

БЮДЖЕТНЫЙ
СЕРИАЛ 100

СПРАВОЧНИК
ПО
МАТЕМАТИКЕ

1945

БЮДЖЕТНЫЙ СЕРИАЛ 100

СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ИСПОЛНЕНИЯ
УЧЕНИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

ОДНОГО ИЗДАНИЯ

И. Н. БРОНШТЕЙН и К. А. СЕМЕНДЯЕВ

**СПРАВОЧНИК
ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ
И УЧАЩИХСЯ ВТУЗОВ**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1945 Ленинград**

Редактор *С. А. Каменецкий*. Подписано к печати 7/X 1944 г.
17,5 печ. л., 41,3 авт. л., 97500 тип. зн. в печ. л. Тир. 50 000 экз.
А. 10978. Цена книги 25 р. Переплет 2 р. Зак. 1321

Отпечатано с матриц в типографии Госэнергоиздата,
Москва, Шлюзовая наб., д. 10.

ОТ СОСТАВИТЕЛЕЙ

Задача, которая стояла перед нами — дать в небольшом по объему справочнике основные сведения по математике, необходимые в учебной и практической работе инженерам и студентам вузов, — была чрезвычайно трудной. Стремясь к краткости изложения, мы все же пытались сделать справочник доступным, удобным для пользования и, по возможности, математически строгим (в той мере, в которой эту строгость следует предъявлять к инженерам).

Следует иметь в виду, что это — не учебная книга, не краткий конспект учебника, а справочник. Поэтому в нем нет той систематичности, которая должна быть в учебнике. Читателя не должно удивлять, что, например, правило Лопиталя попало в параграф о вычислении пределов, стоящий в главе „Введение в анализ“, помещенной перед понятием о производной, а сведения о гамма-функции даны в главе „Алгебра“ непосредственно после понятия факториала. Таких „несообразностей“ в справочнике очень много. Поэтому при желании получить ту или иную справку, читателю рекомендуется пользоваться не только оглавлением, но и алфавитным указателем, помещенным в конце книги.

Если в тексте справочника упоминается вопрос, более подробно освещенный в другом месте справочника, то об этом делается указание в виде ссылки на соответствующую страницу; если же дается указание на другую литературу, то приводится только автор книги и та страница справочника, где приведены полные библиографические сведения о книге („Указатель литературы“ в конце справочника).

В справочнике возможны недостатки; в полной мере они могут быть обнаружены только в практической работе. Поэтому мы обращаемся с настоятельной просьбой ко всем, пользующимся справочником, писать в издательство (Москва, Орликов пер., 3, Гостехиздат) о всех недостатках, которые будут замечены. Все замечания будут учтены в следующих изданиях справочника.

Выражаем глубокую признательность товарищам А. М. Лопшицу, М. Н. Олевскому и М. Г. Шестопал, просмотревшим в рукописи отдельные главы справочника и внесшим ряд ценных указаний.

И. Бронштейн.

К. Семендяев.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Математические обозначения	11
Латинский и греческий алфавиты	13

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ

I. Таблицы

<i>А. Таблицы основных (элементарных) функций</i>	<i>18</i>
1. Некоторые часто встречающиеся постоянные	18
2. Степени целых чисел	20
3. Квадраты, кубы, корни	22
4. Обратные величины	47
5. Некоторые степени чисел 2, 3 и 5	50
6. Факториалы	50
7. Четырехзначные мантиссы	51
8. Антилогарифмы	54
9. Перевод градусной меры в радианную	57
10. Натуральные значения тригонометрических функций	58
11. Показательные, гиперболические и тригонометрические функции (для x от 0 до 1,6)	64
12. Показательные функции (для x от 1,6 до 10,5)	72
13. Натуральные логарифмы	76
14. Длина окружности диаметра d	81
15. Площадь круга диаметра d	81
16. Элементы сегмента круга	88
17. Пропорциональные части	96
18. Таблица для квадратичного интерполирования	98
<i>Б. Таблицы специальных функций</i>	<i>99</i>
19. Гамма-функция	99
20. Бесселевы функции	101
21. Полиномы Лежандра (шаровые функции)	114
22. Эллиптические интегралы	105
23. Интеграл вероятности	108

II. Графики

<i>А. Элементарные функции</i>	110
1. Многочлены	110
2. Дробные функции	112
3. Иррациональные функции	116
4. Показательные и логарифмические функции	118
5. Тригонометрические функции	122
6. Обратные тригонометрические функции	124
7. Гиперболические функции	125
8. Обратные гиперболические функции	126
<i>Б. Важнейшие кривые</i>	127
9. Кривые третьего порядка	127
10. Кривые четвертого порядка	129
11. Циклоиды	133
12. Спирали	137
13. Некоторые другие кривые	139

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

I. Приближенные вычисления

1. Правила приближенных вычислений	141
2. Приближенные формулы	145
3. Счетная линейка	148

II. Алгебра

<i>А. Тождественные преобразования</i>	154
1. Основные понятия	154
2. Целые рациональные выражения	155
3. Дробные рациональные выражения	156
4. Иррациональные выражения; преобразования степеней и корней	160
5. Показательные и логарифмические выражения	162
<i>Б. Уравнения</i>	165
6. Преобразование к канонической форме	165
7. Уравнения 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степеней	167
8. Уравнения n -й степени	171
9. Трансцендентные уравнения	172
10. Определители (детерминанты)	176
11. Решение системы уравнений	179

<i>В. Дополнительные главы алгебры</i>	182
12. Прогрессии, конечные ряды и средние величины	182
13. Факториал и гамма-функция	184
14. Соединения	186
15. Бином Ньютона	187

III. Геометрия

<i>А. Планиметрия</i>	188
1. Плоские фигуры	188
<i>Б. Стереометрия</i>	194
2. Пространственные углы	194
3. Многогранные	195
4. Круглые тела	198

IV. Тригонометрия

<i>А. Прямолинейная тригонометрия</i>	202
1. Тригонометрические функции	202
2. Основные формулы тригонометрии	206
3. Синусоидальные величины	208
4. Решение треугольников	210
5. Круговые (обратные тригонометрические функции)	212
<i>Б. Сферическая тригонометрия</i>	214
6. Геометрия на сфере	214
7. Формулы сферической тригонометрии	215
8. Решение прямоугольных треугольников	215
<i>В. Гиперболическая тригонометрия</i>	215
9. Гиперболические функции	215
10. Основные формулы гиперболической тригонометрии	216
11. Обратные гиперболические функции	218
12. Происхождение гиперболических функций	218

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

I. Аналитическая геометрия

<i>А. Геометрия на плоскости</i>	220
1. Основные понятия и формулы	220
2. Прямая линия	224
3. Окружность	227
4. Эллипс	228
5. Гипербола	230
6. Парабола	233
7. Кривые 2-го порядка (конические сечения)	234
<i>Б. Геометрия в пространстве</i>	235
8. Основные понятия и формулы	235
9. Плоскость и прямая в пространстве	242
10. Поверхности 2-го порядка (канонические уравнения)	250
11. Поверхности 2-го порядка (общая теория)	254

II. Дифференциальная геометрия

<i>А. Плоские кривые</i>	255
1. Различные способы задания кривой	255
2. Локальные элементы кривой	255
3. Точки специального типа	262
4. Асимптоты	266
5. Общее исследование кривой по ее уравнению	268
6. Эволюты и эвольвенты	270
7. Огибающие семейства кривых	271
<i>Б. Пространственные кривые</i>	272
8. Аналитические задания кривой	272
9. Сопровождающий трехгранник	273
10. Кривизна и кручение	276
<i>В. Поверхности</i>	278
11. Аналитические задания поверхности	278
12.касательная плоскость и нормаль	279
13. Линейный элемент поверхности	282
14. Кривизна поверхности	283
15. Геодезические линии на поверхности	287

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

I. Введение в анализ

1. Функции	288
2. Пределы	292
3. Бесконечно малые величины	298
4. Непрерывность функций	299
5. Числовые ряды	302
6. Функциональные ряды	306

II. Дифференциальное исчисление

1. Основные понятия	309
2. Техника дифференцирования	313
3. Замена переменных в дифференциальных выражениях	321
4. Основные теоремы дифференциального исчисления	323
5. Нахождение максимума и минимума	325
6. Разложение функций в степенные ряды	328

III. Интегральное исчисление

A. Неопределенные интегралы 332

1. Основные понятия	332
2. Общие правила интегрирования	334
3. Интегрирование рациональных функций	337
4. Интегрирование иррациональных функций	344
5. Интегрирование тригонометрических функций	353
6. Интегрирование гиперболических функций	360
7. Интегрирование других трансцендентных функций	362
8. Интегралы, встречающиеся в теории колебаний	365

Б. Определенные интегралы 368

9. Основные понятия	368
10. Методы вычисления определенного интеграла	373
11. Приложения интегрального исчисления	378
12. Таблица некоторых определенных интегралов	385

B. Кратные интегралы 388

13. Основные понятия	388
14. Вычисление кратных интегралов	390
15. Приложения кратных интегралов	396

ОГЛАВЛЕНИЕ

IV. Дифференциальные уравнения

1. Общие понятия	400
<i>А. Обыкновенные дифференциальные уравнения</i>	<i>401</i>
2. Уравнения 1-го порядка: $y' = f(x, y)$	401
3. Уравнения высших порядков и системы уравнений	411
4. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	415
5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	420
6. Линейные уравнения 2-го порядка	424
<i>Б. Уравнения в частных производных</i>	<i>429</i>
7. Линейные уравнения 1-го порядка	429
8. Линейные уравнения 2-го порядка	431

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА

I. Комплексные числа

<i>А. Алгебра</i>	<i>440</i>
1. Основные понятия	440
2. Алгебраические действия	443
3. Комплексные числа как операторы	445
<i>Б. Анализ</i>	<i>447</i>
4. Элементарные трансцендентные функции	447
5. Уравнения кривых в комплексной форме	451
6. Функции комплексного переменного	454
7. Важнейшие конформные отображения	457

II. Векторное исчисление

<i>А. Векторная алгебра и вектор-функции скаляра</i>	<i>460</i>
1. Основные понятия	460
2. Алгебра векторов	461
3. Векторные функции скалярного переменного	467
<i>Б. Теория поля</i>	<i>468</i>
4. Скалярное поле	468
5. Векторное поле	470
6. Градиент	474

7. Криволинейный интеграл в векторном поле . . .	476
8. Потенциал	478
9. Интегралы по поверхности	480
10. Объемное дифференцирование	483
11. Дивергенция векторного поля	483
12. Ротация векторного поля	484
13. Операторы Гамильтона и Лапласа	486
14. Интегральные теоремы	488
15. Безвихревые и соленоидальные векторные поля .	489
16. Уравнения Лапласа и Пуассона	490

III. Ряды Фурье (гармонический анализ)

1. Общие сведения	491
2. Таблица некоторых разложений в ряд Фурье .	497
3. Приближенный гармонический анализ	501

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

ОБРАБОТКА НАБЛЮДЕНИЙ

I. Основы теории вероятностей и теории ошибок

1. Теория вероятностей	506
2. Теория ошибок	508

II. Эмпирические формулы

1. Приближенное изображение функциональной зависимости	515
2. Параболическая интерполяция	518
3. Подбор эмпирических формул	523
Указатель литературы	530
Алфавитный указатель	536
Приложение (вкладка): Таблица пропорциональных частей.	

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ*

I. Соотношения величин

$=$	равно
$\equiv$	тождественно равно
$\neq$	не равно
$\approx$	приближенно равно
$<$	меньше
$>$	больше
$\leq$	меньше или равно
$\geq$	больше или равно
$\ll$	значительно меньше (или „мало по сравнению с . . .“)
$\gg$	значительно больше (или „велико по сравнению с . . .“)

II. Алгебра

$ a $	абсолютная величина числа a
$+$	(плюс) — сложение
$-$	(минус) — вычитание
$\cdot$ или $\times$	умножение, напр.: $a \cdot b$ или $a \times b$; знак умножения часто опускается, напр.: ab
$:$ или $-$	деление ($a : b$ или $\frac{a}{b}$)
a^m	a в степени m
$\sqrt{}$	квадратный корень, например: $\sqrt{a}$
$\sqrt[n]{}$	корень n -й степени, например: $\sqrt[n]{a}$
$\log_b$	логарифм при основании b , например: $5 = \lg_2 32$ (стр. 162—163)
$\lg$	десятичный логарифм, например: $2 = \lg 100$ (стр. 163)
$\ln$	натуральный логарифм, например: $1 = \ln e$ (стр. 163)
$()$, $[]$, $\{$	скобки (последовательность действий)
$!$	факториал, напр.: $a!$; $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ (стр. 184)

* В скобках (стр. ...) обозначаются страницы, где соответствующие понятия разъяснены.

III. Геометрия

$\perp$	перпендикулярно
$\parallel$	параллельно
$\equiv$	равно и параллельно
$\sim$	подобно, например: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
$\triangle$	треугольник
$\angle$	угол (иногда $\sphericalangle$), например: $\angle ABC$, $\sphericalangle ABC$
$\frown$, $\smile$	дуга, например: $\widehat{AB}$, $\smile AB$.
$^\circ$	градус
'	минута
"	секунда
	} угловые или дуговые, например: $32^\circ 14' 11''$, 5

IV. Тригонометрия, гиперболические функции

sin	синус	} (стр. 203)
cos	косинус	
tg	тангенс	
ctg	котангенс	
sc	секанс	
csc	косеканс	} (стр. 212)
Arcsin	арксинус	
Arccos	арккосинус	
Arctg	арктангенс	
Arctctg	арккотангенс	
arcsin	главное значение арксинуса	} (стр. 212)
arccos	" " арккосинуса	
arctg	" " арктангенса	
arctctg	" " арккотангенса	
sh	синус гиперболический	} (стр. 216)
ch	косинус гиперболический	
th	тангенс гиперболический	
cth	котангенс гиперболический	
sch	секанс гиперболический	
csch	косеканс гиперболический	} (стр. 218)
Arsh	ареа-синус гиперболический	
Arch	ареа-косинус гиперболический	
Arth	ареа-тангенс гиперболический	
Arcth	ареа-котангенс гиперболический	

V. Обозначения констант

const	постоянная величина (константа)
$\pi = 3,14159\dots$	отношение длины окружности к диаметру (стр. 193)
$e = 2,71828\dots$	основание натуральных логарифмов (стр. 295)
$C = 0,5772\dots$	эйлерова постоянная (стр. 295)

VI. Математический анализ

$\lim$	предел („лимит“, стр. 292)	} например:	
$\rightarrow$	стремится к...		
∞	бесконечность	} $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$	
Σ	сумма		
$\sum_{i=1}^n$	сумма, где i изменяется от 1 до n		
$f(), \varphi()$	обозначения функций, например: $y = f(x)$, $u = \varphi(x, y, z)$ и т. д. (стр. 288)		
Δ	приращение, например: Δx		
d	дифференциал, например: dx (стр. 310)		
d_x, d_y и т. д.	частный дифференциал, например: $d_x u$ (стр. 311)		
$', ', ', IV,$ или $;', ', ', \dots$	{	обозначения последовательных производных от функции одного переменного. например, от функции $y = f(x)$: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, y' , y'' , y''' , y^{IV} , $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\ddot{y}}$ (стр. 309, 312)	
$\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$		первая производная, вторая производная и т. д., } например: $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. (стр. 309, 312)	
f'_x, f''_{xx}, f''_{xy} или $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	{	частные производные, например: $f'_x(u), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и т. д. (стр. 310—312)	
$\int$		интеграл (стр. 332)	
$\int_a^b$	определенный интеграл от нижнего предела a до верхнего предела b (стр. 368)		
$\int_S, \int_V$	интеграл, распространенный на площадь S , на объем V (стр. 388, 389)		
$\iint$	{	двойной интеграл	
$\iiint$		тройной интеграл	
D	знак производной (оператор дифференцирования), например: $Dy = y'$, $D^2y = y''$ и т. д. (стр. 309, 415)		

VII. Комплексные числа

i иногда j	мнимая единица ($i = \sqrt{-1}$) (стр. 440)
$R(a)$	действительная часть числа a
$I(a)$	мнимая часть числа a
$\bar{a}$	число, сопряженное с a , например: $a = 2 + 3i$, $\bar{a} = 2 - 3i$ (стр. 442)
Ln	логарифм (натуральный) комплексного числа (стр. 449)

VIII. Векторное исчисление

a, b, c , или $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$	обозначения векторов (стр. 460)
a^0	единичный вектор того же направления, что и вектор a (стр. 460)
i, j, k	координатные орты прямоугольной системы координат (стр. 460)
e_1, e_2, e_3	координатные орты в любой системе координат (стр. 472)
$ a $ или a	длина (абсолютная величина) вектора a (стр. 460)
$a = b$ $a + b$ $a - b$	равенство, сложение, вычитание векторов (стр. 460—461)
αa	умножение скаляра на вектор (стр. 461)
ab	скалярное умножение векторов (стр. 452)
$a \times b$ или $[ab]$	векторное умножение векторов (стр. 462)
$abc = a(b \times c)$	смешанное произведение трех векторов (стр. 460)
a_x, a_y, a_z	координаты вектора a в декартовой системе (стр. 460—461)
∇	дифференциальный оператор Гамильтона („набла“) (стр. 486)
grad	градиент скалярного поля ($\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$) (стр. 474)
div	дивергенция векторного поля ($\text{div } V = \nabla V$) (стр. 483)
rot	ротация векторного поля ($\text{rot } V = \nabla \times V$) (стр. 484)
$\frac{\partial U}{\partial e}$	производная скалярного поля по направлению e (стр. 474)

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Aa — а	Nn — эн
Bb — бэ	Oo — о
Cc — цэ	Pp — пэ
Dd — дэ	Qq — ку
Ee — е	Rr — эр
Ff — эф	Ss — эс
Gg — ге (же)	Tt — тэ
Hh — ха (аш)	Uu — у
Ii — и	Vv — вэ
Jj — йот (жи)	Ww — дубль-вэ
Kk — ка	Xx — икс
Ll — эль	Yy — игрек
Mm — эм	Zz — зэт

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Aα — альфа	Nν — ню
Bβ — бэта	Eξ — кси
Γγ — гамма	Oο — омикрон
Δδ — дельта	Ππ — пи
Εε — эпсилон	Ρρ — ро
Ζζ — дзета	Σσ — сигма
Ηη — эта	Ττ — тау
Θθ, ϑ — тэта	Φφ — фи
Ιι — иота	Χχ — хи
Κκ — каппа	Υυ — ипсилон
Λλ — ламбда	Ψψ — пси
Μμ — мю	Ωω — омега

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ

І. ТАБЛИЦЫ

Общие замечания

Интерполяция. Большинство помещенных ниже таблиц дают значения некоторых функций с четырьмя значащими цифрами для трехзначных значений аргумента. В тех случаях, когда аргумент задан с большей точностью и искомое значение функции не может быть найдено непосредственно в таблицах, необходимо прибегать к интерполяции*. Наиболее простой является *линейная интерполяция*, при которой допускают, что приращение функции пропорционально приращению аргумента. Если заданное значение аргумента x лежит между помещенными в таблице значениями x_0 и $x_1 = x_0 + h$, которым соответствуют значения функции $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1) = y_0 + \Delta$, то при линейной интерполяции принимают

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta.$$

Интерполяционная поправка $\frac{x - x_0}{h} \Delta$ легко вычисляется при помощи таблицы пропорциональных частей, помещенной на вкладке, а также на стр. 96—97 и дающей произведения Δ (от 11 до 90) на 0,1, 0,2, ..., 0,9.

Примеры: 1) $1,6754^{\circ}$? В таблицах (стр. 25) находим: $1,67^{\circ} = 2,789$; $1,68^{\circ} = 2,822$; $\Delta = 33^{**}$. Из таблицы пропорциональных частей (см. стр. 96: $0,5 \cdot 33 = 16,5$; $0,04 \cdot 33 = 1,3$; поправка $\frac{x - x_0}{h} \Delta = 16,5 + 1,3 \approx 18$; $1,6754^{\circ} = 2,807$.

2) $\operatorname{tg} 79^{\circ}24'$? В таблицах (стр. 63 и 97) находим: $\operatorname{tg} 79^{\circ}20' = 5,309$; $\operatorname{tg} 79^{\circ}30' = 5,396$; $\Delta = 87$; $0,4 \cdot 87 \approx 35$, $\operatorname{tg} 79^{\circ}24' = 5,344$.

* Более подробно об интерполяции см. стр. 518.

** Разность Δ и интерполяционную поправку обычно выражают в единицах разряда последней значащей цифры, не выписывая нулей и запятой впереди.

Погрешность линейной интерполяции не превышает единицы разряда последней значащей цифры, если только две соседние разности Δ_0 и Δ_1 отличаются не больше, чем на 4 единицы (последнего знака). Если это условие не выполнено (как напр. в таблице $\lg x$ при $x > 80^\circ$, стр. 63), необходимо пользоваться более сложными интерполяционными формулами. В большинстве случаев достаточной является *квадратичная интерполяция* по Бесселю:

$$f(x) = f(x_0) + k\Delta_0 - k_1(\Delta_1 - \Delta_{-1}),$$

где

$$k = \frac{x - x_0}{h}, \text{ а } k_1 = \frac{k(1-k)}{4};$$

величина k_1 находится в таблице на стр. 98.

$x_{-1} = x_0 - h$	y_{-1}	Δ_{-1}
x_0	y_0	
$x_1 = x_0 + h$	y_1	
$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	

Пример: Требуется найти $\lg 85^\circ 33'$. Находим ($h = 10'$) $k = 0,3$, $k_1 = 0,052$;

x	$\lg x$ (табл. стр. 6)	Δ
$85^\circ 20'$	12,251	
$85^\circ 30'$	12,706	455
$85^\circ 40'$	13,197	491
$85^\circ 50'$	13,727	530

поправка равна $0,3 \cdot 491 = 0,052 \cdot 75 \approx 144$; $\lg 85^\circ 33' \approx 12,350$.

А. Таблицы основных (элементарных) функций
 1. Некоторые часто встречающиеся постоянные

Величина	π	$\lg \pi$	Величина	π	$\lg \pi$
π	3,1415 93	0,49715	1 : π	0,3183 10	1,50285
2 π	6,2831 85	0,79818	1 : 2 π	0,1591 55	1,20182
3 π	9,4247 78	0,97427	1 : 3 π	0,1061 03	1,02573
4 π	12,5663 71	1,09921	1 : 4 π	0,0795 77	2,90079
$\pi : 2$	1,5707 96	0,19612	2 : π	0,6366 20	1,80388
$\pi : 3$	1,0471 98	0,02003	3 : π	0,9549 30	1,97997
$\pi : 4$	0,7853 98	1,89509	4 : π	1,2732 40	0,10491
$\pi : 6$	0,5235 99	1,71900	6 : π	1,9098 59	0,28100
$\pi : 180$ ($= 1^\circ$)	0,0174 53	2,24188	180° : π	57°, 2957 80	1,75812
$\pi : 10\ 800$ ($= 1'$)	0,0002 91	4,46373	10 800' : π	3437', 74 68	3,53627
$\pi : 648\ 000$ ($= 1''$)	0,0000 05	6,68557	648 000'' : π	206264'', 81	5,31443
π^2	9,8696 04	0,99430	1 : π^2	0,1013 21	1,00570
$\sqrt{\pi}$	1,7724 54	0,24857	$\sqrt{1 : \pi}$	0,5641 90	1,75143
$\sqrt{2\pi}$	2,5066 28	0,39909	$\sqrt{1 : 2\pi}$	0,3989 42	1,60091
$\sqrt{\pi : 2}$	1,2533 14	0,09806	$\sqrt{2 : \pi}$	0,7978 85	1,90194

НЕКОТОРЫЕ ПОСТОЯННЫЕ

19

$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645 92	0,16572	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,6827 84	1,83428
$\sqrt[3]{4\pi:3}$	1,6119 92	0,20736	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,6203 50	1,79264
e	2,7182 82	0,43429	$1:e$	0,3678 79	1,56571
e^2	7,3890 56	0,86859	$1:e^2$	0,1353 35	1,13141
$\sqrt{e}$	1,6487 21	0,21715	$\sqrt{1:e}$	0,6065 31	1,78285
$\sqrt[3]{e}$	1,3556 12	0,14476	$\sqrt[3]{1:e}$	0,7165 31	1,85524
$e^{\pi:2}$	4,8104 77	0,68219	$e^{-\pi:2}$	0,2078 80	1,31781
e^{π}	23,1406 93	1,36438	$e^{-\pi}$	0,0432 14	2,63562
$e^{2\pi}$	535,4916 56	2,72875	$e^{-2\pi}$	0,0018 67	3,27125
$C *$	0,5772 16	1,76134	$\ln \pi$	1,1447 30	0,05870
$M = \lg e$	0,4342 94	1,63778	$1:M = \ln 10$	2,3025 85	0,36222
g^{**}	9,81	0,99167	$1:g$	0,10194	1,00833
g^{α}	96,2361	1,98334	kg^2g	0,050968	2,70730
$\sqrt{g}$	3,13209	0,49383	$\pi \sqrt{g}$	9,83976	0,99298
$\sqrt[2]{2g}$	4,42945	0,64635	$\pi \sqrt[2]{2g}$	13,91552	1,14350

* C — постоянная Эйлера, см. стр. 295.

** g — ускорение силы тяжести в m/sec^2 ; здесь дано округленное значение g на уровне моря на широте 45—50°.

ТАБЛИЦЫ

2. Степени целых чисел

от $n=1$ до $n=100$

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 096	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
11	121	1 331	14 641	161 051
12	144	1 728	20 736	248 832
13	169	2 197	28 561	371 293
14	196	2 744	38 416	537 824
15	225	3 375	50 625	759 375
16	256	4 096	65 536	1 048 576
17	289	4 913	83 521	1 419 857
18	324	5 832	104 976	1 889 568
19	361	6 859	130 321	2 476 099
20	400	8 000	160 000	3 200 000
21	441	9 261	194 481	4 084 101
22	484	10 648	234 256	5 153 632
23	529	12 167	279 841	6 436 343
24	576	13 824	331 776	7 962 624
25	625	15 625	390 625	9 765 625
26	676	17 576	456 976	11 881 376
27	729	19 683	531 441	14 348 907
28	784	21 952	614 656	17 210 368
29	841	24 389	707 281	20 511 149
30	900	27 000	810 000	24 300 000
31	961	29 791	923 521	28 629 151
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424
35	1 225	42 875	1 500 625	52 521 875
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000

n	n^2	n^3	n^4	n^5
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232
43	1 849	79 507	3 418 801	147 808 443
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000
51	2 601	132 651	6 765 201	345 025 251
52	2 704	140 608	7 311 616	380 204 032
53	2 809	148 877	7 890 481	418 195 493
54	2 916	157 464	8 503 056	459 165 024
55	3 025	166 375	9 150 625	503 284 375
56	3 136	175 616	9 834 496	550 731 776
57	3 249	185 193	10 556 001	601 692 057
58	3 364	195 112	11 316 496	656 356 768
59	3 481	205 379	12 117 361	714 924 299
60	3 600	216 000	12 960 000	777 600 000
61	3 721	226 981	13 845 841	844 596 301
62	3 844	238 328	14 776 336	916 132 832
63	3 969	250 047	15 752 961	992 436 543
64	4 096	262 144	16 777 216	1 073 741 824
65	4 225	274 625	17 850 625	1 160 290 625
66	4 356	287 496	18 974 736	1 252 332 576
67	4 489	300 763	20 151 121	1 350 125 107
68	4 624	314 432	21 381 376	1 453 933 568
69	4 761	328 509	22 667 121	1 564 031 349
70	4 900	343 000	24 010 000	1 680 700 000
71	5 041	357 911	25 411 681	1 804 229 351
72	5 184	373 248	26 873 856	1 934 917 632
73	5 329	389 017	28 398 241	2 073 071 593
74	5 476	405 224	29 986 576	2 219 006 624
75	5 625	421 875	31 640 625	2 373 046 875
76	5 776	438 976	33 362 176	2 535 525 376
77	5 929	456 533	35 153 041	2 706 784 157
78	6 084	474 552	37 015 056	2 887 174 368
79	6 241	493 039	38 950 081	3 077 056 399
80	6 400	512 000	40 960 000	3 276 800 000

n	n^2	n^3	n^4	n^5
80	6 400	512 000	40 960 000	3 276 800 000
81	6 561	531 441	43 046 721	3 486 784 401
82	6 724	551 368	45 212 176	3 707 398 432
83	6 889	571 787	47 458 321	3 939 040 643
84	7 056	592 704	49 787 136	4 182 119 424
85	7 225	614 125	52 200 625	4 437 053 125
86	7 396	636 056	54 700 816	4 701 270 176
87	7 569	658 503	57 289 761	4 984 209 207
88	7 744	681 472	59 969 536	5 277 319 168
89	7 921	704 969	62 742 241	5 584 059 449
90	8 100	729 000	65 610 000	5 904 900 000
91	8 281	753 571	68 574 961	6 240 321 451
92	8 464	778 688	71 639 296	6 590 815 232
93	8 649	804 357	74 805 201	6 956 883 693
94	8 836	830 584	78 074 896	7 339 040 224
95	9 025	857 375	81 450 625	7 737 809 375
96	9 216	884 736	84 934 656	8 153 720 976
97	9 409	912 673	88 529 281	8 587 340 257
98	9 604	941 192	92 236 816	9 039 207 968
99	9 801	970 299	96 059 601	9 509 900 499
100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000

3. Квадраты, кубы, корни

Объяснения к таблице 3

Таблица, помещенная на стр. 24—46, позволяет находить квадраты, кубы, квадратные и кубические корни с четырьмя значащими цифрами. Для аргументов n , заключенных между 1 и 10, величины n^2 , n^3 находятся непосредственно в таблице, если значение аргумента дано с тремя значащими цифрами. Например: $1,79^2 = 3,204$ (стр. 25). Если же значение аргумента задано более чем с тремя значащими цифрами, необходимо прибегнуть к интерполяции (см. стр. 16). Для этой таблицы везде допустима линейная интерполяция, погрешность которой нигде не превышает одной единицы последнего знака.

Для нахождения n^2 , n^3 при $n > 10$ и $n < 1$ принимают во внимание, что при увеличении n в 10^k раз, n^2 увеличивается в 10^{2k} , n^3 — в 10^{3k} раз, т. е. перенос запятой у n на k разрядов вправо вызывает переносы запятой у n^2 на $2k$ и у n^3 на $3k$ разрядов вправо. При этом, по мере надобности, к взятому из таблиц числу приписываются нули

КВАДРАТЫ, КУБЫ, КОРНИ

справа или слева. Например: $0,179^3 = 0,03204$; $179^3 = 5\,735\,000^*$.

Корни квадратные для n , заключенных между 1 и 100, могут быть найдены непосредственно из таблицы [с применением линейной интерполяции (стр. 16)], а для любых по следующим правилам:

1) Подкоренное число разбивают в обе стороны от запятой на грани, содержащие по две цифры.

2) В зависимости от того, содержит ли первая слева, не состоящая из нулей, грань одну или две значащие цифры, значение корня находят в графе $\sqrt{n}$ или графе $\sqrt{10n}$.

3) В найденном значении корня запятую устанавливают, исходя из того, что каждая грань подкоренного числа, стоящая до запятой, дает для корня одну цифру до запятой, а для чисел меньших 1, каждая состоящая из нулей грань после запятой дает для корня один нуль после запятой.

Примеры: 1) $\sqrt{23,9} = 4,889$; 2) $\sqrt{0,00'02'39} = 0,01546$; 3) $\sqrt{23'90'00} = 488,9$; 4) $\sqrt{0,01'3} = 0,05477$. (В последнем примере под корнем должен быть мысленно добавлен на конце еще один нуль до полной грани; поэтому корень следует искать в графе $\sqrt{10n}$.)

Корни кубические для n , заключенных между 1 и 1000, могут быть найдены непосредственно из таблицы [с применением линейной интерполяции (стр. 16)], а для любых n по следующим правилам:

1) Подкоренное число разбивают в обе стороны от запятой на грани, содержащие по три цифры.

2) В зависимости от того, содержит ли первая слева, не состоящая из нулей грань одну, две или три значащие цифры, значение корня находят в таблице соответственно в графах $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{10n}$ или $\sqrt[3]{100n}$.

3) В найденном значении корня запятую устанавливают по тому же правилу, для квадратных корней.

Примеры: 1) $\sqrt[3]{23,9} = 2,880^{**}$; 2) $\sqrt[3]{239'000} = 62,06$; 3) $\sqrt[3]{0,000'023'9} = 0,02880$; 4) $\sqrt[3]{0,000'3} = 0,06694$; 5) $\sqrt[3]{0,03} = 0,3107$. (В последних двух примерах на конце нужно мысленно прибавить соответственно два и один нуль).

* Значение 179^3 , как и все остальные величины, которые могут быть получены из настоящих таблиц, имеет только 4 верные значащие цифры. Нули на конце заменяют неизвестные цифры (точное значение $179^3 = 5\,735\,339$).

** Нуль на конце не следует отбрасывать, т. к. он в этом случае является значащей цифрой (см. стр. 141). Если записать $\sqrt[3]{23,9} = 2,88$, то можно думать, что погрешность данного значения корня может составлять несколько тысяч, тогда как на самом деле она не превышает 0,0005.

Квадраты, кубы, квадратные и кубические корни

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,00	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642
1,01	1,020	1,030	1,005	3,178	1,003	2,162	4,657
1,02	1,040	1,061	1,010	3,194	1,007	2,169	4,672
1,03	1,061	1,093	1,015	3,209	1,010	2,176	4,688
1,04	1,082	1,125	1,020	3,225	1,013	2,183	4,703
1,05	1,102	1,158	1,025	3,240	1,016	2,190	4,718
1,06	1,124	1,191	1,030	3,256	1,020	2,197	4,733
1,07	1,145	1,225	1,034	3,271	1,023	2,204	4,747
1,08	1,166	1,260	1,039	3,286	1,026	2,210	4,762
1,09	1,188	1,295	1,044	3,302	1,029	2,217	4,777
1,10	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791
1,11	1,232	1,368	1,054	3,332	1,035	2,231	4,806
1,12	1,254	1,405	1,058	3,347	1,038	2,237	4,820
1,13	1,277	1,443	1,063	3,362	1,042	2,244	4,835
1,14	1,300	1,482	1,068	3,376	1,045	2,251	4,849
1,15	1,322	1,521	1,072	3,391	1,048	2,257	4,863
1,16	1,346	1,561	1,077	3,406	1,051	2,264	4,877
1,17	1,369	1,602	1,082	3,421	1,054	2,270	4,891
1,18	1,392	1,643	1,086	3,435	1,057	2,277	4,905
1,19	1,416	1,685	1,091	3,450	1,060	2,283	4,919
1,20	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932
1,21	1,464	1,772	1,100	3,479	1,066	2,296	4,946
1,22	1,488	1,816	1,105	3,493	1,069	2,302	4,960
1,23	1,513	1,861	1,109	3,507	1,071	2,308	4,973
1,24	1,538	1,907	1,114	3,521	1,074	2,315	4,987
1,25	1,562	1,953	1,118	3,536	1,077	2,321	5,000
1,26	1,588	2,000	1,122	3,550	1,080	2,327	5,013
1,27	1,613	2,048	1,127	3,564	1,083	2,333	5,027
1,28	1,638	2,097	1,131	3,578	1,086	2,339	5,040
1,29	1,664	2,147	1,136	3,592	1,089	2,345	5,053
1,30	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066
1,31	1,716	2,248	1,145	3,619	1,094	2,357	5,079
1,32	1,742	2,300	1,149	3,633	1,097	2,363	5,092
1,33	1,769	2,353	1,153	3,647	1,100	2,369	5,104
1,34	1,796	2,406	1,158	3,661	1,102	2,375	5,117
1,35	1,822	2,460	1,162	3,674	1,105	2,381	5,130
1,36	1,850	2,515	1,166	3,688	1,108	2,387	5,143
1,37	1,877	2,571	1,170	3,701	1,111	2,393	5,155
1,38	1,904	2,628	1,175	3,715	1,113	2,399	5,168
1,39	1,932	2,686	1,179	3,728	1,116	2,404	5,180
1,40	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,40	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192
1,41	1,988	2,803	1,187	3,755	1,121	2,416	5,205
1,42	2,016	2,863	1,192	3,768	1,124	2,422	5,217
1,43	2,045	2,924	1,196	3,782	1,127	2,427	5,229
1,44	2,074	2,986	1,200	3,795	1,129	2,433	5,241
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254
1,46	2,132	3,112	1,208	3,821	1,134	2,444	5,266
1,47	2,161	3,177	1,212	3,834	1,137	2,450	5,278
1,48	2,190	3,242	1,217	3,847	1,140	2,455	5,290
1,49	2,220	3,308	1,221	3,860	1,142	2,461	5,301
1,50	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313
1,51	2,280	3,443	1,229	3,886	1,147	2,472	5,325
1,52	2,310	3,512	1,233	3,899	1,150	2,477	5,337
1,53	2,341	3,582	1,237	3,912	1,152	2,483	5,348
1,54	2,372	3,652	1,241	3,924	1,155	2,488	5,360
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372
1,56	2,434	3,796	1,249	3,950	1,160	2,499	5,383
1,57	2,465	3,870	1,253	3,962	1,162	2,504	5,395
1,58	2,496	3,944	1,257	3,975	1,165	2,509	5,406
1,59	2,528	4,020	1,261	3,987	1,167	2,515	5,418
1,60	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429
1,61	2,592	4,173	1,269	4,012	1,172	2,525	5,440
1,62	2,624	4,252	1,273	4,025	1,174	2,530	5,451
1,63	2,657	4,331	1,277	4,037	1,177	2,535	5,463
1,64	2,690	4,411	1,281	4,050	1,179	2,541	5,474
1,65	2,722	4,492	1,285	4,062	1,182	2,546	5,485
1,66	2,756	4,574	1,288	4,074	1,184	2,551	5,496
1,67	2,789	4,657	1,292	4,087	1,186	2,556	5,507
1,68	2,822	4,742	1,296	4,099	1,189	2,561	5,518
1,69	2,856	4,827	1,300	4,111	1,191	2,566	5,529
1,70	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540
1,71	2,924	5,000	1,308	4,135	1,196	2,576	5,550
1,72	2,958	5,088	1,311	4,147	1,198	2,581	5,561
1,73	2,993	5,178	1,315	4,159	1,200	2,586	5,572
1,74	3,028	5,268	1,319	4,171	1,203	2,591	5,583
1,75	3,062	5,359	1,323	4,183	1,205	2,596	5,593
1,76	3,098	5,452	1,327	4,195	1,207	2,601	5,604
1,77	3,133	5,545	1,330	4,207	1,210	2,606	5,615
1,78	3,168	5,640	1,334	4,219	1,212	2,611	5,625
1,79	3,204	5,735	1,338	4,231	1,214	2,616	5,636
1,80	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,80	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646
1,81	3,276	5,930	1,345	4,254	1,219	2,626	5,657
1,82	3,312	6,029	1,349	4,266	1,221	2,630	5,667
1,83	3,349	6,128	1,353	4,278	1,223	2,635	5,677
1,84	3,386	6,230	1,356	4,290	1,225	2,640	5,688
1,85	3,422	6,332	1,360	4,301	1,228	2,645	5,698
1,86	3,460	6,435	1,364	4,313	1,230	2,650	5,708
1,87	3,497	6,539	1,367	4,324	1,232	2,654	5,718
1,88	3,534	6,645	1,371	4,336	1,234	2,659	5,729
1,89	3,572	6,751	1,375	4,347	1,236	2,664	5,739
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749
1,91	3,648	6,968	1,382	4,370	1,241	2,673	5,759
1,92	3,686	7,078	1,386	4,382	1,243	2,678	5,769
1,93	3,725	7,189	1,389	4,393	1,245	2,682	5,779
1,94	3,764	7,301	1,393	4,405	1,247	2,687	5,789
1,95	3,802	7,415	1,395	4,416	1,249	2,692	5,799
1,96	3,842	7,530	1,400	4,427	1,251	2,696	5,809
1,97	3,881	7,645	1,404	4,438	1,254	2,701	5,819
1,98	3,920	7,762	1,407	4,450	1,256	2,705	5,828
1,99	3,960	7,881	1,411	4,461	1,258	2,710	5,838
2,00	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848
2,01	4,040	8,121	1,418	4,483	1,262	2,719	5,858
2,02	4,080	8,242	1,421	4,494	1,264	2,723	5,867
2,03	4,121	8,365	1,425	4,506	1,266	2,728	5,877
2,04	4,162	8,490	1,428	4,517	1,268	2,732	5,887
2,05	4,202	8,615	1,432	4,528	1,270	2,737	5,896
2,06	4,244	8,742	1,435	4,539	1,272	2,741	5,906
2,07	4,285	8,870	1,439	4,550	1,274	2,746	5,915
2,08	4,326	8,999	1,442	4,561	1,277	2,750	5,925
2,09	4,368	9,129	1,446	4,572	1,279	2,755	5,934
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944
2,11	4,452	9,394	1,453	4,593	1,283	2,763	5,953
2,12	4,494	9,528	1,456	4,604	1,285	2,768	5,963
2,13	4,537	9,664	1,459	4,615	1,287	2,772	5,972
2,14	4,580	9,800	1,463	4,626	1,289	2,776	5,981
2,15	4,622	9,938	1,466	4,637	1,291	2,781	5,991
2,16	4,666	10,08	1,470	4,648	1,293	2,785	6,000
2,17	4,709	10,22	1,473	4,658	1,295	2,789	6,009
2,18	4,752	10,36	1,476	4,669	1,297	2,794	6,018
2,19	4,796	10,50	1,480	4,680	1,299	2,798	6,028
2,20	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,20	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037
2,21	4,884	10,79	1,487	4,701	1,303	2,806	6,046
2,22	4,928	10,94	1,490	4,712	1,305	2,811	6,055
2,23	4,973	11,09	1,493	4,722	1,306	2,815	6,064
2,24	5,018	11,24	1,497	4,733	1,308	2,819	6,073
2,25	5,062	11,39	1,500	4,743	1,310	2,823	6,082
2,26	5,108	11,54	1,503	4,754	1,312	2,827	6,091
2,27	5,153	11,70	1,507	4,764	1,314	2,831	6,100
2,28	5,198	11,85	1,510	4,775	1,316	2,836	6,109
2,29	5,244	12,01	1,513	4,785	1,318	2,840	6,118
2,30	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127
2,31	5,336	12,33	1,520	4,806	1,322	2,848	6,136
2,32	5,382	12,49	1,523	4,817	1,324	2,852	6,145
2,33	5,429	12,65	1,526	4,827	1,326	2,856	6,153
2,34	5,476	12,81	1,530	4,837	1,328	2,860	6,162
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171
2,36	5,570	13,14	1,536	4,858	1,331	2,868	6,180
2,37	5,617	13,31	1,539	4,868	1,333	2,872	6,188
2,38	5,664	13,48	1,543	4,879	1,335	2,876	6,197
2,39	5,712	13,65	1,546	4,889	1,337	2,880	6,206
2,40	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214
2,41	5,808	14,00	1,552	4,909	1,341	2,888	6,223
2,42	5,856	14,17	1,556	4,919	1,343	2,892	6,232
2,43	5,905	14,35	1,559	4,930	1,344	2,896	6,240
2,44	5,954	14,53	1,562	4,940	1,346	2,900	6,249
2,45	6,002	14,71	1,565	4,950	1,348	2,904	6,257
2,46	6,052	14,89	1,568	4,960	1,350	2,908	6,266
2,47	6,101	15,07	1,572	4,970	1,352	2,912	6,274
2,48	6,150	15,25	1,575	4,980	1,354	2,916	6,283
2,49	6,200	15,44	1,578	4,990	1,355	2,920	6,291
2,50	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300
2,51	6,300	15,81	1,584	5,010	1,359	2,928	6,308
2,52	6,350	16,00	1,587	5,020	1,361	2,932	6,316
2,53	6,401	16,19	1,591	5,030	1,363	2,936	6,325
2,54	6,452	16,39	1,594	5,040	1,364	2,940	6,333
2,55	6,502	16,58	1,597	5,050	1,366	2,943	6,341
2,56	6,554	16,78	1,600	5,060	1,368	2,947	6,350
2,57	6,605	16,97	1,603	5,070	1,370	2,951	6,358
2,58	6,656	17,17	1,606	5,079	1,372	2,955	6,366
2,59	6,708	17,37	1,609	5,089	1,373	2,959	6,374
2,60	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383

Объяснения к таблице см. на стр. 22-23.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,60	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383
2,61	6,812	17,78	1,616	5,109	1,377	2,966	6,391
2,62	6,864	17,98	1,619	5,119	1,379	2,970	6,399
2,63	6,917	18,19	1,622	5,128	1,380	2,974	6,407
2,64	6,970	18,40	1,625	5,138	1,382	2,978	6,415
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423
2,66	7,076	18,82	1,631	5,158	1,386	2,985	6,431
2,67	7,129	19,03	1,634	5,167	1,387	2,989	6,439
2,68	7,182	19,25	1,637	5,177	1,389	2,993	6,447
2,69	7,236	19,47	1,640	5,187	1,391	2,996	6,455
2,70	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463
2,71	7,344	19,90	1,646	5,206	1,394	3,004	6,471
2,72	7,398	20,12	1,649	5,215	1,396	3,007	6,479
2,73	7,453	20,35	1,652	5,225	1,398	3,011	6,487
2,74	7,508	20,57	1,655	5,235	1,399	3,015	6,495
2,75	7,562	20,80	1,658	5,244	1,401	3,018	6,503
2,76	7,618	21,02	1,661	5,254	1,403	3,022	6,511
2,77	7,673	21,25	1,664	5,263	1,404	3,020	6,519
2,78	7,728	21,48	1,667	5,273	1,406	3,029	6,527
2,79	7,784	21,72	1,670	5,282	1,408	3,033	6,534
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542
2,81	7,896	22,19	1,676	5,301	1,411	3,040	6,550
2,82	7,952	22,43	1,679	5,310	1,413	3,044	6,558
2,83	8,009	22,67	1,682	5,320	1,414	3,047	6,565
2,84	8,066	22,91	1,685	5,329	1,416	3,051	6,573
2,85	8,122	23,15	1,688	5,339	1,418	3,055	6,581
2,86	8,180	23,39	1,691	5,348	1,419	3,058	6,589
2,87	8,237	23,64	1,694	5,357	1,421	3,062	6,596
2,88	8,294	23,89	1,697	5,367	1,423	3,065	6,604
2,89	8,352	24,14	1,700	5,376	1,424	3,069	6,611
2,90	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619
2,91	8,468	24,64	1,706	5,394	1,428	3,076	6,627
2,92	8,526	24,90	1,709	5,404	1,429	3,079	6,634
2,93	8,585	25,15	1,712	5,413	1,431	3,083	6,642
2,94	8,644	25,41	1,715	5,422	1,433	3,086	6,649
2,95	8,702	25,67	1,718	5,431	1,434	3,090	6,657
2,96	8,762	25,93	1,720	5,441	1,436	3,093	6,664
2,97	8,821	26,20	1,723	5,450	1,437	3,097	6,672
2,98	8,880	26,46	1,726	5,459	1,439	3,100	6,679
2,99	8,940	26,73	1,729	5,468	1,441	3,104	6,687
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694
3,01	9,060	27,27	1,735	5,486	1,444	3,111	6,702
3,02	9,120	27,54	1,738	5,495	1,445	3,114	6,709
3,03	9,181	27,82	1,741	5,505	1,447	3,118	6,717
3,04	9,242	28,09	1,744	5,514	1,449	3,121	6,724
3,05	9,302	28,37	1,746	5,523	1,450	3,124	6,731
3,06	9,364	28,65	1,749	5,532	1,452	3,128	6,739
3,07	9,425	28,93	1,752	5,541	1,453	3,131	6,746
3,08	9,486	29,22	1,755	5,550	1,455	3,135	6,753
3,09	9,548	29,50	1,758	5,559	1,457	3,138	6,761
3,10	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768
3,11	9,672	30,08	1,764	5,577	1,460	3,145	6,775
3,12	9,734	30,37	1,766	5,586	1,461	3,148	6,782
3,13	9,797	30,66	1,769	5,595	1,463	3,151	6,790
3,14	9,860	30,96	1,772	5,604	1,464	3,155	6,797
3,15	9,922	31,26	1,775	5,612	1,466	3,158	6,804
3,16	9,986	31,55	1,778	5,621	1,467	3,162	6,811
3,17	10,05	31,86	1,780	5,630	1,469	3,165	6,818
3,18	10,11	32,16	1,783	5,639	1,471	3,168	6,826
3,19	10,18	32,46	1,786	5,648	1,472	3,171	6,833
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840
3,21	10,30	33,08	1,792	5,666	1,475	3,178	6,847
3,22	10,37	33,39	1,794	5,675	1,477	3,181	6,854
3,23	10,43	33,70	1,797	5,683	1,478	3,185	6,861
3,24	10,50	34,01	1,800	5,692	1,480	3,188	6,868
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875
3,26	10,63	34,65	1,806	5,710	1,483	3,195	6,882
3,27	10,69	34,97	1,808	5,718	1,484	3,198	6,889
3,28	10,76	35,29	1,811	5,727	1,486	3,201	6,896
3,29	10,82	35,61	1,814	5,736	1,487	3,204	6,903
3,30	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910
3,31	10,96	36,26	1,819	5,753	1,490	3,211	6,917
3,32	11,02	36,59	1,822	5,762	1,492	3,214	6,924
3,33	11,09	36,93	1,825	5,771	1,493	3,217	6,931
3,34	11,16	37,26	1,828	5,779	1,495	3,220	6,938
3,35	11,22	37,60	1,830	5,788	1,496	3,224	6,945
3,36	11,29	37,93	1,833	5,797	1,498	3,227	6,952
3,37	11,36	38,27	1,836	5,805	1,499	3,230	6,959
3,38	11,42	38,61	1,838	5,814	1,501	3,233	6,966
3,39	11,49	38,96	1,841	5,822	1,502	3,236	6,973
3,40	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980

Объяснения к таблице см. на стр. 22—3.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,40	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980
3,41	11,63	39,65	1,847	5,840	1,505	3,243	6,986
3,42	11,70	40,00	1,849	5,848	1,507	3,246	6,993
3,43	11,76	40,35	1,852	5,857	1,508	3,249	7,000
3,44	11,83	40,71	1,855	5,865	1,510	3,252	7,007
3,45	11,90	41,06	1,857	5,874	1,511	3,255	7,014
3,46	11,97	41,42	1,860	5,882	1,512	3,259	7,020
3,47	12,04	41,78	1,863	5,891	1,514	3,262	7,027
3,48	12,11	42,14	1,865	5,899	1,515	3,265	7,034
3,49	12,18	42,51	1,868	5,908	1,517	3,268	7,041
3,50	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047
3,51	12,32	43,24	1,873	5,925	1,520	3,274	7,054
3,52	12,39	43,61	1,876	5,933	1,521	3,277	7,061
3,53	12,46	43,99	1,879	5,941	1,523	3,280	7,067
3,54	12,53	44,36	1,881	5,950	1,524	3,283	7,074
3,55	12,60	44,74	1,884	5,958	1,525	3,287	7,081
3,56	12,67	45,12	1,887	5,967	1,527	3,290	7,087
3,57	12,74	45,50	1,889	5,975	1,528	3,293	7,094
3,58	12,82	45,88	1,892	5,983	1,530	3,296	7,101
3,59	12,89	46,27	1,895	5,992	1,531	3,299	7,107
3,60	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114
3,61	13,03	47,05	1,900	6,008	1,534	3,305	7,120
3,62	13,10	47,44	1,903	6,017	1,535	3,308	7,127
3,63	13,18	47,83	1,905	6,025	1,537	3,311	7,133
3,64	13,25	48,23	1,908	6,033	1,538	3,314	7,140
3,65	13,32	48,63	1,910	6,042	1,540	3,317	7,147
3,66	13,40	49,03	1,913	6,050	1,541	3,320	7,153
3,67	13,47	49,43	1,916	6,058	1,542	3,323	7,160
3,68	13,54	49,84	1,918	6,066	1,544	3,326	7,166
3,69	13,62	50,24	1,921	6,075	1,545	3,329	7,173
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179
3,71	13,76	51,06	1,926	6,091	1,548	3,335	7,186
3,72	13,84	51,48	1,929	6,099	1,549	3,338	7,192
3,73	13,91	51,90	1,931	6,107	1,551	3,341	7,198
3,74	13,99	52,31	1,934	6,116	1,552	3,344	7,205
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211
3,76	14,14	53,16	1,939	6,132	1,555	3,350	7,218
3,77	14,21	53,58	1,942	6,140	1,556	3,353	7,224
3,78	14,29	54,01	1,944	6,148	1,558	3,356	7,230
3,79	14,36	54,44	1,947	6,156	1,559	3,359	7,237
3,80	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,80	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243
3,81	14,52	55,31	1,952	6,173	1,562	3,365	7,250
3,82	14,59	55,74	1,954	6,181	1,563	3,368	7,256
3,83	14,67	56,18	1,957	6,189	1,565	3,371	7,262
3,84	14,75	56,62	1,960	6,197	1,566	3,374	7,268
3,85	14,82	57,07	1,962	6,205	1,567	3,377	7,275
3,86	14,90	57,51	1,965	6,213	1,569	3,380	7,281
3,87	14,98	57,96	1,967	6,221	1,570	3,382	7,287
3,88	15,05	58,41	1,970	6,229	1,571	3,385	7,294
3,89	15,13	58,86	1,972	6,237	1,573	3,388	7,300
3,90	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306
3,91	15,29	59,78	1,977	6,253	1,575	3,394	7,312
3,92	15,37	60,24	1,980	6,261	1,577	3,397	7,319
3,93	15,44	60,70	1,982	6,269	1,578	3,400	7,325
3,94	15,52	61,16	1,985	6,277	1,579	3,403	7,331
3,95	15,60	61,63	1,987	6,285	1,581	3,406	7,337
3,96	15,68	62,10	1,990	6,293	1,582	3,409	7,343
3,97	15,76	62,57	1,992	6,301	1,583	3,411	7,350
3,98	15,84	63,04	1,995	6,309	1,585	3,414	7,356
3,99	15,92	63,52	1,997	6,317	1,586	3,417	7,362
4,00	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368
4,01	16,08	64,48	2,002	6,332	1,589	3,423	7,374
4,02	16,16	64,96	2,005	6,340	1,590	3,426	7,380
4,03	16,24	65,45	2,007	6,348	1,591	3,428	7,386
4,04	16,32	65,94	2,010	6,356	1,593	3,431	7,393
4,05	16,40	66,43	2,012	6,364	1,594	3,434	7,399
4,06	16,48	66,92	2,015	6,372	1,595	3,437	7,405
4,07	16,56	67,42	2,017	6,380	1,597	3,440	7,411
4,08	16,65	67,92	2,020	6,387	1,598	3,443	7,417
4,09	16,73	68,42	2,022	6,395	1,599	3,445	7,423
4,10	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429
4,11	16,89	69,43	2,027	6,411	1,602	3,451	7,435
4,12	16,97	69,93	2,030	6,419	1,603	3,454	7,441
4,13	17,06	70,44	2,032	6,427	1,604	3,457	7,447
4,14	17,14	70,96	2,035	6,434	1,606	3,459	7,453
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459
4,16	17,31	71,99	2,040	6,450	1,608	3,465	7,465
4,17	17,39	72,51	2,042	6,458	1,610	3,468	7,471
4,18	17,47	73,03	2,045	6,465	1,611	3,471	7,477
4,19	17,56	73,56	2,047	6,473	1,612	3,473	7,483
4,20	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489

Объяснения к таблице см. на стр. 21—22.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,20	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489
4,21	17,72	74,62	2,052	6,488	1,615	3,479	7,495
4,22	17,81	75,15	2,054	6,496	1,616	3,482	7,501
4,23	17,89	75,69	2,057	6,504	1,617	3,484	7,507
4,24	17,98	76,23	2,059	6,512	1,619	3,487	7,513
4,25	18,06	76,77	2,062	6,519	1,620	3,490	7,518
4,26	18,15	77,31	2,064	6,527	1,621	3,493	7,524
4,27	18,23	77,85	2,066	6,535	1,622	3,495	7,530
4,28	18,32	78,40	2,069	6,542	1,624	3,498	7,536
4,29	18,40	78,95	2,071	6,550	1,625	3,501	7,542
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548
4,31	18,58	80,06	2,076	6,565	1,627	3,506	7,554
4,32	18,66	80,62	2,078	6,573	1,629	3,509	7,560
4,33	18,75	81,18	2,081	6,580	1,630	3,512	7,565
4,34	18,84	81,75	2,083	6,588	1,631	3,514	7,571
4,35	18,92	82,31	2,086	6,595	1,632	3,517	7,577
4,36	19,01	82,88	2,088	6,603	1,634	3,520	7,583
4,37	19,10	83,45	2,090	6,611	1,635	3,522	7,589
4,38	19,18	84,03	2,093	6,618	1,636	3,525	7,594
4,39	19,27	84,60	2,095	6,626	1,637	3,528	7,600
4,40	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606
4,41	19,45	85,77	2,100	6,641	1,640	3,533	7,612
4,42	19,54	86,35	2,102	6,648	1,641	3,536	7,617
4,43	19,62	86,94	2,105	6,656	1,642	3,538	7,623
4,44	19,71	87,53	2,107	6,663	1,644	3,541	7,629
4,45	19,80	88,12	2,110	6,671	1,645	3,544	7,635
4,46	19,89	88,72	2,112	6,678	1,646	3,546	7,640
4,47	19,98	89,31	2,114	6,686	1,647	3,549	7,646
4,48	20,07	89,92	2,117	6,693	1,649	3,552	7,652
4,49	20,16	90,52	2,119	6,701	1,650	3,554	7,657
4,50	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663
4,51	20,34	91,73	2,124	6,716	1,652	3,560	7,669
4,52	20,43	92,35	2,126	6,723	1,653	3,562	7,674
4,53	20,52	92,96	2,128	6,731	1,655	3,565	7,680
4,54	20,61	93,58	2,131	6,738	1,656	3,567	7,686
4,55	20,70	94,20	2,133	6,745	1,657	3,570	7,691
4,56	20,79	94,82	2,135	6,753	1,658	3,573	7,697
4,57	20,88	95,44	2,138	6,760	1,659	3,575	7,703
4,58	20,98	96,07	2,140	6,768	1,661	3,578	7,708
4,59	21,07	96,70	2,142	6,775	1,662	3,580	7,714
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719
4,61	21,25	97,97	2,147	6,790	1,664	3,586	7,725
4,62	21,34	98,61	2,149	6,797	1,666	3,588	7,731
4,63	21,44	99,25	2,152	6,804	1,667	3,591	7,736
4,64	21,53	99,90	2,154	6,812	1,668	3,593	7,742
4,65	21,62	100,5	2,156	6,819	1,669	3,596	7,747
4,66	21,72	101,2	2,159	6,826	1,670	3,599	7,753
4,67	21,81	101,8	2,161	6,834	1,671	3,601	7,758
4,68	21,90	102,5	2,163	6,841	1,673	3,604	7,764
4,69	22,00	103,2	2,166	6,848	1,674	3,606	7,769
4,70	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775
4,71	22,18	104,5	2,170	6,863	1,676	3,611	7,780
4,72	22,28	105,2	2,173	6,870	1,677	3,614	7,786
4,73	22,37	105,8	2,175	6,877	1,679	3,616	7,791
4,74	22,47	106,5	2,177	6,885	1,680	3,619	7,797
4,75	22,56	107,2	2,179	6,892	1,681	3,622	7,802
4,76	22,66	107,9	2,182	6,899	1,682	3,624	7,808
4,77	22,75	108,5	2,184	6,907	1,683	3,627	7,813
4,78	22,85	109,2	2,186	6,914	1,685	3,629	7,819
4,79	22,94	109,9	2,189	6,921	1,686	3,632	7,824
4,80	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830
4,81	23,14	111,3	2,193	6,935	1,688	3,637	7,835
4,82	23,23	112,0	2,195	6,943	1,689	3,639	7,841
4,83	23,33	112,7	2,198	6,950	1,690	3,642	7,846
4,84	23,43	113,4	2,200	6,957	1,692	3,644	7,851
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857
4,86	23,62	114,8	2,205	6,971	1,694	3,649	7,862
4,87	23,72	115,5	2,207	6,979	1,695	3,652	7,868
4,88	23,81	116,2	2,209	6,986	1,696	3,654	7,873
4,89	23,91	116,9	2,211	6,993	1,697	3,657	7,878
4,90	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884
4,91	24,11	118,4	2,216	7,007	1,700	3,662	7,889
4,92	24,21	119,1	2,218	7,014	1,701	3,664	7,894
4,93	24,30	119,8	2,220	7,021	1,702	3,667	7,900
4,94	24,40	120,6	2,223	7,029	1,703	3,669	7,905
4,95	24,50	121,3	2,225	7,036	1,704	3,672	7,910
4,96	24,60	122,0	2,227	7,043	1,705	3,674	7,916
4,97	24,70	122,8	2,229	7,050	1,707	3,677	7,921
4,98	24,80	123,5	2,232	7,057	1,708	3,679	7,926
4,99	24,90	124,3	2,234	7,064	1,709	3,682	7,932
5,00	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937

Объяснения к таблице см. на стр. 22—23.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,00	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937
5,01	25,10	125,8	2,238	7,078	1,711	3,686	7,942
5,02	25,20	126,5	2,241	7,085	1,712	3,689	7,948
5,03	25,30	127,3	2,243	7,092	1,713	3,691	7,953
5,04	25,40	128,0	2,245	7,099	1,715	3,694	7,958
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963
5,06	25,60	129,6	2,249	7,113	1,717	3,699	7,969
5,07	25,70	130,3	2,252	7,120	1,718	3,701	7,974
5,08	25,81	131,1	2,254	7,127	1,719	3,704	7,979
5,09	25,91	131,9	2,256	7,134	1,720	3,706	7,984
5,10	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990
5,11	26,11	133,4	2,261	7,148	1,722	3,711	7,995
5,12	26,21	134,2	2,263	7,155	1,724	3,713	8,000
5,13	26,32	135,0	2,265	7,162	1,725	3,716	8,005
5,14	26,42	135,8	2,267	7,169	1,726	3,718	8,010
5,15	26,52	136,6	2,269	7,176	1,727	3,721	8,016
5,16	26,63	137,4	2,272	7,183	1,728	3,723	8,021
5,17	26,73	138,2	2,274	7,190	1,729	3,725	8,026
5,18	26,83	139,0	2,276	7,197	1,730	3,728	8,031
5,19	26,94	139,8	2,278	7,204	1,731	3,730	8,036
5,20	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041
5,21	27,14	141,4	2,283	7,218	1,734	3,735	8,047
5,22	27,25	142,2	2,285	7,225	1,735	3,737	8,052
5,23	27,35	143,1	2,287	7,232	1,736	3,740	8,057
5,24	27,46	143,9	2,289	7,239	1,737	3,742	8,062
5,25	27,56	144,7	2,291	7,246	1,738	3,744	8,067
5,26	27,67	145,5	2,293	7,253	1,739	3,747	8,072
5,27	27,77	146,4	2,296	7,259	1,740	3,749	8,077
5,28	27,88	147,2	2,298	7,266	1,741	3,752	8,082
5,29	27,98	148,0	2,300	7,273	1,742	3,754	8,088
5,30	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093
5,31	28,20	149,7	2,304	7,287	1,745	3,759	8,098
5,32	28,30	150,6	2,307	7,294	1,746	3,761	8,103
5,33	28,41	151,4	2,309	7,301	1,747	3,763	8,108
5,34	28,52	152,3	2,311	7,308	1,748	3,766	8,113
5,35	28,62	153,1	2,313	7,314	1,749	3,768	8,118
5,36	28,73	154,0	2,315	7,321	1,750	3,770	8,123
5,37	28,84	154,9	2,317	7,328	1,751	3,773	8,128
5,38	28,94	155,7	2,319	7,335	1,752	3,775	8,133
5,39	29,05	156,6	2,322	7,342	1,753	3,777	8,138
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143
5,41	29,27	158,3	2,326	7,355	1,755	3,782	8,148
5,42	29,38	159,2	2,328	7,362	1,757	3,784	8,153
5,43	29,48	160,1	2,330	7,369	1,758	3,787	8,158
5,44	29,59	161,0	2,332	7,375	1,759	3,789	8,163
5,45	29,70	161,9	2,335	7,382	1,760	3,791	8,168
5,46	29,81	162,8	2,337	7,389	1,761	3,794	8,173
5,47	29,92	163,7	2,339	7,396	1,762	3,796	8,178
5,48	30,03	164,6	2,341	7,403	1,763	3,798	8,183
5,49	30,14	165,5	2,343	7,409	1,764	3,801	8,188
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193
5,51	30,36	167,3	2,347	7,423	1,766	3,805	8,198
5,52	30,47	168,2	2,349	7,430	1,767	3,808	8,203
5,53	30,58	169,1	2,352	7,436	1,768	3,810	8,208
5,54	30,69	170,0	2,354	7,443	1,769	3,812	8,213
5,55	30,80	171,0	2,356	7,450	1,771	3,814	8,218
5,56	30,91	171,9	2,358	7,457	1,772	3,817	8,223
5,57	31,02	172,8	2,360	7,463	1,773	3,819	8,228
5,58	31,14	173,7	2,362	7,470	1,774	3,821	8,233
5,59	31,25	174,7	2,364	7,477	1,775	3,824	8,238
5,60	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243
5,61	31,47	176,6	2,369	7,490	1,777	3,828	8,247
5,62	31,58	177,5	2,371	7,497	1,778	3,830	8,252
5,63	31,70	178,5	2,373	7,503	1,779	3,833	8,257
5,64	31,81	179,4	2,375	7,510	1,780	3,835	8,262
5,65	31,92	180,4	2,377	7,517	1,781	3,837	8,267
5,66	32,04	181,3	2,379	7,523	1,782	3,839	8,272
5,67	32,15	182,3	2,381	7,530	1,783	3,842	8,277
5,68	32,26	183,3	2,383	7,537	1,784	3,844	8,282
5,69	32,38	184,2	2,385	7,543	1,785	3,846	8,286
5,70	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291
5,71	32,60	186,2	2,390	7,556	1,787	3,851	8,296
5,72	32,72	187,1	2,392	7,563	1,788	3,853	8,301
5,73	32,83	188,1	2,394	7,570	1,789	3,855	8,306
5,74	32,95	189,1	2,396	7,576	1,790	3,857	8,311
5,75	33,06	190,1	2,398	7,583	1,792	3,860	8,316
5,76	33,18	191,1	2,400	7,589	1,793	3,862	8,320
5,77	33,29	192,1	2,402	7,596	1,794	3,864	8,325
5,78	33,41	193,1	2,404	7,603	1,795	3,866	8,330
5,79	33,52	194,1	2,406	7,609	1,796	3,869	8,335
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340

