение (23) относительно x, получаем окончательно:

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}\,(t-t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}\,(t-t_0)}}. \tag{24}$$

Формула (24) дает кривую роста дерева. Если известны a, b и t_0 (величины a и b зависят от породы дерева), то по этой формуле можно подсчитать средний рост дерева данной породы в зависимости от возраста (т. е. от времени t).

Вид кривой (24) нетрудно исследовать. Уже отмечалось, что $\frac{dx}{dt} > 0$. Далее дифференцированием из (22) получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2bx\,\frac{dx}{dt}.$$

Так как при $t > t_0$ $x(t) > 0$ (это высота дерева), то из последнего равенства следует, что $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$. Таким образом, кривая (24) — это растущая выпуклая кривая. Из самой формулы (24) видно, что

$$x(t) \to \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Этого достаточно, чтобы представить себе график кривой (рис. 118). Высота дерева $\sqrt{\frac{a}{b}}$ соответствует тому случаю, когда вся поступающая энергия тратится только на обеспечение нужд процесса фотосинтеза и на транспортировку питательного раствора. Дерево при этом не растет.

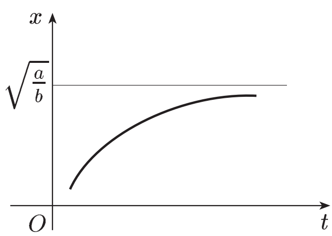

Рис. 118

Насколько верно кривая (24) отражает реальный процесс роста дерева? Чтобы ответить на этот вопрос, средние значения высоты дуба в 40 лет и в 220 лет ($x(40)$ и $x(220)$) были подставлены в формулу (24). Образовалась система двух уравнений с двумя неизвестными a и b, из которой эти неизвестные можно найти. Затем была построена конкретная кривая (24) с найденными значениями a и b. Эта кривая удивительно хорошо совпадала с экспериментальной кривой роста дуба. Иными словами, из совпадения теоретической кривой с экспериментальной всего в двух точках $(40; x(40))$ и $(220; x(220))$ последовало совпадение этих кривых во всех промежуточных точках. Этот факт является убедительным аргументом в пользу построенной модели.

Упражнения

Решить уравнения.

1. $(1+y)\,dx-(1-x)\,dy=0$. $[(1+y)(1-x)=C.]$

2. $(1+y^2)\,dx+(1+x^2)\,dy=0$. $[\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=C.]$

3. $(1+e^x)\,yy'=e^x$. $\left[\dfrac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C.\right]$

4. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$. $[\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C.]$

5. $e^{-y}(1+y')=1$. $[e^x=C(1-e^{-y}).]$

6. $y'=2^{x+y}$. $[2^x+2^{-y}=C.]$

7. $e^y(1+x^2)\,dy-2x(1+e^y)\,dx=0$. $[1+e^y=C(1+x^2).]$

8. $2xyy'=x^2+y^2$. $[x^2-y^2-Cx=0.]$

9. $(x+y)\,dx+x\,dy=0$. $\left[y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{C}{x}.\right]$

10. $x(x+2y)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0$. $[x^3+3x^2y-y=C.]$

11. $y'=\dfrac{x-y}{x-2y}$. $[x^2-2xy+2y^2=C.]$

12. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$. $[y=(x^2+C)\,e^{-x^2}.]$

13. $y'=\dfrac{1}{x\cos y+\sin 2y}$. $[x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y).]$

14. $y'+2y=e^{-x}$. $[y=Ce^{-2x}+e^{-x}.]$

15. $y'-2xy=2xe^{x^2}$. $[y=(C+x^2)\,e^{x^2}.]$

16. $y'+2xy=e^{-x^2}$. $[y=(C+x)\,e^{-x^2}.]$

17. $y'x\ln x-y=3x^3\ln^2 x$. $[y=(C+x^3)\ln x.]$

18. $(2x-y^2)\,y'=2y$. $\left[x=Cy-\dfrac{y^2}{2}.\right]$

19. $xy'-2y=x^3\cos x$. $[y=Cx^2+x^2\sin x.]$

20. $y'=\dfrac{y}{2y\ln y+y-x}$. $\left[x=\dfrac{C}{y}+y\ln y.\right]$

21. $(e^{-y^2/2}-xy)\,dy-dx=0$. $[x=(C+y)\,e^{-y^2/2}.]$

22. $y'-ye^x=2xe^{e^x}$. $[y=(C+x^2)\,e^{e^x}.]$

23. $y'+xe^xy=e^{(1-x)\,e^x}$. $[y=(C+x)\,e^{(1-x)\,e^x}.]$

Найти частные решения уравнений:

24. $x^2+xy'=y$, если $y=0$ при $x=1$. $[y=x-x^2.]$

25. $y'+y\cos x=\cos x$, если $y=1$ при $x=0$. $[y=1.]$

26. $x(x-1)\,y' + y = x^2(2x-1)$, если $y=4$ при $x=2$. $[y = x^2.]$

27. Скорость прямолинейного движения тела

$$v = (2t^2 + t)\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Найти путь, пройденный им за 6 с от начала движения. [162 см]

28. Скорость прямолинейного движения тела

$$v = \left(4t - \frac{6}{t^2}\right)\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Определить путь его за третью секунду. [9 см.]

29. Скорость тела пропорциональна пройденному пути. За первые 10 с тело проходит 100 м, за 15 с — 200 м. Какой путь пройдет тело за время t?

$[s = 25\cdot 2^{t/5}.]$

30. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20° C и тело в течение 20 мин охлаждается со 100° C до 60° C, то через сколько времени его температура понизится до 30° C?

[Через 60 мин.]

Указание. Воспользоваться установленным ранее (§ 38, п. 3, задача 1) законом изменения температуры.

31. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак со скоростью 3 л в минуту подается вода и одновременно со скоростью 2 л в минуту раствор выливается из бака, причем концентрация раствора остается все время равномерной благодаря перемешиванию. Сколько соли в баке останется через час? [3,9 кг.]

Решить уравнения:

32. $y'' = x$. $\left[y = \dfrac{x^3}{3} + C_1x + C_2.\right]$

33. $y'' = \sin x + \cos x$. $[y = -\sin x - \cos x + C_1x + C_2.]$

34. $y'' = e^x$. $[y = e^x + C_1x + C_2.]$

35. $y'' - y = 0$. $[y = C_1e^x + C_2e^{-x}.]$

36. Найти частное решение уравнения $y'' = -6x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$. $[y = -x^3.]$

37. Тело движется прямолинейно с ускорением $\dfrac{d^2s(t)}{dt^2} = 4$. Найти закон движения тела, если в начальный момент движения пройденный путь и скорость равнялись нулю. $[s(t) = 2t^2.]$

38. Ускорение прямолинейного движения пропорционально времени. Найти зависимость между пройденным расстоянием и временем, если при $t=0$ $v=0$ и $s=0$, а также при $t=1$ $s=\dfrac{1}{3}$. $\left[s = \dfrac{t^3}{3}.\right]$

39. Ускорение прямолинейного движения пропорционально квадрату времени. Найти зависимость между s и t, если при $t=0$ $v=0$, $s=1$ и при $t=1$ $s=2$. $[s = t^4 + 1.]$

Составить линейные однородные уравнения, зная их характеристические уравнения.

40. $k^2-5k+6=0$. $[y''-5y'+6y=0.]$

41. $k^2-k=0$. $[y''-y'=0.]$

42. $k^2-4=0$. $[y''-4y=0.]$

43. $(k+2)^2=0$. $[y''+4y'+4y=0.]$

44. $k^2-6k+8=0$. $[y''-6y'+8y=0.]$

45. $k(k+2)=0$. $[y''+2y'=0.]$

Составить линейное однородное уравнение, если известны корни его характеристического уравнения, и написать его общее решение.

46. $k_1=-1,\ k_2=2$. $[y''-y'-2y=0;\ y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}.]$

47. $k_1=1,\ k_2=3$. $[y''-4y'+3y=0;\ y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}.]$

48. $k_1=-2i,\ k_2=2i$. $[y''+4y=0;\ y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.]$

49. $k_1=1-i,\ k_2=1+i$. $[y''-2y'+2y=0;\ y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x.]$

Решить уравнения.

50. $y''-y'-2y=0$. $[y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.]$

51. $y''+24y'+144y=0$. $[y=e^{-12x}(C_1+C_2x).]$

52. $y''-y'-6y=0$. $[y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}.]$

53. $y''-7y'+10y=0$. $[y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}.]$

54. $y''-5y=0$. $[y=C_1e^{-\sqrt{5}\,x}+C_2e^{\sqrt{5}\,x}.]$

55. $y''-22y'+121y=0$. $[y=e^{11x}(C_1+C_2x).]$

56. $y''-4y'+20y=0$. $[y=e^{2x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x).]$

57. $y''+15y'=0$. $[y=C_1+C_2e^{-15x}.]$

58. $y''+49y=0$. $[y=C_1\cos 7x+C_2\sin 7x.]$

59. $y''+7y'=0$. $[y=C_1+C_2e^{-7x}.]$

60. $y''-49y=0$. $[y=C_1e^{7x}+C_2e^{-7x}.]$

61. $y''+20y'+19y=0$. $[y=C_1e^{-x}+C_2e^{-19x}.]$

62. $y''+2\sqrt{3}\,y'+7y=0$. $[y=e^{-\sqrt{3}\,x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).]$

63. $y''-y'-12y=0$. $[y=C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}.]$

64. $y''+4y'-7y=0$. $[y=C_1e^{(-2+\sqrt{11})\,x}+C_2e^{-(2+\sqrt{11})\,x}.]$

65. $y''-9y'-10y=0$. $[y=C_1e^{10x}+C_2e^{-x}.]$

66. $y''+16y=0$. $[y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x.]$

67. $y''+2y'-2y=0$. $[y=(C_1e^{-(1-\sqrt{3})\,x}+C_2e^{-(1+\sqrt{3})\,x}.]$

68. $y''-4y'+10y=0$. $[y=e^{2x}(C_1\cos\sqrt{6}\,x+C_2\sin\sqrt{6}\,x).]$

69. $y''+3y=0$. $[y=C_1\cos\sqrt{3}\,x+C_2\sin\sqrt{3}\,x.]$

Определить вид частного решения линейного неоднородного уравнения, если известны корни характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения и правая часть $f(x)$.

70. $k_1 = 1,\ k_2 = 2;\ f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2.$ $[z = A_0x^2 + A_1x + A_2.]$

71. $k_1 = 0,\ k_2 = 2;\ f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2.$ $[z = x(A_0x^2 + A_1x + A_2).]$

72. $k_1 = 2,\ k_2 = 3;\ f(x) = e^x.$ $[z = Ae^x.]$

73. $k_1 = 1,\ k_2 = 2;\ f(x) = e^x.$ $[z = Axe^x.]$

74. $k_1 = 1,\ k_2 = 1;\ f(x) = e^x.$ $[z = Ax^2e^x.]$

75. $k_1 = 1,\ k_2 = 2;\ f(x) = \cos x + \sin x.$ $[z = A\cos x + B\sin x.]$

76. $k_1 = -2i,\ k_2 = 2i;\ f(x) = \cos 2x + \sin 2x.$ $[z = x(A\cos 2x + B\sin 2x).]$

Для следующих линейных неоднородных уравнений определить вид частного решения.

77. $y'' - y = 2.$ $[z = A.]$

78. $y'' + y = x.$ $[z = A_0x + A.]$

79. $y'' + 2y' + y = e^{4x}.$ $[z = Ae^{4x}.]$

80. $y'' + 2y' + y = e^{-x}.$ $[z = Ax^2e^{-x}.]$

81. $y'' + 4y = \sin 2x.$ $[z = x(A\cos 2x + B\sin 2x).]$

82. $y'' + 2y' + y = \cos x.$ $[z = A\cos x + B\sin x.]$

Решить уравнения.

83. $y'' + 4y' = 0.$ $[y = C_1 + C_2e^{-4x}.]$

84. $y'' + y' = \dfrac{1}{2}.$ $\left[y = C_1 + C_2e^{-x} + \dfrac{x}{2}.\right]$

85. $y'' - 9y = 2 - x.$ $\left[y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + \dfrac{1}{9}x - \dfrac{2}{9}.\right]$

86. $y'' + y' = e^x.$ $\left[y = C_1 + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{2}e^x.\right]$

87. $y'' - 4y' = 4e^{4x}.$ $[y = e^{4x}(C_1 + x) + C_2.]$

88. $y'' - y' = 4 + x.$ $\left[y = C_1 + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{2}x^2 - 5x.\right]$

89. $y'' + y = \sin 5x.$ $\left[y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{1}{24}\sin 5x.\right]$

90. $y'' + y = \cos x.$ $\left[y = C_1\cos x + \left(C_2 + \dfrac{x}{2}\right)\sin x.\right]$

91. $y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}.$ $\left[y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{4}e^{2x}.\right]$

92. $y'' + 7y' + 20y = e^x.$

$$\left[y = e^{-7x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{31}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{31}}{2}x\right) + \frac{1}{28}e^x.\right]$$

93. $y'' + 9y = \cos 3x.$ $\left[y = C_1\cos 3x + \left(C_2 + \dfrac{x}{6}\right)\sin 3x.\right]$

94. $y'' - 2y' - 3y = x^2$. $\left[y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4}{9}x - \dfrac{14}{27}.\right]$

95. $y'' - 9y = e^{2x}$. $\left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \dfrac{1}{5}e^{2x}.\right]$

96. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$. $\left[y = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x + \dfrac{x^2}{2}\right).\right]$

97. $y'' + 100y = \sin 2x$. $\left[y = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x + \dfrac{1}{96}\sin 2x.\right]$

98. $y'' + 3y' = 1$. $\left[y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \dfrac{x}{3}.\right]$

99. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$. $\left[y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + \dfrac{x^2}{2}\right).\right]$

100. $y'' + 2y' = 1 - x$. $\left[y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}x.\right]$

101. $y'' + 4y' + 29y = 0$; $y = 0$, $y' = 15$ при $x = 0$. $[y = 3e^{-2x}\sin 5x.]$

102. $4y'' + 4y' + y = 0$; $y = 2$, $y' = 0$ при $x = 0$. $[y = e^{-x/2}(2 + x).]$

103. $y'' - 2y' + 10y = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

$$\left[y = e^{x}\left(\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x\right).\right]$$

104. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y = 6$, $y' = 10$ при $x = 0$. $[y = 4e^{x} + 2e^{3x}.]$

105. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$. $[y = e^{x}\sin x.]$

106. $y'' - 2y' + 3y = 0$; $y = 1$, $y' = 3$ при $x = 0$.

$$[y = e^{x}(\cos\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,x).]$$

107. $y'' - 9y = 2 - x$, если $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 0$.

$$\left[y = \frac{7}{27}e^{3x} - \frac{1}{27}e^{-3x} + \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}.\right]$$

108. $y'' + 4y' = 2\cos 2x$, если $y = 0$, $y' = 4$ при $x = 0$.

$$\left[y = 2\sin 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x.\right]$$

109. $y'' + 4y' = 12x^2 - 2x + 2$, если $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

$$[y = -0{,}25 + 0{,}25e^{-4x} + x^3 - x^2 + x.]$$

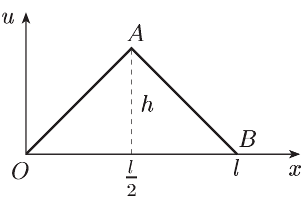

Рис. 119

110. Дана струна, закрепленная на концах $x = 0$, $x = l$. Пусть в начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB, изображенной на рисунке 119. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют.

$$\left[u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi a t}{l}.\right]$$

111. Проверить, являются ли следующие функции гармоническими:
а) $u = x^2 + 2xy - y^2$;
б) $u = x^2y + y^2z + z^2x$;
в) $u = x^2 - y^2$. [а) Да; б) нет; в) да.]

ЧАСТЬ II

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Введение

В предыдущих главах части I приводились примеры из химии и биологии, в которых различные процессы описывались с помощью функций. Функциональная связь между переменными являлась «жесткой»: значение одной из них вполне определялось значением другой. Однако часто приходится изучать явления, для которых практически трудно или принципиально невозможно отыскать все причины, порождающие их, и тем более количественно их выразить. Такие явления невозможно описать функционально.

Например, при бросании монеты нельзя предсказать, какой стороной она упадет; для этого необходимо было бы учесть слишком много различных факторов: работу мышц руки, участвующей в бросании, малейшие отклонения в распределении массы монеты, движение воздуха и т. д. Результат бросания монеты случаен. Но, оказывается, при достаточно большом числе бросаний монеты существует определенная закономерность (герб и цифра выпадут приблизительно поровну).

Закономерности, которым подчиняются случайные события, изучаются в разделах математики, которые называются теорией вероятностей и математической статистикой.

Методы теории вероятностей и математической статистики широко применяются в естествознании, технике, экономике, медицине. В частности, они широко применяются и в биологии (например, в теории наследственности). Квалифицированная обработка биологических результатов всегда базировалась на теории вероятностей и математической статистике.

Глава VIII

СОБЫТИЕ И ВЕРОЯТНОСТЬ

§ 43. Основные понятия. Определение вероятности

1. Понятие о случайном событии. Опыт, эксперимент, наблюдение явления называется *испытанием*. Испытаниями, например, являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенными на каждую грань числом очков — от одного до шести).

Результат, исход испытания называется *событием*. Событиями являются: выпадение герба или цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Определение 1. Два события называются *совместимыми*, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 1. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление четырех очков. Событие B — появление четного числа очков. События A и B совместимые.

Определение 2. Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 2. Испытание: однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события несовместимы, так как появление одного из них исключает появление другого.

Несовместимость более чем двух событий означает их попарную несовместимость.

Пример 3. Испытание: однократное бросание игральной кости. Пусть события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ соответственно выпадение одного очка, двух, трех и т. д. Эти события являются несовместимыми.

Определение 3. Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\overline{A}$.

Пример 4. Испытание: однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они, и появление одного из них исключает появление другого, т. е. $A = \overline{B}$ или $\overline{A} = B$.

Определение 4. Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и невозможным, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример 5. Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

Заметим, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Определение 5. Событие A называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Пример 6. Событие A_6 — выпадение шести очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но может и не наступить в данном испытании.

Пример 7. Событие A_{98} — прорастание девяноста восьми зерен пшеницы из ста — случайное. Это событие может наступить, но, может быть, прорастет зерен больше или меньше.

Можно ли как-то измерить возможность появления некоторого случайного события? Другими словами, можно ли охарактеризовать эту возможность некоторым числом?

2. Классическое определение вероятности. Всякое испытание влечет за собой некоторую совокупность исходов — результатов испытания, т. е. событий. Во многих случаях возможно перечислить все события, которые могут быть исходами данного испытания.

Определение 1. Говорят, что совокупность событий образует *полную группу событий* для данного испытания, если его результатом обязательно становится хотя бы одно из них.