Объяснения к таблице см. на стр. 22—23.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340
5,81	33,76	196,1	2,410	7,622	1,798	3,873	8,344
5,82	33,87	197,1	2,412	7,629	1,799	3,875	8,349
5,83	33,99	198,2	2,415	7,635	1,800	3,878	8,354
5,84	34,11	199,2	2,417	7,642	1,801	3,880	8,359
5,85	34,22	200,2	2,419	7,649	1,802	3,882	8,363
5,86	34,34	201,2	2,421	7,655	1,803	3,884	8,368
5,87	34,46	202,3	2,423	7,662	1,804	3,886	8,373
5,88	34,57	203,3	2,425	7,668	1,805	3,889	8,378
5,89	34,69	204,3	2,427	7,675	1,806	3,891	8,382
5,90	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387
5,91	34,93	206,4	2,431	7,688	1,808	3,895	8,392
5,92	35,05	207,5	2,433	7,694	1,809	3,897	8,397
5,93	35,16	208,5	2,435	7,701	1,810	3,900	8,401
5,94	35,28	209,6	2,437	7,707	1,811	3,902	8,406
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411
5,96	35,52	211,7	2,441	7,720	1,813	3,906	8,416
5,97	35,64	212,8	2,443	7,727	1,814	3,908	8,420
5,98	35,76	213,8	2,445	7,733	1,815	3,911	8,425
5,99	35,88	214,9	2,447	7,740	1,816	3,913	8,430
6,00	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434
6,01	36,12	217,1	2,452	7,752	1,818	3,917	8,439
6,02	36,24	218,2	2,454	7,759	1,819	3,919	8,444
6,03	36,36	219,3	2,456	7,765	1,820	3,921	8,448
6,04	36,48	220,3	2,458	7,772	1,821	3,924	8,453
6,05	36,60	221,4	2,460	7,778	1,822	3,926	8,458
6,06	36,72	222,5	2,462	7,785	1,823	3,928	8,462
6,07	36,84	223,6	2,464	7,791	1,824	3,930	8,467
6,08	36,97	224,8	2,466	7,797	1,825	3,932	8,472
6,09	37,09	225,9	2,468	7,804	1,826	3,934	8,476
6,10	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481
6,11	37,33	228,1	2,472	7,817	1,828	3,939	8,486
6,12	37,45	229,2	2,474	7,823	1,829	3,941	8,490
6,13	37,58	230,3	2,476	7,829	1,830	3,943	8,495
6,14	37,70	231,5	2,478	7,836	1,831	3,945	8,499
6,15	37,82	232,6	2,480	7,842	1,832	3,947	8,504
6,16	37,95	233,7	2,482	7,849	1,833	3,949	8,509
6,17	38,07	234,9	2,484	7,855	1,834	3,951	8,513
6,18	38,19	236,0	2,486	7,861	1,835	3,954	8,518
6,19	38,32	237,2	2,488	7,868	1,836	3,956	8,522
6,20	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,20	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527
6,21	38,56	239,5	2,492	7,880	1,838	3,960	8,532
6,22	38,69	240,6	2,494	7,887	1,839	3,962	8,536
6,23	38,81	241,8	2,496	7,893	1,840	3,964	8,541
6,24	38,94	243,0	2,498	7,899	1,841	3,966	8,545
6,25	39,06	244,1	2,500	7,906	1,842	3,969	8,550
6,26	39,19	245,3	2,502	7,912	1,843	3,971	8,554
6,27	39,31	246,5	2,504	7,918	1,844	3,973	8,559
6,28	39,44	247,7	2,506	7,925	1,845	3,975	8,564
6,29	39,56	248,9	2,508	7,931	1,846	3,977	8,568
6,30	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573
6,31	39,82	251,2	2,512	7,944	1,848	3,981	8,577
6,32	39,94	252,4	2,514	7,950	1,849	3,983	8,582
6,33	40,07	253,6	2,516	7,956	1,850	3,985	8,586
6,34	40,20	254,8	2,518	7,962	1,851	3,987	8,591
6,35	40,32	256,0	2,520	7,969	1,852	3,990	8,595
6,36	40,45	257,3	2,522	7,975	1,853	3,992	8,600
6,37	40,58	258,5	2,524	7,981	1,854	3,994	8,604
6,38	40,70	259,7	2,526	7,987	1,855	3,996	8,609
6,39	40,83	260,9	2,528	7,994	1,856	3,998	8,613
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618
6,41	41,09	263,4	2,532	8,006	1,858	4,002	8,622
6,42	41,22	264,6	2,534	8,012	1,859	4,004	8,627
6,43	41,34	265,8	2,536	8,019	1,860	4,006	8,631
6,44	41,47	267,1	2,538	8,025	1,860	4,008	8,636
6,45	41,60	268,3	2,540	8,031	1,861	4,010	8,640
6,46	41,73	269,6	2,542	8,037	1,862	4,012	8,645
6,47	41,86	270,8	2,544	8,044	1,863	4,015	8,649
6,48	41,99	272,1	2,546	8,050	1,864	4,017	8,653
6,49	42,12	273,4	2,548	8,056	1,865	4,019	8,658
6,50	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662
6,51	42,38	275,9	2,551	8,068	1,867	4,023	8,667
6,52	42,51	277,2	2,553	8,075	1,868	4,025	8,671
6,53	42,64	278,4	2,555	8,081	1,869	4,027	8,676
6,54	42,77	279,7	2,557	8,087	1,870	4,029	8,680
6,55	42,90	281,0	2,559	8,093	1,871	4,031	8,685
6,56	43,03	282,3	2,561	8,099	1,872	4,033	8,689
6,57	43,16	283,6	2,563	8,106	1,873	4,035	8,693
6,58	43,30	284,9	2,565	8,112	1,874	4,037	8,698
6,59	43,43	286,2	2,567	8,118	1,875	4,039	8,702
6,60	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707

Объяснения к таблице см. на стр. 22—23.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6.60	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707
6,61	43,69	288,8	2,571	8,130	1,877	4,043	8,711
6,62	43,82	290,1	2,573	8,136	1,878	4,045	8,715
6,63	43,96	291,4	2,575	8,142	1,879	4,047	8,720
6,64	44,09	292,8	2,577	8,149	1,880	4,049	8,724
6.65	44,22	294,1	2,579	8,155	1,881	4,051	8,729
6,66	44,36	295,4	2,581	8,161	1,881	4,053	8,733
6,67	44,49	296,7	2,583	8,167	1,882	4,055	8,737
6,68	44,62	298,1	2,585	8,173	1,883	4,058	8,742
6,69	44,76	299,4	2,587	8,179	1,884	4,060	8,746
6.70	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750
6,71	45,02	302,1	2,590	8,191	1,886	4,064	8,755
6,72	45,16	303,5	2,592	8,193	1,887	4,066	8,759
6,73	45,29	304,8	2,594	8,204	1,888	4,068	8,763
6,74	45,43	306,2	2,596	8,210	1,889	4,070	8,768
6.75	45,56	307,5	2,598	8,216	1,890	4,072	8,772
6,76	45,70	308,9	2,600	8,222	1,891	4,074	8,776
6,77	45,83	310,3	2,602	8,228	1,892	4,076	8,781
6,78	45,97	311,7	2,604	8,234	1,893	4,078	8,785
6,79	46,10	313,0	2,606	8,240	1,894	4,080	8,789
6.80	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794
6,81	46,38	315,8	2,610	8,252	1,895	4,084	8,798
6,82	46,51	317,2	2,612	8,258	1,896	4,086	8,802
6,83	46,65	318,6	2,613	8,264	1,897	4,088	8,807
6,84	46,79	320,0	2,615	8,270	1,898	4,090	8,811
6.85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815
6,86	47,06	322,8	2,619	8,283	1,900	4,094	8,819
6,87	47,20	324,2	2,621	8,289	1,901	4,096	8,824
6,88	47,33	325,7	2,623	8,295	1,902	4,098	8,828
6,89	47,47	327,1	2,625	8,301	1,903	4,100	8,832
6.90	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837
6,91	47,75	329,9	2,629	8,313	1,905	4,104	8,841
6,92	47,89	331,4	2,631	8,319	1,906	4,106	8,845
6,93	48,02	332,8	2,632	8,325	1,907	4,108	8,849
6,94	48,16	334,3	2,634	8,331	1,907	4,109	8,854
6.95	48,30	335,7	2,636	8,337	1,908	4,111	8,858
6,96	48,44	337,2	2,638	8,343	1,909	4,113	8,862
6,97	48,58	338,6	2,640	8,349	1,910	4,115	8,866
6,98	48,72	340,1	2,642	8,355	1,911	4,117	8,871
6,99	48,86	341,5	2,644	8,361	1,912	4,119	8,875
7.00	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,00	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879
7,01	49,14	344,5	2,648	8,373	1,914	4,123	8,883
7,02	49,28	345,9	2,650	8,379	1,915	4,125	8,887
7,03	49,42	347,4	2,651	8,385	1,916	4,127	8,892
7,04	49,56	348,9	2,653	8,390	1,917	4,129	8,896
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900
7,06	49,84	351,9	2,657	8,402	1,918	4,133	8,904
7,07	49,98	353,4	2,659	8,408	1,919	4,135	8,909
7,08	50,13	354,9	2,661	8,414	1,920	4,137	8,913
7,09	50,27	356,4	2,663	8,420	1,921	4,139	8,917
7,10	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921
7,11	50,55	359,4	2,666	8,432	1,923	4,143	8,925
7,12	50,69	360,9	2,668	8,438	1,924	4,145	8,929
7,13	50,84	362,5	2,670	8,444	1,925	4,147	8,934
7,14	50,98	364,0	2,672	8,450	1,926	4,149	8,938
7,15	51,12	365,5	2,674	8,456	1,926	4,151	8,942
7,16	51,27	367,1	2,676	8,462	1,927	4,152	8,946
7,17	51,41	368,6	2,678	8,468	1,928	4,154	8,950
7,18	51,55	370,1	2,680	8,473	1,929	4,156	8,955
7,19	51,70	371,7	2,681	8,479	1,930	4,158	8,959
7,20	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963
7,21	51,98	374,8	2,685	8,491	1,932	4,162	8,967
7,22	52,13	376,4	2,687	8,497	1,933	4,164	8,971
7,23	52,27	377,9	2,689	8,503	1,934	4,166	8,975
7,24	52,42	379,5	2,691	8,509	1,935	4,168	8,979
7,25	52,56	381,1	2,693	8,515	1,935	4,170	8,984
7,26	52,71	382,7	2,694	8,521	1,936	4,172	8,988
7,27	52,85	384,2	2,696	8,526	1,937	4,174	8,992
7,28	53,00	385,8	2,698	8,532	1,938	4,176	8,996
7,29	53,14	387,4	2,700	8,538	1,939	4,177	9,000
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004
7,31	53,44	390,6	2,704	8,550	1,941	4,181	9,008
7,32	53,58	392,2	2,706	8,556	1,942	4,183	9,012
7,33	53,73	393,8	2,707	8,562	1,943	4,185	9,016
7,34	53,88	395,4	2,709	8,567	1,943	4,187	9,021
7,35	54,02	397,1	2,711	8,573	1,944	4,189	9,025
7,36	54,17	398,7	2,713	8,579	1,945	4,191	9,029
7,37	54,32	400,3	2,715	8,585	1,946	4,193	9,033
7,38	54,46	401,9	2,717	8,591	1,947	4,195	9,037
7,39	54,61	403,6	2,718	8,597	1,948	4,196	9,041
7,40	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045

Объяснения к таблице см. на стр. 22—23.

ТАБЛИЦЫ

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,40	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045
7,41	54,91	406,9	2,722	8,608	1,950	4,200	9,049
7,42	55,06	408,5	2,724	8,614	1,950	4,202	9,053
7,43	55,20	410,2	2,726	8,620	1,951	4,204	9,057
7,44	55,35	411,8	2,728	8,626	1,952	4,206	9,061
7,45	55,50	413,5	2,729	8,631	1,953	4,208	9,065
7,46	55,65	415,2	2,731	8,637	1,954	4,210	9,069
7,47	55,80	416,8	2,733	8,643	1,955	4,212	9,073
7,48	55,95	418,5	2,735	8,649	1,956	4,213	9,078
7,49	56,10	420,2	2,737	8,654	1,957	4,215	9,082
7,50	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086
7,51	56,40	423,6	2,740	8,666	1,958	4,219	9,090
7,52	56,55	425,3	2,742	8,672	1,959	4,221	9,094
7,53	56,70	427,0	2,744	8,678	1,960	4,223	9,098
7,54	56,85	428,7	2,746	8,683	1,961	4,225	9,102
7,55	57,00	430,4	2,748	8,689	1,962	4,227	9,106
7,56	57,15	432,1	2,750	8,695	1,963	4,228	9,110
7,57	57,30	433,8	2,751	8,701	1,964	4,230	9,114
7,58	57,46	435,5	2,753	8,706	1,964	4,232	9,118
7,59	57,61	437,2	2,755	8,712	1,965	4,234	9,122
7,60	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126
7,61	57,91	440,7	2,759	8,724	1,967	4,238	9,130
7,62	58,06	442,5	2,760	8,729	1,968	4,240	9,134
7,63	58,22	444,2	2,762	8,735	1,969	4,241	9,138
7,64	58,37	445,9	2,764	8,741	1,970	4,243	9,142
7,65	58,52	447,7	2,766	8,746	1,970	4,245	9,146
7,66	58,68	449,5	2,768	8,752	1,971	4,247	9,150
7,67	58,83	451,2	2,769	8,758	1,972	4,249	9,154
7,68	58,98	453,0	2,771	8,764	1,973	4,251	9,158
7,69	59,14	454,8	2,773	8,769	1,974	4,252	9,162
7,70	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166
7,71	59,44	458,3	2,777	8,781	1,976	4,256	9,170
7,72	59,60	460,1	2,778	8,786	1,976	4,258	9,174
7,73	59,75	461,9	2,780	8,792	1,977	4,260	9,178
7,74	59,91	463,7	2,782	8,798	1,978	4,262	9,182
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185
7,76	60,22	467,3	2,786	8,809	1,980	4,265	9,189
7,77	60,37	469,1	2,787	8,815	1,981	4,267	9,193
7,78	60,53	470,9	2,789	8,820	1,981	4,269	9,197
7,79	60,68	472,7	2,791	8,826	1,982	4,271	9,201
7,80	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\sqrt[3]{1000n}$
7,80	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205
7,81	61,00	476,4	2,795	8,837	1,984	4,274	9,209
7,82	61,15	478,2	2,796	8,843	1,985	4,276	9,213
7,83	61,31	480,0	2,798	8,849	1,986	4,278	9,217
7,84	61,47	481,9	2,800	8,854	1,987	4,280	9,221
7,85	61,62	483,7	2,802	8,860	1,987	4,282	9,225
7,86	61,78	485,6	2,804	8,866	1,988	4,284	9,229
7,87	61,94	487,4	2,805	8,871	1,989	4,285	9,233
7,88	62,09	489,3	2,807	8,877	1,990	4,287	9,237
7,89	62,25	491,2	2,809	8,883	1,991	4,289	9,240
7,90	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244
7,91	62,57	494,9	2,812	8,894	1,992	4,293	9,248
7,92	62,73	496,8	2,814	8,899	1,993	4,294	9,252
7,93	62,88	498,7	2,816	8,905	1,994	4,296	9,256
7,94	63,04	500,6	2,818	8,911	1,995	4,298	9,260
7,95	63,20	502,5	2,820	8,916	1,996	4,300	9,264
7,96	63,36	504,4	2,821	8,922	1,997	4,302	9,268
7,97	63,52	506,3	2,823	8,927	1,997	4,303	9,272
7,98	63,68	508,2	2,825	8,933	1,998	4,305	9,275
7,99	63,84	510,1	2,827	8,939	1,999	4,307	9,279
8,00	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283
8,01	64,16	513,9	2,830	8,950	2,001	4,311	9,287
8,02	64,32	515,8	2,832	8,955	2,002	4,312	9,291
8,03	64,48	517,8	2,834	8,961	2,002	4,314	9,295
8,04	64,64	519,7	2,835	8,967	2,003	4,316	9,299
8,05	64,80	521,7	2,837	8,972	2,004	4,318	9,302
8,06	64,96	523,6	2,839	8,978	2,005	4,320	9,306
8,07	65,12	525,6	2,841	8,983	2,006	4,321	9,310
8,08	65,29	527,5	2,843	8,989	2,007	4,323	9,314
8,09	65,45	529,5	2,844	8,994	2,007	4,325	9,318
8,10	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322
8,11	65,77	533,4	2,848	9,006	2,009	4,329	9,326
8,12	65,93	535,4	2,850	9,011	2,010	4,330	9,329
8,13	66,10	537,4	2,851	9,017	2,011	4,332	9,333
8,14	66,26	539,4	2,853	9,022	2,012	4,334	9,337
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341
8,16	66,59	543,3	2,857	9,033	2,013	4,337	9,345
8,17	66,75	545,3	2,858	9,039	2,014	4,339	9,348
8,18	66,91	547,3	2,860	9,044	2,015	4,341	9,352
8,19	67,08	549,4	2,862	9,050	2,016	4,343	9,356
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360

Объяснения к таблице см. на стр. 22--23.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360
8,21	67,40	553,4	2,865	9,061	2,017	4,346	9,364
8,22	67,57	555,4	2,867	9,066	2,018	4,348	9,368
8,23	67,73	557,4	2,869	9,072	2,019	4,350	9,371
8,24	67,90	559,5	2,871	9,077	2,020	4,352	9,375
8,25	68,06	561,5	2,872	9,083	2,021	4,353	9,379
8,26	68,23	563,6	2,874	9,088	2,021	4,355	9,383
8,27	68,39	565,6	2,876	9,094	2,022	4,357	9,386
8,28	68,56	567,7	2,877	9,099	2,023	4,359	9,390
8,29	68,72	569,7	2,879	9,105	2,024	4,360	9,394
8,30	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398
8,31	69,06	573,9	2,883	9,116	2,026	4,364	9,402
8,32	69,22	575,9	2,884	9,121	2,026	4,366	9,405
8,33	69,39	578,0	2,886	9,127	2,027	4,367	9,409
8,34	69,56	580,1	2,888	9,132	2,028	4,369	9,413
8,35	69,72	582,2	2,890	9,138	2,029	4,371	9,417
8,36	69,89	584,3	2,891	9,143	2,030	4,373	9,420
8,37	70,06	586,4	2,893	9,149	2,030	4,374	9,424
8,38	70,22	588,5	2,895	9,151	2,031	4,376	9,428
8,39	70,39	590,6	2,897	9,160	2,032	4,378	9,432
8,40	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435
8,41	70,73	594,8	2,900	9,171	2,034	4,381	9,439
8,42	70,90	596,9	2,902	9,176	2,034	4,383	9,443
8,43	71,06	599,1	2,903	9,182	2,035	4,385	9,447
8,44	71,23	601,2	2,905	9,187	2,036	4,386	9,450
8,45	71,40	603,4	2,907	9,192	2,037	4,388	9,454
8,46	71,57	605,5	2,909	9,198	2,038	4,390	9,458
8,47	71,74	607,6	2,910	9,203	2,038	4,392	9,462
8,48	71,91	609,8	2,912	9,209	2,039	4,393	9,465
8,49	72,08	612,0	2,914	9,214	2,040	4,395	9,469
8,50	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473
8,51	72,42	616,3	2,917	9,225	2,042	4,399	9,476
8,52	72,59	618,5	2,919	9,230	2,042	4,400	9,480
8,53	72,76	620,7	2,921	9,236	2,043	4,402	9,484
8,54	72,93	622,8	2,922	9,241	2,044	4,404	9,488
8,55	73,10	625,0	2,924	9,247	2,045	4,405	9,491
8,56	73,27	627,2	2,926	9,252	2,046	4,407	9,495
8,57	73,44	629,4	2,927	9,257	2,046	4,409	9,499
8,58	73,62	631,6	2,929	9,263	2,047	4,411	9,502
8,59	73,79	633,8	2,931	9,268	2,048	4,412	9,506
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510
8,61	74,13	638,3	2,934	9,279	2,050	4,416	9,513
8,62	74,30	640,5	2,936	9,284	2,050	4,417	9,517
8,63	74,48	642,7	2,938	9,290	2,051	4,419	9,521
8,64	74,65	645,0	2,939	9,295	2,052	4,421	9,524
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528
8,66	75,00	649,5	2,943	9,306	2,054	4,424	9,532
8,67	75,17	651,7	2,944	9,311	2,054	4,426	9,535
8,68	75,34	654,0	2,946	9,317	2,055	4,428	9,539
8,69	75,52	656,2	2,948	9,322	2,056	4,429	9,543
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546
8,71	75,86	660,8	2,951	9,333	2,057	4,433	9,550
8,72	76,04	663,1	2,953	9,338	2,058	4,434	9,554
8,73	76,21	665,3	2,955	9,343	2,059	4,436	9,557
8,74	76,39	667,6	2,956	9,349	2,060	4,438	9,561
8,75	76,56	669,9	2,958	9,354	2,061	4,440	9,565
8,76	76,74	672,2	2,960	9,359	2,061	4,441	9,568
8,77	76,91	674,5	2,961	9,365	2,062	4,443	9,572
8,78	77,09	676,8	2,963	9,370	2,063	4,445	9,576
8,79	77,26	679,2	2,965	9,375	2,064	4,446	9,579
8,80	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583
8,81	77,62	683,8	2,968	9,386	2,065	4,450	9,586
8,82	77,79	686,1	2,970	9,391	2,066	4,451	9,590
8,83	77,97	688,5	2,972	9,397	2,067	4,453	9,594
8,84	78,15	690,8	2,973	9,402	2,068	4,455	9,597
8,85	78,32	693,2	2,975	9,407	2,068	4,456	9,601
8,86	78,50	695,5	2,977	9,413	2,069	4,458	9,605
8,87	78,68	697,9	2,978	9,418	2,070	4,460	9,608
8,88	78,85	700,2	2,980	9,423	2,071	4,461	9,612
8,89	79,03	702,6	2,982	9,429	2,072	4,463	9,615
8,90	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619
8,91	79,39	707,3	2,985	9,439	2,073	4,466	9,623
8,92	79,57	709,7	2,987	9,445	2,074	4,468	9,626
8,93	79,74	712,1	2,988	9,450	2,075	4,470	9,630
8,94	79,92	714,5	2,990	9,455	2,075	4,471	9,633
8,95	80,10	716,9	2,992	9,460	2,076	4,473	9,637
8,96	80,28	719,3	2,993	9,466	2,077	4,475	9,641
8,97	80,46	721,7	2,995	9,471	2,078	4,476	9,644
8,98	80,64	724,2	2,997	9,476	2,079	4,478	9,648
8,99	80,82	726,6	2,998	9,482	2,079	4,480	9,651
9,00	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655

Объяснения к таблице см. на стр. 22—23.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,00	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481
9,01	81,18	731,4	3,002	9,492	2,081	4,483
9,02	81,36	733,9	3,003	9,497	2,082	4,485
9,03	81,54	736,3	3,005	9,503	2,082	4,486
9,04	81,72	738,8	3,007	9,508	2,083	4,488
9,05	81,90	741,2	3,008	9,513	2,084	4,490
9,06	82,08	743,7	3,010	9,518	2,085	4,491
9,07	82,26	746,1	3,012	9,524	2,085	4,493
9,08	82,45	748,6	3,013	9,529	2,086	4,495
9,09	82,63	751,1	3,015	9,534	2,087	4,496
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498
9,11	82,99	756,1	3,018	9,545	2,089	4,500
9,12	83,17	758,6	3,020	9,550	2,089	4,501
9,13	83,36	761,0	3,022	9,555	2,090	4,503
9,14	83,54	763,6	3,023	9,560	2,091	4,505
9,15	83,72	766,1	3,025	9,566	2,092	4,506
9,16	83,91	768,6	3,027	9,571	2,092	4,508
9,17	84,09	771,1	3,028	9,576	2,093	4,509
9,18	84,27	773,6	3,030	9,581	2,094	4,511
9,19	84,46	776,2	3,032	9,586	2,095	4,513
9,20	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514
9,21	84,82	781,2	3,035	9,597	2,096	4,516
9,22	85,01	783,8	3,036	9,602	2,097	4,518
9,23	85,19	786,3	3,038	9,607	2,098	4,519
9,24	85,38	788,9	3,040	9,612	2,098	4,521
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523
9,26	85,75	794,0	3,043	9,623	2,100	4,524
9,27	85,93	796,6	3,045	9,628	2,101	4,526
9,28	86,12	799,2	3,046	9,633	2,101	4,527
9,29	86,30	801,8	3,048	9,638	2,102	4,529
9,30	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531
9,31	86,68	807,0	3,051	9,649	2,104	4,532
9,32	86,86	809,6	3,053	9,654	2,104	4,534
9,33	87,05	812,2	3,055	9,659	2,105	4,536
9,34	87,24	814,8	3,056	9,664	2,106	4,537
9,35	87,42	817,4	3,058	9,670	2,107	4,539

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,35	87,42	817,4	3,058	9,670	2,107	4,539	9,778
9,36	87,61	820,0	3,059	9,675	2,107	4,540	9,782
9,37	87,80	822,7	3,061	9,680	2,108	4,542	9,785
9,38	87,98	825,3	3,063	9,685	2,109	4,544	9,789
9,39	88,17	827,9	3,064	9,690	2,110	4,545	9,792
9,40	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796
9,41	88,55	833,2	3,068	9,701	2,111	4,548	9,799
9,42	88,74	835,9	3,069	9,706	2,112	4,550	9,803
9,43	88,92	838,6	3,071	9,711	2,113	4,552	9,806
9,44	89,11	841,2	3,072	9,716	2,113	4,553	9,810
9,45	89,30	843,9	3,074	9,721	2,114	4,555	9,813
9,46	89,49	846,6	3,076	9,726	2,115	4,556	9,817
9,47	89,68	849,3	3,077	9,731	2,116	4,558	9,820
9,48	89,87	852,0	3,079	9,737	2,116	4,560	9,824
9,49	90,06	854,7	3,081	9,742	2,117	4,561	9,827
9,50	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830
9,51	90,44	860,1	3,084	9,752	2,119	4,565	9,834
9,52	90,63	862,8	3,085	9,757	2,119	4,566	9,837
9,53	90,82	865,5	3,087	9,762	2,120	4,568	9,841
9,54	91,01	868,3	3,089	9,767	2,121	4,569	9,844
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848
9,56	91,39	873,7	3,092	9,778	2,122	4,572	9,851
9,57	91,58	876,5	3,094	9,783	2,123	4,574	9,855
9,58	91,77	879,2	3,095	9,788	2,124	4,576	9,858
9,59	91,97	882,0	3,097	9,793	2,125	4,577	9,861
9,60	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865
9,61	92,35	887,5	3,100	9,803	2,126	4,580	9,868
9,62	92,54	890,3	3,102	9,808	2,127	4,582	9,872
9,63	92,74	893,1	3,103	9,813	2,128	4,584	9,875
9,64	92,93	895,8	3,105	9,818	2,128	4,585	9,879
9,65	93,12	898,6	3,106	9,823	2,129	4,587	9,882
9,66	93,32	901,4	3,108	9,829	2,130	4,588	9,885
9,67	93,51	904,2	3,110	9,834	2,130	4,590	9,889
9,68	93,70	907,0	3,111	9,839	2,131	4,592	9,892
9,69	93,90	909,9	3,113	9,844	2,132	4,593	9,896
9,70	94,09	912,7	3,114	9,84	2,133	4,595	9,899

Объяснения к таблице см. на стр. 22—23.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,70	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899
9,71	94,28	915,5	3,116	9,854	2,133	4,596	9,902
9,72	94,48	918,3	3,118	9,859	2,134	4,598	9,906
9,73	94,67	921,2	3,119	9,864	2,135	4,599	9,909
9,74	94,87	924,0	3,121	9,869	2,136	4,601	9,913
9,75	95,06	926,9	3,122	9,874	2,136	4,603	9,916
9,76	95,26	929,7	3,124	9,879	2,137	4,604	9,919
9,77	95,45	932,6	3,126	9,884	2,138	4,606	9,923
9,78	95,65	935,4	3,127	9,889	2,139	4,607	9,926
9,79	95,84	938,3	3,129	9,894	2,139	4,609	9,930
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933
9,81	96,24	944,1	3,132	9,905	2,141	4,612	9,936
9,82	96,43	947,0	3,134	9,910	2,141	4,614	9,940
9,83	96,63	949,9	3,135	9,915	2,142	4,615	9,943
9,84	96,83	952,8	3,137	9,920	2,143	4,617	9,946
9,85	97,02	955,7	3,138	9,925	2,144	4,618	9,950
9,86	97,22	958,6	3,140	9,930	2,144	4,620	9,953
9,87	97,42	961,5	3,142	9,935	2,145	4,621	9,956
9,88	97,61	964,4	3,143	9,940	2,146	4,623	9,960
9,89	97,81	967,4	3,145	9,945	2,147	4,625	9,963
9,90	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967
9,91	98,21	973,2	3,148	9,955	2,148	4,628	9,970
9,92	98,41	976,2	3,150	9,960	2,149	4,629	9,973
9,93	98,60	979,1	3,151	9,965	2,149	4,631	9,977
9,94	98,80	982,1	3,153	9,970	2,150	4,632	9,980
9,95	99,00	985,1	3,154	9,975	2,151	4,634	9,983
9,96	99,20	988,0	3,156	9,980	2,152	4,635	9,987
9,97	99,40	991,0	3,158	9,985	2,152	4,637	9,990
9,98	99,60	994,0	3,159	9,990	2,153	4,638	9,993
9,99	99,80	997,0	3,161	9,995	2,154	4,640	9,997
10,00	100,00	1000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000

ОБРАТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4 Обратные величины *

п	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174
1,1	9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403
1,2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7812	7752
1,3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194
1,4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711
1,5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289
1,6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917
1,7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587
1,8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291
1,9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025
2,0	5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367
2,3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184
2,4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016
2,5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861
2,6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717
2,7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584
2,8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460
2,9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344
3,0	3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236
3,1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135
3,2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040
3,3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950
3,4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865
3,5	2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786
3,6	2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710
3,7	2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639
3,8	2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571
3,9	2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506
4,0	2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445
4,1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387
4,2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331
4,3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278
4,4	2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179

* Объяснения к таблице см. на стр. 49.

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179
4,6	2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132
4,7	2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088
4,8	2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045
4,9	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004
5,0	2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965
5,1	1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927
5,2	1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890
5,3	1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855
5,4	1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821
5,5	1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
5,6	1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757
5,7	1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727
5,8	1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698
5,9	1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669
6,0	1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642
6,1	1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616
6,2	1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590
6,3	1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565
6,4	1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541
6,5	1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517
6,6	1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495
6,7	1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473
6,8	1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451
6,9	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431
7,0	1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410
7,1	1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391
7,2	1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372
7,3	1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353
7,4	1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335
7,5	1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318
7,6	1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300
7,7	1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284
7,8	1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267
7,9	1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252
8,0	1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236

<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8,0	1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236
8,1	1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221
8,2	1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206
8,3	1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192
8,4	1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178
8,5	1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164
8,6	1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151
8,7	1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138
8,8	1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125
8,9	1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112
9,0	1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100
9,1	1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088
9,2	1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076
9,3	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065
9,4	1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054
9,5	1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043
9,6	1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032
9,7	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021
9,8	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011
9,9	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001

Объяснения к таблице обратных величин

В таблице на стр. 47—49 даны четырема знаками значения величины $100,0:n$ для трехзначных значений аргумента, заключенных между 1 и 10. Каждое число в таблице помещено в строчке, соответствующей первым двум значащим цифрам аргумента (указанным в столбце *n*), и в столбце, соответствующем третьей цифре аргумента. Например $100,0:2,26=44,25$. Если аргумент дан с четырьмя знаками, то необходимо прибегнуть к линейной интерполяции (см. стр. 16). Следует обратить внимание на то, что здесь интерполяционные поправки не прибавляются, а вычитаются.

Помещенные в таблице числа можно рассматривать как десятичные знаки, следующие за запятой в дроби $1:n$; например $1:2,26=0,4425$. Для нахождения $1:n$ при $n > 10$ и $n < 1$ принимают во внимание, что при умножении n на 10^k , величина $1:n$ умножается на 10^{-k} , т. е. перенос запятой у n на k разрядов влево вызывает перенос запятой у $1:n$ на k разрядов влево, и наоборот. Например $1:22,6=0,04425$; $1:0,226=44,25$.

5. Некоторые степени чисел 2, 3 и 5

n	2^n	3^n	5^n
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3 125
6	64	729	15 625
7	128	2 187	78 125
8	256	6 561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1 024	59 049	9 765 625
11	2 048	177 147	48 828 125
12	4 096	531 441	244 140 625
13	8 192	1 594 323	1 220 703 125
14	16 384	4 782 969	6 103 515 625
15	32 768	14 348 907	30 517 578 125
16	65 536	43 046 721	152 587 890 625
17	131 072	129 140 163	762 939 453 125
18	262 144	387 420 489	3 814 697 265 625
19	524 288	1 162 261 467	19 073 486 328 125
20	1 048 576	3 486 784 401	95 367 431 640 625

6. Факториалы

n	$n!$	n	$n!$
1	1	11	39 916 800
2	2	12	479 001 600
3	6	13	6 227 020 800
4	24	14	87 178 291 200
5	120	15	1 307 674 368 000
6	720	16	20 922 789 888 000
7	5 040	17	355 687 428 096 000
8	40 320	18	6 402 373 705 728 000
9	362 880	19	121 645 100 408 832 000
10	3 628 800	20	2 432 902 008 176 640 000

7. Четырехзначные мантиссы *

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2270
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618

* О логарифмах см. стр. 162—164. Объяснения к таблице см. на стр. 53.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9885	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Объяснения к таблице логарифмов

При нахождении логарифма данного числа находится сначала в соответствии с правилами, данными на стр. 16-й, его *характеристика*, а затем — *мантисса* из таблиц. Для трехзначных чисел мантисса находится в пересечении строчки, в начале которой (графа N) стоят первые две цифры данного числа, и столбца, соответствующего третьей цифре. Если заданное число имеет больше трех значащих цифр, необходимо прибегнуть к линейной интерполяции (см. стр. 16). При этом интерполяционная поправка находится только на четвертую значащую цифру; поправка на пятую цифру имеет смысл делать только тогда, когда первая значащая цифра данного числа разна 1 или 2.

Пример: $\lg 254,3 = 2,4053$ (к мантиссе 4033 прибавляется поправка $0,0017 = 5,1$).

8. Антилогарифмы

<i>m</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1475
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286

* О логарифмах см. стр. 162--164. Обращение к таблицам, см. стр. 66.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	353	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117

<i>m</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

Объяснения к таблице антилогарифмов

Таблица антилогарифмов служит для нахождения числа по его логарифму. Цифровой состав искомого числа находится в таблице антилогарифмов, в пересечении строки, определяемой первыми двумя цифрами мантиссы, и столбца, соответствующего третьей ее цифре. На четвертую цифру находится интерполяционная поправка. Характеристика логарифма позволяет поставить в полученном результате запятую на основании правил, данных на стр. 164.

Пример: $\lg x = 0,2763$; $x = 1,889$ (к 1888, найденному в таблице, прибавляется $0,3 \cdot 4 = 1,2$, в результате отделяется запятой один знак, т. к. характеристика равна нулю).

9. Перевод градусной меры в радианную

Длина дуг окружности радиуса 1

Угол	Дуга	Угол	Дуга	Угол	Дуга
1"	0,000005	1°	0,017453	31°	0,541052
2	0,000010	2	0,034907	32	0,558505
3	0,000015	3	0,052360	33	0,575959
4	0,000019	4	0,069813	34	0,593412
5	0,000024	5	0,087266	35	0,610865
6	0,000029	6	0,104720	36	0,628319
7	0,000034	7	0,122173	37	0,645772
8	0,000039	8	0,139626	38	0,663225
9	0,000044	9	0,157080	39	0,680678
10	0,000048	10	0,174533	40	0,698132
20	0,000097	11	0,191986	45	0,785398
30	0,000145	12	0,209440	50	0,872665
40	0,000194	13	0,226893	55	0,959931
50	0,000242	14	0,244346	60	1,047198
1'	0,000291	15	0,261799	65	1,134464
2	0,000582	16	0,279253	70	1,221730
3	0,000873	17	0,296706	75	1,308997
4	0,001164	18	0,314159	80	1,396263
5	0,001454	19	0,331613	85	1,483530
6	0,001745	20	0,349066	90	1,570796
7	0,002036	21	0,366519	100	1,745329
8	0,002327	22	0,383972	120	2,094395
9	0,002618	23	0,401426	150	2,617994
10	0,002909	24	0,418879	180	3,141593
20	0,005818	25	0,436332	200	3,490659
30	0,008727	26	0,453786	250	4,363323
40	0,011636	27	0,471239	270	4,712389
50	0,014544	28	0,488692	300	5,235988
		29	0,506145	360	6,283185
		30	0,523599	400	6,981317

Примеры:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & 52^{\circ} 37' 23'' = 0,91845 \text{ радиана.} \\
 & 50^{\circ} = 0,872665 \\
 & 2^{\circ} = 0,034907 \\
 & 30' = 0,008727 \\
 & 7'' = 0,0002036 \\
 & 20'' = 0,000097 \\
 & 3'' = 0,000015 \\
 & \hline
 & 0,918447
 \end{aligned}$$

Вычисления удобно проводить на счетах.

$$\begin{aligned}
 2) \quad & 5,645 \text{ рад.} \\
 & 5,235088 = 300^{\circ} \\
 & 0,401012 \\
 & 0,411426 = 23^{\circ} \\
 & 0,007586 \\
 & 0,005818 = 20' \\
 & 0,001708 \\
 & 0,001715 = 6'' \\
 & 0,000023 = 5'' \\
 & \hline
 & 5,645 \text{ рад.} = 323^{\circ} 26' 5''
 \end{aligned}$$

Дуга, равная радиусу, имеет $57^{\circ} 17' 44'', 8$ (=1 радиан).

10. *Натуральные значения тригонометрических функций*
Синусы

Градусы	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494	0,0523	87
3	0,0523	0,0552	0,0581	0,0610	0,0640	0,0669	0,0698	86
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843	0,0872	85
5	0,0872	0,0901	0,0929	0,0958	0,0987	0,1016	0,1045	84
6	0,1045	0,1074	0,1103	0,1132	0,1161	0,1190	0,1219	83
7	0,1219	0,1248	0,1276	0,1305	0,1334	0,1363	0,1392	82
8	0,1392	0,1421	0,1449	0,1478	0,1507	0,1536	0,1564	81
9	0,1564	0,1593	0,1622	0,1650	0,1679	0,1708	0,1736	80
10	0,1736	0,1765	0,1794	0,1822	0,1851	0,1880	0,1908	79
11	0,1908	0,1937	0,1965	0,1994	0,2022	0,2051	0,2079	78
12	0,2079	0,2108	0,2136	0,2164	0,2193	0,2221	0,2250	77
13	0,2250	0,2278	0,2306	0,2334	0,2363	0,2391	0,2419	76
14	0,2419	0,2447	0,2476	0,2504	0,2532	0,2560	0,2588	75
15	0,2588	0,2616	0,2644	0,2672	0,2700	0,2728	0,2756	74
16	0,2756	0,2784	0,2812	0,2840	0,2868	0,2896	0,2924	73
17	0,2924	0,2952	0,2979	0,3007	0,3035	0,3062	0,3090	72
18	0,3090	0,3118	0,3145	0,3173	0,3201	0,3228	0,3256	71
19	0,3256	0,3283	0,3311	0,3338	0,3365	0,3393	0,3420	70
20	0,3420	0,3448	0,3475	0,3502	0,3529	0,3557	0,3584	69
21	0,3584	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3746	68
22	0,3746	0,3773	0,3800	0,3827	0,3854	0,3881	0,3907	67
23	0,3907	0,3934	0,3961	0,3987	0,4014	0,4041	0,4067	66
24	0,4067	0,4094	0,4120	0,4147	0,4173	0,4200	0,4226	65
25	0,4226	0,4253	0,4279	0,4305	0,4331	0,4358	0,4384	64
26	0,4384	0,4410	0,4436	0,4462	0,4488	0,4514	0,4540	63
27	0,4540	0,4566	0,4592	0,4617	0,4643	0,4669	0,4695	62
28	0,4695	0,4720	0,4746	0,4772	0,4797	0,4823	0,4848	61
29	0,4848	0,4874	0,4899	0,4924	0,4950	0,4975	0,5000	60
30	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Градусы

С и н у с ы

Градус	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
30↓	0,5000	0,5025	0,5050	0,5075	0,5100	0,5125	0,5150	59
31	0,5150	0,5175	0,5200	0,5225	0,5250	0,5275	0,5299	58
32	0,5299	0,5324	0,5348	0,5373	0,5398	0,5422	0,5446	57
33	0,5446	0,5471	0,5495	0,5519	0,5544	0,5568	0,5592	56
34	0,5592	0,5616	0,5640	0,5664	0,5688	0,5712	0,5736	55
35	0,5736	0,5760	0,5783	0,5807	0,5831	0,5854	0,5878	54
36	0,5878	0,5901	0,5925	0,5948	0,5972	0,5995	0,6018	53
37	0,6018	0,6041	0,6065	0,6088	0,6111	0,6134	0,6157	52
38	0,6157	0,6180	0,6202	0,6225	0,6248	0,6271	0,6293	51
39	0,6293	0,6316	0,6338	0,6361	0,6383	0,6406	0,6428	50
40	0,6428	0,6450	0,6472	0,6494	0,6517	0,6539	0,6561	49
41	0,6561	0,6583	0,6604	0,6626	0,6648	0,6670	0,6691	48
42	0,6691	0,6713	0,6734	0,6756	0,6777	0,6799	0,6820	47
43	0,6820	0,6841	0,6862	0,6884	0,6905	0,6926	0,6947	46
44	0,6947	0,6967	0,6988	0,7009	0,7030	0,7050	0,7071	45
45	0,7071	0,7092	0,7112	0,7133	0,7153	0,7173	0,7193	44
46	0,7193	0,7214	0,7234	0,7254	0,7274	0,7294	0,7314	43
47	0,7314	0,7333	0,7353	0,7373	0,7392	0,7412	0,7431	42
48	0,7431	0,7451	0,7470	0,7490	0,7509	0,7528	0,7547	41
49	0,7547	0,7566	0,7585	0,7604	0,7623	0,7642	0,7660	40
50	0,7660	0,7679	0,7698	0,7716	0,7735	0,7753	0,7771	39
51	0,7771	0,7790	0,7808	0,7826	0,7844	0,7862	0,7880	38
52	0,7880	0,7898	0,7916	0,7934	0,7951	0,7969	0,7986	37
53	0,7986	0,8004	0,8021	0,8039	0,8056	0,8073	0,8090	36
54	0,8090	0,8107	0,8124	0,8141	0,8158	0,8175	0,8192	35
55	0,8192	0,8208	0,8225	0,8241	0,8258	0,8274	0,8290	34
56	0,8290	0,8307	0,8323	0,8339	0,8355	0,8371	0,8387	33
57	0,8387	0,8403	0,8418	0,8434	0,8450	0,8465	0,8480	32
58	0,8480	0,8496	0,8511	0,8526	0,8542	0,8557	0,8572	31
59	0,8572	0,8587	0,8601	0,8616	0,8631	0,8646	0,8660	30
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	↑29
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Г. а н у с ы

К о с и н у с ы

Синусы

Градусы	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
60	0,8660	0,8675	0,8689	0,8704	0,8718	0,8732	0,8746	29
61	0,8746	0,8760	0,8774	0,8788	0,8802	0,8816	0,8829	28
62	0,8829	0,8843	0,8857	0,8870	0,8884	0,8897	0,8910	27
63	0,8910	0,8923	0,8936	0,8949	0,8962	0,8975	0,8988	26
64	0,8988	0,9001	0,9013	0,9026	0,9038	0,9051	0,9063	25
65	0,9063	0,9075	0,9088	0,9100	0,9112	0,9124	0,9135	24
66	0,9135	0,9147	0,9159	0,9171	0,9182	0,9194	0,9205	23
67	0,9205	0,9216	0,9228	0,9239	0,9250	0,9261	0,9272	22
68	0,9272	0,9283	0,9293	0,9304	0,9315	0,9325	0,9336	21
69	0,9336	0,9346	0,9356	0,9367	0,9377	0,9387	0,9397	20
70	0,9397	0,9407	0,9417	0,9426	0,9436	0,9446	0,9455	19
71	0,9455	0,9465	0,9474	0,9483	0,9492	0,9502	0,9511	18
72	0,9511	0,9520	0,9528	0,9537	0,9546	0,9555	0,9563	17
73	0,9563	0,9572	0,9580	0,9588	0,9596	0,9605	0,9613	16
74	0,9613	0,9621	0,9628	0,9636	0,9644	0,9652	0,9659	15
75	0,9659	0,9667	0,9674	0,9681	0,9689	0,9696	0,9703	14
76	0,9703	0,9710	0,9717	0,9724	0,9730	0,9737	0,9744	13
77	0,9744	0,9750	0,9757	0,9763	0,9769	0,9775	0,9781	12
78	0,9781	0,9787	0,9793	0,9799	0,9805	0,9811	0,9816	11
79	0,9816	0,9822	0,9827	0,9833	0,9838	0,9843	0,9848	10
80	0,9848	0,9853	0,9858	0,9863	0,9868	0,9872	0,9877	9
81	0,9877	0,9881	0,9886	0,9891	0,9894	0,9899	0,9903	8
82	0,9903	0,9907	0,9911	0,9914	0,9918	0,9922	0,9925	7
83	0,9925	0,9929	0,9932	0,9935	0,9939	0,9942	0,9945	6
84	0,9945	0,9948	0,9951	0,9954	0,9957	0,9959	0,9962	5
85	0,9962	0,9964	0,9967	0,9969	0,9971	0,9974	0,9976	4
86	0,9976	0,9978	0,9980	0,9981	0,9983	0,9985	0,9986	3
87	0,9986	0,9988	0,9989	0,9990	0,9992	0,9993	0,9994	2
88	0,9994	0,9995	0,9995	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	1
89	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Градусы

Косинусы

Тангенсы

Градусы	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
	→							
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	0,0175	89
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320	0,0349	88
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0437	0,0466	0,0495	0,0524	87
3	0,0524	0,0553	0,0582	0,0612	0,0641	0,0670	0,0699	86
4	0,0699	0,0729	0,0758	0,0787	0,0816	0,0846	0,0875	85
5	0,0875	0,0904	0,0934	0,0963	0,0992	0,1022	0,1051	84
6	0,1051	0,1080	0,1110	0,1139	0,1169	0,1198	0,1228	83
7	0,1228	0,1257	0,1287	0,1317	0,1346	0,1376	0,1405	82
8	0,1405	0,1435	0,1465	0,1495	0,1524	0,1554	0,1584	81
9	0,1584	0,1614	0,1644	0,1673	0,1703	0,1733	0,1763	80
10	0,1763	0,1793	0,1823	0,1853	0,1883	0,1914	0,1944	79
11	0,1944	0,1974	0,2004	0,2035	0,2065	0,2095	0,2126	78
12	0,2126	0,2156	0,2186	0,2217	0,2247	0,2278	0,2309	77
13	0,2309	0,2339	0,2370	0,2401	0,2432	0,2462	0,2493	76
14	0,2493	0,2524	0,2555	0,2585	0,2617	0,2648	0,2679	75
15	0,2679	0,2711	0,2742	0,2773	0,2805	0,2836	0,2867	74
16	0,2867	0,2899	0,2931	0,2962	0,2994	0,3026	0,3057	73
17	0,3057	0,3089	0,3121	0,3153	0,3185	0,3217	0,3249	72
18	0,3249	0,3281	0,3314	0,3346	0,3378	0,3411	0,3443	71
19	0,3443	0,3476	0,3508	0,3541	0,3574	0,3607	0,3640	70
20	0,3640	0,3673	0,3706	0,3739	0,3772	0,3805	0,3839	69
21	0,3839	0,3872	0,3906	0,3939	0,3973	0,4006	0,4040	68
22	0,4040	0,4074	0,4108	0,4142	0,4176	0,4210	0,4245	67
23	0,4245	0,4279	0,4314	0,4348	0,4383	0,4417	0,4452	66
24	0,4452	0,4487	0,4522	0,4557	0,4592	0,4628	0,4663	65
25	0,4663	0,4699	0,4734	0,4770	0,4806	0,4841	0,4877	64
26	0,4877	0,4913	0,4950	0,4986	0,5022	0,5059	0,5095	63
27	0,5095	0,5132	0,5169	0,5205	0,5243	0,5280	0,5317	62
28	0,5317	0,5354	0,5392	0,5430	0,5467	0,5505	0,5543	61
29	0,5543	0,5581	0,5619	0,5658	0,5696	0,5735	0,5774	60
30	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	↑ 59
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Градусы

Котангенсы

ТАБЛИЦЫ

Тангенсы

Градусы	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
	→							
30↓	0,5774	0,5812	0,5851	0,5890	0,5930	0,5969	0,6009	59
31	0,6009	0,6048	0,6088	0,6128	0,6168	0,6208	0,6249	58
32	0,6249	0,6289	0,6330	0,6371	0,6412	0,6453	0,6494	57
33	0,6494	0,6536	0,6577	0,6619	0,6661	0,6703	0,6745	56
34	0,6745	0,6787	0,6830	0,6873	0,6916	0,6959	0,7002	55
35	0,7002	0,7046	0,7089	0,7133	0,7177	0,7221	0,7265	54
36	0,7265	0,7310	0,7355	0,7400	0,7445	0,7490	0,7536	53
37	0,7536	0,7581	0,7627	0,7673	0,7720	0,7766	0,7813	52
38	0,7813	0,7860	0,7907	0,7954	0,8002	0,8050	0,8098	51
39	0,8098	0,8146	0,8195	0,8243	0,8292	0,8342	0,8391	50
40	0,8391	0,8441	0,8491	0,8541	0,8591	0,8642	0,8693	49
41	0,8693	0,8744	0,8796	0,8847	0,8899	0,8952	0,9004	48
42	0,9004	0,9057	0,9110	0,9163	0,9217	0,9271	0,9325	47
43	0,9325	0,9380	0,9435	0,9490	0,9545	0,9601	0,9657	46
44	0,9657	0,9713	0,9770	0,9827	0,9884	0,9942	1,0000	45
45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030	1,036	44
46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066	1,072	43
47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104	1,111	42
48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144	1,150	41
49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185	1,192	40
50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228	1,235	39
51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272	1,280	38
52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319	1,327	37
53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368	1,376	36
54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419	1,428	35
55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473	1,483	34
56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530	1,540	33
57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590	1,600	32
58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653	1,664	31
59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720	1,732	30
60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792	1,804	↑29
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	←	Градусы

Котангенсы

Тангенсы

Градусы	0'	10'	20'	30'	40'	50'	60'	
	→							
60↓	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792	1,804	29
61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868	1,881	28
62	1,881	1,894	1,907	1,92	1,935	1,949	1,963	27
63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035	2,050	26
64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128	2,145	25
65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229	2,246	24
66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337	2,356	23
67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455	2,475	22
68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583	2,605	21
69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723	2,747	20
70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877	2,904	19
71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047	3,078	18
72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237	3,271	17
73	3,271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450	3,487	16
74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689	3,732	15
75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962	4,011	14
76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275	4,331	13
77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638	4,705	12
78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066	5,145	11
79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576	5,671	10
80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197	6,314	9
81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968	7,115	8
82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953	8,144	7
83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255	9,514	6
84	9,514	9,788	10,078	10,385	10,712	11,059	11,430	5
85	11,430	11,826	12,251	12,706	13,197	13,727	14,301	4
86	14,301	14,924	15,605	16,350	17,169	18,075	19,081	3
87	19,081	20,206	21,470	22,904	24,542	26,432	28,636	2
88	28,636	31,242	34,368	38,188	42,964	49,104	57,290	1
89	57,290	68,750	85,940	114,59	171,89	343,77	∞	↑ 0
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'	Градусы
							←	

Котангенсы

11. Показательные, гиперболические и тригонометрические функции

Для x от 0 до 1,6 (аргумент в дюговых единицах)

ТАБЛИЦЫ

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x	x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,00
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0001	0,0100	0,0100	1,0000	0,0100	01
02	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002	0,0200	0,0200	0,9998	0,0200	02
03	1,0305	0,9704	0,0300	1,0005	0,0300	0,0300	0,9996	0,0300	03
04	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008	0,0400	0,0400	0,9992	0,0400	04
05	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013	0,0500	0,0500	0,9988	0,0500	05
06	1,0628	0,9418	0,0600	1,0018	0,0600	0,0600	0,9982	0,0601	06
07	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025	0,0699	0,0699	0,9976	0,0701	07
08	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032	0,0798	0,0799	0,9968	0,0802	08
09	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041	0,0898	0,0899	0,9960	0,0902	09
0,10	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950	0,1003	0,10
11	1,1163	0,8958	0,1102	1,0061	0,1096	0,1098	0,9940	0,1104	11
12	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072	0,1194	0,1197	0,9928	0,1206	12
13	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085	0,1293	0,1296	0,9916	0,1307	13
14	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098	0,1391	0,1395	0,9902	0,1409	14
15	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113	0,1489	0,1494	0,9888	0,1511	15
16	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128	0,1586	0,1593	0,9872	0,1614	16
17	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145	0,1684	0,1692	0,9856	0,1717	17
18	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162	0,1781	0,1790	0,9838	0,1820	18
19	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181	0,1877	0,1889	0,9820	0,1923	19
0,20	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801	0,2027	0,20
21	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221	0,2070	0,2085	0,9780	0,2111	21
22	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243	0,2165	0,2185	0,9759	0,2216	22
23	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266	0,2260	0,2280	0,9737	0,2341	23
24	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289	0,2355	0,2377	0,9713	0,2447	24

25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0514	0,2449	0,2474	0,9689	0,2553	25
26	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340	0,2543	0,2571	0,9664	0,2660	26
27	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367	0,2636	0,2667	0,9638	0,2768	27
28	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395	0,2729	0,2764	0,9611	0,2876	28
29	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423	0,2821	0,2860	0,9582	0,2984	29
0,30	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553	0,3093	0,30
31	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484	0,3004	0,3051	0,9523	0,3203	31
32	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516	0,3095	0,3146	0,9492	0,3314	32
33	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549	0,3185	0,3240	0,9460	0,3425	33
34	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584	0,3275	0,3335	0,9428	0,3537	34
35	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619	0,3364	0,3429	0,9394	0,3650	35
36	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655	0,3452	0,3523	0,9359	0,3764	36
37	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692	0,3540	0,3616	0,9323	0,3879	37
38	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731	0,3627	0,3709	0,9287	0,3994	38
39	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770	0,3714	0,3802	0,9249	0,4111	39
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211	0,4228	0,40

Кратные значения π и $\frac{\pi}{2}$ для вычисления тригонометрических функций при $x > 1,6$:

Пример:

$$\begin{aligned}\sin 7,5 &= \sin \left(5 \cdot \frac{\pi}{2} - 0,35398 \right) = \\ &= \cos 0,35398 = 0,9380 \\ &\text{(линейная интерполяция!)}\end{aligned}$$

	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

x	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\sin x$	$\cos x$	$\lg x$	x
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,5799	0,3894	0,9211	0,4228	0,40
41	1,5068	0,6637	0,4216	1,0852	0,3885	0,3986	0,9171	0,4346	41
42	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895	0,3969	0,4078	0,9131	0,4466	42
43	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939	0,4053	0,4169	0,9090	0,4586	43
44	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984	0,4136	0,4259	0,9048	0,4708	44
45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831	45
46	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077	0,4301	0,4439	0,8961	0,4954	46
47	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125	0,4382	0,4529	0,8916	0,5070	47
48	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174	0,4462	0,4618	0,8870	0,5206	48
49	1,6323	0,6126	0,5098	1,1225	0,4542	0,4706	0,8823	0,5334	49
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776	0,5463	0,50
51	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329	0,4699	0,4882	0,8727	0,5594	51
52	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383	0,4777	0,4969	0,8678	0,5726	52
53	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438	0,4854	0,5055	0,8628	0,5859	53
54	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494	0,4930	0,5141	0,8577	0,5994	54
55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131	55
56	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609	0,5080	0,5312	0,8473	0,6269	56
57	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669	0,5154	0,5396	0,8419	0,6410	57
58	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730	0,5227	0,5480	0,8365	0,6552	58
59	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792	0,5299	0,5564	0,8309	0,6696	59
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253	0,6841	0,60
61	1,8404	0,5434	0,6485	1,1919	0,5441	0,5729	0,8196	0,6989	61
62	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984	0,5511	0,5810	0,8139	0,7139	62
63	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051	0,5581	0,5891	0,8080	0,7291	63
64	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119	0,5649	0,5972	0,8021	0,7445	64

66	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258	0,5784	0,6131	0,7981	0,7662	65
67	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330	0,5850	0,6210	0,7900	0,7761	66
68	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402	0,5915	0,6288	0,7838	0,7923	67
69	1,9937	0,5016	0,7461	1,2476	0,5980	0,6365	0,7776	0,8087	68
0,70	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7712	0,8253	69
71	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628	0,6107	0,6518	0,7648	0,8423	0,70
72	2,0544	0,4868	0,7838	1,2706	0,6169	0,6594	0,7584	0,8595	71
73	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785	0,6231	0,6669	0,7518	0,8771	72
74	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865	0,6291	0,6743	0,7452	0,8949	73
75	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947	0,6351	0,6816	0,7385	0,9131	74
76	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030	0,6411	0,6889	0,7317	0,9316	75
77	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114	0,6469	0,6961	0,7248	0,9505	76
78	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199	0,6527	0,7033	0,7179	0,9697	77
79	2,2034	0,4538	0,8748	1,3286	0,6584	0,7104	0,7109	0,9893	78
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,7038	1,0092	79
							0,6967	1,0296	0,80

Кратные значения π и $\frac{\pi}{2}$ для вычисления тригонометрических функций при $x > 1,6$:

n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Пример:

$$\begin{aligned} \sin 29 &= \sin (9\pi + 0,72567) = \\ &= -\sin 0,72567 = -0,6637 \end{aligned}$$

(линейная интерполяция)

x	e^x	e^{-x}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296	0,80
81	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464	0,6696	0,7243	0,6895	1,0505	81
82	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555	0,6751	0,7311	0,6822	1,0717	82
83	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647	0,6805	0,7379	0,6749	1,0934	83
84	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740	0,6858	0,7446	0,6675	1,1156	84
85	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835	0,6911	0,7513	0,6600	1,1383	85
86	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932	0,6963	0,7578	0,6524	1,1616	86
87	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029	0,7014	0,7643	0,6448	1,1853	87
88	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128	0,7064	0,7707	0,6372	1,2097	88
89	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229	0,7114	0,7771	0,6294	1,2346	89
0,90	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216	1,2602	0,90
91	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434	0,7211	0,7895	0,6137	1,2864	91
92	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539	0,7259	0,7956	0,6058	1,3133	92
93	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645	0,7306	0,8016	0,5978	1,3409	93
94	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753	0,7352	0,8076	0,5898	1,3692	94
95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398	0,8134	0,5817	1,3984	95
96	2,6117	0,3829	1,1144	1,4973	0,7443	0,8192	0,5735	1,4284	96
97	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085	0,7487	0,8249	0,5653	1,4592	97
98	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199	0,7531	0,8305	0,5570	1,4910	98
99	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314	0,7574	0,8360	0,5487	1,5237	99
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403	1,5574	1,00
01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,7658	0,8468	0,5319	1,5922	01
02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,7699	0,8521	0,5234	1,6281	02
03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,7739	0,8573	0,5148	1,6652	03
04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,7779	0,8624	0,5062	1,7036	04

05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,7818	0,8674	0,4976	1,7433	05
06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,7857	0,8724	0,4889	1,7844	06
07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,7895	0,8772	0,4801	1,8270	07
08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,7932	0,8820	0,4713	1,8712	08
09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,7969	0,8866	0,4625	1,9171	09
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648	1,10
11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8041	0,8957	0,4447	2,0143	11
12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,8076	0,9001	0,4357	2,0660	12
13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,8110	0,9044	0,4267	2,1198	13
14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,8144	0,9086	0,4176	2,1759	14
15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,8178	0,9128	0,4085	2,2345	15
16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,8210	0,9168	0,3993	2,2958	16
17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,8243	0,9208	0,3902	2,3600	17
18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,8275	0,9246	0,3809	2,4273	18
19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,8306	0,9284	0,3717	2,4979	19
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624	2,5722	1,20

Кратные значения π и $\frac{\pi}{2}$ для вычисления тригонометрических функций при $x > 1,6$:

Пример:

$$\begin{aligned} \sin 10,6 &= \sin (3\pi + 1,17522) = \\ &= -\sin 1,17522 = -0,9227 \\ &\text{(линейная интерполяция)} \end{aligned}$$

n	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	π
1	1,57080	3,14159	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	15,70796	31,41593

ТАБЛИЦЫ

x	e^x	e^{-x}	$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	$\text{th } x$	$\sin x$	$\cos x$	$\text{tg } x$	x
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624	2,5722	1,20
21	3,3535	0,2982	1,5276	1,8258	0,8367	0,9356	0,3530	2,6503	21
22	3,3872	0,2952	1,5460	1,8412	0,8397	0,9391	0,3436	2,7328	22
23	3,4212	0,2923	1,5645	1,8568	0,8426	0,9425	0,3342	2,8198	23
24	3,4556	0,2894	1,5831	1,8725	0,8455	0,9458	0,3248	2,9119	24
25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096	25
26	3,5254	0,2837	1,6209	1,9045	0,8511	0,9521	0,3058	3,1133	26
27	3,5609	0,2808	1,6400	1,9208	0,8538	0,9551	0,2963	3,2236	27
28	3,5966	0,2780	1,6593	1,9373	0,8565	0,9580	0,2867	3,3413	28
29	3,6328	0,2753	1,6788	1,9540	0,8591	0,9608	0,2771	3,4672	29
1,30	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675	3,6021	1,30
31	3,7062	0,2698	1,7182	1,9880	0,8643	0,9662	0,2579	3,7471	31
32	3,7434	0,2671	1,7381	2,0053	0,8668	0,9687	0,2482	3,9033	32
33	3,7810	0,2645	1,7583	2,0228	0,8692	0,9711	0,2385	4,0723	33
34	3,8190	0,2618	1,7786	2,0404	0,8717	0,9735	0,2288	4,2556	34
35	3,8574	0,2592	1,7991	2,0583	0,8741	0,9757	0,2190	4,4552	35
36	3,8962	0,2567	1,8198	2,0764	0,8764	0,9779	0,2092	4,6734	36
37	3,9354	0,2541	1,8406	2,0947	0,8787	0,9799	0,1994	4,9131	37
38	3,9749	0,2516	1,8617	2,1132	0,8810	0,9819	0,1896	5,1774	38
39	4,0149	0,2491	1,8829	2,1320	0,8832	0,9837	0,1798	5,4707	39
1,40	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700	5,7979	1,40
41	4,0960	0,2441	1,9259	2,1700	0,8875	0,9871	0,1601	6,1654	41
42	4,1371	0,2417	1,9477	2,1894	0,8896	0,9887	0,1502	6,5811	42
43	4,1787	0,2393	1,9697	2,2090	0,8917	0,9901	0,1403	7,0555	43
44	4,2207	0,2369	1,9919	2,2288	0,8937	0,9915	0,1304	7,6018	44

45	4,2631	0,2346	2,0143	2,2488	0,8957	0,9927	0,1205	8,2381	45
46	4,3060	0,2322	2,0369	2,2601	0,8977	0,9939	0,1106	8,9886	46
47	4,3492	0,2299	2,0597	2,2896	0,8996	0,9949	0,1006	9,8874	47
48	4,3929	0,2276	2,0827	2,3103	0,9015	0,9959	0,0907	10,983	48
49	4,4371	0,2254	2,1059	2,3312	0,9033	0,9967	0,0807	12,350	49
1,50	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707	14,101	1,50
51	4,5267	0,2209	2,1529	2,3738	0,9069	0,9982	0,0608	16,428	51
52	4,5722	0,2187	2,1768	2,3955	0,9087	0,9987	0,0508	19,670	52
53	4,6182	0,2165	2,2008	2,4174	0,9104	0,9992	0,0408	24,498	53
54	4,6646	0,2144	2,2251	2,4395	0,9121	0,9995	0,0308	32,461	54
55	4,7115	0,2122	2,2496	2,4619	0,9138	0,9998	0,0208	48,078	55
56	4,7588	0,2101	2,2743	2,4845	0,9154	0,9999	0,0108	92,620	56
57	4,8066	0,2080	2,2993	2,5073	0,9170	1,0000	+ 0,0008	1255,8	57
58	4,8550	0,2060	2,3245	2,5305	0,9186	1,0000	- 0,0092	- 103,65	58
59	4,9037	0,2039	2,3499	2,5538	0,9201	0,9998	- 0,0192	- 52,067	59
1,60	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	- 0,0292	- 34,233	1,60

Для $x > 1,6$ значения e^x , e^{-x} , $\text{sh } x$, $\text{ch } x$ и $\text{th } x$ находятся из таблицы 12 (стр. 72—75)

Кратные значения π и $\frac{\pi}{2}$ для вычисления тригонометрических функций при $x > 1,6$:

n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$	n	$n \cdot \frac{\pi}{2}$	$n \cdot \pi$
1	1,57080	3,14159	6	9,42478	18,84956
2	3,14159	6,28319	7	10,99557	21,99115
3	4,71239	9,42478	8	12,56637	25,13274
4	6,28319	12,56637	9	14,13717	28,27433
5	7,85398	15,70796	10	15,70796	31,41593

Для $x > 1,6$ значения тригонометрических функций находятся по формулам приведения (см. стр. 206). Примеры см. на стр. 65, 67 и 69.

12. Показательные функции (для x от 1,6 до 10,0)

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,60	4,9530	0,2019	1,90	6,6859	0,1496
1,61	5,0028	0,1999	1,91	6,7531	0,1481
1,62	5,0531	0,1979	1,92	6,8210	0,1466
1,63	5,1039	0,1959	1,93	6,8895	0,1451
1,64	5,1552	0,1940	1,94	6,9588	0,1437
1,65	5,2070	0,1920	1,95	7,0287	0,1423
1,66	5,2593	0,1901	1,96	7,0993	0,1409
1,67	5,3122	0,1882	1,97	7,1707	0,1395
1,68	5,3656	0,1864	1,98	7,2427	0,1381
1,69	5,4195	0,1845	1,99	7,3155	0,1367
1,70	5,4739	0,1827	2,00	7,3891	0,1353
1,71	5,5290	0,1809	2,01	7,4633	0,1340
1,72	5,5845	0,1791	2,02	7,5383	0,1327
1,73	5,6407	0,1773	2,03	7,6141	0,1313
1,74	5,6973	0,1755	2,04	7,6906	0,1300
1,75	5,7546	0,1738	2,05	7,7679	0,1287
1,76	5,8124	0,1720	2,06	7,8460	0,1275
1,77	5,8709	0,1703	2,07	7,9248	0,1262
1,78	5,9299	0,1686	2,08	8,0045	0,1249
1,79	5,9895	0,1670	2,09	8,0849	0,1237
1,80	6,0496	0,1653	2,10	8,1662	0,1225
1,81	6,1104	0,1637	2,11	8,2482	0,1212
1,82	6,1719	0,1620	2,12	8,3311	0,1200
1,83	6,2339	0,1604	2,13	8,4149	0,1188
1,84	6,2965	0,1588	2,14	8,4994	0,1177
1,85	6,3598	0,1572	2,15	8,5849	0,1165
1,86	6,4237	0,1557	2,16	8,6711	0,1153
1,87	6,4883	0,1541	2,17	8,7583	0,1142
1,88	6,5535	0,1526	2,18	8,8463	0,1130
1,89	6,6194	0,1511	2,19	8,9352	0,1119
1,90	6,6859	0,1496	2,20	9,0250	0,1108

Для $x > 1,6$ гиперболич. функции вычисляются по формулам

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2,20	9,0250	0,1108	2,60	13,464	0,07427
2,21	9,1157	0,1097	2,61	13,599	0,07353
2,22	9,2073	0,1086	2,62	13,736	0,07280
2,23	9,2999	0,1075	2,63	13,874	0,07208
2,24	9,3933	0,1065	2,64	14,013	0,07136
2,25	9,4877	0,1054	2,65	14,154	0,07065
2,26	9,5831	0,1044	2,66	14,296	0,06995
2,27	9,6794	0,1033	2,67	14,440	0,06925
2,28	9,7767	0,1023	2,68	14,585	0,06856
2,29	9,8749	0,1013	2,69	14,732	0,06788
2,30	9,9742	0,10026	2,70	14,880	0,06721
2,31	10,074	0,09926	2,71	15,029	0,06654
2,32	10,176	0,09827	2,72	15,180	0,06587
2,33	10,278	0,09730	2,73	15,333	0,06522
2,34	10,381	0,09623	2,74	15,487	0,06457
2,35	10,486	0,09537	2,75	15,643	0,06393
2,36	10,591	0,09442	2,76	15,800	0,06329
2,37	10,697	0,09348	2,77	15,959	0,06266
2,38	10,805	0,09255	2,78	16,119	0,06204
2,39	10,913	0,09163	2,79	16,281	0,06142
2,40	11,023	0,09072	2,80	16,445	0,06081
2,41	11,134	0,08982	2,81	16,610	0,06020
2,42	11,246	0,08892	2,82	16,777	0,05961
2,43	11,359	0,08804	2,83	16,945	0,05901
2,44	11,473	0,08716	2,84	17,116	0,05843
2,45	11,588	0,08629	2,85	17,288	0,05784
2,46	11,705	0,08543	2,86	17,462	0,05727
2,47	11,822	0,08458	2,87	17,637	0,05670
2,48	11,941	0,08374	2,88	17,814	0,05613
2,49	12,061	0,08291	2,89	17,993	0,05558
2,50	12,182	0,08208	2,90	18,174	0,05502
2,51	12,305	0,08127	2,91	18,357	0,05448
2,52	12,429	0,08046	2,92	18,541	0,05393
2,53	12,554	0,07966	2,93	18,728	0,05340
2,54	12,680	0,07887	2,94	18,916	0,05287
2,55	12,807	0,07808	2,95	19,106	0,05234
2,56	12,936	0,07730	2,96	19,298	0,05182
2,57	13,066	0,07654	2,97	19,492	0,05130
2,58	13,197	0,07577	2,98	19,688	0,05079
2,59	13,330	0,07502	2,99	19,886	0,05029
2,60	13,464	0,07427	3,00	20,086	0,04979

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
3,00	20,086	0,04979	3,40	29,964	0,03337
3,01	20,287	0,04929	3,41	30,265	0,03304
3,02	20,491	0,04880	3,42	30,569	0,03271
3,03	20,697	0,04832	3,43	30,877	0,03239
3,04	20,905	0,04783	3,44	31,187	0,03206
3,05	21,115	0,04736	3,45	31,500	0,03175
3,06	21,328	0,04689	3,46	31,817	0,03143
3,07	21,542	0,04642	3,47	32,137	0,03112
3,08	21,758	0,04596	3,48	32,460	0,03081
3,09	21,977	0,04550	3,49	32,786	0,03050
3,10	22,198	0,04505	3,50	33,115	0,03020
3,11	22,421	0,04460	3,51	33,448	0,02990
3,12	22,646	0,04416	3,52	33,784	0,02960
3,13	22,874	0,04372	3,53	34,124	0,02930
3,14	23,104	0,04328	3,54	34,467	0,02901
3,15	23,336	0,04285	3,55	34,813	0,02872
3,16	23,571	0,04243	3,56	35,163	0,02844
3,17	23,807	0,04200	3,57	35,517	0,02816
3,18	24,047	0,04159	3,58	35,874	0,02788
3,19	24,288	0,04117	3,59	36,234	0,02760
3,20	24,533	0,04076	3,60	36,598	0,02732
3,21	24,779	0,04036	3,61	36,966	0,02705
3,22	25,028	0,03996	3,62	37,338	0,02678
3,23	25,280	0,03956	3,63	37,713	0,02652
3,24	25,534	0,03916	3,64	38,092	0,02625
3,25	25,790	0,03877	3,65	38,475	0,02599
3,26	26,050	0,03839	3,66	38,861	0,02573
3,27	26,311	0,03801	3,67	39,252	0,02548
3,28	26,576	0,03763	3,68	39,646	0,02522
3,29	26,843	0,03725	3,69	40,045	0,02497
3,30	27,113	0,03688	3,70	40,447	0,02472
3,31	27,385	0,03652	3,71	40,854	0,02448
3,32	27,660	0,03615	3,72	41,264	0,02423
3,33	27,938	0,03579	3,73	41,679	0,02399
3,34	28,219	0,03544	3,74	42,098	0,02375
3,35	28,503	0,03508	3,75	42,521	0,02352
3,36	28,789	0,03474	3,76	42,948	0,02328
3,37	29,079	0,03439	3,77	43,380	0,02305
3,38	29,371	0,03405	3,78	43,816	0,02282
3,39	29,666	0,03371	3,79	44,256	0,02260
3,40	29,964	0,03337	3,80	44,701	0,02237

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
3,80	44,701	0,02237	6,0	403,43	0,002479
3,81	45,150	0,02215	6,1	445,86	0,002243
3,82	45,604	0,02193	6,2	492,75	0,002029
3,83	46,063	0,02171	6,3	544,57	0,001836
3,84	46,525	0,02149	6,4	601,85	0,001662
3,85	46,993	0,02128	6,5	665,14	0,001503
3,86	47,465	0,02107	6,6	735,10	0,001360
3,87	47,942	0,02086	6,7	812,41	0,001231
3,88	48,424	0,02065	6,8	897,85	0,001114
3,89	48,911	0,02045	6,9	992,27	0,001008
3,90	49,402	0,02024	7,0	1096,6	0,000912
3,91	49,899	0,02004	7,1	1212,0	0,000825
3,92	50,400	0,01984	7,2	1339,4	0,000747
3,93	50,907	0,01964	7,3	1480,5	0,000676
3,94	51,419	0,01945	7,4	1636,0	0,000611
3,95	51,935	0,01925	7,5	1808,0	0,000553
3,96	52,457	0,01906	7,6	1998,2	0,000500
3,97	52,985	0,01887	7,7	2208,3	0,000453
3,98	53,517	0,01869	7,8	2440,6	0,000410
3,99	54,055	0,01850	7,9	2697,3	0,000371
4,0	54,598	0,01832	8,0	2981,0	0,000335
4,1	60,340	0,01657	8,1	3294,5	0,000304
4,2	66,686	0,01500	8,2	3641,0	0,000275
4,3	73,700	0,01357	8,3	4023,9	0,000249
4,4	81,451	0,01228	8,4	4447,1	0,000225
4,5	90,017	0,01111	8,5	4914,8	0,000203
4,6	99,484	0,01005	8,6	5431,7	0,000184
4,7	109,95	0,00910	8,7	6002,9	0,000167
4,8	121,51	0,00823	8,8	6634,2	0,000151
4,9	134,29	0,00745	8,9	7332,0	0,000136
5,0	148,41	0,00674	9,0	8103,1	0,000123
5,1	164,02	0,00610	9,1	8955,3	0,000112
5,2	181,27	0,00552	9,2	9897,1	0,000101
5,3	200,34	0,00499	9,3	10938	0,000091
5,4	221,41	0,00452	9,4	12088	0,000083
5,5	244,69	0,00409	9,5	13360	0,000075
5,6	270,43	0,00370	9,6	14765	0,000068
5,7	298,87	0,00335	9,7	16318	0,000061
5,8	330,30	0,00303	9,8	18034	0,000055
5,9	365,04	0,00274	9,9	19930	0,000050
6,0	403,43	0,00248	10,0	22026	0,000045

13. Натуральные логарифмы *

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—∞	0,0000	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3,8286	3,8501	3,8712	3,8918
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	4,2047	4,2195	4,2341
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	4,3694
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951
10	4,6052	4,6151	4,6250	4,6347	4,6444	4,6540	4,6634	4,6728	4,6821	4,6913
11	4,7005	4,7095	4,7185	4,7274	4,7362	4,7449	4,7536	4,7622	4,7707	4,7791
12	4,7875	4,7958	4,8040	4,8122	4,8203	4,8283	4,8363	4,8442	4,8520	4,8598
13	4,8675	4,8752	4,8828	4,8903	4,8978	4,9053	4,9127	4,9200	4,9273	4,9345
14	4,9416	4,9488	4,9558	4,9628	4,9698	4,9767	4,9836	4,9904	4,9972	5,0039
15	5,0106	5,0173	5,0239	5,0304	5,0370	5,0434	5,0499	5,0562	5,0626	5,0689
16	5,0752	5,0814	5,0876	5,0938	5,0999	5,1059	5,1120	5,1180	5,1240	5,1299
17	5,1358	5,1417	5,1475	5,1533	5,1591	5,1648	5,1705	5,1761	5,1818	5,1874
18	5,1930	5,1985	5,2040	5,2095	5,2149	5,2204	5,2257	5,2311	5,2364	5,2417
19	5,2470	5,2523	5,2575	5,2627	5,2679	5,2730	5,2781	5,2832	5,2883	5,2933
20	5,2983	5,3033	5,3083	5,3132	5,3181	5,3230	5,3279	5,3327	5,3375	5,3423
21	5,3471	5,3519	5,3566	5,3613	5,3660	5,3706	5,3753	5,3799	5,3845	5,3891
22	5,3936	5,3982	5,4027	5,4072	5,4116	5,4161	5,4205	5,4250	5,4293	5,4337
23	5,4381	5,4424	5,4467	5,4510	5,4553	5,4596	5,4638	5,4681	5,4723	5,4765
24	5,4806	5,4848	5,4889	5,4931	5,4972	5,5013	5,5053	5,5094	5,5134	5,5175

25	5,5215	5,5255	5,5294	5,5334	5,5373	5,5413	5,5452	5,5491	5,5530	5,5568
26	5,5607	5,5645	5,5683	5,5722	5,5759	5,5797	5,5835	5,5872	5,5910	5,5947
27	5,5984	5,6021	5,6058	5,6095	5,6131	5,6168	5,6204	5,6240	5,6276	5,6312
28	5,6348	5,6384	5,6419	5,6454	5,6490	5,6525	5,6560	5,6595	5,6630	5,6664
29	5,6699	5,6733	5,6768	5,6802	5,6836	5,6870	5,6904	5,6937	5,6971	5,7004
30	5,7038	5,7071	5,7104	5,7137	5,7170	5,7203	5,7236	5,7268	5,7301	5,7333
31	5,7366	5,7398	5,7430	5,7462	5,7494	5,7526	5,7557	5,7589	5,7621	5,7652
32	5,7683	5,7714	5,7746	5,7777	5,7807	5,7838	5,7869	5,7900	5,7930	5,7961
33	5,7991	5,8021	5,8051	5,8081	5,8111	5,8141	5,8171	5,8201	5,8230	5,8260
34	5,8289	5,8319	5,8348	5,8377	5,8406	5,8435	5,8464	5,8493	5,8522	5,8551
35	5,8579	5,8608	5,8636	5,8665	5,8693	5,8721	5,8749	5,8777	5,8805	5,8833
36	5,8861	5,8889	5,8916	5,8944	5,8972	5,8999	5,9026	5,9054	5,9081	5,9108
37	5,9135	5,9162	5,9189	5,9216	5,9243	5,9269	5,9296	5,9322	5,9349	5,9375
38	5,9402	5,9428	5,9454	5,9480	5,9506	5,9532	5,9558	5,9584	5,9610	5,9636
39	5,9661	5,9687	5,9713	5,9738	5,9764	5,9789	5,9814	5,9839	5,9865	5,9890
40	5,9915	5,9940	5,9965	5,9989	6,0014	6,0039	6,0064	6,0088	6,0113	6,0137
41	6,0162	6,0186	6,0210	6,0234	6,0259	6,0283	6,0307	6,0331	6,0355	6,0379
42	6,0403	6,0426	6,0450	6,0474	6,0497	6,0521	6,0544	6,0568	6,0591	6,0615
43	6,0638	6,0661	6,0684	6,0707	6,0730	6,0753	6,0776	6,0799	6,0822	6,0845
44	6,0868	6,0890	6,0913	6,0936	6,0958	6,0981	6,1003	6,1026	6,1048	6,1070
45	6,1092	6,1115	6,1137	6,1159	6,1181	6,1203	6,1225	6,1247	6,1269	6,1291
46	6,1312	6,1334	6,1356	6,1377	6,1399	6,1420	6,1442	6,1463	6,1485	6,1506
47	6,1527	6,1549	6,1570	6,1591	6,1612	6,1633	6,1654	6,1675	6,1696	6,1717
48	6,1738	6,1759	6,1779	6,1800	6,1821	6,1841	6,1862	6,1883	6,1903	6,1924
49	6,1944	6,1964	6,1985	6,2005	6,2025	6,2046	6,2066	6,2086	6,2106	6,2126

$\ln 10 = 2,30258509$, $\ln 10^2 = 4,6052$, $\ln 10^3 = 6,9078$.

Пример: $\ln 43500 = \ln 435 + \ln 10^4 = 6,0753 + 4,6052 = 10,6805$.

$\ln 10^4 = 9,2103$, $\ln 10^5 = 11,5129$, $\ln 10^6 = 13,8155$.

Пример: $\ln 0,435 = \ln 4,35 - \ln 10 = 6,0753 - 6,9098 = -0,8345$.

* Объяснения к таблице см. на стр. 95.

13. *Натуральные логарифмы ** Продолжение

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6,2146	6,2166	6,2186	6,2206	6,2226	6,2246	6,2265	6,2285	6,2305	6,2324
51	6,2344	6,2364	6,2383	6,2403	6,2422	6,2442	6,2461	6,2480	6,2500	6,2519
52	6,2538	6,2558	6,2577	6,2596	6,2615	6,2634	6,2653	6,2672	6,2691	6,2710
53	6,2729	6,2748	6,2766	6,2785	6,2804	6,2823	6,2841	6,2860	6,2879	6,2897
54	6,2916	6,2934	6,2953	6,2971	6,2989	6,3008	6,3026	6,3044	6,3063	6,3081
55	6,3099	6,3117	6,3135	6,3154	6,3172	6,3190	6,3208	6,3226	6,3244	6,3261
56	6,3279	6,3297	6,3315	6,3333	6,3351	6,3368	6,3386	6,3404	6,3421	6,3439
57	6,3456	6,3474	6,3491	6,3509	6,3526	6,3544	6,3561	6,3578	6,3596	6,3613
58	6,3630	6,3648	6,3665	6,3682	6,3699	6,3716	6,3733	6,3750	6,3767	6,3784
59	6,3801	6,3818	6,3835	6,3852	6,3869	6,3886	6,3902	6,3919	6,3936	6,3953
60	6,3969	6,3986	6,4003	6,4019	6,4036	6,4052	6,4069	6,4085	6,4102	6,4118
61	6,4135	6,4151	6,4167	6,4184	6,4200	6,4216	6,4232	6,4249	6,4265	6,4281
62	6,4297	6,4313	6,4329	6,4345	6,4362	6,4378	6,4394	6,4409	6,4425	6,4441
63	6,4457	6,4473	6,4489	6,4505	6,4520	6,4536	6,4552	6,4568	6,4583	6,4599
64	6,4615	6,4630	6,4646	6,4661	6,4677	6,4693	6,4708	6,4723	6,4739	6,4754
65	6,4770	6,4785	6,4800	6,4816	6,4831	6,4846	6,4862	6,4877	6,4892	6,4907
66	6,4922	6,4938	6,4953	6,4968	6,4983	6,4998	6,5013	6,5028	6,5043	6,5058
67	6,5073	6,5088	6,5103	6,5117	6,5132	6,5147	6,5162	6,5177	6,5191	6,5206
68	6,5221	6,5236	6,5250	6,5265	6,5280	6,5294	6,5309	6,5323	6,5338	6,5352
69	6,5367	6,5381	6,5396	6,5410	6,5425	6,5439	6,5453	6,5468	6,5482	6,5497
70	6,5511	6,5525	6,5539	6,5554	6,5568	6,5582	6,5596	6,5610	6,5624	6,5639
71	6,5653	6,5667	6,5681	6,5695	6,5709	6,5723	6,5737	6,5751	6,5765	6,5779
72	6,5793	6,5806	6,5820	6,5834	6,5848	6,5862	6,5876	6,5889	6,5903	6,5917
73	6,5930	6,5944	6,5958	6,5971	6,5985	6,5999	6,6012	6,6026	6,6039	6,6053
74	6,6067	6,6080	6,6093	6,6107	6,6120	6,6134	6,6147	6,6161	6,6174	6,6187

75	6,6201	6,6214	6,6227	6,6241	6,6254	6,6267	6,6280	6,6294	6,6307	6,6320
76	6,6333	6,6346	6,6359	6,6373	6,6386	6,6399	6,6412	6,6425	6,6438	6,6451
77	6,6464	6,6477	6,6490	6,6503	6,6516	6,6529	6,6542	6,6554	6,6567	6,6580
78	6,6593	6,6606	6,6619	6,6631	6,6644	6,6657	6,6670	6,6682	6,6695	6,6708
79	6,6720	6,6733	6,6746	6,6758	6,6771	6,6783	6,6796	6,6809	6,6821	6,6834
80	6,6846	6,6859	6,6871	6,6884	6,6896	6,6908	6,6921	6,6933	6,6946	6,6958
81	6,6970	6,6983	6,6995	6,7007	6,7020	6,7032	6,7044	6,7056	6,7069	6,7081
82	6,7093	6,7105	6,7117	6,7130	6,7142	6,7154	6,7166	6,7178	6,7190	6,7202
83	6,7214	6,7226	6,7238	6,7250	6,7262	6,7274	6,7286	6,7298	6,7310	6,7322
84	6,7334	6,7346	6,7358	6,7370	6,7382	6,7393	6,7405	6,7417	6,7429	6,7441
85	6,7452	6,7464	6,7476	6,7488	6,7499	6,7511	6,7523	6,7534	6,7546	6,7558
86	6,7569	6,7581	6,7593	6,7604	6,7616	6,7627	6,7639	6,7650	6,7662	6,7673
87	6,7685	6,7696	6,7708	6,7719	6,7731	6,7742	6,7754	6,7765	6,7776	6,7788
88	6,7799	6,7811	6,7822	6,7833	6,7845	6,7856	6,7867	6,7878	6,7890	6,7901
89	6,7912	6,7923	6,7935	6,7946	6,7957	6,7968	6,7979	6,7991	6,8002	6,8013
90	6,8024	6,8035	6,8046	6,8057	6,8068	6,8079	6,8090	6,8101	6,8112	6,8123
91	6,8134	6,8145	6,8156	6,8167	6,8178	6,8189	6,8200	6,8211	6,8222	6,8233
92	6,8244	6,8255	6,8265	6,8276	6,8287	6,8298	6,8309	6,8320	6,8330	6,8341
93	6,8352	6,8363	6,8373	6,8384	6,8395	6,8405	6,8416	6,8427	6,8437	6,8448
94	6,8459	6,8469	6,8480	6,8491	6,8501	6,8512	6,8522	6,8533	6,8544	6,8554
95	6,8565	6,8575	6,8586	6,8596	6,8607	6,8617	6,8628	6,8638	6,8648	6,8659
96	6,8669	6,8680	6,8690	6,8701	6,8711	6,8721	6,8732	6,8742	6,8752	6,8763
97	6,8773	6,8783	6,8794	6,8804	6,8814	6,8824	6,8835	6,8845	6,8855	6,8865
98	6,8876	6,8886	6,8896	6,8906	6,8916	6,8926	6,8937	6,8947	6,8957	6,8967
99	6,8977	6,8987	6,8997	6,9007	6,9017	6,9027	6,9037	6,9048	6,9058	6,9068

$\lg 10 = 2,30258509$, $\ln 10^2 = 4,6052$, $\lg 10^3 = 6,9078$.

Пример: $\ln 7620 = \ln 762 + \ln 10 = 6,6359 + 2,3029 = 8,9388$.

$\ln 10^4 = 9,2103$, $\ln 10^5 = 11,5129$, $\ln 10^6 = 13,8155$.

Пример: $\ln 0,0762 = \ln 762 - \ln 10^4 = 6,6359 - 9,2103 = -2,5744$.

* Объяснения к таблице см. на стр. 95.

14. Длина окружности диаметра d^*

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	3,142	3,173	3,204	3,236	3,267	3,299	3,330	3,362	3,393	3,424
1,1	3,456	3,487	3,519	3,550	3,581	3,613	3,644	3,676	3,707	3,738
1,2	3,770	3,801	3,833	3,864	3,896	3,927	3,958	3,990	4,021	4,053
1,3	4,084	4,115	4,147	4,178	4,210	4,241	4,273	4,304	4,335	4,367
1,4	4,398	4,430	4,461	4,492	4,524	4,555	4,587	4,618	4,650	4,681
1,5	4,712	4,744	4,775	4,807	4,838	4,869	4,901	4,932	4,964	4,995
1,6	5,027	5,058	5,089	5,121	5,152	5,184	5,215	5,246	5,278	5,309
1,7	5,341	5,372	5,404	5,435	5,466	5,498	5,529	5,561	5,592	5,623
1,8	5,655	5,686	5,718	5,749	5,781	5,812	5,843	5,875	5,906	5,938
1,9	5,969	6,000	6,032	6,063	6,095	6,126	6,158	6,189	6,220	6,252
2,0	6,283	6,315	6,346	6,377	6,409	6,440	6,472	6,503	6,535	6,566
2,1	6,597	6,629	6,660	6,692	6,723	6,754	6,786	6,817	6,849	6,880
2,2	6,912	6,943	6,974	7,006	7,037	7,069	7,100	7,131	7,163	7,194
2,3	7,226	7,257	7,288	7,320	7,351	7,383	7,414	7,446	7,477	7,508
2,4	7,540	7,571	7,603	7,634	7,665	7,697	7,728	7,760	7,791	7,823
2,5	7,854	7,885	7,917	7,948	7,980	8,011	8,042	8,074	8,105	8,137
2,6	8,168	8,200	8,231	8,262	8,294	8,325	8,357	8,388	8,419	8,451
2,7	8,482	8,514	8,545	8,577	8,608	8,639	8,671	8,702	8,734	8,765
2,8	8,796	8,828	8,859	8,891	8,922	8,954	8,985	9,016	9,048	9,079
2,9	9,112	9,143	9,173	9,205	9,236	9,268	9,299	9,331	9,362	9,393

3,0	9,425	9,456	9,488	9,519	9,550	9,582	9,613	9,645	9,676	9,708
3,1	9,739	9,770	9,802	9,833	9,865	9,896	9,927	9,959	9,990	10,02
3,2	10,05	10,08	10,12	10,15	10,18	10,21	10,24	10,27	10,30	10,34
3,3	10,37	10,40	10,43	10,46	10,49	10,52	10,56	10,59	10,62	10,65
3,4	10,68	10,71	10,74	10,78	10,81	10,84	10,87	10,90	10,93	10,96
3,5	11,00	11,03	11,06	11,09	11,12	11,15	11,18	11,22	11,25	11,28
3,6	11,31	11,34	11,37	11,40	11,44	11,47	11,50	11,53	11,56	11,59
3,7	11,62	11,66	11,69	11,72	11,75	11,78	11,81	11,84	11,88	11,91
3,8	11,94	11,97	12,00	12,03	12,06	12,10	12,13	12,16	12,19	12,22
3,9	12,25	12,28	12,32	12,35	12,38	12,41	12,44	12,47	12,50	12,53
4,0	12,57	12,60	12,63	12,66	12,69	12,72	12,75	12,79	12,82	12,85
4,1	12,88	12,91	12,94	12,97	13,01	13,04	13,07	13,10	13,13	13,16
4,2	13,19	13,23	13,26	13,29	13,32	13,35	13,38	13,41	13,45	13,48
4,3	13,51	13,54	13,57	13,60	13,63	13,67	13,70	13,73	13,76	13,79
4,4	13,82	13,85	13,89	13,92	13,95	13,98	14,01	14,04	14,07	14,11
4,5	14,14	14,17	14,20	14,23	14,26	14,29	14,33	14,36	14,39	14,42
4,6	14,45	14,48	14,51	14,55	14,58	14,61	14,64	14,67	14,70	14,73
4,7	14,77	14,80	14,83	14,86	14,89	14,92	14,95	14,99	15,02	15,05
4,8	15,08	15,11	15,14	15,17	15,21	15,24	15,27	15,30	15,33	15,36
4,9	15,39	15,43	15,46	15,49	15,52	15,55	15,58	15,61	15,65	15,68
5,0	15,71	15,74	15,77	15,80	15,83	15,87	15,90	15,93	15,96	15,99
5,1	16,02	16,05	16,08	16,12	16,15	16,18	16,21	16,24	16,27	16,30
5,2	16,34	16,37	16,40	16,43	16,46	16,49	16,52	16,56	16,59	16,62
5,3	16,65	16,68	16,71	16,74	16,78	16,81	16,84	16,87	16,90	16,93
5,4	16,96	17,00	17,03	17,06	17,09	17,12	17,15	17,18	17,22	17,25

* Объяснения к таблице см. на стр. 95.

ТАБЛИЦЫ

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	17,28	17,31	17,34	17,37	17,40	17,44	17,47	17,50	17,53	17,56
5,6	17,59	17,62	17,66	17,69	17,72	17,75	17,78	17,81	17,84	17,88
5,7	17,91	17,94	17,97	18,00	18,03	18,06	18,10	18,13	18,16	18,19
5,8	18,22	18,25	18,28	18,32	18,35	18,38	18,41	18,44	18,47	18,50
5,9	18,54	18,57	18,60	18,63	18,66	18,69	18,72	18,76	18,79	18,82
6,0	18,85	18,88	18,91	18,94	18,98	19,01	19,04	19,07	19,10	19,13
6,1	19,16	19,20	19,23	19,26	19,29	19,32	19,35	19,38	19,42	19,45
6,2	19,48	19,51	19,54	19,57	19,60	19,64	19,67	19,70	19,73	19,76
6,3	19,79	19,82	19,85	19,89	19,92	19,95	19,98	20,01	20,04	20,07
6,4	20,11	20,14	20,17	20,20	20,23	20,26	20,29	20,33	20,36	20,39
6,5	20,42	20,45	20,48	20,51	20,55	20,58	20,61	20,64	20,67	20,70
6,6	20,73	20,77	20,80	20,83	20,86	20,89	20,92	20,95	20,99	21,02
6,7	21,05	21,08	21,11	21,14	21,17	21,21	21,24	21,27	21,30	21,33
6,8	21,36	21,39	21,43	21,46	21,49	21,52	21,55	21,58	21,61	21,65
6,9	21,68	21,71	21,74	21,77	21,80	21,83	21,87	21,90	21,93	21,96
7,0	21,99	22,02	22,05	22,09	22,12	22,15	22,18	22,21	22,24	22,27
7,1	22,31	22,34	22,37	22,40	22,43	22,46	22,49	22,53	22,56	22,59
7,2	22,62	22,65	22,68	22,71	22,75	22,78	22,81	22,84	22,87	22,90
7,3	22,93	22,97	23,00	23,03	23,06	23,09	23,12	23,15	23,19	23,22
7,4	23,25	23,28	23,31	23,34	23,37	23,40	23,44	23,47	23,50	23,53

7,5	23,56	23,59	23,62	23,66	23,69	23,72	23,75	23,78	23,81	23,84
7,6	23,88	23,91	23,94	23,97	24,00	24,03	24,06	24,10	24,13	24,16
7,7	24,19	24,22	24,25	24,28	24,32	24,35	24,38	24,41	24,44	24,47
7,8	24,50	24,54	24,57	24,60	24,63	24,66	24,69	24,72	24,76	24,79
7,9	24,82	24,85	24,88	24,91	24,94	24,98	25,01	25,04	25,07	25,10
8,0	25,13	25,16	25,20	25,23	25,26	25,29	25,32	25,35	25,38	25,42
8,1	25,45	25,48	25,51	25,54	25,57	25,60	25,64	25,67	25,70	25,73
8,2	25,76	25,79	25,82	25,86	25,89	25,92	25,95	25,98	26,01	26,04
8,3	26,08	26,11	26,14	26,17	26,20	26,23	26,26	26,30	26,33	26,36
8,4	26,39	26,42	26,45	26,48	26,52	26,55	26,58	26,61	26,64	26,67
8,5	26,70	26,74	26,77	26,80	26,83	26,86	26,89	26,92	26,95	26,99
8,6	27,02	27,05	27,08	27,11	27,14	27,17	27,21	27,24	27,27	27,30
8,7	27,33	27,36	27,39	27,43	27,46	27,49	27,52	27,55	27,58	27,61
8,8	27,65	27,68	27,71	27,74	27,77	27,80	27,83	27,87	27,90	27,93
8,9	27,96	27,99	28,02	28,05	28,09	28,12	28,15	28,18	28,21	28,24
9,0	28,27	28,31	28,34	28,37	28,40	28,43	28,46	28,49	28,53	28,56
9,1	28,59	28,62	28,65	28,68	28,71	28,75	28,78	28,81	28,84	28,87
9,2	28,90	28,93	28,97	29,00	29,03	29,06	29,09	29,12	29,15	29,19
9,3	29,22	29,25	29,28	29,31	29,34	29,37	29,41	29,44	29,47	29,50
9,4	29,53	29,56	29,59	29,63	29,66	29,69	29,72	29,75	29,78	29,81
9,5	29,85	29,88	29,91	29,94	29,97	30,00	30,03	30,07	30,10	30,13
9,6	30,16	30,19	30,22	30,25	30,28	30,32	30,35	30,38	30,41	30,44
9,7	30,47	30,50	30,54	30,57	30,60	30,63	30,66	30,69	30,72	30,76
9,8	30,79	30,82	30,85	30,88	30,91	30,94	30,98	31,01	31,04	31,07
9,9	31,10	31,13	31,16	31,20	31,23	31,26	31,29	31,32	31,35	31,38
10,0	31,42									

Объяснения к таблице см. на стр. 95.

15. Площадь круга диаметра d^*

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,7854	0,8012	0,8171	0,8332	0,8495	0,8659	0,8825	0,8992	0,9161	0,9331
1,1	0,9503	0,9677	0,9852	1,003	1,021	1,039	1,057	1,075	1,094	1,112
1,2	1,131	1,150	1,169	1,188	1,208	1,227	1,247	1,267	1,287	1,307
1,3	1,327	1,348	1,368	1,389	1,410	1,431	1,453	1,474	1,496	1,517
1,4	1,539	1,561	1,584	1,606	1,629	1,651	1,674	1,697	1,720	1,744
1,5	1,767	1,791	1,815	1,839	1,863	1,887	1,911	1,936	1,961	1,986
1,6	2,011	2,036	2,061	2,087	2,112	2,138	2,164	2,190	2,217	2,243
1,7	2,270	2,297	2,324	2,351	2,378	2,405	2,433	2,461	2,488	2,516
1,8	2,545	2,573	2,602	2,630	2,659	2,688	2,717	2,746	2,776	2,806
1,9	2,835	2,865	2,895	2,926	2,956	2,986	3,017	3,048	3,079	3,110
2,0	3,142	3,173	3,205	3,237	3,269	3,301	3,333	3,365	3,398	3,431
2,1	3,464	3,497	3,530	3,563	3,597	3,631	3,664	3,698	3,733	3,767
2,2	3,801	3,836	3,871	3,906	3,941	3,976	4,011	4,047	4,083	4,119
2,3	4,155	4,191	4,227	4,264	4,301	4,337	4,374	4,412	4,449	4,486
2,4	4,524	4,562	4,600	4,638	4,676	4,714	4,753	4,792	4,831	4,870
2,5	4,909	4,948	4,988	5,027	5,067	5,107	5,147	5,187	5,228	5,269
2,6	5,309	5,350	5,391	5,433	5,474	5,515	5,557	5,599	5,641	5,683
2,7	5,726	5,768	5,811	5,853	5,896	5,940	5,983	6,026	6,070	6,114
2,8	6,158	6,202	6,246	6,290	6,335	6,379	6,424	6,469	6,514	6,560
2,9	6,605	6,651	6,697	6,743	6,789	6,835	6,881	6,928	6,975	7,022

3,0	7,069	7,116	7,163	7,211	7,258	7,306	7,354	7,402	7,451	7,499
3,1	7,548	7,596	7,645	7,694	7,744	7,793	7,843	7,892	7,942	7,992
3,2	8,042	8,093	8,143	8,194	8,245	8,296	8,347	8,398	8,450	8,501
3,3	8,553	8,605	8,657	8,709	8,762	8,814	8,867	8,920	8,973	9,026
3,4	9,079	9,133	9,186	9,240	9,294	9,348	9,402	9,457	9,511	9,566
3,5	9,621	9,676	9,731	9,787	9,842	9,898	9,954	10,01	10,07	10,12
3,6	10,18	10,24	10,29	10,35	10,41	10,46	10,52	10,58	10,64	10,69
3,7	10,75	10,81	10,87	10,93	10,99	11,04	11,10	11,16	11,22	11,28
3,8	11,34	11,40	11,46	11,52	11,58	11,64	11,70	11,76	11,82	11,88
3,9	11,95	12,01	12,07	12,13	12,19	12,25	12,32	12,38	12,44	12,50
4,0	12,57	12,63	12,69	12,76	12,82	12,88	12,95	13,01	13,07	13,14
4,1	13,20	13,27	13,33	13,40	13,46	13,53	13,59	13,66	13,72	13,79
4,2	13,85	13,92	13,99	14,05	14,12	14,19	14,25	14,32	14,39	14,45
4,3	14,52	14,59	14,66	14,73	14,79	14,86	14,93	15,00	15,07	15,14
4,4	15,21	15,27	15,34	15,41	15,48	15,55	15,62	15,69	15,76	15,83
4,5	15,90	15,98	16,05	16,12	16,19	16,26	16,33	16,40	16,47	16,55
4,6	16,62	16,69	16,76	16,84	16,91	16,98	17,06	17,13	17,20	17,28
4,7	17,35	17,42	17,50	17,57	17,65	17,72	17,80	17,87	17,95	18,02
4,8	18,10	18,17	18,25	18,32	18,40	18,47	18,55	18,63	18,70	18,78
4,9	18,86	18,93	19,01	19,09	19,17	19,24	19,32	19,40	19,48	19,56
5,0	19,63	19,71	19,79	19,87	19,95	20,03	20,11	20,19	20,27	20,35
5,1	20,43	20,51	20,59	20,67	20,75	20,83	20,91	20,99	21,07	21,16
5,2	21,24	21,32	21,40	21,48	21,57	21,65	21,73	21,81	21,90	21,98
5,3	22,06	22,15	22,23	22,31	22,40	22,48	22,56	22,65	22,73	22,82
5,4	22,90	22,99	23,07	23,16	23,24	23,33	23,41	23,50	23,59	23,67

* Объяснения к таблице см. на стр. 95.

ТАБЛИЦЫ

<i>d</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	23,76	23,84	23,93	24,02	24,11	24,19	24,28	24,37	24,45	24,54
5,6	24,63	24,72	24,81	24,89	24,98	25,07	25,16	25,25	25,34	25,43
5,7	25,52	25,61	25,70	25,79	25,88	25,97	26,06	26,15	26,24	26,33
5,8	26,42	26,51	26,60	26,69	26,79	26,88	26,97	27,06	27,15	27,25
5,9	27,34	27,43	27,53	27,62	27,71	27,81	27,90	27,99	28,09	28,18
6,0	28,27	28,37	28,46	28,56	28,65	28,75	28,84	28,94	29,03	29,13
6,1	29,22	29,32	29,42	29,51	29,61	29,71	29,80	29,90	30,00	30,09
6,2	30,19	30,29	30,39	30,48	30,58	30,68	30,78	30,88	30,97	31,07
6,3	31,17	31,27	31,37	31,47	31,57	31,67	31,77	31,87	31,97	32,07
6,4	32,17	32,27	32,37	32,47	32,57	32,67	32,78	32,88	32,98	33,08
6,5	33,18	33,29	33,39	33,49	33,59	33,70	33,80	33,90	34,00	34,11
6,6	34,21	34,32	34,42	34,52	34,63	34,73	34,84	34,94	35,05	35,15
6,7	35,26	35,36	35,47	35,57	35,68	35,78	35,89	36,00	36,10	36,21
6,8	36,32	36,42	36,53	36,64	36,75	36,85	36,96	37,07	37,18	37,28
6,9	37,39	37,50	37,61	37,72	37,83	37,94	38,05	38,16	38,26	38,37
7,0	38,48	38,59	38,70	38,82	38,93	39,04	39,15	39,26	39,37	39,48
7,1	39,59	39,70	39,82	39,93	40,04	40,15	40,26	40,38	40,49	40,60
7,2	40,72	40,83	40,94	41,06	41,17	41,28	41,40	41,51	41,62	41,74
7,3	41,85	41,97	42,08	42,20	42,31	42,43	42,54	42,66	42,78	42,89
7,4	43,01	43,12	43,24	43,36	43,47	43,59	43,71	43,83	43,94	44,06

7,5	44,18	44,30	44,41	44,53	44,65	44,77	44,89	45,01	45,13	45,25
7,6	45,36	45,48	45,60	45,72	45,84	45,96	46,08	46,20	46,32	46,45
7,7	46,57	46,69	46,81	46,93	47,05	47,17	47,29	47,42	47,54	47,66
7,8	47,78	47,91	48,03	48,15	48,27	48,40	48,52	48,65	48,77	48,89
7,9	49,02	49,14	49,27	49,39	49,51	49,64	49,76	49,89	50,01	50,14
8,0	50,27	50,39	50,52	50,64	50,77	50,90	51,02	51,15	51,28	51,40
8,1	51,53	51,66	51,78	51,91	52,04	52,17	52,30	52,42	52,55	52,68
8,2	52,81	52,94	53,07	53,20	53,33	53,46	53,59	53,72	53,85	53,98
8,3	54,11	54,24	54,37	54,50	54,63	54,76	54,89	55,02	55,15	55,29
8,4	55,42	55,55	55,68	55,81	55,95	56,08	56,21	56,35	56,48	56,61
8,5	56,75	56,88	57,01	57,15	57,28	57,41	57,55	57,68	57,82	57,95
8,6	58,09	58,22	58,36	58,49	58,63	58,77	58,90	59,04	59,17	59,31
8,7	59,45	59,58	59,72	59,86	59,99	60,13	60,27	60,41	60,55	60,68
8,8	60,82	60,96	61,10	61,24	61,38	61,51	61,65	61,79	61,93	62,07
8,9	62,21	62,35	62,49	62,63	62,77	62,91	63,05	63,19	63,33	63,48
9,0	63,62	63,76	63,90	64,04	64,18	64,33	64,47	64,61	64,75	64,90
9,1	65,04	65,18	65,33	65,47	65,61	65,76	65,90	66,04	66,19	66,33
9,2	66,48	66,62	66,77	66,91	67,06	67,20	67,35	67,49	67,64	67,78
9,3	67,93	68,08	68,22	68,37	68,51	68,66	68,81	68,96	69,10	69,25
9,4	69,40	69,55	69,69	69,84	69,99	70,14	70,29	70,44	70,58	70,73
9,5	70,88	71,03	71,18	71,33	71,48	71,63	71,78	71,93	72,08	72,23
9,6	72,38	72,53	72,68	72,84	72,99	73,14	73,29	73,44	73,59	73,75
9,7	73,90	74,05	74,20	74,36	74,51	74,66	74,82	74,97	75,12	75,28
9,8	75,43	75,58	75,74	75,89	76,05	76,20	76,36	76,51	76,67	76,82
9,9	76,98	77,13	77,29	77,44	77,60	77,76	77,91	78,07	78,23	78,38
10,0	78,54									

Объяснения к таблице см. на стр. 95.

16. Элементы сегмента круга

а) Длина дуги и площадь сегмента для хорды, равной единице *

Подъем (отноше- ние стрелы к хорде) $\frac{h}{a}$	Длина дуги l	Пло- щадь сегмента	Подъем (отноше- ние стрелы к хорде) $\frac{h}{a}$	Длина дуги l	Пло- щадь сегмента
—	—	—	0,25	1,1591	0,1747
0,01	1,0003	0,0067	0,26	1,1715	0,1824
0,02	1,0011	0,0133	0,27	1,1843	0,1901
0,03	1,0024	0,0200	0,28	1,1975	0,1979
0,04	1,0043	0,0267	0,29	1,2110	0,2058
0,05	1,0067	0,0334	0,30	1,2250	0,2137
0,06	1,0096	0,0401	0,31	1,2393	0,2218
0,07	1,0130	0,0468	0,32	1,2539	0,2299
0,08	1,0170	0,0536	0,33	1,2689	0,2381
0,09	1,0215	0,0604	0,34	1,2843	0,2464
0,10	1,0265	0,0672	0,35	1,3000	0,2548
0,11	1,0320	0,0740	0,36	1,3160	0,2633
0,12	1,0380	0,0809	0,37	1,3323	0,2719
0,13	1,0445	0,0878	0,38	1,3490	0,2806
0,14	1,0515	0,0948	0,39	1,3660	0,2893
0,15	1,0590	0,1018	0,40	1,3832	0,2982
0,16	1,0669	0,1088	0,41	1,4008	0,3072
0,17	1,0754	0,1159	0,42	1,4186	0,3162
0,18	1,0843	0,1231	0,43	1,4367	0,3254
0,19	1,0936	0,1303	0,44	1,4551	0,3347
0,20	1,1035	0,1375	0,45	1,4738	0,3441
0,21	1,1137	0,1448	0,46	1,4927	0,3536
0,22	1,1244	0,1522	0,47	1,5118	0,3632
0,23	1,1356	0,1596	0,48	1,5313	0,3729
0,24	1,1471	0,1671	0,49	1,5509	0,3828
0,25	1,1591	0,1747	0,50	1,5708	0,3927

* Объяснения к таблице см. на стр. 95.

Формулы, относящиеся к сегменту, см. на стр. 193.

б) Длина дуги, стрелка, длина хорды
и площадь сегмента для радиуса,
равного единице *

Центр. угол в градусах	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
1	0,0175	0,0000	458,37	0,0175	458,36	0,00000
2	0,0349	0,0002	229,19	0,0349	229,18	0,00000
3	0,0524	0,0003	152,80	0,0524	152,78	0,00001
4	0,0698	0,0006	114,60	0,0698	114,58	0,00003
5	0,0873	0,0010	91,69	0,0872	91,66	0,00006
6	0,1047	0,0014	76,41	0,1047	76,38	0,00010
7	0,1222	0,0019	65,50	0,1221	65,46	0,00015
8	0,1396	0,0024	57,32	0,1395	57,27	0,00023
9	0,1571	0,0031	50,96	0,1569	50,90	0,00032
10	0,1745	0,0038	45,87	0,1743	45,81	0,00044
11	0,1920	0,0046	41,70	0,1917	41,64	0,00059
12	0,2094	0,0055	38,23	0,2091	38,16	0,00076
13	0,2269	0,0064	35,30	0,2264	35,22	0,00097
14	0,2443	0,0075	32,78	0,2437	32,70	0,00121
15	0,2618	0,0086	30,60	0,2611	30,51	0,00149
16	0,2793	0,0097	28,69	0,2783	28,60	0,00181
17	0,2967	0,0110	27,01	0,2956	26,91	0,00217
18	0,3142	0,0123	25,52	0,3129	25,41	0,00257
19	0,3316	0,0137	24,18	0,3301	24,07	0,00302
20	0,3491	0,0152	22,98	0,3473	22,86	0,00352
21	0,3665	0,0167	21,89	0,3645	21,77	0,00408
22	0,3840	0,0184	20,90	0,3816	20,77	0,00468
23	0,4014	0,0201	20,00	0,3987	19,86	0,00535
24	0,4189	0,0219	19,17	0,4158	19,03	0,00607
25	0,4363	0,0237	18,41	0,4329	18,26	0,00686
26	0,4538	0,0256	17,71	0,4499	17,55	0,00771
27	0,4712	0,0276	17,06	0,4669	16,90	0,00862
28	0,4887	0,0297	16,45	0,4838	16,29	0,00961
29	0,5061	0,0319	15,89	0,5008	15,72	0,01067
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	15,19	0,01180

* Объяснения к таблице см. на стр. 95.

Формулы, относящиеся к сегменту, см. на стр. 193.

Продолжение

Центр. угол в градусах	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
30	0,5236	0,0341	15,37	0,5176	15,19	0,01180
31	0,5411	0,0364	14,88	0,5345	14,70	0,01301
32	0,5585	0,0387	14,42	0,5513	14,23	0,01429
33	0,5760	0,0412	13,99	0,5680	13,79	0,01566
34	0,5934	0,0437	13,58	0,5847	13,38	0,01711
35	0,6109	0,0463	13,20	0,6014	12,99	0,01864
36	0,6283	0,0489	12,84	0,6180	12,63	0,02027
37	0,6458	0,0517	12,50	0,6346	12,28	0,02198
38	0,6632	0,0545	12,17	0,6511	11,95	0,02378
39	0,6807	0,0574	11,87	0,6676	11,64	0,02568
40	0,6981	0,0603	11,58	0,6840	11,34	0,02767
41	0,7156	0,0633	11,30	0,7004	11,06	0,02976
42	0,7330	0,0664	11,04	0,7167	10,79	0,03195
43	0,7505	0,0696	10,79	0,7330	10,53	0,03425
44	0,7679	0,0728	10,55	0,7492	10,29	0,03664
45	0,7854	0,0761	10,32	0,7654	10,05	0,03915
46	0,8029	0,0795	10,10	0,7815	9,83	0,04176
47	0,8203	0,0829	9,89	0,7975	9,62	0,04448
48	0,8378	0,0865	9,69	0,8135	9,41	0,04731
49	0,8552	0,0900	9,50	0,8294	9,21	0,05025
50	0,8727	0,0937	9,31	0,8452	9,02	0,05331
51	0,8901	0,0974	9,14	0,8610	8,84	0,05649
52	0,9076	0,1012	8,97	0,8767	8,66	0,05978
53	0,9250	0,1051	8,80	0,8924	8,49	0,06319
54	0,9425	0,1090	8,65	0,9080	8,33	0,06673
55	0,9599	0,1130	8,50	0,9235	8,17	0,07039
56	0,9774	0,1171	8,35	0,9389	8,02	0,07417
57	0,9948	0,1212	8,21	0,9543	7,88	0,07808
58	1,0123	0,1254	8,07	0,9696	7,73	0,08212
59	1,0297	0,1296	7,94	0,9848	7,60	0,08629
60	1,0472	0,1340	7,82	1,0000	7,46	0,09059

Продолжение

Центр. угол α в градусах	Длина дуга l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
60	1,0472	0,1340	7,82	1,0000	7,46	0,09059
61	1,0647	0,1384	7,69	1,0151	7,34	0,09502
62	1,0821	0,1428	7,58	1,0301	7,21	0,09958
63	1,0996	0,1474	7,46	1,0450	7,09	0,10428
64	1,1170	0,1520	7,35	1,0598	6,97	0,10911
65	1,1345	0,1566	7,24	1,0746	6,86	0,11408
66	1,1519	0,1613	7,14	1,0893	6,75	0,11919
67	1,1694	0,1661	7,04	1,1039	6,65	0,12443
68	1,1868	0,1710	6,94	1,1184	6,54	0,12982
69	1,2043	0,1759	6,85	1,1328	6,44	0,13535
70	1,2217	0,1808	6,76	1,1472	6,34	0,14102
71	1,2392	0,1859	6,67	1,1614	6,25	0,14683
72	1,2566	0,1910	6,58	1,1756	6,16	0,15279
73	1,2741	0,1961	6,50	1,1896	6,07	0,15889
74	1,2915	0,2014	6,41	1,2036	5,98	0,16514
75	1,3090	0,2066	6,34	1,2175	5,89	0,17154
76	1,3265	0,2120	6,26	1,2313	5,81	0,17808
77	1,3439	0,2174	6,18	1,2450	5,73	0,18477
78	1,3614	0,2229	6,11	1,2586	5,65	0,19160
79	1,3788	0,2284	6,04	1,2722	5,57	0,19859
80	1,3963	0,2340	5,97	1,2856	5,49	0,20573
81	1,4137	0,2396	5,90	1,2989	5,42	0,21301
82	1,4312	0,2453	5,83	1,3121	5,35	0,22045
83	1,4486	0,2510	5,77	1,3252	5,28	0,22804
84	1,4661	0,2569	5,71	1,3383	5,21	0,23578
85	1,4835	0,2627	5,65	1,3512	5,14	0,24367
86	1,5010	0,2686	5,59	1,3640	5,08	0,25171
87	1,5184	0,2746	5,53	1,3767	5,01	0,25990
88	1,5359	0,2807	5,47	1,3893	4,95	0,26825
89	1,5533	0,2867	5,42	1,4018	4,89	0,27675
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540

Объяснения к таблице см. на стр. 95.

Продолжение

Центр. угол α в градусах	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
90	1,5708	0,2929	5,36	1,4142	4,83	0,28540
91	1,5882	0,2991	5,31	1,4265	4,77	0,29420
92	1,6057	0,3053	5,26	1,4387	4,71	0,30316
93	1,6232	0,3116	5,21	1,4507	4,66	0,31226
94	1,6406	0,3180	5,16	1,4627	4,60	0,32152
95	1,6581	0,3244	5,11	1,4746	4,55	0,33093
96	1,6755	0,3309	5,06	1,4863	4,49	0,34050
97	1,6930	0,3374	5,02	1,4979	4,44	0,35021
98	1,7104	0,3439	4,97	1,5094	4,39	0,36008
99	1,7279	0,3506	4,93	1,5208	4,34	0,37009
100	1,7453	0,3572	4,89	1,5321	4,29	0,38026
101	1,7628	0,3639	4,84	1,5432	4,24	0,39058
102	1,7802	0,3707	4,80	1,5543	4,19	0,40104
103	1,7977	0,3775	4,76	1,5652	4,15	0,41166
104	1,8151	0,3843	4,72	1,5760	4,10	0,42242
105	1,8326	0,3912	4,68	1,5867	4,06	0,43333
106	1,8500	0,3982	4,65	1,5973	4,01	0,44439
107	1,8675	0,4052	4,61	1,6077	3,97	0,45560
108	1,8850	0,4122	4,57	1,6180	3,93	0,46695
109	1,9024	0,4193	4,54	1,6282	3,88	0,47845
110	1,9199	0,4264	4,50	1,6383	3,84	0,49008
111	1,9373	0,4336	4,47	1,6483	3,80	0,50187
112	1,9548	0,4408	4,43	1,6581	3,76	0,51379
113	1,9722	0,4481	4,40	1,6678	3,72	0,52586
114	1,9897	0,4554	4,37	1,6773	3,68	0,53806
115	2,0071	0,4627	4,34	1,6868	3,65	0,55041
116	2,0246	0,4701	4,31	1,6961	3,61	0,56289
117	2,0420	0,4775	4,28	1,7053	3,57	0,57551
118	2,0595	0,4850	4,25	1,7143	3,53	0,58827
119	2,0769	0,4925	4,22	1,7233	3,50	0,60116
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	3,46	0,61418

Продолжение

Центр. угол α в градусах	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
120	2,0944	0,5000	4,19	1,7321	3,46	0,61418
121	2,1118	0,5076	4,16	1,7407	3,43	0,62734
122	2,1293	0,5152	4,13	1,7492	3,40	0,64063
123	2,1468	0,5228	4,11	1,7576	3,36	0,65404
124	2,1642	0,5305	4,08	1,7659	3,33	0,66759
125	2,1817	0,5383	4,05	1,7740	3,30	0,68125
126	2,1991	0,5460	4,03	1,7820	3,26	0,69505
127	2,2166	0,5538	4,00	1,7899	3,23	0,70897
128	2,2340	0,5616	3,98	1,7976	3,20	0,72301
129	2,2515	0,5695	3,95	1,8052	3,17	0,73716
130	2,2689	0,5774	3,93	1,8126	3,14	0,75144
131	2,2864	0,5853	3,91	1,8199	3,11	0,76584
132	2,3038	0,5933	3,88	1,8271	3,08	0,78034
133	2,3213	0,6013	3,86	1,8341	3,05	0,79497
134	2,3387	0,6093	3,84	1,8410	3,02	0,80970
135	2,3562	0,6173	3,82	1,8478	2,99	0,82454
136	2,3736	0,6254	3,80	1,8544	2,97	0,83949
137	2,3911	0,6335	3,77	1,8608	2,94	0,85455
138	2,4086	0,6416	3,75	1,8672	2,91	0,86971
139	2,4260	0,6498	3,73	1,8733	2,88	0,88497
140	2,4435	0,6580	3,71	1,8794	2,86	0,90034
141	2,4609	0,6662	3,69	1,8853	2,83	0,91580
142	2,4784	0,6744	3,67	1,8910	2,80	0,93135
143	2,4958	0,6827	3,66	1,8966	2,78	0,94700
144	2,5133	0,6910	3,64	1,9021	2,75	0,96274
145	2,5307	0,6993	3,62	1,9074	2,73	0,97858
146	2,5482	0,7076	3,60	1,9126	2,70	0,99449
147	2,5656	0,7160	3,58	1,9176	2,68	1,01050
148	2,5831	0,7244	3,57	1,9225	2,65	1,02658
149	2,6005	0,7328	3,55	1,9273	2,63	1,04275
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	2,61	1,05900

Объяснения к таблице см. на стр. 95.

Центр. угол α в градусах	Длина дуги l	Стрелка h	$\frac{l}{h}$	Длина хорды a	$\frac{a}{h}$	Площадь сегмента
150	2,6180	0,7412	3,53	1,9319	2,61	1,05900
151	2,6354	0,7496	3,52	1,9363	2,58	1,07532
152	2,6529	0,7581	3,50	1,9406	2,56	1,09171
153	2,6704	0,7666	3,48	1,9447	2,54	1,10818
154	2,6878	0,7750	3,47	1,9487	2,51	1,12472
155	2,7053	0,7836	3,45	1,9526	2,49	1,14132
156	2,7227	0,7921	3,44	1,9563	2,47	1,15799
157	2,7402	0,8006	3,42	1,9598	2,45	1,17472
158	2,7576	0,8092	3,41	1,9633	2,43	1,19151
159	2,7751	0,8178	3,39	1,9665	2,40	1,20835
160	2,7925	0,8264	3,38	1,9696	2,38	1,22525
161	2,8100	0,8350	3,37	1,9726	2,36	1,24221
162	2,8274	0,8436	3,35	1,9754	2,34	1,25921
163	2,8449	0,8522	3,34	1,9780	2,32	1,27626
164	2,8623	0,8608	3,33	1,9805	2,30	1,29335
165	2,8798	0,8695	3,31	1,9829	2,28	1,31049
166	2,8972	0,8781	3,30	1,9851	2,26	1,32766
167	2,9147	0,8868	3,29	1,9871	2,24	1,34487
168	2,9322	0,8955	3,27	1,9890	2,22	1,36212
169	2,9496	0,9042	3,26	1,9908	2,20	1,37940
170	2,9671	0,9128	3,25	1,9924	2,18	1,39671
171	2,9845	0,9215	3,24	1,9938	2,16	1,41404
172	3,0020	0,9302	3,23	1,9951	2,14	1,43140
173	3,0194	0,9390	3,22	1,9963	2,13	1,44878
174	3,0369	0,9477	3,20	1,9973	2,11	1,46617
175	3,0543	0,9564	3,19	1,9981	2,09	1,48359
176	3,0718	0,9651	3,18	1,9988	2,07	1,50101
177	3,0892	0,9738	3,17	1,9993	2,05	1,51845
178	3,1067	0,9825	3,16	1,9997	2,04	1,53589
179	3,1241	0,9913	3,15	1,9999	2,02	1,55334
180	3,1416	1,0000	3,14	2,0000	2,00	1,57080

Объяснения к таблицам 13, 14, 15 и 16

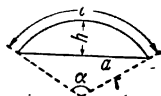
В таблице 13 (стр. 76—79) даны натуральные логарифмы. В отличие от таблиц десятичных логарифмов здесь даны как мантиссы, так и характеристики. Логарифмы трехзначных чисел находятся в таблице непосредственно в строке, соответствующей первым двум цифрам, и в столбце, соответствующем третьей цифре. Если число имеет дробную часть, то на десятые и сотые должна быть внесена интерполяционная поправка (см. стр. 16). Для чисел, имеющих до запятой больше или меньше трех знаков, натуральные логарифмы находятся с помощью помещенных в таблице значений логарифмов степеней 10 (см. примеры на стр. 76—79). Таблицы 14 и 15 (стр. 80—87) дают с четырьмя значащими цифрами значения длин окружностей и площадей кругов для диаметров d от $d=1,00$ до $d=9,99$. Если размеры диаметра выходят за эти границы, то находят площадь круга или длину окружности для диаметра большего или меньшего в 10^k раз, чем заданный. При уменьшении или увеличении d в 10^k раз длина окружности также уменьшается или увеличивается в 10^k , а площадь круга соответственно в 10^{2k} раз. Если число значащих цифр у d больше трех, необходимо прибегнуть к интерполяции (см. стр. 16).

Примеры: 1) Для $d=69,3$ длина окружности равна 217,7, а площадь круга 3772. 2) Для $d=0,693$ длина окружности равна 2,177, а площадь круга 0,3772.

В таблице 16 даны элементы сегмента круга (см. рисунок). Таблица а) относится к сегментам окружностей различных радиусов, с длиной хорды, равной единице. Если при заданном подъеме (отношении стрелы к хорде) длина хорды равна a , то помещенное в таблице значение длины дуги должно быть умножено на a , а площадь сегмента на a^2 .

Таблица б) содержит данные, относящиеся к различным сегментам одной и той же окружности радиуса, равного единице. Если длина радиуса равна r , то табличные значения l , h и a должны быть умножены на r , а площадь сегмента — на r^2 . Если задается длина дуги l (или хорда h) и стрелка a , то радиус сегмента r равен отношению l (или a) к табличному значению длины дуги, соответствующему заданному значению l/h (или a/h).

Пример: Если в сегменте длина хорды $a = 40$ см, а стрела $h = 6$ см, то для длины дуги l находим $h/a = 0,15$ и умножаем на 40 соответствующее табличное значение l , взятое из таблицы а): $l = 40 \cdot 1,0590 = 42,36$ см. Радиус сегмента r и центральный угол α определяются при помощи таблицы б). Для $a/h = 6,67$ табличное значение a равно 1,1010, а $\alpha = 66,8^\circ$ (линейная интерполяция!). Отсюда $r = 40 : 1,1010 = 36,33$ см. Длину дуги l находим с помощью таблицы б) $l = 36,33 \cdot 1,1661 = 42,37$ см.



Е.

17. Пропорциональные части

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	1
2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	2
3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	3
4	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	4
5	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	5
6	6,6	7,2	7,8	8,4	9,0	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	6
7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6	13,3	14,0	7
8	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	14,4	15,2	16,0	8
9	9,9	10,8	11,7	12,6	13,5	14,4	15,3	16,2	17,1	18,0	9
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	1
2	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2	5,4	5,6	5,8	6,0	2
3	6,3	6,6	6,9	7,2	7,5	7,8	8,1	8,4	8,7	9,0	3
4	8,4	8,8	9,2	9,6	10,0	10,4	10,8	11,2	11,6	12,0	4
5	10,5	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	5
6	12,6	13,2	13,8	14,4	15,0	15,6	16,2	16,8	17,4	18,0	6
7	14,7	15,4	16,1	16,8	17,5	18,2	18,9	19,6	20,3	21,0	7
8	16,8	17,6	18,4	19,2	20,0	20,8	21,6	22,4	23,2	24,0	8
9	18,9	19,8	20,7	21,6	22,5	23,4	24,3	25,2	26,1	27,0	9
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	1
2	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	2
3	9,3	9,6	9,9	10,2	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0	3
4	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2	15,6	16,0	4
5	15,5	16,0	16,5	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0	5
6	18,6	19,2	19,8	20,4	21,0	21,6	22,2	22,8	23,4	24,0	6
7	21,7	22,4	23,1	23,8	24,5	25,2	25,9	26,6	27,3	28,0	7
8	24,8	25,6	26,4	27,2	28,0	28,8	29,6	30,4	31,2	32,0	8
9	27,9	28,8	29,7	30,6	31,5	32,4	33,3	34,2	35,1	36,0	9
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	1
2	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0	2
3	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1	14,4	14,7	15,0	3
4	16,4	16,8	17,2	17,6	18,0	18,4	18,8	19,2	19,6	20,0	4
5	20,5	21,0	21,5	22,0	22,5	23,0	23,5	24,0	24,5	25,0	5
6	24,6	25,2	25,8	26,4	27,0	27,6	28,2	28,8	29,4	30,0	6
7	28,7	29,4	30,1	30,8	31,5	32,2	32,9	33,6	34,3	35,0	7
8	32,8	33,6	34,4	35,2	36,0	36,8	37,6	38,4	39,2	40,0	8
9	36,9	37,8	38,7	39,6	40,5	41,4	42,3	43,2	44,1	45,0	9

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЧАСТИ

97

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0	1
2	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	2
3	15,3	15,6	15,9	16,2	16,5	16,8	17,1	17,4	17,7	18,0	3
4	20,4	20,8	21,2	21,6	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	4
5	25,5	26,0	26,5	27,0	27,5	28,0	28,5	29,0	29,5	30,0	5
6	30,6	31,2	31,8	32,4	33,0	33,6	34,2	34,8	35,4	36,0	6
7	35,7	36,4	37,1	37,8	38,5	39,2	39,9	40,6	41,3	42,0	7
8	40,8	41,6	42,4	43,2	44,0	44,8	45,6	46,4	47,2	48,0	8
9	45,9	46,8	47,7	48,6	49,5	50,4	51,3	52,2	53,1	54,0	9
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0	1
2	12,2	12,4	12,6	12,8	13,0	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	2
3	18,3	18,6	18,9	19,2	19,5	19,8	20,1	20,4	20,7	21,0	3
4	24,4	24,8	25,2	25,6	26,0	26,4	26,8	27,2	27,6	28,0	4
5	30,5	31,0	31,5	32,0	32,5	33,0	33,5	34,0	34,5	35,0	5
6	36,6	37,2	37,8	38,4	39,0	39,6	40,2	40,8	41,4	42,0	6
7	42,7	43,4	44,1	44,8	45,5	46,2	46,9	47,6	48,3	49,0	7
8	48,8	49,6	50,4	51,2	52,0	52,8	53,6	54,4	55,2	56,0	8
9	54,9	55,8	56,7	57,6	58,5	59,4	60,3	61,2	62,1	63,0	9
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0	1
2	14,2	14,4	14,6	14,8	15,0	15,2	15,4	15,6	15,8	16,0	2
3	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	23,4	23,7	24,0	3
4	28,4	28,8	29,2	29,6	30,0	30,4	30,8	31,2	31,6	32,0	4
5	35,5	36,0	36,5	37,0	37,5	38,0	38,5	39,0	39,5	40,0	5
6	42,6	43,2	43,8	44,4	45,0	45,6	46,2	46,8	47,4	48,0	6
7	49,7	50,4	51,1	51,8	52,5	53,2	53,9	54,6	55,3	56,0	7
8	56,8	57,6	58,4	59,2	60,0	60,8	61,6	62,4	63,2	64,0	8
9	63,9	64,8	65,7	66,6	67,5	68,4	69,3	70,2	71,1	72,0	9
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0	1
2	16,2	16,4	16,6	16,8	17,0	17,2	17,4	17,6	17,8	18,0	2
3	24,3	24,6	24,9	25,2	25,5	25,8	26,1	26,4	26,7	27,0	3
4	32,4	32,8	33,2	33,6	34,0	34,4	34,8	35,2	35,6	36,0	4
5	40,5	41,0	41,5	42,0	42,5	43,0	43,5	44,0	44,5	45,0	5
6	48,6	49,2	49,8	50,4	51,0	51,6	52,2	52,8	53,4	54,0	6
7	56,7	57,4	58,1	58,8	59,5	60,2	60,9	61,6	62,3	63,0	7
8	64,8	65,6	66,4	67,2	68,0	68,8	69,6	70,4	71,2	72,0	8
9	72,9	73,8	74,7	75,6	76,5	77,4	78,3	79,2	80,1	81,0	9

18. Таблица для квадратичного интерполирования

k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k	k	k_1	k
0,000		1,000	0,066		0,934	0,14		0,853	0,255		0,745
	0,000			0,016			0,032			0,048	
0 002		0,998	0,071		0,929	0,15		0,847	0,263		0,737
	0,001			0,017			0,033			0,049	
0 006		0,994	0,075		0,925	0,155		0,841	0,271		0,729
	0,002			0,018			0,034			0,050	
0,010		0,990	0,080		0,920	0,16		0,835	0,280		0,720
	0,003			0,019			0,035			0,051	
0,014		0,986	0,085		0,915	0,171		0,829	0,290		0,710
	0,004			0,020			0,036			0,052	
0 018		0,982	0,090		0,910	0,177		0,823	0,300		0,703
	0 005			0 021			0,037			0,053	
0,022		0,978	0,095		0,905	0,183		0,817	0,310		0,690
	0 005			0 022			0,038			0 054	
0,026		0,974	0,100		0,900	0,190		0,810	0,321		0,679
	0,007			0,023			0 039			0,055	
0,030		0,970	0,105		0,895	0,196		0,804	0,332		0,668
	0,008			0,024			0 040			0,056	
0,035		0,965	0 110		0,890	0,203		0,797	0,345		0,655
	0,009			0,025			0 041			0,057	
0,039		0,961	0,115		0,885	0,210		0,790	0,358		0,642
	0,010			0,026			0,042			0,058	
0,043		0,957	0,120		0,880	0,217		0,783	0,373		0,627
	0 011			0,027			0 043			0,059	
0 048		0,952	0,125		0,875	0,224		0,776	0,390		0,610
	0,012			0 028			0,044			0 060	
0,052		0,948	0,131		0,869	0,231		0,769	0,410		0,590
	0,013			0,029			0,045			0,061	
0,057		0,943	0,136		0,864	0,239		0,761	0,436		0,564
	0,014			0,030			0,046			0,062	
0,061		0,939	0,142		0,858	0,247		0,753	0,500		0,500
	0,015			0,031			0,047				
0,066		0,934	0,147		0,853	0,255		0,745			

О квадратичном интерполировании см. стр. 17.