Приведем примеры полных групп событий: выпадение герба и выпадение цифры при одном бросании монеты; попадание в цель и промах при одном выстреле; выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков при одном бросании игральной кости.

Рассмотрим полную группу попарно несовместимых событий $U_1, U_2, \ldots, U_n$, связанную с некоторым испытанием. Предположим, что в этом испытании осуществление каждого из событий U_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равновозможно, т. е. условия испытания не создают преимущества в появлении какого-либо события перед другими возможными.

Определение 2. События $U_1, U_2, \ldots, U_n$, образующие полную группу попарно несовместимых и равновозможных событий, будем называть *элементарными событиями*.

Пример 1. Вернемся к опыту с подбрасыванием игральной кости. Пусть U_i — событие, состоящее в том, что кость выпала гранью с цифрой i. Как уже отмечалось (пункты 1, 2), события $U_1, U_2, \ldots, U_6$ образуют полную группу попарно несовместимых событий. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то события $U_1, U_2, \ldots, U_6$ являются и равновозможными, т. е. элементарными.

Определение 3. Событие A называется *благоприятствующим* событию B, если наступление события A влечет за собой наступление события B.

Пример 2. Пусть при бросании игральной кости события U_2, U_4 и U_6 — появление соответственно двух, четырех и шести очков и A — событие, состоящее в появлении четного очка; события U_2, U_4 и U_6 благоприятствуют событию A.

О п р е д е л е н и е 4 (классическое определение вероятности). *Вероятностью* $P(A)$ события A называется отношение $\frac{m}{n}$ числа элементарных событий, благоприятствующих событию A, к числу всех элементарных событий, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

П р и м е р 3. Вычислим вероятность выпадения герба при одном бросании монеты. Очевидно, событие A — выпадение герба и событие B — выпадение цифры — образуют полную группу несовместимых и равновозможных событий для данного испытания. Значит, здесь $n = 2$. Событию A благоприятствует лишь одно событие — само A, т. е. здесь $m = 1$. Поэтому $P(A) = \frac{1}{2}$.

П р и м е р 4. Очевидно, что в опыте с игральной костью (пункт 2, пример 1) $P(U_i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$.

П р и м е р 5. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, делящееся на 2 (событие A).

Число элементарых событий здесь 6. Число благоприятствующих элементарных событии 3 (выпадение 2, 4 и 6). Поэтому

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

П р и м е р 6. У кабинета дежурного психотерапевта ожидают приема трое больных. Врачу известно по медицинским карточкам, что один из ожидающих, по фамилии Петров, болел в прошлом маниакально-депрессивным психозом. Врач интересуется этим больным, но не хочет вне очереди вызывать его в кабинет. Обозначим как событие A тот факт, что в кабинет врача входит больной Петров; как событие B обозначим то, что входит другой больной — Сидоров и как событие C — входит Иванов. События A, B и C — несовместимые и образуют полную группу (предполагается, что к врачу больные входят по одному). Так как появиться согласно очереди может равновероятно любой из больных, то до начала приема вероятность появиться первым в кабинете врача для одного из больных, в том числе для Петрова, равна $\frac{1}{3}$.

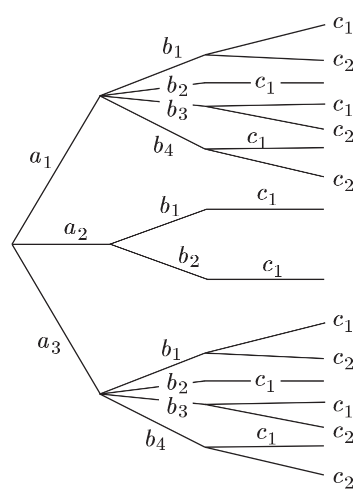

Рис. 120

П р и м е р 7. При составлении команды космического корабля возникает вопрос о психологической совместимости отдельных членов экипажа. Допустим, что надо составить команду из трех человек: командира, инженера и врача. На место командира есть три кандидата a_1, a_2, a_3; на место инженера — четыре кандидата — b_1, b_2, b_3, b_4; на место врача — два кандидата c_1, c_2. Проведенная проверка показала психологическую несовместимость командира a_2 с инженерами b_3, b_4 и с врачом c_2, а также инженера b_2 с врачом c_2. Будем для простоты считать, что без учета фактора несовместимости все варианты составления команды равновозможны. Какова в этом случае вероятность того, что будет составлен экипаж, все члены которого психологически совместимы друг с другом.

Представим все варианты состава, при которых члены экипажа совместимы друг с другом в виде «дерева» (рис. 120). Число ветвей этого дерева, т. е. исходов, благоприятствующих событию A, равно 16, а общее число возможных комбинаций по правилу умножения равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Искомая вероятность $P(A) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$.

Задача (Вероятности рождения мальчиков и девочек). Будем предполагать, что рождения мальчиков и девочек — равновозможные события.

Пусть в семье двое детей. Какова вероятность, что оба ребенка — мальчики? Если известно, что один мальчик, какова вероятность, что оба ребенка — мальчики?

На первый вопрос ответить нетрудно. Имеется четыре равновозможных исхода: *ММ*, *МД*, *ДМ*, *ДД* (*М* — мальчик, *Д* — девочка). Исходы *МД* и *ДМ* различны, так как в первом из них сначала родился мальчик, а потом девочка, во втором — наоборот. Из этих четырех исходов только один *ММ* благоприятствует нашему событию. Отсюда следует, что $P(MM) = \frac{1}{4}$.

Если дополнительно известно, что один ребенок — мальчик, то событие *ДД* исключается. Из трех равновозможных событий *ММ*, *МД*, *ДМ* по-прежнему только одно *ММ* благоприятствует желаемому исходу. Поэтому $P(MM) = \frac{1}{3}$.

Если известно, что старший ребенок — мальчик, то исключается *ДМ* и *ДД*. В этом случае $P(MM) = \frac{1}{2}$.

Из приведенного классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства

1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, достоверному событию должны благоприятствовать все n элементарных событий, т. е. $m = n$ и, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

В самом деле, невозможному событию не может благоприятствовать ни одно из элементарных событий, т. е. $m = 0$, откуда:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных событий. Поэтому в этом случае $0 < < m < n$ и, значит, $0 < \frac{m}{n} < 1$. Следовательно, $0 < P(A) < 1$.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

3. Относительная частота. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности не является пригодным для изучения произвольных случайных событий. Так, оно неприемлемо, если результаты испытания не равновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадение ее различных граней не равновозможно.

В таких случаях используется так называемое статистическое определение вероятности.

Пусть произведено n испытаний, при этом некоторое событие A наступило m раз.

Определение 1. Число m называется *абсолютной частотой* (или просто *частотой*) события A, а отношение

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

называется *относительной частотой* события A.

Пример 1. При транспортировке из 10 000 арбузов испортилось 26. Здесь $m = 26$ — абсолютная частота испорченных арбузов, а

$$P^*(A) = \frac{26}{10\,000} = 0{,}0026$$

— относительная.

Результаты многочисленных опытов и наблюдений помогают заключить: при проведении серий из n испытаний, когда число n сравнительно мало, относительная частота $P^*(A)$ принимает значения, которые могут довольно сильно отличаться друг от друга. Но с увеличением n — числа испытаний в сериях — относительная частота

$$P^*(A) = \frac{m}{n}$$

приближается к некоторому числу $P(A)$, стабилизируясь возле него и принимая все более устойчивые значения.

Пример 2. Было проведено 10 серий бросаний монеты, по 1000 бросаний в каждой. Относительные частоты выпадения герба оказались равными 0,501; 0,485; 0,509; 0,536; 0,485; 0,488; 0,500; 0,497; 0,494; 0,484 (см. [14]). Эти частоты группируются около числа 0,5.

Определение 2 (статистическое определение вероятности). Вероятностью события A в данном испытании называется число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

В условиях только что приведенного примера 2 указанная вероятность равна 0,5.

Пример 3. По официальным данным шведской статистики, относительные частоты рождения девочек по месяцам 1935 г. характеризуются следующими числами (расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473 (см. [3]). Эти частоты группируются около числа 0,482.

Таким образом, относительная частота события приближенно совпадает с его вероятностью, если число испытаний достаточно велико. Имеется огромный опытный материал по проверке последнего утверждения. Укажем еще один такой пример с бросанием монеты (см. [3]).

Экспериментатор	Число бросаний	Число выпадений герба	Относительная частота
Бюффон	4 040	2 048	0,5080
К. Пирсон	12 000	6 019	0,5016
К. Пирсон	24 000	12 012	0,5005

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. При 4 040 испытаниях отклонение равно 0,008, а при 24 000 — 0,0005.

Пример 4. Чтобы знать, какова вероятность для данного станка изготовить годную деталь, поступают так: проверяют одну или несколько партий деталей, изготовленных станком, подсчитывают количество годных деталей, вычисляют относительную частоту и в соответствии с определением вероятность принимают равной этой частоте. Допустим, при проверке партии из 200 деталей 190 оказались годными. Тогда вероятность наудачу выбранной детали быть годной

$$P \approx \frac{190}{200} = 0{,}95.$$

Вероятность найдена приближенно, так как 0,95 — это относительная частота.

Аналогичным образом поступают, например, при определении процента всхожести семян.

4. Основные формулы комбинаторики. *Комбинаторика* — раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

Как при решении задач с использованием классического определения вероятности, так и в дальнейшем нам понадобятся некоторые формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Определение 1. *Размещениями* из n различных элементов по m элементов ($m \leqslant n$) называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Например, из трех элементов a, b, c можно составить по два элемента следующие размещения:

$$ab,\ ac,\ bc,\ ba,\ ca,\ cb.$$

Число различных размещений из n элементов по m элементов определяется с помощью формулы

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Пример 1. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2? Искомое число сигналов $A_6^2 = 6\cdot 5 = 30$.

Определение 2. *Перестановками* из n различных элементов называются размещения из этих n элементов по n.

Как видно из определений 1 и 2, перестановки можно считать частным случаем размещений при $m = n$. Следовательно, число всех перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Пример 2. Для лечения заболевания применяют три лекарства. Полагают, что последовательность, в которой применяют лекарства, оказывает существенное влияние на результат лечения. Сколько имеется различных порядков назначения этих лекарств? Имеется $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ различных порядков назначения трех лекарств.

Определение 3. *Сочетаниями* из n различных элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Отметим разницу между сочетаниями и размещениями: в первых не учитывается порядок элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)m}$$

или

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1}$$

Отметим особенность формулы (1):

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Пример 3. В лабораторной клетке содержат трех белых и трех коричневых мышей. Найти число способов выбора двух мышей, если они могут быть любого цвета.

В данном случае цвет не существен. Поэтому имеется $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!4!} = \dfrac{5\cdot 6}{2} = 15$ способов, которыми две мыши можно выбрать из шести.

Приведем, наконец, один из примеров применения формул комбинаторики к нахождению вероятности события.

Пример 4. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Две последние цифры можно набрать A_{10}^2 способами, а благоприятствовать событию M (цифры набраны правильно) будет только один способ. Поэтому
$$P(M) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90}.$$

§ 44. Свойства вероятности

1. Теорема сложения вероятностей несовместимых событий.

Определение 1. Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B.

Пример 1. Испытание: стрельба двух стрелков (каждый делает по одному выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень по крайней мере одним стрелком.

Аналогично суммой конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_i $(i = 1, \ldots, k)$.

Определение 2. *Произведением* событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие A и событие B.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_k$ называется событие $A = A_1 A_2 \ldots A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

В условиях предыдущего примера произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Из определения 2 непосредственно следует, что $AB = BA$.

Теорема. *Вероятность суммы двух несовместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий*:
$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

Доказательство. Используем классическое определение вероятности. Предположим, что в данном испытании число всех элементарных событий равно n, событию A благоприятствуют k элементарных событий, событию B — l элементарных событий. Так как A и B — несовместимые события, то ни одно из элементарных событий $U_1, U_2, \ldots, U_n$ не может одновременно благоприятствовать и событию A и событию B. Следовательно, событию $A + B$ будет благоприятствовать $k + l$ элементарных событий. По определению вероятности имеем:
$$P(A) = \frac{k}{n}, \qquad P(B) = \frac{l}{n}, \qquad P(A + B) = \frac{k + l}{n},$$
откуда и следует утверждение теоремы.

Совершенно так же теорема формулируется и доказывается для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

Следствие. *Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице*:

$$P(A)+P(\bar{A})=1. \tag{2}$$

Так как события A и $\bar{A}$ несовместимы, то по доказанной выше теореме имеем: $P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})$. Событие $A+\bar{A}$ есть достоверное событие (ибо одно из событий A или $\bar{A}$ произойдет). Поэтому $P(A+\bar{A})=1$, что и приводит к искомому соотношению (2).

Пример 2. В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих и 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар? Вероятность вынуть красный шар $P(A)=\frac{3}{10}$, синий $P(B)=\frac{5}{10}$. Так как события A и B несовместимы, то по доказанной выше теореме

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=0{,}8.$$

Пример 3. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте окрашенную астру, если рвется одна астра? Искомая вероятность равна сумме вероятностей сорвать красную или сннюю астру, т. е.

$$P=\frac{20}{90}+\frac{30}{90}=\frac{50}{90}=\frac{5}{9}.$$

2. Теорема умножения вероятностей.

Определение 1. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет *). В противном случае события A и B называют *зависимыми*.

Пример 1. Пусть в урне наводятся 2 белых и 2 черных шара. Пусть событие A — вынут белый шар. Очевидно, $P(A)=\frac{1}{2}$. После первого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие B — во втором испытании вынут белый шар — также имеет вероятность $P(B)=\frac{1}{2}$, т. е. события A и B — независимые.

Предположим теперь, что вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Тогда если произошло событие A, т. е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события B уменьшается $\left(P(B)=\frac{1}{3}\right)$; если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность собы-

*) Несколько событий $A_1, \ldots, A_k$ называются *независимыми* в совокупности (или просто *независимыми*), если вероятность появления любого из них не зависит от того, произошли какие-либо другие рассматриваемые события или нет.

тия B увеличивается $\left(P(B)=\frac{2}{3}\right)$. Итак, вероятность события B существенно зависит от того, произошло или не произошло событие A; в таких случаях события A и B — зависимые.

Определение 2. Пусть A и B — зависимые события. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ события B называется вероятность события B, найденная в предположении, что событие A уже наступило.

Так, в примере 1 $P_A(B)=\frac{1}{3}$.

Заметим, что если события A и B независимы, то $P_A(B)=P(B)$.

Теорема 1. *Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило*:

$$P(AB)=P(A)\,P_A(B). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A и пусть из этих k событий l благоприятствуют событию B, а значит, и событию AB. Тогда:

$$P(AB)=\frac{l}{n}=\frac{k}{n}\cdot\frac{l}{k}=P(A)\,P_A(B),$$

что и доказывает искомое равенство (3).

Замечание. Применив формулу (3) к событию BA, получим:

$$P(BA)=P(B)\,P_B(A). \tag{4}$$

Так как $AB=BA$ (см. пункт 1), то, сравнивая (3) и (4), получаем, что

$$P(A)\,P_A(B)=P(B)\,P_B(A).$$

Пример 2. В условиях примера 1 берем тот случай, когда вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Поставим следующий вопрос: какова вероятность вынуть первый и второй раз белые шары? По формуле (3) имеем:

$$P(AB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Пример 3. В терапевтическом отделении больницы 70 % пациентов — женщины, а 21 % — курящие мужчины. Наугад выбирают пациента. Он оказывается мужчиной. Какова вероятность, что он курит?

Пусть M означает, что пациент — мужчина, а K — что пациент курит. Тогда в силу условия задачи $P(M)=0{,}3$, а $P(MK)=0{,}21$. Поэтому с учетом формулы (3) искомая условная вероятность

$$P_M(K)=\frac{P(MK)}{P(M)}=\frac{0{,}21}{0{,}3}=0{,}7.$$

Пример 4. В группе туристов 20 % детей, причем 12 % девочки. Наугад выбирают ребенка. Какова вероятность, что это девочка? Какова вероятность, что это мальчик?

Пусть A означает, что турист — ребенок, $Ж$ — что турист женского пола, M — мужского. Тогда по условию

$$P(A)=0{,}2, \qquad P(ЖA)=0{,}12, \qquad P(MA)=0{,}08.$$

Следовательно,

$$P_A(Ж) = \frac{P(ЖA)}{P(A)} = \frac{0{,}12}{0{,}2} = 0{,}6,$$

$$P_A(M) = \frac{P(MA)}{P(A)} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4.$$

З а д а ч а (курение и заболевания легких). В группе обследуемых 1 000 человек. Из них 600 курящих и 400 некурящих. Среди курящих 240 человек имеют те или иные заболевания легких. Среди некурящих легочных больных 120 человек. Являются ли курение и заболевание легких независимыми событиями?

Р е ш е н и е. Пусть событие A — обследуемый курит, событие B — обследуемый страдает заболеванием легких.

Тогда согласно условию задачи

$$P(B) = \frac{240+120}{1000} = 0{,}36, \qquad P_A(B) = \frac{240}{600} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Так как $0{,}36 \neq 0{,}4$, события A и B зависимы.

Т е о р е м а 2. *Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий**):

$$P(AB) = P(A)\,P(B). \tag{5}$$

Действительно, если A и B — независимые события, то $P_A(B) = P(B)$ и формула (3) превращается в формулу (5).

П р и м е р 5. Найти вероятность одновременного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) — 0,7.

События A и B независимы, поэтому по теореме 2 искомая вероятность

$$P(AB) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

П р и м е р 6. Вероятность выживания одного организма в течение 20 минут $P = 0{,}7$. В пробирке с благоприятными для существования этих организмов условиями находятся только что родившиеся 2 организма. Какова вероятность того, что через 20 минут они будут живы?

Пусть событие A — первый организм жив через 20 мин, событие B — второй организм жив через 20 мин. Будем считать, что между организмами нет внутривидовой конкуренции, т. е. события A и B независимы. Событие, что оба организма живы, есть событие AB. По теореме 2 получаем: $P(AB) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$.

П р и м е р 7. Пусть у нас перемешаны записи нейронной активности 10 клеток из одной области мозга (у 5 клеток зарегистрирована активность, характерная для клеток «внимания», у 5 — другой вид активности) и 20 из другой области (у 15 — активность типа клеток «внимания», у 5 — другого вида). Выясним, зависимы ли события A — «выбранная наугад запись сделана в первой области» и B — на «выбранной наугад записи зарегистрирована активность, характерная для клеток «внимания»». Имеем

*) В случае независимых событий эта теорема распространяется на любое конечное число их.

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},$$
$$P(AB) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}, \qquad P(AB) \neq P(A)\,P(B).$$

Следовательно, события A и B зависимы.