Всем значениям k , записанным между смежными числами столбца k (как правого, так и левого), соответствует одно и то же значение k_1 , помещенное между этими смежными значениями k . «Критическим» (табличным) значениям k соответствует вышележащее k_1 .

Примеры 1) для $k=0,8$ $k_1=0,040$ (так же, как и для всех других k , заключенных между 0,797 и 0,804 или между 0,196 и 0,202); 2) для $k=0,3$ (или для $k=0,7$). $k_1=0,032$.

Б. Таблицы специальных функций

19. Гамма-функция *

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,00000	1,25	0,90640	1,50	0,88623	1,75	0,91906
1	0,99433	6	0,90440	1	0,88659	6	0,92137
2	0,98884	7	0,90250	2	0,88704	7	0,92376
3	0,98355	8	0,90072	3	0,88757	8	0,92623
4	0,97844	9	0,89904	4	0,88818	9	0,92877
1,05	0,97350	1,30	0,89747	1,55	0,88887	1,80	0,93138
6	0,96874	1	0,89600	6	0,88964	1	0,93408
7	0,96415	2	0,89464	7	0,89049	2	0,93685
8	0,95973	3	0,89338	8	0,89142	3	0,93969
9	0,95546	4	0,89222	9	0,89243	4	0,94261
1,10	0,95135	1,35	0,89115	1,60	0,89352	1,85	0,94561
1	0,94740	6	0,89018	1	0,89468	6	0,94869
2	0,94359	7	0,88931	2	0,89592	7	0,95184
3	0,93993	8	0,88854	3	0,89724	8	0,95507
4	0,93642	9	0,88785	4	0,89864	9	0,95838
1,15	0,93304	1,40	0,88726	1,65	0,90012	1,90	0,96177
6	0,92980	1	0,88676	6	0,90167	1	0,96523
7	0,92670	2	0,88636	7	0,90330	2	0,96877
8	0,92373	3	0,88604	8	0,90500	3	0,97240
9	0,92089	4	0,88581	9	0,90678	4	0,97610
1,20	0,91817	1,45	0,88566	1,70	0,90864	1,95	0,97988
1	0,91558	6	0,88560	1	0,91037	6	0,98374
2	0,91311	7	0,88563	2	0,91238	7	0,98793
3	0,91075	8	0,88575	3	0,91467	8	0,99171
4	0,90852	9	0,88595	4	0,91683	9	0,99581
1,25	0,90610	1,50	0,88623	1,75	0,91906	2,00	1,00000

* Определение, формулы и графики см. стр. 185.

20. Бесселевы функции *

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x
0,0	+1,0000	+0,0000	— ∞	— ∞	+1,000	0,0000	0,0
0,1	0,9975	0,0499	—1,5342	—6,4589	1,003	+0,0501	0,1
0,2	0,9900	0,0995	1,0811	3,3238	1,010	0,1005	0,2
0,3	0,9776	0,1483	0,8073	2,2931	1,023	0,1517	0,3
0,4	0,9604	0,1960	0,6060	1,7809	1,040	0,2040	0,4
0,5	+0,9385	+0,2423	—0,4445	—1,4715	1,063	0,2579	0,5
0,6	0,9120	0,2867	0,3085	1,2604	1,092	0,3137	0,6
0,7	0,8812	0,3250	0,1907	1,1032	1,126	0,3719	0,7
0,8	0,8463	0,3688	—0,0868	0,9781	1,167	0,4329	0,8
0,9	0,8075	0,4059	+0,0056	0,8731	1,213	0,4971	0,9
1,0	+0,7652	+0,4401	+0,0883	—0,7812	1,266	0,5652	1,0
1,1	0,7196	0,4709	0,1622	0,6981	1,326	0,6375	1,1
1,2	0,6711	0,4983	0,2281	0,6211	1,394	0,7147	1,2
1,3	0,6201	0,5220	0,2865	0,5485	1,469	0,7973	1,3
1,4	0,5669	0,5419	0,3379	0,4791	1,553	0,8861	1,4
1,5	+0,5118	+0,5579	+0,3824	—0,4123	1,647	0,9817	1,5
1,6	0,4554	0,5699	0,4204	0,3476	1,750	1,085	1,6
1,7	0,3980	0,5778	0,4520	0,2847	1,864	1,196	1,7
1,8	0,3400	0,5815	0,4774	0,2237	1,990	1,317	1,8
1,9	0,2818	0,5812	0,4968	0,1644	2,128	1,448	1,9
2,0	+0,2239	+0,5767	+0,5104	—0,1070	2,280	1,591	2,0
2,1	0,1666	0,5683	0,5183	—0,0517	2,446	1,745	2,1
2,2	0,1104	0,5560	0,5268	+0,0015	2,629	1,914	2,2
2,3	0,0555	0,5399	0,5181	0,0523	2,830	2,098	2,3
2,4	0,0025	0,5202	0,5104	0,1005	3,049	2,298	2,4

2,5	— 0,0484	+ 0,4971	+ 0,4981	+ 0,1459	3,290	2,517	2,5
2,6	0,0968	0,4708	0,4813	0,1884	3,553	2,755	2,6
2,7	0,1424	0,4416	0,4605	0,2276	3,842	3,016	2,7
2,8	0,1850	0,4097	0,4359	0,2635	4,157	3,301	2,8
2,9	0,2243	0,3754	0,4079	0,2959	4,503	3,613	2,9
3,0	— 0,2501	— 0,3391	+ 0,3768	+ 0,3247	4,881	3,953	3,0
3,1	0,2921	0,3009	0,3431	0,3496	5,294	4,326	3,1
3,2	0,3202	0,2613	0,3070	0,3707	5,747	4,734	3,2
3,3	0,3443	0,2207	0,2691	0,3878	6,243	5,181	3,3
3,4	0,3643	0,1792	0,2296	0,4010	6,785	5,670	3,4
3,5	— 0,3801	+ 0,1374	— 0,1890	+ 0,4102	7,378	6,206	3,5
3,6	0,3918	0,0955	0,1477	0,4154	8,028	6,793	3,6
3,7	0,3992	0,0538	0,1061	0,4167	8,739	7,436	3,7
3,8	0,4026	+ 0,0128	0,0645	0,4141	9,517	8,140	3,8
3,9	0,4018	— 0,0272	+ 0,0234	0,4078	10,37	8,913	3,9
4,0	— 0,3971	— 0,0660	— 0,0169	+ 0,3979	11,30	9,759	4,0
4,1	0,3887	0,1033	0,0561	0,3846	12,32	10,69	4,1
4,2	0,3766	0,1386	0,0937	0,3680	13,44	11,71	4,2
4,3	0,3610	0,1719	0,1296	0,3484	14,67	12,82	4,3
4,4	0,3423	0,2028	0,1633	0,3260	16,01	14,05	4,4
4,5	— 0,3205	— 0,2311	— 0,1917	+ 0,3010	17,48	15,39	4,5
4,6	0,2961	0,2566	0,2235	0,2737	19,09	16,86	4,6
4,7	0,2693	0,2791	0,2494	0,2445	20,86	18,48	4,7
4,8	0,2404	0,2985	0,2723	0,2136	22,79	20,25	4,8
4,9	0,2097	0,3147	0,2920	0,1812	24,91	22,20	4,9
5,0	— 0,1776	— 0,3276	— 0,3085	+ 0,1479	27,24	24,34	5,0

* Определение, формулы и графики см. стр. 426.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$Y_0(x)$	$Y_1(x)$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x
5,0	-0,1776	-0,3276	-0,3085	+0,1479	27,24	24,34	5,0
5,1	0,1443	0,3371	0,3216	0,1137	29,79	26,68	5,1
5,2	0,1103	0,3432	0,3312	0,0792	32,58	29,25	5,2
5,3	0,0738	0,3460	0,3374	0,045	35,65	32,08	5,3
5,4	0,0412	0,3453	0,3402	+0,0,01	39,01	35,18	5,4
5,5	-0,0058	-0,3414	-0,3395	-0,0238	42,69	38,59	5,5
5,6	+0,0270	0,3343	0,3354	0,0568	46,74	42,33	5,6
5,7	0,0599	0,3241	0,3282	0,0887	51,17	46,44	5,7
5,8	0,0917	0,3110	0,3177	0,1192	56,04	50,95	5,8
5,9	0,1220	0,2951	0,3014	0,1481	61,38	55,90	5,9
6,0	+0,1506	-0,2767	-0,2882	-0,1750	67,23	61,34	6,0
6,1	0,1773	0,2559	0,2694	0,1998	73,66	67,32	6,1
6,2	0,2017	0,2329	0,2483	0,2223	80,72	73,89	6,2
6,3	0,2238	0,2081	0,2251	0,2422	88,46	81,10	6,3
6,4	0,2433	0,1816	0,1999	0,2596	96,96	89,03	6,4
6,5	+0,2601	-0,1538	-0,1732	-0,2741	106,3	97,73	6,5
6,6	0,2740	0,1250	0,142	0,2857	116,5	107,3	6,6
6,7	0,2851	0,0953	0,1162	0,2945	127,8	117,8	6,7
6,8	0,2931	0,0652	0,0864	0,3002	140,1	129,4	6,8
6,9	0,2981	0,0349	0,0562	0,3029	155,7	142,1	6,9
7,0	+0,3001	-0,0017	-0,0239	-0,3027	168,6	156,0	7,0
7,1	0,2991	+0,0252	+0,0012	0,2995	181,0	171,4	7,1
7,2	0,2931	0,0443	0,0338	0,2934	202,9	188,3	7,2
7,3	0,2832	0,0526	0,0528	0,2846	222,7	206,8	7,3
7,4	0,2786	0,1036	0,0907	0,2731	244,3	227,2	7,4

7,5	+0,2663	+0,1332	+0,1173	-0,2591	268,2	249,6	4,9
7,6	0,2516	0,1592	0,1424	0,2428	294,3	274,2	7,6
7,7	0,2346	0,1813	0,1658	0,2243	323,1	301,3	7,7
7,8	0,2154	0,2014	0,1872	0,2039	354,7	331,1	7,8
7,9	0,1944	0,2192	0,2055	0,1817	389,4	363,9	7,9
8,0	+0,1717	+0,2346	+0,2235	-0,1581	427,6	399,9	8,0
8,1	0,1475	0,2476	0,2381	0,1331	469,5	439,5	8,1
8,2	0,1222	0,2580	0,2501	0,1072	515,6	483,0	8,2
8,3	0,0960	0,2657	0,2595	0,0806	566,3	531,0	8,3
8,4	0,0692	0,2708	0,2662	0,0535	621,9	583,7	8,4
8,5	+0,0419	+0,2731	+0,2702	-0,0262	683,2	641,6	8,5
8,6	+0,0146	0,2728	0,2715	+0,0011	750,5	705,4	8,6
8,7	-0,0125	0,2697	0,2700	0,0200	824,4	775,5	8,7
8,8	0,0392	0,2641	0,2659	0,0314	905,8	852,7	8,8
8,9	0,0653	0,2559	0,2592	0,0799	991,2	937,5	8,9
9,0	-0,0903	+0,2453	+0,2499	+0,1043	1074	1031	9,0
9,1	0,1142	0,2321	0,2383	0,1275	1202	1134	9,1
9,2	0,1367	0,2174	0,2245	0,1491	1321	1247	9,2
9,3	0,1577	0,2004	0,2086	0,1691	1451	1371	9,3
9,4	0,1768	0,1816	0,1907	0,1871	1595	1508	9,4
9,5	-0,1939	+0,1613	+0,1712	+0,2012	1753	1658	9,5
9,6	0,2090	0,1495	0,1592	0,2171	1927	1824	9,6
9,7	0,2218	0,1406	0,1479	0,2287	2119	2006	9,7
9,8	0,2323	0,1202	0,1315	0,2379	2329	2207	9,8
9,9	0,2403	0,1084	0,1204	0,2447	2561	2428	9,9
10,0	-0,2459	+0,0435	+0,0557	+0,2490	2816	2671	10,0

* Определение, формулы и графики см. стр. 426.

21 Полиномы Лежандра (шар. вые функций)*

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
0,00	-0,5000	0,0000	0,3750	0,0000	0,3125	-0,0000
0,05	-0,4962	-0,0747	0,3657	0,0927	-0,2962	-0,1069
0,10	-0,4850	-0,1475	0,3379	0,1788	-0,2488	-0,1995
0,15	-0,4662	-0,2166	0,2928	0,2523	-0,1746	-0,2649
0,20	-0,4400	-0,2800	0,2320	0,3075	-0,0806	-0,2935
0,25	-0,4062	-0,3359	0,1577	0,3397	0,0243	-0,2799
0,30	-0,3650	-0,3825	0,0729	0,3454	0,1292	-0,2241
0,35	-0,3162	-0,4178	-0,0187	0,3225	0,2225	-0,1318
0,40	-0,2600	-0,4400	-0,1130	0,2706	0,2926	-0,0146
0,45	-0,1962	-0,4472	-0,2050	0,1917	0,3290	0,1106
0,50	-0,1250	-0,4375	-0,2891	0,0898	0,3232	0,2231
0,55	-0,0462	-0,4091	-0,3590	-0,0282	0,2708	0,3007
0,60	0,0400	-0,3600	-0,4080	-0,1526	0,1721	0,3226
0,65	0,1338	-0,2884	-0,4284	-0,2705	0,0347	0,2737
0,70	0,2350	-0,1925	-0,4121	-0,3562	-0,1253	0,1502
0,75	0,3438	-0,0703	-0,3501	-0,4164	-0,2808	-0,0342
0,80	0,4600	0,0900	-0,2330	-0,3995	-0,3918	-0,2397
0,85	0,5838	0,2603	-0,0506	-0,2857	-0,4030	-0,3913
0,90	0,7150	0,4725	0,2079	-0,0411	-0,2412	-0,3678
0,95	0,8538	0,7181	0,5541	0,3727	0,1875	+0,0112
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

* Определения, формулы и графики см. стр. 428.

22. Эллиптические интегралы*

а) Эллиптические интегралы 1-го рода: $F(k, \varphi)$, $k = \sin \alpha$

$\frac{\alpha}{\varphi}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1746	0,1746	0,1748	0,1749	0,1751	0,1752	0,1753	0,1754	0,1754
20	0,3491	0,3493	0,3499	0,3508	0,3520	0,3533	0,3545	0,3555	0,3561	0,3564
30	0,5236	0,5243	0,5263	0,5294	0,5334	0,5379	0,5422	0,5459	0,5484	0,5493
40	0,6981	0,6997	0,7043	0,7116	0,7213	0,7323	0,7436	0,7535	0,7604	0,7629
50	0,8727	0,8756	0,8842	0,8982	0,9173	0,9401	0,9647	0,9876	1,0041	1,0107
60	1,0472	1,0519	1,0600	1,0896	1,1226	1,1643	1,2125	1,2619	1,3014	1,3170
70	1,2217	1,2286	1,2495	1,2853	1,3372	1,4068	1,4944	1,5959	1,6918	1,7354
80	1,3963	1,4056	1,4344	1,4846	1,5597	1,6660	1,8125	2,0119	2,2653	2,4302
90	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	3,1534	∞

б) Эллиптические интегралы 2-го рода: $E(k, \varphi)$, $k = \sin \alpha$

$\frac{\alpha}{\varphi}$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	0,1745	0,1745	0,1744	0,1743	0,1742	0,1740	0,1739	0,1738	0,1737	0,1736
20	0,3491	0,3489	0,3483	0,3473	0,3462	0,3450	0,3438	0,3429	0,3422	0,3420
30	0,5236	0,5229	0,5209	0,5179	0,5141	0,5100	0,5061	0,5029	0,5007	0,5000
40	0,6981	0,6966	0,6921	0,6851	0,6763	0,6667	0,6575	0,6497	0,6446	0,6428
50	0,8727	0,8698	0,8614	0,8483	0,8317	0,8134	0,7954	0,7801	0,7697	0,7660
60	1,0472	1,0426	1,0290	1,0076	0,9801	0,9493	0,9184	0,8914	0,8728	0,8660
70	1,2217	1,2149	1,1949	1,1632	1,1221	1,0750	1,0266	0,9830	0,9514	0,9397
80	1,3963	1,3870	1,3597	1,3161	1,2590	1,1926	1,1225	1,0565	1,0054	0,9848
90	1,5708	1,5589	1,5238	1,4675	1,3931	1,3055	1,2111	1,1184	1,0101	1,0000

* Определения см. стр. 107.

в) Полные эллиптические интегралы

$$k = \sin \alpha$$

α (в град.)	К	Е	α	К	Е	α	К	Е
0°	1,5708	1,5708	30°	1,6858	1,4675	60°	2,1565	1,2111
1	1,5700	1,5707	31	1,6941	1,4608	61	2,1842	1,2015
2	1,5713	1,5703	32	1,7028	1,4539	62	2,2132	1,1920
3	1,5719	1,5697	33	1,7119	1,4469	63	2,2435	1,1826
4	1,5727	1,5689	34	1,7214	1,4397	64	2,2754	1,1732
5	1,5738	1,5678	35°	1,7312	1,4323	65	2,3088	1,1638
6	1,5751	1,5665	36	1,7415	1,4248	66	2,3439	1,1545
7	1,5767	1,5649	37	1,7522	1,4171	67	2,3809	1,1453
8	1,5785	1,5630	38	1,7633	1,4092	68	2,4158	1,1362
9	1,5805	1,5611	39	1,7748	1,4013	69	2,4610	1,1272
10	1,5828	1,5589	40	1,7868	1,3931	70	2,5046	1,1184
11	1,5854	1,5564	41	1,7992	1,3849	71	2,5507	1,1096
12	1,5882	1,5537	42	1,8122	1,3765	72	2,5998	1,1011
13	1,5913	1,5507	43	1,8256	1,3680	73	2,6521	1,0927
14	1,5946	1,5476	44	1,8396	1,3594	74	2,7081	1,0844
15	1,5981	1,5442	45	1,8541	1,3505	75	2,7681	1,0764
16	1,6020	1,5405	46	1,8691	1,3418	76	2,8327	1,0686
17	1,6061	1,5367	47	1,8848	1,3329	77	2,9026	1,0611
18	1,6105	1,5326	48	1,9011	1,3238	78	2,9786	1,0538
19	1,6151	1,5283	49	1,9180	1,3147	79	3,0617	1,0468

20	1,6200	1,5238	50	1,9356	1,3055	89	3,1534	1,0101
21	1,6252	1,5191	51	1,9539	1,2963	81	3,2553	1,0338
22	1,6307	1,5141	52	1,9729	1,2870	82	3,3699	1,0278
23	1,6363	1,5090	53	1,9927	1,2776	83	3,5004	1,0223
24	1,6426	1,5037	54	2,0133	1,2681	84	3,6519	1,0172
25	1,6490	1,4981	55	2,0347	1,2587	85	3,8317	1,0127
26	1,6557	1,4924	56	2,0571	1,2492	86	4,0528	1,0086
27	1,6627	1,4864	57	2,0804	1,2397	87	4,3387	1,0053
28	1,6701	1,4803	58	2,1047	1,2301	88	4,7427	1,0026
29	1,6777	1,4740	59	2,1300	1,2203	89	5,4349	1,0008
30	1,6858	1,4675	60	2,1565	1,2111	90	∞	1,0000

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}},$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} d\psi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} = \int_0^{\sin \varphi} dt \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}},$$

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}},$$

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} d\psi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} = \int_0^1 dt \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}}.$$

23. Интеграл вероятности

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt^*$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,25	0,1974	0,50	0,3829	0,75	0,5467
01	0,0080	26	0,2051	51	0,3899	76	0,5527
02	0,0160	27	0,2128	52	0,3969	77	0,5587
03	0,0239	28	0,2205	53	0,4039	78	0,5646
04	0,0319	29	0,2282	54	0,4108	79	0,5705
05	0,0399	0,30	0,2358	55	0,4177	0,80	0,5763
06	0,0478	31	0,2434	56	0,4245	81	0,5821
07	0,0558	32	0,2510	57	0,4313	82	0,5878
08	0,0638	33	0,2586	58	0,4381	83	0,5935
09	0,0717	34	0,2661	59	0,4448	84	0,5991
0,10	0,0797	35	0,2737	0,60	0,4515	85	0,6047
11	0,0876	36	0,2812	61	0,4581	86	0,6102
12	0,0955	37	0,2886	62	0,4647	87	0,6157
13	0,1034	38	0,2961	63	0,4713	88	0,6211
14	0,1113	39	0,3035	64	0,4778	89	0,6265
15	0,1192	0,40	0,3108	65	0,4843	0,90	0,6319
16	0,1271	41	0,3182	66	0,4907	91	0,6372
17	0,1350	42	0,3255	67	0,4971	92	0,6424
18	0,1428	43	0,3328	68	0,5035	93	0,6476
19	0,1507	44	0,3401	69	0,5098	94	0,6528
0,20	0,1585	0,45	0,3473	0,70	0,5161	95	0,6579
21	0,1663	46	0,3545	71	0,5223	96	0,6629
22	0,1741	47	0,3616	72	0,5285	97	0,6680
23	0,1819	48	0,3688	73	0,5346	98	0,6729
24	0,1897	49	0,3759	74	0,5407	99	0,6778
0,25	0,1974	0,50	0,3829	0,75	0,5467	1,00	0,6827

* График функции и ее применение см. стр. 510

Продолжение

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,00	0,6827	1,35	0,8230	1,70	0,9109	2,25	0,9756
01	0,6875	36	0,8262	71	0,9127	30	0,9786
02	0,6923	37	0,8293	72	0,9146	35	0,9812
03	0,6970	38	0,8324	73	0,9164	40	0,9836
04	0,7017	39	0,8355	74	0,9181	45	0,9857
05	0,7063	1,40	0,8385	75	0,9199	2,50	0,9876
06	0,7109	41	0,8415	76	0,9216	55	0,9892
07	0,7154	42	0,8444	77	0,9233	60	0,9907
08	0,7199	43	0,8473	78	0,9249	65	0,9920
09	0,7243	44	0,8501	79	0,9265	70	0,9931
1,10	0,7287	45	0,8529	1,80	0,9281	75	0,9940
11	0,7330	46	0,8557	81	0,9297	80	0,9949
12	0,7373	47	0,8584	82	0,9312	85	0,9956
13	0,7415	48	0,8611	83	0,9327	90	0,9963
14	0,7457	49	0,8638	84	0,9342	95	0,9968
15	0,7499	1,50	0,8664	85	0,9357	3,00	0,99730
16	0,7540	51	0,8690	86	0,9371	10	0,99806
17	0,7580	52	0,8715	87	0,9385	20	0,99863
18	0,7620	53	0,8740	88	0,9399	30	0,99903
19	0,7660	54	0,8764	89	0,9412	40	0,99933
1,20	0,7699	55	0,8789	1,90	0,9426	50	0,99953
21	0,7737	56	0,8812	91	0,9439	60	0,99968
22	0,7775	57	0,8836	92	0,9451	70	0,99978
23	0,7813	58	0,8859	93	0,9464	80	0,99986
24	0,7850	59	0,8882	94	0,9476	90	0,99990
25	0,7887	1,60	0,8904	95	0,9488	4,00	0,99994
26	0,7923	61	0,8926	96	0,9500	4,417	$1-10^{-5}$
27	0,7959	62	0,8948	97	0,9512		
28	0,7995	63	0,8969	98	0,9523	4,892	$1-10^{-6}$
29	0,8029	64	0,8990	99	0,9534	5,327	$1-10^{-7}$
1,30	0,8064	65	0,9011	2,00	0,9545		
31	0,8098	66	0,9031	05	0,9556		
32	0,8132	67	0,9051	10	0,9563		
33	0,8165	68	0,9070	15	0,9568		
34	0,8198	69	0,9090	20	0,9572		
1,35	0,8230	1,70	0,9109	2,25	0,9576		

II. ГРАФИКИ

А. Элементарные функции

I. Многочлены

Линейная функция: $y = ax + b$ (рис. 1).

График — *прямая линия*. Функция монотонно возрастает при $a > 0$, монотонно убывает при $a < 0$, постоянна при $a = 0$. Пересечения с осями: $A(-b/a, 0)$, $B(0, b)$. Подробнее см. стр. 224.

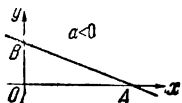


Рис. 1.

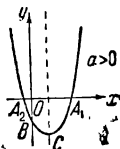


Рис. 2.

Квадратный трехчлен: $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 2).

График — *парабола* с вертикальной осью (осью симметрии) $x = -b/2a$. При $a > 0$ функция сначала убывает, достигает минимума, затем возрастает; при $a < 0$ возрастает, достигает максимума и убывает. Пересечения с осью x :

$A_1, A_2 \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right)$, с осью y : $B(0, c)$. Экстремум $C \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$. Подробнее см. стр. 233.

Многочлен 3-й степени: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (рис. 3).

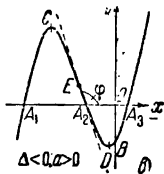
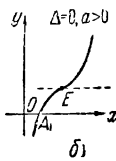
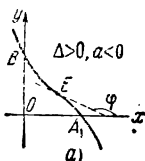


Рис. 3.

График — *кубическая парабола*. Поведение функции зависит от знаков a и $\Delta = 3ac - b^2$. Если $\Delta \geq 0$ (рис. 3, а и б), функция монотонно возрастает при $a > 0$ и монотонно убывает при $a < 0$. Если $\Delta < 0$, функция имеет один максимум и один минимум (рис. 3, в); при $a > 0$ она сначала возрастает от $-\infty$ до максимума, затем убывает до минимума и

снова возрастает до $+\infty$; при $a < 0$ она убывает от $+\infty$ до минимума, возрастает до максимума и снова убывает до $-\infty$. Пересечения с осью x определяются действительными корнями уравнения $y=0$ *; их может быть один, два (в этом случае в одной из точек происходит касание) или три: A_1, A_2 и A_3 . Пересечение с осью y : $B(0, d)$. Экстремумы

$$C, D\left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a}, d \pm \frac{2b^3 - 9abc \pm (6ac - 2b^2) \sqrt{-\Delta}}{27a^3}\right).$$

Точка перегиба, являющаяся центром симметрии кривой: $E\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^2 - 9abc}{27a^3} + d\right)$; касательная в ней имеет угловой коэффициент $\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_E = \frac{\Delta}{3a}$.

Многочлен n -й степени:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (\text{рис. 4}).$$

График—кривая n -го порядка**, параболического типа. Если n нечетное, то y непрерывно изменяется при $a_0 > 0$ от $-\infty$ до $+\infty$, а при $a_0 < 0$ от $+\infty$ до $-\infty$; кривая может пересекать ось x от 1 до n раз ***. Экстремумов эта функция или совсем не имеет, или имеет их в четном числе (от 2 до $n-1$), максимумы и минимумы чередуются; точек перегиба—нечетное число (от 1 до $n-2$). Если n четное, то y непрерывно изменяется при $a_0 > 0$ от $+\infty$ до $+\infty$, а при $a_0 < 0$ от $-\infty$ до $-\infty$, либо не пересекая вовсе оси x , либо пересекая (или касаясь ее) от 1 до n раз. Функция имеет нечетное число экстремумов (от 1 до $n-1$); максимумы и минимумы чередуются; точек перегиба—четное число (от 0 до $n-2$). Асимптот и особых точек эти кривые не имеют.

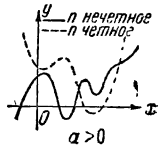


Рис. 4.

При вычерчивании графика рекомендуется сначала найти экстремумы и точки перегиба (а также значения производных в последних), нанести эти точки и касательные к кривой в них и затем уже проводить непрерывную плавную кривую.

При необходимости частого пользования графиками многочленов 4-й степени $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ при фиксированном a удобно вычертить график функции $y = ax^4$ (см. ниже), а затем, перенеся начало координат в точку $\left(-\frac{b}{4a}, 0\right)$, привести уравнение к виду

* О решении кубического уравнения см. стр. 108.

** О порядке кривой см. стр. 123.

*** О решении алгебраического уравнения n -й степени см. стр. 171 и 174.

$Y=aX^4+a'X^3+b'X+c'$ и произвести геометрическое сложение ординат кривой $Y=aX^4$ и параболы $Y=a'X^2+b'X+c'$.

Степенная функция: $y=ax^n$ (n —целое >1) (рис. 5).

График—парабола n -го порядка. 1) $a=1$; кривая $y=x^n$ проходит через точки $O(0, 0)$ и $A(1, 1)$, касаясь оси x в начале координат. Если n четное (рис. 5, а), кривая симметрична относительно y и имеет в начале координат минимум; если же n нечетное (рис. 5, б), то кривая симметрична относительно начала координат, в начале — точка перегиба. Асимптот нет. 2) Общий

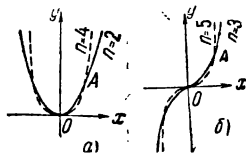


Рис. 5.

случай. Кривая $y=ax^n$ получается из кривой $y=x^n$ вытягиванием по направлению оси y в $|a|$ раз, и если $a < 0$, то она является зеркальным отображением кривой $y=|a|x^n$ относительно оси x' .

2. Дробные функции

Обратная пропорциональность: $y=\frac{a}{x}$ (рис. 6).

График—равносторонняя гипербола с асимптотами — осями координат. Разрыв при $x=0$ ($y=\pm\infty$). Если $a > 0$, функция убывает (от 0 до $-\infty$ и от $+\infty$ до 0 (сплошная кривая в 1-й и 3-й четвертях); если $a < 0$, функция возрастает от 0 до $+\infty$ и от $-\infty$ до 0 (пунктирная кривая во 2-й и 4-й четвертях). Вершины гиперболы $A, (B \pm V|a|, \pm V|a|)$. Экстремумов нет. Подробнее см. стр. 230—232.

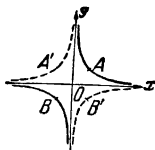


Рис. 6.

Дробно-линейная функция: $y=\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}$ (рис. 7).

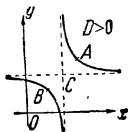


Рис. 7.

График—равносторонняя гипербола с асимптотами, параллельными осям координат; центр $C(-\frac{b_2}{a_2}, \frac{a_1}{a_2})$. Параметр, соответствующий a в предыдущей функции: $a=-\frac{D}{a_2^2}$, где $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, вер-

шины гиперболы $A, B \left(-\frac{b_2 \pm V|D|}{a_2}, \frac{-c_1 \pm V|D|}{a_2} \right)$.

Разрыв функции происходит при $x = -\frac{b_2}{a_2}$. Если $D < 0$, то функция убывает от $\frac{a_1}{a_2}$ до $-\infty$ и от $+\infty$ до $\frac{a_1}{a_2}$; если $D > 0$, функция возрастает от $\frac{a_1}{a_2}$ до $+\infty$ и от $-\infty$ до $\frac{a_1}{a_2}$.

Функция $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \left(= \frac{ax^2 + bx + c}{x^2} \right)$ (рис. 8).
 $|b \neq 0, c \neq 0$. При $b = 0$ см. стр. 116, и $c = 0$ см. стр. 112.]

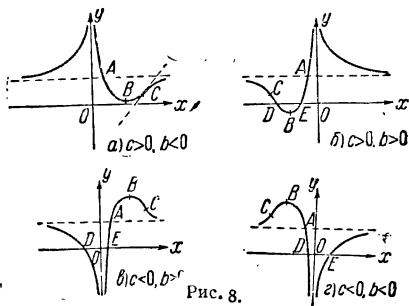


Рис. 8.

График—кривая 3-го порядка с двумя асимптотами: $x=0$ и $y=a$; она состоит из двух ветвей: одной, соответствующей монотонному изменению y от a до $+\infty$ (или $-\infty$), и другой, проходящей через 3 характерные точки: пересечение с асимптотой $A\left(-\frac{c}{b}, a\right)$, экстремум $B\left(-\frac{2c}{b}, a - \frac{b^2}{4c}\right)$ и точку перегиба $C\left(-\frac{3c}{b}, a - \frac{2b}{9c}\right)$. Четыре случая возможного расположения этих ветвей зависят от знаков b и c (рис. 8). Точек пересечения с осью x может быть две, одна (касание) или ни одной $D, E\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$ в зависимости от знака $b^2 - 4ac$.

Функция $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ (рис. 9).

График—кривая 3-го порядка, симметричная относительно вертикальной прямой $x = -\frac{b}{2a}$ и имеющая асимптотой ось x . Поведение функции зависит от знаков a и $\Delta = 4ac - b^2$. Рассмотрен только случай $a > 0$; при $a < 0$ сле-

дует рассмотреть кривую $y = \frac{1}{(-a)x^2 - bx - c}$ и отобразить ее симметрично относительно оси x .

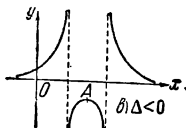
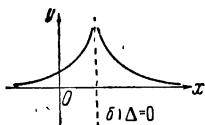
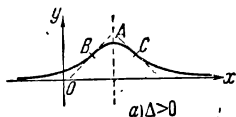


Рис. 9.

Максимум $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$, точки разрыва: $x = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$ (рис. 9, в).

Функция $y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}$ (рис. 10).

График — кривая 3-го порядка проходит через начало координат и имеет асимптотой ось x . Поведение функции зависит от знаков a и $\Delta = 4ac - b^2$, а также от знаков корней α и β уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (если $\Delta < 0$) и от знака b , если $\Delta = 0$. Рассмотрен только случай $a > 0$; при $a < 0$

следует рассмотреть кривую $y = \frac{x}{(-a)x^2 - bx - c}$ и отобразить ее симметрично относительно оси x .

а) $\Delta > 0$. Функция непрерывна, убывает от 0 до минимума, возрастает до максимума и вновь убывает до 0.

Минимум и максимум $A, B\left(\mp \sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{-b \mp 2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$, три точки перегиба (рис. 10, а).

б) $\Delta = 0$. Функция непрерывна и положительна при любом x . Растет от 0 до максимума и убывает до 0. Максимум $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$, точки перегиба B, C .

$$\left(-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}}, \frac{3a}{\Delta}\right).$$

наклон касательных в них

$$\operatorname{tg} \varphi = \mp a^2 \left(\frac{3}{\Delta}\right)^{3/2}$$

(рис. 9, а).

б) $\Delta = 0$. Функция положительна при любом x . Растет от 0 до $+\infty$, терпит бесконечный разрыв при $x = -\frac{b}{a}$ и убывает от $+\infty$ до 0 (рис. 9, б).

в) $\Delta < 0$. Функция растет от 0 до $+\infty$, терпит бесконечный разрыв, переходит от $-\infty$ к $-\infty$ через точку максимума, терпит второй разрыв и убывает от $+\infty$ до 0.

б) $\Delta = 0$. Поведение функции зависит от знака b : 1) $b > 0$; функция убывает от 0 до $-\infty$, терпит разрыв, растет от $-\infty$ до максимума и убывает до нуля (рис. 10, δ_1), максимум $A\left(+\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{1}{2\sqrt{ac}+b}\right)$; 2) $b < 0$; функция убывает от 0 до минимума, проходит через 0 и растет до $+\infty$, терпит бесконечный разрыв и убывает от $+\infty$ до 0 (рис. 10, δ_2); минимум $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}}, -\frac{1}{2\sqrt{ac}-b}\right)$.

В обоих случаях функция имеет по одной точке перегиба и разрыв при $x = -\frac{b}{2a}$.

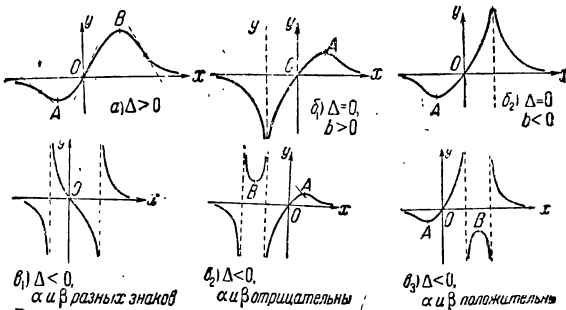


Рис. 10.

в) $\Delta > 0$. Две точки разрыва: $x = \alpha$ и $x = \beta$; поведение функции зависит от знаков α и β :

1) α и β разных знаков; функция убывает от 0 до $-\infty$, от $+\infty$ до $-\infty$ и от $+\infty$ до 0; экстремумов нет (рис. 10, ϵ_1);

2) α и β отрицательны; функция убывает от 0 до $-\infty$, затем изменяется от $+\infty$ до $+\infty$, проходя через точку минимума, и, наконец, возрастает от $-\infty$ до максимума и убывает до нуля; точки максимума и минимума те же, что и в случае а) (рис. 10, ϵ_2);

3) α и β положительных; функция убывает от 0 до минимума и возрастает до $+\infty$, затем изменяется от $-\infty$ до $-\infty$, проходя через точку максимума, и, наконец, убывает от $+\infty$ до 0; точки максимума и минимума те же, что и в случае а) (рис. 10, ϵ_3).

Степенная функция: $y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$ (n — целое положительное) (рис. 11).

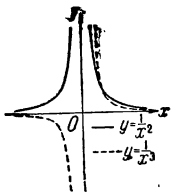


Рис. 11.

График — кривая *гиперболического типа* с асимптотами — осями координат. Разрыв при $x=0$. Если $a > 0$, функция при нечетном n убывает от 0 до $-\infty$ и от $+\infty$ до 0, а при четном n возрастает от 0 до $+\infty$ и убывает от $+\infty$ до 0, оставаясь всегда положительной. Если $a < 0$, функция при нечетном n возрастает от 0 до $+\infty$ и от $-\infty$ до 0, а при четном n убывает от 0 до $-\infty$ и возрастает от $-\infty$ до 0, оставаясь всегда отрицательной. Экстремумов нет. Кривая приближается асимптотически к оси x тем быстрее, а к оси y тем медленнее,

чем больше n . При n нечетном кривая симметрична относительно начала координат, а при n четном — относительно оси y . На рис. 11 приведено два примера: $n = 2$ и $n = 3$.

3. Иррациональные функции

Квадратный корень из двучлена:

$y = \sqrt{ax+b}$ (рис. 12).

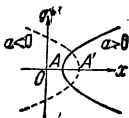


Рис. 12.

График — *парабола*, ее ось — ось x , вершина: $A(-b/a, 0)$, параметр $p = a/2$. Область существования и поведение функции зависят от знака a (см. рис.). Функция двузначна, экстремумов не имеет. Подробнее о параболе см. стр. 233.

Квадратный корень из трехчлена:

$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ (рис. 13).

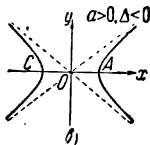
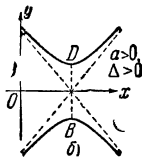
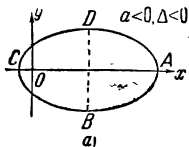


Рис. 13.

График — *эллипс* при $a < 0$ и *гипербола* при $a > 0$; одна из осей — ось x , другая — прямая $x = -b/2a$, вершины

$A, C \left(-\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right)$ и $B, D \left(-\frac{b}{2a}, \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a}} \right)$, где

$\Delta = 4ac - b^2$. Область существования и поведение функций зависят от знаков a и Δ (см. рис.). Функция двузначна, имеет экстремум, если Δ и a одного знака (точки B и D). При $a < 0$ и $\Delta > 0$ функция принимает только мнимые значения и кривой не существует ни при каких значениях x . Подробнее об эллипсе и гиперболе см. стр. 228—232.

Степенная функция: $y = ax^k = ax^{\pm m/n}$ (m и n — целые взаимно простые числа). Рассмотрен случай $a = 1$ (при $a \neq 1$ кривая по сравнению с $y = x^k$ вытянута в направлении оси y в $|a|$ раз и, если a отрицательное, — зеркально отражена относительно оси x).

1) $k > 0$, $y = x^{m/n}$. График (рис. 14) проходит через точки $(0, 0)$ и $(1, 1)$. При $k > 1$ касается (в начале) оси x ; при $k < 1$ касается (в начале) оси y . При n четном кривая сим-

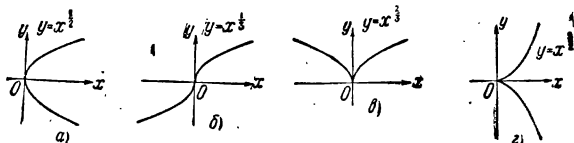


Рис. 14.

метрична относительно оси x (функция двузначна), при m четном — симметрична относительно оси y , при m и n нечетных — симметрична относительно начала. В связи с этим кривая может иметь в начале координат вершину, точку перегиба или точку возврата (см. рис.); асимптот не имеет.

2) $k < 0$, $y = x^{-m/n}$. График — кривая гиперболического типа с асимптотами — осями координат (рис. 15). Разрыв

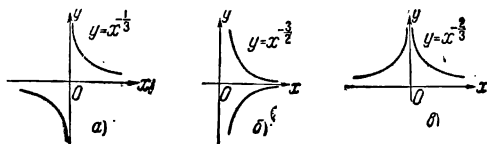


Рис. 15.

при $x = 0$. Кривая приближается асимптотически к оси x тем быстрее, а к оси y тем медленнее, чем больше $|k|$. Симметрия относительно осей или начала зависит от четности или нечетности m и n , так же как и в случае $k > 0$ (см. выше); этим определяется поведение функции (см. рис.); экстремумов нет.

1. Показательные и логарифмические функции

Показательная функция: $y = a^x = e^{bx}$ ($a > 0$, $b = \ln a$) (рис. 16).

График — *показательная кривая* (при $a = e$ — *натуральная показательная кривая* $y = e^x$). Функция принимает только

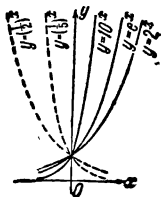


Рис. 16.

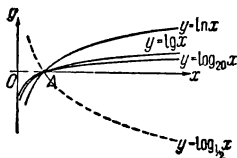


Рис. 17.

положительные значения. При $a > 1$ (т. е. $b > 0$) монотонно возрастает от 0 до ∞ ; при $a < 1$ (т. е. $b < 0$) монотонно убывает от ∞ до 0 — тем быстрее, чем больше $|b|$. Кривая проходит через точку $A(0, 1)$ и приближается асимптотически к оси x (при $b > 0$ — слева, при $b < 0$ — справа) тем

быстрее, чем больше $|b|$. Функция $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, возрастает при $a < 1$ и убывает при $a > 1$.

Логарифмическая функция: $y = \log_a x$ ($a > 0$) (рис. 17).

График — *логарифмика* (зеркальное отображение показательной кривой относительно биссектрисы $y = x$; при $a = e$ —

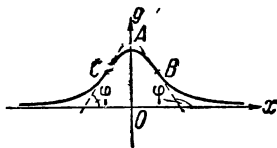


Рис. 18.

натуральная логарифмика $y = \ln x$). Функция существует только при $x > 0$. При $a > 1$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, при $a < 1$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$ тем медленнее, чем больше $|\ln a|$. Кривая проходит через точку $A(1, 0)$ и приближается асимптотически к оси y (при $a > 1$

снизу, при $a < 1$ сверху) тем быстрее, чем больше $|\ln a|$.

Функция $y = e - (ax)^2$ (рис. 18).

Функция возрастает от 0 до 1 и убывает от 1 до 0; кривая симметрична относительно оси y и асимптотически

приближается к оси x тем быстрее, чем больше a . Максимум в точке $A(0, 1)$, точки перегиба B и $C\left(\pm \frac{1}{a\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, наклоны касательных в них: $\operatorname{tg} \varphi = \mp a\sqrt{\frac{2}{e}}$. Важный частный случай — кривая нормального закона распределения ошибок (кривая Гаусса): $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ (ее график и приложения к теории вероятностей см. стр. 509).

Ф у н к ц и я $y = ae^{bx+cx^2}$ (рис. 19).

Кривая симметрична относительно вертикальной прямой $x = -\frac{b}{2c}$. Пересекает только ось y в точке $D(0, a)$. Поведение

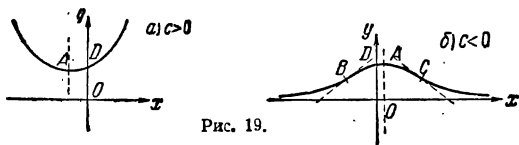


Рис. 19.

ние функции зависит от знаков a и c . Рассмотрен только случай $a > 0$; при $a < 0$ следует отобразить кривую симметрично относительно оси x .

а) $c > 0$. Функция убывает от $+\infty$ до минимума и возрастает до $+\infty$, оставаясь всегда положительной. Минимум:

$A\left(-\frac{b}{2c}, ae^{-\frac{b^2}{4c}}\right)$, точек перегиба и асимптот нет (рис. 19, а).

б) $c < 0$. Функция возрастает от 0 до максимума и убывает до нуля. Максимум $A\left(-\frac{b}{2c}, ae^{-\frac{b^2}{4c}}\right)$, точки перегиба

$B, C\left(\frac{-b \pm \sqrt{-2c}}{2c}, ae^{\frac{-(b^2+2c)}{4c}}\right)$, асимптота — ось x (рис. 19, б).

Ф у н к ц и я $y = ae^{bx+cdx}$ (рис. 20).

Кривую удобно строить, складывая графически ординаты кривых (пунктирных) $y_1 = ae^{bx}$ и $y_2 = ce^{dx}$ (см. стр. 118). Функция непрерывная. В случаях, когда ни одно из чисел a, b, c и d не равно нулю, кривая имеет один из следующих четырех видов (причем графики, изображенные на

рис. 20, в зависимости от знаков параметров, могут быть симметрично отображены относительно осей координат:

а) a и c одного знака, b и d одного знака. Функция монотонно изменяется, не меняя знака, от 0 до $+\infty$ (или $-\infty$) или от $+\infty$ ($-\infty$) до 0; точек перегиба нет, ось x —асимптота (рис. 20, а).

б) a и c —одного знака, b и d —разных знаков. Функция изменяется от $+\infty$ до $+\infty$ или от $-\infty$ до $-\infty$, не меняя знака и проходя через экстремум; точек перегиба нет (рис. 20, б).

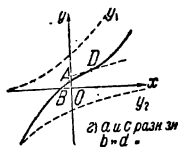
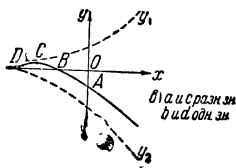
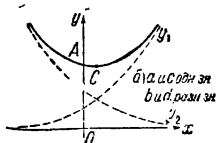
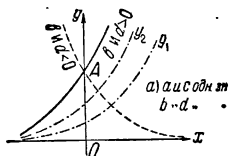


Рис. 20.

в) a и c —разных знаков, b и d —одного знака. Функция изменяется от 0 до $+\infty$ ($-\infty$) или от $+\infty$ ($-\infty$) до 0, один раз меняя знак и проходя через один экстремум C и одну точку перегиба D ; ось x —асимптота (рис. 20, в).

г) a и c —разных знаков, b и d —разных знаков. Функция монотонно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ или от $+\infty$ до $-\infty$, не имея экстремумов, но проходя через одну точку перегиба (рис. 20, г).

Пересечение с осью y : $A(0, a+c)$,

пересечение с осью x : $B\left[x = \frac{1}{d-b} \ln\left(-\frac{a}{c}\right)\right]$,

экстремум: $C\left[x = \frac{1}{d-b} \ln\left(-\frac{ab}{cd}\right)\right]$,

точка перегиба: $D\left[x = \frac{1}{d-b} \ln\left(-\frac{ab^2}{cd^2}\right)\right]$.

Функция $y = ax^b e^{cx}$ (рис. 21).

Рассмотрен случай $a > 0$ (при $a < 0$ кривую следует отобразить симметрично оси x), и значения x рассмотрены только положительные. Функция имеет только положительные значения. При $b > 0$ кривая проходит через на-

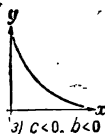
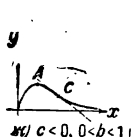
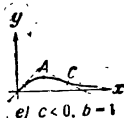
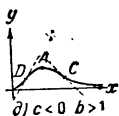
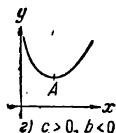
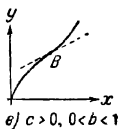
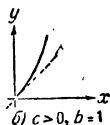
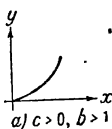


Рис. 21.

часть: касательная в начале координат будет: ось x при $b > 1$, биссектриса координатного угла $y = x$ при $b = 1$, ось y при $b < 1$. При $b < 0$ ось y является асимптотой. При $c > 0$ функция безгранично растет, при $c < 0$ асимптотически приближается к нулю. Если b и c — разных знаков, функция имеет экстремум

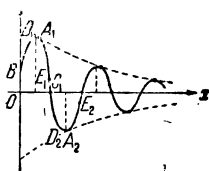
$$A \left(x = -\frac{b}{c} \right);$$

кривая может иметь 0, 1 или 2 точки перегиба:

$$C, D \left(x = -\frac{b \pm \sqrt{b}}{c}, \text{ если } b=1, \text{ то } x = -\frac{2}{c} \right).$$

Функция $y = Ae^{-ax} \sin(\omega x + \varphi_0)$ (рис. 22).

График—*кривая затухающего колебания* колеблется около оси x , асимптотически к ней приближаясь, причем две показательные кривые $y = \pm Ae^{-ax}$ огибают кривую, соприкасаясь с ней в точках $A_1, A_2, \dots$ с координатами:



$$\left[\frac{(k+1/2)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k Ae^{-ax} \right]$$

Пересечения с осями x :

$$B(0, A \sin \varphi_0),$$

$$C_1, C_2, \dots \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0 \right);$$

Рис. 22.

экстремумы: $D_1, D_2, \dots$ при $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + \alpha}{\omega}$; точки перегиба:

$E_1, E_2, \dots$ при $x = \frac{k\pi - \varphi_0 - 2\alpha}{\omega}$, где $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega}{a}$.

Величина $\delta = \ln \left| \frac{y_i}{y_{i+1}} \right| = a \frac{\pi}{\omega}$ (где y_i и y_{i+1} — ординаты двух соседних экстремумов) называется *логарифмическим декрементом затухания*.

5. Тригонометрические функции*

Синус: $y = A \sin(\omega x + \varphi_0)$ (рис. 23).

График—*синусоид*. При $A = \omega = 1$ и $\varphi_0 = 0$ *обыкновенная синусоида*, $y = \sin x$ (рис. 23, а)—непрерывная кривая с периодом $T = 2\pi$. Пересечения с осью x : $B_1, B_2, \dots (k\pi, 0)$,

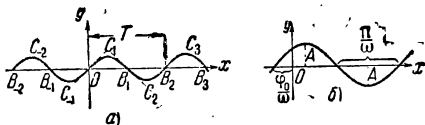


Рис. 23.

они же—точки перегиба с углом наклона к оси x $\varphi = \pm \pi/4$. Экстремумы $C_1, C_2, \dots [(k+1/2)\pi, (-1)^k]$. *Общая синусоида* (рис. 23, б), по сравнению с обыкновенной, вытянута

* Формулы тригонометрии см. стр. 206—208.

вдоль оси y в $|A|$ раз ($|A|$ — амплитуда), сжата вдоль оси x в ω раз (ω — частота) и сдвинута влево на отрезок $\frac{\varphi_0}{\omega}$ (φ_0 — начальная фаза). Период $T = \frac{2\pi}{\omega}$; пересечения с осью x : $B_1, B_2, \dots \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0 \right)$; экстремумы $C_1, C_2, \dots$

$\left[\frac{(k + \frac{1}{2})\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k A \right]$ (см. также стр. 208).

К о с и н у с: $y = A \cos(\omega x + \varphi_0)$ (рис. 24); это уравнение можно записать и так:

$$y = A \sin\left(\omega x + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

График — *синусоида* (см. выше). Обыкновенная косинусоида $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

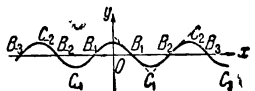


Рис. 24.

Пересечения с осью x :

$B_1, B_2, \dots [(k + \frac{1}{2})\pi, 0]$, они же — точки перегиба с углом наклона к оси x $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$. Экстремумы: $C_1, C_2, \dots [k\pi; (-1)^k]$.

Т а н г е н с: $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 25).

График — *тангенсоида*, периодическая кривая с периодом $T = \pi$ и разрывами при $x = (k + \frac{1}{2})\pi$. При изменении x от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ y монотонно растет от $-\infty$ до $+\infty$, затем значения y повторяются. Пересечения с осью x : $0, A_1, A-1, A_2, A-2 \dots (k\pi, 0)$, они же — точки перегиба с углом наклона к оси x : $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

К о т а н г е н с: $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 26), иначе, $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

График — *тангенсоида* (см. выше), зеркально отображенная относительно оси x и сдвинутая влево на отрезок $x = \frac{\pi}{2}$. При изменении x от 0 до π , y монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$, затем значения y повторяются. Пересечения с осью x : $A_1, A-1, A_2, A-2, \dots [(k + \frac{1}{2})\pi, 0]$, они же — точки перегиба с углом наклона к оси x $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

При изменении x от 0 до π , y монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$, затем значения y повторяются.

Пересечения с осью x : $A_1, A-1, A_2, A-2, \dots [(k + \frac{1}{2})\pi, 0]$, они же — точки перегиба с углом наклона к оси x $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

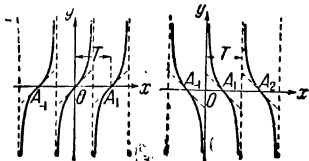


Рис. 25.

Рис. 26.

Секанс: $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ (рис. 27).

График — *секансоида*, периодическая кривая с периодом $T=2\pi$ и разрывами при $x = (k + \frac{1}{2})\pi$. $|y| \geq 1$. Максимумы

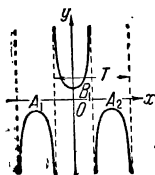


Рис. 27.

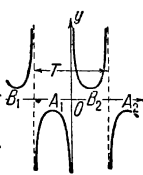


Рис. 28.

$A_1, A_2, \dots [(2k+1)\pi, -1]$,
минимумы $B_1, B_2, \dots$
 $(2k\pi, +1)$.

К о с е к а н с:

$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ (рис. 28),

иначе, $y = \sec(x - \frac{\pi}{2})$.

График — *секансоида*,
сдвинутая вправо на от-

резок $x = \frac{\pi}{2}$. Разрывы

при $x = k\pi$. Максимумы $A_1, A_2; \dots [\frac{4k+3}{2}\pi, -1]$, мини-
мумы $B_1, B_2, \dots [\frac{4k+1}{2}\pi, 1]$.

6. Обратные тригонометрические функции *

Графики этих функций получаются из графиков тригонометрических функций путем зеркального отображения относительно биссектрисы координатного угла $y=x$.

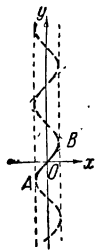


Рис. 29.

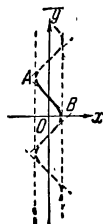


Рис. 30.

А р к с и н у с: $y = \text{Arcsin } x$
(рис. 29).

Функция существует только
при $|x| \leq 1$, многозначна.
Главное значение $y = \arcsin x$
(отмечено сплошной линией)
монотонно возрастает от
 $A(-1, -\frac{\pi}{2})$ до $B(+1, +\frac{\pi}{2})$;
в начале координат — точка
перегиба (с углом наклона
 $\varphi = \frac{\pi}{4}$), она же — центр симме-
трии кривой.

А р к к о с и н у с:
 $y = \text{Arccos } x$ (рис. 30).

Та же кривая, что и для $\text{Arcsin } x$, но опущенная на
отрезок $\frac{\pi}{2}$. Функция существует только при $|x| \leq 1$,
многозначна. Главное значение $y = \arccos x$ монотонно убы-

* Определения и формулы см. стр. 212.

вает от $A(-1, +\pi)$ к $B(+1, 0)$; в точке $(0, \frac{\pi}{2})$ — центр симметрии и точка перегиба кривой (с углом наклона к оси x : $\varphi = -\frac{\pi}{4}$).

А р к т а н г е н с: $y = \text{Arctg } x$ (рис. 31).

Функция многозначна. Главное значение $y = \text{arctg } x$ монотонно возрастает

от $(-\infty, -\frac{\pi}{2})$ до

$(+\infty, +\frac{\pi}{2})$; в на-

чале координат — точка перегиба (с углом наклона

$\varphi = \frac{\pi}{4}$), она же —

центр симметрии

кривой. Остальные значения y получаются из главного пу-

тем прибавления величины $\pm k\pi$. Асимптоты $y = \pm k \frac{\pi}{2}$.

А р к к о т а н г е н с: $y = \text{Arcctg } x$ (рис. 32).

Функция многозначна. Главное значение $y = \text{arcctg } x$ монотонно убывает от $(-\infty, \pi)$ до $(+\infty, 0)$; точка перегиба (центр симметрии) $A(0, \frac{\pi}{2})$ с углом наклона $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Остальные значения y получаются из главного путем прибавления величины $\pm k\pi$. Асимптоты $y = \pm k\pi$.

7. Гиперболические функции *

Г и п е р б о л и ч е с к и й с и н у с: $y = \text{sh } x$ (рис. 33).

Функция нечетная, монотонно

возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

В начале координат — точка

перегиба ($\varphi = \frac{\pi}{4}$) и центр сим-

метрии кривой. Асимптот нет.

Г и п е р б о л и ч е с к и й

к о с и н у с: $y = \text{ch } x$ (рис. 34).

График — *цепная линия* (см.

стр. 139). Функция четная; при

$x < 0$ убывает от $-\infty$ до 1,

при $x > 0$ возрастает от 1 до

$+\infty$. Минимум в точке $A(0, 1)$;

асимптот нет. Кривая расположена симметрично относи-

тельно оси y , выше параболы $y = 1 + x^2/2$, начерченной пунктиром.

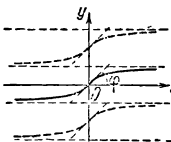


Рис. 31.

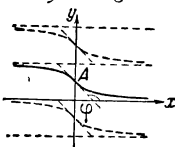


Рис. 32.

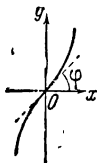


Рис. 33.

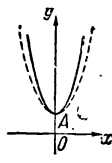


Рис. 34.

* Теоретические сведения см. стр. 215. Таблицы см. стр. 64.

Гиперболический тангенс: $y = \operatorname{th} x$ (рис. 35).

Функция нечетная, монотонно возрастает от -1 до $+1$. В начале координат—точка перегиба ($\varphi = \frac{\pi}{4}$) и центр симметрии кривой. Две асимптоты: $y = \pm 1$.

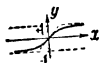


Рис. 35.

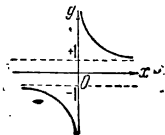


Рис. 36.

Гиперболический котангенс: $y = \operatorname{cth} x$ (рис. 36)

Функция нечетная, разрыв при $x=0$. При $x < 0$ убывает от -1 до $-\infty$, при $x > 0$ убывает от $+\infty$ до $+1$. Экстремумов и точек перегиба нет. Три асимптоты: $x=0$, $y = \pm 1$.

8. Обратные гиперболические функции*

Графики получаются из графиков гиперболических функций путем зеркального отображения относительно биссектрисы координатного угла $y=x$.

А р е а-с и н у с: $v = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (рис. 37).

Функция нечетная; монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. В начале координат—точка перегиба ($\varphi = \frac{\pi}{4}$) и центр симметрии кривой. Асимптот не имеет.

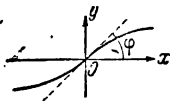


Рис. 37.

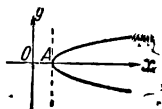


Рис. 38.

А р е а-к о с и н у с: $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$ (рис. 38).

Функция двузначная; существует только при $x \geq 1$. Кривая симметрична относительно оси x ; в точке $A(1, 0)$ касается вертикальной прямой $x=1$, а затем y по абсолютной величине возрастает.

* Теоретические сведения см. стр. 218.

Ареа-тангенс: $y = \text{Arth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ (рис. 39).

Функция нечетная, существует только при $|x| < 1$; монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. В начале координат — точка перегиба ($\varphi = \frac{\pi}{4}$) и центр симметрии кривой. Две асимптоты: $x = \pm 1$.

Ареа-котангенс: $y = \text{Arcth } x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ (рис. 40).

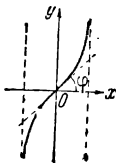


Рис. 39.

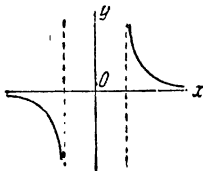


Рис. 40.

Функция нечетная, существует только при $|x| > 1$. При $-\infty < x < -1$ убывает от 0 до $-\infty$, при $+1 < x < +\infty$ убывает от $+\infty$ до 0. Экстремумов и точек перегиба нет. Три асимптоты: $y = 0$, $x = \pm 1$.

Б. Важнейшие кривые.

Здесь приведены некоторые данные о важнейших кривых, встречающихся на практике (сверх тех, которые перечислены выше, среди графиков важнейших функций). К этим данным относятся: определение кривой как некоторого геометрического места, координаты характерных точек, длина кривой или ее части, площадь, ограниченная кривой или ее частью, радиус кривизны в характерных точках.

Общие сведения о вычерчивании кривых по их уравнениям см. стр. 268. Более подробные сведения о тех или иных кривых см. литературу (стр. 531—532).

О кривых второго порядка (эллипсе, гиперболы и параболе) см. стр. 228—235.

9. Кривые третьего порядка

Парабола Нейля, или полукубическая парабола (рис. 41).

Уравнение: $y = ax^{3/2}$; в параметрической форме: $x = t^2$, $y = at^3$.

В начале координат — точка возврата. Асимптот нет. Кривизна $K = \frac{6a}{\sqrt{x(4+9a^2x)^{3/2}}$ принимает все значения от ∞ до 0. Длина кривой от начала до произвольной точки M^* : $L = \frac{1}{27a^2} [(4+9a^2x)^{3/2} - 8]$.

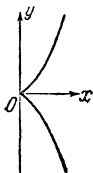


Рис. 41.

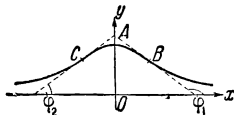


Рис. 42.

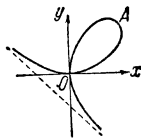


Рис. 43.

Локон Анъези (рис. 42).

Уравнение: $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$. Асимптота $y=0$. Максимум $A(0, a)$; радиус кривизны в нем $r = \frac{a}{2}$. Точки перегиба $B, C\left(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$, наклон кривой в этих точках $\operatorname{tg} \varphi = \mp \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Площадь между кривой и асимптотой $S = \pi a^2$.

Декартов лист (рис. 43).

Уравнение: $x^3 + y^3 = 3axy$; в параметрической форме: $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$). В начале координат — узловая точка с касательными — осями координат, радиус кривизны ветвей в начале $r = \frac{3a}{8\sqrt{2}}$. Асимптота $x + y + a = 0$. Вершина $A\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. Площадь петли $S_1 = \frac{3}{2}a^2$; площадь между кривой и асимптотой $S_2 = \frac{3}{2}a^2$.

Циссоида Дюкляса (рис. 44). Геометрическое место точек M^* , для которых $OM = PQ$ (P — точка произвольного круга с диаметром a).

* M здесь и дальше — произвольная точка кривой с текущими координатами x, y .

Уравнение: $y^3 = \frac{x^3}{a-x}$; в параметрической форме $x = \frac{at^3}{1+t^3}$, $y = \frac{at^3}{1+t^3}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$); в полярных координатах $\rho = \frac{a \sin^3 \varphi}{\cos \varphi}$. В начале координат—точка возврата. Асимптота $x=a$. Площадь между кривой и асимптотой $S = 3/4 \pi a^2$.

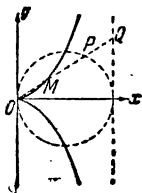


Рис. 44.

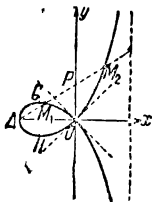


Рис. 45.

Строфоида (рис. 45). Геометрическое место точек M_1 и M_2 , для которых $PM_1 = PM_2 = OP$.

Уравнение: $y^3 = x^3 \left(\frac{a+x}{a-x} \right)$; в параметрической форме $x = a \frac{t^3-1}{t^3+1}$, $y = at \frac{t^3-1}{t^3+1}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$); в полярных координатах $\rho = -a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$. В начале координат—узловая точка (касательные $y = \pm x$). Асимптота $x=a$. Вершина $A(-a, 0)$. Площадь петли $S_1 = a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$, площадь между кривой и асимптотой $S_2 = a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$.

10. Кривые четвертого порядка

Конхоида Никомеда (рис. 46).

Геометрическое место точек M , для которых $OM = OP \pm l$ (для знака „+“ внешняя ветвь, для „-“ внутренняя)*.

* Вообще конхоидой данной кривой называется кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиуса-вектора каждой точки данной кривой на постоянный отрезок l . Если уравнение кривой в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, то уравнение ее конхоиды $\rho = f(\varphi) \pm l$. Конхоида Никомеда—конхоида прямой линии.

Уравнение: $(x-a)^2(x^2+y^2)-l^2x^2=0$; в параметрической форме $x=a+l\cos\varphi$, $y=a\lg\varphi+l\sin\varphi$; в полярных координатах $\rho=\frac{a}{\cos\varphi}\pm l$.

Внешняя ветвь: Асимптота $x=l$. Вершина $A(a+l, 0)$. Две точки перегиба B, C [x равен наибольшему из корней уравнения $x^3-3a^2x+2a(a^2-l^2)=0$ *]. Площадь между ветвью и асимптотой $S=\infty$.

Внутренняя ветвь: Асимптота $x=l$. Вершина $D(a-l, 0)$. В начале координат—двойная точка, характер которой зависит от величин a и l :

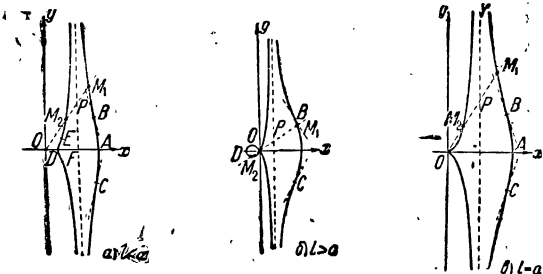


Рис. 46.

а) При $l < a$ —изолированная точка (рис. 46, а). Кривая имеет еще две точки перегиба E, F [x равен по величине второму положительному корню уравнения $x^3-3a^2x+2a(a^2-l^2)=0$].

б) При $l > a$ —узловая точка (рис. 46, б). Кривая имеет максимум и минимум при $x=a-\sqrt[3]{al^3}$. Наклон касательных в начале координат: $\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{l^3-a^3}}{a}$; радиус кривизны $r_0=\frac{l\sqrt{l^3-a^3}}{a}$.

в) При $l=a$ —точка возврата (рис. 46, в).

Улитка Паскаля (рис. 47).

Конхоида окружности **: $OM=OP\pm l$ (полюс—конец одного из диаметров).