Цепь реакций. Цепной называют химическую реакцию, которая представляет собой цепочку одинаковых звеньев. Звеном может быть одна, две, реже — несколько стадий. Например, звено

$$\dot{\mathrm{R}} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{R\dot{O}_2}, \qquad \mathrm{R\dot{O}_2} + \mathrm{RH} \to \mathrm{ROOH} + \dot{\mathrm{R}},$$

начавшись с появления свободного радикала углеводорода R, во второй стадии снова выделяет этот радикал и тем самым создает возможность повторения такого же звена.

На некотором этапе цепгая реакция может оборваться. Причиной обрыва может служить захват свободного радикала стенкой сосуда, действие ингибитора и т. п. Таким образом, на каждом этапе существует некоторая вероятность p продолжения цепи и вероятность $q = 1 - p$ обрыва цепи.

Какова вероятность, что цепная реакция содержит n звеньев? Для осуществления такой реакции нужно, чтобы n раз произошло продолжение реакции и после этого произошел обрыв. Так как процессы продолжения и обрыва независимы, то по формуле умножения вероятностей для $P(n)$ — вероятности появления цепи длины n, т. е. содержащей n звеньев, — можем написать

$$P(n) = \underbrace{p \cdot p \cdots p}_{n\ \text{раз}} \cdot q = p^n q = p^n (1 - p).$$

Молекула полимера. Процесс полимеризации состоит в том, что к звену-мономеру присоединяется такой же мономер, к этому звену — еще один такой же мономер и т. д. Присоединение происходит с некоторой вероятностью p и, следовательно, не происходит с вероятностью $q = 1 - p$. Так как каждое следующее присоединение происходит независимо от предыдущих, то вероятность образования молекулы, содержащей n мономеров, как и в предыдущем примере, вычисляется по формуле

$$P(n) = \underbrace{p \cdot p \cdots p}_{n\ \text{раз}} \cdot q = p^n q = p^n (1 - p).$$

3. Теорема сложения вероятностей совместимых событий.

Теорема. *Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения*:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, l — событию B и m — одновременно событиям A и B. Отсюда событию $A + B$ благоприятствуют $k + l - m$ элементарных событий. Тогда:

$$P(A + B) = \frac{k + l - m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{m}{n} = P(A) + P(B) - P(AB).$$

З а м е ч а н и е. Если события A и B несовместимы, то их произведение AB есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB) = 0$, т. е. формула (1) является частным случаем формулы (6).

П р и м е р. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $P(A) = 0{,}7$ и $P(B) = 0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Очевидно, события A и B совместимы и независимы. Поэтому

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 1{,}5 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

4. Формула полной вероятности.

Т е о р е м а. *Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из n попарно несовместимых событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A*:

$$P(A) = P(B_1)\,P_{B_1}(A) + P(B_2)\,P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\,P_{B_n}(A) \tag{7}$$

(*формула полной вероятности*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Событие A может наступить лишь при условии наступления одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, т. е. $A = B_1A + B_2A + \ldots + B_nA$, причем ввиду несовместимости событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ события $B_1A, B_2A, \ldots, B_nA$ также несовместимы. Поэтому на основании теорем сложения и умножения вероятностей имеем:

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \ldots + P(B_nA) =$$
$$= P(B_1)\,P_{B_1}(A) + P(B_2)\,P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)\,P_{B_n}(A).$$

П р и м е р 1. Для приема зачета преподаватель заготовил 50 задач: 20 задач по дифференциальному исчислению, 30 по интегральному исчислению. Для сдачи зачета студент должен решить первую же доставшуюся наугад задачу. Какова вероятность для студента сдать зачет, если он умеет решить 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному исчислению?

Вероятность получить задачу по дифференциальному исчислению (событие B_1) равна $P(B_1) = 0{,}4$, по интегральному исчислению (событие B_2) — $P(B_2) = 0{,}6$. Если событие A означает, что задача решена, то $P_{B_1}(A) = 0{,}9$, $P_{B_2}(A) = 0{,}5$. Теперь по формуле (7) имеем: $P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}36 + 0{,}3 = 0{,}66$.

П р и м е р 2. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом находятся две белые мыши и одна серая, во втором — три белые н одна серая, в третьем — две белые и две серые мыши. Какова вероятность того, что из наугад выбранного ящика будет извлечена белая мышь?

Обозначим B_1 — выбор первого ящика, B_2 — выбор второго ящика, B_3 — выбор третьего ящика, A — извлечение белой мыши.

Так как все ящики одинаковы, то $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$. Если выбран первый ящик, то $P_{B_1}(A) = \frac{2}{3}$. Аналогично $P_{B_2}(A) = \frac{3}{4}$, $P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}$. Наконец, по формуле (7) получаем:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{23}{36}.$$

Пример 3. В санатории 30 % пациентов — мужчины (M) и 70 % — женщины ($Ж$). Сердечные болезни среди мужчин встречаются в два раза чаще, чем среди женщин. Какова вероятность, что наугад выбранный пациент сердечник?

Обозначив C — наличие сердечного заболевания, можно написать

$$P(M) = 0{,}3, \qquad P(Ж) = 0{,}7, \qquad P_M(C) = \frac{2}{3}, \qquad P_Ж(C) = \frac{1}{3}.$$

Подставляя это в формулу полной вероятности (7), получим

$$P(C) = 0{,}3\cdot\frac{2}{3} + 0{,}7\cdot\frac{1}{3} \approx 0{,}2 + 0{,}23 = 0{,}43.$$

Задача (смог над городом). На город примерно 100 дней в году дует ветер с севера и 200 дней в году — с запада. Промышленноые предприятия, расположенные на севере, производят выброс вредных веществ каждый третий день, а расположенные на западе — в последний день каждой недели. Как часто город подвергается воздействию вредных выбросов? Иными словами, какова вероятность того, что в наугад выбранный день город будет накрыт промышленным смогом?

Обозначив C — ветер с севера, $З$ — ветер с запада и B — воздействие вредных выбросов на город, можем написать

$$P(C) = \frac{100}{365} = \frac{20}{73}, \qquad P(З) = \frac{200}{365} = \frac{40}{73}, \qquad P_C(B) = \frac{1}{3}, \qquad P_З(B) = \frac{1}{7}.$$

Отсюда по формуле полной вероятности

$$P(B) = P(C)\,P_C(B) + P(З)\,P_З(B) = \frac{20}{73}\cdot\frac{1}{3} + \frac{40}{73}\cdot\frac{1}{7} \approx 0{,}09 + 0{,}08 = 0{,}17.$$

Таким образом, примерно два месяца в году город накрыт смогом.

§ 45. Приложения в биологии

1. Законы Менделя. Известно, что в простейших случаях передача некоторого признака по наследству зависит от определенного гена. В половых клетках гены, отвечающие за некоторый признак, находятся парами. Например, в клетках гороха имеется пара генов, отвечающих за цвет цветков потомства — красный или белый. Эти гены могут находиться в двух состояниях — доминантном (оно обозначается буквой A) и рецессивном (оно обозначается буквой a). Поэтому пары генов могут быть такими:

$$AA,\ Aa \quad \text{или} \quad aA,\ aa.$$

Выписанные возможности определяют генотипы данной особи: первый — доминантный, второй — смешанный, третий — рецессивный. Оказывается, что наследование признака зависит от генотипа особи. Например, для гороха красный цвет цветков — доминантный признак, а белый — рецессивный.

Из опытов известен *I закон Менделя*: особи доминантного и смешанного генотипов в фенотипе*) обладают доминантным признаком, и только особи рецессивного генотипа в фенотипе обладают рецессивным признаком.

Согласно этому закону для гороха особи доминантного и смешанного генотипов имеют красный цвет цветков и только особи с рецессивным генотипом имеют цвет цветков белый.

Пусть имеется популяция чистых линий с генотипами AA и aa — поколение F_0 (родительские формы).

После скрещивания особей с генотипом AA с особями с генотипом aa поколения F_0 образуется поколение гибридов с генотипом Aa. Это поколение в генетике принято обозначать F_1. В поколении F_1 других генотипов, кроме генотипа Aa, нет.

При случайном скрещивании особей поколения F_1 образуется поколение F_2, в котором одинаково часто встречаются 4 генотипа: AA, Aa, aA, aa.

Из опытов известен *II закон Менделя*: в поколении F_2 происходит расщепление фенотипов в отношении 3:1 (3 части составляют особи с доминантным признаком в фенотипе, 1 часть приходится на особи с рецессивным признаком в фенотипе).

Из этого закона следует, что для поколения F_2 вероятность того, что в фенотипе особи проявляется доминантный признак, равна $\frac{3}{4}$, а вероятность того, что в фенотипе особи проявится рецессивный признак, равна $\frac{1}{4}$.

2. Закон Харди **)**.** Пусть в популяции встречаются три генотипа: AA, Aa, aa. Доля особей генотипа AA равна u, доля особей генотипа Aa равна $2v$ и доля особей генотипа aa равна w. Коротко будем говорить о структуре популяции и записывать ее так:

$$\begin{matrix} AA & Aa & aa \\ u & 2v & w \end{matrix} \tag{1}$$

Под этим мы понимаем следующее: если популяция содержит N особей, то особей генотипа AA в ней uN, особей смешанного генотипа Aa в ней $2vN$ и особей рецессивного генотипа aa в ней wN. При этом, так как

$$uN + 2vN + wN = N,$$

то

$$u + 2v + w = 1. \tag{2}$$

Подсчитаем число генов A в популяции. Все особи доминантного генотипа имеют $2uN$ генов A (у каждой особи два гена A, и всех особей uN), особи смешанного генотипа имеют $2vN$ генов A (у каждой особи один ген A, и всех особей $2vN$), у особей рецессивного

*) Фенотип — внешнее проявление признака.

**) Об этом законе и других приложениях теории вероятностей в биологии см., например, в [14].

генотипа генов A нет. Следовательно, в популяции (1) число доминантных генов A равно:

$$2uN + 2vN = 2N(u+v),$$

или, короче, $2Np$, где

$$p = u + v. \tag{3}$$

Число p имеет простой вероятностный смысл — это есть $P(A)$, т. е. вероятность того, что выбранный наудачу ген доминантен. Действительно, доминантных генов $2Np$, и всех генов $2N$ (у каждой особи популяции два гена). Следовательно,

$$P(A) = \frac{2Np}{2N} = p. \tag{4}$$

Аналогично подсчитывается, что число всех рецессивных генов a в популяции (1) равно:

$$2Nq,$$

где

$$q = w + v. \tag{5}$$

При этом число q имеет аналогичный вероятностный смысл:

$$P(a) = \frac{2Nq}{2N} = q. \tag{6}$$

Из вероятностного смысла чисел p и q, а также из формул (3), (5) и (2) следует, что

$$p + q = 1. \tag{7}$$

Заметим, что числа $u, 2v$ и w в (1) тоже имеют простой вероятностный смысл (подсчет аналогичен проведенному выше подсчету для доминантных генов):

$$P(AA) = \frac{uN}{N} = u, \tag{8}$$

$$P(Aa) = \frac{2vN}{N} = 2v, \tag{9}$$

$$P(aa) = \frac{wN}{N} = w. \tag{10}$$

($P(AA)$ — вероятность того, что выбранная наудачу особь имеет генотип AA, аналогично $P(Aa)$ и $P(aa)$.)

Теперь посмотрим, какова будет структура потомства. Пусть потомство имеет структуру:

$$\begin{matrix} AA & Aa & aa \\ u_1 & 2v_1 & w_1 \end{matrix} \tag{11}$$

(это понимается так же, как и (1)). Подсчитаем $u_1, 2v_1$ и w_1. Числа $u_1, 2v_1$ и w_1 есть вероятности того, что взятый наудачу потомок имеет соответственно генотип AA, Aa и aa (см. соответственно формулы (8), (9), (10)). Так как скрещивания происходят независимым образом, то вероятность u_1 может рассматриваться как вероятность следующего события: выбрали наудачу и независимым образом из всего запаса два гена A. Так как выбрать каждый ген A можно с вероятностью p (формула (4)), то в силу теоремы умножения вероятностей независимых событий (§ 44, п. 2) интересующая нас вероятность равна p^2, т. е.

$$u_1 = p^2. \tag{12}$$

Аналогично с использованием формулы (6) получаем:

$$w_1 = q^2. \tag{13}$$

Вероятность генотипа Aa в популяции потомков складывается из двух возможностей — либо ген A получен от отца, а ген a от матери, либо ген A получен от матери, а ген a от отца — соответствующие вероятности есть pq и qp. Следовательно, вероятность генотипа Aa в популяции потомков равна $2pq$, т. е. $2v_1 = 2pq$. Отсюда:

$$v_1 = pq. \tag{14}$$

Следовательно, потомство (11) имеет следующую структуру:

$$\begin{matrix} AA & Aa & aa \\ p^2 & 2pq & q^2. \end{matrix} \tag{15}$$

Самое замечательное состоит в том, что если для потомства взять $u_1 + v_1$ и $w_1 + v_1$, как это делалось для родителей в формулах (3) и (5), то получим те же самые числа p и q. Действительно, согласно формулам (12), (14), (13) и (7) имеем:

$$u_1 + v_1 = p^2 + pq = p(p+q) = p,$$

$$w_1 + v_1 = q^2 + pq = q(q+p) = q.$$

Так как структура (15) потомства вычислена только с использованием этих сумм, то потомки популяции со структурой (15) будут иметь ту же структуру. При этом говорят, что структура (15) стационарна, т. е. от поколения к поколению не меняется.

Этот замечательный факт, что со второго поколения устанавливается стационарная структура популяции, является непосредственным обобщением второго закона Менделя и называется *законом Харди*.

На практике возможно отклонение, однако для больших популяций закон Харди остается в силе.

Для гороха вероятность получения белой особи равна q^2 (рецессивный признак), вероятность получения красной особи равна $1 - q^2$ (как для противоположного события) и отношение числа красных и белых особей равно $(1-q^2) : q^2$.

Для описанного в пункте 1 случая $q = \frac{1}{2}$, и мы опять получаем $3:1$ (см. II закон Менделя).

Упражнения

1. В ящике имеется 100 яиц, из них 5 некачественных. Наудачу вынимают одно яйцо. Найти вероятность того, что вынутое яйцо некачественное. [0,05.]

2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное число очков. [0,5.]

3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5. [0,81.]

4. В сосуд емкостью 10 л попала ровно одна болезнетворная бактерия. Какова вероятность зачерпнуть ее при наборе из этого сосуда стакана воды (200 см^3)? [0,02.]

5. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительня частота появления нестандартных деталей? [0,05.]

6. При транспортировке из 1000 дынь испортилось 5. Чему равна относительная частота испорченных дынь? [0,005.]

7. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»? [0,7.]

8. Вероятность того, что лицо умрет на 71-м году жизни, равна 0,04. Какова вероятность того, что человек не умрет на 71-м году? [0,96.]

9. Бросается один раз игральная кость. Определить вероятность выпадения 3 или 5 очков. $\left[\frac{1}{3}.\right]$

10. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар? [0,5.]

11. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет? [0,2.]

12. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар. [0,6.]

13. В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются из колоды 2 карты. Определить вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз. $\left[\frac{3}{35}.\right]$

14. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые. [0,1.]

15. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза? $\left[\frac{1}{105}.\right]$

16. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,7. Найти вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе. [0,56.]

17. Найти вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет. [0,25.]

18. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все две вынутые детали окажутся стандартными. [0,56.]

19. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найти вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола. [а) 0,25; б) 0,5.]

20. Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из двух посеянных семян взойдет какое-либо одно? [0,91.]

21. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз? $\left[\frac{1}{3}.\right]$

22. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет четное или кратное трем число очков. $\left[\frac{2}{3}.\right]$

23. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная. [0,85.]

24. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке — 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная нз первой коробки, будет стандартной. [0,9.]

25. Студент M может заболеть гриппом (событие A) только в результате либо переохлаждения (событие B), либо контакта с другим больным (событие C). Требуется найти $P(A)$, если $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}5$, $P_B(A) = 0{,}3$, $P_C(A) = 0{,}1$ при условии несовместимости B и C. $[P(A) = 0{,}2.]$

26. В коробке находятся 6 новых и 2 израсходованные батарейки для карманного фонарика. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми? $\left[\frac{15}{28}.\right]$

27. На трех карточках написаны буквы У, К, Ж. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «ЖУК»? $\left[\frac{1}{6}.\right]$

28. Слово «керамит» составлено нз букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешиваются, и из них извлекаются по очереди четыре карточки. Какова вероятность того, что эти четыре карточки в порядке выхода составят слово «река»? $\left[\frac{1}{840}.\right]$

Глава IX

ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 46. Случайные величины

1. Понятие «случайные величины».

Определение 1. *Случайной величиной* называется переменная величина, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Примеры 1) Число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть случайная величина, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

2) прирост веса домашнего животного за месяц есть случайная величина, которая может принять значение из некоторого числового промежутка;

3) число родившихся мальчиков среди пяти новорожденных есть случайная величина, которая может принять значения 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так:

$$x_1,\ x_2,\ x_3.$$

Определение 2. Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной* случайной величиной.

Ниже рассматриваются дискретные случайные величины, множество допустимых значений которых конечно.

Случайные величины из примеров 1) и 3) дискретные.

Определение 3. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется *непрерывной* случайной величиной.

Случайная величина из примера 2) является непрерывной.

2. Законы распределения дискретных случайных величин. Рассмотрим дискретную случайную величину X с конечным множеством возможных значений. Величина X считается заданной, если перечислены все ее возможные значения, а также вероятности, с которыми величина X может принять эти значения. Указанный перечень возможных значений и их вероятностей называется законом распределения дискретной случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан с помощью таблицы:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_{n-1}	p_n

В верхней строке выписываются все возможные значения $x_1, x_2, \dots$ $\dots, x_n$ величины X, в нижней строке выписываются вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$ значений $x_1, x_2, \dots, x_n$. Читается таблица следующим образом: случайная величина X может принять значение x_i с вероятностью p_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Так как в результате испытания величина X всегда примет одно из значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, то

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Пример. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 100 000 р., 10 выигрышей по 10 000 р. и 100 выигрышей по 100 р. при общем числе билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

Здесь возможные значения для X есть: $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 10\,000$, $x_4 = 100000$. Вероятности их будут: $p_2 = 0{,}01$, $p_3 = 0{,}001$, $p_4 = 0{,}0001$, $p_1 = 1 - 0{,}01 - 0{,}001 - 0{,}0001 = 0{,}9889$. Следовательно, закон распределения выигрыша X может быть задан таблицей:

X	0	100	10 000	100 000
p	0,9889	0,01	0,001	0,0001

§ 47. Математическое ожидание дискретной случайной величины

1. Понятие математического ожидания. Закон распределения полностью задает дискретную случайную величину. Однако часто встречаются случаи, когда закон распределения случайной величины неизвестен. В таких случаях случайную величину изучают по ее числовым характеристикам. Одной из таких характеристик является *математическое ожидание*.

Пусть некоторая дискретная случайная величина X с конечным числом своих значений задана законом распределения:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Определение. Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений величины X на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n. \tag{1}$$

Пример. Найти математическое ожидание выигрыша X в примере из § 46 (пункт 2).

Используя полученную там таблицу, имеем:

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}9889 + 100 \cdot 0{,}01 + 10000 \cdot 0{,}001 + 100\,000 \cdot 0{,}0001 = 1 + 10 + 20 = 21 \text{ р.}$$

Очевидно, $M(X) = 21$ р. есть справедливая цена одного лотерейного билета.

Теорема. *Математическое ожидание дискретной случайной величины X приближенно равно среднему арифметическому всех ее значений (при достаточно большом числе испытаний).*

Доказательство. Предположим, что произведено n испытаний, в которых дискретная случайная величина X приняла значения $x_1, \ldots, x_k$ соответственно $m_1, \ldots, m_k$ раз, так, что $m_1 + \ldots + m_k = n$.

Тогда среднее арифметическое всех значений, принятых величиной X, выразится равенством

$$x_{\text{ср.}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}$$

или

$$x_{\text{ср.}} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n}.$$

Так как коэффициент $\frac{m_i}{n}$ является относительной частотой события «величина X приняла значение x_i» $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то

$$x_{\text{ср.}} = x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_k p_k^*.$$

Из статистического определения вероятности следует, что при достаточно большом числе испытаний $p_i^* \approx p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Поэтому

$$x_{\text{ср.}} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k$$

или

$$x_{\text{ср.}} \approx M(X).$$

Примечание. В связи с только что установленной теоремой математическое ожидание случайной величины называют также ее *средним значением*, или *ожидаемым значением*.

2. Свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

1. *Математическое ожидание*) постоянной величины C равно этой величине.*

Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение C с вероятностью $p = 1$. Поэтому $M(C) = C \cdot 1 = C$.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.* $M(CX) = CM(X)$.

Используя соотношение (1), имеем:

$$M(CX) = Cx_1 p_1 + Cx_2 p_2 + \ldots + Cx_n p_n =$$
$$= C(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n) = CM(X).$$

Следующие два (3 и 4) свойства примем без доказательства.

3. *МО суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их МО*:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Определение. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое возможное значение приняла другая величина.

Примером двух независимых случайных величин могут служить суммы выигрышей по каждому из двух билетов по двум различным денежно-вещевым лотереям. Здесь ставший известным размер выиг-

*) В дальнейшем часто ради краткости вместо слов «математическое ожидание» будем писать МО.

рыша по билету одной лотереи не влияет на ожидаемый размер выигрыша и соответствующую ему вероятность по билету другой лотереи.

Несколько случайных величин называются независимыми, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

4. *МО произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*:

$$M(XY) = M(X)\,M(Y).$$

Следствием свойств 2 и 3 является свойство 5.

5. *Математическое ожидание разности двух случайных величин X и Y равно разности их математических ожиданий*:

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y).$$

Примечание. Свойства 3 и 4 имеют место и для любого конечного числа случайных величин.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$, если известны математические ожидания случайных величин X и Y: $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$.

Используя свойства 3 и 2 математического ожидания, получим:

$$M(Z) = M(X+2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2\cdot 3 = 11.$$

Пример 2. Независимые случайные величины заданы законами распределения

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X) = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}8 = 1{,}8.$$

$$M(Y) = 0{,}5\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}7 = 0{,}15 + 0{,}7 = 0{,}85.$$

Случайные величины X и Y независимы, поэтому искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X)\,M(Y) = 1{,}8\cdot 0{,}85 = 1{,}53.$$

§ 48. Дисперсия дискретной случайной величины

1. Понятие дисперсии. МО не дает полной характеристики закона распределения случайной величины. Покажем это на примере. Пусть заданы две дискретные случайные величины X и Y своими законами распределения:

X	-2	0	2
p	0,4	0,2	0,4

Y	-100	0	100
p	0,3	0,4	0,3

Несмотря на то что МО величин X и Y одинаковы: $M(X) = M(Y) = 0$, возможные значения величин X и Y «разбросаны» или «рассеяны» около своих МО по-разному: возможные значения величины X расположены гораздо ближе к своему МО, чем значения величины Y.

Укажем еще на один пример. При одинаковой средней величине годовых осадков одна местность может быть засушливой и неблагоприятной для сельскохозяйственных работ (нет дождей весной и летом), а другая — благоприятной для ведения сельского хозяйства.

Из сказанного вытекает необходимость введения новой числовой характеристики случайной величины, по которой можно судить о «рассеянии» возможных значений этой случайной величины.

Пусть задана дискретная случайная величина X:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Определение 1. *Отклонением* случайной величины X от ее МО $M(X)$ (или просто отклонением случайной величины X) называется случайная величина $X - M(X)$.

Видно, что, для того чтобы отклонение случайной величины приняло значение $x_1 - M(X)$, достаточно, чтобы случайная величина X приняла значение x_1. Вероятность же этого события равна p_1; следовательно, и вероятность того, что отклонение случайной величины X примет значение $x_1 - M(X)$, также равна p_1. Аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения случайной величины X. Используя это, запишем закон распределена отклонения случайной величины X:

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	$\ldots$	$x_n - M(X)$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Вычислим теперь МО отклонения $X - M(X)$. Пользуясь свойствами 5 и 1 (§ 47, п. 2), получим:

$$M[X - M(X)] = M(X) - M(X) = 0.$$

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. МО *отклонения* $X - M(X)$ *равно нулю*:

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Из теоремы видно, что с помощью отклонения $X - M(X)$ не удается определить среднее отклонение возможных значений величины X от ее МО, т. е. степень рассеяния величины X. Это объясняется взаимным погашением положительных и отрицательных возможных значений отклонения. Однако можно освободиться от этого недостатка, если рассматривать квадрат отклонения случайной величины X.

Запишем закон распределения случайной величины $[X - M(X)]^2$ (рассуждения те же, что и в случае случайной величины $X - M(X)$).

$[X - M(X)]^2$	$[x_1 - M(X)]^2$	$[x_2 - M(X)]^2$	...	$[x_n - M(X)]^2$
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение 2. *Дисперсией* $D(X)$ дискретной случайной величины X называется МО квадрата отклонения случайной величины X от ее МО:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Из закона распределения величины $[X - M(X)]^2$ следует, что

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 p_n.$$

2. Свойства дисперсии дискретной случайной величины.

1. *Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между МО квадрата величины X и квадратом ее МО*:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Действительно, используя свойства МО, имеем:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] =$$
$$= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) =$$
$$= M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

С помощью этого свойства и свойства МО устанавливаются следующие свойства.

2. *Дисперсия постоянной величины C равна нулю.*

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат*:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

4. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Методом математической индукции это свойство распространяется и на случай любого конечного числа слагаемых.

Следствием свойств 3 и 4 является свойство 5.

5. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий*:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Пример. Дисперсия случайной величины X равна 3. Найти дисперсию следующих величин: а) $-3X$; б) $4X + 3$.

Согласно свойствам 2, 3 и 4 дисперсии имеем:

а) $D(-3X) = 9D(X) = 9 \cdot 3 = 27$;

б) $D(4X + 3) = D(4X) + D(3) = 16D(X) + 0 = 16 \cdot 3 = 48$.

3. Среднее квадратическое отклонение.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* $\sigma(X)$ случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия измеряется в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности, что и сама случайная величина, и используется среднее квадратическое отклонение.

Пример. Случайная величина X — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Определить $\sigma(X)$. Имеем:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5;$$

$$D(X) = (1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + \\ + (4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{35}{12};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}71.$$

Здесь для облегчения вычислений можно использовать калькулятор. То же следует иметь в виду и в ряде других примеров этой главы.

4. Понятие о моментах распределения.

Определение 1. *Начальным моментом порядка k* случайной величины X называется МО случайной величины X^k, где k — натуральное число:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Следовательно, если X имеет распределение:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

то

$$\nu_k = x_1^k\, p_1 + x_2^k\, p_2 + \ldots + x_n^k\, p_n.$$

МО и дисперсию случайной величины X можно выразить через начальные моменты порядков 1 и 2: $M(X) = \nu_1$,

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \nu_2 - \nu_1^2. \quad (1)$$

Определение 2. *Центральным моментом порядка k* случайной величины X называется МО величины $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k].$$

Из определения 2, установленной выше теоремы (пункт 1) и определения дисперсии следует, что $\mu_1 = M[X - M(X)] = 0$,

$$\mu_2 = M[(X - M(X))^2] = D(X). \tag{2}$$

Сравнивая соотношения (1) и (2), получим:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2. \tag{3}$$

П р и м е р. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3
p	0,4	0,6

Найти начальные моменты первого, второго порядков и центральный момент второго порядка. Имеем:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}6 = 2{,}2,$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}6 = 5{,}8,$$

$$\mu_2 = 5{,}8 - 2{,}2^2 = 5{,}8 - 4{,}84 = 0{,}96.$$

§ 49. Непрерывные случайные величины

1. Интегральная функция распределения. Для непрерывной случайной величины в отличие от дискретной нельзя построить таблицу распределения. Поэтому непрерывные случайные величины изучаются другим способом, который мы сейчас рассмотрим.

Пусть X — непрерывная случайная величина с возможными значениями из некоторого интервала $(a; b)$ и x — действительное число. Под выражением $X < x$ понимается событие «случайная величина X приняла значение, меньшее x». Вероятность этого события $P(X < x)$ есть некоторая функция переменной x:

$$F(x) = P(X < x).$$

О п р е д е л е н и е. *Интегральной функцией распределения* (или кратко *функцией распределения*) непрерывной случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что X приняла значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x). \tag{1}$$

Отметим, что функция распределения совершенно так же определяется для дискретных случайных величин.

Укажем свойства, которыми обладает функция $F(x)$.

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

Это свойство следует из того, что $F(x)$ есть вероятность.

2. $F(x)$ — *неубывающая функция, т. е. если* $x_1 < x_2$, *то* $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $x_1 < x_2$. Событие «X примет значение, меньшее x_2» можно представить в виде суммы двух несовместимых событий: «X примет значение, меньшее x_1» и

«X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $x_1 \leqslant X < x_2$». Обозначим вероятности последних двух событий соответственно через $P(X < x_1)$ и $P(x_1 \leqslant X < x_2)$. По теореме о вероятности суммы двух несовместимых событий имеем:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2),$$

откуда с учетом (1)

$$P(x_1 \leqslant X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{2}$$

Так как вероятность любого события есть число неотрицательное, то $P(x_1 \leqslant X < x_2) \geqslant 0$ и, значит,

$$F(x_2) \geqslant F(x_1).$$

Формула (2) утверждает свойство 3.

3. *Вероятность попадания случайной величины X в полуинтервал $[a; b)$ равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах интервала $(a; b)$*:

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1; \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Найти вероятности того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее полуинтервалу $[0; 2)$. Так как на полуинтервале $[0; 2)$ $F(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$, то

$$P(0 \leqslant X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

В дальнейшем случайную величину X будем называть *непрерывной*, если непрерывна ее функция распределения $F(x)$.

4. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет какое-либо заранее заданное значение, равна нулю*:

$$P(X = x_1) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Положив в (2) $x_2 = x_1 + \Delta x$, будем иметь:

$$P(x_1 \leqslant X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1). \tag{5}$$

Так как $F(x)$ — непрерывная функция, то, перейдя в (5) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим искомое равенство (4).

Из свойства 4 следует свойство 5.

5. *Вероятности попадания непрерывной случайной величины в интервал, сегмент и полуинтервал с одними и теми же концами одинаковы*:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b). \tag{6}$$

6. *Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то*:

1) $F(x) = 0$ *при* $x \leqslant a$; 2) $F(x) = 1$ *при* $x \geqslant b$.

Доказательство. 1) Пусть $x_1 \leqslant a$. Тогда событие $X < x_1$ невозможно, и, следовательно, вероятность его равна нулю.

2) Пусть $x_2 \geqslant b$. Тогда событие $X < x_2$ достоверно, и, следовательно, вероятность его равна 1.

Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные соотношения*:

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

2. Дифференциальная функция распределения. *Дифференциальной функцией распределения* непрерывной случайной величины X (или ее *плотностью вероятности*) называется функция $f(x)$, равная производной интегральной функции распределения*)

$$f(x) = F'(x).$$

Так как $F(x)$ — неубывающая функция, то $f(x) \geqslant 0$ (см. ч. I, § 18).

Теорема. *Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $(a; b)$ равна определенному интегралу от дифференциальной функции распределения величины X, взятому в пределах от a до b*:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то на основании формулы Ньютона–Лейбница (ч. I, § 24) имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{8}$$

Теперь с учетом соотношений (3), (6), (8) получим искомое равенство.

Из (7) следует, что геометрически (ч. I, § 23) вероятность $P(a < X < b)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком плотности вероятности $y = f(x)$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.

Следствие. *В частности, если $f(x)$ — четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то*

$$P(-a < X < a) = P(|X| < a) = 2\int_0^a f(x)\,dx. \tag{9}$$

Пример 1. Продолжительность жизни растений данного вида в определенной среде представляет собой непрерывную случайную величи-

*) Предполагается, что $F'(x)$ непрерывна, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых значения $f(x)$ можно задавать произвольно.

ну X. Пусть функцией плотности вероятности для X является $f(x)=\dfrac{1}{120}\times$ $\times\, e^{-x/120}$. Какая доля растений данного вида умирает за период 100 дней?

Имея в виду свойство 5 (п. 1), согласно формуле (7) имеем:

$$P(0\leqslant X\leqslant 100)=\int\limits_0^{100}\frac{1}{120}\,e^{-x/120}\,dx=-e^{-x/120}\Big|_0^{100}=1-e^{-5/6}\approx 0{,}7.$$

Заменяя в формуле (8) a на $-\infty$ и b на x, получим:

$$F(x)-F(-\infty)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)\,dx,$$

откуда, в силу найденного выше следствия (пункт 1),

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)\,dx. \tag{10}$$

Формула (10) дает возможность отыскать интегральную функцию распределения $F(x)$ по ее плотности вероятности.

Отметим, что из формулы (10) и из только что отмеченного следствия вытекает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1. \tag{11}$$

Пример 2. Плотность вероятности случайной величины X задана так:

$$f(x)=\frac{A}{1+x^2}\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

Требуется найти коэффициент A, функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0;1)$.

Коэффициент A найдем, воспользовавшись соотношением (11). Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{A\,dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{A\,dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{A\,dx}{1+x^2}=$$

$$=A\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{0}+A\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{+\infty}=A[\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}(-\infty)]=A\pi,$$

то $A\pi=1$, откуда $A=\dfrac{1}{\pi}$.

Применяя формулу (10), получим функцию распределения $F(x)$:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{x}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}(-\infty)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x.$$

Наконец, формулы (3) и (6) с учетом найденной функции $F(x)$ дают:

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=\frac{1}{4}.$$

3. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Определение 1. *Математическим ожиданием* (МО) *непрерывной случайной величины* X с плотностью вероятности $f(x)$ называется величина несобственного интеграла (если он сходится):

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx.$$

Определение 2. *Дисперсией непрерывной случайной величины* X, математическое ожидание которой $M(X) = a$, а функция $f(x)$ является ее плотностью вероятности, называется величина несобственного интеграла (если он сходится):

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)\,dx.$$

Можно показать, что МО и дисперсия непрерывной случайной величины имеют те же свойства, что и МО и дисперсия дискретной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины X среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ определяется, как и для дискретной величины, формулой: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

Согласно определениям 1 и 2 имеем

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{6}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{2} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{2}\,x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} \left(x^3 - \frac{8}{3}\,x^2 + \frac{16}{9}\,x\right) dx = \frac{2}{9}$$

и, наконец,

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}47.$$

§ 50. Некоторые законы распределения случайных величин

1. Биномиальное распределение. Пусть производится n испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании равна p и не зависит от исхода других испытаний (независимые испытания). Так как вероятность наступления события A в одном испытании равна p, то вероятность его ненаступления равна $q = 1-p$.

Найдем вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит m раз ($m \leqslant n$).

Пусть событие A наступило в первых m испытаниях m раз и не наступило во всех последующих испытаниях. Это сложное событие можно записать в виде произведения:

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}}\,\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m \text{ раз}}.$$

Общее число сложных событий, в которых событие A наступает m раз, равно числу сочетаний из n элементов по m элементов. При этом вероятность каждого сложного события равна: $p^m q^{n-m}$. Так как эти сложные события являются несовместимыми, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей. Итак, если $P_n(m)$ есть вероятность появления события A m раз в n испытаниях, то

$$P_n(m) = C_n^m\, p^m q^{n-m}$$

или

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m}. \tag{1}$$

Формула (1) называется *формулой Бернулли*.

Пример 1. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут:

а) три; б) не менее трех.

а) В данном случае $n=4$, $m=3$, $p=0{,}9$, $q=1-p=0{,}1$. Применяя формулу Бернулли (1), получим:

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!\,1!}\,(0{,}9)^3\cdot 0{,}1 = 0{,}2916.$$

б) Искомое событие A состоит в том, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. По теореме сложения вероятностей $P(A) = P_4(3) + P_4(4)$. Но $P_4(4) = (0{,}9)^4 = 0{,}6561$. Поэтому $P(A) = 0{,}2916 + 0{,}6561 = 0{,}9477$.

Снова рассмотрим n независимых испытаний, в каждом из которых наступает событие A с вероятностью p. Обозначим через X случайную величину, равную числу появлений события A в n испытаниях.

Понятно, что событие A может вообще не наступить, наступить один раз, два раза и т. д. и, наконец, наступить n раз. Следовательно, возможными значениями величины X будут числа $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.

По формуле Бернулли можно найти вероятности этих значений:

$$P_n(0) = q^n,$$
$$P_n(1) = C_n^1 q^{n-1} p,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n(n) = p^n.$$

Запишем полученные данные в виде таблицы распределения:

X	0	1	$\ldots$	m	$\ldots$	n
p	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\ldots$	p_n

Построенный закон распределения дискретной случайной величины X называется *законом биномиального распределения.*

Найдем $M(X)$. Очевидно, что X_i — число появлений события A в каждом испытании — представляет собой случайную величину со следующим распределением:

X_i	0	1
p_i	q	p

Поэтому $M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$. Но так как $X = X_1 + \ldots + X_n$, то $M(X) = np$.

Найдем далее $D(X)$ и $\sigma(X)$. Так как величина X_i^2 имеет распределение:

X_i^2	0^2	1^2
p_i	q	p

то $M(X_i^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$. Поэтому

$$D(X_i) = M(X_i^2) - M^2(X_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Наконец, в силу независимости величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$,

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) = npq.$$

Отсюда:

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Пример 2. Случайная величина X определена как число выпавших гербов в результате 100 бросаний монеты. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

Вероятность появления герба в каждом бросании монеты $p = \frac{1}{2}$. Следовательно, вероятность непоявления герба $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Случайная величина X имеет биномиальное распределение при $n = 100$ и $p = \frac{1}{2}$. Поэтому $M(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$, $D(X) = npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$, $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{25} = 5$.