Уравнение: $(x^2+y^2-ax)^2=l^2(x^2+y^2)$; в параметрической форме $x=a\cos^2\varphi+l\cos\varphi$, $y=a\cos\varphi\sin\varphi+l\sin\varphi$; в полярных координатах $\rho=a\cos\varphi+l$ (a —диаметр круга).

* О способах решений таких уравнений см. стр. 168—169.

** См. сноску на предыдущей странице.

Вершины A, B ($a \pm l, 0$). Вид кривой зависит от величин a и l , как это видно на рис. 47 и рис. 48. Экстремумов 4, если $a > l$, и 2, если $a < l$: C, D, E, F ($\cos \varphi = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{4a}$). Точки перегиба G, H ($\cos \varphi = -\frac{2a^2 + l^2}{3al}$) существуют, если $a < l < 2a$. Двойная касательная в точках I, K ($-\frac{l^2}{4a}, \pm \frac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{4a}$) существует, если $l < 2a$. В начале коор-

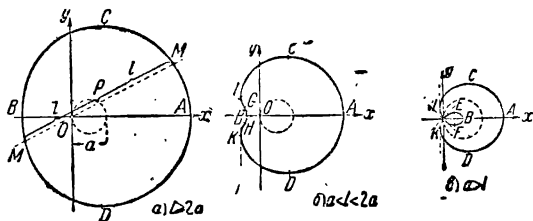


Рис. 47.

динат—двойная точка: изолированная при $a < l$, узловая при $a > l$ (наклон касательных к ней $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l}$, радиус кривизны $r_0 = \sqrt{a^2 - l^2}$) и точка возврата при $a = l$. В последнем случае кривая—кардиоида (см. ниже).

Площадь улитки $S = \frac{\pi a^2}{2} + \pi l^2$ [в случае в) (рис. 47, в) площадь внутренней петли, при вычислении по этой формуле, считается дважды].

Кардиоиды (рис. 48).

Может быть определена двумя способами: 1) Частный случай улитки Паскаля: $OM = OP \pm a(a - \text{диаметр круга})$. 2) Эпиклоида (см. стр. 135), у которой радиус подвижного и неподвижного круга равны. ($= a$).

Уравнение: $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^3 y^2$; в параметрической форме $x = a \cos \varphi (1 + \cos \varphi)$, $y = a \sin \varphi (1 + \cos \varphi)$; в полярных координатах $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

В начале координат—точка возврата. Вершина $A(2a, 0)$.

Максимум и минимум ($\cos \varphi = \frac{1}{2}$); C, D ($\frac{3}{4}a, \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}a$).

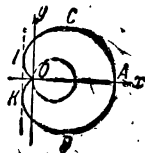
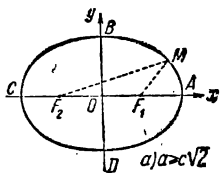


Рис. 48.

Площадь $S = \frac{3}{2} \pi a^2$ (6-кратная площадь круга с диаметром a). Длина кривой $L = 8a$.

О в а л ы К а с с и н и (рис. 49). Геометрическое место точек M , для которых произведение расстояний $F_1 M \cdot F_2 M = a^2$ (F_1, F_2 — фиксированные фокусы, a — постоянная).

Уравнение: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$, где $F_1, F_2(\pm c, 0)$; в полярных координатах $\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}$. Форма кривой зависит от отношения a к c :



а) $a > c\sqrt{2}$; *эллипсообразный овал* (рис. 49, а). Точки пересечения с осью x : $A, C(\pm \sqrt{a^2 + c^2}, 0)$; точки пересечения с осью y : $B, D(0, \pm \sqrt{a^2 - c^2})$. Если $a = c\sqrt{2}$, *овал такого же типа*; в этом случае $A, C(\pm c\sqrt{3}, 0), B, D(0, \pm c)$; в точках B и D кривизна равна нулю (тесное соприкосновение с прямыми $y = \pm c$).

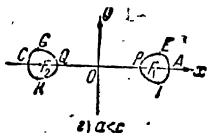
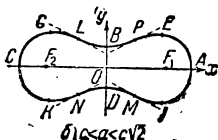


Рис. 49.

б) $c < a < c\sqrt{2}$; *овал с двумя утолщениями* (рис. 49, б). Пересечения с осями те же, что и в случае а); максимумы и минимумы: B, D (координаты — см. выше), $E, G, K, I(\pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \pm \frac{a^2}{2c})$; четыре точки перегиба: $P, L, M, N(\pm \sqrt{\frac{1}{2}(m-n)}, \mp \sqrt{\frac{1}{2}(m+n)})$, где $m = \frac{a^4 - c^4}{3c^2}, n = \sqrt{\frac{a^4 c - a^4}{3}}$.

в) $a = c$; *лемниската Бернулли* (см. ниже).

г) $a < c$; *два овала* (рис. 49, г). Пересечения с осью x : $A, C(\pm \sqrt{a^2 + c^2}, 0)$ и $P, Q(\sqrt{c^2 - a^2}, 0)$; максимумы и минимумы: $E, G, K, I(\pm \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}, \pm \frac{a^2}{2c})$. Радиус кривизны: $r = \frac{2a^2 \rho^3}{c^4 - a^4 + 3\rho^4}$ (ρ — радиус-вектор).

Лемниската Бернулли (рис. 50).

Частный случай овала Кассини ($a=c$): $F_1M \cdot F_2M = \left(\frac{F_1F_2}{2}\right)^2$, где $F_1, F_2 (\pm a, 0)$.

Уравнение: $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$; в полярных координатах $\rho = a\sqrt{2} \cos 2\varphi$.

В начале координат — узловая точка с касательными $y = \pm x$; она же — точка перегиба. Пересечение кривой с осью x : $A, C (\pm a\sqrt{2}, 0)$; максимумы и минимумы:

$E, G, K, I \left(\pm \frac{a\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{a}{2}; \varphi = \pm \frac{\pi}{6} \right)$.

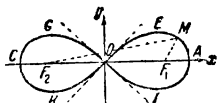


Рис. 50.

Радиус кривизны $r = \frac{2a^3}{3\rho}$. Площадь обеих петель $S = a^2$. Длина всей лемнискаты не выражается через элементарные функции.

11. Циклоиды

Обыкновенная циклоида (рис. 51).

Кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по прямой линии.

Уравнение в параметрической форме: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (a — радиус окружности, $t = \angle MC_1B$); в де-

картовых координатах $x + \sqrt{y(2a-y)} = a \arccos \frac{a-y}{a}$. Кривая периодическая; период (базис циклоиды) $OO_1 = 2\pi a$.

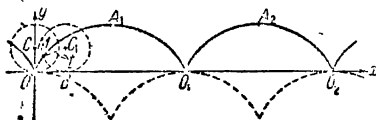


Рис. 51.

Точки возврата $O, O_1, O_2, \dots (2k\pi a, 0)$; вершины $A_1, A_2, \dots [(2k+1)\pi a, 2a]$. Длина OM : $L = 8a \sin^2 \frac{t}{4}$; длина одной ветви $LOA_1O_1 = 8a$, площадь OA_1O_1O : $S = 3\pi a^2$. Радиус кривизны $r = 4a \sin \frac{t}{2}$, в вершинах $r_A = 4a$. Эволюта (стр. 270) циклоиды — такая же циклоида (отмечена пунктиром).

Удлиненная (рис. 52, а) и укороченная (рис. 52, б) циклоиды („трохоиды“).

Кривая, описываемая точкой, лежащей вне или внутри окружности, которая катится без скольжения по прямой линии.

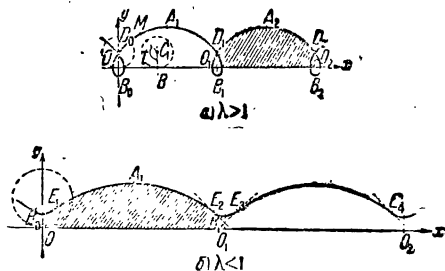


Рис. 52.

Уравнение в параметрической форме $x=a(t-\lambda \sin t)$, $y=a(1-\lambda \cos t)$, где a —радиус окружности, $t=\angle MC_1B$, $\lambda a=C_1M$ (для удлиненной циклоиды $\lambda > 1$, для укороченной $\lambda < 1$).

Кривые периодические: период (базис) $OO_1=2\pi a$; максимумы $A_1, A_2, \dots [(2k+1)\pi a, (1+\lambda)a]$, минимумы $B_0, B_1, B_2, \dots [2k\pi a, (1-\lambda)a]$. Для удлиненной циклоиды узловые точки $D_0, D_1, D_2, \dots [2k\pi a, a(1-\sqrt{\lambda^2-t_0^2})]$, где t_0 —наименьший положительный корень уравнения $t=\lambda \sin t$ *.

Для укороченной циклоиды—точки перегиба $E_1, E_2, \dots [a(\arccos \lambda - \lambda \sqrt{1-\lambda^2}), a(1-\lambda^2)]$. Длина одного цикла 2π

$L=a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\lambda^2-2\lambda \cos t} dt$; площадь, заштрихованная на

рис. 52: $S=\pi a^2 (2+\lambda^2)$. Радиус кривизны $r=a \frac{(1+\lambda^2-2\lambda \cos t)^{3/2}}{\lambda (\cos t - \lambda)}$, в точках максимума $r_A=-a \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$ **, в точках минимума $r_B=a \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$.

* О решении таких уравнений см. стр. 174—176.

** О знаке „минус“ для кривизны см. стр. 261.

Эллициклоида (рис. 53).

Кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по другой окружности вне ее.

Уравнение в параметрической форме:

$$x = (A+a) \cos \varphi - a \cos \frac{A+a}{a} \varphi, \quad y = (A+a) \sin \varphi - a \sin \frac{A+a}{a} \varphi$$

[A — радиус неподвижного, a — подвижного круга, $\varphi = \angle COx$].

Вид кривой зависит от отношения $\frac{A}{a} = m$. При $m=1$ кривая — кардиоида (см. выше, стр. 131).

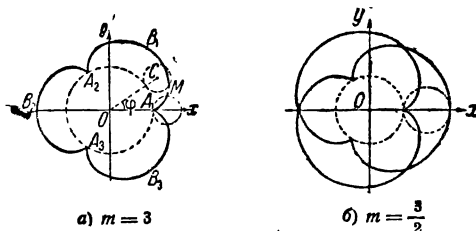


Рис. 53.

а) При m целом кривая состоит из m одинаковых ветвей (рис. 53, а), „обходящих“ неподвижный круг; точки возврата $A_1, A_2, \dots, A_m$ $\left[\rho = A, \varphi = \frac{2k\pi}{m} \quad (k=0, 1, \dots, m-1) \right]$; вершины $B_1, B_2, \dots, B_m$ $\left[\rho = A+a, \varphi = \frac{2\pi}{m} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]$.

б) При m дробном ветви перекрещиваются (рис. 53, б), но движущаяся точка M , описав конечное число ветвей, возвращается в исходное положение. При m иррациональном число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается.

Длина одной ветви $L_{A_1 B_1 A_2} = \frac{8(A+a)}{m}$, при m целом длина всей кривой $L = 8(A+a)$. Площадь сектора $A_1 B_1 A_2 A$ (без сектора неподвижного круга): $S = \pi a^2 \left(\frac{3A+2a}{A} \right)$. Радиус кривизны $r = \frac{4a(A+a)}{2a+A} \sin \frac{A\varphi}{a}$; в вершинах $r_B = \frac{4a(A+a)}{2a+A}$.

Гипоциклоида (рис. 54).

Кривая, описываемая точкой окружности, катящейся без скольжения по другой окружности внутри нее.

Уравнение гипоциклоиды, координаты вершин и точек возврата, формулы для длины дуги, площади и радиуса

кривизны — те же, что для эпициклоиды с заменой „+а“ на „-а“; число точек возврата при m целом, дробном и иррациональном (m всегда > 1) такое же, как у эпициклоиды. При $m=2$ кривая вырождается в диаметр неподвижного круга. При $m=3$ гипоциклоида с тремя ветвями

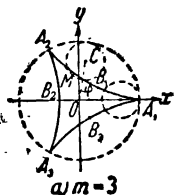
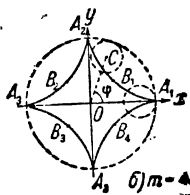


Рис. 54.



(рис. 54, а): $x = a (2 \cos \varphi + \cos 2\varphi)$, $y = a (2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$; $L = 16a$, $S_{\text{полн.}} = 2\pi a^2$. При $m=4$ (рис. 54, б) гипоциклоида с четырьмя ветвями (астроида): $x = A \cos^3 \varphi$, $y = A \sin^3 \varphi$; в декартовых координатах $x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$; $L = 24a = 6A$; $S = \frac{3}{8} A^2 = 6a^2$.

Удлиненная и укороченная эпи- и гипоциклоиды „эпи- и гипотрохоиды“ (рис. 55 и 56).

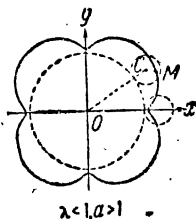
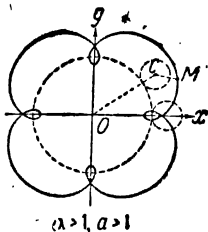


Рис. 55.

Кривая, описываемая точкой, лежащей вне или внутри окружности, катящейся без скольжения по другой окружности вне (эпициклоида, рис. 55) или внутри нее (гипоциклоида, рис. 56).

Уравнение (в параметрической форме): $x = (A+a) \cos \varphi - \lambda a \cos \left(\frac{A+a}{a} \varphi \right)$, $y = (A+a) \sin \varphi - \lambda a \sin \left(\frac{A+a}{a} \varphi \right)$. A — радиус неподвижного круга, a — подвижного (причем

в случае гипоциклоиды $\frac{1}{2} + a''$ в уравнении заменяется на $-\frac{1}{2} - a''$, $\lambda a = CM$ (для удлиненной $\lambda > 1$, для укороченной

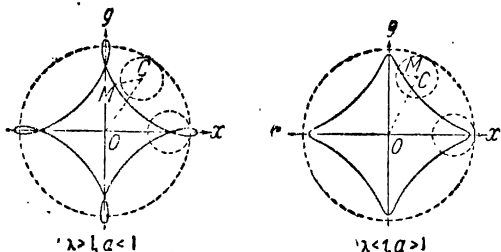


Рис. 56.

$\lambda < 1$). При $A = 2a$ (λ —любое число) гипоциклоида $x = a(1+\lambda) \cos \varphi$, $y = a(1-\lambda) \sin \varphi$ обращается в эллипс с полуосями $a(1+\lambda)$ и $a(1-\lambda)$. При $A = a$ получается улитка Паскаля (см. стр. 130)*: $x = a(2 \cos \varphi - \lambda \cos 2\varphi)$, $y = a(2 \sin \varphi - \lambda \sin 2\varphi)$.

12. Спирали

Архимедова спираль (рис. 57).

Кривая, описываемая точкой, движущейся с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью ω .

Уравнение в полярных координатах: $\rho = a\varphi$; $a = \frac{v}{\omega}$. Кривая состоит

из двух ветвей, расположенных симметрично относительно оси y . Каждый луч OK пересекает кривую в точках $O, A_1, A_2, \dots, A_n$, находящихся друг от друга на расстоянии $A_i A_{i+1} = 2\pi a$. Длина дуги OM :

$$L = \frac{a}{2} (\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \text{Arsh } \varphi),$$

для больших φ : $L \approx 1/2 a \varphi^2$. Площадь сектора $M_1 OM_2$: $S = \frac{a^2}{6} (\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$. Радиус кривизны $r = a \frac{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}{\varphi^2 + 2}$, в начале координат $r_0 = \frac{a}{2}$.

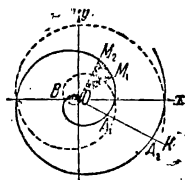
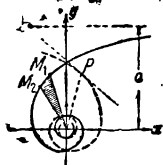


Рис. 57.

* На стр. 130 через a обозначалась величина, которая здесь обозначена через $2\lambda a$, а через l —диаметр $2a$. Изменила и система координат.

Гиперболическая спираль (рис. 58).

Уравнение в полярных координатах: $\rho = \frac{a}{\varphi}$. Кривая состоит из двух ветвей, расположенных симметрично относительно оси y ; каждая ветвь имеет прямую $y = a$ асимптотой и начало O — асимптотической точкой. Площадь сектора M_1OM_2 :



$$S = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2} \right);$$

$$S \rightarrow \frac{a^2}{2\varphi} \text{ при } \varphi_2 \rightarrow \infty.$$

Рис. 58. Радиус кривизны $r = \frac{a}{\varphi} \left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} \right)^3$.

Логарифмическая спираль (рис. 59).

Кривая, пересекающая все лучи, выходящие из одной точки O , под одним и тем же углом α .

Уравнение (в полярных координатах): $\rho = ae^{k\varphi}$ [$k = \operatorname{ctg} \alpha$; если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $k=0$ и кривая — окружность]. Кривая имеет начало O асимптотической точкой. Длина дуги M_1M_2 : $L = \frac{a\sqrt{1+k^2}}{k} (\rho_2 - \rho_1)$, предел длины дуги OM от начала: $L_0 = \frac{a\sqrt{1+k^2}}{k} \rho$, Радиус кривизны $r = a\sqrt{1+k^2} \rho = L_0 k$.

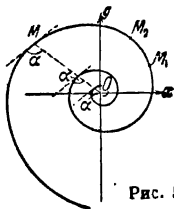


Рис. 59.

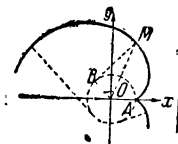


Рис. 60.

Развертка (эвольвента *) окружности (рис. 60).

Кривая, описываемая концом натянутой нити, разматывающейся с окружности ($AB = BM$).

Уравнение в параметрической форме: $x = a \cos \varphi + a \varphi \sin \varphi$, $y = a \sin \varphi - a \varphi \cos \varphi$ (a — радиус круга,

* Об эвольвенте см. стр. 270

$\varphi = \angle MOx$). Кривая имеет две ветви, расположенные симметрично относительно оси x ; точка возврата $A(a, 0)$ пересечение с Ox : $x = \frac{a}{\cos \varphi_0}$, где φ_0 — корни уравнения;

$\operatorname{tg} \varphi = \varphi^*$. Длина дуги AM : $L = \frac{1}{2} a \varphi^2$. Радиус кривизны:

$r = a\varphi = K2aI$; центр кривизны B лежит на окружности.

Спираль Корню (клотоида) (рис. 61).

Кривая, для которой радиус кривизны обратно пропорционален длине дуги: $r = a^2 : s$.

Уравнение в параметрической форме:

$$x = a \sqrt{\pi} \int_0^t \cos \frac{\pi t^2}{2} dt,$$

$$y = a \sqrt{\pi} \int_0^t \sin \frac{\pi t^2}{2} dt$$

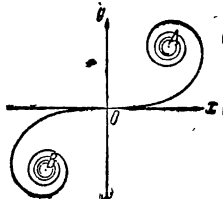


Рис. 61.

(элементарно не интегрируется), где $t = \frac{s}{a\sqrt{\pi}}$, $s = OM$.

Кривая симметрична относительно начала координат, являющегося точкой перегиба (касательная — ось x), две асимптотические точки:

$$A \left(+\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, +\frac{a\sqrt{\pi}}{2} \right) \text{ и } B \left(-\frac{a\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{a\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

13. Некоторые другие кривые

Цепная линия (рис. 62).

Форму цепной линии принимает гибкая тяжелая нерастяжимая нить, подвешенная в двух точках.

Уравнение:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}.$$

Кривая расположена симметрично относительно оси y , выше параболы

$y = a + \frac{x^2}{2a}$ (отмеченной пунктиром).

Вершина $A(0, a)$.

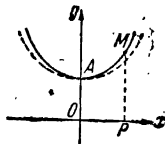


Рис. 62.

* Подробно о решении таких уравнений см. стр. 174—176.

Длина дуги AM : $L = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$; площадь $OAMP$: $S = aL = a^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a}$. Радиус кривизны $r = \frac{y^2}{a} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$.

Т р а к т р и с а (рис. 63).

Эвольвента (стр. 270) цепной линии, причем разворачивание начинается в вершине A .

Уравнение: $x = a \operatorname{arsh} \frac{a}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ ($= a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$), причем рассматривают-

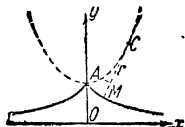


Рис. 63.

ся оба знака корня. Асимптота — ось x , точка возврата (с вертикальной касательной): $A(0, a)$. Кривая симметрична относительно оси y .

Длина дуги AM : $L = a \operatorname{in} \frac{a}{y}$; при

увеличивающейся длине дуги L разность $L - x$ (где x — абсцисса точки M) $\approx a(1 - \ln 2) \approx 0,337a$.

Радиус кривизны $r = a \operatorname{ctg} \frac{x}{y}$.

ОТДЕЛ ВТОРОЙ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1. Правила приближенных вычислений

Приближенные вычисления. Выполняя вычисления, всегда необходимо помнить о той точности, которую нужно или которую можно получить. Совершенно недопустимо вести вычисления с большой точностью, если данные задачи не допускают или не требуют этого (например, нельзя пользоваться семизначными логарифмами при вычислениях с числами, имеющими 5 верных значащих цифр). Твердое знакомство с правилами приближенных вычислений необходимо каждому, кому приходится вычислять.

Погрешности. Разница между точным числом x и его приближенным значением a называется *погрешностью* данного приближенного числа. Если известно, что $|x-a| < \Delta_a$, то величина Δ_a называется *предельной абсолютной погрешностью* приближенной величины a ; отношение $\Delta_a : a = \delta_a$ называется *предельной относительной погрешностью*; последнюю часто выражают в процентах.

Пример: 3,14 является приближенным значением числа π ; погрешность его равна 0,00159..., предельную абсолютную погрешность можно считать равной 0,0016, а предельную относительную погрешность — равной

$$\frac{0,0016}{3,14} = 0,00051 = 0,051\%.$$

О погрешностях наблюдений см. стр. 508.

Значащие цифры. Если предельная абсолютная погрешность величины a не превышает одной единицы разряда последней цифры числа a , то говорят, что у числа a все знаки верны*. Приближенные числа следует записывать,

* В этом определении часто требуют, чтобы погрешность не превышала половины единицы разряда последней цифры приближенного числа. В связи с этим — см. стр. 142 („округление“).

сохраняя только верные знаки. Если, например, предельная абсолютная погрешность числа 52 400 равна 100, то это число должно быть записано в виде $524 \cdot 10^4$ или $5,24 \cdot 10^4$. Оценить погрешность приближенного числа можно, указав, сколько верных значащих цифр оно содержит. При подсчете значащих цифр не считаются нули с левой стороны.

Примеры: 1) 1 куб. фут = $0,0283 \text{ м}^3$ — три верных значащих цифры; 2) 1 дюйм = $2,5400 \text{ см}$ — пять верных значащих цифр.

Если число a имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность $\delta_a < \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$, где z — первая значащая цифра числа a . У числа a с относительной погрешностью δ_a будут верны n значащих цифр, где n — наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $(1+z)\delta_a < 10^{1-n}$.

Пример: Если число $a = 47,542$ получено в результате действий над приближенными числами (см. ниже) и известно, что $\delta_a = 0,1\%$, то a имеет 3 верных знака, так как $(4+1) \cdot 0,001 < 10^{-2}$.

Округление. Если приближенное число содержит лишние (или неверные) знаки, то его следует *округлить*. При округлении сохраняются только верные знаки; лишние знаки отбрасываются, причем, если первая отбрасываемая цифра больше 4, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Если отбрасываемая часть состоит только из одной цифры 5, то округление обычно делается так, чтобы последняя цифра оставалась четной. При округлении возникает дополнительная погрешность, не превышающая половины единицы разряда последней значащей цифры округленного числа. Поэтому, чтобы после округления все знаки были верны, погрешность до округления должна быть не больше половины единицы того разряда, до которого предполагают делать округление.

Действия над приближенными числами. Результат действий над приближенными числами представляется собой также приближенное число. Его погрешность может быть выражена через погрешности первоначальных данных при помощи следующих теорем:

1) Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

2) Относительная погрешность суммы заключена между наибольшей и наименьшей из относительных погрешностей слагаемых.

3) Относительная погрешность произведения и частного равна сумме относительных погрешностей сомножителей или, соответственно, делимого и делителя.

* Если учесть возможную погрешность округления (см. ниже), следует положить $(1+z)\delta_a < 0,5 \cdot 10^{1-n}$.

4) Относительная погрешность n -й степени приближенного числа в n раз больше относительной погрешности основания (как для целых, так и для дробных n).

Пользуясь этими теоремами, можно определить погрешность результата любой комбинации арифметических действий над приближенными числами.

Примеры. 1) $p = \frac{D}{D-d}$; $\delta p = \frac{\Delta D + \Delta d}{D} + \frac{\Delta D + \Delta d}{D-d}$;

2) $z = \sqrt{1+xy}$; $\delta z = \frac{1}{2} \frac{\Delta_{xy}}{1+xy} = \frac{1}{2} \frac{(\delta_x + \delta_y)xy}{1+xy}$.

Если требуется получить результат с определенной точностью, то, выведя сперва формулу для погрешности результата указанным способом, можно определить допустимые погрешности первоначальных данных.

Пример: $p = \frac{D}{D-d}$; требуется определить p с точностью до 1%. D приблизительно в 5 раз больше d . С какой точностью должны быть взяты D и d ? Допуская для D и d равные предельные абсолютные погрешности, получим (см. выше) $0,01 = \frac{\Delta D}{D} + \frac{2\Delta D}{0,8D}$, или $3,5\delta D < 0,01$.

Погрешность функции. Помимо данных выше правил, погрешность при вычислении значений какой-либо функции, аргументы которой заданы приближенно, может быть оценена с помощью дифференциала этой функции. Погрешность функции есть не что иное, как возможное приращение функции, которое она получит, если ее аргументам дать приращения, равные их погрешностям. Так как погрешности бывают обыкновенно достаточно малы, то практически вполне допустима замена приращений дифференциалами (см. стр. 311). Если известны только предельные абсолютные погрешности аргументов, то при вычислении дифференциалов необходимо для всех производных брать их абсолютные значения.

Примеры: 1) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$; $d\varphi = \frac{bda - adb}{a^2 + b^2}$, $\Delta\varphi = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{a^2 + b^2}$.

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\frac{dz}{z} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$, $\delta z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{x\Delta x + y\Delta y}{x^2 + y^2}$.

Для функций, значение которой находится при помощи таблиц, оценка погрешности может быть произведена крайне просто. Если аргумент задан с погрешностью Δx , то для определения погрешности $f(x)$ находят, пользуясь линейной интерполяцией (см. стр. 16), приращение функции, соответствующее $\pm \Delta x$. Абсолютная величина этого приращения и дает предельную абсолютную погрешность $f(x)$.

Примеры: 1) Если диаметр круга $D = 5,92$ см имеет погрешность $\Delta D = 0,005$, то соответствующие погрешности

длины окружности и площади круга равны соответственно (см. стр. 82 и 86), $0,015 \text{ см}$ и $0,05 \text{ см}^2$. 2) Если $\operatorname{tg} \alpha = 0,818 \pm \pm 0,002$, то (см. стр. 62) $\alpha = 39^\circ 17' \pm 0^\circ 4'$.

Вычисления без точного учета погрешностей. Указанным выше способом может быть оценена предельная абсолютная погрешность, т. е. величина, заведомо превосходящая абсолютную величину истинной погрешности. При этом все время предполагается, что различные погрешности друг друга усмивают, тогда как практически это бывает крайне редко. При массовых вычислениях, когда не учитывают погрешность каждого отдельного результата, пользуются следующими *правилами подсчета цифр* (по Бралису). При соблюдении этих правил можно считать, что в среднем полученные результаты будут иметь все знаки верными, хотя в отдельных случаях возможна ошибка в несколько единиц последнего знака.

1. При *сложении и вычитании* приближенных чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков.

2. При *умножении и делении* в результате следует сохранять столько *значащих цифр*, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим числом *значащих цифр*.

3. При *возведении в квадрат и куб* в результате следует сохранять столько *значащих цифр*, сколько их имеет возводимое в степень приближенное число. (Последняя цифра квадрата и особенно куба при этом менее надежна, чем последняя цифра основания.)

4. При *извлечении квадратного и кубического корней* в результате следует брать столько *значащих цифр*, сколько их имеет подкоренное число (приближенное). (Последняя цифра квадратного и особенно кубического корня при этом более надежна, чем последняя цифра подкоренного.)

5. При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой более, чем рекомендуют предыдущие правила. В окончательном результате эта «запасная цифра» отбрасывается.

6. Если некоторые данные имеют больше десятичных знаков (при сложении и вычитании) или больше *значащих цифр* (при умножении, делении, возведении в степень, извлечении корня), чем другие, то их предварительно следует округлить, сохраняя лишь одну лишнюю цифру.

7. Если данные можно брать с произвольной точностью, то для получения результата с k цифрами данные следует брать с таким числом цифр, какое дает, согласно правилам 1—4, $(k+1)$ цифру в результате.

8. При вычислении посредством логарифмов одночленного выражения следует подсчитать число *значащих цифр* в приближенном данном, имеющем наименьшее число *значащих цифр*, и взять таблицу логарифмов с числом десятичных знаков, равным числу *значащих цифр* в этом данном.

точных знаков на 1 большим. В окончательном результате последняя значащая цифра отбрасывается.

Умножение и деление приближенных чисел. Чтобы не получать ненужных знаков, умножение и деление приближенных чисел следует производить следующим образом: при умножении множителем берут менее точное число из двух сомножителей. Умножение начинают со старших разрядов, и с получением каждого частного произведения зачеркивают у множимого последнюю справа цифру. При этом, на последнюю зачеркнутую цифру желательно вносить поправку.

Пример. Перемножить 4,128 и 2,953. Последовательные вычисления производим так:

$$\begin{array}{r}
 \times 4,128 \\
 \hline
 2,953 \\
 \hline
 8,256 \\
 \hline
 3,715 \\
 \hline
 12,189
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \times 4,128 \\
 \hline
 2,953 \\
 \hline
 8,256 \\
 \hline
 3,715 \\
 \hline
 12,189
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \times 4,128 \\
 \hline
 2,953 \\
 \hline
 8,256 \\
 \hline
 3,715 \\
 \hline
 12,189
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \times 4,128 \\
 \hline
 2,953 \\
 \hline
 8,256 \\
 \hline
 3,715 \\
 \hline
 12,189
 \end{array}$$

При делении у делимого сохраняется, согласно правилу 6, если это возможно, на один знак больше, чем у делителя. При выполнении деления, вместо обычного приписывания нулей к остаткам, следует зачеркивать по одной цифре делителя. На зачеркнутые цифры следует при умножении вносить поправки.

Пример. Разделить 12,189 на 4,128.

Последовательные вычисления будут выглядеть так:

$$\begin{array}{r}
 12,189 \overline{) 4,128} \\
 \underline{8\ 256} \\
 3\ 933 \\
 \underline{3\ 933} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12,189 \overline{) 4,128} \\
 \underline{8\ 256} \\
 3\ 933 \\
 \underline{3\ 933} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12,189 \overline{) 4,128} \\
 \underline{8\ 256} \\
 3\ 933 \\
 \underline{3\ 933} \\
 0
 \end{array}$$

2. Приближенные формулы

Во многих случаях довольно сложные функции можно приближенно заменить более простыми, дающими результат с допустимой погрешностью. Для этой цели можно пользоваться несколькими первыми членами разложения этих функций в ряд Тейлора (см. стр. 328) или применять метод наименьших квадратов (см. стр. 516). Ниже дано несколько наиболее употребительных формул с указанием даваемой ими точности.

Формула	Погрешность формулы не превышает	
	0,1% ^o	
	если x изменяется	
	от	до
$\sin x = x$	$-0,077 = -4^{\circ},4$	$0,077 = 4^{\circ},4$
$\sin x = x - \frac{x^3}{6}$	$-0,580 = -33^{\circ},2$	$0,580 = 33^{\circ},2$
$\cos x = 1$	$-0,045 = -2^{\circ},6$	$0,045 = 2^{\circ},6$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$	$-0,386 = -22^{\circ},0$	$0,386 = 22^{\circ},0$
$\operatorname{tg} x = x$	$-0,054 = -3^{\circ},1$	$0,054 = 3^{\circ},1$
$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}$	$-0,293 = -16^{\circ},8$	$0,293 = 16^{\circ},8$
$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a}$ *	$-0,085a^2$	$0,093a^2$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x}} = \frac{1}{a} - \frac{x}{2a^2}$	$-0,052a^2$	$0,052a^2$
$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$	$-0,031a$	$0,031a$
$e^x = 1+x$	$-0,045$	$0,045$
$\ln(1+x) = x$	$-0,002$	$0,002$

* Формулу можно записать в виде

$$\sqrt{a^2+x} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a^2+x}{a} \right).$$

В этом виде она обычно и употребляется на практике. Так как a есть приближенное значение корня („первое

Погрешность формулы не превышает		Погрешность формулы не превышает	
1,6%		10%	
если x изменяется		если x изменяется	
от	до	от	до
$-0,245 = -14^{\circ},0$	$0,245 = 14^{\circ},0$	$-0,785 = -45^{\circ},0$	$0,785 = 45^{\circ},0$
$-1,005 = -57^{\circ},6$	$1,005 = 57^{\circ},6$	$-1,632 = -93^{\circ},5$	$1,632 = 93^{\circ},5$
$-0,141 = -8^{\circ},1$	$0,141 = 8^{\circ},1$	$-0,451 = -25^{\circ},8$	$0,451 = 25^{\circ},8$
$-0,661 = -37^{\circ},9$	$0,661 = 37^{\circ},9$	$-1,036 = -59^{\circ},3$	$1,036 = 59^{\circ},3$
$-0,172 = -9^{\circ},8$	$0,172 = 9^{\circ},8$	$-0,517 = -29^{\circ},6$	$0,517 = 29^{\circ},6$
$-0,519 = -29^{\circ},7$	$0,519 = 29^{\circ},7$	$-0,895 = -51^{\circ},3$	$0,895 = 51^{\circ},3$
$-0,247a^3$	$0,326a^3$	$-0,607a^3$	$1,542a^3$
$-0,157a^3$	$0,166a^3$	$-0,449a^3$	$0,530a^3$
$-0,099a$	$0,099a$	$-0,301a$	$0,301a$
$-0,135$	$0,148$	$-0,337$	$0,502$
$-0,020$	$0,020$	$-0,176$	$0,230$

приближение*), то из этой формулы следует правило: для получения более точного значения корня следует взять среднее арифметическое первого приближения и частного от деления подкоренного числа на первое приближение; при этом можно считать, что число верных знаков полученного результата вдвое больше числа верных знаков первого приближения.

3. Счетная линейка

Назначение счетной линейки. Простейшие вычисления, содержащие умножение, деление, извлечение квадратного и кубического корней, возведение в степень заданных чисел и действия с тригонометрическими функциями данных углов могут быть приближенно выполнены на счетной линейке. Точность вычислений различна в разных случаях, но в среднем вычисления на счетной линейке длиной 25 см соответствуют вычислениям с тремя значащими цифрами, т. е. с относительной погрешностью от 0,1% до 1%. В случаях, когда подобная точность достаточна, вычисления следует выполнять на счетной линейке.

Логарифмическая шкала. В основе конструкции счетной линейки лежит логарифмическая шкала, построенная следующим образом. По оси от начальной точки, в некотором масштабе, откладываются отрезки, равные десятичным логарифмам ряда чисел (рис. 1). Если отложен $\lg a$, то около соответствующей точки ставится пометка a (рис. 2). Около начальной точки должна стоять пометка 1 ($\lg 1=0$). Таким образом на логарифмической шкале рас-

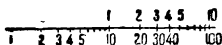


Рис. 1.

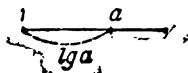


Рис. 2.

стояние от пометки 1 до пометки a равно в выбранном масштабе $\lg a$. Так как $\lg(10a) = 1 + \lg a$, то пометки по логарифмической шкале на участке от 10 до 100 будут в точности соответствовать пометкам на участке от 1 до 10 для чисел, в 10 раз меньших. Это же рассуждение может быть проведено и для других участков шкалы. Поэтому участок шкалы, длиной в одну единицу масштаба, может служить для представления всей бесконечной логарифмической шкалы. Числам с одинаковым цифровым составом, т. е. отличающимся на множитель 10^n (например 7,15; 0,0715; 71 500), будет соответствовать на этом участке шкалы одна и та же пометка.

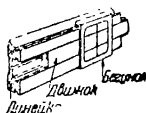


Рис. 3.

25-сантиметровая линейка системы „Риц“; на некоторых кругих типах линейки шкалы I и K отсутствуют, а шкала L помещена на обратной стороне движка). Прежде чем

Шкалы линейки. Счетная линейка состоит из линейки, движка, скользящего в пазах линейки, и бегунка — рамки со стеклом, на котором нанесены одна или три визирные линии (рис. 3). На линейке и на двух сторонах движка нанесены шкалы. Эти шкалы мы будем называть: A, B, C, D, I, K, L (рис. 4) (здесь описана

вычислять на счетной линейке, необходимо изучить ее шкалы.

Шкалы *A*, *B*, *C*, *D*, *I*, *K* — логарифмические. Для шкал *C*, *D* и *I* единица масштаба равна 25 см, причем в противоположном направлении шкалы *I* выбрано влево. Для шкал *A* и *B* единица масштаба равна 12,5 см, а для шкалы *K* — 8 1/2 см, в связи с чем эти шкалы имеют на линейке два (А и В) и три (К) тождественно равных участка. Деления на всех логарифмических шкалах неравномерные и даны с различной степенью подробности в различных местах. При установке на линейке чисел, для которых нет соответствующих пометок, считают, что в пределах одного деления логарифмическую шкалу можно принять за равномерную, т. е. что, например, пометка для числа 235 лежит посередине между пометками 234 и 236.

Шкала *L* — равномерная, масштабная шкала, с делениями через 0,002

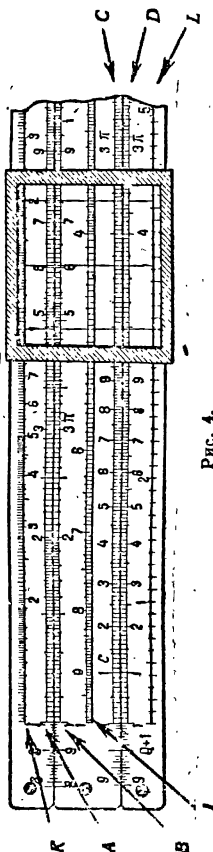


Рис. 4.

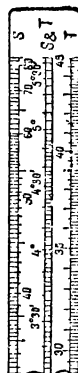
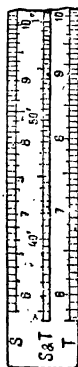


Рис 5.



(за единицу принята длина 25 см). На оборотной стороне движка (рис. 6) нанесены логарифмические шкалы тригонометрических функций: T (tangens), S (sinus) и $S \& T$ (sinus et tangens). На шкале T расстояние от начальной точки до пометки T° равно $\lg \lg T^\circ$ (за единицу масштаба берется 25 см). В начальной точке стоит пометка 45° (так

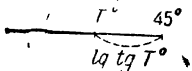


Рис. 6.

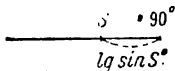


Рис. 7.

как $\lg \lg 45^\circ = 0$). Для $T^\circ < 45^\circ$ $\lg \lg T^\circ < 0$, поэтому соответствующие пометки должны быть расположены слева от начальной точки (рис. 6). Нанесенный на движке участок шкалы T соответствует значениям $\lg \lg T^\circ$, заключенным между -1 и 0 , что соответствует углам, лежащим между $5^\circ 43'$ ($\lg 5^\circ 43' = 0,1$) и 45° . Аналогично, на шкале S расстояние от начальной точки (с пометкой 90°) до пометки S° равно $\lg \sin S^\circ$. Для $S^\circ < 90^\circ$ соответствующие пометки расположены слева от начальной точки (рис. 7), так как $\lg \sin S^\circ < 0$. Имеющийся на движке участок шкалы S° охватывает углы от $5^\circ 44'$ до 90° ($\sin 5^\circ 44' = 0,1$). Для углов, меньших $5^\circ 44'$, в пределах точности линейки, значения синуса и тангенса совпадают, и шкала $S \& T$ представляет собой общий участок шкал $\lg \lg T^\circ$ и $\lg \lg S^\circ$ для углов, заключенных между $0^\circ 35'$ и $5^\circ 44'$. Для этих углов синус и тангенс меняются от $0,01$ до $0,1$ (на некоторых типах линейек шкала S нанесена с единицей масштаба, равной $12,5$ см, тогда эта шкала охватывает углы от $0^\circ 35'$ до 90° ; данные ниже схемы вычислений с участием шкалы S должны быть в этом случае переделаны).

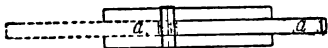


Рис. 8.

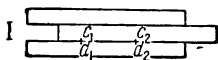
Правила вычислений. Процесс вычислений состоит в установке друг против друга двух чисел различных шкал линейки и движка и в чтении результата на одной шкале против какого-либо числа на другой. Эти операции выполняются при помощи бегунка. Ниже даны схемы, по которым выполняются простейшие вычисления на линейке.

Общие правила: 1) Линейка дает только значащие цифры результата, для которого должен быть установлен еще десятичный разряд (место запятой). Для этого лучше всего выполнить в уме грубый расчет, оценив порядок результата. 2) При сложных вычислениях промежуточные результаты не читаются, а только фиксируются визирной линией бегунка. Поэтому схемы следует выбирать так, чтобы результат каждого действия или группы действий читался на линейке, а

не на движке. 3) Если результат вычисления должен быть прочитан на линейке, против метки a на движке, вышедшей за пределы линейки, должна быть сделана *переброска* движка: визирная линия бегунка ставится против той конечной точки движка, которая лежит в пределах линейки, и движок передвигается так, чтобы против визирной линии оказалась другая конечная точка той же шкалы движка (рис. 8). После переброски требуемая пометка a окажется в пределах линейки, и результат может быть прочитан.

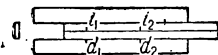
Схемы. В схемах играет роль только расположение меток друг против друга, но не относительное расположение различных пар меток. Движок может быть выдвинут как вправо, так и влево.

Умножение, деление, пропорции



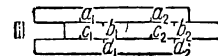
$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$$

Если $c_1 = 1$, то $d_1 = \frac{d_2}{c_2}$.

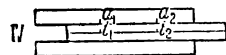


$$l_1 d_1 = l_2 d_2$$

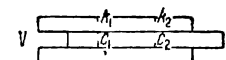
Если $l_1 = 1$, то $d_1 = l_2 d_2$.



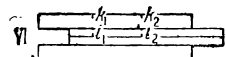
$$\frac{a_1}{c_1^2} = \frac{a_2}{c_2^2} = \frac{d_1^2}{b_1} = \frac{d_2^2}{b_2}$$



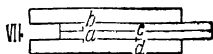
$$a_1 l_1^2 = a_2 l_2^2$$



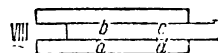
$$\frac{k_1}{c_1^3} = \frac{k_2}{c_2^3}$$



$$k_1 l_1^3 = k_2 l_2^3$$

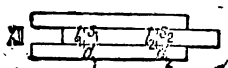


$$d = abc; a = \frac{d}{bc}$$

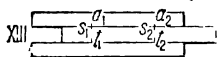


$$d = \frac{ac}{b}$$

Тригонометрические вычисления



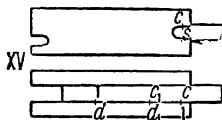
$$\text{а) } \frac{\operatorname{tg} t_1}{d_1} = \frac{\operatorname{tg} t_2}{d_2}; \quad \text{б) } \frac{\sin s_1}{d_1} = \frac{\sin s_2}{d_2}; *$$



$$\text{а) } \frac{a_1}{\operatorname{tg}^2 t_1} = \frac{a_2}{\operatorname{tg}^2 t_2}; \quad \text{б) } \frac{a_1}{\sin^2 s_1} = \frac{a_2}{\sin^2 s_2}; *$$



$$\left\{ \begin{array}{l} c = \operatorname{tg} t^\circ; \quad d = \operatorname{ctg} t^\circ; \\ \frac{c_1}{d_1} = \operatorname{tg} t^\circ. \end{array} \right.$$

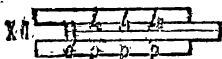


$$\left\{ \begin{array}{l} c = \sin s^\circ; \quad d = \frac{1}{\sin s^\circ}; * \\ \frac{c_1}{d_1} = \sin s^\circ. \end{array} \right.$$

Вычисления по схемам XII и XIII производятся при движении, перевернутом обратной стороной. Некоторые вычисления с тригонометрическими величинами могут быть произведены без перевертывания движка. При этом установки меток на шкалах *S* и *T* производятся при помощи черточек, имеющих в вырезах обратной стороны линейки (схемы XIV и XV).

Особые значки

Перевод градусов в радианы и обратно:



$$\begin{array}{l} \rho^\circ = 57,30; \\ \rho' = 3438; \\ \rho'' = 206265. \end{array}$$

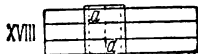
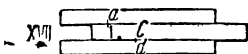
$$d^\circ = t_0 \text{ рад. } \left(= \frac{d^\circ}{\rho^\circ} \text{ рад.} \right); \quad d' = t_1 \text{ рад. } \left(= \frac{d'}{\rho'} \text{ рад.} \right);$$

$$d'' = t_2 \text{ рад. } \left(= \frac{d''}{\rho''} \text{ рад.} \right)$$

(напр. $15^\circ = 0,262 \text{ рад.}$, $15' = 0,00436 \text{ рад.}$, $15'' = 0,0000727 \text{ рад.}$).

* Эта схема неверна для линеек с масштабом шкалы $S = 12,5 \text{ см.}$ См. стр. 150.

Вместо схемы XVI* может быть использована также схема I.



Площадь круга (схема XVII): $C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,1248;$

$$a = \left(\frac{d}{C}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Если на бегунке нанесены три визирные линии, то площадь круга находится без помощи движка, по схеме XVIII.

II. АЛГЕБРА

А. Тождественные преобразования

1. Основные понятия

Определения. *Алгебраическим выражением* называется одна или несколько алгебраических величин (чисел или букв), соединенных между собой знаками алгебраических действий (+, −, :, √ и т. п.) и знаками последовательности этих действий (различного вида скобками). *Тождеством* называется такое равенство двух алгебраических выражений, которое остается верным, если вместо входящих в него букв подставлять любые величины; если же равенство верно только при подстановке некоторых определенных значений, то оно называется *уравнением**. *Тождественное преобразование* — получение из одного алгебраического выражения другого, ему тождественно равного, может производиться различным образом, в зависимости от цели преобразования, которую всегда нужно иметь в виду, например — придание выражению более сжатого вида, удобного для подстановки вместо букв их числовых значений или для дальнейших преобразований; приведение выражения к виду, удобному для решения уравнений, логарифмирования, дифференцирования, интегрирования и т. п.

Классификация алгебраических выражений. В каждом отдельном случае в алгебраическом выражении выделяются буквенные величины — *основные*, — по отношению к которым ведется классификация; неосновные величины (остальные буквы) называются *параметрами* выражения. Выражение относится к тому или иному классу в зависимости от того, какие действия производятся над основными величинами, входящими в него. В *целых рациональных* выражениях над основными величинами произво-

* Об уравнениях см. стр. 165—182.

дятся только сложение, вычитание и умножение (включая сюда и возведение в целую положительную степень), в *дробных рациональных* выражениях входит (кроме перечисленных действий) деление на основные величины * (или возведение в отрицательную степень), в *иррациональных* выражениях присоединяется извлечение корня из основных величин ** (воведение в дробную степень), в *показательных выражениях* — возведение в степень, содержащую основные величины ***, в *логарифмических* — логарифмирование основных величин ***.

Во всех нижеследующих примерах основные величины обозначены последними буквами алфавита ($x, y, z, \dots$), а параметры — начальными ($a, b, c, \dots$) или средними, где средние буквы ($m, n, p, \dots$) принимают лишь целые положительные значения.

2. Целые рациональные выражения

Представление в виде многочлена. Всякое целое рациональное выражение можно представить в виде многочлена при помощи элементарных преобразований (приведение подобных членов, сложение, вычитание и умножение одночленов и многочленов).

Пример:

$$\begin{aligned} & (-a^3 + 2a^2x - x^3)(4a^3 + 8ax) + (a^3x^2 + 2a^2x^3 - 4ax^4) - \\ & \quad - (a^5 + 4a^3x^3 - 3a^2x^3 - 4ax^4) = \\ & = -\underline{4a^5} + \underline{8a^4x} - \underline{4a^3x^3} - \underline{8a^4x} + \underline{16a^3x^2} - \underline{8ax^4} + \underline{a^3x^2} + \\ & \quad + \underline{2a^2x^3} - \underline{4ax^4} - \underline{a^5} - \underline{4a^3x^3} + \underline{3a^2x^3} + \underline{4ax^4} = \\ & = -5a^5 + 13a^3x^2 + a^3x^3 - 8ax^4. \end{aligned}$$

Разложение многочлена на множители. Во многих случаях многочлен можно представить в виде произведения простых множителей (одночленов и многочленов) при помощи вынесения за скобки, способа группировки, применения формул сокращенного умножения и деления и использования свойств уравнения (см. стр. 171).

Примеры:

1) Вынесение за скобки:

$$8ax^2y - 6bx^2y + 4cx^2 = 2x^2(4ay - 3bx + 2cx).$$

* А также деление на целые рациональные выражения из основных величин.

** А также из целых или дробных рациональных выражений из основных величин.

*** А также рациональные или иррациональные выражения из основных величин.

2) Способ группировки:

$$6x^3 + xy - y^2 - 10xz - 5yz = \underline{6x^3 + 3xy} - \underline{2xy - y^2} - \underline{10xz - 5yz} = \\ = 3x(2x+y) - y(2x+y) - 5z(2x+y) = (2x+y)(3x-y-5z).$$

3) Использование свойств алгебраических уравнений *:

$P(x) = x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x^2$. а) Выносим x^2 за скобки.
б) Подбором устанавливаем, что $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = -1$ — корни уравнения $P(x) = 0$. Деля $P(x)$ на $x^2(x-1)(x+1) = x^4 - x^2$, получаем в частном $x^3 - 2x + 5$. В этом выражении $p = -2$, $q = 5$, $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ и оно более на действительные множители разложено быть не может. Следовательно:

$$x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x^2 = x^2(x-1)(x+1)(x^3 - 2x + 5).$$

Формулы сокращенного умножения
и деления:

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2,$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \quad (\text{аналогично для квадрата суммы любого числа членов}),$$

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3,$$

$$(x \pm y)^n \text{ вычисляется по формуле Ньютона (см. стр. 187),}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2,$$

$$(x^n - y^n) : (x - y) = \\ = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1},$$

$$(x^n + y^n) : (x + y) = \\ = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1} \\ \quad (n \text{ нечетное!}),$$

$$(x^n - y^n) : (x + y) = \\ = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1} \\ \quad (n \text{ четное!}).$$

3. Дробные рациональные выражения

Приведение к простейшему виду. Всякое дробное рациональное выражение можно преобразовать в отношение двух многочленов, не имеющих общих множителей, при помощи элементарных преобразований (сложения, вычитания, умножения и деления многочленов и дробей и сокращения дробей).

* См. стр. 171.

Пример: преобразовать к простейшему виду:

$$\begin{aligned} 3x + \frac{2x+y}{z} - y^2 + \frac{x+z}{z} &= \\ x \left(x^2 + \frac{1}{z^2} \right) &= \frac{(3xz+2x+y)z^2}{(x^2z^2+x)z} + \frac{-y^2z+x+z}{z} = \\ &= \frac{3xz^3+2xz^2+yz^2+(x^2z^2+x)(-y^2z+x+z)}{x^2z^3+xz} = \\ &= \frac{3xz^3+2xz^2+yz^2-x^2y^2z^3-xy^2z+x^4z^2+x^3+x^2z^3+xz}{x^2z^3+xz}. \end{aligned}$$

Выделение целой части. Отношение двух многочленов с общей основной величиной x называется алгебраической *правильной дробью* в том случае, если степень m старшего члена числителя меньше степени n старшего члена знаменателя, и *неправильной*, если $m \geq n$. Всякая неправильная дробь может быть преобразована в сумму многочлена и правильной дроби при помощи *выделения целой части* (деление многочлена на многочлен).

Пример: Выделить целую часть из

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4}{x^3 - 2ax + 3a^2} \\ & \quad \begin{array}{r} 3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4 \quad | \quad x^3 - 2ax + 3a^2 \\ \underline{3x^4 - 6ax^3 + 9a^2x^2} \\ - 4ax^3 + 13a^2x^2 - 24a^3x \\ \underline{- 4ax^3 + 8a^2x^2 - 12a^3x} \\ 5a^2x^2 - 12a^3x + 10a^4 \\ \underline{5a^2x^2 - 10a^3x + 15a^4} \\ - 2a^3x - 5a^4 \end{array} \\ R(x) &= 3x - 4ax + 5a^2 + \frac{-2a^3x - 5a^4}{x^3 - 2ax + 3a^2}. \end{aligned}$$

Разложение на элементарные дроби.

Всякая правильная *несократимая* * дробь

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}$$

(коэффициент при старшем члене знаменателя мы делаем равным 1, деля на него числитель и знаменатель) может

* То-есть такая, числитель и знаменатель которой не имеют общих множителей, содержащих x .

быть единственным образом преобразована в сумму элементарных (простых) дробей вида $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ или

$\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^l}$, где $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$. При этом могут быть 4 случая*:

1) Знаменатель $P(x)$ такой, что уравнение $P(x)=0$ имеет только действительные однократные** корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Разложение ведется по формуле:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^n + \dots + b_m}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)} = \frac{A}{x-\alpha_1} + \frac{B}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{C}{x-\alpha_n},$$

где коэффициенты $A, B, \dots, C$ определяются формулами

$$A = \frac{Q(\alpha_1)}{P'(\alpha_1)}, \quad B = \frac{Q(\alpha_2)}{P'(\alpha_2)}, \quad \dots, \quad C = \frac{Q(\alpha_n)}{P'(\alpha_n)}$$

(в знаменателях — значения производной $\frac{dP}{dx}$ при $x=\alpha_1, x=\alpha_2, \dots$).

Пример: $\frac{6x^2-x+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}; \quad \alpha_1=0, \alpha_2=+1 \text{ и } \alpha_3=-1; \quad Q(x)=6x^2-x+1; \quad P'(x)=3x^2-1;$

$$A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = -1, \quad B = \frac{Q(1)}{P'(1)} = 3 \text{ и } C = \frac{Q(-1)}{P'(-1)} = 4;$$

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}.$$

Другой способ определения $A, B, \dots, C$ — метод неопределенных коэффициентов.

Пример: $\frac{6x^2-x+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} =$

$$= \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x^2-1)}.$$

* Если мы не будем ограничиваться только действительными числами, то случай 3) не будет отличаться от 1), а случай 4) — от 2). С такой точки зрения всякую дробь $P(x)$ можно преобразовать в сумму только простых дробей вида $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, где A и α — комплексные числа. Это используется при решениях линейных дифференциальных уравнений (см. стр. 416).

** О кратности корней см. стр. 171.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x числителей в левой и правой частях равенства, получаем систему уравнений: $6=A+B+C$, $-1=B-C$, $1=-A$; решая ее, находим для A , B и C те же значения, что и выше.

2) Корни знаменателя действительные, но среди них есть кратные. Разложение ведется по формуле:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_s)^{k_s}} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_s}}{(x-\alpha_s)^{k_s}} + \dots$$

Пример: $\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3};$

коэффициенты A_1 , B_1 , B_2 и B_3 находятся методом неопределенных коэффициентов, как в случае 1).

3) Среди корней знаменателя есть комплексные*, одно-кратные. Разложение ведется по формуле:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_s)^{k_s} \dots (x^2 + p_1 x + q_1) (x^2 + p_2 x + q_2) \dots}$$

$$= \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{Dx+E}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{Fx+G}{x^2 + p_2 x + q_2} + \dots$$

Пример: $\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$. Коэффициенты A , D , E находятся методом неопределенных коэффициентов, как в случае 1).

4) Среди корней знаменателя есть комплексные, кратные. Разложение ведется по формуле:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_s)^{k_s} \dots (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots}$$

$$= \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{D_1 x + E_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{D_2 x + E_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{D_{l_1} x + F_{l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \frac{F_1 x + G_1}{x^2 + p_2 x + q_2} + \frac{F_2 x + G_2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{F_{l_2} x + G_{l_2}}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2}} + \dots$$

* См. стр. 171.

Пример:

$$\frac{5x^3 - 4x + 16}{(x-3)(x^2 - x + 1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{D_1x + E_1}{x^2 - x + 1} + \frac{D_2x + E_2}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

A, D_1, E_1, D_2, E_2 находятся методом неопределенных коэффициентов, как в случае 1).

Преобразование пропорций. Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ следуют равенства $ad = bc$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, а также производные пропорции $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$, $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$, $\frac{a \pm c}{c} = \frac{b \pm d}{d}$, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$. Из равенства нескольких отношений:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

следует

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}.$$

4. Иррациональные выражения; преобразование степеней и корней

Приведение к нормальному виду. Всякое иррациональное выражение может быть преобразовано к так называемому *нормальному* виду при помощи: 1) сокращения показателя, 2) вынесения за знак корня, 3) уничтожения иррациональности знаменателя.

Сокращение показателя производится на общий наибольший делитель показателя корня и показателей всех множителей, стоящих под знаком корня (подкоренное выражение предварительно разлагается на множители).

$$\text{Пример: } \sqrt[6]{16(x^{12} - 2x^{11} + x^{10})} = \sqrt[6]{4^2 \cdot x^{5 \cdot 2} (x-1)^2} = \sqrt[3]{4x^5(x-1)}.$$

Выносить за знак корня можно такие множители X , степень которых $m \geq$ показателя корня n . Тогда m делится на n , и X выносится за корень в степени частного и остается под корнем в степени остатка от этого деления.

$$\text{Пример: } \sqrt[8]{32x^4y^6z^{10}a^3} = 2xy^{\frac{3}{4}}z^{\frac{5}{4}}\sqrt[4]{4xz^2a^3}.$$

Уничтожение иррациональности в знаменателе производят различными способами.

Примеры:

$$1) \sqrt{\frac{x}{2y}} = \sqrt{\frac{2xy}{4y^2}} = \frac{\sqrt{2xy}}{2y};$$

$$2) \sqrt[3]{\frac{x}{4yz^2}} = \sqrt[3]{\frac{2xy^2z}{8y^3z^3}} = \frac{\sqrt[3]{2xy^2z}}{2yz};$$

$$3) \frac{1}{x + \sqrt{y}} = \frac{x - \sqrt{y}}{(x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y})} = \frac{x - \sqrt{y}}{x^2 - y};$$

$$4) \frac{1}{x + \sqrt[3]{y}} = \frac{x^3 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}{(x + \sqrt[3]{y})(x^2 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})} = \frac{x^3 - x\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}{x^3 + y}.$$

Пример. Приведение к нормальному виду:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{81x^6}{(\sqrt{2} - \sqrt{x})^4}} &= \sqrt[4]{\frac{9x^3}{(\sqrt{2} - \sqrt{x})^2}} = \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} = \\ &= \frac{3x\sqrt{x}(\sqrt{2} + \sqrt{x})}{2 - x} = \frac{3x\sqrt{2x} + 3x^2}{2 - x}. \end{aligned}$$

Преобразование степеней и корней:

$$\left. \begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^{m+n}; \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}; \quad (xy)^n = x^n y^n; \\ \left(\frac{x}{y}\right)^n &= \frac{x^n}{y^n}; \quad (x^m)^n = x^{mn}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[n]{xy} &= \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}; \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}; \\ \sqrt[n]{x^m} &= (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Обобщение понятия о показателе. Условно принимается:

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

По отношению к нулевым, отрицательным и дробным показателям справедливы те же формулы преобразований (1), что и для целых положительных показателей; это позволяет часто упрощать вычисления.

$$\begin{aligned}
 \text{Пример: } & \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{ab} + \frac{1}{\sqrt[4]{b^3}} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}} - \sqrt[4]{a^3} \right) = \\
 & = (a^{1/4} + a^{1/4}b^{1/4} + b^{-3/4}) (a^{-1} + a^{1/4}b^{-1/4} - a^{1/3}) = \\
 & = a^{-1/4} + a^{-3/4}b^{1/4} + a^{-1}b^{-3/4} + ab^{-1/4} + a^{3/4} + \\
 & \quad + a^{1/2}b^{-7/4} - a^{5/6} - a^{7/12}b^{1/4} - a^{1/3}b^{-9/4} = \\
 & = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} + \sqrt[4]{\frac{b}{a}} + \frac{1}{a\sqrt[4]{b^3}} + \frac{a}{\sqrt[4]{b}} + \sqrt[4]{a^3} + \frac{\sqrt[4]{a}}{b\sqrt[4]{b^3}} - \\
 & \quad - \sqrt[6]{a^5} - \sqrt[12]{a^7} \sqrt[4]{b} - \frac{\sqrt[3]{a}}{b\sqrt[4]{b}}.
 \end{aligned}$$

5. Показательные и логарифмические выражения

Преобразование показательных выражений вида a^x производится по формулам, аналогичным (1) на стр. 161:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy}; \quad \sqrt[y]{a^x} = a^{x/y};$$

при этом x и y могут принимать любые числовые значения. Показательные выражения, в которых основаниями являются различные величины; a^x , b^y , c^z , ..., можно преобразовать к выражениям с общим основанием, пользуясь тождеством $b = a^{\log_a b}$.

Пример: Представить $(a^x \cdot b^y) : c^z$ в виде степени a .

$$\frac{a^x b^y}{c^z} = \frac{a^x a^{y \log_a b}}{a^{z \log_a c}} = a^{x + y \log_a b - z \log_a c}.$$
 К подобному виду можно привести всякое выражение, не содержащее суммы и разности степеней.

Выражение e^x , где e — основание натуральных логарифмов (см. ниже), обозначается иногда $\exp x$.

Логарифмы. Логарифмом A числа N при основании a (обозначается $\log_a N$) называется показатель степени, в которую нужно возвысить a , чтобы получить N . Следовательно, из равенства $a^A = N$ следует $\log_a N = A$, и обратно, из второго равенства вытекает первое.

Всякое *положительное* число имеет при любом положительном основании (кроме 1) свой логарифм; логарифмы различных чисел при одном и том же основании a образуют *систему логарифмов* при этом основании. Зная логарифмы чисел при одном основании a , можно определить логарифмы этих чисел при другом основании b по формуле:

$$\log_b N = M \cdot \log_a N, \text{ где } M = \frac{1}{\log_a b} \text{ (модуль перевода) }^*.$$

Основные свойства логарифмов при одном и том же основании a :

$$\left. \begin{aligned} \log 1 = 0; \log_a a = 1; \log 0 &= \begin{cases} -\infty, & \text{при } a > 1, \\ +\infty, & \text{при } a < 1; \end{cases} \\ \log(N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2; \log \frac{N_1}{N_2} &= \log N_1 - \log N_2; \\ \log(N^n) = n \log N; \log \sqrt[n]{N} &= \frac{1}{n} \log N. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Логарифмирование данной величины называется нахождение ее логарифма; нахождение величины по ее логарифму называется *потенцированием*.

Употребительные системы логарифмов: *десятичные* или *бриггов* — при основании 10, применяемые обычно при вычислениях (обозначение: $\log_{10} N = \lg N$), и *натуральные* или *неперовы* (*гиперболические*) при основании $e = 2,71828 \dots$ ** (обозначение: $\log_e N = \ln N$).

Модуль перевода натуральных логарифмов в десятичные;

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,43429; \lg N = 0,43429 \ln N;$$

модуль перевода десятичных логарифмов в натуральные

$$M_1 = \frac{1}{M} = \ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2,30259; \ln N = 2,30259 \lg N.$$

Свойства десятичных логарифмов. Десятичные логарифмы записывают в виде десятичной дроби с точностью до определенного десятичного знака; ее целая часть называется *характеристикой* логарифма, а дробная — *мантиссой*, например: $\lg 324 = 2,5105$; характеристика равна 2, мантиссой бу-

* Удобно пользоваться следующей легко запоминаемой формулой: $\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$, где в правой части — логарифмы при любом (одном и том же) основании.

** Определение числа e см. стр. 295.

дет 5105. Числа, получающиеся из данного умножением или делением на 10^n (например: 3240; 324000; 3,24; 0,0324 из 324), имеют десятичные логарифмы с одинаковой мантиссой (5105). Мантисса отыскивается по *таблицам логарифмов**, причем на положение запятой и на нули слева и справа в числе внимания не обращается. Характеристика определяется по правилу: 1) если число >1 , то характеристика на единицу меньше числа его цифр, стоящих перед запятой, 2) если число <1 , то характеристика отрицательна и равна по абсолютной величине числу нулей слева, включая и нуль целых. Например: $\lg 3240 = 3,5105$; $\lg 324000 = 5,5105$; $\lg 3,24 = 0,5105$; $\lg 0,0324 = \bar{2},5105$. Знак „—“ ставится *над* характеристикой, так как мантисса остается положительной; такую „неполную“ — искусственную — форму отрицательного логарифма можно превратить в „полную“ по правилам: 1) абсолютная величина характеристики неполного отрицательного логарифма на единицу больше абсолютной величины характеристики полного отрицательного логарифма; 2) цифры мантиссы дополняются до 9, а последняя значащая ее цифра (не нуль) — до 10; нули в конце остаются на своих местах.

Примеры: $\bar{2},5105 = -1,4895$; $-3,2780 = 4,7220$.

Часто (особенно в таблицах), чтобы избежать надстрочных знаков, к неполному отрицательному логарифму прибавляется число 10. Например, вместо $\bar{1},324$ пишется: 9,324.

Преобразование логарифмических выражений производится по формулам (3).

Пример: Прологарифмировать $\frac{3x^2 \sqrt[3]{y}}{2zu^3}$.

$$\lg \frac{3x^2 \sqrt[3]{y}}{2zu^3} = \lg (3x^2 \sqrt[3]{y}) - \lg (2zu^3) =$$

$$= \lg 3 + 2 \lg x + \frac{1}{3} \lg y - \lg 2 - \lg z - 3 \lg u.$$

Логарифмировать *сумму и разность* нельзя, и их предварительно следует преобразовать в выражения, удобные для логарифмирования (т. е. содержащие произведения и частные).

Часто употребляется обратное преобразование — представление выражения, содержащего несколько логарифмов от различных величин в виде логарифма от одного выражения.

Пример:

$$\lg 3 + 2 \lg x + \frac{1}{3} \lg y - \lg 2 - \lg z - 3 \lg u = \lg \frac{3x^2 \sqrt[3]{y}}{2zu^3}.$$

О логарифмической (счетной) линейке см. стр. 148.

* Таблицы десятичных логарифмов (точнее — таблицы мантисс) см. стр. 51; таблицы антилогарифмов (т. е. чисел по данным мантиссам) см. стр. 54; таблицы натуральных логарифмов см. стр. 76.

Б. Уравнения

6. Преобразование к канонической форме

Алгебраическое уравнение с одним неизвестным — равенство двух рациональных или иррациональных выражений, которое верно только при определенных значениях входящей в него неизвестной величины x ; эти значения ($x_1, x_2, \dots$) называются *корнями* или *решениями* уравнения. Из всякого алгебраического уравнения может быть путем алгебраических преобразований получено уравнение в *канонической форме*:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0^*$$

(a_0 может быть сделано $=1$), которое имеет те же корни, что и данное (и, может быть, некоторые лишние — см. ниже).

Показатель n называется *степенью уравнения*.

Пример: Преобразовать к канонической форме уравнение

$$\frac{x-1+\sqrt{x^2-6}}{3(x-2)} = 1 + \frac{x-3}{x}.$$

$$x(x-1+\sqrt{x^2-6}) = 3x(x-2) + 3(x-2)(x-3);$$

$$x^2 - x + x\sqrt{x^2-6} = 3x^2 - 6x + 3x^2 - 15x + 18;$$

$$x\sqrt{x^2-6} = 5x^2 - 20x + 18;$$

$$x^2(x^2-6) = 25x^4 - 200x^3 + 580x^2 - 720x + 324;$$

$$24x^4 - 200x^3 + 586x^2 - 720x + 324 = 0 \text{ (каноническая форма).}$$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение 4-й степени.

Система n алгебраических уравнений — совокупность n равенств, справедливых только для определенных групп ($x_1, y_1, \dots, z_1; x_2, y_2, \dots, z_2; \dots$) значений неизвестных ($x, y, \dots, z$); каждая такая группа (совокупность) называется *решением* этой системы. Всякая система алгебраических уравнений может быть преобразована в *каноническую систему*:

$$P_1(x, y, \dots) = 0;$$

$$P_2(x, y, \dots) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n(x, y, \dots) = 0,$$

где P_i — многочлен относительно $x, y, z, \dots$

* Здесь и далее коэффициенты $a_0, a_1, \dots$ предполагаются действительными за исключением особо оговоренных случаев.

Пример: Преобразовать к канонической форме систему

$$1) \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{z}, \quad 2) \frac{x-1}{y-1} = \sqrt{z}, \quad 3) xy = z.$$

Каноническая форма

$$1) x^2 z^3 - y = 0, \quad 2) x^3 - 2x + 1 - y^2 z + 2yz - z = 0, \quad 3) xy - z = 0.$$

Лишние корни. При преобразовании алгебраического уравнения к каноническому виду $P(x)=0$ могут встретиться случаи, когда $P(x)=0$ будет иметь решения, не удовлетворяющие исходному уравнению. Эти случаи двух типов:

I. Обращение знаменателя в нуль. Если уравнение имеет вид дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \quad (1)$$

где P и Q — многочлены, то, умножая обе части равенства на знаменатель, получаем уравнение в канонической форме

$$P(x) = 0, \quad (2)$$

все корни которого те же, что и уравнения (1), за исключением того случая, когда какой-нибудь из корней $x=\alpha$ уравнения $P(x)=0$ является также корнем уравнения $Q(x)=0$. Тогда дробь следует предварительно сократить на $x-\alpha$ [или на $(x-\alpha)^k$, если это возможно], в противном случае $P(x)=0$ будет содержать корень $x=\alpha$ не являющимся совсем корнем уравнения (1) или являющимся корнем его, но меньшей кратности*.

Примеры:

$$1) \frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{x-1} \quad \text{или} \quad \frac{x^3-1}{x-1} = 0; \quad (1')$$

если не сократить на $x-1$ и отбросить знаменатель, то корень $x_1=1$ уравнения $x^3-1=0$ не удовлетворяет уравнению (1'), так как обращает его знаменатель в нуль.

$$2) \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1} = 0; \quad (2')$$

если не сократить на $(x-1)^2$ и отбросить знаменатель, то получится уравнение $(x-1)^3=0$, имеющее трехкратный корень $x_1=1$, в то время как (2') имеет однократный корень $x=1$.

II. Иррациональные уравнения. Если данное уравнение содержит неизвестное под знаком радикала, то, приводя его к каноническому виду, получаем второе уравнение, которое может иногда содержать корни, не удовлетворяющие исходному уравнению. Поэтому после решения второго

* О кратности корней см. стр. 171.

уравнения следует производить проверку, подставляя его корни в исходное уравнение.

Пример:

$$\sqrt{x+7}+1=2x; \quad \sqrt{x+7}=2x-1, \quad (1''')$$

$$(x+7)=(2x-1)^2, \quad 4x^2-5x-6=0. \quad (2''')$$

Корни уравнения (2'''): $x_1=2$, $x_2=-\frac{3}{4}$; x_1 удовлетворяет уравнению (1'''), а x_2 — не удовлетворяет (если в уравнении (1''') брать радикал только в арифметическом смысле).

7. Уравнения 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степеней

Уравнение 1-й степени (линейное). Каноническая форма: $ax+b=0$.

Число решений: всегда одно действительное решение $x_1 = -\frac{b}{a}$.

Уравнение 2-й степени (квадратное). Каноническая форма: $ax^2+bx+c=0$ или (после деления на a) $x^2+px+q=0$.

Число действительных решений зависит от знака дискриминанта D , равного $4ac-b^2$ или $q-\frac{p^2}{4}$:

если $D < 0$, то имеются 2 решения (действительных корней),
 " $D = 0$, " " 1 решение (2 совпавших корня),
 " $D > 0$, " " 0 решений (2 мнимых корня).

Решение квадратных уравнений. 1-й способ — разложение (если удастся) левой части на множители:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \text{ или } x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta);$$

тогда корни уравнения будут: $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$.

Пример: $x^2+x-6=0$, $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$; $x_1=-3$, $x_2=2$.

2-й способ — применение формулы;

а) для вида $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ или } x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

(последнюю формулу удобно употреблять при четном b);

б) для вида $x^2+px+q=0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Свойства корней квадратного уравнения:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = q.$$

Уравнение 3-й степени (кубическое). Каноническая форма: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ или (после деления на a и введения вместо x новой переменной $y = x + \frac{b}{3a}$):

$$y^3 + 3py + 2q = 0,$$

где

$$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \quad \text{и} \quad 3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}.$$

Число действительных решений зависит от знака дискриминанта $D = q^2 + p^3$:

если $D > 0$, то уравнение имеет 1 решение (одно действительное и два мнимых);

если $D < 0$, то уравнение имеет 3 решения (три действительных различных корня);

если $D = 0$, то уравнение имеет 1 решение, при $p = q = 0$ (три совпавших нулевых корня), и 2 решения, при $p^3 = -q^2 \neq 0$ (из трех действительных корней два совпали).

Решение кубических уравнений. 1-й способ — разложение (если удастся) левой части на множители: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$; корни уравнения: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$.

Пример: $x^3 + x^2 - 6x = 0$; $x^3 + x^2 - 6x = x(x + 3)(x - 2)$; $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

2-й способ — применение формулы Кардана (для вида $y^3 + 3py + 2q = 0$):

$$y_1 = u + v, \quad y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \quad y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$

где $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$, $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$, а ε_1 и ε_2 — корни уравнения $x^2 + x + 1 = 0$, т. е.

$$\varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В случае $D = q^2 + p^3 < 0$ три действительных корня уравнения выражаются через комплексные величины, и целесообразнее пользоваться *третьим* способом.

Пример: $y^3 + 6y^2 + 2 = 0$.

$$\begin{aligned} p = 2, q = 1; \quad q^2 + p^3 = 9; \\ u = \sqrt[3]{-1 + 3} = \sqrt[3]{2} = 1,2599, \quad v = \sqrt[3]{-1 - 3} = \\ = \sqrt[3]{-4} = -1,5874. \end{aligned}$$

Действительный корень: $y_1 = u + v = -0,3275$; комплексные корни:

$$y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v) = 0,1638 \pm i 2,4659$$

3-й способ — через вспомогательные величины, вычисляемые при помощи табл. В уравнении $u^3 + 3pu + 2q = 0$ обозначим $r = \pm \sqrt[3]{|p|}$; знак r должен совпадать со знаком q . Тогда вспомогательная величина φ и, при ее помощи, корни u_1, u_2 и u_3 определяются в зависимости от знаков p и $D = q^2 + p^3$ из следующей таблицы:

$p < 0$		$p > 0$
$q^2 + p^3 \leq 0$	$q^2 + p^3 > 0$	
$\cos \varphi = \frac{q}{r^3}$	$\text{ch } \varphi = \frac{q}{r^3}$	$\text{sh } \varphi = \frac{q}{r^3}$
$y_1 = -2r \cos \varphi/3$ $y_2 = +2r \cos (30^\circ - \varphi/3)$ $y_3 = +2r \cos (60^\circ + \varphi/3)$	$y_1 = -2r \text{ch } \varphi/3$ $y_2 = r \text{ch } \varphi/3 + i \sqrt{3} r \text{sh } \varphi/3$ $y_3 = r \text{ch } \varphi/3 - i \sqrt{3} r \text{sh } \varphi/3$	$y_1 = -2r \text{sh } \varphi/3$ $y_2 = r \text{sh } \varphi/3 + i \sqrt{3} r \text{ch } \varphi/3$ $y_3 = r \text{sh } \varphi/3 - i \sqrt{3} r \text{ch } \varphi/3$

Пример: $u^3 - 9u + 4 = 0$.

$$p = -3, q = 2; q^2 + p^3 < 0;$$

$$r = \sqrt[3]{3} = 1,7321, \cos \varphi = 2 : 3 \sqrt[3]{3} = 0,3849; \varphi = 67^\circ 22';$$

$$u_1 = -2 \sqrt[3]{3} \cos 22^\circ 27' = -3,4641 \cdot 0,9241 = -3,201;$$

$$u_2 = 2 \sqrt[3]{3} \cos (60^\circ - 22^\circ 27') = 3,4641 \cdot 0,7929 = 2,747;$$

$$u_3 = 2 \sqrt[3]{3} \cos (60^\circ + 22^\circ 27') = 3,4641 \cdot 0,1314 = 0,455.$$

Проверка:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,001 \text{ вместо } 0.$$

Свойства корней кубического уравнения:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d},$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Уравнение 4-й степени. Каноническая форма

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Число действительных решений (различных): от 0 до 4.

Решение уравнений 4-й степени: 1-й способ — разложение (если удастся) левой части на множители:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta);$$

корни уравнения: $x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = \gamma, x_4 = \delta$.

Пример: $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$; $x(x^3 - 1)(x - 2) =$
 $= x(x-1)(x+1)(x-2)$; $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 2$.

2-й способ (применим только в частных случаях). Если $b = d = 0$, то корни уравнения

$$ax^4 + cx^2 + e = 0$$

(биквадратного) определяются по формулам

$$x_{1, 2, 3, 4} = \pm \sqrt[4]{y}, \quad y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ae}}{2a}.$$

Если $a = e$ и $b = d$, то корни уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

(возвратного) определяются по формулам:

$$x_{1, 2, 3, 4} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}, \quad y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 8a^2}}{2a}.$$

3-й способ (общая формула). Корни уравнения $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a = 1$) совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$x^2 + (b+A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{by-d}{A}\right) = 0,$$

где $A = \pm \sqrt{8y + b^2 - 4c}$, а y — какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd - 8e)y + e(4c - b^2) - d^2 = 0.$$

4-й способ — приближенное решение уравнения — см. ниже, стр. 174.

Уравнения 5-й степени и выше в общем случае в радикалах разрешены быть не могут.

8. Уравнения n -й степени

Общие свойства алгебраических уравнений. Левую часть уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0^*$$

обозначим через $P(x)$; корень уравнения $P(x)=0$ называем *корнем многочлена* $P(x)$. Если α — корень $P(x)=0$, то $P(x)$ делится на $(x-\alpha)$ без остатка; в общем же случае остаток от деления $P(x)$ на $(x-\alpha)$ равен $P(\alpha)$. Если $P(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$, но уже не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$, то α называется *k -кратным* корнем уравнения $P(x)=0$; в этом случае α является общим корнем многочлена $P(x)$ и его производных до $(k-1)$ -го порядка включительно. *Основная теорема алгебры*: всякое уравнение n -й степени, коэффициенты которого — действительные или комплексные числа, имеет n корней, действительных или комплексных, если k -кратный корень считать за k корней. Если корни $P(x)$ равны: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ и, соответственно, кратности их: $k, l, m, \dots$, то

$$P(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l (x-\gamma)^m \dots \quad (*)$$

Уравнение с действительными коэффициентами. Комплексные корни уравнения с действительными коэффициентами могут быть только парно сопряженными**, т. е. если такое уравнение имеет корень $\alpha = a + bi$, то оно имеет также корень $\beta = a - bi$ и притом той же кратности. Произведение $(x-\alpha)(x-\beta)$ в этом случае дает

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 + px + q, \quad (1)$$

где $p = -(\alpha + \beta) = -2a$, $q = \alpha\beta = a^2 + b^2$, откуда следует $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$. Заменяя в формуле (*) произведение каждой пары таких множителей по формуле (1), получаем разложение многочлена на действительными коэффициентами на действительные множители:

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots, \quad (**)$$

в котором все числа α_i, p_i, q_i будут действительными и

$$\left(\frac{p_i}{2}\right)^2 - q_i < 0.$$

Число корней уравнения с действительными коэффициентами. Из предыдущего следует, что всякое уравнение нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень.

* Коэффициент a_0 при старшем члене делаем равным 1 (деля все уравнение на этот коэффициент).

** О сопряженных комплексных числах см. стр. 442.

тельный корень. Число действительных корней, заключенных между любыми числами a и b , может быть точно определено при помощи *теоремы Штурма* (см. Шапиро — стр. 531 справочника).

Число положительных корней уравнения $P(x)=0$ не больше числа перемен знаков в ряду коэффициентов многочлена $P(x)$ и может отличаться от него на четное число (*правило Декарта*). Пример: уравнение $x^4+2x^3-x^2+5x-1=0$. Последовательность коэффициентов этого уравнения имеет знаки: $++-+-$, т. е. знак меняется 3 раза. Согласно правилу Декарта это уравнение имеет 3 или 1 положительный корень. Так как при замене x на $-x$ корни уравнения меняют знаки, а при замене x на $x+h$ уменьшаются на h , то с помощью правила Декарта можно оценить и число отрицательных корней, а также число корней, больших h . В нашем примере замена x на $-x$ дает $x^4-2x^3-x^2-5x-1=0$, т. е. уравнение имеет один отрицательный корень. Замена x на $x+1$ дает $x^4+6x^3+11x^2+13x+6=0$, т. е. все положительные корни нашего уравнения (их 1 или 3) меньше единицы.

Решение уравнения n -й степени, если $n > 4$, для общего случая может быть произведено только приближенно; практически приближенные методы применяются и при решении уравнений 3-й и особенно 4-й степеней. Для приближенного нахождения одновременно всех корней алгебраического уравнения n -й степени (включая и комплексные) может быть применен *метод Грегга* (см. Крылов — стр. 530 справочника). Для вычисления отдельных действительных корней алгебраических уравнений с успехом могут быть применены общие методы приближенных решений трансцендентных уравнений (см. ниже, стр. 174).

9. Трансцендентные уравнения

Определение. Уравнение называется *трансцендентным*, если над неизвестным производятся действия, отличные от сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Примеры:

- 1) $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$,
- 2) $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$,
- 3) $2 \lg_5 (3x-1) - \lg_5 (12x+1) = 0$,
- 4) $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$,
- 5) $3 \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$,
- 6) $x \cos x = \sin x$.

В некоторых случаях решение трансцендентных уравнений сводится к алгебраическим уравнениям с последующим применением таблиц, вообще же трансцендентные уравнения могут быть решены только приближенно.

Уравнения, приводящиеся к алгебраическим:

Показательные уравнения. Неизвестное x или $P(x)$ (многочлен) находится только в показателях степени некоторых оснований $a, b, c, \dots$. Такие уравнения сводятся к алгебраическим в следующих случаях:

1) Если над степенями $a^{P_1(x)}, b^{P_2(x)}, \dots$ не производится сложения и вычитания, то уравнение следует прологарифмировать при любом основании.

Пример: $3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x$; $x \log 3 = (x-2) \log 4 + x \log 2$;

$$x = \frac{2 \log 4}{\log 4 - \log 3 + \log 2}.$$

2) Если $a, b, c, \dots$ суть целые или дробные степени одного и того числа k ($a = k^\alpha, b = k^\beta, c = k^\gamma, \dots$), то, полагая $y = k^x$, решаем алгебраическое уравнение относительно y и определяем x из таблиц: $x = \frac{\lg y}{\lg k}$.

Пример: $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$; $\frac{2^x}{2} = \frac{2^3 x}{64} - \frac{2^2 x}{16}$;
 $2^x = \frac{(2^x)^3}{32} - \frac{(2^x)^2}{8}$; полагая $2^x = y$, получим $y^3 - 4y^2 - 32y = 0$
и $y_1 = 8, y_2 = -4, y_3 = 0$; $2^{x_1} = 8, 2^{x_2} = -4, 2^{x_3} = 0$, откуда $x_1 = 3$; других действительных решений не существует.

Логарифмические уравнения. Неизвестное x или $P(x)$ (многочлен) находится только под знаком логарифма. Такие уравнения сводятся к алгебраическим в следующих случаях:

1) Если уравнение содержит логарифм от одного и того же выражения; в этом случае, принимая этот логарифм за новое неизвестное, решаем полученное алгебраическое уравнение и потенцируем полученное решение.

Пример: $m [\log_a P(x)]^2 + n = a \sqrt{[\log_a P(x)]^2 + b}$. Замена $\log_a P(x)$ через y дает уравнение $my^2 + n = a \sqrt{y^2 + b}$; найдя отсюда y , получим уравнение для определения x : $P(x) = a^y$.

2) Если уравнение содержит линейную комбинацию (с целыми коэффициентами) логарифмов при одном и том же основании от выражений, представляющих собою многочлены от x : $m \log_a P_1(x) + n \log_a P_2(x) + \dots = 0$. В этом случае выражения в обеих частях равенства сводятся (каждое) к логарифму от одного выражения и равенство потенцируется.

Пример: $2 \log_5 (3x-1) - \log_5 (12x+1) = 0$, $\log_5 \frac{(3x-1)^2}{12x+1} = 0$
 $= \log_5 1$; $\frac{(3x-1)^2}{12x+1} = 1$, $x_1 = 0, x_2 = 2$; решение $x_1 = 0$ при постановке в данное уравнение дает логарифм отрицательного числа (мнимость) и потому во внимание не принимается.

Тригонометрические уравнения. Неизвестное x или $px+a$ (p целое) содержится только под знаками тригонометрических функций. Тогда, пользуясь тригонометрическими формулами, приводим выражение только к какой-нибудь одной функции от x и, заменяя эту функцию через y , получаем алгебраическое уравнение. Решив его, определяем x , вообще говоря, из таблиц; при этом следует иметь в виду многозначность решения.

Пример: $\sin x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$; иначе $\sin x = 1 - \sin^2 x - \frac{1}{4}$; полагая $\sin x = y$, получаем $y^2 + y - \frac{3}{4} = 0$ и $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Решение y_2 не дает действительных решений ($|\sin x| \leq 1$); $y_1 = \frac{1}{2}$ дает $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (k — целые числа).

Гиперболические уравнения. Неизвестное x находится только под знаком гиперболических функций. Заменяя выражения гиперболических функций через показательные, обозначаем $e^x = y$, $e^{-x} = \frac{1}{y}$ и сводим уравнение к алгебраическому относительно y ; $x = \ln y$ определяется из таблиц.

Пример: $3 \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$; $\frac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 9$, $e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$; $y + \frac{2}{y} - 9 = 0$, $y^2 - 9y + 2 = 0$; $y_1 = \frac{9 + \sqrt{73}}{2}$; $x_1 = \ln \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \approx 2,17$, $x_2 = \ln \frac{9 - \sqrt{73}}{2} \approx -1,42$.

Приближенное решение уравнений. Указываемые здесь способы приближенного решения уравнений применимы как к алгебраическим, так и к трансцендентным уравнениям. Процесс вычисления корней распадается на две части: 1) нахождение грубо приближенных значений корней и 2) уточнение найденных грубых приближений.

Грубая оценка корней. Если $f(x)$ — непрерывная функция*, а $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то между a и b лежит по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$. Давая a и b различные значения, всегда можно получить достаточно узкий интервал, в котором будет лежать только один корень рассматриваемого уравнения. **Графический метод** применяется, если уравнение можно представить в виде $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, причем графики функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ могут быть легко построены. Тогда корни уравнения равны абсциссам точек пересечения кривых $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$.

* См. стр. 299.

Пример: корни уравнения $x \cos x = \sin x$ близки к $(2k+1) \frac{\pi}{2}$, так как оно может быть записано в виде $x = \operatorname{tg} x$, и корни его соответствуют точкам пересечения прямой $y=x$ и тангенсоиды $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 1).

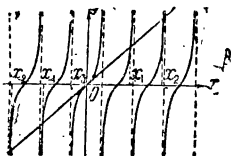


Рис. 1.

Методы уточнений грубых приближений. 1) **Метод Ньютона.** Если x_0 есть приближенное значение корня α уравнения $f(x)=0$, то в качестве более точного приближения берется $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Заменой x_0 на

может быть получено следующее приближение x_2 и т. д. Процесс последовательных приближений всегда сходится, если только корень α не кратный (т. е. $f'(\alpha) \neq 0$) и первое приближение взято достаточно близко (условия сходимости: $|x - \alpha| < \left| \frac{2f'(\alpha)}{f''(\alpha)} \right|$), и, следовательно, корень может быть найден с любой степенью точности. **Пример**—см. ниже.

2) **Линейная интерполяция (Regula falsi).** Если корень α уравнения $f(x)=0$ заключен между a и b , то в качестве приближенного значения корня может быть взята величина $\tilde{x}_1 = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$. Если $f''(x)$ в интервале между a

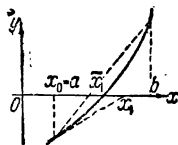


Рис. 2.

и b не меняет знака, то приближенные значения, полученные по этому методу и по методу Ньютона (с a или b в качестве первого приближения), будут расположены по разные стороны от корня. Поэтому параллельное применение обоих методов позволяет судить о достигнутой точности. Геометрически метод Ньютона означает замену графика функции $f(x)$ касательной в точке x_1 , и метод линейной интерполяции—хордой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (рис. 2). **Пример**—см. ниже.

3) **Метод итерации.** Рассматриваемое уравнение представляют в виде $x = \varphi(x)$ и находят более точное значение корня x_1 по первому приближению x_0 с помощью формулы $x_1 = \varphi(x_0)$. Повторяя этот процесс несколько раз, можно получить значение корня с любой степенью точности, если только на интервале между корнем уравнения и первым приближением $|\varphi'(x)| < 1$. Если же это условие не выполнено, то уравнение следует преобразовать (хотя бы переходом к обратной функции). **Например:** к уравнению

$x = \operatorname{tg} x$ метод итерации неприменим, но он применим к уравнению $x = \operatorname{arctg} x$.

Если $\varphi'(x) < 0$, то два смежные приближенные значения корня, полученные путем итерации, будут последовательно больше и меньше корня, что позволяет оценить достигнутую степень точности.

Пример. Найти наименьший положительный корень уравнения $\sin x - x \cos x = 0$. Заменяя это уравнение ему эквивалентным $x = \operatorname{tg} x$, графически находим (см. стр. 175), что искомый корень близок к $\frac{3\pi}{2} = 4,71\dots$ Более точное значение находим последовательными приближениями:

а) По методу Ньютона и линейной интерполяции. Для $f(x) = \sin x - x \cos x$ имеем $f'(x) = x \sin x$. Если взять $x_0 = \frac{3\pi}{2}$, то $f(x_0) = -1$, $f'(x_0) = -4,71$ и $x_1 = 4,71 - \frac{1}{4,71} = 4,50$.

Так как $f(x_1) = -0,029$ того же знака, что и $f(x_0)$, то линейная интерполяция не может быть применена. Вычисление показывает, что $f(4,45) = 0,189$ и, следовательно, искомый корень лежит между 4,45 и 4,50. Применяя линейную интерполяцию, получим следующее приближение:

$$\tilde{x}_1 = 4,50 - \frac{-0,029}{-0,029 - 0,189} (4,50 - 4,45) = 4,4930.$$

Вычисление по формуле Ньютона следующего за x_1 приближения дает

$$x_2 = 4,50 - \frac{-0,029}{-4,399} = 4,4934.$$

Так как приближения по методу Ньютона и методу линейной интерполяции лежат по разные стороны от корня, то ошибка x_2 не превышает 0,0001.

б) По методу итерации: уравнение $x = \operatorname{tg} x$ непригодно для итерации, так как $(\operatorname{tg} x)' > 1$; переходя к обратной функции, получим уравнение $x = \operatorname{arctg} x$, которое можно итерировать. Принимая $x_0 = 4,7$, найдем последовательно:

$$x_1 = \operatorname{arctg} x_0 = 258^\circ = 4,503; \quad x_2 = \operatorname{arctg} x_1 = 257^\circ 29' = 4,4942; \\ x_3 = \operatorname{arctg} x_2 = 257^\circ 27',3 = 4,4934; \quad x_4 = \operatorname{arctg} x_3 = 257^\circ 27',2 = 4,4934.$$

Очевидно, что у x_4 можно считать все знаки верными.

10. Определители (детерминанты)

Определения. *Определителем (детерминантом) n -го порядка* называется число D , образованное из n^2 чисел a_{ij} (элементов), расположенных в квадратную табличку

из n строк и n столбцов следующим образом*:

$$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega},$$

где $\alpha, \beta, \dots, \omega$ пробегает все возможные $n!$ перестановок** из чисел $1, 2, \dots, n$; знак $+$ или $-$ перед каждым членом определителя (т. е. каждым слагаемым) определяется числом k инверсий („беспорядков“) в каждой перестановке. Например, член $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ в определителе 4-го порядка имеет знак „минус“, так как расположение $\overbrace{3,1}^{\text{3 инверсии}}, \overbrace{4,2}^{\text{1 инверсия}}$ вторых индексов у букв имеет 3 инверсии, отмеченные дужками.

Минором элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$ -го порядка, образованный из данного определителя зачеркиванием i -й строки и j -го столбца. *Адьюнктой* A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор со знаком $\pm$ по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

* Первый индекс i у элемента a_{ij} определителя указывает, что элемент взят из i -й строки определителя; второй индекс j — что элемент взят из j -го столбца (i — номер строки, считая сверху; j — номер столбца, считая слева).

** О перестановках см. стр. 185.

3-го порядка—по „правилу Саррюса“ (приписываются первые 2 столбца):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$$

$$- a_{13} a_{23} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33};$$

n -го порядка—сводят к $(n-1)$ -му по свойству 6; предварительно определитель преобразуют, пользуясь оставшимися свойствами, чтобы обратить в нуль возможно большее число элементов.

Пример:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

(свойство 5) (свойство 3)

$$= 3 \left\{ -5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \right\} = 0 - 21 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

(свойство 6) (свойство 2)

$$= -21 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -21 \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right\} =$$

(свойство 5) (свойство 6)

$$= -21 \{ (1+10) - (16+5) \} = +147.$$

11. Решение системы уравнений

Линейные уравнения. Каноническая система n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n.$$

Обозначения:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(определитель системы), D_j — определитель, получающийся из D заменой столбца, составленного из коэффициентов a_{kj} при неизвестном x_j , столбцом, составленным из свободных

членов b_k ; например $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Система назы-

вается *однородной*, если все $b_k = 0$ (и значит все $D_j = 0$), и *неоднородной*, если хотя бы одно b_k отлично от нуля.

Решение системы линейных уравнений. Если $D \neq 0$, то система *полная* (все n уравнений *независимы*) и имеет одно определенное решение; корни x_j выражаются формулами

$x_j = \frac{D_j}{D}$; для однородной полной системы все $x_j = 0$. Если $D = 0$ и не все $D_j = 0$, то система *противоречивая* и не имеет ни одного решения; для однородной системы такого случая быть не может. Если $D = 0$ и все $D_j = 0$, то система *неполная* (уравнения *зависимы*, т. е. одно из них есть следствие остальных) и имеет бесконечное множество решений; одно из x_j может быть выбрано произвольно. В последнем случае для однородной системы можно определить отношение корней: $x_1 : x_2 : \dots : x_n = A_{i1} : A_{i2} : \dots : A_{in}$, где A_{ij} — адьюнкты элементов любой строки (если только они не все равны нулю)*.

Примеры:
$$\left. \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 9 \\ x - 2y + z &= -2 \\ 3x + 2y + 2z &= 7 \end{aligned} \right\};$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-13}{13} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

[система полная, неоднородная].

* Подробнее об этом см. Шапиро стр. 532 справочника.

$$2) \begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ 3x+2y=5 \end{cases}; \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

[система противоречивая].

$$3) \begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \quad D=0;$$

$$x:y:z = A_{11}:A_{12}:A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= -2:3:5$, т. е. $x=-2\lambda$, $y=3\lambda$, $z=5\lambda$, где λ — любое число [система однородных зависимых уравнений].

Уравнения высших степеней. Два уравнения с двумя неизвестными:

$$f(x, y)=0 \text{ и } \varphi(x, y)=0$$

будут независимы, если их якобиан (см. стр. 292)

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль тождественно; в противном случае одно уравнение есть следствие другого, и они имеют бесконечное множество решений.

Для трех уравнений с тремя неизвестными аналогичное условие:

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Эти условия относятся как к системам алгебраических, так и трансцендентных уравнений.

Число решений системы двух алгебраических уравнений $P_1(x, y) = 0$ и $P_2(x, y) = 0$. Если P_1 — многочлен m -й степени, а P_2 — n -й степени относительно x и y , то система имеет $m \cdot n$ действительных или комплексных пар решений*; для системы трех уравнений m -й, n -й и p -й степеней — $m \cdot n \cdot p$ троек решений и т. д.

Нахождение решений системы двух алгебраических уравнений в общем случае сводится к получению уравнения m -й степени — *резольвенты* системы — с одним из неизвестных (например x), путем исключения другого неизвестного (y) из системы; после нахождения корней резольвенты они подставляются в одно из уравнений системы для определения другого неизвестного. Наиболее просто решается система уравнений, одно из которых линейное, а другое n -й степени; разрешая линейное уравнение относительно y и подставляя в другое уравнение, получаем резольвенту n -й степени относительно x . В случае системы двух уравнений, из которых каждое 2-й степени, получаем резольвенту 4-й степени; иногда удается такую систему решить искусственными приемами.

Пример: $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$. Получаем $(x+y)^2 = a+2b$; $(x-y)^2 = a-2b$; $x+y = \pm \sqrt{a+2b}$, $x-y = \pm \sqrt{a-2b}$, откуда находятся 4 пары значений x и y .

Графический метод решения системы двух уравнений сводится к нахождению точек пересечения графиков неявных функций $f(x, y) = 0$ и $\varphi(x, y) = 0$.

В. Дополнительные главы алгебры

12. Прогрессии, конечные ряды и средние величины

Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ (членов прогрессии), в которой каждое последующее число получается из предыдущего прибавлением определенного числа r (разности прогрессии). Если $r > 0$, прогрессия называется *возрастающей*, если $r < 0$, — *убывающей*.

Формулы арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \text{и} \quad s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (s_n - \text{сумма } n \text{ членов}).$$

Геометрической прогрессией называется такая последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ (членов про-

* Под степенью многочлена от двух переменных понимается наибольшая сумма степеней x и y в его членах. Например, многочлен $x^3 + x^2y^2 + y^3$ 4-й степени.

грессии), в которой каждое последующее число получается из предыдущего умножением его на определенное число q (знаменатель прогрессии). Если $q > 1$, прогрессия называется *возрастающей*, если q (положительное) < 1 , то — *убывающей*.

Формулы геометрической прогрессии:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{и} \quad s_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Для суммы убывающей геометрической прогрессии удобнее пользоваться формулой $s_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}$. Если число членов убывающей прогрессии n безгранично растет, то $q^n \rightarrow 0$ и s_n неограниченно приближается к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s = \frac{a_1}{1 - q}$$

(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Пример: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$

Некоторые числовые ряды (конечные *):

$$1) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) \quad p + (p+1) + (p+2) + \dots + (q-1) + q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$$

$$3) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = n^2$$

$$4) \quad 2 + 4 + 6 + \dots + (2n-2) + 2n = n(n+1)$$

$$5) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$6) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$7) \quad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$8) \quad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

Средние величины.

Средним арифметическим двух величин a и b называется их полусумма $x = \frac{a+b}{2}$; величины a , x и b образуют арифметическую прогрессию.

* Таблицу бесконечных числовых рядов см. на стр. 306.

Среднее арифметическое n величин $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Средним квадратическим n величин $a_1, a_2, \dots, a_n$ (положительных или отрицательных) называется величина

$$+ \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2},$$

имеющая большое значение в теории ошибок (см. стр. 508).

Средним геометрическим (средним пропорциональным) двух положительных величин a и b называется величина

$x = +\sqrt{ab}$; величины a, x и b образуют геометрическую прогрессию. Среднее геометрическое двух неравных величин всегда меньше их среднего арифметического. Если a и b — длины отрезков, то отрезок длиной $x = \sqrt{ab}$ определяется построением, данным на рис. 3 (а или б).

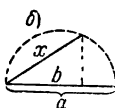
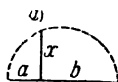


Рис. 3.

Золотым сечением (или делением в крайнем и среднем отношении) величины a называется ее разделение на две такие части x и $a-x$, чтобы x было средним геометрическим между a и $a-x$.



Рис. 4.

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a = 0,618a.$$

Если a — длина отрезка, то отрезок длиной x определяется построением, приведенным на рис. 4. Величина x является длиной стороны правильного десятиугольника, вписанного в круг радиуса a .

13. Факториал и гамма-функция

Факториалом целого положительного числа n (обозначается: $n!$ или $\Pi(n)$) называется произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Основное свойство факториала: $n! = n \cdot (n-1)!$

Факториалы первых чисел см. стр. 50.

Факториалы больших чисел могут быть выражены приближенно формулой Стирлинга:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right),$$

$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Гамма-функции. Понятие факториала распространяется от целых положительных n на любые числа x при помощи гамма-функции, $\Gamma(x)$, определяемой двояким образом:

$$\Gamma(x) \begin{cases} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ (интеграл Эйлера)} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \end{cases}$$

Основные свойства гамма-функции:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \text{ при } n \text{ целом положительном,}$$

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Обобщение понятия факториала $\Pi(x)$:

$$\Pi(x) = \Gamma(x+1).$$

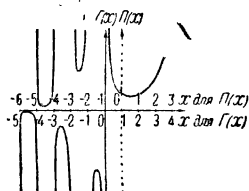


Рис. 5.

При x целом положительном: $\Pi(x) = x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x$,

$x=0$: $\Pi(0) = \Gamma(1) = 1$

x целом отрицательном: $\Pi(x) = \pm \infty$

$$x = -\frac{1}{2}: \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}: \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$x = -\frac{3}{2}: \Pi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

График функций $\Gamma(x)$ и $\Pi(x)$ см. рис. 5. Таблицы функций $\Gamma(x)$ см. стр. 99.

14. Соединения

Размещениями из n элементов по m называются такие их соединения, которые различаются друг от друга самими элементами или их порядком. Например: размещения из 3 элементов a, b, c по 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb . Число всех размещений из n различных элементов по m обозначается A_n^m :

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}_{\text{всего } m \text{ множителей}} = \frac{n!}{(n-m)!} \quad *,$$

$$\text{Например: } A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Перестановками из n элементов называются их соединения, различающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов. Например: перестановки из 3 элементов a, b и c : $abc, bca, cab, cba, bac, acb$. Число всех перестановок из n различных элементов обозначается P_n :

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n! = A_n^n.$$

Если среди n элементов $a, b, c, \dots$ имеются одинаковые (a повторяются α раз, b — β раз, c — γ раз и т. д.), то

$$P_n = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots}$$

Сочетаниями из n элементов по m называются такие их соединения, которые различаются друг от друга только самими элементами. Например: сочетания из 3 элементов a, b, c по 2: ab, ac, bc . Число всех сочетаний из n различных элементов по m [обозначается C_n^m или $\binom{n}{m}$]:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

$$C_n^1 = n, \quad C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Основное свойство сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

* О символе „!“ (факториал) см. стр. 184.

15. Бином Ньютона

Формула Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} a^{n-m}b^m + \dots + nab^{n-1} + b^n \quad (1)$$

или

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Биномиальные коэффициенты C_n^m можно определить из так называемого *треугольника Паскаля*:

n	Коэффициенты						
0				1			
1			1	1			
2			1	2	1		
3		1	3	3	1		
4		1	4	6	4	1	
5		1	5	10	10	5	1
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
...	...	...	...	...	...	...	...

Каждый коэффициент образуется сложением двух стоящих над ним (слева и справа).

Свойства биномиальных коэффициентов:

1) Коэффициенты в разложении бинома Ньютона растут до середины формулы и затем убывают,

2) коэффициенты членов, равно отстоящих от начала и конца, равны,

3) сумма коэффициентов в биноме n -й степени равна 2^n ,

4) сумма коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на четных местах.

Степень разности

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \\ + \dots + (-1)^m \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + \dots \\ \dots + (-1)^n b^n. \quad (2)$$

Обобщение на любую степень. Формула (1) может быть распространена на отрицательную и дробную степень n ; $(a+b)^n$ представляется в этом случае в виде бесконечного ряда (см. стр. 330):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$$

III. ГЕОМЕТРИЯ

А. Планиметрия

1. Плоские фигуры

Треугольник. Сумма двух сторон $\triangle$ -ка (рис. 1) всегда больше третьей: $b+c > a$. Сумма углов $\triangle$ -ка $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Треугольник вполне определяется, если заданы: 1) три стороны или 2) две стороны и угол между ними или 3) сторона и два прилежащих к ней угла. Если заданы две стороны и угол, противолежащий одной из них, то по этим данным может быть определено два, один или ни одного треугольника (см. рис. 2, подробнее об этом см. стр. 211).

Медианой $\triangle$ -ка называется прямая, соединяющая вершину с серединой противолежащей ей стороны $\triangle$ -ка. Медианы

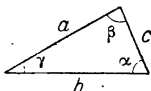


Рис. 1.

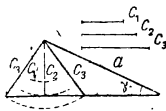


Рис. 2.

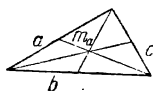


Рис. 3.

$\triangle$ -ка пересекаются в одной точке — центре тяжести $\triangle$ -ка (рис. 3) и делятся этой точкой в отношении 2:1 (считая от вершины угла). Длина медианы, проведенной на сторону a : $m_a = 0,5 \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$ (см. также стр. 212).

Биссектрисой треугольника называется прямая, делящая его внутренний угол пополам. Биссектрисы $\triangle$ -ка пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности (рис. 4); радиус вписанной окружности r —см. стр. 212. Длина биссектрисы угла α (см. также стр. 212): $l_\alpha = \sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]} : (b+c)$. Если биссектриса делит сторону a на отрезки m и n , то $m : n = c : b$.

Центр описанной окружности находится в точке пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам $\triangle$ -ка в их серединах (рис. 5). Радиус описанной окружности R —см. стр. 212.

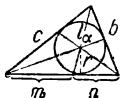


Рис. 4.



Рис. 5.

Высотой $\triangle$ -ка называется перпендикуляр, опущенный из вершины $\triangle$ -ка на противоположную сторону. Высоты $\triangle$ -ка пересекаются в одной точке, называемой его *ортоцентром*. Длина высоты—см. стр. 212.

Треугольники (а также и многоугольники с одинаковым числом сторон) *подобны*, если у них соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны. Для подобия треугольников (рис. 6) достаточно выполнения одного



Рис. 6.

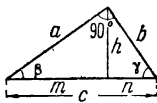


Рис. 7.

из следующих условий: 1) три стороны одного $\triangle$ -ка пропорциональны трем сторонам другого; 2) два угла одного $\triangle$ -ка равны двум углам другого; 3) две стороны одного $\triangle$ -ка пропорциональны двум сторонам другого $\triangle$ -ка, а заключенные между ними углы равны.

Площадь $\triangle$ -ка: $S = 0,5bh_b = 0,5ab \sin \gamma = 0,5r(a+b+c) = abc : 4R = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = (a+b+c) : 2$.

Прямоугольный треугольник (рис. 7): c —гипотенуза, a и b —катеты. $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора). $h^2 = mn$, $a^2 = mc$, $b^2 = nc$. Площадь $S = 0,5ab = 0,5a^2 \operatorname{tg} \beta = 0,25c^2 \sin 2\beta$. Тригонометрические формулы, относящиеся к треугольнику,—см. стр. 210—212.

П а р а л л е л о г р а м. (рис. 8) Основные свойства: 1) Противоположные стороны равны. 2) Противоположные стороны параллельны. 3) Диагонали делятся в точке пересечения пополам. Наличие у четырехугольника одного из этих свойств

вызывает, как следствие, два остальных. Связь между диагоналями и сторонами: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Площадь $S = ah$.

Прямоугольник и квадрат. Параллелограмм является *прямоугольником* (рис. 9), если у него: 1) все углы прямые или 2) диагонали равны (одно из этих свойств есть следствие другого). Площадь $S = ab$.

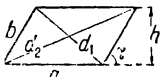


Рис. 8.

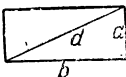


Рис. 9.

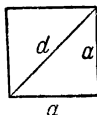


Рис. 10.

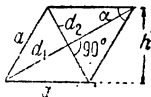


Рис. 11.

Прямоугольник есть *квадрат* (рис. 10), если $a = b$; $d = \sqrt{2}a \approx 1,414a$; $a = 0,5\sqrt{2}d = 0,707d$. Площадь $S = a^2 = 0,5d^2$.

Ромб. Параллелограмм является *ромбом* (рис. 11), если у него: 1) все стороны равны, 2) диагонали перпендикулярны, 3) диагонали делят углы параллелограмма пополам (наличие одного из этих свойств вызывает как следствие

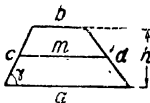


Рис. 12.

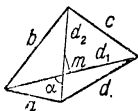


Рис. 13.

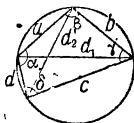


Рис. 14.

два остальных). $d_1 = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$; $d_2 = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$; $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$. Площадь $S = ah = a^2 \sin \alpha = 0,5 d_1 d_2$.

Трапеция (рис. 12). a и b — основания трапеции, h — высота, m — средняя линия (прямая, соединяющая середины непараллельных сторон; она параллельна основаниям): $m = 0,5(a + b)$. Площадь $S = 0,5(a + b)h = mh$. Трапеция — *равнобокая*, если $d = c$. В этом случае $S = (a - c \cos \gamma) c \sin \gamma = (b + c \cos \gamma) c \sin \gamma$.

Четыреугольник (рис. 13). Сумма углов всякого четырехугольника равна 360° . $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$, m — отрезок, соединяющий середины диагоналей. Площадь $S = 0,5 d_1 d_2 \sin \alpha$.

В четырехугольник можно вписать окружность (рис. 13) тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$. Около четырехугольника можно описать окружность (рис. 14) тогда и только тогда, когда $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$. Для вписанного четырехугольника $ac + bd = d_1 d_2$. Площадь вписанного четы-

угельника $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = 0,5(a+b+c+d)$.

Многоугольник (рис. 15). Если число сторон равно n , то сумма внутренних углов равна $180^\circ (n-2)$. Сумма внешних углов равна 360° . Площадь определяется разбиением на треугольники. В правильном многоугольнике все стороны и углы равны (рис. 16). Центральный угол $\alpha = 360^\circ : n$, внешний угол $\beta = 360^\circ : n$, внутренний угол $\gamma = 180^\circ - \beta$, где n — число сторон. Если R — радиус описанной, а r — радиус вписанной окружности (апофема), то сторона



Рис. 15.

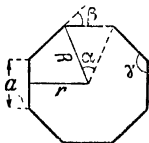


Рис. 16.

$a = 2 \sqrt{R^2 - r^2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Площадь $S = 0,5nar = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,5nR^2 \sin \alpha = 0,25 na^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Данные об отдельных правильных многоугольниках — см. таблицу на следующей странице.

Окружность. Радиус r , диаметр d . Углы в окруж-

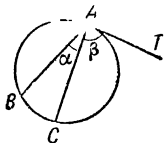


Рис. 17.

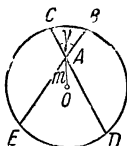


Рис. 18.

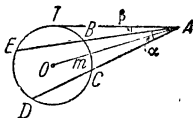


Рис. 19.

ности (рис. 17): вписанный $\alpha = \frac{1}{2} \widehat{BC}$, между хордой и касательной $\beta = \frac{1}{2} \widehat{AC}$, между хордами (рис. 18) $\gamma = \frac{1}{2} (\widehat{CB} + \widehat{ED})$, между секущими (рис. 19) $\alpha = \frac{1}{2} (\widehat{DE} - \widehat{BC})$, между касательной и секущей $\beta = \frac{1}{2} (\widehat{TE} - \widehat{TB})$, между касательными (рис. 20) $\alpha = \frac{1}{2} (\widehat{BDC} - \widehat{BEC})$.

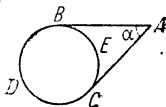


Рис. 20.

Пересекающиеся хорды (рис. 18):

$$AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2.$$

Секущие (рис. 19) $AB \cdot AE = AC \cdot AD = AT^2 = m^2 - r^2$.

Элементы правильных многоугольников

Обозначения: n — число сторон, a — сторона, R — радиус описанной окружности, r — апофея (радиус вписанной окружности).

n	$\frac{S}{a^2}$	$\frac{S}{R^2}$	$\frac{S}{r^2}$	$\frac{R}{a}$	$\frac{R}{r}$	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{r}$	$\frac{r}{R}$	$\frac{r}{a}$
3	0,4330	1,2990	5,1962	0,5774	2,0000	1,7321	3,4641	0,5000	0,2887
4	1,0000	2,0000	4,0000	0,7071	1,4142	1,4142	2,0000	0,7071	0,5000
5	1,7205	2,3776	3,6327	0,8507	1,2361	1,1756	1,4531	0,8090	0,6882
6	2,5981	2,5981	3,4641	1,0000	1,1547	1,0000	1,1547	0,8660	0,8660
7	3,6339	2,7364	3,3710	1,1524	1,1099	0,8678	0,9631	0,9010	1,0383
8	4,8284	2,8284	3,3137	1,3066	1,0824	0,7654	0,8284	0,9239	1,2071
9	6,1818	2,8925	3,2757	1,4619	1,0642	0,6840	0,7279	0,9397	1,3737
10	7,6942	2,9389	3,2492	1,6180	1,0515	0,6180	0,6498	0,9511	1,5388
12	11,196	3,0000	3,2154	1,9319	1,0353	0,5176	0,5359	0,9659	1,8660
15	17,642	3,0505	3,1883	2,4049	1,0223	0,4158	0,4251	0,9781	2,3523
16	20,109	3,0815	3,1826	2,5629	1,0196	0,3902	0,3978	0,9808	2,5137
20	31,569	3,0902	3,1677	3,1962	1,0125	0,3129	0,3168	0,9877	3,1569
24	45,575	3,1058	3,1597	3,8306	1,0086	0,2611	0,2633	0,9914	3,7979
32	81,225	3,1214	3,1517	5,1011	1,0048	0,1960	0,1970	0,9952	5,0766
48	183,08	3,1326	3,1461	7,6449	1,0021	0,1308	0,1311	0,9979	7,6285
64	325,69	3,1365	3,1441	10,190	1,0012	0,0981	0,0983	0,9988	10,178

Длина окружности C и площадь круга S (r —радиус, d —диаметр)

$$\pi = \frac{C}{d} = 3,141\,592\,653\,589\,793 \dots$$

$$C = 2\pi r \approx 6,283r, \quad C = \pi d \approx 3,142d, \quad C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3,545\sqrt{S},$$

$$S = \pi r^2 \approx 3,142r^2, \quad S = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,785d^2, \quad S = \frac{Cd}{4} \approx 0,25Cd.$$

$$r = \frac{C}{2\pi} \approx 0,159C, \quad d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 1,128\sqrt{S};$$

см. также таблицу на стр. 80 и 84.

Сегмент и сектор (рис. 21); r —радиус, l —длина дуги, a —хорда, α —центральный угол (в градусах), h —треугольника.

$$l = \frac{2\pi r \alpha}{360} \approx 0,01745r\alpha.$$

$$\text{Приближено: 1) } l = \frac{8b-a}{3} \quad \text{и 2) } l = \sqrt{a^2 + \frac{15}{3}h^2}.$$

$$a = 2\sqrt{2hr-h^2} = 2r \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$h = r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = r \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

$$\text{Площадь сектора } S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} \approx 0,00873r^2 \alpha.$$

$$\text{Площадь сегмента } S_1 = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right) = \frac{1}{2} [lr - a(r-h)].$$

$$\text{Приближенно } S_1 = \frac{h}{15} (6a + 8b). \text{ Таблицы для } S_1, l, h \text{ и } a$$

см. стр. 88–94.

Круговое кольцо (рис. 22). $D=2R$ —внешний диаметр, $d=2r$ —внутренний диаметр, $\rho=0,5(R+r)$ —средний радиус, $\delta=R-r$ —толщина кольца.

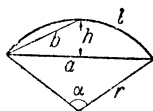


Рис. 21.

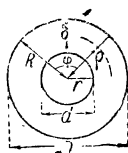


Рис. 22.

$$\text{Площадь кольца: } S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\rho\delta.$$

Площадь части кольца с центральным углом φ (в градусах):

$$S = \frac{\varphi\pi}{360}(R^2 - r^2) = \frac{\varphi\pi}{90}(D^2 - d^2) = \frac{\varphi\pi}{180}\rho\delta.$$

ГЕОМЕТРИЯ

Б. Стереометрия

2. Пространственные углы

Угол между двумя прямыми, не лежащими в одной плоскости, измеряется углом между параллельными им прямыми, проведенными из одной точки (рис. 23).

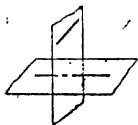


Рис. 23.

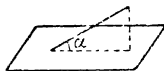
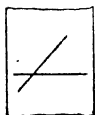


Рис. 24.

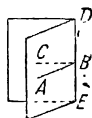


Рис. 25.

Угол между прямой и плоскостью измеряется углом между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 24).

Двугранный угол — угол между двумя плоскостями — измеряется его *линейным углом* ABC (рис. 25), т. е. углом между перпендикулярами к *ребру* DE двугранного угла, восстановленными в обеих плоскостях (*гранях*) из одной точки B .

Многогранный угол $OABCDE$ (рис. 26) образуется несколькими плоскостями, имеющими общую точку. Многогранные углы *равны*, если они при наложении совпадают; для этого должны быть соответственно равны элементы (двугранные и плоские углы) многогранных углов. Если соответственно равные элементы многогранного угла расположены в обратном порядке, многогранные углы при наложении не совпадают; они в этом случае *симметричны*, т. е. могут быть приведены в положение рис. 27.

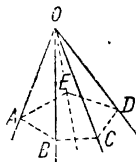


Рис. 26.

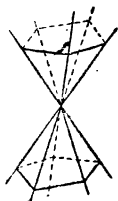


Рис. 27.

Выпуклый многогранный угол лежит целиком по одну сторону от каждой его грани. Сумма плоских углов $AOB + BOC + \dots + EOA$ (рис. 26) любого выпуклого многогранного угла меньше 360° .

Трехгранные углы равны, если они имеют: 1) по равному двугранному углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плос-

кими углами, или 2) по равному плоскому углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами, или 3) по три соответственно равных и одинаково расположенных плоских угла или 4) по три соответственно равных и одинаково расположенных двугранных угла.

Телесный угол — часть пространства, ограниченная прямыми, проведенными из одной точки (вершины) ко всем точкам какой-либо замкнутой кривой (рис. 28). Он характеризует *угол зрения*, под которым из вершины видна данная кривая. Мерой телесного угла является площадь, вырезаемая телесным углом на сфере единичного радиуса с центром в вершине. Например, для конуса с углом при вершине 120° телесный угол будет равен π (см. формулы на стр. 201).



Рис. 28.

3. Многогранники

Обозначения: V — объем, S — полная поверхность, M — боковая поверхность, h — высота, F — площадь основания.

Многогранник — тело, ограниченное плоскостями.

Призма (рис. 29). Основания — равные многоугольники; боковые грани — параллелограммы. Призма — *прямая*, если

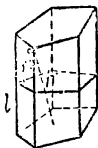


Рис. 29.

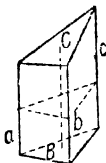


Рис. 30.

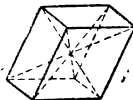


Рис. 31.

ребра перпендикулярны плоскости основания. Призма — *правильная*, если она прямая и основания ее — правильные многоугольники. $M = pl$, где l — ребро, p — периметр сечения призмы плоскостью, перпендикулярной ребру. $S = M + 2F$; $V = F \cdot h$.

Для трехгранной призмы, усеченной непараллельно основанию (рис. 30), $V = \frac{1}{3} (a + b + c) Q$, где a , b и c — длины

параллельных ребер, а Q — площадь перпендикулярного сечения. Для n -гранной призмы, усеченной непараллельно основанию, $V = lQ$, где l — длина линии BC , соединяющей центры тяжести оснований, а Q — площадь сечения, перпендикулярного к этой линии.

Параллелепипед (рис. 31) — призма, у которой основания — параллелограммы. В параллелепипеде все 4 диа-

гона́ли пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. Параллелепипед *прямоугольный*, если он прямой и его основания — прямоугольники. В прямоугольном параллелепипеде (рис. 32) все диагонали равны. Если a , b и c — ребра прямоугольного параллелепипеда, а d — его диагональ, то $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $V = abc$,

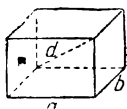


Рис. 32.

$$S = 2(ab + bc + ca).$$

Куб: $a = b = c$, $d^2 = 3a^2$; $V = a^3$; $S = 6a^2$.

Пирами́да (рис. 33). В основании — какой-либо многоугольник, боковые грани — треугольники, сходящиеся в одной вершине. Пирамида называется n -угольной, если у нее n боковых граней (вместе с основанием $n+1$ грань).

$$V = \frac{1}{3} Fh.$$

Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то

$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \frac{SC_1}{C_1C} = \dots = \frac{SO_1}{O_1O}$$

и

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } A_1B_1C_1D_1E_1} = \left(\frac{OS}{O_1S}\right)^2$$

(OS — высота пирамиды).

Пирамида *правильная* (рис. 34), если в основании — правильный многоугольник, а высота (перпендикуляр, опущенный из вершины на основание) проходит через его центр.

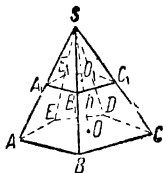


Рис. 33.

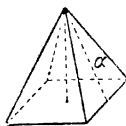


Рис. 34.

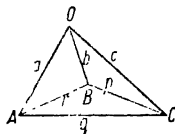


Рис. 35.

Для правильной пирамиды $M = \frac{1}{2} p\alpha$ [p — периметр основания, α — апофема правильной пирамиды (высота какой-либо ее боковой грани)].

Тетраэ́др — треугольная пирамида (рис. 35). Если $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = p$, $CA = q$, $AB = r$, то *

* Об определителях см. стр. 176.

$$V^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Усеченная пирамида (плоскость сечения параллельна основанию, рис. 36). Если F и f — площади оснований, h — высота (расстояние между основаниями), a и A — две соответственные стороны оснований, то

$$V = \frac{1}{3} h [F + f + \sqrt{Ff}] = \frac{1}{3} hF \left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A} \right)^2 \right].$$

Для правильной усеченной пирамиды $M = \frac{P+p}{2} a$, где P и p — периметры оснований, a — апофема

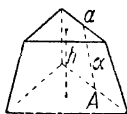


Рис. 36.

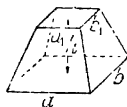


Рис. 37.

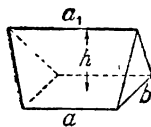


Рис. 38.

Обелиск. Плоскости боковых граней не пересекаются в одной точке (рис. 37), основания — прямоугольники со сторонами a , b и a_1 , b_1 .

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{6} [(2a + a_1)b + (2a_1 + a)b_1] = \\ &= \frac{h}{6} [ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1^2 b_1]. \end{aligned}$$

Клин. Основание — прямоугольник, боковые грани — равнобедренные треугольники и равнобедренные трапеции (рис. 38).

$$V = \frac{1}{6} (2a + a_1) bh.$$

Правильные многогранники — у которых все грани равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Существует пять правильных многогранников (рис. 39), данные о которых см. в таблице на стр. 198.

Теорема Эйлера. Если e — число вершин многогранника, f — число граней и k — число ребер, то $e - k + f = 2$ (при условии, что многогранник выпуклый или может быть сделан выпуклым при помощи непрерывной деформации).
Примеры — см. в таблице правильных многогранников.

Элементы правильных многогранников (a — длина ребра).

Название	Число граней и их форма	Число		Полная поверхность	Объем
		ребер	вершин		
Тетраэдр	4 треугольн.	6	4	$1,7321 \cdot a^2$	$0,1179 \cdot a^3$
Куб	6 квадратов	12	8	$6 \cdot a^2$	a^3
Октаэдр	8 треугольн.	12	6	$3,4641 \cdot a^2$	$0,4714 \cdot a^3$
Додекаэдр	12 пятиугольн.	30	20	$20,6457 \cdot a^2$	$7,6631 \cdot a^3$
Икосаэдр	20 треугольн.	30	12	$8,6603 \cdot a^2$	$2,1817 \cdot a^3$

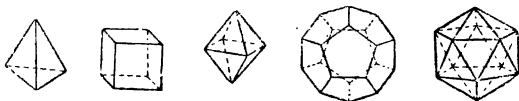


Рис. 39.

4. Круглые тела

Обозначения: V — объем, S — полная поверхность M — боковая поверхность, h — высота, F — площадь основания.

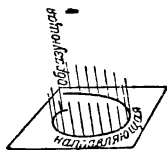


Рис. 40.

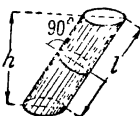


Рис. 41

Цилиндрическая поверхность (рис. 40) образуется прямой линией (образующей), перемещающейся параллельно заданному направлению вдоль некоторой кривой (направляющей).

Цилиндр — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, являющимися основаниями цилиндра. Для любого цилиндра (рис. 41) (p — периметр основания, s — периметр сечения, перпендикулярного образующей, Q — его площадь, l — длина образующей)

$$M = ph = sl \quad V = Fh = Ql$$

Круглый прямой цилиндр имеет в основании круг, и его образующие—перпендикуляры к плоскости

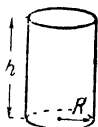


Рис. 42.

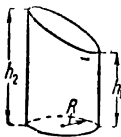


Рис. 43.

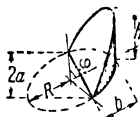


Рис. 44.

основания (рис. 42); R —радиус основания.

$$M = 2\pi R h; \quad S = 2\pi R (R + h); \quad V = \pi R^2 h.$$

Усеченный круглый цилиндр (рис. 43):

$$M = \pi R (h_1 + h_2), \quad S = \pi R \left[h_1 + h_2 + R + \sqrt{R^2 + \left(\frac{h_2 - h_1}{2} \right)^2} \right],$$

$$V = \pi R^2 \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Отрезок цилиндра (обозначения см. рис. 44, φ —в радианах):

$$V = \frac{h}{3b} [a (3R^2 - a^2) + 3R^2 (b - R) \varphi] =$$

$$= \frac{hR^2}{b} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} - \varphi \cos \varphi \right).$$

$$M = \frac{2Rh}{b} [(b - R) \varphi + a].$$

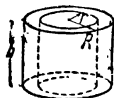


Рис. 45.

Цилиндрическая труба (рис. 45). R и r —внешний и внутренний радиусы;

$\delta = R - r$, $\rho = \frac{R + r}{2}$ (средний радиус).

$$V = \pi h (R^2 - r^2) = \pi h \delta (2R - \delta) =$$

$$= \pi h \delta (2r + \delta) = 2\pi h \delta \rho.$$

Коническая поверхность образуется (рис. 46) прямой линией (образующей), перемещающейся вдоль кривой линии (направляющей) и имеющей неподвижную точку (вершину).



Рис. 46.

Конус (рис. 47) ограничен конической поверхностью с замкнутой направляющей и плоскостью, образующей основание. Для любого конуса $V = \frac{1}{3} h F$.

Круглый прямой конус (рис. 48) имеет в основании окружность, и его высота проходит через центр

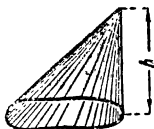


Рис. 47.



Рис. 48.

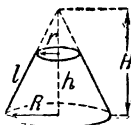


Рис. 49.

окружности основания (l —длина образующей, R —радиус основания):

$$M_1 = \pi R l = \pi R \sqrt{R^2 + h^2}; \quad S = \pi R (R + l); \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Для усеченного прямого конуса (рис. 49):

$$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}; \quad M = \pi l (R + r); \quad V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr);$$

$$H = h + \frac{hr}{R - r}.$$

Конические сечения—см. стр. 228—235.

Сфера—поверхность шара. R —радиус шара, $D = 2R$ —диаметр шара (рис. 50). Всякое сечение сферы плоскостью есть круг. *Большой круг*—круг радиуса R , получающийся от сечения сферы плоскостью, проходящей через ее центр. Через всякие две точки сферы (не являющиеся противоположными концами диаметра) всегда можно провести большой круг и только один. Меньшая дуга этого большого круга является кратчайшим расстоянием на сфере между данными точками. О геометрии на сфере см. стр. 214.



Рис. 50.

Поверхность сферы и объем шара:

$$S = 4\pi R^2 \approx 12,57 R^2,$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \approx 4,189 R^3,$$

$$S = \pi D^2 \approx 3,142 D^2,$$

$$V = \frac{\pi D^3}{6} \approx 0,5236 D^3,$$

$$S = \sqrt[3]{\frac{36\pi V^2}{\pi}} \approx 4,836 \sqrt[3]{V^2}, \quad V = \frac{1}{6} \sqrt[3]{\frac{S^3}{\pi}} \approx 0,09403 \sqrt[3]{S^3},$$

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 0,2821 \sqrt{S}, \quad R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 0,6224 \sqrt[3]{V}.$$

Шаровой сектор (рис. 51)

$$S = \pi R (2h + a); \quad V = \frac{2\pi R^2 h}{3}.$$

Шаровой сегмент (рис. 52)

$$a^2 = h(2R - h); \quad M = 2\pi R h = \pi(a^2 + h^2); \quad S = \pi(2Rh + a^2) = \\ = \pi(h^2 + 2a^2); \quad V = \frac{1}{6} \pi h(3a^2 + h^2) = \frac{1}{6} \pi h^2(3R - h).$$

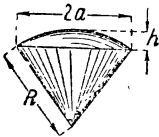


Рис. 51.

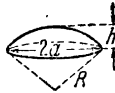


Рис. 52.

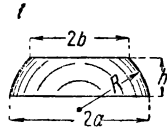


Рис. 53.

Шаровой слой (рис. 53)

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h} \right)^2; \quad M = 2\pi R h;$$

$$S = \pi(2Rh + a^2 + b^2); \quad V = \frac{1}{6} \pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

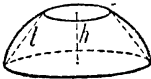


Рис. 54.

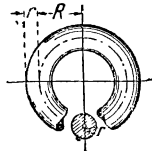
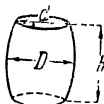


Рис. 55.

Если V_1 —объем усеченного конуса, вписанного в шаровой слой (рис. 54), и l —его образующая, то $V - V_1 = \frac{1}{6} \pi h l^2$.

Тор (рис. 55)—поверхность, образованная вращением окружности около оси, лежащей в плоскости этой окруж-

ности и не пересекающей ее (напр., поверхность автомобиля и бильной шины);



$$S = 4\pi^2 Rr \approx 39,48 Rr, \quad V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19,74^2, \quad Rr \\ S = \pi^2 Dd \approx 9,870 Dd, \quad V = \frac{1}{4} \pi^2 Dd^2 \approx 2,467 Dd^2.$$

Бочка (рис. 56). Для круговой бочки (образующая — дуга окружности) приближенно
 $V = 0,262h (2D^2 + d^2)$

$$\text{или } V = 0,0873h (2D + d)^2.$$

Рис. 56. Для параболической бочки

$$V = \frac{\pi h}{15} \left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4} d^2 \right) = 0,05236h (8D^2 + 4Dd + 3d^2).$$

IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

А. Прямолинейная тригонометрия

1. Тригонометрические функции*

Радиа́нное измерение углов. Наряду с практическим градусным измерением углов, в теоретических вопросах применяется *радья́нное* измерение: величина угла α — центрального для произвольной окружности — измеряется отношением длины дуги l , на которую этот угол опирается, к длине радиуса этой окружности, r :

$$\alpha = l : r.$$

При этом измерении за единицу принимается *радья́н* — угол, являющийся центральным для дуги, длина которой равна радиусу окружности. 1 радьян равен $57^\circ 17' 44''{,}8$ или $57^\circ,2958$; $1^\circ = 0,017453$ радьян. Переход от одного измерения к другому производится по формулам:

$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha \text{ (радья́нах)**}, \quad \alpha \text{ (радья́нов)} = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ.$$

В частности, $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ и т. д. Таблицы перевода градусов в радьяны и обратно см. стр. 57.

* Здесь изложены только те сведения о тригонометрических функциях, которые относятся к вопросам элементарной математики (прямолинейной и сферической тригонометрии). О тригонометрических функциях действительного и комплексного переменного см. в отделах „Основы математического анализа“ (стр. 290) и „Дополнительные главы анализа“ (стр. 449).

** Радья́н специального обозначения не имеет; угол, равный α радьянов, обозначается просто „ α “.

О п р е д е л е н и я. Тригонометрические функции угла α определяются при помощи тригонометрического круга* (радиус $R=1$), а также из прямо-угольного тр-ка (для острых углов), см. рис. 1, а и б.

$$\sin \alpha \text{ (синус)} = BC = \frac{a}{c},$$

$$\cos \alpha \text{ (косинус)} = OB = \frac{b}{c},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \text{ (тангенс)} = AD = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \text{ (котангенс)} = EF = \frac{b}{a},$$

$$\sec \alpha \text{ (секанс)} = OD = \frac{c}{b},$$

$$\operatorname{csc} \alpha \text{ (косеканс)} = OF = \frac{c}{a}.$$

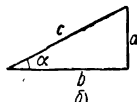
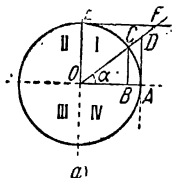


Рис. 1.