Пример 3. Допустим, что для хищника вероятность поимки отдельной жертвы составляет 0,4 при каждом столкновении с жертвой. Каково ожидаемое число пойманных жертв в 20 столкновениях?

Это пример биномиального распределения при $n = 20$ и $p = 0{,}4$. Ожидаемое число есть $M(X) = np = 20 \cdot 0{,}4 = 8$.

Пример 4. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 80 % случаев. Какова вероятность того, что из пяти больных выздоровеет четыре?

В данном случае $p = 0{,}8$, $q = 1 - p = 0{,}2$, $n = 5$, $m = 4$. Поэтому по формуле Бернулли

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!\,(5-4)!}\,(0{,}8)^4(0{,}2)^{5-4} = \frac{5 \cdot 8^4 \cdot 2}{10^5} = \frac{8^4}{10^4} = 0{,}4096 \approx 0{,}41.$$

Пример 5. В условии предыдущего примера найти вероятность того, что из пяти больных выздоровеет не менее четырех.

Искомая вероятность есть сумма вероятностей $P_5(4) + P_5(5)$. Имеем

$$P_5(4) + P_5(5) = 0{,}4096 + (0{,}8)^5 = 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}73728 \approx 0{,}74.$$

Задача об экстрасенсе. Обычный человек примерно в половине случаев правильно угадывает, в какой руке спрятан мелкий предмет. Предположим, что верный ответ получен в трех случаях из четырех. Случайно ли это? Или при таком результате можно говорить о необычных способностях угадывающего?

Если принять вероятность угадывания в норме $p = \dfrac{1}{2}$, то по формуле Бернулли

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q,$$

где

$$q = 1 - p,$$

или

$$P_4(3) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Как видим, каждый четвертый нормальный человек правильно угадывает в трех случаях из четырех.

Допустим, что верный ответ получен в девяти случаях из десяти. Какова вероятность такого угадывания у нормального человека? По формуле Бернулли

$$P_{10}(9) = C_{10}^9\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} = C_{10}^1 \cdot \frac{1}{2^{10}} = 10 \cdot \frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}01.$$

Таким образом, нормальный человек лишь в одном случае из 100 может случайно продемонстрировать такой результат. И если подобное угадывание происходит чаще, то можно по-видимому, говорить, что угадыватель — экстрасенс (или мистификатор).

2. Равномерное распределение. Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, принимающей все свои значения из отрезка $[a; b]$, называется *равномерным*, если ее плотность вероятности на этом отрезке постоянна, а вне его равна нулю, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ c & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Отсюда (см. ч. I, § 25)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} c\,dx = c(b-a). \qquad (2)$$

Но, как известно (см. § 49, пункт 2):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Из сравнения этого равенства с (2) получаем: $c = \dfrac{1}{b-a}$.

Итак, плотность вероятности непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке $[a; b]$, имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{при} \quad x > b. \end{cases}$$

Пример. На отрезке $[a; b]$ наугад указывают точку. Какова вероятность того, что эта точка окажется в левой половине отрезка?

Пусть X — случайная величина, равная координате выбранной точки. X распределена равномерно (в этом и состоит точный смысл слов «наугад указывают точку»), а так как середина отрезка $[a; b]$ имеет координату $\dfrac{a+b}{2}$, то искомая вероятность равна (см. § 49, п. 2):

$$P\left(a < X < \frac{a+b}{2}\right) = \int\limits_{a}^{(a+b)/2} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{(a+b)/2} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{a+b}{2} - a\right) = \frac{1}{2}.$$

Впрочем, этот результат был ясен с самого начала.

3. Закон нормального распределения. Центральная предельная теорема. Закон распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется *нормальным*, если ее дифференциальная функция $f(x)$ определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}, \qquad (3)$$

где параметр a совпадает с МО величины X: $a = M(X)$, параметр σ является средним квадратическим отклонением величины X: $\sigma = \sigma(X)$.

В § 19 построен график функции $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса). С учетом графика этой функции график функции (3) будет иметь вид, как на рисунке 121. Причем его максимальная ордината равна $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Значит, эта ордината убывает с возрастанием значения σ (кривая «сжимается» к оси Ox) и возрастает с убыванием значения σ (кривая «растягивается» в положительном направлении оси Oy), что от-

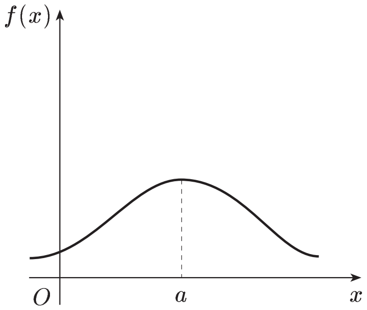

Рис. 121

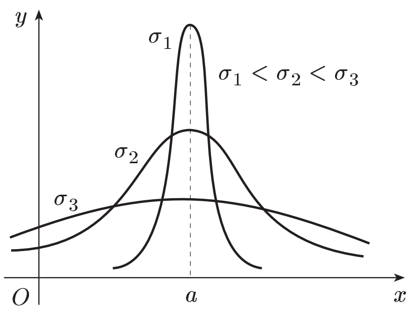

Рис. 122

ражено на рисунке 122. Изменение значений параметра a (при неизменном значении σ) не влияет на форму кривой.

Нормальное распределение с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется *нормированным*. Дифференциальная функция в случае такого распределения будет:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}.$$

Для этой функции составлена таблица (см. приложение 1) ее значений для положительных значений x (функция $\varphi(x)$ четная).

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$, согласно известной теореме (§ 49, пункт 2)

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}\, dx.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной, полагая $\dfrac{x-a}{\sigma} = t$. Тогда: $x = a + \sigma t$, $dx = \sigma\, dt$ и

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\, dt. \tag{4}$$

Однако интеграл $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-t^2/2}\, dt$ не берется в элементарных функциях. Поэтому для вычисления интеграла (4) вводится функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2/2}\, dt, \tag{5}$$

называемая *функцией Лапласа**) или *интегралом вероятностей*. Для этой функции составлена таблица (см. приложение 2) ее значений

*) Пьер Лаплас (1749–1827) — французский математик н астроном.

для положительных значений x, так как $\Phi(0)=0$ и функция $\Phi(x)$ нечетная

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{-x} e^{-t^2/2}\,dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x} e^{-z^2/2}\,dz=-\Phi(x)$$

$$(t=-z,\ dt=-dz).$$

Отметим также, что функция $\Phi(x)$ — монотонно возрастающая. Действительно, если $x_2>x_1$, то (§ 24, п. 1, свойство 4)

$$\Phi(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x_2} e^{-t^2/2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{x_1} e^{-t^2/2}\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2}\,dt=$$

$$=\Phi(x_1)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2}\,dt>\Phi(x_1),$$

ибо, в силу геометрического смысла определенного интеграла (ч. I, § 23),

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-t^2/2}\,dt>0.$$

Используя функцию (5), получим:

$$P(\alpha<X<\beta)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(\alpha-a)/\sigma}^{0} e^{-t^2/2}\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt=\Phi\Big(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\Big)-\Phi\Big(\frac{\alpha-a}{\sigma}\Big).$$

Итак,

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\Big(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\Big)-\Phi\Big(\frac{\alpha-a}{\sigma}\Big). \tag{6}$$

Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, т. е. найти $P(|X-a|<\delta)$. Используя формулу (6) и нечетность функции $\Phi(x)$, имеем:

$$P(|X-a|<\delta)=P(a-\delta<X<a+\delta)=\Phi\Big(\frac{\delta}{\sigma}\Big)-\Phi\Big(-\frac{\delta}{\sigma}\Big)=2\Phi\Big(\frac{\delta}{\sigma}\Big),$$

т. е.

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\Big(\frac{\delta}{\sigma}\Big). \tag{7}$$

Пример. Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 20$ и $\sigma = 10$. Найти $P(|X-20| < 3)$.

Используя формулу (7), имеем:

$$P(|X-20| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right).$$

По таблице приложения 2 находим: $\Phi(0{,}3) = 0{,}1179$.

Поэтому $P(|X-20| < 3) = 0{,}2358$.

Нормальное распределение вероятностей имеет в теории вероятностей большое значение. Нормальному закону подчиняется вероятность при стрельбе по цели, в измерениях и т. п. В частности, оказывается, что закон распределения суммы достаточно большого числа независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, близок к нормальному распределению. Этот факт, называемый *центральной предельной теоремой*, был доказан выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым (1857–1918).

4. Распределение случайных ошибок измерения. Пусть производится измерение некоторой величины. Разность $x - a$ между результатом измерения x и истинным значением a измеряемой величины называется *ошибкой* измерения. Вследствие воздействия на измерение большого количества факторов, которые невозможно учесть (случайные изменения температуры, колебание прибора, ошибки, возникающие при округлении, и т. п.), ошибку измерения можно считать суммой большого числа независимых случайных величин, которая по центральной предельной теореме должна быть распределена нормально. Если при этом нет систематически действующих факторов (например, неисправности приборов, завышающих при каждом измерении показания приборов), приводящих к систематическим ошибкам, то МО случайных ошибок равно нулю.

Итак, принимается положение: при отсутствии систематически действующих факторов ошибка измерения есть случайная величина (обозначим ее через T), распределенная нормально, причем ее МО равно нулю, т. е. плотность вероятности величины T равна:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/(2\sigma^2)},$$

где σ — среднеквадратическое отклонение величины T, характеризующее разброс результатов измерения вокруг измеряемой величины.

В силу предыдущего результат измерения есть также случайная величина (обозначим ее через X), связанная с T зависимостью $X = a + T$. Отсюда:

$$M(X) = a, \qquad \sigma(X) = \sigma(T) = \sigma$$

и X имеет нормальный закон распределения.

Заметим, что случайная ошибка измерения, как и результаты измерения, всегда выражаются в некоторых целых единицах, связанных с шагом шкалы измерительного прибора; в теории удобнее считать случайную ошибку непрерывной случайной величиной, что упрощает расчеты.

При измерении возможны две ситуации:

а) известно σ (это характеристика прибора и комплекса условий, при которых производятся наблюдения), требуется по результатам измерений оценить a;

б) σ неизвестно, требуется по результатам измерений оценить a и σ.

Эти очень важные задачи будут обсуждаться в § 54.

§ 51. Двумерные случайные величины

В различных задачах практики встречаются случайные величины, возможные значения которых определяются не одним числом, а несколькими. Так, при вытачивании на станке цилиндрического бруска его размеры (диаметр основания и высота) являются случайными величинами. Таким образом, здесь мы имеем дело с совокупностью двух случайных величин. Можно привести примеры, в которых рассматривается совокупность трех и более случайных величин.

Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задается таблицей значений ее составляющих X и Y и вероятностей. Общий вид такой таблицы:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

Здесь, например, p_{12} есть вероятность того, что двумерная величина примет значение (x_1, y_2).

Указанной таблицей задан закон распределения дискретной двумерной случайной величины.

Непрерывная двумерная случайная величина может аналогично непрерывной одномерной величине определяться дифференциальной функцией распределения $f(x, y)$ (плотностью вероятности двумерной случайной величины).

Аналогично одномерному случаю вводятся понятия математического ожидания $M(X, Y)$, дисперсии $D(X, Y)$ и среднего квадратического отклонения $\sigma(X, Y)$.

Упражнения

1. Пусть случайная величина X — число очков, выпавших при одном подбрасывании игральной кости. Найти закон распределения случайной величины X.

[

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

]

2. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается 1 выигрыш в 5000 р. и 10 выигрышей по 100 р. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

[

X	0	100	5000
p	0,89	0,1	0,01

]

3. Закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	1	2	3
p	0,3	0,2	0,5

Найти математическое ожидание X. [2,2.]

4. Найти математическое ожидание выигрыша X в упражнении 2. [60 р.]

5. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	2	3	5
p	0,3	0,1	0,6

[3,9.]

6. Производятся 2 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$.

Найти математическое ожидание общего числа попаданий. [0,7 попаданий.]

7. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей. [7.]

8. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей. [12,25.]

9. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	2	4	5
p	0,1	0,3	0,6

и

Y	7	9
p	0,8	0,2

Найти математическое ожидание случайной величины XY. [32,56.]

10. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

[2,01.]

11. Известны дисперсии двух независимых случайных величин X, Y: $D(X) = 4$, $D(Y) = 3$. Найти дисперсию суммы этих величин. [7.]

12. Дисперсия случайной величины X равна 5. Найти дисперсию следующих величин: а) $X - 1$; б) -2X; в) $3X + 6$. [а) 5; б) 20; в) 45.]

Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин.

13.

X	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

[$M(X) = 0{,}1$ и $D(X) = 1{,}29$.]

14.

X	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

[$M(X) = 4{,}7$ и $D(X) = 3{,}01$.]

15.

X	5	7	10	15
p	0,2	0,5	0,2	0,1

[$M(X) = 8$ и $D(X) = 8$.]

16. К случайной величине прибавили постоянную a. Как при этом изменятся ее а) математическое ожидание; б) дисперсия?

[а) прибавится a; б) не изменится.]

17. Случайную величину умножили на a. Как при этом изменятся ее а) математическое ожидание; б) дисперсия?

[а) умножится на a; б) умножится на a^2.]

18. Случайная величина X принимает только 2 значения: 1 и -1, каждое с вероятностью 0,5. Найти дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. [$D(X) = 1$, $\sigma(X) = 1$.]

19. Дисперсия случайной величины $D(X) = 6{,}25$. Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. [2,5.]

20. Пусть закон распределения случайной величины X задан таблицей:

X	4	10	20
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$. [$M(X) = 11$; $D(X) = 33$; $\sigma(X) \approx 5{,}75$.]

21. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	3	5
p	0,2	0,8

Найти начальные моменты первого и второго порядков.

[$\nu_1 = 4{,}6$; $\nu_2 = 21{,}8$.]

22. Дискретная случайная величина X задана законом распределения, приведенном в предыдущем примере. Найти центральный момент второго порядка. [$\mu_2 = 0{,}64$.]

23. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant -1, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3} \quad \text{при} \quad -1 < x \leqslant 2, \\ 0 \quad \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(0; 1)$. $\left[\dfrac{1}{3}.\right]$

24. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{2} - 1 \quad \text{при} \quad 2 < x \leqslant 4, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(2; 3)$. [0,5.]

25. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{3}{32}(4x - x^2) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 \quad \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[-2; 3]$. $\left[\dfrac{27}{32}.\right]$

26. Плотность вероятности случайной величины X задана формулой

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Найти вероятность того, что величина X попадает на интервал $(-1; 1)$.

[0,5.]

27. Случайная величина задана плотностью вероятности
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<-\dfrac{\pi}{2},\\ a\cos x & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$
Найти коэффициент a. [$a=0{,}5.$]

28. Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины X:
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ \cos x & \text{при} \quad 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$
Найти интегральную функцию распределения $F(x)$.
$$\left[F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ \sin x & \text{при} \quad 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\right]$$

29. Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины X:
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ \sin x & \text{при} \quad 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$
Найти интегральную функцию распределения $F(x)$.
$$\left[F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ 1-\cos x & \text{при} \quad 0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\right]$$

30. Функция
$$f(x)=\frac{2A}{e^x+e^{-x}} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$
является плотностью вероятности случайной величины X.

Найти коэффициент A и функцию распределения $F(x)$.
$$\left[A=\frac{1}{\pi},\ F(x)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e^x.\right]$$

31. Найти математическое ожидание случайной величины X, заданной плотностью вероятности:
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{4} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 4,\\ 0 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$
[$M(X)=2.$]

32. Случайная величина X задана плотностью вероятности:
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

$$\left[M(X) = \frac{1}{2},\ D(X) = \frac{1}{12}.\right]$$

33. В хлопке 75 % длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 3 волокон окажутся 2 длинных волокна? $\left[\frac{27}{64}.\right]$

34. При некоторых условиях стрельбы вероятность попадания в цель равна $\frac{1}{3}$. Производится 6 выстрелов. Какова вероятность в точности двух попаданий? $\left[\frac{80}{243}.\right]$

35. Игральная кость бросается 5 раз. Найти вероятность того, что два раза появится число очков, кратное трем. $\left[\frac{80}{243}.\right]$

36. Монета подбрасывается 5 раз. Какова вероятность того, что герб появится не менее двух раз? $\left[\frac{13}{16}.\right]$

37. Пусть всхожесть семян данного растения составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 3 посеянных семян взойдут а) два; б) не менее двух. [а) 0,384; б) 0,896.]

38. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51. [0,31.]

39. По мишени производится 3 выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматривается случайная величина X — число попаданий в мишень.

Найти ее закон распределения.

X	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

40. Принимая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что среди 4 новорожденных 2 мальчика. [0,375.]

41. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия $p = 0{,}6$. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов. [6 попаданий.]

42. Найти математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3. [6 билетов.]

43. Найти дисперсию случайной величины X — числа появления события A в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,7. [21.]

44. Найти а) математическое ожидание и б) дисперсию числа бракованных изделий в партии из 5000 изделий, если каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,02. [а) 100 изделий; б) 98.]

45. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появлений события A равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X — числа появления события A в этих испытаниях. [2,4.]

46. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если $M(X) = 0{,}8$. [0,48.]

47. Рост взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами: $a = 164$ см, $\sigma = 5{,}5$ см. Найти плотность вероятности: $\left[f(x) = \dfrac{1}{5{,}5\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-164)^2/60{,}5}.\right]$

48. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 0 и 2. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(-2; 3)$. [0,77453.]

49. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 6 и 2. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(4; 8)$. [0,6826.]

50. Пусть вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону с параметрами: $a = 375$ г, $\sigma = 25$ г. Найти вероятность того, что вес пойманной рыбы будет от 300 до 425 г. [0,9759.]

51. Диаметр детали, изготовленной цехом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Дисперсия ее равна 0,0001, а математическое ожидание — 2,5 см. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9973 заключен диаметр наудачу взятой детали. [2,47; 2,53.]

52. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,4. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3. [0,5468.]

53. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 2. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,1. [0,03988.]

54. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 30 и дисперсией 100. Найти вероятность того, что значение случайной величины заключено в интервале $(10; 50)$. [0,954.]

55. Найти дисперсию случайной величины X, заданной таблицей распределения:

X	2	3	5
p	0,1	0,6	0,3

[1,05.]

Глава X

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 52. Генеральная совокупность и выборка

Мы приступим к изучению элементов математической статистики, в которой разрабатываются научно обоснованные методы сбора статистических данных и их обработки.

1. Генеральная совокупность и выборка. Пусть требуется изучить множество однородных объектов (это множество называется *статистической совокупностью*) относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируемый размер детали.

Лучше всего произвести сплошное обследование, т. е. изучить каждый объект. Однако в большинстве случаев по разным причинам это сделать невозможно. Препятствовать сплошному обследованию может большое число объектов, недоступность их. Если, например, нужно знать среднюю глубину воронки при взрыве снаряда из опытной партии, то, производя сплошное обследование, мы уничтожим всю партию.