З н а к и. Функциям приписывается определенный знак в зависимости от того, в какой четверти тригонометрического круга (рис. 1, а) лежит подвижный радиус OC , по следующей таблице:

Чет- верть	Величина угла	$\sin$	$\cos$	tg	ctg	$\sec$	csc
I	от 0° до 90°	+	+	+	+	+	+
II	от 90° до 180°	+	—	—	—	—	—
III	от 180° до 270°	—	—	+	+	+	+
IV	от 270° до 360°	—	+	—	—	—	—

Пределы изменения:

$\sin$ и $\cos$: от -1 до $+1$,

tg и ctg : от $-\infty$ до $+\infty$,

$\sec$ и csc : от $-\infty$ до -1 и от $+1$ до $+\infty$.

Значения функций для углов 0° , 30° , 45° и некоторых других определяются из таблицы, приводимой на страницах 204—205.

* Угол α измеряется от неподвижного радиуса OA до подвижного радиуса OC по т. н. часовой стрелки (положительное направление).

Функция	Углы; I четверть					Углы; II четверть			
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg	$\mp \infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp \infty$

Характер изменения тригонометрических функций при увеличении угла от 0° до 360° определяется графиками, изображенными на рис. 2*.

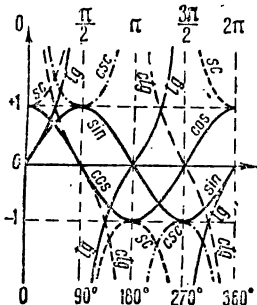


Рис. 2.

Значения тригонометрических функций любого угла находятся по следующим правилам:

1) Если угол больше 360°, то функции приводятся к функциям угла между 0° и 360° (а тангенс и котангенс могут быть приведены к углу между 0° и 180°) по формулам:

$$\sin (360^\circ \cdot n + \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos (360^\circ \cdot n + \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} (180^\circ \cdot n + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg} (180^\circ \cdot n + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha.$$

* График синуса является обыкновенной синусоидой; о более общих синусоидах см. стр. 205.

Углы; III четверть				Углы; IV четверть				Функция	
180°	210°	235°	240°	270°	300°	315°	330°		
π	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{2}{3}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	$1\frac{5}{6}\pi$		
0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	sin
-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	cos
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	tg
$\mp \infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	0	ctg

2) Если угол отрицательный, то функция приводится к функции положительного угла по формулам:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

3) Если $90^\circ < \alpha < 360^\circ$, то функция приводится к функции острого угла по формулам приведения (стр. 236).

4) Если угол острый: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, то функция находится по таблицам (стр. 58—63).

Например $\sin(-1000^\circ) = -\sin 1000^\circ = -\sin(360^\circ \cdot 2 + 280^\circ) = -\sin 280^\circ = +\cos 10^\circ = +0,985^*$.

* Значения функций для углов, заданных в радианах, находятся из таблиц на стр. 64—71, составленных при значениях аргументов от 0 до 1,60. Если заданный угол выходит из пределов таблицы, то пользуются теми же правилами и формулами приведения, что и при задании углов в градусной мере [например $\sin(2\pi + x) = \sin x$, $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ и т. д.].

Формулы приведения:

Функция	Данный угол			
	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ - \alpha$
sin	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
cos	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
tg	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

2. Основные формулы тригонометрии

Функции одного угла:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \sin \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1,$$

$$\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1, \quad \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1,$$

$$\operatorname{csc}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1, \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Выражение одной функции через другую (того же угла):

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Функции суммы и разности двух углов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta) : (1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1) : (\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha).$$

Ф у н к ц и и к р а т н ы х у г л о в:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, & \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, & \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha : (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha), & \sin 4\alpha &= 8 \cos^3 \alpha \sin \alpha - \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= (\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1) : 2 \operatorname{ctg} \alpha, & & - 4 \cos \alpha \sin \alpha, \\ & & \cos 4\alpha &= 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1,\end{aligned}$$

$\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ для больших n удобно определять, пользуясь формулой Муавра для комплексных чисел (стр. 414):

$$\begin{aligned}\cos n\alpha + i \sin n\alpha &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \\ &= \cos^n \alpha + i n \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha - \\ &\quad - i C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha + \dots,\end{aligned}$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned}\cos n\alpha &= \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \\ &\quad + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - C_n^6 \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots \\ \sin n\alpha &= n \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \\ &\quad + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots\end{aligned} \right\} (*)$$

Ф у н к ц и и п о л о в и н н о г о у г л а:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2 (1 - \cos \alpha)},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2 (1 + \cos \alpha)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

С у м м а и р а з н о с т ь ф у н к ц и й:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin [1/2 (\alpha + \beta)] \cos [1/2 (\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos [1/2 (\alpha + \beta)] \sin [1/2 (\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos [1/2 (\alpha + \beta)] \cos [1/2 (\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin [1/2 (\alpha + \beta)] \sin [1/2 (\alpha - \beta)],$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Произведение функций:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)].$$

Степени функций:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha),$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha),$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha).$$

Для вычисления $\sin^n \alpha$ и $\cos^n \alpha$ при больших n можно последовательно использовать формулы (*) на стр. 207.

3. Синусоидальные величины

Определения. Во многих вопросах механики и физики рассматриваются величины, зависящие от времени t и выражающиеся формулой

$$u = A \sin (\omega t + \varphi); \quad (**)$$

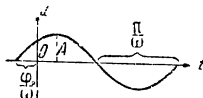


Рис. 3.

такие величины называются *синусоидальными*, их изменение в зависимости от времени называется *гармоническим колебанием*. Графиком функции (**) является *общая синусоида* (рис. 3), отличающаяся от обыкновенной синусоиды ($y = \sin x$) следующим:

1) ее *амплитуда* (размах), т. е. наибольшее отклонение от оси t , равна A ,

2) ее *период* T („длина волны“) равен $\frac{2\pi}{\omega}$ (ω называется *частотой* колебания *),

3) ее „*начальная фаза*“ — угол φ .

Величину (**) можно представить в форме

$$u = a \sin \omega t + b \cos \omega t, \quad (***)$$

причем $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$; величины a , b , A и φ

могут быть представлены элементами прямоугольного треугольника (рис. 4).

Действия над синусоидальными величинами. Сумма двух синусоидальных величин с одной и той же частотой ω является также синусоидальной величиной с той же частотой:

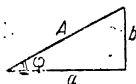


Рис. 4.

$$A_1 \sin (\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin (\omega t + \varphi_2) = A \sin (\omega t + \varphi),$$

* В теории колебаний эта величина обычно называется *циклической* или *круговой частотой*.

причем

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2};$$

линейная комбинация нескольких синусоидальных величин с одной и той же частотой есть синусоидальная величина с той же частотой:

$$\sum c_i A_i \sin(\omega t + \varphi_i) = A \sin(\omega t + \varphi);$$

нахождение A и φ производится графически на векторной диаграмме.

Векторная диаграмма синусоидальных величин. Синусоидальную величину $(**)$ или $(***)$

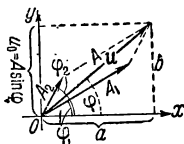


Рис. 5.

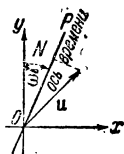


Рис. 6.

удобно изображать на плоскости в виде радиуса-вектора и с полярными координатами $\rho = A$, $\theta = \varphi$ и декартовыми $x = a$, $y = b$ (см. стр. 220—221); сумма двух синусоидальных величин изображается суммой векторов, изображающих отдельные слагаемые (рис. 5), а линейная комбинация нескольких синусоидальных величин — соответствующей линейной комбинацией векторов. Такое изображение синусоидальных величин обычно называется *векторной диаграммой*.

На векторной диаграмме величину u , соответствующую данному значению t , получают следующим образом: при $t=0$ u_0 равно проекции вектора u на ось y (рис. 5), при других t эту ось следует повернуть по часовой стрелке на угол ωt (рис. 6); проекция ON изобразит величину u . При равномерном вращении этой „оси времени“, OP по часовой стрелке с угловой скоростью ω , изменение проекции ON будет изображать изменение величины u .*

* Переход от векторной диаграммы напряжений к диаграмме силы электрического тока получается посредством оператора поворота и растяжения вектора; этот оператор изображается комплексным числом. См. об этом стр. 445, также: Смирнов, стр. 530 справочника.

4. Решение треугольников

Прямоугольный треугольник; a, b — катеты, c — гипотенуза; A, B — углы против сторон a и b . Основные соотношения: $a = c \sin A = c \cos B$, $a = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B$.

Дано	Формулы для нахождения остальных элементов
c, A	$B = 90^\circ - A$, $a = c \sin A$, $b = c \cos A$,
a, A	$B = 90^\circ - A$, $b = a \operatorname{ctg} A$, $c = \frac{a}{\sin A}$,
a, c	$\sin A = \frac{a}{c}$, $b = c \cos A$, $B = 90^\circ - A$,
a, b	$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, $c = \frac{a}{\sin A}$, $B = 90^\circ - A$

Косоугольный треугольник; a, b, c — стороны, A, B, C — противолежащие им углы, S — площадь, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр [$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$].

Основные соотношения:

$$1) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ („теорема синусов“),}$$

$$2) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ („теорема косинусов“),}$$

$$3) \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)} \text{ („теорема тангенсов“),}$$

$$4) S = \frac{1}{2}ab \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = rp = \\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Дополнительные соотношения: $\operatorname{tg} A = \frac{a \sin B}{c - a \cos B}$,

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{\cos [\frac{1}{2}(A-B)]}{\cos [\frac{1}{2}(A+B)]} = \frac{\cos [\frac{1}{2}(A-B)]}{\sin \frac{1}{2}C}, \\ \frac{a-b}{c} &= \frac{\sin [\frac{1}{2}(A-B)]}{\sin [\frac{1}{2}(A+B)]} = \frac{\sin [\frac{1}{2}(A-B)]}{\cos \frac{1}{2}C} \end{aligned} \right\} \text{ (формулы Мольвейде)}$$

Дано	Нахождение остальных элементов
1) Сторона и 2 угла (a, A, B)	$C = 180^\circ - A - B, \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A},$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$
2) 2 стороны и угол между ними (a, b, C)	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C,$ $A + B = 90^\circ - \frac{1}{2} C, \quad A \text{ и } B \text{ получаются}$ решением системы этих уравнений, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$
3) 2 стороны и угол про- тив одной из них (a, b, A)	$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$ если $a > b$, то $B < 90^\circ$ и имеет лишь одно значение; если $a < b$, то: 1) B имеет два значения ($B_2 = 180^\circ - B_1$) при $b \sin A < a$, 2) B имеет одно значение (90°) при $b \sin A = a$, 3) треугольник невозможен при $b \sin A > a$; $C = 180^\circ - (A + B), \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$ $S = \frac{1}{2} ab \sin C$
4) 3 стороны (a, b, c)	$r = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} : p,$ $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b},$ $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c},$ $S = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Вычисление линий, связанных с треугольником:

Высота на сторону a : $h_a = b \sin C = c \sin B$.

Медиана на сторону a : $m_a = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$.

Биссектриса угла A : $l_A = \frac{bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$.

Радиус описанной окружности: $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$.

Радиус вписанной окружности: $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} =$
 $= p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} =$
 $= 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$

5. Круговые (обратные тригонометрические) функции

О п р е д е л е н и я. Круговыми функциями от x („циклометрическими“, „обратными тригонометрическими“) называют величины y , определяемые равенствами:

$y = \operatorname{Arcsin} x$ (арксинус),	если $x = \sin y$,	} y изменяется в радианах.
$y = \operatorname{Arccos} x$ (арккосинус),	если $x = \cos y$,	
$y = \operatorname{Arctg} x$ (арктангенс),	если $x = \operatorname{tg} y$,	
$y = \operatorname{Arctg} x$ (арккотангенс),	если $x = \operatorname{ctg} y$	

Примеры:

$\operatorname{Arcsin} 0 = 0$ или π или 2π , вообще $\operatorname{Arcsin} 0 = k\pi$,

$\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ или $-\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{3} + 2\pi$, вообще $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} =$
 $= \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

$\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ или $\frac{5\pi}{4}$, вообще $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Главные значения. Круговые функции *многозначны*; их *главные значения* (обозначаются: $\arcsin x$ и т. д.) ограничены пределами:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < +\frac{\pi}{2}, \quad 0 < \operatorname{arctg} x < \pi.$$

Графики круговых функций см. стр. 124—125; графики их главных значений изображены на рис. 7.

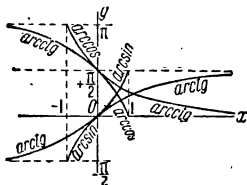


Рис. 7.

Выражения одних круговых функций через другие*:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \\ &= \left[\arccos \sqrt{1-x^2} \right] = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arccos x &= \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \\ &= \left[\arcsin \sqrt{1-x^2} \right] = \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right] = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \left[\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right] = \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcctg} x &= \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \\ &= \left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right] = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right]. \end{aligned}$$

* Эти формулы верны только для главных значений круговых функций, а формулы, взятые в квадратные скобки, — только для положительных значений x (так как пределы главных значений определены для различных функций по-разному).

Б. Сферическая тригонометрия

6. Геометрия на сфере

Геодезические линии на сфере. Пересекая шар плоскостью, проходящей через ее центр, получаем на поверхности шара (сфере) так называемый *большой круг*, радиус которого равен радиусу шара. Через каждые две точки A и B на сфере (за исключением противоположных концов диаметра шара) можно провести единственный большой круг; меньшая его дуга AaB (рис. 8) является кратчайшей из всех линий (напр. AbB) на сфере, соединяющих эти точки (так называемая *геодезическая линия** на сфере) и играет на поверхности сферы ту же роль, что прямые на плоскости.

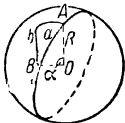


Рис. 8.

Измерение дуг и углов на сфере. Длина дуги большого круга, $\smile a$, с центральным углом $\angle \alpha$ (в радианах) равна $R\alpha$, где R — радиус сферы; для одной и той же сферы удобно принять за единицу измерения дуг радиус R ; тогда $\smile a = \angle \alpha$. В дальнейших формулах принята эта единица измерения.

Угол ABC , образованный на сфере двумя дугами большого круга (рис. 9), измеряют линейным углом $A'BC'$ между касательными к соответствующим дугам в точке B или двугранным углом, образованным плоскостями OBA и OBC .

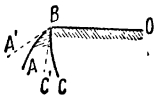


Рис. 9.

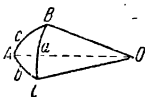


Рис. 10.

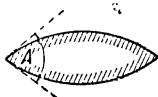


Рис. 11.

Сферические треугольники. Три больших круга образуют на сфере ряд сферических треугольников. Из них мы рассматриваем тот, все стороны и углы которого меньше 180° . Стороны треугольника a, b и c измеряются плоскими углами трехгранного угла $OABC$ (рис. 10; O — центр сферы), углы треугольника A, B, C — двугранными углами этого же трехгранного угла.

Основное свойство сферического треугольника: сумма его углов $A+B+C$ всегда больше 180° . Разность $(A+B+C) - \pi = \delta$, выраженная в радианах, называется *сферическим избытком*, или *сферическим эксцессом* данного сферического треугольника.

* См. стр. 287

Площадь сферического треугольника $S=R^2\delta$, где R —радиус сферы, а δ —сферический избыток. Площадь двуугольника, образованного двумя дугами большого круга (рис. 11), $S=2r^2A$ ($\angle A$ выражен в радианах).

7. Формулы сферической тригонометрии

A, B, C —углы треугольника, a, b, c —стороны,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (\text{теорема синусов}),$$

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \end{aligned} \right\} \quad (\text{теоремы косинусов}).$$

$$\sin a \cos b = \cos a \sin b \cos C + \sin c \cos B,$$

$$\sin a \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} B \sin C + \cos a \cos C$$

$$\sin A \cos B = \cos b \sin C - \cos c \sin B \cos A,$$

$$\sin A \operatorname{ctg} B = \sin c \operatorname{ctg} b - \cos c \cos A.$$

8. Решение прямоугольных сферических треугольников

Правило Непера для решения прямоугольного сферического треугольника (a, b —катеты, c —гипотенуза, $C=90^\circ$).

1) косинус каждого элемента равен произведению котангенсов двух прилежащих к нему элементов [напр. $\cos A = \operatorname{ctg}(90^\circ - b) \operatorname{ctg} c$],

2) косинус каждого элемента равен произведению синусов двух непримыкающих элементов [напр. $\cos(90^\circ - a) = \sin c \cdot \sin A$].

Чтобы применять это правило, следует заменить катеты прямоугольного сферического треугольника их дополнениями до 90° , не принимая во внимание прямой угол C и расположить пять элементов: $A, c, B, 90^\circ - a, 90^\circ - b$ по кругу (рис. 12)

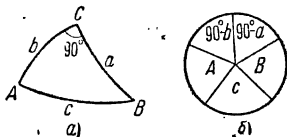


Рис. 12.

в том порядке, в каком они находятся в треугольнике.

В. Гиперболическая тригонометрия

9. Гиперболические функции

Определения гиперболических функций.

Гиперболический синус (sinus hyperbolicus, сокращенно обозначается sh), *косинус* (cosinus hyperbolicus, или ch) и

тангенс (tangens hyperbolicus, или th) определяются формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

о происхождении названий, аналогичных тригонометрическим функциям (синус, косинус, тангенс и т. д.), см. ниже (стр. 218).

Гиперболический котангенс, секанс и косеканс определяются как обратные величины:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Характер изменения гиперболических функций определяется графиками, изображенными на рис. 13. См. также текст на стр. 125—126.

Таблицы гиперболических функций см. стр. 64—71.

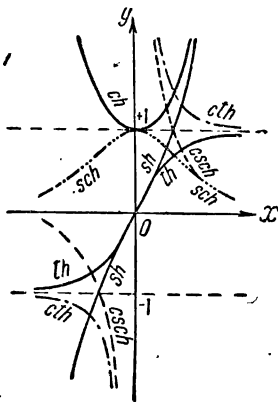


Рис. 13.

10. Основные формулы гиперболической тригонометрии

Гиперболические функции обладают свойствами, аналогичными свойствам тригонометрических функций (стр. 203—208)*:

* Эти формулы могут быть получены из соответствующих формул для тригонометрических функций посредством простого правила, см. ниже, стр. 218.

Функции одного аргумента:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1,$$

$$\operatorname{sch}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1, \quad \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x,$$

$$\operatorname{cth}^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1, \quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

Выражение одной функции через другую (того же аргумента):

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}},$$

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

Функции суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = (\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y) : (1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y),$$

$$\operatorname{cth}(x \pm y) = (1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y) : (\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y).$$

Функции двойного аргумента:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{th} 2x = 2 \operatorname{th} x : (1 + \operatorname{th}^2 x),$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \quad \operatorname{cth} 2x = (1 + \operatorname{cth}^2 x) : 2 \operatorname{cth} x.$$

Формула Муавра: $(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx$
(ср. стр. 207).

Функции половинного аргумента:

$$\operatorname{sh} \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}, \quad \operatorname{th} \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}},$$

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}}, \quad \operatorname{cth} \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}}.$$

Сумма и разность функций:

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} (x \pm y) \operatorname{ch} \frac{1}{2} (x \mp y),$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{1}{2} (x + y) \operatorname{ch} \frac{1}{2} (x - y),$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2} (x + y) \operatorname{sh} \frac{1}{2} (x - y),$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}.$$

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями:

$$\begin{aligned}\sin z &= -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz;\end{aligned}$$

каждая из формул, связывающая между собой гиперболические функции, может быть получена из соответствующей формулы, связывающей тригонометрические функции путем замены $\sin \alpha$ через $i \operatorname{sh} x$ и $\cos \alpha$ через $\operatorname{ch} x$.
Например: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, $\operatorname{ch}^2 x + i^2 \operatorname{sh}^2 x = 1$ или $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $i \operatorname{sh} 2x = 2 i \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ или $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ и т. п.

11. Обратные гиперболические функции

О п р е д е л е н и я. Обратными гиперболическими функциями („ареа-функциями“) x называются величины, определяемые равенствами:

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{Arsh} x \quad (\text{ареа-синус}), & \text{если } x &= \operatorname{sh} y, \\ y &= \operatorname{Arch} x \quad (\text{ареа-косинус}), & \text{если } x &= \operatorname{ch} y, \\ y &= \operatorname{Arth} x \quad (\text{ареа-тангенс}), & \text{если } x &= \operatorname{th} y, \\ y &= \operatorname{Arcth} x \quad (\text{ареа-котангенс}), & \text{если } x &= \operatorname{cth} y.\end{aligned}$$

Названия происходят от слова *ареа* (площадь), так как *ареа-функции* могут быть представлены площадью гиперболического сектора (см. ниже).

В ы р а ж е н и я ч е р е з л о г а р и ф м ы. Согласно формулам на стр. 216, имеем следующие выражения *ареа-функций* через логарифмы:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$\operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}), \quad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Графики *ареа-функций* см. стр. 126—127.

12. Происхождение гиперболических функций

Тригонометрические функции площади. В тригонометрическом круге (стр. 203) функции $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ определялись как длины отрезков BC , OB , AD (при $R=1$), а аргумент α был центральным углом $АОС$. За аргумент можно было принять величину x , равную пло-

* О функциях комплексного переменного см. стр. 449.

щади (заштрихованной на рис. 14) сектора COK с центральным углом, равным 2α , так как $x = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\alpha = \alpha$ [$R=1$, α измеряется в радианах]. Таким образом: $\sin x = BC$, $\cos x = OB$, $\operatorname{tg} x = AD$.

Геометрические определения гиперболических функций. Рассматривая аналогичные функции площади не в круге, уравнение которого $x^2 + y^2 = 1$, а в равнобочной гиперболы (с уравнением $x^2 - y^2 = 1$; рассматриваем ее только правую ветвь), и, обозначая через x площадь аналогичного сектора COK (заштрихованного на рис. 15), определяем гиперболические функции: $\operatorname{sh} x = BC$; $\operatorname{ch} x = OB$; $\operatorname{th} x = AD$.

Вычисляя методами интегрального исчисления площадь x^* , имеем ее выражения через BC , OB , AD .

$$x = \ln(BC + \sqrt{BC^2 + 1}) = \ln(OB + \sqrt{OB^2 - 1}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + AD}{1 - AD},$$

откуда получаем следующие выражения гиперболических функций через показательные (их и принимают за определения гиперболических функций):

$$BC = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \quad OB = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$AD = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \operatorname{th} x.$$

* См. стр. 380.

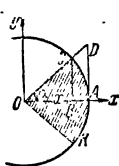


Рис. 14.

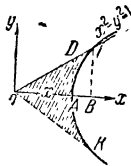


Рис. 15.

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

А. Геометрия на плоскости

1. Основные понятия и формулы

Координаты. Положение любой точки P на плоскости может быть определено при помощи той или иной системы координат. Числа, определяющие положение точки, называются ее *координатами*. Наиболее употребительные координатные системы — декартовы прямоугольные координаты и полярные.

Декартовыми прямоугольными координатами точки P (рис. 1) называются взятые с определенным знаком расстоя-

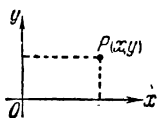


Рис. 1.

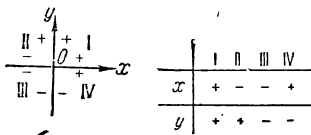


Рис. 2.

ния этой точки от двух взаимно перпендикулярных прямых — осей координат. Точка пересечения осей O называется *началом* координат. Обычно горизонтальную ось называют *осью абсцисс* (*осью Ox*), вертикальную — *осью ординат* (*осью Oy*). На этих осях устанавливается положительное направление, на оси Ox — обычно вправо, на оси Oy — вверх. Координаты точки P считаются положительными или отрицательными в зависимости от того, на какую полуось попадает проекция точки P (см. схему — рис. 2). Координаты x и y называются соответственно *абсциссой*

и ординатой точки P . Запись $P(a, b)$ означает, что точка P имеет абсциссу a и ординату b .

Полярными координатами точки P (рис. 3) называются радиус-вектор ρ — расстояние от точки P до заданной точки O (полюса) и полярный угол φ — угол между прямой OP и заданной прямой, проходящей через полюс (полярной осью). Полярный угол считается положительным при отсчете против часовой стрелки и отрицательным при отсчете в обратную сторону.

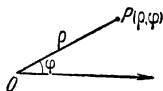


Рис. 3.

Преобразование координат. При переходе от одной системы к другой координаты —меняются следующим образом:

Параллельный перенос декартовых осей координат (рис. 4, x, y — старые координаты, x', y' — новые, a, b — координаты нового начала O' в старой системе координат):

$$\begin{aligned} x &= x' + a, & x' &= x - a, \\ y &= y' + b, & y' &= y - b. \end{aligned}$$

Поворот осей на угол φ (с учетом знака *, см. рис. 5):

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, & x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, & y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned}$$

В общем случае преобразование может быть разбито на параллельный перенос и поворот осей.

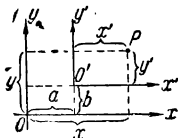


Рис. 4.

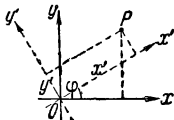


Рис. 5

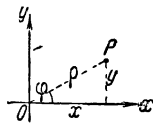


Рис. 6.

Переход от декартовых координат к полярным и обратно выполняется по следующим формулам, если принять начало за полюс, а ось абсцисс за полярную ось (рис. 6):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\rho}.$$

* φ считается положительным, если поворот производится против часовой стрелки.

Расстояние между двумя точками

$P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ (рис. 7) равно $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

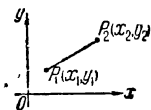


Рис. 7.

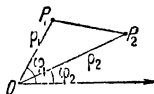


Рис. 8.

Если даны полярные координаты: $P_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $P_2(\rho_2, \varphi_2)$ (рис. 8), то

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Деление отрезка в данном отношении. Координаты точки P , для которой $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda$ (рис. 9) определяются по формулам:

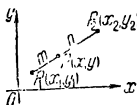


Рис. 9.

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Для *середины* отрезка P_1P_2 :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \text{ Если отрезкам}$$

P_1P и PP_2 приписывать положительный или отрицательный знак, в зависимости от того, совпадает их направление с направлением P_1P_2 или нет, то приведенные выше формулы могут служить при $\lambda < 0$ для нахождения точки, делящей отрезок P_1P_2 в данном отношении *внешним образом*. Например для точки P такой, что P_2 является серединой отрезка P_1P , $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = -2$. Координаты *центра тяжести* системы материальных точек $M_i(x_i, y_i)$ с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) определяются по формулам:

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

Площадь треугольника (рис. 10); с вершинами $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ и $P_3(x_3, y_3)$:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)].$$

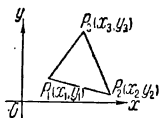


Рис. 10.

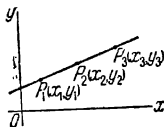


Рис. 11.

Три точки лежат на одной прямой (рис. 11), если

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Площадь многоугольника с вершинами $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$:

$$S = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \\ + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)].$$

При вычислении по этим формулам S получается положительное, если обход вершин в порядке нумерации происходит против часовой стрелки, и отрицательное — в противном случае.

Уравнение линии. Всякому уравнению $F(x, y) = 0$, связывающему координаты x и y , соответствует некоторая линия, обладающая тем свойством, что координаты любой точки P , лежащей на этой линии, удовлетворяют данному уравнению и, наоборот, всякая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению, лежит на линии. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением этой линии*. Если $F(x, y)$ является многочленом n -й степени (см. стр. 182), то кривая называется алгебраической, n -го порядка.

* Может оказаться, что данному уравнению $F(x, y) = 0$ не удовлетворяют координаты ни одной действительной точки на плоскости [например, $x^2 + y^2 + 1 = 0$, $y = \ln(1 - x^2 - \operatorname{ch} x)$]. Тогда условно говорят, что данное уравнение изображается мнимой кривой.

2. Прямая линия

Уравнение прямой. Всякое уравнение, линейное относительно координат, определяет прямую и, наоборот, уравнение любой прямой есть уравнение первой степени.

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0.$$

Если (рис. 12) $A=0$, то прямая параллельна оси Ox ; если $B=0$, прямая параллельна оси Oy ; если $C=0$, прямая про-

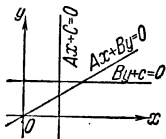


Рис. 12.

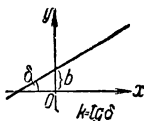


Рис. 13.

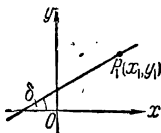


Рис. 14.

ходит через начало. Уравнение всякой прямой, не параллельной оси Oy (рис. 13), может быть представлено в виде

$$y = kx + b;$$

k —угловой коэффициент прямой—равен $\operatorname{tg} \delta$; δ —угол между прямой и положительным направлением оси Ox ; b —отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy (с учетом знака).

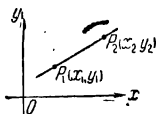


Рис. 15.

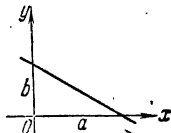


Рис. 16.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $P_1(x_1, y_1)$ в данном направлении (рис. 14):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad \text{где } k = \operatorname{tg} \delta.$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (рис. 15) $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Уравнение прямой в отрезках. Если прямая отсекает на осях координат отрезки a и b (с учетом знаков, рис. 16), то ее уравнение:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Нормальное уравнение прямой:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где p — расстояние от начала координат, α — угол, образованный с осью Ox перпендикуляром к прямой из начала (рис. 17) ($p > 0$; $0 \leq \alpha < 2\pi$). Нормальное уравнение может быть получено из общего $Ax + By + C = 0$ умножением на нормирующий множитель $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак μ должен

быть обратен знаку C .

Расстояние от точки $P_1(x_1, y_1)$ до прямой (рис. 17):

$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p;$$

d равно результату подстановки координат данной точки в левую часть нормального уравнения прямой. По этой формуле $d > 0$, если P_1 и начало лежат по разные стороны от данной прямой, и $d < 0$ в противном случае.

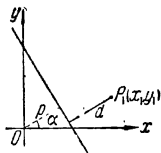


Рис. 17.

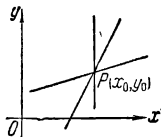


Рис. 18.

Точка пересечения прямых. Координаты (x_0, y_0) точки пересечения двух прямых получаются совместным решением их уравнений. Если прямые заданы уравнениями в общем виде $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad y_0 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, то прямые параллельны; в частности,

при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ прямые совпадают.

Третья прямая $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ проходит через точку пересечения первых двух (рис. 18), если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение всякой прямой, проходящей через точку пересечения двух прямых (уравнение *пучка прямых*):

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda (A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Меняя λ от $-\infty$ до $+\infty$, можно получить любую прямую пучка. Если уравнения этих двух прямых даны в нормальном виде, то при $\lambda = \pm 1$ получаются *уравнения биссектрис углов*, образованных данными прямыми (рис. 19).

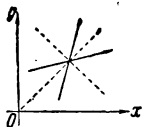


Рис. 19.

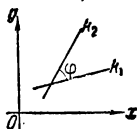


Рис. 20.

Угол φ между двумя прямыми (рис. 20) определяется по следующим формулам: если их уравнения даны в общем виде

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2};$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

$$\sin \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 прямых, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{k_1 - k_2}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}}$$

(угол φ отсчитывается от первой прямой ко второй, против часовой стрелки).

Прямые *параллельны* (рис. 21, а), если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ или $k_1 = k_2$.

Прямые *взаимно перпендикулярны* (рис. 21, б), если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

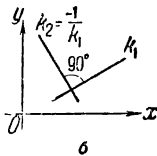
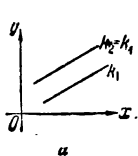


Рис. 21.

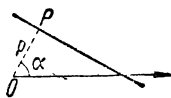


Рис. 22.

Уравнение прямой в полярных координатах (ρ —расстояние от полюса до прямой, α —угол между полярной осью и перпендикуляром из полюса на прямую, рис. 22):

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

3. Окружность

Уравнение в декартовых координатах. Уравнение окружности радиуса R с центром в начале (рис. 23, а):

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M(x_0, y_0)$ (рис. 23, б):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Общее уравнение 2-го порядка $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ изображает окружность тогда и только тогда, когда $b=0$ и $a=c$. В этом случае уравнение всегда может

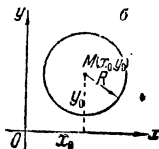
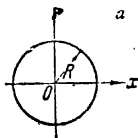


Рис. 23.

быть приведено к виду $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0$. Тогда радиус $R = \sqrt{m^2 + n^2 - q}$ и координаты центра: $x_0 = -m$, $y_0 = -n$. Если $q > m^2 + n^2$, то уравнение не изображает ни-

какой действительной кривой; если $q=m^2+n^2$, уравнению удовлетворяет единственная точка $M(x_0, y_0)$.

Параметрическое уравнение: $x=R \cos t$, $y=R \sin t$; t —угол, образованный радиусом-вектором точки (x, y) с положительным направлением оси Ox (рис. 24).

Уравнение в полярных координатах. Общее уравнение (рис. 25) $\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2$. Если центр лежит на полярной оси и окружность проходит

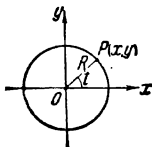


Рис. 24.

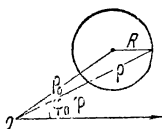


Рис. 25.

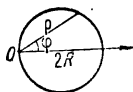


Рис. 26.

через начало координат (рис. 26), то уравнение окружности принимает вид $\rho = 2R \cos \varphi$.

4. Эллипс

Определение эллипса—см. ниже (фокальное свойство).

Элементы эллипса (рис. 27): AB —большая ось ($=2a$), CD —малая ось ($=2b$), A, B, C, D —вершины, O —центр, F_1 и F_2 —фокусы (точки, лежащие на большой оси по обе стороны от центра и на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от него). $e = \frac{c}{a}$ ($e < 1$)—

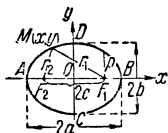


Рис. 27.

эксцентриситет, p —фокальный параметр (половина хорды, проведенной через фокус параллельно малой оси, $p = \frac{b^2}{a}$).

Уравнение эллипса: „каноническое“ (простейшее) уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; параметрическое уравнение: $x = a \cos t$; $y = b \sin t$; уравнение в полярных координатах см. стр. 235.

Фокальное свойство эллипса (определение эллипса). Эллипс является геометрическим местом точек, для которых сумма расстояний от двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная ($=2a$). Каждое из этих расстояний фокальный радиус-вектор точки эллипса с абсциссой x выражается формулой $r_1 = MF_1 = a - ex$, $r_2 = MF_2 = a + ex$, $r_1 + r_2 = 2a$.

Директрисы — прямые, параллельные малой оси, находящиеся на расстоянии $d=a/e$ от нее (рис. 28). Для любой точки $M(x, y)$ эллипса $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ (директориальное свойство эллипса, см. стр. 235).

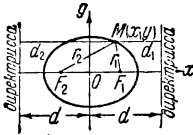


Рис. 28.

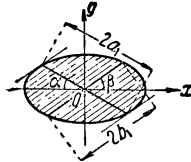


Рис. 29.

Диаметры — хорды, проходящие через центр эллипса; они делятся в центре пополам (рис. 29). Геометрическим местом середин хорд, параллельных одному из диаметров эллипса, является диаметр, сопряженный заданному. Если k и k' — угловые коэффициенты сопряженных диаметров, то $kk' = -b^2/a^2$. Если длины сопряженных диаметров $2a_1$ и $2b_1$, а α и β — острые углы между диаметрами и большей осью ($k = -\operatorname{tg} \alpha$, $k' = \operatorname{tg} \beta$), то $a_1 b_1 \sin(\alpha + \beta) = ab$ и $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$ (теорема Аполлония).

Касательная в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Нормаль и касательная к эллипсу являются биссектрисами соответственно внутреннего и внешнего углов между радиусами-векторами точки касания (рис. 30).

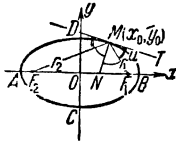


Рис. 30.

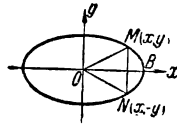


Рис. 31.

Радиус кривизны в точке $M(x_0, y_0)$

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 u}.$$

Для вершин A и B : $R = b^3$; $a = p$. Для вершин C и D : $R = a^3$; $b = p$.

Площадь $S = \pi ab$. Площадь сектора $BOM = \frac{ab}{2} \arccos \frac{x}{a}$ (рис. 31). Площадь сегмента $MBN = ab \arccos \frac{x}{a} - xy$.

Периметр эллипса $L = 4aE(e) =$
 $= 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right]$, где
 $E(e) = E\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода,

(см. стр. 107). Если обозначить $\frac{a-b}{a+b} = \lambda$, то

$$L = \pi(a+b) \left[1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64} + \frac{\lambda^6}{256} + \frac{25\lambda^8}{16384} + \dots \right].$$

Приближенные формулы:

$$L = \pi [1,5(a+b) - \sqrt{ab}]; \quad L = \pi(a+b) \frac{64 - 3\lambda^4}{64 - 16\lambda^2}.$$

5. Гипербола

Определение гиперболы — см. ниже (фокальное свойство).

Элементы гиперболы (рис. 32): AB — действительная ось ($= 2a$); A, B — вершины, O — центр, F_1 и F_2 — фокусы — точки, лежащие на действительной

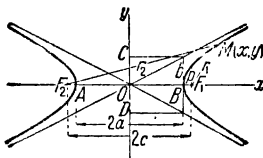


Рис. 32.

оси по обе стороны от центра и на расстоянии c (большем, чем a) от него; CD — мнимая ось ($= 2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$), p — фокальный параметр (половина хорды, проведенной через фокус перпендикулярно

действительной оси), $p = \frac{b^2}{a}$; $e = \frac{c}{a} > 1$ — эксцентриситет.

Уравнение гиперболы: каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Параметрическое уравнение $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$ (или $x = a \sec t$, $y = b \operatorname{tg} t$). Уравнение в полярных координатах см. стр. 235.

Фокальное свойство гиперболы (определение гиперболы). Гипербола является геометрическим местом точек, для каждой из которых разность расстояний до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная ($= 2a$). Точки, для которых $r_1 - r_2 = 2a$, принадлежат одной ветви гиперболы (на рис. 32 — левой); точки, для которых $r_2 - r_1 = 2a$, — другой ее ветви (правой). Каждое из этих расстояний (фокальный радиус-вектор точки гиперболы с абсциссой x) выражается формулой: $r_1 = \pm(ex - a)$, $r_2 = \pm(ex + a)$ (верхний знак — для точек правой ветви, нижний — для левой); $r_2 - r_1 = \pm 2a$.

Директрисы — прямые, перпендикулярные к действительной оси и расположенные на расстоянии $d = a/e$ от центра (рис. 33). Для любой точки $M(x, y)$ гиперболы $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ (директориальное свойство гиперболы, см. стр. 231).

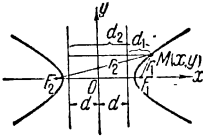


Рис. 33.

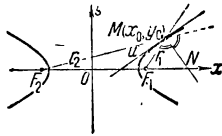


Рис. 34.

Касательная в точке $M(x_0, y_0)$ имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Касательная и нормаль к гиперболе являются биссектрисами соответственно внутреннего и внешнего углов между радиусами-векторами точки касания (рис. 34).

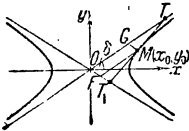


Рис. 35.

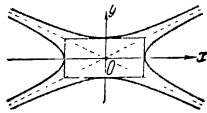


Рис. 36.

Асимптоты гиперболы (рис. 35) — прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность (общее определение асимптот, см. стр. 263).

Угловой коэффициент асимптот $k = \pm \operatorname{tg} \delta = \pm \frac{b}{a}$. Уравнение обеих асимптот $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

Отрезок касательной TT_1 между асимптотами делится в точке касания пополам: $TM = MT_1$. Площадь треугольника TOG_1 между касательной и асимптотой равна ab (для любой точки M). Если через точку M гиперболы провести прямые MP и MG , параллельные асимптотам, то площадь $OFMG = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) = c^2/4$.

Сопряженные гиперболы (рис. 36) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ имеют общие асимптоты. Действительная ось каждой из них равна мнимой оси другой.

Диаметры—хорды данной гиперболы и ей сопряженной, проходящие через общий центр гипербол; они делятся в центре пополам.

Два диаметра с угловыми коэффициентами k и k' называются *сопряженными*, если $kk' = \frac{b^2}{a^2}$.

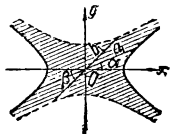


Рис. 37.

Каждый из сопряженных диаметров делит пополам хорды (данной гиперболы или ей сопряженной), параллельные другому* (рис. 37). Если длины сопряженных диаметров $2a_1$ и $2b_1$, а α и β —острые углы, образованные диаметрами с действительной осью ($\alpha < \beta$), то $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$; $ab = a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha)$.

Радиус кривизны R гиперболы в точке $M(x_0, y_0)$.

(обозначения см. выше): $R = a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = p / \sin^3 u$ (рис. 34). В вершинах A и B : $R = p = b^2/a$.

Площадь сегмента (рис. 38) гиперболы $AMN = xy - ab \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = xy - ab \operatorname{Arch} \frac{x}{a}$. Площадь $OAMG = \frac{ab}{4} + \frac{ab}{2} \ln \frac{2 OG}{2} \quad (MG \parallel \text{асимптоте})$.

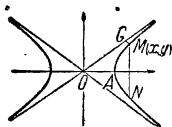


Рис. 38.

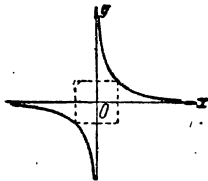


Рис. 39.

Равнобочная гипербола—гипербола, оси которой равны: $a=b$ (рис. 39). Ее уравнение $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоты равнобочной гиперболы взаимно перпендикулярны. Если асимптоты принять за оси координат (рис. 39), уравнение равнобочной гиперболы $xy = a^2/2$.

* Из двух сопряженных диаметров только один (тот, для которого $|k| < b/a$) пересекает гиперболу. Получающаяся при этом хорда—диаметр в более узком смысле слова—делится в центре пополам.

6. Парабола

Определение параболы—см. ниже (основное свойство).

Элементы параболы (рис. 40): Ox —ось параболы, O —вершина, F —фокус (точка, лежащая на оси на расстоянии $p/2$ от вершины), NN' —директриса (прямая, перпендикулярная к оси и лежащая на расстоянии $p/2$ от вершины по другую сторону от фокуса), p —фокальный параметр (расстояние от фокуса до директрисы или половина хорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси). Эксцентриситет параболы $=1$ (см. стр. 235).

Уравнение параболы: каноническое уравнение $y^2 = 2px$. Уравнение в полярных координатах см. стр. 235. Уравнение параболы с вертикальной осью (рис. 41): $y = ax^2 + bx + c$, параметр $p = \frac{1}{2|a|}$; при $a > 0$ пара-

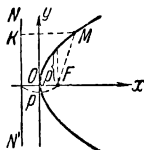


Рис. 40.

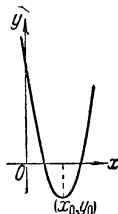


Рис. 41.

бола обращена вершиной вниз, при $a < 0$ —вверх; координаты вершины: $x_0 = -b/(2a)$; $y_0 = (4ac - b^2)/(4a)$.

Основное свойство (определение параболы): парабола является геометрическим местом точек $M(x, y)$, равно удаленных (рис. 42) от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы): $MF = MK = x + p/2$.

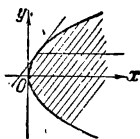


Рис. 42.

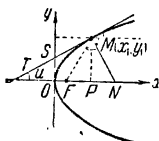


Рис. 43.

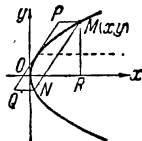


Рис. 44.

Диаметр — прямая, параллельная оси параболы. Диаметр делит пополам хорды, параллельные касательной, проведенной в конце диаметра (рис. 42).

Касательная к параболе (рис. 43) в точке $M_1(x_1, y_1)$ имеет уравнение $yy_1 = p(x + x_1)$. Касательная и нормаль к параболе являются биссектрисами углов между фокальным радиусом-вектором и диаметром, проходящим через точку касания. Отрезок касательной между точкой касания и пересечением с осью Ox параболы делится пополам касательной в вершине (осью Oy): $TS = SM$; $TF = FM$; $TO = OP = x_1$.

Радиус кривизны параболы в точке $M(x_1, y_1)$:

$$R = \frac{(p + 2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 u} = \frac{N^3}{p^2}, \text{ где } N \text{ — длина нормали } MN$$

(рис. 43). В вершине O радиус кривизны $R = p$.

Площадь сегмента параболы $MON = \frac{2}{3}$ площади $PQNM$ (рис. 44). Площадь $OMR = \frac{2}{3} xy$.

Длина дуги:

$$\begin{aligned} OM &= \frac{p}{2} \left[\sqrt{\frac{2x}{p} \left(1 + \frac{2x}{p}\right)} + \ln \left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1 + \frac{2x}{p}} \right) \right] = \\ &= \sqrt{x \left(x + \frac{p}{2}\right)} + \frac{p}{2} \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{2x}{p}}. \end{aligned}$$

Приближенно, при малых $\frac{x}{y}$:

$$OM \approx y \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{x}{y}\right)^4 \right].$$

7. Кривые 2-го порядка (конические сечения)

Общее уравнение кривых 2-го порядка: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ определяет эллипс (в частном случае окружность, гиперболу, параболу или пару прямых (*распадающаяся* кривая 2-го порядка).

Инварианты кривой 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2, \quad S = a + c.$$

Эти величины не меняются при переносе начала и повороте осей координат, т. е. если после преобразования координат уравнение кривой примет вид $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0$, то величины Δ , δ и S , вычисленные по новым коэффициентам, сохраняют первоначальные значения.

Определение вида кривой, изображаемой данным уравнением 2-го порядка, и приведение его к канонической форме проводится по таблице на стр. 236—237.

Общие свойства кривых 2-го порядка. **Конические сечения.** Прямой круговой конус при пересечении с плоскостью образует на ней коническое сечение. Если секущая плоскость не проходит через вершину конуса, то сечение будет гиперболой, параболой или эллипсом в зависимости от того, будет ли плоскость сечения параллельна двум, только одной или ни одной образующей конуса. При пересечении конуса с плоскостью, проходящей через

его вершину, получаются распадающиеся конические сечения ($\Delta=0$, см. таблицу на стр. 236—237). Параллельные прямые получаются, если конус вырождается в цилиндр.

Директориальное свойство. Геометрическим местом точек M (рис. 45), для которых отношение расстояний их до заданной точки (фокуса) F и до заданной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная e , является кривая 2-го порядка с эксцентриситетом, равным e . При $e < 1$ получается эллипс, при $e = 1$ парабола, при $e > 1$ гипербола.

Определение кривой пятью точками. Через заданные 5 точек проходит единственная кривая 2-го порядка (если только 3 точки из числа заданных не лежат на одной прямой).

Полярное уравнение. В полярных координатах кривые 2-го порядка имеют уравнение $\rho = p : (1 + e \cos \varphi)$ (p — параметр, e — эксцентриситет данной кривой, полюс находится в фокусе, полярная ось направлена от фокуса к ближайшей вершине).



Рис. 45.

Б. Геометрия в пространстве

8. Основные понятия и формулы

Координаты. Положение любой точки P в пространстве может быть определено при помощи той или иной системы координат. Наиболее употребительные координатные системы — декартовы прямоугольные координаты, цилиндрические и сферические.

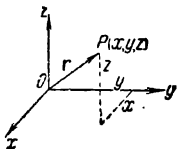


Рис. 46а.

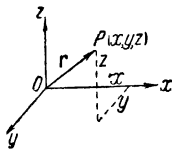


Рис. 46б.

Декартовы прямоугольные координаты. Положение любой точки P в пространстве может быть определено при помощи той или иной системы координат. Наиболее употребительные координатные системы — декартовы прямоугольные координаты, цилиндрические и сферические.

Декартовы прямоугольные координаты точки P называются взятые с определенным знаком расстояния этой точки до трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей или, что то же, проекции радиуса-вектора r точки P (см. стр. 46¹) на три взаимно перпендикулярные координатные оси. В зависимости от взаимного расположения положительных направлений координатных осей, возможны правая (рис. 43, а) и левая (рис. 46, б) координатные системы. В дальнейшем на чертежах принята правая система (формулы не зависят от вида координатной системы). Координаты x, y, z называются соответственно абсциссой,

Приведение уравнений кривых второго

Центральные кривые $\delta \neq 0$	$\delta > 0$	$\Delta \neq 0$	Вид кривой
			Эллипс
			а) $\Delta \cdot S < 0$ — действительный, б) $\Delta \cdot S > 0$ — мнимый *
		$\Delta = 0$	Пара мнимых* прямых, имеющих общую действительную точку
	$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	Гипербола
		$\Delta = 0$	Пара пересекающихся прямых
Параболические кривые $\delta = 0$ **		$\Delta \neq 0$	Парабола
		$\Delta = 0$	Пара прямых, параллельных, если $d^2 - af > 0$, сливающихся, если $d^2 - af = 0$, мнимых *, если $d^2 - af < 0$

* См. примечание на стр. 223.

** В случае $\delta = 0$ предполагается, что ни один из коэффициентов a, b, c не равен нулю. Если 2 коэффициента (a и b или b и c) равны нулю, то упрощение уравнения сводится

порядка к каноническому виду

Необходимое преобразование координат	Каноническое уравнение после преобразования
1) Перенос начала в центр кривой, координаты которого $x_0 = \frac{be - cd}{\delta}$, $y_0 = \frac{bd - ae}{\delta}$. 2) Поворот осей на угол α, определяемый уравнением $\operatorname{tg} 2\alpha = 2b : (a - c)$. Знак $\sin 2\alpha$ должен совпадать со знаком $2b$. При этом угловой коэффициент новой оси x': $k = \frac{c - a + \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2}}{2b}$	$a'x'^2 + c'y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0;$ $a' = \frac{a + c + \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2}}{2},$ $c' = \frac{a + c - \sqrt{(c - a)^2 + 4b^2}}{2},$ a' и c' являются корнями квадратного уравнения $u^2 - Su + \delta = 0$
1) Поворот осей на угол α, определяемый из уравнения $\operatorname{tg} \alpha = -a : b$; знак $\sin \alpha$ должен быть обратен знаку a. 2) Перенос начала в вершину параболы, координаты которой x_0 и y_0 определяются из уравнений $Sy_0 + \frac{ad + be}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0;$ $2 \frac{bd - ce}{\sqrt{a^2 + b^2}} x_0 + \frac{ad + be}{\sqrt{a^2 + b^2}} y_0 + f = 0$	$y'^2 = 2px';$ $p = \frac{ce - bd}{S \sqrt{a^2 + b^2}}$
Поворот осей на угол α, определяемый из уравнения: $\operatorname{tg} \alpha = -a : b$; знак $\sin \alpha$ должен быть обратен знаку a.	$Sy'^2 + 2 \frac{ad + be}{\sqrt{a^2 + b^2}} y' + f = 0$

к параллельному переносу осей; $cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ преобразуется к виду $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ и $ax^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ — к виду $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.

Октант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	—	—	+	+	—	—	+
y	+	+	—	—	+	+	—	—
z	+	+	+	+	—	—	—	—

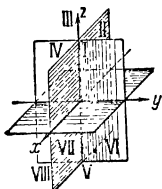


Рис. 47.

ординатой и аппликатой. Запись $P(a, b, c)$ означает, что точка P имеет координаты $x=a$, $y=b$ и $z=c$. Знаки координат зависят от октанта, в котором расположена точка (рис. 47).

Координатными поверхностями, для которых одна из координат остается постоянной, здесь являются плоскости, параллельные координатным; а координатными линиями, вдоль которых меняется только одна координата, — прямые, параллельные координатным осям. Координатные поверхности пересекаются по координатным линиям.

Цилиндрические координаты (рис. 48): ρ и φ — полярные координаты проекции точки P на основную плоскость (обычно xOy), z — аппликата — расстояние от точки P до основной плоскости.

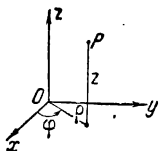


Рис. 48.

Для цилиндрических координат координатными поверхностями являются плоскости, перпендикулярные оси z ($z = \text{const.}$), полуплоскости, ограниченные осью z ($\varphi = \text{const.}$), и цилиндрические поверхности, осью которых является ось z ($\rho = \text{const.}$). Координатные линии — линии пересечения этих поверхностей.

Формулы перехода к декартовым координатам:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\rho}.$$

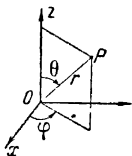


Рис. 49.

Сферические (полярные) координаты: r — длина ρ — радиус-вектора, φ — долгота, θ — полярное расстояние. Положительные направления отсчета показаны на рис. 49. Если давать сферическим координатам значения в следующих пределах:

$0 \leq r < \infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, то получается однозначно все точки пространства. Координатные поверхности: сферы с центром в начале ($r = \text{const.}$), полуплоскости, ограниченные

осью z ($\varphi = \text{const.}$), конусы, для которых ось z является осью ($\theta = \text{const.}$). Координатные линии — линии пересечения этих поверхностей. Формулы перехода к декартовым координатам:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x};$$

$$z = r \cos \theta; \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Направление в пространстве характеризуется единичным вектором (см. стр. 40) или его координатами — косинусами углов (рис. 50), образованных заданным направлением с положительными направлениями осей координат (направляющие косинусы):

$$l = \cos \alpha; \quad m = \cos \beta; \quad n = \cos \gamma; \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Угол φ между двумя заданными направлениями с направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 и l_2, m_2, n_2 : $\cos \varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$.

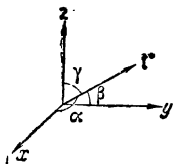


Рис. 50.

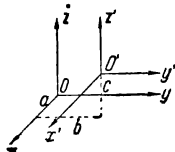


Рис. 51.

Два направления перпендикулярны, если $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Преобразование прямоугольных координат:

Параллельный перенос (x, y, z — старые координаты; x', y', z' — новые; a, b, c — координаты нового начала в старых координатах, рис. 51):

$$x = x' + a; \quad y = y' + b; \quad z = z' + c;$$

$$x' = x - a; \quad y' = y - b; \quad z' = z - c.$$

Поворот осей (рис. 52): Если обозначить направляющие косинусы новых осей x', y', z' по схеме, данной на стр. 20, то

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \quad x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z,$$

$$y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \quad y' = l_2 x + m_2 y + n_2 z,$$

$$z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'; \quad z' = l_3 x + m_3 y + n_3 z.$$

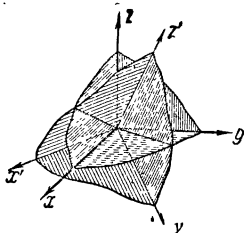


Рис. 52.

1, отно- шение к старым (сям)	Косинусы новых осей		
	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

Свойства „определителя преобразования“:

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}.$$

1) $\Delta = \pm 1$ (плюс, если левая система перешла в левую или правая в правую, и минус, если левая перешла в правую или наоборот).

2) Сумма квадратов элементов одной строки или столбца равна 1.

3) Сумма произведений соответственных элементов двух строк или двух колонок равна нулю.

4) Каждый элемент равен своей адьюнкте (см. стр. 177).

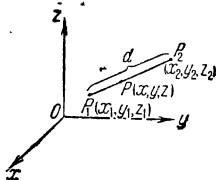


Рис. 53.

Расстояние между двумя точками: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 53) равно

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направляющие косинусы отрезка P_1P_2 :

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Деление отрезка в данном отношении (рис. 53): Координаты точки P , для которой $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n}$, определяются по формулам:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Для *середины* отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Координаты *центра тяжести* системы материальных точек $M_i(x_i, y_i)$ с массами m_i ($i=1, 2, \dots, n$) определяются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Объем *треугольной пирамиды* с вершинами $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 54)

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6!} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}.$$

При вычислении по этой формуле $V > 0$, если векторы PP_1 , PP_2 и PP_3 образуют правую тройку, и $V < 0$, если эта тройка левая (см. стр. 462).

4 точки P, P_1, P_2 и P_3 лежат в одной плоскости, если

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

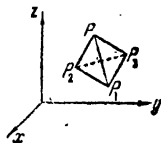
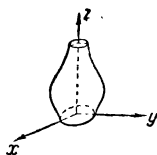


Рис. 54.

Уравнение поверхности. Всякому уравнению $F(x, y, z) = 0$ соответствует некоторая поверхность, обладающая тем свойством, что координаты любой точки P , лежащей на этой поверхности, удовлетворяют данному уравнению и, наоборот, всякая точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, лежит на поверхности. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением этой поверхности.

Уравнение *цилиндрической поверхности* (см. стр. 198), образующие которой параллельны оси Ox (или Oy или Oz), не содержит координаты x (соответственно, y или z): $F(y, z) = 0$ [или $F(x, z) = 0$ или $F(x, y) = 0$]. На плоскости $OyOz$ то же уравнение изображает линию пересечения цилиндрической поверхности с этой плоскостью.

Поверхность, получающаяся от вращения кривой $z=f(x)$ в плоскости xOz около оси z (рис. 55), имеет уравнение



$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$. Аналогично пишутся уравнения поверхностей вращения около других координатных осей.

Уравнение конической поверхности (см. стр. 199), с вершиной в начале, имеет вид $F(x, y, z)=0$, где F — однородная функция координат (см. стр. 292).

Рис. 55.

Уравнение линии в пространстве. Линия в пространстве задается тремя уравнениями: $x=\varphi_1(t)$; $y=\varphi_2(t)$; $z=\varphi_3(t)$. Каждому значению параметра t соответствует определенная точка линии. (Параметр может и не иметь непосредственного геометрического смысла.) Другой способ задания линии в пространстве — двумя уравнениями: $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$. Каждое из них определяет поверхность. Точки, координаты которых удовлетворяют обоим уравнениям, лежат на линии пересечения данных поверхностей. Всякое уравнение $F_1+\lambda F_2=0$ при любом λ изображает поверхность, проходящую через рассматриваемую линию, и может заменить одно из первоначально данных уравнений.

9. Плоскость и прямая в пространстве

Уравнение плоскости. Всякое уравнение, линейное относительно координат, определяет плоскость и, наоборот, уравнение любой плоскости есть уравнение 1-й степени.

Общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$; в векторной форме $rN+D=0$ (см. стр. 462 и 436), Вектор $N(A, B, C)$ (рис. 56) перпендикулярен плоскости; направляющие косинусы этого вектора:

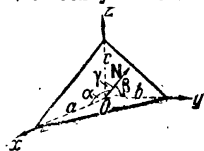


Рис. 56.

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если $D=0$, то плоскость проходит через начало; если $A=0$ (или $B=0$, или $C=0$), то плоскость параллельна оси Ox (соответственно Oy или Oz), если $A=B=0$ (или $A=C=0$, или $B=C=0$), то плоскость параллельна плоскости xOy (соответственно xOz или yOz).

Нормальное уравнение плоскости: $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$; в векторной форме $rN^0 - p = 0$. Вектор N^0 — единичный, p — расстояние плоскости от начала. Нормальное

уравнение может быть получено из общего умножением на нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Знак μ должен быть обратен знаку D .

Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$;
 a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, с учетом знака (рис. 56).

Уравнение плоскости, проходящей через:

а) три точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

в) векторной форме $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)=0^*$;

б) две точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно прямой с направляющим вектором $\mathbf{R}(l, m, n)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0;$$

в) векторной форме $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\mathbf{R}=0^*$;

в) одну точку $P_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно двум прямым с направляющими векторами $\mathbf{R}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{R}_2(l_2, m_2, n_2)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0;$$

в) векторной форме $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2=0^*$;

г) одну точку $P_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно прямой с направляющим вектором $\mathbf{N}(A, B, C)$:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0;$$

в) векторной форме $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{N}=0^*$;

д) линию пересечения плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

(уравнение пучка плоскостей, рис. 57). Меняя λ от $-\infty$ до $+\infty$, получим все плоскости пучка. При $\lambda=\pm 1$ получаются уравнения плоскостей, делящих пополам углы между заданными плоскостями, если их уравнения даны в нормальном виде.

Угол между двумя плоскостями — см. стр. 248—249. Точка пересечения трех плоскостей — см. стр. 246.

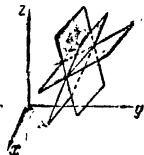


Рис. 57.

* О векторных произведениях см. стр. 462 и 464.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями* $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ равно

$$\delta = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Расстояние от точки до плоскости находится путем подстановки координат точки $M(a, b, c)$ в нормальное уравнение $(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0)$ плоскости**:

$$\delta = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma - p.$$

Если M и начало лежат по разные стороны плоскости, то $\delta > 0$, в противном случае $\delta < 0$.

Уравнение прямой в пространстве. Прямая в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей и задается аналитически системой двух линейных уравнений.

Общее уравнение прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases} \text{ в векторной форме } \begin{cases} rN_1 + D_1 = 0, \\ rN_2 + D_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение прямой в двух проектирующих плоско-

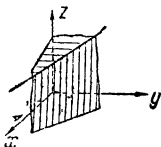


Рис. 58.

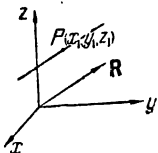


Рис. 59.

стях: $y = kx + a$, $z = hx + b$; каждое из этих двух уравнений определяет плоскость, проектирующую прямую на плоскости xOy и xOz (рис. 58). Для прямых, параллельных плоскости yOz , этот вид уравнений неприменим; для них необходимо

взять проекции на какую-либо другую пару координатных плоскостей.

Уравнение прямой, проходящей

а) через данную точку $P(x_1, y_1, z_1)$ параллельно направляющему вектору $R(l, m, n)$ (рис. 59):

$$\text{II } \begin{cases} \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}; \end{cases} \text{ в векторной форме } (r-r_1) \times R = 0$$

или (параметрический вид)

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt;$$

в векторной форме $r = r_1 + Rt$.

* Об условии параллельности плоскостей см. стр. 249.

** О приведении общего уравнения плоскости к нормальному виду см. стр. 242.

„Каноническая форма“ (II) получается из (I) по формулам:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix};$$

в векторной форме $R = N_1 \times N_2$, x_1, y_1, z_1 подбираются так, чтобы они удовлетворяли уравнениям (I);

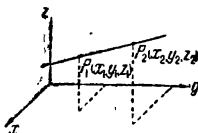


Рис. 60.

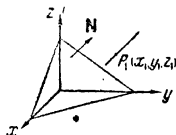


Рис. 61.

б) через две данные точки $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 60):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

в векторной форме $(r-r_1) \times (r_2-r_1) = 0$;

в) через данную точку $P_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ или $rN + D = 0$ (рис. 61):

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}; \quad \text{в векторной форме } (r-r_1) \times N = 0.$$

Расстояние точки $M'(a, b, c)$ от прямой, заданной уравнением в канонической форме (II), определяется из формулы:

$$\delta^2 = \frac{\left| \frac{a-x_1}{l} \quad \frac{b-y_1}{m} \right|^2 + \left| \frac{b-y_1}{m} \quad \frac{c-z_1}{n} \right|^2 + \left| \frac{c-z_1}{n} \quad \frac{a-x_1}{l} \right|^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Кратчайшее расстояние между двумя прямыми, если их уравнения даны в канонической форме

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

может быть вычислено по формуле:

$$\delta = \frac{\pm \begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Обращение в нуль стоящего здесь в числителе определителя есть условие пересечения двух прямых в пространстве.

Точки пересечения плоскостей и прямых

Координаты точки пересечения	данных своими уравнениями	вычисляются по формуле	Примечания
три плоскостей	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$	$\bar{x} = - \frac{\begin{vmatrix} D_1 B_1 C_1 \\ D_2 B_2 C_2 \\ D_3 B_3 C_3 \end{vmatrix}}{\Delta},$ где $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 B_1 C_1 \\ A_2 B_2 C_2 \\ A_3 B_3 C_3 \end{vmatrix};$ $\bar{y}$ и $\bar{z}$ аналогично (см. стр. 180)	Три плоскости пересекаются в одной точке, если $\Delta \neq 0$; если $\Delta = 0$ и хотя один из миноров 2-го порядка $\neq 0$, плоскости параллельны некоторому направлению; если все миноры $= 0$, плоскости проходят через одну прямую
четыре плоскостей	$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$	Решаются три уравнения из четырех, если $\delta = 0$ (в этом случае четвертое уравнение есть следствие трех остальных)	Четыре плоскости только тогда проходят через одну точку, если $\delta = \begin{vmatrix} A_1 B_1 C_1 D_1 \\ A_2 B_2 C_2 D_2 \\ A_3 B_3 C_3 D_3 \\ A_4 B_4 C_4 D_4 \end{vmatrix} = 0$

плоскости и прямой	1) $Ax + By + Cz + D = 0$, $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ 2) $Ax + By + Cz + D = 0$, $y = kx + a, \quad z = hx + b$	1) $\bar{x} = x_1 - lp$, $\bar{y} = y_1 - mp$, $\bar{z} = z_1 - np$, где $\rho = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1}{Al + Bm + Cn}$; 2) $\bar{x} = -\frac{aB + bC + D}{A + kB + hC}$, $\bar{y} = k\bar{x} + a, \quad \bar{z} = h\bar{x} + b$	Если $Al + Bm + Cn = 0$ $(A + Bk + Ch = 0)$, прямая параллельна плоскости; если, кроме того, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ $(aB + bC + D = 0)$, то прямая лежит в плос- кости
двух прямых	$y = k_1x + a_1; \quad z = h_1x + b_1$; $y = k_2x + a_2; \quad z = h_2x + b_2$	$\bar{x} = \frac{c_2 - a_1}{k_1 - k_2} = \frac{b_2 - b_1}{h_1 - h_2}$; $\bar{y} = \frac{k_1c_2 - k_2a_1}{k_1 - k_2}$; $\bar{z} = \frac{h_1b_2 - h_2b_1}{h_1 - h_2}$	Эти формулы дают точку пересечения лишь при условии $(a_1 - a_2)(h_1 - h_2) =$ $= (b_1 - b_2)(k_1 - k_2)$; в противном случае пря- мые не пересекаются (см. также стр. 245)

Угол между плоскостями и прямыми

Угол между	данными своими уравнениями	вычисляется по формуле
двух плоскостями в векторной форме:	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $rN_1 + D_1 = 0,$ $rN_2 + D_2 = 0$	$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}}$ $\cos \varphi = \frac{N_1N_2}{N_1N_2}$
двумя прямыми в векторной форме:	$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$ $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ $(r-r_1) \times R_1 = 0,$ $(r-r_2) \times R_2 = 0$	$\cos \varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2)}}$ $\cos \varphi = \frac{R_1R_2}{R_1R_2}$

прямой и плоскостью в векторной форме:	$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n},$ $Ax + By + Cz + D = 0$ $(r-r_1) \times R = 0,$ $rN + D = 0$	$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{V(A^2 + B^2 + C^2)(l^2 + m^2 + n^2)}$ $\sin \varphi = \frac{RN}{RN}$
Условия параллельности (обозначения те же, что и выше) двух плоскостей: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ или $N_1 \times N_2 = 0$, двух прямых: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ или $R_1 \times R_2 = 0$, прямой и плоскости: $Al + Bm + Cn = 0$ или $RN = 0$ Условия перпендикулярности (обозначения те же, что и выше) двух плоскостей: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ или $N_1N_2 = 0$, двух прямых: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ или $R_1R_2 = 0$, прямой и плоскости: $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ или $N \times R = 0$		

10. Поверхности 2-го порядка (канонические уравнения)

Центральные поверхности. Уравнения, приводимые ниже, даны в канонической форме: центр поверхности (точка, в которой все хорды, через нее проходящие, делятся пополам) помещен в начале, а за оси координат взяты оси симметрии поверхности. При этом координатные плоскости являются плоскостями симметрии.