Если сплошное обследование невозможно, то из всей совокупности выбирают для изучения часть объектов.

Статистическая совокупность, из которой отбирают часть объектов, называется *генеральной совокупностью*. Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называется *выборкой*.

Число объектов генеральной совокупности и выборки называется соответственно *объемом* генеральной совокупности и *объемом* выборки.

Пример. Плоды одного дерева (200 штук) обследуют на наличие специфического для данного сорта вкуса. Для этого отбирают 10 шт. Здесь 200 — объем генеральной совокупности, а 10 — объем выборки.

Если выборку отбирают по одному объекту, который обследуют и снова возвращают в генеральную совокупность, то выборка называется *повторной*. Если объекты выборки уже не возвращаются в генеральную совокупность, то выборка называется *бесповоротной*. На практике чаще встречается бесповоротная выборка. Если объем выборки составляет небольшую долю объема генеральной совокупности, то разница между повторной и бесповоротной выборками незначительна.

Свойства объектов выборки должны правильно отражать свойства объектов генеральной совокупности, или, как говорят, выборка должна быть репрезентативной (представительной). Считается, что выборка репрезентативна, если все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку, т. е. выбор производится случайно. Например, для того чтобы оценить будущий урожай, можно сделать выборку из генеральной совокупности еще не созревших плодов и исследовать их характеристики (массу, качество и пр.). Если вся выборка будет сделана с одного дерева, то она не будет репрезентативной. Репрезентативная выборка должна состоять из случайно выбранных плодов со случайно выбранных деревьев.

2. Статистическое распределение выборки. Полигон. Гистограмма. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, x_k — n_k раз и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ — объем выборки. Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *вариантами*, а последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке, — *вариационным рядом*. Числа наблюдений $n_1, n_2, \ldots, n_k$ называются *частотами*, а их отношения к объему выборки $\frac{n_1}{n} = p_1^*$, $\frac{n_2}{n} = p_2^*, \ldots, \frac{n_k}{n} = p_k^*$ — *относительными частотами*. Отметим, что сумма относительных частот равна единице: $p_1^* + p_2^* + \ldots + p_k^* = 1$.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот. Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (непрерывное распределение). В качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал. Для графического изображения статистического распределения используются *полигоны* и *гистограммы*.

Для построения полигона на оси Ox откладывают значения вариант x_i, на оси Oy — значения частот n_i (относительных частот p_i^*).

Пример 1. На рисунке 123 изображен полигон следующего распределения:

Варианта x_i	1	2	3	5
Относительная частота p_i^*	0,4	0,2	0,3	0,1

Полигоном обычно пользуются в случае небольшого количества вариант. В случае большого количества вариант и в случае непрерывного распределения признака чаще строят гистограммы. Для этого интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i — сумму частот вариант, попавших в i интервал. Затем на этих интервалах, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами $\frac{n_i}{h}$ $\left(\text{или } \frac{n_i}{nh}\text{, где } n \text{ — объем выборки}\right)$. Площадь i частичного прямоугольника равна $\frac{hn_i}{h} = n_i$ $\left(\text{или } \frac{hn_i}{nh} =\right.$

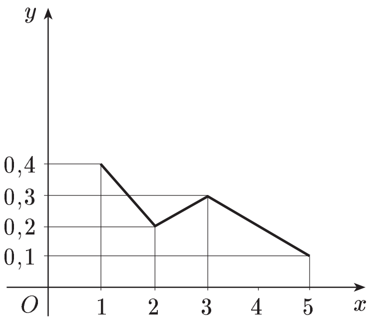

Рис. 123

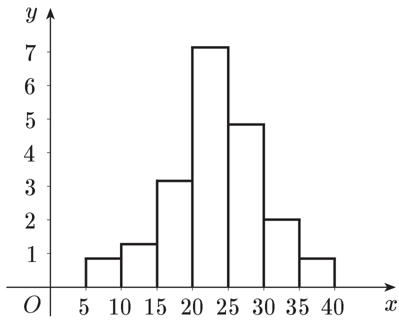

Рис. 124

$= \dfrac{n_i}{n} = p_i^*\Big)$. Следовательно, площадь гистограммы равна сумме всех частот (или относительных частот), т. е. объему выборки (или единице).

П р и м е р 2. На рисунке 124 изображена гистограмма непрерывного распределения объема $n = 100$, приведенного в следующей таблице:

Частичный интервал h	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	$\dfrac{n_i}{h}$
5–10	4	0,8
10–15	6	1,2
15–20	16	3,2
20–25	36	7,2
25–30	24	4,8
30–35	10	2,0
35–40	4	0,8

§ 53. Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке

1. Выборка как набор случайных величин. Пусть имеется некоторая генеральная совокупность, каждый объект которой наделен количественным признаком X. При случайном извлечении объекта из генеральной совокупности становится известным значение x признака X этого объекта. Таким образом, мы можем рассматривать извлечение объекта из генеральной совокупности как испытание, X — как случайную величину, а x — как одно из возможных значений X.

Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, к какому типу распределений относится признак X. Естественно, возникает задача оценки (приближенного нахождения) параметров, которыми определяется это распределение. Например, если известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить, т. е. приближенно найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки генеральной совокупности, например значения количественного признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученные в результате n наблюдений (здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр.

Опытные значения признака X можно рассматривать и как значения разных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с тем же распределением, что и X, и, следовательно, с теми же числовыми характеристиками, которые имеет X. Значит,

$$M(X_i) = M(X) \quad \text{и} \quad D(X_i) = D(X).$$

Величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ можно считать независимыми в силу независимости наблюдений. Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в этом случае называются *реализациями* случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Отсюда и из предыдущего следует, что найти оценку неизвестного параметра — это значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра.

2. Генеральная и выборочная средние. Методы их расчета. Пусть изучается дискретная генеральная совокупность объема N относительно количественного признака X.

Определение 1. *Генеральной средней* $\bar{x}_\text{г}$ (или a) называется среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$\bar{x}_\text{г} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N).$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$\bar{x}_\text{г} = \frac{1}{N}(x_1 N_1 + x_2 N_2 + \ldots + x_k N_k).$$

или

$$\bar{x}_\text{г} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i N_i \tag{1}$$

Как уже отмечалось (п. 1), извлечение объекта из генеральной совокупности есть наблюдение случайной величины X.

Пусть все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ различны. Так как каждый объект может быть извлечен с одной и той же вероятностью $\frac{1}{N}$, то

$$M(X) = x_1 \cdot \frac{1}{N} + x_2 \cdot \frac{1}{N} + \ldots + x_N \cdot \frac{1}{N} = \bar{x}_{\text{г}},$$

т. е.

$$M(X) = \bar{x}_{\text{г}}. \tag{2}$$

Такой же итог следует, если значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$.

В случае непрерывного распределения признака X по определению полагают $\bar{x}_{\text{г}} = M(X)$.

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X произведена выборка объема n.

Определение 2. *Выборочной средней* $\bar{x}_B$ называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n). \tag{3}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k)$$

или

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i. \tag{4}$$

Пример 1. Выборочным путем были получены следующие данные о массе 20 морских свинок при рождении (в г): 30, 30, 25, 32, 30, 25, 33, 32, 29, 28, 27, 36, 31, 34, 30, 23, 28, 31, 36, 30. Найти выборочную среднюю $\bar{x}_B$.

Согласно формуле (4) имеем:

$$\bar{x}_B = \frac{30\cdot 5 + 25\cdot 2 + 32\cdot 2 + 33 + 29 + 28\cdot 2 + 27 + 36\cdot 2 + 31\cdot 2 + 34 + 23}{20} = 30.$$

Итак, $\bar{x}_B = 30$ г.

Здесь для облегчения вычислений можно использовать калькулятор. То же следует иметь в виду и в ряде других примеров этой главы.

Ниже, не уменьшая общности рассуждений, будем считать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака различными.

Разумеется, выборочная средняя для различных выборок того же объема n из той же генеральной совокупности будет получаться, вообще говоря, различной. И это не удивительно — ведь извлечение i-го по счету объекта есть наблюдение случайной величины X_i, а их среднее арифметическое

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

есть тоже случайная величина.

Таким образом, всевозможные могущие получиться выборочные средние есть возможные значения случайной величины $\overline{X}$, которая называется *выборочной средней случайной величиной*.

Найдем $M(\overline{X})$, пользуясь тем, что $M(X_i) = M(X)$ (см. п. 1).

С учетом свойств МО (глава IX) получаем:

$$M(\overline{X}) = M\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] = \frac{1}{n}[M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)] =$$

$$= \frac{1}{n}[M(X) + M(X) + \ldots + M(X)] = \frac{1}{n} \cdot na = a.$$

Итак, $M(\overline{X})$ (МО выборочной средней) совпадает с a (генеральной средней).

Теперь найдем $D(\overline{X})$. Так как $D(X_i) = D(X)$ (п. 1) и $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$ независимы, то согласно свойствам дисперсии (гл. IX) получаем:

$$D(\overline{X}) = D\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] = \frac{1}{n^2}[D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)] =$$

$$= \frac{1}{n^2}[D(X) + D(X) + \ldots + D(X)] = \frac{1}{n^2} \cdot nD(X) = \frac{D(X)}{n},$$

т. е.

$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n}. \tag{5}$$

Наконец, отметим, что если варианта x_i — большие числа, то для облегчения вычисления выборочной средней применяют следующий прием. Пусть C — константа.

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - C) + nC,$$

то формула (3) преобразуется к виду:

$$\bar{x}_B = C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C). \tag{6}$$

Константу C (так называемый *ложный нуль*) берут такой, чтобы, во-первых, разности $x_i - C$ были небольшими и, во-вторых, число C было по возможности «круглым».

Пример 2. Имеется выборка:

$x_1 = 71{,}88$; $x_2 = 71{,}93$; $x_3 = 72{,}05$; $x_4 = 72{,}07$;
$x_5 = 71{,}90$; $x_6 = 72{,}02$; $x_7 = 71{,}93$; $x_8 = 71{,}77$;
$x_9 = 72{,}71$; $x_{10} = 71{,}96$.

Берем $C = 72{,}00$ и вычисляем разности: $\alpha_i = x_i - C$

$\alpha_1 = -0{,}12$; $\alpha_2 = -0{,}07$; $\alpha_3 = 0{,}05$; $\alpha_4 = 0{,}07$;
$\alpha_5 = -0{,}10$; $\alpha_6 = 0{,}02$; $\alpha_7 = -0{,}07$; $\alpha_8 = -0{,}23$;
$\alpha_9 = 0{,}11$; $\alpha_{10} = -0{,}04$.

Их сумма: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{10} = -0{,}38$; их среднее арифметическое: $\frac{1}{10} \times$ $\times (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{10}) = -0{,}038 \approx -0{,}04$. Выборочная средняя:

$$\bar{x}_B \approx 72{,}00 - 0{,}04 = 71{,}96.$$

3. Генеральная и выборочная дисперсии. Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят следующую характеристику — генеральную дисперсию.

О п р е д е л е н и е 1. *Генеральной дисперсией* $D_г$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака X генеральной совокупности от генеральной средней $\bar{x}_г$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_г)^2.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_г)^2 N_i. \tag{7}$$

П р и м е р 1. Генеральная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

Найти генеральную дисперсию. Согласно формулам (1) и (7) имеем:

$$\bar{x}_г = \frac{2\cdot 8 + 4\cdot 9 + 5\cdot 10 + 6\cdot 3}{8+9+10+3} = \frac{120}{30} = 4,$$

$$D_г = \frac{(2-4)^2\cdot 8 + (4-4)^2\cdot 9 + (5-4)^2\cdot 10 + (6-4)^2\cdot 3}{30} = \frac{54}{30} = 1{,}8.$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (*стандартом*) называется $\sigma_г = \sqrt{D_г}$.

Пусть все значения $x_1, x_2, \ldots, x_N$ различны.

Найдем дисперсию признака X, рассматриваемого как случайную величину:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Так как $M(X) = \bar{x}_г$ и $P\{X = x_i\} = \dfrac{1}{N}$ (см. п. 2), то

$$D(X) = (x_1 - \bar{x}_г)^2\cdot\frac{1}{N} + (x_2 - \bar{x}_г)^2\cdot\frac{1}{N} + \ldots + (x_N - \bar{x}_г)^2\cdot\frac{1}{N} = D_г,$$

т. е.

$$D(X) = D_г.$$

Таким образом, дисперсия $D(X)$ равна $D_г$.

Такой же итог следует, если значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$.

В случае непрерывного распределения признака X по определению полагают:

$$D_\text{г} = D(X). \tag{8}$$

С учетом формулы (8) формула (5) (п. 2) перепишется в виде:

$$D(\overline{X}) = \frac{D_\text{г}}{n},$$

откуда $\sqrt{D(\overline{X})} = \frac{\sqrt{D_\text{г}}}{\sqrt{n}}$ или $\sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma_\text{г}}{\sqrt{n}}$. Величина $\sigma(\overline{X})$ называется средней квадратической ошибкой.

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\bar{x}_B$, вводят нижеследующую характеристику.

Определение 2. *Выборочной дисперсией* D_B называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака X от выборочной средней $\bar{x}_B$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2. \tag{9}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i. \tag{10}$$

Пример 2. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную дисперсию. Согласно формулам (4) и (10) имеем:

$$\bar{x}_B = \frac{1\cdot 20 + 2\cdot 15 + 3\cdot 10 + 4\cdot 5}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2,$$

$$D_B = \frac{(1-2)^2\cdot 20 + (2-2)^2\cdot 15 + (3-2)^2\cdot 10 + (4-2)^2\cdot 5}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением (*стандартом*) называется квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

В условиях примера 2 получаем, что $\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1} = 1$.

Ниже, не уменьшая общности рассуждений, будем считать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака различными.

Выборочную дисперсию, рассматриваемую нами как случайную величину, будем обозначать $\widetilde{S}^2$:

$$\widetilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Т е о р е м а. *МО выборочной дисперсии равно* $\frac{n-1}{n}D_{\text{г}}$, *т. е.*

$$M(\widetilde{S}^2) = \frac{n-1}{n}D_{\text{г}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом свойств МО (глава IX) получаем:

$$M(\widetilde{S}^2) = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[(X_i - \overline{X})^2].$$

Вычислим одно слагаемое $M[(X_i - \overline{X})^2]$. Имеем:

$$M[(X_i - \overline{X})^2] = M(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) = M(X_i^2) - 2M(X_i\overline{X}) + M(\overline{X}^2).$$

Вычислим по отдельности эти МО.

Согласно свойству 1 дисперсии (глава IX) и формулам (2), (8) имеем:

$$M(X_i^2) = M(X^2) = D(X) + M^2(X) = D_{\text{г}} + a^2.$$

Далее, с учетом свойства 4 МО (гл. IX),

$$M(X_i\overline{X}) = M\left[X_i\cdot\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] =$$
$$= \frac{1}{n}[M(X_iX_1) + M(X_iX_2) + \ldots + M(X_iX_n)].$$

То слагаемое этой суммы, у которого второй индекс равен i, т. е. $M(X_iX_i)$, равно $M(X_i^2) = D_{\text{г}} + a^2$. У всех остальных слагаемых $M(X_iX_j)$ индексы разные. Поэтому в силу независимости X_i и X_j (см. главу IX):

$$M(X_iX_j) = M(X_i)\,M(X_j) = M(X)\,M(X) = M^2(X) = a^2.$$

Так как имеется $n-1$ таких слагаемых, то

$$M(X_i\overline{X}) = \frac{1}{n}[D_{\text{г}} + a^2 + (n-1)\,a^2] = a^2 + \frac{D_{\text{г}}}{n}.$$

В силу свойства 1 дисперсии (глава IX) получаем:

$$M(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + M^2(\overline{X}).$$

Нами уже найдены (п. 2 и п. 3):

$$M(\overline{X}) = M(X) = a, \qquad D(\overline{X}) = \frac{1}{n}D_{\text{г}}.$$

Поэтому

$$M(\overline{X}^2) = \frac{D_{\text{г}}}{n} + a^2.$$

Таким образом,

$$M[(X_i-\overline{X})^2]=D_\text{г}+a^2-2\Big(a^2+\frac{D_\text{г}}{n}\Big)+\frac{D_\text{г}}{n}+a^2=\frac{n-1}{n}\,D_\text{г}$$

и не зависит от индекса суммирования i. Поэтому

$$M(\widetilde{S}^2)=\frac{1}{n}\cdot n\,\frac{n-1}{n}\,D_\text{г}=\frac{n-1}{n}\,D_\text{г}.$$

Теорема доказана.

В заключение настоящего пункта отметим, что если варианты x_i — большие числа, то для облегчения вычисления выборочной дисперсии D_B формулу (9) преобразуют к следующему виду:

$$D_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-C)^2-(\bar{x}_B-C)^2,$$

где C — ложный нуль.

4. Оценки параметров распределения. Уже говорилось (п. 1) о том, что одной из задач статистики является оценка параметров распределения случайной величины X по данным выборки. При этом в теоретических рассуждениях считают, что генеральная совокупность бесконечна. Это делается для того, чтобы можно было переходить к пределу при $n\to\infty$, где n — объем выборки. Для оценки параметров распределения X из данных выборки составляют выражения, которые должны служить оценками неизвестных параметров. Например, $\overline{X}$ (п. 2) является оценкой генеральной средней, а $\widetilde{S}^2$ (п. 3) — оценкой генеральной дисперсии $D_\text{г}$. Обозначим через Θ оцениваемый параметр, через $\widetilde{\Theta}_n$ — оценку этого параметра ($\widetilde{\Theta}_n$ является выражением, составленным из $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (см. п. 1)). Для того чтобы оценка $\widetilde{\Theta}_n$ давала хорошее приближение, она должна удовлетворять определенным требованиям. Укажем эти требования.

Несмещенной называют оценку $\widetilde{\Theta}_n$, МО которой равно оцениваемому параметру Θ, т. е. $M(\widetilde{\Theta}_n)=\Theta$, в противном случае оценка называется *смещенной*.

Пример 1. Оценка $\overline{X}$ является несмещенной оценкой генеральной средней a, так как $M(\overline{X})=a$ (см. п. 2).

Пример 2. Оценка $\widetilde{S}^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D_\text{г}$, так как согласно установленной выше теореме (п. 3)

$$M(\widetilde{S}^2)=\frac{n-1}{n}\,D_\text{г}\neq D_\text{г}.$$

Пример 3. Наряду с выборочной дисперсией $\widetilde{S}^2$ рассматривают еще так называемую исправленную дисперсию $S^2=\dfrac{n}{n-1}\,\widetilde{S}^2$, которая является также оценкой генеральной дисперсии. Для S^2 с учетом установленной выше теоремы (п. 3) имеем:

$$M(S^2)=M\Big(\frac{n}{n-1}\,\widetilde{S}^2\Big)=\frac{n}{n-1}\,M(\widetilde{S}^2)=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\,D_\text{г}=D_\text{г}.$$

Таким образом, оценка S^2 в отличие от оценки $\widetilde{S}^2$ является несмещенной оценкой генеральной дисперсии. Явное выражение для S^2 имеет вид:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\widetilde{S}^2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

т. е.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \qquad (11)$$

Естественно в качестве приближенного неизвестного параметра брать несмещенные оценки, для того чтобы не делать систематической ошибки в сторону завышения или занижения.

Состоятельной называют такую оценку $\widetilde{\Theta}_n$ параметра Θ, что для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ вероятность $P\{|\widetilde{\Theta}_n - \Theta| < \varepsilon\}$ при $n \to \infty$ стремится к 1 *). Это значит, что при достаточно больших n можно с вероятностью, близкой к 1, т. е. почти наверное утверждать, что оценка Θ_n отличается от оцениваемого параметра Θ меньше чем на ε.

Очевидно, такому требованию должна удовлетворять всякая оценка, пригодная для практического использования.

Заметим, что несмещенная оценка Θ_n будет состоятельной, если при $n \to \infty$ ее дисперсия стремится к нулю: $D(\widetilde{\Theta}_n) \to 0$.

Пример 4. Как установлено выше (см. п. 3), $D(\overline{X}) = \frac{D_г}{n}$. Отсюда следует, что несмещенная оценка $\overline{X}$ является и состоятельной, так как

$$\lim_{n\to\infty} D(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty}\frac{D_г}{n} = D_г \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Можно показать, что несмещенная оценка S^2 является также состоятельной. Поэтому в качестве оценки генеральной дисперсии принимают исправленную дисперсию. Заметим, что оценки S^2 и $\widetilde{S}^2$ отличаются множителем $\frac{n}{n-1}$, который стремится к 1 при $n \to \infty$. На практике $\widetilde{S}^2$ и S^2 не различают при $n > 30$.

Для оценки генерального среднего квадратического отклонения используют исправленное среднее квадратическое отклонение, которое равно квадратному корню из исправленной дисперсии:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}. \qquad (12)$$

Левые части формул (11), (12), в которых случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ заменены их реализациями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\overline{X}$ — выборочной средней $\bar{x}_B$, будем обозначать соответственно через s^2 и s.

*) В таком случае говорят, что $\widetilde{\Theta}_n$ сходится к Θ по вероятности.

Отметим, что если варианты x_i – большие числа, то для облегчения вычисления s^2 формулу для s^2 аналогично формуле (9) преобразуют к виду:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C)^2 - (\bar{x}_B - C)^2\right], \tag{13}$$

где C — ложный нуль.

Оценки, обладающие свойствами несмещенности и состоятельности, при ограниченном числе опытов могут отличаться дисперсиями.

Ясно, что, чем меньше дисперсия оценки, тем меньше вероятность грубой ошибки при определении приближенного значения параметра. Поэтому необходимо, чтобы дисперсия оценки была минимальной. Оценка, обладающая таким свойством, называется *эффективной*.

Из отмеченных требований, предъявляемых к оценке, наиболее важными являются требования несмещенности и состоятельности.

Пример 5. С плодового дерева случайным образом отобрано 10 плодов. Их веса $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ (в граммах) записаны в первой колонке приведенной ниже таблицы. Обработаем статистические данные выборки. Для вычисления $\bar{x}_B$ и s по формулам (6) и (13) введем ложный нуль $C = 250$ и все необходимые при этом вычисления сведем в указанную таблицу:

i	x_i	$x_i - C$	$(x_i - C)^2$
1	225	−25	625
2	274	24	576
3	305	55	3025
4	253	3	9
5	220	−30	900
6	245	−5	25
7	211	−39	1521
8	234	−16	256
9	230	−20	400
10	231	−19	261
Сумма		−72	7598

Следовательно,

$$\bar{x}_B = 250 + \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 250) = 250 + \frac{1}{10}(-72) = 250 - 7{,}2 \approx 243 \text{ (г)};$$

$$s = \sqrt{\frac{10}{9}\left[\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 250)^2 - (250 - 7{,}2 - 250)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{10}{9}[759{,}8 - (-7{,}2)^2]} \approx 28 \text{ (г)}.$$

Отсюда: $\dfrac{s}{\sqrt{10}} \approx 9$ (г).

Итак, оценка генеральной средней веса плода равна 243 г со средней квадратической ошибкой 9 г.

Оценка генерального среднего квадратического отклонения веса плода равна 28 г.

§ 54. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

1. Надежность. Доверительные интервалы. Пусть Θ — оцениваемый параметр, $\widetilde{\Theta}_n$ — его оценка, составленная из $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$.

Если известно, что оценка $\widetilde{\Theta}_n$ является несмещенной и состоятельной, то по данным выборки вычисляют значение $\widetilde{\Theta}_n$ и считают его приближением истинного значения Θ. При этом среднее квадратическое отклонение (если его вообще вычисляют) оценивает порядок ошибки. Такие оценки называют *точечными*. Например, в предыдущем параграфе речь шла о точечных оценках генеральной средней и генеральной дисперсии. В общем случае, когда о распределении признака X ничего неизвестно, это уже немало.

Если же о распределении имеется какая-либо информация, то можно сделать больше.

В данном параграфе речь будет идти об оценке параметров a и σ случайной величины, имеющей нормальное распределение. Это очень важный случай. Например (см. § 50, п. 4), результат измерения имеет нормальное распределение. В этом случае становится возможным применять так называемое интервальное оценивание, к изложению которого мы и переходим.

Пусть $\delta > 0$ — некоторое число. Если выполняется неравенство $|\Theta - \widetilde{\Theta}_n| < \delta$, т. е. $-\delta < \Theta - \widetilde{\Theta}_n < \delta$, что можно записать в виде: $\widetilde{\Theta}_n - \delta <$ $< \Theta < \widetilde{\Theta}_n + \delta$, то говорят, что интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$ покрывает параметр Θ. Однако невозможно указать оценку $\widetilde{\Theta}_n$, такую, чтобы событие $\{|\Theta - \widetilde{\Theta}_n| < \delta\}$ было достоверным, поэтому мы будем говорить о вероятности этого события. Число δ называется *точностью* оценки $\widetilde{\Theta}_n$.

Определение. *Надежностью* (*доверительной вероятностью*) оценки $\widetilde{\Theta}_n$ параметра Θ для заданного $\delta > 0$ называется вероятность γ того, что интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$ покроет параметр Θ, т. е.

$$\gamma = P\{\widetilde{\Theta}_n - \delta < \Theta < \widetilde{\Theta}_n + \delta\} = P\{|\widetilde{\Theta}_n - \Theta| < \delta\}.$$

Заметим, что после того как по данным выборки вычислена оценка $\widetilde{\Theta}_n$, событие $\{|\widetilde{\Theta}_n - \Theta| < \delta\}$ становится или достоверным, или невозможным, так как интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$ или покрывает Θ, или нет. Но дело в том, что параметр Θ нам неизвестен. Поэтому мы называем надежностью γ уже вычисленной оценки $\widetilde{\Theta}_n$ вероятность того, что интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$, найденный для произвольной выборки, покроет Θ. Если мы сделаем много выборок объема n и для каждой из них построим интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$, то доля тех выборок, чьи интервалы покроют Θ, равна γ.

Иными словами, γ есть мера нашего доверия вычисленной оценке $\widetilde{\Theta}_n$.

Ясно, что, чем меньше число δ, тем меньше надежность γ.

Определение. *Доверительным интервалом* называется найденный по данным выборки интервал $(\widetilde{\Theta}_n - \delta, \widetilde{\Theta}_n + \delta)$, который покрывает параметр Θ с заданной надежностью γ.

Надежность γ обычно принимают равной 0,95, или 0,99, или 0,999.

Конечно, нельзя категорически утверждать, что найденный доверительный интервал покрывает параметр Θ. Но в этом можно быть уверенным на 95 % при $\gamma = 0{,}95$, на 99 % при $\gamma = 0{,}99$ и т. д. Это значит, что если сделать много выборок, то для 95 % из них (если, например, $\gamma = 0{,}95$) вычисленные доверительные интервалы действительно покроют Θ.

2. Доверительный интервал для МО при известном σ.

В некоторых случаях среднее квадратическое отклонение σ ошибки измерения (а вместе с нею и самого измерения) бывает известно. Например, если измерения производятся одним и тем же прибором при одних и тех же условиях, то σ для всех измерений одно и то же и обычно бывает известно.

Итак, пусть случайная величина X распределена нормально с параметрами a и σ, причем σ известно. Построим доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр a с заданной надежностью γ. Данные выборки есть реализация случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющих нормальное распределение с параметрами a и σ (§ 53, п. 1). Оказывается, что и выборочная средняя случайная величина $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ тоже имеет нормальное распределение (это мы примем без доказательства). При этом (см. § 53, п. 2, 3):

$$M(\overline{X}) = a, \qquad \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение $P(|\overline{X} - a| < \sigma) = \gamma$, где γ — заданная надежность. Пользуясь формулой (7) (§ 50, п. 3), получим:

$$P(|\overline{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

или

$$P(|\overline{X} - a| < \delta) = 2\Phi(t), \quad \text{где} \quad t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}. \tag{1}$$

Найдя из равенства (1) $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, можем написать:

$$P\left(|\overline{X}-a|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t).$$

Так как P задана и равна γ, то окончательно имеем (для получения рабочей формулы выборочную среднюю заменяем на $\bar{x}_B$):

$$P\left(\bar{x}_B-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_B+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)=\gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x}_B-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},\, \bar{x}_B+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Здесь число t определяется из равенства $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ (оно следует из $2\Phi(t)=\gamma$) по таблице приложения 2.

Как уже упоминалось, надежность γ обычно принимают равной или 0,95, или 0,99, или 0,999.

Пример. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально с известным $\sigma=0{,}40$. Найти по данным выборки доверительный интервал для a с надежностью $\gamma=0{,}99$, если $n=20$, $\bar{x}_B=6{,}34$.

Для $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0{,}99}{2}=0{,}495$ находим по таблице приложения 2 $t=2{,}58$. Следовательно, $\delta=2{,}58\cdot\frac{0{,}40}{\sqrt{20}}\approx 0{,}23$. Концы доверительного интервала $6{,}34-0{,}23=6{,}11$ и $6{,}34+0{,}23=6{,}57$. Итак, доверительный интервал $(6{,}11; 6{,}57)$ покрывает a с надежностью 0,99.

3. Доверительный интервал для МО при неизвестном σ. Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с неизвестными нам параметрами a и σ. Оказывается, что случайная величина (ее возможные значения будем обозначать через t):

$$T=\frac{\overline{X}-a}{\frac{S}{\sqrt{n}}},$$

где n — объем выборки, $\overline{X}$ — выборочная средняя, S — исправленное среднее квадратическое отклонение, имеет распределение, не зависящее от a и σ. Оно называется распределением Стьюдента*).

Плотность вероятности распределения Стьюдента дается формулой

$$S(t,n)=B_n\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2},$$

где коэффициент B_n зависит от объема выборки.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение

$$P(|T|<t_\gamma)=\gamma,$$

где γ — заданная надежность.

*) Стьюдент — псевдоним английского статистика Госсета.

Так как $S(t,n)$ — четная функция от t, то, пользуясь формулой (9) (§ 49), получим:

$$P\left(\frac{|\overline{X}-a|\sqrt{n}}{S}<t_\gamma\right)=2\int\limits_0^{t_\gamma}S(t,n)\,dt=\gamma.$$

Отсюда:

$$P\left(\overline{X}-\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}\right)=\gamma.$$

Следовательно, приходим к утверждению:

с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\bar{x}_B-\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}};\ \bar{x}_B+\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает известный параметр a, точность оценки $\delta=\frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$. Здесь случайные величины $\overline{X}$ и S заменены неслучайными величинами $\bar{x}_B$ и s, найденными по выборке.

В приложении 3 приведена таблица значений $t_\gamma=t(\gamma,n)$ для различных значений n и обычно задаваемых значений надежности.

Заметим, что при $n\geqslant 30$ распределение Стьюдента практически не отличается от нормированного нормального распределения (§ 50, п. 3). Это связано с тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}=e^{-t^2/2}$.

Пример. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально. Найти доверительный интервал для $\bar{x}_\text{г}$ с надежностью $\gamma=0{,}99$, если $n=20$, $\bar{x}_B=6{,}34$, $s=0{,}40$. Для надежности $\gamma=0{,}99$ и $n=20$ находим по таблице приложения 3 $t_\gamma=2{,}861$. Следовательно, $\delta=2{,}861\cdot\frac{0{,}40}{\sqrt{20}}\approx 0{,}26$. Концы доверительного интервала $6{,}34-0{,}26=6{,}08$ и $6{,}34+0{,}26=6{,}60$. Итак, доверительный интервал $(6{,}08; 6{,}60)$ покрывает $\bar{x}_\text{г}$ с надежностью 0,99.

4. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения. Для нахождения доверительного интервала для среднего квадратического отклонения σ будем использовать следующее предложение, устанавливаемое аналогично двум предыдущим (п. 2 и 3).

С надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(s-sq; s+sq)$ покрывает неизвестный параметр σ; точность оценки $\delta=sq$.

В приложении 4 приведена таблица значений $q=q(\gamma,n)$ для различных значений n и обычно задаваемых значений надежности γ.

Пример 1. Признак X распределен в генеральной совокупности нормально. Найти доверительный интервал для $\sigma_\text{г}$ с надежностью $\gamma=0{,}95$, если $n=20$, $s=0{,}40$.

Для надежности $\gamma=0{,}95$ и $n=20$ находим в таблице приложения 4 $q=0{,}37$. Далее $sq=0{,}40\cdot 0{,}37\approx 0{,}15$. Концы доверительного интервала $0{,}40-0{,}15=0{,}25$ и $0{,}40+0{,}15=0{,}55$. Итак, доверительный интервал $(0{,}25; 0{,}55)$ покрывает $\sigma_\text{г}$ с надежностью 0,95.

Примечание. Выше предполагалось, что $q < 1$. Если $q > 1$, то, учитывая, что $\sigma > 0$, получаем:

$$0 < \sigma < s + sq.$$

Значения q и в этом случае определяются по таблице приложения 4.

Пример 2. Признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 10$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}16$. Найти доверительный интервал для $\sigma_{\text{г}}$ с надежностью 0,999.

Для надежности $\gamma = 0{,}999$ и $n = 10$ по таблице приложения 4 находим $q = 1{,}80$.

Следовательно, искомый доверительный интервал таков:

$$0 < \sigma < 0{,}16 + 0{,}16 \cdot 1{,}80$$

или

$$0 < \sigma < 0{,}448.$$

5. Оценка истинного значения измеряемой величины. Пусть производится n независимых равноточных измерений*) некоторой физической величины, истинное значение a которой неизвестно. Будем рассматривать результаты отдельных измерений как случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Эти величины независимы (измерения независимы), имеют одно и то же математическое ожидание a (истинное значение измеряемой величины), одинаковые дисперсии σ^2 (измерения равноточны) и распределены нормально (такое допущение подтверждается опытом). Таким образом, все предположения, которые были сделаны при выводе доверительных интервалов в пунктах 2 и 3 настоящего параграфа, выполняются, следовательно, мы вправе использовать полученные в них предложения. Так как обычно σ неизвестно, следует пользоваться предложением, найденным в пункте 3 данного параграфа.

Пример. По данным 9 независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\bar{x}_B = 42{,}319$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 5{,}0$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию. Поэтому задача сводится к оценке математического ожидания (при неизвестном σ) при помощи доверительного интервала

$$\bar{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},$$

покрывающего a с заданной надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Пользуясь таблицей приложения 3 по $\gamma = 0{,}99$ и $n = 9$, находим $t_\gamma = 3{,}36$.

*) Т. е. измерений, проводимых в одинаковых условиях. Эти условия считают выполненными, если измерения проводятся одним прибором.

Найдем точность оценки:

$$\delta = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = 3{,}36 \cdot \frac{5}{\sqrt{9}} = 3{,}36 \cdot \frac{5}{3} = 5{,}60.$$

Концы доверительного интервала

$$42{,}319 - 5{,}60 = 36{,}719$$

и

$$42{,}319 + 5{,}60 = 47{,}919.$$

Итак, с надежностью $\gamma = 0{,}99$ истинное значение измеряемой величины a заключено в доверительном интервале $36{,}719 < a < 47{,}919$.

6. Оценка точности измерений. В теории ошибок принято точность измерений (точность прибора) характеризовать с помощью среднего квадратического отклонения σ случайных ошибок измерений. Для оценки σ используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение s. Поскольку обычно результаты измерений независимы, имеют одно и то же математическое ожидание (истинное значение измеряемой величины) и одинаковую дисперсию (в случае равноточных измерений), то утверждение, приведенное в пункте 4, применимо для оценки точности измерений.

Пример. По 16 независимым равноточным измерениям найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}4$. Найти точность измерений с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Как отмечено выше, точность измерений характеризуется средним квадратическим отклонением σ случайных ошибок измерений. Поэтому задача сводится к отысканию доверительного интервала $(s - sq;\, s + sq)$, покрывающего σ с заданной надежностью $\gamma = 0{,}99$ (п. 4). По таблице приложения 4 по $\gamma = 0{,}99$ и $n = 16$ найдем $q = 0{,}70$. Следовательно, искомый доверительный интервал таков:

$$0{,}4(1 - 0{,}70) < \sigma < 0{,}4(1 + 0{,}70)$$

или

$$0{,}12 < \sigma < 0{,}68.$$

§ 55. Проверка статистических гипотез

Пусть по выборке объема n получено эмпирическое распределение:

Варианты	x_1	x_2	...	x_m
Эмпирические (наблюдаемые) частоты	n_1	n_2	...	n_m

По данным наблюдения выдвигают гипотезу о законе распределения генеральной совокупности, например, предполагают, что генеральная совокупность распределена равномерно или нормально. Такие гипотезы называются *статистическими*. Затем для тех же объектов, которые попали в выборку, вычисляют частоты, уже исходя из теоретической гипотезы. В результате получаются частоты (их называют *выравнивающими* частотами), которые, вообще говоря, отличаются от наблюдавшихся. Как определить, правильно или нет выдвинута гипотеза, т. е. случайны ли расхождения наблюдавшихся и выравнивающих частот или эти расхождения являются следствием неправильности гипотезы? Для решения этого вопроса применяют критерии согласия эмпирических наблюдений выдвинутой гипотезе. Имеется несколько критериев согласия: χ^2 («хи квадрат») К. Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др. Мы познакомимся с критерием согласия χ^2 («хи квадрат») Пирсона.

Предположим, что на основе приведенного выше распределения выдвинута гипотеза H: генеральная совокупность имеет нормальное распределение. Для вычисления выравнивающих частот поступают следующим образом:

1) находят значения $\bar{x}_B$, $\sigma_B = \sqrt{D_B}$;

2) выравнивающие частоты n'_i ищут по формуле

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_B}\,\varphi(u_i),$$

где n — сумма наблюдавшихся частот, h — разность между двумя соседними вариантами, $u_i = \dfrac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$ и $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-u^2/2}$.

В результате получено множество выравнивающих частот:

$$n'_1,\ n'_2,\ \ldots,\ n'_m.$$

Обозначим через χ^2 сумму квадратов разностей между эмпирическими и выравнивающими частотами, деленных на соответствующие выравнивающие частоты:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}\,^{*)}. \tag{1}$$

Для данной выборки по формуле (1) находим значение случайной величины χ^2. Обозначим его через χ_0^2. Затем определяется число $k = m - 3$, называемое *числом степеней свободы*, где m — число различных вариант выборки.

Теперь проверка гипотезы H проводится так. Задаются уровнем значимости p, т. е. столь малой вероятностью p, при которой о событии $\{\chi_0^2 > \chi^2\}$, имеющем вероятность p, можно с большой уверенностью сказать, что в единичном испытании оно не произойдет. В таблице значений χ^2 по заданному уровню значимости p и числу степеней свободы k (приложение 5) находят значение $\chi^2(p;k)$. Если окажется, что $\chi_0^2 > \chi^2(p;k)$, то гипотеза H отвергается на уровне значимости p, так как произошло событие, которое не должно было произойти при верной гипотезе H; если же $\chi_0^2 < \chi^2(p;k)$, то H

*) Из этой формулы видно, что, чем меньше различие между эмпирическими и выравнивающими частотами, тем меньше будет χ^2.

принимается на уровне значимости p. Обычно в качестве p берут либо 0,05, либо 0,01, либо 0,001.

Пример. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмпирические частоты	6	13	38	74	106	85	30	14
теоретические частоты	3	14	42	82	99	76	37	13

Вычислим χ_0^2 по формуле (1) (см. расчетную таблицу)

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	6	3	3	9	3
2	13	14	−1	1	0,07
3	38	42	−4	16	0,38
4	74	82	−8	64	0,78
5	106	99	7	49	0,49
6	85	76	9	81	1,07
7	30	37	−7	49	1,32
8	14	13	1	1	0,08
					$\chi_0^2 = 7{,}19$

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число различных вариант $m = 8$. Имеем: $k = 8 - 3 = 5$. По уровню значимости $p = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 5$ по таблице значений χ^2 (приложение 5) находим: $\chi^2(0{,}05; 5) = 11{,}1$. Так как $\chi_0^2 < \chi^2(0{,}05; 5)$, нет оснований отвергнуть гипотезу H.

§ 56. Линейная корреляция

1. Корреляционная зависимость. Часто приходится иметь дело с более сложной зависимостью, чем функциональная. Такова, например, связь между осадками и урожаем или связь между толщиной снегового покрова зимой и объемом стока последующего половодья. Здесь каждому значению одной величины соответствует множество возможных значений другой величины. Подобного рода зависимости относятся к *корреляционным* зависимостям.

Определение 1. Две случайные величины X и Y находятся в *корреляционной* зависимости, если каждому значению любой из этих величин соответствует определенное распределение вероятностей другой величины.

Определение 2. *Условным математическим ожиданием* (кратко *УМО*) дискретной случайной величины X при $Y=y$ (y — определенное возможное значение Y) называется сумма произведений возможных значений величины X на их условные вероятности.

$$M_y(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P_y(X=x_i),$$

где $P_y(X=x_i)$ — условная вероятность равенства $X=x_i$ при условии, что $Y=y$.

Для непрерывных величин

$$M_y(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi_y(x)\,dx,$$

где $\varphi_y(x)$ — плотность вероятности случайной величины X при условии $Y=y$.

УМО $M_y(X)$ есть функция от y: $M_y(X)=f(y)$, которую называют функцией *регрессии* величины X на величину Y.

Аналогично определяется *УМО* случайной величины Y и функция регрессии Y на X:

$$M_x(Y)=g(x).$$

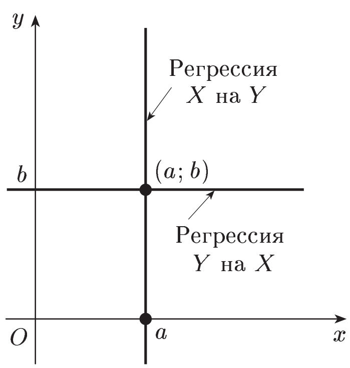

Рис. 125

Уравнение $x=f(y)$ ($y=g(x)$) называется *уравнением регрессии* X на Y (Y на X), а линия на плоскости, соответствующая этому уравнению, называется *линией регрессии*.

Линия регрессии Y на X (X на Y) показывает, как в среднем зависит Y от X (X от Y).

Пример 1. X и Y независимы, $M(X)=a$, $M(Y)=b$. Тогда $g(x)=M_x(Y)=M(Y)=b$; $f(y)=M_y(X)=M(X)=a$. Линии регрессии изображены на рисунке 125.

Пример 2. X и Y связаны линейной зависимостью: $Y=AX+B$, $A\neq 0$. Тогда функция регрессии Y на X будет иметь вид:

$$g(x)=M_x(Y)=M(Ax+B)=Ax+B.$$

Так как $X=\frac{1}{A}(Y-B)$, то функция регрессии X на Y имеет вид:

$$f(y)=M_y(X)=M\left[\frac{1}{A}(y-B)\right]=\frac{1}{A}(y-B).$$

Значит, линия регрессии X на Y: $x=\frac{1}{A}(y-B)$, т. е. $y=Ax+B$. Таким образом, в случае линейной зависимости X и Y линия регрессии X на Y и Y на X совпадают, и эта линия — прямая.

2. Коэффициент корреляции. Для характеристики корреляционной зивисимости между случайными величинами вводится понятие коэффициента корреляции.

Определение 1. Если X и Y — независимые случайные величины, то (см. гл. IX):

$$M(XY) = M(X)\,M(Y). \tag{1}$$

Если же X и Y не являются независимыми случайными величинами, то, вообще говоря, $M(XY) \neq M(X)\,M(Y)$. Условились за меру связи (зависимости) двух случайных величин X и Y принять безразмерную величину r, определяемую соотношением

$$r = \frac{M(XY) - M(X)\,M(Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \tag{2}$$

или более кратко соотношением

$$r = \frac{\mu}{\sigma_1 \sigma_2}, \tag{3}$$

где

$$\mu = M(XY) - M(X)\,M(Y), \qquad \sigma_1 = \sigma(X), \qquad \sigma_2 = \sigma(Y),$$

и называемую *коэффициентом корреляции*.

Легко видеть, что

$$\mu = M(XY) - M(X)\,M(Y) = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Определение 2. Случайные величины X и Y называются *некоррелированными*, если $r = 0$, и *коррелированными*, если $r \neq 0$.

Пример 1. Независимые случайные величины X и Y являются некоррелированными, так как в силу соотношения (1) $r = 0$.

Пример 2. Пусть случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью: $Y = AX + B$, $A \neq 0$. Найдем коэффициент корреляции. Имеем:

$$\mu = M(XY) - M(X)\,M(Y) = M(AX^2 + BX) - M(X)\,M(AX + B) =$$

$$= AM(X^2) + BM(X) - AM^2(X) - BM(X) =$$

$$= A(M(X^2) - M^2(X)) = A\sigma^2(X) \quad \text{(см. главу IX)},$$

$$\sigma^2(Y) = D(Y) = D(AX + B) = D(AX) = A^2 D(X) = A^2 \sigma^2(X),$$

откуда:

$$\sigma(Y) = |A|\,\sigma(X).$$

Поэтому

$$|r| = \frac{|A|\,\sigma^2(X)}{|A|\,\sigma^2(X)} = 1.$$

Таким образом, коэффициент корреляции случайных величин, связанных линейной зависимостью, равен ± 1 (точнее, $r = 1$, если $A > 0$, и $r = -1$, если $A < 0$).

Отметим некоторые свойства коэффициента корреляции.

Из примера 1 следует:

1. Если X и Y — независимые случайные величины, то коэффициент корреляции равен нулю.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно. (Доказательство см. в [3].)

2. Укажем без доказательства, что $|r| \leqslant 1$. При этом если $|r| = 1$, то между случайными величинами X и Y имеет место функциональная, а именно линейная зависимость. (Доказательство см. в [3].)

3. Как видно из формулы (2), коэффициент корреляции характеризует относительную величину отклонения математического ожидания произведения $M(XY)$ от произведения математических ожиданий $M(X)\,M(Y)$ величин X и Y. Так как это отклонение имеет место только для зависимых величин, то можно сказать, что коэффициент корреляции характеризует тесноту зависимости между X и Y.

3. Линейная корреляция. Этот вид корреляционной зависимости встречается довольно часто.

Определение. Корреляционная зависимость между случайными величинами X и Y называется *линейной корреляцией*, если обе функции регрессии $f(y)$ и $g(x)$ являются линейными. В этом случае обе линии регрессии являются прямыми; они называются *прямыми регрессии*.

Выведем уравнения прямой регрессии Y на X, т. е. найдем коэффициенты линейной функции $g(x) = Ax + B$.

Обозначим $M(X) = a$, $M(Y) = b$, $M[(X-a)^2] = \sigma_1^2$, $M[(Y-b)^2] = \sigma_2^2$. С использованием свойств МО (гл.IX) находим:

$$M(Y) = M[g(X)] = M(AX+B) = AM(X)+B, \quad \text{т. е.} \quad b = Aa+B,$$

откуда: $B = b - Aa$.

Далее с помощью тех же свойств МО имеем:

$$M(XY) = M[Xg(X)] = M(AX^2+BX) =$$
$$= AM(X^2)+BM(X) = AM(X^2)+(b-Aa)\,a,$$

откуда:

$$A = \frac{\mu}{M(X^2)-a^2}$$

или, согласно свойству 1 дисперсии (см. гл. IX),

$$A = \frac{\mu}{\sigma_1^2}.$$

Полученный коэффициент называется *коэффициентом регрессии* Y на X и обозначается через $\rho(Y/X)$:

$$\rho(Y/X) = \frac{\mu}{\sigma_1^2}. \tag{4}$$

Таким образом, уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид:

$$y = \rho(Y/X)(x-a)+b. \tag{5}$$

Аналогично можно получить уравнение прямой регрессии X на Y

$$x = \rho(X/Y)(y-b)+a, \tag{6}$$

где

$$\rho(X/Y) = \frac{\mu}{\sigma_2^2} \tag{7}$$

есть коэффициент регрессии X на Y.

Уравнения прямых регрессии можно записать в более симметричном виде, если воспользоваться коэффициентом корреляции. С учетом этого коэффициента имеем:

$$\rho(Y/X) = r\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \qquad \rho(X/Y) = r\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \tag{8}$$

и поэтому уравнения прямых регрессии принимают вид:

$$y-b = r\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,(x-a), \qquad x-a = r\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,(y-b).$$

Из уравнений прямых регрессии видно, что обе эти прямые проходят через точку $(a; b)$; угловые коэффициенты прямых регрессии равны соответственно (обозначения углов см. на рисунке 126):

$$\operatorname{tg}\alpha = r\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{r}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Так как $|r| \leqslant 1$, то $|\operatorname{tg}\alpha| \leqslant \leqslant |\operatorname{tg}\beta|$. Это означает, что прямая регрессии Y на X имеет меньший наклон к оси абсцисс, чем прямая регрессии X на Y. Чем ближе $|r|$ к 1, тем меньше угол между прямыми регрессии. Эти прямые сливаются тогда и только тогда, когда $|r| = 1$.

При $r = 0$ прямые регрессии имеют уравнения $y = b$; $x = a$. В этом случае $M_x(Y) = b = = M(Y)$; $M_y(X) = a = M(X)$.

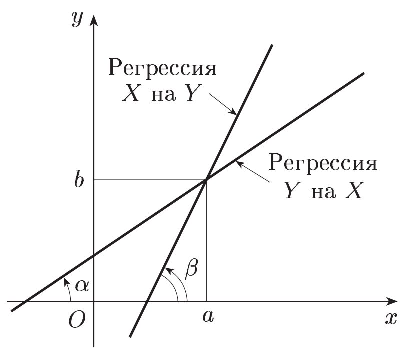

Рис. 126

Из (8) видно, что коэффициенты регрессии имеют тот же знак, что и коэффициент корреляции r, и связаны соотношением

$$\rho(Y/X)\,\rho(X/Y) = r^2.$$

4. Расчет прямых регрессии. Пусть проведено n опытов, в результате которых получены следующие значения системы величин $(X; Y)$: (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$. За приближенные значения $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$ и $D(Y)$ принимают их выборочные значения

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bar{y}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2, \qquad s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_B)^2.$$

Оценкой для μ служит величина

$$\mu_B = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)(y_i - \bar{y}_B).$$

Заменяя в соотношениях (3), (4), (7) величины μ, σ_1, σ_2 их выборочными значениями μ_B, s_1, s_2, получим приближенные значения коэффициента корреляции и коэффициентов регрессий

$$r \approx \frac{\mu_B}{s_1 s_2}, \qquad \rho(Y/X) \approx \frac{\mu_B}{s_1^2}, \qquad \rho(X/Y) \approx \frac{\mu_B}{s_2^2}$$

$\left(\frac{\mu_B}{s_1 s_2}\right.$ и $\frac{\mu_B}{s_1^2}$, $\frac{\mu_B}{s_2^2}$ — выборочные коэффициенты соответственно корреляции *) и регрессий$\left.\right)$.

Подставляя в уравнения (5) и (6) вместо $a, b, \rho(Y/X)$ и $\rho(X/Y)$ их приближенные значения, получим выборочные уравнения прямых регрессий:

$$y - \bar{y}_B = \frac{\mu_B}{s_1^2}(x - \bar{x}_B), \qquad x - \bar{x}_B = \frac{\mu_B}{s_2^2}(y - \bar{y}_B).$$

Упражнения

1. Построить полигон по данному распределению:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

2. Построить гистограмму следующего распределения:

Частичный интервал длиной h	2–5	5–8	8–11	11–14
Сумма частот вариант частичного интервала n_i	9	10	25	6

3. Генеральная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1000	1200	1400
N_i	1000	6000	3000

Найти генеральную среднюю $\bar{x}_г$ и генеральную дисперсию $D_г$:

[$\bar{x}_г = 1240$, $D_г = 14400$.]

*) Выборочный коэффициент корреляции $\frac{\mu_B}{s_1 s_2}$ обозначим через r_B.

4. Найти выборочную среднюю по следующим данным:

а) длина крыла у 6 пчел (в мм): 9,68; 9,81; 9,77; 9,60; 9,61; 9,55;

б) длина листьев садовой замляники (в см): 5,2; 5,6; 7,1; 6,6; 8,6; 8,2; 7,7; 7,8.

[а) 9,67 мм; б) 7,1 см.]

5. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	4	7	10	15
n_i	10	15	20	5

Найти выборочные среднюю $\bar{x}_B$ и дисперсию D_B.

[$\bar{x}_B = 8{,}4$ ц, $D_B = 9{,}84$.]

Определить выборочную среднюю $\bar{x}_B$ и исправленное среднее квадратическое отклонение s:

[$\bar{x}_B = 20$ ц, $s \approx 1{,}1$ ц.]

6. По выборке объема $n = 51$ найдена выборочная дисперсия $D_B = 5$. Найти исправленную дисперсию.

[$s^2 = 5{,}1$.]

В следующих трех упражнениях даны среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем выборки нормально распределенного признака генеральной совокупности. Найти доверительные интервалы для оценки генеральной средней $\bar{x}_{\text{г}}$ с заданной надежностью.

7. $\sigma = 3$; $\bar{x}_B = 4{,}1$; $n = 36$; $\gamma = 0{,}95$. [$3{,}12 < \bar{x}_{\text{г}} < 5{,}08$.]

8. $\sigma = 2$; $\bar{x}_B = 5{,}4$; $n = 10$; $\gamma = 0{,}95$. [$4{,}16 < \bar{x}_{\text{г}} < 6{,}64$.]

9. $\sigma = 3$; $\bar{x}_B = 20{,}12$; $n = 25$; $\gamma = 0{,}99$. [$18{,}57 < \bar{x}_{\text{г}} < 21{,}67$.]

В следующих трех упражнениях даны «исправленные» среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем выборки нормально распределенного признака генеральной совокупности. Найти, пользуясь распределением Стьюдента, доверительные интервалы для оценки генеральной средней $\bar{x}_{\text{г}}$ с заданной надежностью.

10. $s = 0{,}8$; $\bar{x}_B = 20{,}2$; $n = 16$; $\gamma = 0{,}95$. [$19{,}774 < \bar{x}_{\text{г}} < 20{,}626$.]

11. $s = 1{,}5$; $\bar{x}_B = 16{,}8$; $n = 12$; $\gamma = 0{,}95$. [$15{,}85 < \bar{x}_{\text{г}} < 17{,}75$.]

12. $s = 2{,}4$; $\bar{x}_B = 14{,}2$; $n = 9$; $\gamma = 0{,}99$. [$11{,}512 < \bar{x}_{\text{г}} < 16{,}888$.]

13. По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\bar{x}_B = 42{,}319$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 5$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины с надежностью 0,95.

[$38{,}469 < a < 46{,}169$.]

14. По 15 равноточным измерениям найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}12$. Найти точность измерений σ с надежностью 0,99.

[$0{,}03 < \sigma < 0{,}21$.]

15. По данным 16 независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметическое результатов отдельных измерений $\bar{x}_B = 23{,}161$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение

$s = 0{,}4$. Требуется оценить истинное значение a измеряемой величины и точность измерений σ с надежностью 0,95.

[$22{,}948 < a < 23{,}374$; $0{,}224 < \sigma < 0{,}576$.]

В следующих двух упражнениях при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

16.

Эмпирические частоты	6	12	16	40	13	8	5
Теоретические частоты	4	11	15	43	15	6	6

[$\chi_0^2 = 2{,}5$; $\chi^2(0{,}05; 4) = 9{,}5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу.]

17.

Эмпирические частоты	5	13	12	44	8	12	6
Теоретические частоты	2	20	12	35	15	10	6

[$\chi_0^2 = 13$; $\chi^2(0{,}05; 4) = 9{,}5$. Гипотеза отвергается.]

18. Найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X по данным следующей таблицы:

x_i	23,0	24,0	24,5	24,5	25,0	25,5	26,0	26,0	26,5	26,5	27,0	27,0	28,0
y_i	0,48	0,50	0,49	0,50	0,51	0,52	0,51	0,53	0,50	0,52	0,54	0,52	0,53

[$y = 0{,}0098x + 0{,}2581$.]

19. По данным таблицы, приведенной в предыдущем упражнении, найти выборочное уравнение прямой регрессии X на Y. [$x = 64y - 7{,}012$.]