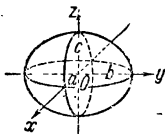


Рис. 62.

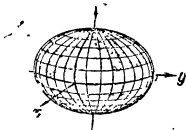


Рис. 63.

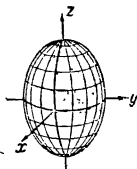


Рис. 64.

Общее уравнение поверхностей 2-го порядка см. стр. 254.

Эллипсоид (рис. 62): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, a, b, c — полуоси эллипсоида.

Если $a = b > c$, имеем сплюснутый эллипсоид вращения (рис. 63), получающийся от вращения вокруг малой оси эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащего в плоскости xOz .

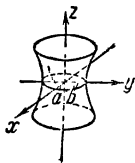


Рис. 65.

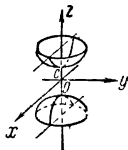


Рис. 66.

Если $a = b < c$, имеем вытянутый эллипсоид вращения (рис. 64), получающийся от вращения вокруг большой

оси эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

лежащего в плоскости xOz . Если $a = b = c$, имеем сферу (шар): $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Любая плоскость пересекает эллипсоид по эллипсу (в частном случае — по кругу). Объем эллипсоида равен $\frac{4}{3}\pi abc$.

Гиперболоид однополостный (рис. 65): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, a и b — действительные полуоси, c — мнимая полуось.

Прямолинейные образующие — см. стр. 152.

Гиперболоид двуполостный (рис. 66): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, c — действительная полуось, a и b — мнимые полуоси.

Для обоих гиперболоидов сечения, параллельные оси Oz , — гиперболы (для однополостного гиперболоида может быть

пара пересекающихся прямых), а сечения, параллельные плоскости xOy , — эллипсы.

Если $a=b$, то гиперboloид является поверхностью, получающейся от вращения гиперболы с полуосями a и c вокруг оси z ; мнимой — в случае однополостного и действительной — в случае двуполостного гиперboloида.

Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ имеет вершину в начале, и за направляющую его (см. стр. 199) может быть взят эллипс с полуосями a и b , плоскость которого перпендикулярна оси Oz и удалена от начала на расстояние c (рис. 67). Этот конус является асимптотическим для двух гиперboloидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

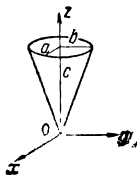


Рис. 67.

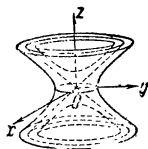


Рис. 68.

т. е. всякая его образующая при удалении в бесконечность неограниченно приближается к обоим гиперboloидам (рис. 68). Если $a=b$, то мы имеем прямой круглый конус (см. стр. 200).

Параболоиды. Параболоиды не имеют центра; для уравнений, приводимых ниже, вершина параболоида помещается в начале координат, ось Oz является осью симметрии, а плоскости xOz и yOz — плоскостями симметрии.

Эллиптический параболоид (рис. 69): $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Сечения, параллельные оси Oz , — параболы; сечения, параллельные плоскости xOy , — эллипсы. Если $a=b$, имеем *параболоид вращения*, получаемый от вращения вокруг своей оси параболы $z = \frac{x^2}{a^2}$, лежащей в плоскости xOz .

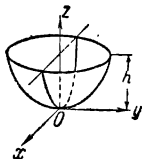


Рис. 69.

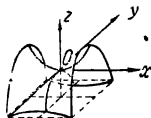


Рис. 70.

Объем части параболоида, отсекаемый плоскостью, перпендикулярной его оси на высоте h , равен $\frac{1}{2} \pi abh$, то-есть половине объема эллиптического цилиндра с таким же основанием и высотой.

Гиперболический параболоид (рис. 70): $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Сечения, параллельные плоскости yOz , — равные параболы; сечения, параллельные плоскости xOz , — равные параболы; сечения, параллельные плоскости xOy , — гиперболы.

Прямолинейной образующей поверхности называется прямая линия, целиком лежащая на данной поверхности; например—образующие конической или цилиндрической поверхности.

Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ имеет два семейства прямолинейных образующих (рис. 71):

$$\text{I) } \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u \left(1 + \frac{y}{b}\right); \quad u \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = v - \frac{y}{b}$$

$$\text{и II) } \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v \left(1 - \frac{y}{b}\right); \quad v \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b};$$

u и v —произвольные величины.

Гиперболический параболоид (рис. 72) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ имеет также два семейства образующих:

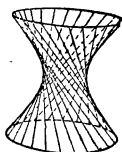


Рис. 71.

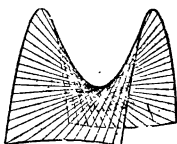


Рис. 72.

$$\text{I) } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u,$$

$$u \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z;$$

$$\text{II) } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v,$$

$$v \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z;$$

u и v —произвольные величины. Через каждую точку поверхности в обоих случаях проходят две прямые: по одной образующей каждого семейства (на рис. 71 и 72 показано лишь по одному семейству).

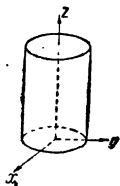


Рис. 73.

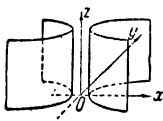


Рис. 74.

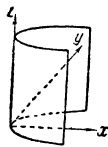


Рис. 75.

Цилиндры: эллиптический $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 73),

гиперболический $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 74),

параболический $y^2 = 2px$ (рис. 75).

Определение вида поверхности 2-го порядка (см. стр. 254)

I. $\delta \neq 0$ (центральные поверхности)

	$S\delta > 0, T > 0$	$S\delta$ и T не оба > 0
$\Delta < 0$	Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Двуполостный гипер- болоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
$\Delta > 0$	Мнимый эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	Однополостный гипербо- лоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
$\Delta = 0$	Мнимый конус (с действительной вершиной) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

II. $\delta = 0$ (параболоиды, цилиндры и пары плоскостей)

	$\Delta < 0, T > 0$	$\Delta > 0, T < 0$
$\Delta \neq 0$	Эллиптический пара- болоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$	Гиперболический пара- болоид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$
$\Delta = 0$	Цилиндрическая поверхность, направляющей ко- торой служит кривая 2-го порядка. В зависимо- сти от вида этой кривой (см. стр. 236—237) могут быть цилиндры разного вида (эллиптический при $T > 0$, гиперболический при $T < 0$, параболический при $T = 0$) или поверхность распадается на две плоскости (действи- тельные, мнимые или сливающиеся).	

11. Поверхности 2-го порядка (общая теория)

Общее уравнение поверхности 2-го порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Инварианты поверхности 2-го порядка *:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

$$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2.$$

Эти величины не меняются при переносе начала и повороте координатных осей.

Вид поверхности 2-го порядка по ее уравнению определяется по знакам ее инвариантов Δ , δ , S и T из таблицы, приведенной на стр. 253. В этой таблице рядом с названием поверхности помещено каноническое уравнение, к которому преобразованием координат может быть приведено данное. Уравнениям так называемых мнимых поверхностей не удовлетворяют координаты ни одной действительной точки (кроме двух исключений — вершина мнимого конуса и линия пересечения мнимых плоскостей).

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В дифференциальной геометрии изучаются кривые линии (плоские и пространственные) и поверхности по их уравнениям методами дифференциального исчисления; поэтому функции, входящие в уравнения, предполагаются непрерывными и имеющими непрерывные производные до того порядка, который необходим по характеру исследуемого вопроса **. При изучении геометрических образов по их уравнениям различают их свойства, *зависящие* от выбора системы координат (например: пересечение кривой или поверхности с осями, наклон касательной, точки максимума и минимума), и *инвариантные свойства*, не изменяющиеся от преобразования координат и принадлежащие собственно кривой или поверхности (например: точки перегиба, вер-

* При этом принимается: $a_{ik} = a_{ki}$.

** Это условие может нарушаться только для отдельных точек кривой или поверхности; в таком случае мы имеем точку специального типа (например: разрыв или излом кривой). О такого рода точках см. стр. 264.

шины кривой, кривизна). С другой стороны, различают *локальные свойства*, относящиеся к весьма малым частям кривой или поверхности (например: кривизна, линейный элемент поверхности), и свойства кривой или поверхности *в целом* (например: число вершин, длина замкнутой кривой).

А Плоские кривые

1. Различные способы задания кривой

Уравнение кривой *. Плоская кривая может быть задана уравнением в одной из следующих форм:

А. В декартовых координатах:

в неявном виде: $\dots\dots\dots F(x, y)=0, \quad (1)$

в явном виде: $\dots\dots\dots y=f(x), \quad (2)$

в параметрическом виде: $\dots\dots\dots x=x(t), \quad y=y(t), \quad (3)$

Б. В полярных координатах: $\dots\dots\dots \rho=f(\varphi). \quad (4)$

Положительное направление на кривой. Если кривая задана в форме (3), то на ней определяется *положительное направление* — направление, в котором движется точка кривой $M[x(t), y(t)]$ при возрастании параметра t . Если кривая задана в форме (2), то параметром можно считать абсциссу точки: $x=x$, $y=f(x)$, и положительное направление



Рис. 1.

соответствует возрастанию абсциссы (т. е. идет слева направо). Если кривая задана в форме (4), то параметром служит угол φ : $x=f(\varphi) \cos \varphi$, $y=f(\varphi) \sin \varphi$, и положительное направление соответствует возрастанию φ (т. е. идет против часовой стрелки).

Примеры (рис. 1): а) $x=t^2, y=t^3$, б) $y=\sin x$; в) $\rho=af$.

2. Локальные элементы кривой

В настоящем параграфе через M обозначается переменная точка кривой, определенная значением x при задании

* Общее понятие об уравнении линии см. стр. 223.

в форме (2). t —при задании (3) и φ —при задании (4); N —бесконечно близкая к ней точка, определенная соответственно значениями $x+dx$, $t+dt$ и $\varphi+d\varphi$.

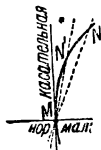
Дифференциал дуги. Если s —длина кривой от некоторой постоянной точки A до M , то бесконечно малое приращение длины $\Delta s = \widehat{MN}$ выражается приближенно формулой дифференциала дуги * ds :

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \text{ при задании кривой в форме (2),}$$

$$= \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \quad \text{ " " " " " " (3),}$$

$$= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi \quad \text{ " " " " " " (4).}$$

Примеры: 1) $y = \sin x$, $ds = \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$; 2) $x = t^2$, $y = t^3$, $ds = t\sqrt{4 + 9t^2} dt$; 3) $\rho = a\varphi$, $ds = a\sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi$.



Касательная и нормаль. Касательной в точке M называется предельное положение секущей прямой MN , когда $N \rightarrow M$; нормалью—прямая, проходящая через M перпендикулярно касательной (рис. 2).

Уравнения касательной и нормали (x , y —координаты точки M кривой; X , Y —текущие координаты точек касательной или нормали; значения производных вычисляются для точки M).

Рис. 2.

Задание кривой в форме (см. стр. 255)	Уравнение касательной	Уравнение нормали
	(1) $\frac{\partial F}{\partial x} (X-x) + \frac{\partial F}{\partial y} (Y-y) = 0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$
	(2) $Y-y = \frac{dy}{dx} (X-x)$	$Y-y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} (X-x)$
	(3) $\frac{Y-y}{y'} = \frac{X-x}{x'}$	$x' (X-x) + y' (Y-y) = 0$

* О дифференциале и его свойствах см. стр. 310—311.

Примеры. Найти уравнения касательной и нормали:

1) Для окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $M(3, 4)$. Уравнение касательной: $2x(X-x) + 2y(Y-y) = 0$ или $Xx + Yy = 25$; в точке M : $3X + 4Y = 25$. Уравнение нормали: $\frac{X-x}{2x} = \frac{Y-y}{2y}$

или $Y = \frac{y}{x} X$; в точке M : $Y = \frac{4}{3} X$.

2) Для синусоиды $y = \sin x$ в точке $O(0, 0)$. Уравнение касательной: $Y - \sin x = \cos x (X - x)$ или $Y = X \cos x + \sin x - x \cos x$; в точке O : $Y = X$. Уравнение нормали: $Y - \sin x = -\frac{1}{\cos x} (X - x)$ или $Y = -X \sec x + \sin x + x \sec x$; в точке O : $Y = -X$.

3) Для кривой $x = t^2$, $y = t^3$ в точке $M(4, -8)$, $t = -2$. Уравнение касательной: $\frac{Y-t^3}{3t^2} = \frac{X-t^2}{2t}$ или $Y = \frac{3}{2} tX - \frac{1}{2} t^3$, в точке M : $Y = -3X + 4$. Уравнение нормали: $2t(X-t^2) + 3t^2(Y-t^3) = 0$ или $2X + 3tY = t^2(2 + 3t^2)$, в точке M : $X - 3Y = 28$.

Положительное направление. Если кривая задана в форме (2), (3) или (4), (см. стр. 255), то на касательной и нормали определяются положительные направления: на касательной положительное направление совпадает с положительным направлением кривой в точке прикосновения (см. выше, стр. 255), а на нормали — получается из положительного направления касательной поворотом вокруг точки M на 90° против часовой стрелки. Точка M разделяет касательную и нормаль на положительную и отрицательную части.

Наклон касательной определяется углом α , образованным положительным направлением оси абсцисс и положительным направлением касательной, или (при задании кривой в полярных координатах) — углом μ , образованным направлением радиуса-вектора $OM = \rho$ и положительным направлением касательной (рис. 4). Углы α и μ определяются формулами (ds вычисляется по формулам на стр. 256):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{dy}{dx}, & \cos \alpha &= \frac{dx}{ds}, & \sin \alpha &= \frac{dy}{ds}; \\ \operatorname{tg} \mu &= \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)}, & \cos \mu &= \frac{d\rho}{ds}, & \sin \mu &= \rho \frac{d\varphi}{ds}. \end{aligned}$$



Рис. 3.

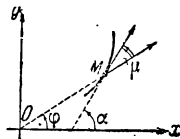


Рис. 4.

Примеры: 1) $y = \sin x$;

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos x, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}, \quad \sin \alpha = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}};$$

2) $x = t^2, \quad y = t^3$;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3t}{2},$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4 + 9t^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{3t}{\sqrt{4 + 9t^2}};$$

3) $\rho = a\varphi$;

$$\operatorname{tg} \mu = \varphi, \quad \cos \mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}},$$

$$\sin \mu = \frac{\varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}};$$

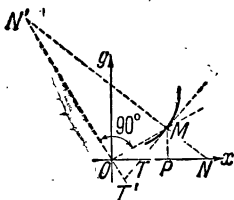


Рис. 5.

Отрезки касательной и нормали; подкасательная и поднормаль (рис. 5).

а) В декартовых координатах [при задании в форме (2) и (3), см. стр. 255]:

$$MT = \left| \left(y' \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right) : \frac{dy}{dx} \right| \quad (\text{отрезок касательной}),$$

$$MN = \left| y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right| \quad (\text{отрезок нормали}),$$

$$PT = \left| \frac{y}{\frac{dy}{dx}} \right| \quad (\text{подкасательная}),$$

$$PN = \left| y \frac{dy}{dx} \right| \quad (\text{поднормаль}).$$

б) В полярных координатах [при задании в форме (4), см. стр. 255]:

$$MT' = \left| \frac{\rho}{\rho'} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \right| \quad (\text{отрезок полярной касательной}),$$

$$MN' = \left| \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \right| \quad (\text{отрезок полярной нормали}),$$

$$OT' = \left| \frac{\rho^2}{\rho'} \right| \quad (\text{полярная подкасательная}),$$

$$ON' = \left| \rho' \right| \quad (\text{полярная поднормаль}).$$

Примеры: 1) $y = \operatorname{ch} x$; $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \operatorname{ch} x$;

$$MT = |\operatorname{ch} x \operatorname{cth} x|, \quad MN = |\operatorname{ch}^2 x|, \quad PT = |\operatorname{cth} x|, \quad PN = |\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x|.$$

$$2) \rho = a\varphi; \rho' = a, \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = a\sqrt{1 + \varphi^2};$$

$$MT' = |a\varphi\sqrt{1 + \varphi^2}|, MN' = |a\sqrt{1 + \varphi^2}|, OT' = |a\varphi^2|, ON' = a.$$

Угол между двумя кривыми. Под углом между двумя кривыми Γ_1 и Γ_2 , пересекающимися в точке M , понимают угол β между касательными к этим кривым в точке M (рис. 6). Вычисление угла β сводится к определению угла между двумя прямыми (см. стр. 226), угловые коэффициенты которых равны $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{df_1}{dx}\right)_M$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{df_2}{dx}\right)_M$, где $y = f_1(x)$ — уравнение кривой Γ_1 , а $y = f_2(x)$ — уравнение кривой Γ_2 ; производные вычисляются в точке M .

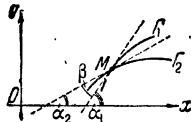


Рис. 6.

Пример: определить угол между параболой $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ в точке $M(1, 1)$. $\operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{d(x^2)}{dx}\right)_{x=1} = 2$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{3}{4}$.

Вогнутость и выпуклость кривой. Если кривая задана в явной форме: $y = f(x)$, то для небольшой ее части, содержащей точку M (за исключением случаев, когда M — точка перегиба или особая точка, см. стр. 262—266), можно определить, обращена ли кривая своей вогнутостью вверх или вниз: если в точке M вторая производная $f''(x) > 0$, то кривая обращена вогнутостью вверх (точка M_2 на рис. 7), а если $f''(x) < 0$, то вниз (точка M_1); если же $y'' = 0$, то вопрос нуждается в дополнительном исследовании, которое проведено на стр. 262 при рассмотрении точек перегиба.

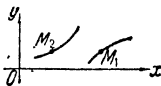


Рис. 7.

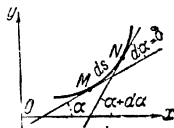


Рис. 8.

Пример: $y = x^3 + 1$; $y'' = 6x$; при $x > 0$ кривая вогнута вверх, при $x < 0$ — вниз.

Кривизна и радиус кривизны. Кривизной K кривой в ее точке M называется предел отношения „угла смежности“ δ между положительными направлениями касательных в точках M и N (рис. 8) к длине дуги $\widehat{MN}$, когда $\widehat{MN} \rightarrow 0$: $K = \lim_{\widehat{MN} \rightarrow 0} \frac{\delta}{\widehat{MN}}$. Радиусом кривизны R

в точке M кривой называется величина, обратная кривизне: $R = \frac{1}{K}$. Чем больше „искривлена“ кривая вблизи данной точки, тем больше K и меньше R в этой точке. Для окружности с радиусом a кривизна $K = \frac{1}{a}$ и радиус кривизны $R = a$ (постоянны для всех точек); для прямой линии: $K = 0$, $R = \infty$; для прочих кривых кривизна меняется от точки к точке.

Формулы для K и R . Полагая (рис. 8) $\delta = d\alpha$ и $\widehat{MN} = ds$, имеем:

$$K = \frac{d\alpha}{ds}, \quad R = \frac{ds}{d\alpha} \quad (*)$$

Если кривая задана аналитически, то K и R вычисляются по формулам:

при задании в форме (2) (см. стр. 255):

$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

при задании в форме (3):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \quad R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}},$$

при задании в форме (1):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}, \quad R = \frac{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}, \quad (**)$$

при задании в форме (4):

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'\rho'' - \rho\rho'''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}, \quad R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'\rho'' - \rho\rho'''}.$$

Примеры: 1) $y = \operatorname{ch} x$, $K = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 2) $x = t^2$, $y = t^3$,
 $K = \frac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}$; 3) $y^2 - x^2 = a^2$, $K = \frac{a^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$; 4) $\rho = a\varphi$,
 $K = \frac{1}{a} \frac{\varphi^2 + 2}{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}$.

Величины K и R , определяемые по формулам (*) и (**), могут принимать положительные и отрицательные значения; знак, получаемый по этим формулам, указывает, направлена ли кривая своей вогнутостью в сторону положительной (при $K > 0$) или отрицательной (при $K < 0$) части нормали * (см. стр. 257).

Круг кривизны и центр кривизны. *Кругом кривизны* в точке M кривой называется предельное положение круга, проходящего через M , и две другие бесконечно близкие точки кривой N и P , когда $N \rightarrow M$ и $P \rightarrow M$ (рис. 9). Радиус круга кривизны равен радиусу кривизны в соответствующей точке [вычисляется по формулам (**)], а центр круга кривизны C называется *центром кривизны* для точки M и находится на нормали к кривой в направлении ее вогнутости. Координаты центра кривизны (x_c, y_c) определяются следующими формулами:



Рис. 9.

а) при задании в форме (2) (см. стр. 255):

$$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y_c = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

б) при задании в форме (3):

$$x_c = x - \frac{y' (x'^2 + y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}, \quad y_c = y + \frac{x' (x'^2 + y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}};$$

в) при задании в форме (4):

$$x_c = \rho \cos \varphi - \frac{(\rho^2 + \rho'^2) (\rho \cos \varphi + \rho' \sin \varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''},$$

$$y_c = \rho \sin \varphi + \frac{(\rho^2 + \rho'^2) (\rho \sin \varphi - \rho' \cos \varphi)}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''};$$

* Иначе: при $K > 0$ центр кривизны (см. ниже) лежит на положительной части нормали, а при $K < 0$ — на отрицательной.

г) при задании в форме (1):

$$x_c = x + \frac{F'_x (F'^2_x + F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}, \quad y_c = y + \frac{F'_y (F'^2_x + F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}.$$

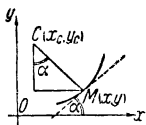


Рис. 10.

Эти формулы могут быть записаны в виде

$$x_c = x - R \sin \alpha, \quad y_c = y + R \cos \alpha$$

или
$$x_c = x - R \frac{dy}{ds}, \quad y_c = y + R \frac{dx}{ds}$$

(рис. 10), где R вычисляется по формулам (**), — см. стр. 260.

3. Точки специального типа *

Точки перегиба — точки кривой, в которых направление вогнутости меняется на обратное (рис. 11); кривая, в малой части, заключающей эту точку, лежит не по одну сторону от касательной, а пересекает ее. В точке перегиба кривизна $K=0$, а радиус кривизны $R=\infty$.

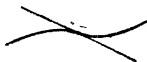


Рис. 11.

Правила нахождения точек перегиба.

1) *Задание кривой в явной форме (2):* $y=f(x)$. Определяются все значения $x_1, x_2, \dots$ корней уравнения $f''(x)=0$, и каждое значение x_i подставляется последовательно в выражения последующих производных. Если $f'''(x_i) \neq 0$, то x_i — точка перегиба, если $f'''(x_i)=0$, а $f^{IV}(x_i) \neq 0$, то x_i — не точка перегиба и т. д.; в зависимости от того, какая из производных — нечетного или четного порядка — получится при последовательном дифференцировании и подстановке впервые отличной от нуля, x_i соответственно будет или не будет точкой перегиба. Если исследуемая точка не является точкой перегиба (впервые не обращается в нуль производная k -го порядка при k четном), то кривая обращена выпуклостью вверх при $f^{(k)}(x) < 0$ и вниз при $f^{(k)}(x) > 0$.

* Здесь рассмотрены только точки инвариантные относительно преобразования координат. Нахождение максимума и минимума см. стр. 325.

Примеры: 1) $y = \frac{1}{1+x^2}$; $f''(x) = -2 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$, $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'''(x) = 6x \frac{2+x^2-5x^4}{(1+x^2)^5}$, $f'''(x_{1,2}) \neq 0$; точки перегиба $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$.

2) $y = x^4$, $f''(x) = 12x^2$, $x_1 = 0$, $f'''(x) = 24x$, $f'''(x_1) = 0$, $f^{IV}(x) = 24$; точки перегиба нет.

Практически, если по характеру кривой ясно, что у нее должны быть точки перегиба (например между максимумом и минимумом для графика функции, имеющей непрерывную производную), то ограничиваются только нахождением x_i , не интересуясь высшими производными.

2) Другие задания кривой. Необходимое условие существования точки перегиба $f''(x) = 0$ при задании уравнения кривой в других формах заменяется следующими:

- а) параметрическая форма (3) (см. стр. 255): $\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$,
- б) полярная форма (4): $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$,
- в) общая форма (1): решается система уравнений

$$F(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

система решений дает координаты возможных точек перегиба.

Примеры: 1) $x = a\left(t - \frac{1}{2} \sin t\right)$; $y = a\left(1 - \frac{1}{2} \cos t\right)$ („укороченная циклоида“, см. стр. 134);

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4} \begin{vmatrix} 2 - \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4} (2 \cos t - 1);$$

$$\cos t = \frac{1}{2}; \quad t_i = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi;$$

точек перегиба бесконечно много, они соответствуют значениям параметра t_i .

$$2) \rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}; \quad \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^3} - \frac{3}{4\varphi^3} = \frac{1}{4\varphi^3} (4\varphi^2 - 1);$$

точка перегиба определяется полярным углом $\varphi = \frac{1}{2}$.

$$3) x^2 - y^2 = a^2 \text{ (гипербола).} \quad \begin{vmatrix} F'' & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2x \\ 0 & -2 & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 8x^2 - 8y^2$; уравнения $x^2 - y^2 = a^2$ и $8(x^2 - y^2) = 0$ противоречивы; следовательно, гипербола точек перегиба не имеет.

Вершины — точки кривой, в которых кривизна имеет максимум или минимум (кривая наиболее или наименее изогнута); например: у эллипса 4 вершины: A, B, C и D , у логарифмики — одна: E (рис. 12). Нахождение вершин сводится к определению максимума и минимума выражения K , данного формулами (**)

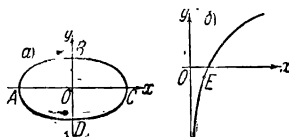


Рис. 12.

на стр. 260 (или минимума и максимума для $R = 1/K$, если в этом случае выкладки получаются проще).

Особые точки. Этим общим названием объединяются точки различного типа: а) *узловые точки*, в которых кривая сама себя пересекает (рис. 13, а); б) *изолированные точки*, расположенные отдельно от кривой, но с координатами, удовлетворяющими уравнению кривой (рис. 13, б);

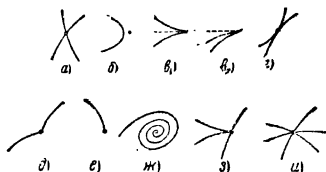


Рис. 13.

в) *точки возврата* или *заострения*, в которых направление кривой меняется на обратное; различают точки возврата: 1-го рода (рис. 13, в) и 2-го рода (рис. 13, г), в зависимости от расположения касательной относительно обеих ветвей; г) *точки самоприкосновения*, в которых кривая сама себя касается (рис. 13, г); д) *точки излома*, в которых кривая „скачком“ изменяет свое направление, причем в отличие от точки возврата касательные к обеим частям кривой в точке излома различны (рис. 13, д); е) *точки прекращения*, на которых кривая обрывается (рис. 13, е); ж) *асимптотические точки*, вокруг которых кривая закручивается бесконечное число раз, подходя к ним на сколь угодно малое расстояние (рис. 13, ж). Могут встречаться одновременные комбинации двух или нескольких из этих особенностей (рис. 13, з и и).

Нахождение точек типа д-ж. Особенности этих типов могут существовать только у трансцендентных кривых*. Точки излома соответствуют конечному разрыву производной $\frac{dy}{dx}$, например, начало координат у кривой $y = \frac{x}{x + e^{1/x}}$ (см. рис. 2, в на стр. 309). Точки прекращения соответствуют конечному разрыву или обрыву функции $y = f(x)$, например, точки $A(1, 0)$ и $B(1, 1)$ кривой $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$ (см. рис. 5

на стр. 294). Асимптотические точки проще всего обнаружить у кривых, заданных в полярной форме: $\rho = f(\varphi)$; если $\lim \rho = 0$, когда $\varphi \rightarrow +\infty$ или $\varphi \rightarrow -\infty$, то полюс — асимптотическая точка, например, у логарифмической спирали $\rho = ae^{k\varphi}$ (см. рис. 59, на стр. 138).

Нахождение точек типа а-г, называемых также *кратными точками* (двойными, тройными и т. д.). Кривую изучают в форме $F(x, y) = 0$. Точки A , координаты которых (x_1, y_1) удовлетворяют одновременно трем уравнениям:

$$F=0, \quad F'_x=0, \quad F'_y=0,$$

являются *двойными*, если из трех производных 3-го порядка $F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy}$ хотя бы одна не равна 0 (в противном случае A — *тройная* точка или высшей кратности, их исследование см. Смирнов — стр. 533 справочника). Характер двойной точки зависит от знака

$$\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{matrix} x=x_1 \\ y=y_1 \end{matrix} \right)$$

1) Если $\Delta < 0$, то A — узловая точка, угловые коэффициенты касательных в ней равны корням уравнения

$$F''_{yy} k^2 + 2F''_{xy} k + F''_{xx} = 0.$$

2) Если $\Delta > 0$, то A — изолированная точка.

3) Если $\Delta = 0$, то A либо точка возврата, либо точка самоприкосновения; наклон касательной в ней:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{F''_{xy}}{F''_{yy}}.$$

* Кривые $F(x, y) = 0$ называются *алгебраическими*, если F может быть представлено в виде многочлена, и *трансцендентными*, если это невозможно.

Для детального исследования такой точки следует перенести в нее начало координат и повернуть оси так, чтобы ось x пошла по направлению касательной в точке A ; тогда по виду уравнения можно установить, имеем ли мы точку возврата 1-го рода, 2-го рода или точку самоприкосновения.

Примеры: 1) $F \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ (лемниската Бернулли, см. рис. 50 на стр. 133); $F'_x = 4x(x^2 + y^2 - a^2)$, $F'_y = 4y(x^2 + y^2 + a^2)$; система $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ дает 3 решения: $(0, 0)$, $(\pm a, 0)$, но только первое удовлетворяет $F = 0$. При подстановке $(0, 0)$ в производные 2-го порядка имеем: $(F''_{xx})_0 = -4a^2$, $(F''_{xy})_0 = 0$, $(F''_{yy})_0 = +4a^2$; $\Delta = -16a^4 < 0$, т. е. начало — узловая точка; наклон касательных: $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1$, и уравнения касательных: $y = \pm x$.

2) $F = x^3 + y^3 - x^2 - y^2 = 0$; $F'_x = x(3x - 2)$, $F'_y = y(3y - 2)$; из четырех точек $(0, 0)$, $(0, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, 0)$ и $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ также только первая лежит на кривой; $(F''_{xx})_0 = -2$, $(F''_{xy})_0 = 0$, $(F''_{yy})_0 = -2$, $\Delta = 4 > 0$, т. е. начало — изолированная точка.

3) $F = (y - x^2)^2 - x^5 = 0$. Система $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ дает единственное решение $(0, 0)$, удовлетворяющее и $F = 0$; $\Delta = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$. В данном случае имеем в начале точку возврата 2-го рода, что ясно из уравнения кривой в явной форме: $y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$; y не существует при $x < 0$, а при небольших $x > 0$ оба значения y положительны (касательная же в начале горизонтальна).

Случай алгебраической кривой $F(x, y) = 0$. Если уравнение не содержит свободных членов и членов 1-й степени, то начало координат — двойная точка, уравнения касательных в которой получим сразу, приравняв нулю все члены второй степени; например, для лемнискаты Бернулли (см. выше, пример 1) уравнения касательных: $x^2 - y^2 = 0$ или $y = \pm x$. Если нет и членов второй степени, то начало — тройная точка и т. д.

4. Асимптоты

Общий случай. Если кривая какой-либо своей частью неограниченно удаляется от начала координат, то эта часть (*бесконечная ветвь* кривой) может иногда иметь *асимптоту* — прямую, к которой она неограниченно при

ближается или с одной стороны (рис. 14, а) или все время пересекая ее (рис. 14, б). Для отыскания асимптоты кривой, заданной в параметрической форме: $x=x(t)$ $y=y(t)$, находят значения $t=t_i$, при которых

$$x(t) \rightarrow \infty \text{ или } y(t) \rightarrow \infty.$$

Если

$$x(t_i)=\infty, \text{ но } y(t_i)=a \neq \infty,$$

то прямая $y=a$ —горизонтальная асимптота; если

$$y(t_i)=\infty, \text{ но } x(t_i)=a \neq \infty,$$

то прямая $x=a$ —вертикальная асимптота; если

$$x(t_i)=\infty \text{ и } y(t_i)=\infty,$$

то вычисляют два предела:

$$k = \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{y(t)}{x(t)} \text{ и } b = \lim_{t \rightarrow t_i} [y(t) - k \cdot x(t)];$$

при существовании обоих этих пределов, кривая имеет асимптоту $y=kx+b$.

При задании кривой в явной форме $y=f(x)$ вертикальные асимптоты находятся как точки разрыва функции $f(x)$ (см. стр. 299—302), а горизонтальные и наклонные представляют в форме $y=kx+b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx].$$

Пример: $x = \frac{m}{\cos t}$, $y = n(\lg t - t)$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = -\frac{\pi}{2}$ и т. д.

$$x(t_1)=y(t_1)=\infty, \quad k = \lim_{t \rightarrow \pi/2} \frac{n}{m} (\sin t - t \cos t) = \frac{n}{m},$$

$$b = \lim_{t \rightarrow \pi/2} \left[n(\lg t - t) - \frac{n}{m} \frac{m}{\cos t} \right] = n \cdot \lim_{t \rightarrow \pi/2} \frac{\sin t - t \cos t - 1}{\cos t} =$$

$$= -\frac{n\pi}{2}, \quad y = \frac{n}{m} x - \frac{n\pi}{2}; \quad \frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{\pi}{2}; \text{ вторая асимптота}$$

$$\frac{x}{m} - \frac{y}{n} = -\frac{\pi}{2}.$$

Случай алгебраической кривой $F(x, y)=0$. $F(x, y)$ —многочлен относительно x и y . Отберем те члены $F(x, y)$, которые имеют наибольшее измерение*. Обозначаем

* Под измерением члена $Ax^m y^n$ понимается сумма показателей $(m+n)$ при x и y . Так, член $3x^4 y^3$ пятого измерения, $2y^3$ —второго; в многочлене $x^3 + y^3 + 3xy = 0$ «старшие» члены: x^3 и y^3 .

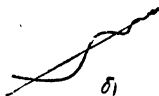


Рис. 14.

через $\Phi(x, y)$ отобранную группу „старших“ членов и решаем уравнение $\Phi(x, y) = 0$ относительно x и y :

$$x = \varphi(y), \quad y = \psi(x).$$

Значения $y_1 = a$, для которых $x = \infty$, дают горизонтальные асимптоты $y = a$; значения $x_1 = b$, для которых $y = \infty$, дают вертикальные асимптоты $x = b$. Для отыскания наклонных асимптот, $y = kx + b$, подставляем в $F(x, y)$ выражение $y = kx + b$ и располагаем полученный многочлен по степеням относительно x :

$$F(x, kx + b) \equiv f_1(k, b) x^m + f_2(k, b) x^{m-1} + \dots$$

Приравниваем нулю два старших коэффициента f_1 и f_2 и решаем систему уравнений

$$f_1(k, b) = 0, \quad f_2(k, b) = 0.$$

Если она совместна, то ее решения k, b дадут параметры асимптот.

Пример: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ („декартов лист“, см. рис. 43 на стр. 128). $F(x, kx + b) = (1 + k^3)x^3 + 3(k^2b - ka)x^2 + \dots$; $1 + k^3 = 0$ и $k^2b - ka = 0$ дает систему решений $k = -1$, $b = -a$; уравнение асимптоты: $y = -x - a$.

5. Общее исследование кривой по ее уравнению

Исследование кривых по их уравнениям проводят с целью изучить поведение некоторой однозначной функции $y = f(x)$ или установить вид кривой линии, определенной аналитически одной из форм (1), (2), (3) или (4) (см. стр. 255).

П о с т р о е н и е г р а ф и к о в ф у н к ц и й, заданных в форме $y = f(x)$.

1) Определяют область существования (стр. 288).

2) Устанавливают наличие симметрии относительно оси y или начала по четности или нечетности функции (стр. 291).

3) Определяют „поведение функции в бесконечности“, вычисляя пределы $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (стр. 294).

4) Находят точки разрыва и определяют их характер (стр. 299—302).

5) Находят пересечение кривой с осью y , вычисляя $f(0)$, и с осью x , решая уравнение $f(x) = 0$ (о решении алгебраического и трансцендентного уравнений в общей форме см. стр. 174—176).

6) Находят точки максимума и минимума (стр. 325), устанавливая области возрастания и убывания функции.

7) Находят точки перегиба (стр. 262), устанавливая области, где кривая обращена вогнутостью вверх и вниз (стр. 259), причем в точках перегиба вычисляют наклон касательной.

По всем этим данным постепенно делают набросок кривой, уточняя его затем по отдельным точкам в тех местах, которые представляют интерес.

Пример: Построить график функции $y = \frac{2x^3 + 3x - 4}{x^2}$.

- 1) Функция существует при всех x , кроме $x=0$.
- 2) Симметрии нет.
- 3) $y \rightarrow 2$ при $x \rightarrow \pm \infty$, причем если $x \rightarrow -\infty$, то $y=2-0$ (стремится к 2 „снизу“), а если $x \rightarrow +\infty$, то $y=2+0$ (стремится „сверху“).
- 4) При $x=0$ — бесконечный разрыв (от $-\infty$ до $+\infty$, так как y отрицательно при малых x).
- 5) $f(0)=\infty$; уравнение $2x^3 + 3x - 4 = 0$ имеет корни $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{43}}{4}$; таким образом пересечения с осью x : $x_1 \approx 0,89$ $x_2 \approx -2,39$.

- 6) Максимум $x = \frac{8}{3} \approx 2,66$, $y \approx 2,56$.

- 7) Точка перегиба: $x=4$, $y=2,5$, $\tan \alpha = -\frac{1}{16}$. Набросав кривую по этим данным, вычисляем еще

- 8) пересечение кривой с асимптотой: $x = \frac{4}{3} \approx 1,33$; $y=2$.

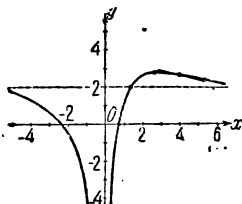


Рис. 15.

Кривая изображена на рис. 15.

Построение кривых, заданных в неявной форме $F(x, y)=0$. Общими правилами руководствоваться трудно, так как это очень часто приводит к сложным вычислениям. Если возможно, полезно найти следующие элементы:

- 1) Определить все точки пересечения с осями.
- 2) Выяснить симметричность кривой относительно осей и начала (заменяя x на $-x$, y на $-y$).
- 3) Найти максимум и минимум относительно оси x (см. стр. 326) и оси y , применив аналогичные формулы с переменой осей координат.
- 4) Найти точки перегиба (стр. 263) и наклон касательной в них.
- 5) Найти особые точки (стр. 265).
- 6) Найти вершины кривой (стр. 264); построить для них круги кривизны (стр. 261) — их дуги на значительном расстоянии будут на-глаз неотличимы от кривой.
- 7) Найти все асимптоты (стр. 266) и исследовать расположение ветвей относительно асимптот.

6. Эволюты и эвольвенты

Эволюта данной кривой — кривая, состоящая из центров кривизны (см. стр. 261) для всех точек этой кривой; она же является огибающей (см. стр. 271) нормалей данной кривой. Параметрические уравнения эволюты — см. стр. 261—262 (уравнения для центра кривизны, где нужно считать x_c и y_c за текущие координаты эволюты). Если удастся из этих уравнений исключить параметр (x , t или φ), то получаем уравнения эволюты в декартовых координатах.

Пример: найти эволюту параболы $y = x^2$ (рис. 16) по формулам:

$$x_c = x - \frac{\frac{dy}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad y_c = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

$$x_c = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3, \quad y_c = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{1+6x^2}{2},$$

$$\text{откуда } y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{x}{4}\right)^{2/3}.$$

Эвольвента иначе, *инволюта*, или *развертка* данной кривой Γ_1 — такая кривая Γ_2 по отношению к которой Γ_1 является эволютой. Нормаль MC эвольвенты является касательной к эволюте, длина дуги $\widehat{CC}_1$ эволюты равна радиусу кривизны (рис. 16):

$$\widehat{CC}_1 = M_1C_1 = MC.$$

Эти свойства позволяют считать эвольвенту Γ *разверткой* кривой Γ_1 , получающейся из Γ разматы-

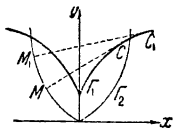


Рис. 16.

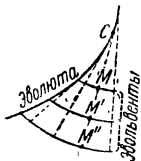


Рис. 17.

ванием натянутой нити. Данной эволюте соответствует семейство эвольвент, каждая из которых определяется первоначальной длиной нити (рис. 17). Уравнение эвольвенты получается интегрированием системы дифференциальных урав-

нений, представляющих уравнение эвольвенты круга см. стр. 138.

7. Огибающие семейства кривых

Характеристические точки. Если имеется семейство кривых с одним параметром α :

$$F(x, y, \alpha) = 0, \quad (*)$$

то две бесконечно близкие кривые этого семейства, соответствующие значениям α и $\alpha + \Delta\alpha$, имеют *точки наибольшего сближения* K . Эти точки являются либо пересечением кривых (α) и ($\alpha + \Delta\alpha$), либо такими точками на (α), что их расстояние до ($\alpha + \Delta\alpha$) (по нормали) — бесконечно малая высшего порядка по отношению к $\Delta\alpha$ (рис. 18, а и б). Если $\Delta\alpha \rightarrow 0$, кривая ($\alpha + \Delta\alpha$) стремится слиться с первой, а точка K в некоторых случаях приближается к предельному положению — *характеристической точке*. Особые точки кривой α всегда являются характеристическими.

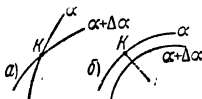


Рис. 18.

Х а р а к т е р и с т и к и. Геометрическое место всех характеристических точек для всех кривых семейства (*) образует кривую (или несколько кривых), называемую *характеристикой* этого семейства; она либо состоит из особых точек кривых семейства (рисунки 19, а), либо является их *огивающей*, т. е. касается каждой кривой семейства (рис. 19, б); могут быть и комбинации этих обоих типов (рис. 19, в, г).

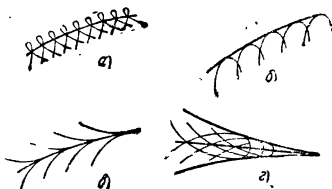


Рис. 19.

Уравнение огибающей (и характеристики в общем случае) семейства $F(x, y, \alpha) = 0$ получим, если исключим α из системы уравнений

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

Пример: найти уравнение огибающей семейства прямых, на которых лежит отрезок $AB = l$, если его концы A и B скользят по осям координат (рис. 20, а).

Уравнение семейства: $\frac{x}{l \sin \alpha} + \frac{y}{l \cos \alpha} = 1$ или

$$F \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - l \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha - l \cos^2 \alpha + l \sin^2 \alpha = 0.$$

Исключая из этих уравнений α , имеем:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3},$$

т. е. огибающая — *астроида* (рис. 20, б, см. также стр. 136).

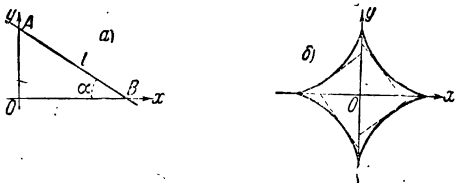


Рис. 20.

Б. Пространственные кривые

8. Аналитические задания кривой

Координатные уравнения. Пространственная кривая („линия двойной кривизны“) может быть задана уравнениями в одной из следующих форм:

а) Пересечение двух поверхностей:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

б) Параметрическая форма:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (2)$$

(t — любой параметр, в частности, $t = x, y$ или z).

в) Параметрическая форма:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \quad (3)$$

(s — длина дуги от некоторой точки A до текущей M).

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Векторные уравнения. Обозначая через $\mathbf{r}$ радиус-вектор любой точки кривой (см. стр. 461), представляем уравнение (2) в форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (2a)$$

где

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

и уравнение (3)—в форме:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad (3a)$$

где $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$.

Положительное направление на кривой, заданной уравнением (2) или (2a), соответствует увеличению параметра t , а на кривой, заданной уравнением (3) или (3a), — направлению отсчета длины дуги s .

9. Сопровождающий трехгранник

Определения. В каждой точке M пространственной кривой (кроме особых точек) определяются 3 прямые и 3 плоскости, взаимно пересекающиеся в M под прямыми углами (рис. 21):

1) *Касательная* — предельное положение секущей MN , когда $N \rightarrow M$ (см. рис. 2 на стр. 256).

2) *Нормальная плоскость* — перпендикуляр-

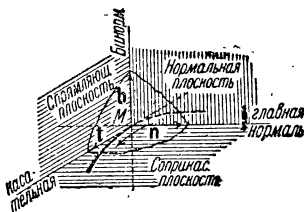


Рис. 21.



Рис. 22.

ная к касательной. Все прямые, проходящие через M и лежащие в этой плоскости, называются *нормальными* к кривой в точке M .

3) *Соприкасающаяся плоскость* — предельное положение плоскости, проходящей через 3 близкие точки кривой M , N и P , когда $N \rightarrow M$ и $P \rightarrow M$ (рис. 22). Соприкасающаяся плоскость содержит в себе касательную.

4) *Главная нормаль* — пересечение нормальной и соприкасающейся плоскостей (та из нормалей, которая лежит в соприкасающейся плоскости).

5) *Бинормаль* — прямая, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости.

6) *Спрямляющая плоскость* — содержащая касательную и бинормаль.

На 3 прямых 1), 4) и 5) устанавливаются положительные направления: на касательной оно соответствует направлению отсчета длины кривой и определяется единичным вектором $\mathbf{t}$ на главной нормали — в сторону вогнутости кривой и определяется единичным вектором $\mathbf{n}$; на бинормали определяется единичным вектором $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ ($\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ должны образовать правую тройку, см. стр. 42). Три вектора $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ вместе с соединяющими их плоскостями образуют *сопровождающий трехгранник* пространственной кривой.

Расположение кривой относительно трехгранника. В точках общего типа кривая расположена по одну сторону от спрямляющей плоскости и пересекает нормальную и соприкасающуюся плоскости (рис. 23, а).

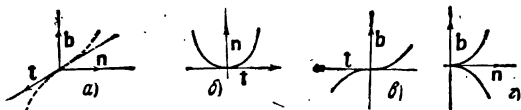


Рис. 23.

При этом проекции небольшого отрезка кривой, содержащего точку M , на плоскости трехгранника имеют вид:

- на соприкасающуюся плоскость — параболы (рис. 23, б),
- „ спрямляющую „ — кубической параболы (рис. 23, в),
- „ нормальную „ — полукубической параболы (рис. 23, г).

Если же в точке M кривизна или кручение кривой (см. ниже) равна нулю или точка является особой [$x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0$], то кривая может иметь и иное расположение (см. Феников, стр. 533 справочника).

Уравнение элементов трехгранника.

а) *Задание кривой в форме* (1) (стр. 272):

Касательная:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z-z & X-x \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

нормальная плоскость:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(x, y, z — координаты точки M кривой; X, Y, Z — текущие координаты касательной или нормальной плоскости, частные производные вычисляются в точке M).

б) *Задание кривой в форме* (2) или (2а) (см. стр. 272).

Элемент трехгранника	Векторное уравнение	Координатное уравнение
Касательная	$R = r + \lambda \frac{dr}{dt}$	$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$
Нормальная плоскость	$(R-r) \frac{dr}{dt} = 0$	$x'(X-x) + y'(Y-y) + z'(Z-z) = 0$
Соприкасающаяся плоскость	$(R-r) \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} = 0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$
Бинормаль	$R = r + \lambda \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & y'' \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$
Спрямолинейная плоскость	$(R-r) \frac{dr}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right) = 0$	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ l & m & n \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 0,$ где $l = y'z'' - y''z'$, $m = z'x'' - z''x'$, $n = x'y'' - x''y'$
Главная нормаль	$R = r + \lambda \frac{dr}{dt} \times \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \right)$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}}$

В формулах на стр. 275 $x, y, z, \mathbf{r}$ — координаты и радиус-вектор точки M кривой; $X, Y, Z, \mathbf{R}$ — текущие координаты и радиус-вектор элемента трехгранника; производные берутся по параметру t и вычисляются в точке M .

в) *Задание кривой в форме (3) или (3а) (см. стр. 272).*

Если в качестве параметра принята длина дуги s , то уравнения касательной, нормальной плоскости, соприкасающейся плоскости и бинормали будут такие же, как и в общем случае б), (t следует заменить на s), а уравнения главной нормали и спрямляющей плоскости упрощаются:

Элемент трехгранника	Векторное уравнение	Координатное уравнение
Главная нормаль	$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}$	$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}$
Спрямляющая плоскость	$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0$	$x''(X-x) + y''(Y-y) + z''(Z-z) = 0$

10. Кривизна и кручение

Кривизна кривой в точке M — число, характеризующее отклонение кривой (в малой ее части, заключающей

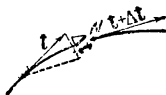


Рис. 24.

точку M) от прямой линии. Точное определение: кривизна $K = \lim_{MN \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta t}{\overset{\frown}{MN}} \right| = \left| \frac{dt}{ds} \right|$ (рис. 24). Радиус кривизны: $\rho = \frac{1}{K}$.

Формулы для вычисления K и ρ :

а) Задание в форме (3) (см. стр. 272):

$$K = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} \quad (*)$$

производные по s).

б) Задание в форме (2) (см. стр. 272):

$$K^2 = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2}{\left|\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\right|^2{}^3} =$$

$$= \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3} (**)$$

(производные по t).

K и ρ для пространственных кривых предполагаются всегда положительными.

Пример: Найти кривизну винтовой линии (рис. 25): $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$. Заменяем параметр t через s : $s = t \sqrt{a^2 + b^2}$, откуда

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$z = \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ и по фор-}$$

$$\text{муле (*): } K = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\rho = \frac{a^2 + b^2}{a} \text{ (постоян-}$$

ны). Тот же результат получим и без перехода к параметру s , применяя формулу (**).

Кривизна кривой в точке M — число, характеризующее отклонение кривой (в малой ее части, заключающей точку M) от плоской кривой. Точное определение: кривизна — число, определяемое формулой:

$$\tau = \lim_{MN \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta b}{\widehat{MN}} \right\} = \left| \frac{db}{ds} \right| \text{ (рис. 26).}$$

$$\text{Радиус кривизны } \tau = \frac{1}{T}.$$

Формулы для вычисления T и τ :

а) Задание в форме (3) (см. стр. 272):

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2 \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x''^2 + y''^2 + z''^2)^{3/2}} \quad (*)$$

(производные по s).

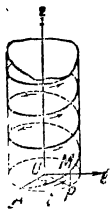


Рис. 25.



Рис. 26.

5) Задание в форме (2):

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2 \frac{\frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} \frac{d^3r}{dt^3}}{\left| \left(\frac{dr}{dt} \right)^3 \right|} = \rho^2 \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \quad \begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix}$$

[ρ вычисляется по формулам (*) или (**).

Кручение, вычисляемое по формулам (*) или (**), имеет знак + или -. Если $T > 0$, то кривая, с точки зрения наблюдателя, стоящего на главной нормали параллельно бинормали (см. рис. 21 на стр. 273), кажется закручивающейся справа вверх налево, подобно штопору. Если же $T < 0$, то кривая, с той же точки зрения, закручивается слева вверх направо.

Пример: Для винтовой линии:

$$T = \left(\frac{a^2 + b^2}{a} \right)^2 \frac{\begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix}}{[(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2]^2} = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

$$\rho = \frac{a^2 + b^2}{b} \quad (\text{постоянны}).$$

Формулы Серре-Френе. Производные векторов t , n и b по параметру s выражаются следующими формулами Серре-Френе:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{n}{\rho}, \quad \frac{dn}{ds} = \frac{t}{\rho} - \frac{b}{\tau}, \quad \frac{db}{ds} = -\frac{n}{\tau},$$

где ρ — радиус кривизны, а τ — радиус кручения.

В. Поверхности

11. Аналитические задания поверхности

Уравнение поверхности. Поверхность может быть задана уравнениями в одной из следующих форм:

а) неявная форма:

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

б) явная форма:

$$z = f(x, y), \quad (2)$$

в) параметрическая форма:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (3)$$

г) векторная форма:

$$\left. \begin{aligned} r &= r(u, v), \\ \text{или} \quad r &= x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k, \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Изменяя всевозможным образом параметры u и v , получаем радиус-вектор и координаты различных точек поверхности; исключая из (3) u и v , получаем форму (1). Форма (2) есть частный случай формы (3), в котором $u=x$, $v=y$.

Пример: Уравнение сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (1)$$

или

$$x = a \cos u \sin v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \cos v, \quad (3)$$

$$\mathbf{r} = a (\cos u \sin v \mathbf{i} + \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos v \mathbf{k}). \quad (3a)$$

Гауссовы координаты на поверхности. Если поверхность задана в форме (3) или (3a), то при фиксировании значения одного из параметров $v=v_0$ и изменения другого (u) точка $\mathbf{r} \{x, y, z\}$ опишет кривую, лежащую на поверхности: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$. Если давать v различные постоянные значения: $v=v_1, v=v_2, \dots$, то мы получим семейство кривых на поверхности; так как $v = \text{const}$ при движении вдоль каждой из кривых и изменяется только u , то эти кривые называются *u-линиями* (рис. 27). Аналогично, точка $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ опишет другую кривую; давая u различные постоянные значения: $u=u_1, u=u_2, \dots$, получим второе семейство кривых ($u = \text{const}$) — *v-линий*. Таким образом на поверхности (3) образуется сеть кривых — *координатных линий*, а два числа $u=u_i$ и $v=v_k$ являются *криво-*

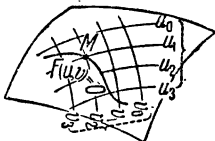


Рис. 27.

линейными или *гауссовыми координатами* точки M на поверхности. Для случая задания поверхности в форме (2) координатные линии суть сечения поверхности плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Всякое уравнение, связывающее эти координаты: $F(u, v) = 0$ или $u = u(t)$, $v = v(t)$, определяет некоторую кривую на поверхности. *Пример:* В параметрических уравнениях сферы (см. предыдущий пример) u — *долгота* точки ($u = \angle POx$), v — *полярное расстояние* точки ($v = \angle MOz$); u -линии — *меридианы* AMB , v -линии — *параллели* CMD (рис. 28).

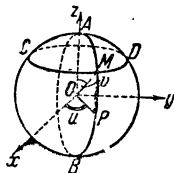


Рис. 28.

12. Касательная плоскость и нормаль

О п р е д е л е н и я. Если через данную точку поверхности $M(\mathbf{r}; x, y, z)$ провести на поверхности всевозможные кривые,

то касательные к ним в точке M , как правило, располагаются в одной плоскости — *касательной плоскости* к поверхности в точке M . (Исключение представляют так называемые конические точки поверхности, см. ниже).

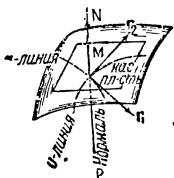


Рис. 29.

Прямая, проходящая через M перпендикулярно касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности в точке M (рис. 29). Касательная плоскость проложит через векторы $\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, касательные к u -линии и v -линии в точке M ; их векторное произведение $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ — вектор, параллельный нормали, а его орт $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$ называется *ортом нормали*. $\mathbf{N}$ направлен в ту или другую сторону от поверхности, в зависимости от того, какую из гауссовых координат, u или v , считать первой и какую — второй.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности см.: стр. 281.

Пример: Для сферы: $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$,

касательная плоскость:

$$2x(X-x) + 2y(Y-y) + 2z(Z-z) = 0$$

или

$$xX + yY + zZ = a^2,$$

нормаль:

$$\frac{X-x}{2x} = \frac{Y-y}{2y} = \frac{Z-z}{2z}$$

или

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Для сферы:

$$x = a \cos u \sin v,$$

$$y = a \sin u \sin v,$$

$$z = a \cos v;$$

касательная плоскость:

$$X \cos u \sin v + Y \sin u \sin v + Z \cos v = a,$$

нормаль:

$$\frac{X}{\cos u \sin v} = \frac{Y}{\sin u \sin v} = \frac{Z}{\cos v}.$$

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности		
Задание пов. рх- ности (стр. 278)	Касательная плоскость	Нормаль
(1)	$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0$	$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$
(2)	$Z-z = p(X-x) + q(Y-y)$	$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$
(3)	$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$	$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$
(3a)	$(R-r)r_1r_2=0$ или $(R-r)N=0$	$R=r+\lambda(r_1 \times r_2)$ или $R=r+\lambda N$

В этой таблице $x, y, z, \mathbf{r}$ — координаты и радиус-вектор точки M кривой; X, Y, Z, R — текущие координаты и радиус-вектор точки касательной плоскости или нормали; производные вычисляются в точке M ; $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Особые (конические) точки поверхности. Если для точек поверхности, заданной в форме (1) (см. стр. 278), одновременно (при $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1$),

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = F(x, y, z) = 0,$$

то точка $M(x_1, y_1, z_1)$ — особая (коническая); все касательные, проходящие через M , не лежат в одной плоскости, но образуют конус 2-го порядка, уравнение которого:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (X-x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (Y-y) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} (Z-z) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} (X-x)(Y-y) + \\ + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} (Y-y)(Z-z) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} (Z-z)(X-x) = 0; \end{aligned}$$

если одновременно обращаются в нуль все 6 частных производных 2-го порядка, то особая точка — более сложного типа (конус 3-го или более высокого порядка).

13. Линейный элемент поверхности

Дифференциал дуги. Если поверхность задана в форме (3) или (3а) (см. стр. 278), $M(u, v)$ — данная и $N(u+du, v+dv)$ — близкая к ней точка поверхности, то длина дуги MN на поверхности приближенно выражается дифференциалом дуги или линейным элементом поверхности по формуле:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (I)$$

$$\text{где } E = r_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = r_1 r_2 = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = r_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Формула (I) называется также *первой квадратичной формой* поверхности (2); ее коэффициенты E, F, G зависят от точки поверхности.

Пример: Для сферы:

$$r = a(\cos u \sin v \mathbf{i} + \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos v \mathbf{k}),$$

$$E = a^2 \sin^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2.$$

1-я квадратичная форма: $ds^2 = a^2(\sin^2 v du^2 + dv^2)$.

Для поверхности, заданной в форме (2) (см. стр. 278):

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad \text{где } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Измерения на поверхности. Длина дуги кривой линии $u=u(t)$, $v=v(t)$ на поверхности при $t_0 < t < t_1$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt. \quad (*)$$

Угол α между двумя кривыми (т. е. между касательными к ним), пересекающимися в точке M и имеющими направления векторов

$$d\mathbf{r} \{ du, dv \} \text{ и } \delta\mathbf{r} \{ \delta u, \delta v \}$$

(см. рис. 30), вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{d\mathbf{r} \delta\mathbf{r}}{\sqrt{(d\mathbf{r})^2 (\delta\mathbf{r})^2}} = \\ &= \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}. \quad (***) \end{aligned}$$

В частности, линии перпендикулярны, если числитель $(***)$ равен нулю; условие перпендикулярности координатных линий $v = \text{const}$ ($dv=0$) и $u = \text{const}$ ($du=0$): $F=0$.

Площадь поверхности S , ограниченной некоторой кривой на поверхности, вычисляется как двойной интеграл:

$$S = \int \int_S dS,$$

где

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (***)$$

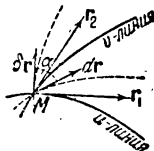


Рис. 30.

Таким образом, зная коэффициенты 1-й квадратичной формы E, F, G , мы можем производить измерения на поверхности по формулам $(*)$, $(**)$, $(***)$, т. е. 1-я квадратичная форма вполне определяет метрику поверхности.

Наложение поверхностей при изгибании. Если поверхность изгибать без растяжений и разрывов, то ее уравнение изменится, но метрика останется той же, т. е. 1-я квадратичная форма не изменится. Две различные поверхности, имеющие одну и ту же 1-ю квадратичную форму, могут быть путем изгибания наложены одна на другую.

14. Кривизна поверхности

Кривизна линий на поверхности. Если через точку M провести на поверхности различные кривые,

то в точке M радиусы кривизны ρ этих кривых Γ связаны между собой следующими соотношениями:

1) Радиус кривизны ρ кривой Γ равен радиусу кривизны кривой C — сечения поверхности плоскостью, соприкасающейся с кривой Γ в точке M (рис. 31, а).

2) Для каждого плоского сечения C его радиус кривизны

$$\rho = R \cos(\widehat{n, N}), \quad (M)$$

где R — радиус кривизны нормального сечения ($C_{\text{норм}}$), проходящего через ту же точку M и касательную PQ , что и C , а $(\widehat{n, N})$ — угол между ортом главной нормали n (см. стр. 273) кривой C и ортом нормали N к поверхности (теорема Мензье, рис. 31, б). В формуле (M) R берется со знаком плюс,

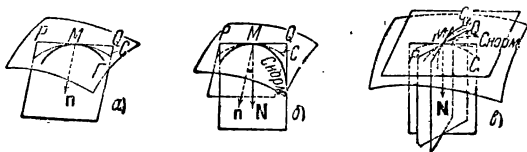


Рис. 31.

если N направлен в сторону вогнутости кривой $C_{\text{норм}}$, и минус, если — в сторону выпуклости.

3) Для каждого нормального сечения $C_{\text{норм}}$ его кривизна

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2}, \quad (Э)$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны, т. е. наибольшее и наименьшее значения R ; они получаются при главных нормальных сечениях поверхности C_1 и C_2 (см. ниже), а α — угол между плоскостями сечений C и C_1 (формула Эйлера, рис. 31, в). В формуле (Э) R , R_1 и R_2 берутся со знаком плюс или минус, определяемым как и в формуле (M).

Главные радиусы кривизны. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то R_1 и R_2 вычисляются, как корни квадратного уравнения:

$$(rt - s^2)R^2 + \sqrt{1 + p^2 + q^2} [2pq s - (1 + p^2)t - (1 + q^2)r]R + H^4 = 0, \quad (A)$$

$$\text{где } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

и

$$H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Плоскости главных нормальных сечений C_1 и C_2 взаимно перпендикулярны; их направления определяются отношением $\frac{dy}{dx}$ из квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} \bullet [tpq - s(1 + q^2)] \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)] \frac{dy}{dx} + \\ + [s(1 + p^2) - rpq] = 0. \end{aligned} \quad (B)$$

Если же поверхность задана параметрически $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, то уравнения, соответствующие (A) и (B), имеют вид:

$$(DD'' - D'^2)R^2 - (ED'' - 2FD' + GD)R + (EG - F^2) = 0, \quad (A')$$

$$(GD' - FD'')\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (GD - ED'')\frac{dv}{du} + (FD - ED') = 0, \quad (B')$$

где величины D, D', D'' — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности — определяются формулами:

$$D = \mathbf{r}_{11} \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$D' = \mathbf{r}_{12} \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$D'' = \mathbf{r}_{22} \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix};$$

здесь векторы $\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{22}$ — частные производные 2-го порядка от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по параметрам u и v .

Кривые на поверхности, имеющие в каждой точке направления главных нормальных сечений, называются *ли-*

ниями кривизны; их уравнения получаются интегрированием дифференциального уравнения (B) или (B').

Классификация точек поверхности. Если в точке M поверхности обе величины R_1 и R_2 (стр. 284) одного знака, то главные нормальные сечения обращены вогнутостями в одну сторону. В этом случае в области точки M поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости; такая точка поверхности называется *эллиптической* точкой (рис. 32, а), ее аналитический признак: $DD'' - D'^2 > 0$ (см. стр. 285). В частном случае при $R_1 = R_2$ точка называется *круговой* или *омбилической*; в ней для всех нормальных сечений $R = \text{const.}$

Если R_1 и R_2 разных знаков, то главные нормальные сечения обращены вогнутостями в противоположные стороны. В этом случае поверхность пересекается касательной плоскостью и имеет седлообразный характер; та-



Рис. 32.

кая точка поверхности называется *гиперболической* (рис. 32, б), ее аналитический признак: $DD'' - D'^2 < 0$.

Если R_1 или R_2 равен ∞ , то одно главное нормальное сечение имеет точку перегиба или является прямой линией; такая точка поверхности называется *параболической* (рис. 32, в), ее аналитический признак: $DD'' - D'^2 = 0$.

Примеры: Точки эллипсоида — эллиптические, однополостного гиперболоида — гиперболические, цилиндра — параболические.

Кривизна поверхности. Средней кривизной поверхности в точке M называется выражение

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right);$$

гауссовой или *полной кривизной* — выражение

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Примеры: Для круглого цилиндра радиуса a , $H = \frac{1}{2a}$,

$K = 0$. Для эллиптических точек $K > 0$, для гиперболических $K < 0$, для параболических $K = 0$.

15. Геодезические линии на поверхности

Понятие о геодезических линиях. Через каждую точку поверхности $M(u, v)$, в каждом направлении, определяемом отношением $\frac{dv}{du}$, проходит на поверхности определенная кривая—*геодезическая линия*,—которая играет для этой поверхности роль прямой линии: 1) при отсутствии внешних сил материальная точка движется по поверхности по геодезической линии; 2) упругая нить, натянутая на поверхности, принимает форму геодезической линии; 3) кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности—геодезическая линия.

О п р е д е л е н и е. Геодезической линией на поверхности называется такая кривая, главная нормаль которой в каждой точке совпадает с нормалью N к поверхности.

Пример: Для круглого цилиндра геодезическими являются винтовые линии.

У р а в н е н и е. Если поверхность задана в форме $z = f(x, y)$, то дифференциальное уравнение геодезических линий:

$$1 + p^2 + q^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \\ = pt \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + (2ps - qt) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (pr - 2qs) \frac{dy}{dx} - qr.$$

(обозначение p, q, r, s, t см. стр. 284).

Если поверхность задана в форме (3) (стр. 278), то дифференциальное уравнение геодезических линий имеет более сложный вид—см. Фиников (стр. 533 справочника).

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1. Функции

Функция одного переменного. Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x (*аргумента*), если при заданном значении x величина y принимает одно определенное значение (*однозначная* функция, например, $y=x^2$), или несколько определенных значений (*многозначная* функция, например, $y=\pm\sqrt{x}$ — двузначная функция от x). Символы $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ и т. д. обозначают различные функции переменной x ; $f(a)$ — то значение функции $f(x)$, которое она принимает при $x=a$; например, если $f(x)=x^2+2x-5$, то $f(3)=3^2+2\cdot 3-5=10$. Те значения x , для которых функция имеет действительные конечные значения* (в этом случае просто говорят: „функция определена“), образуют *область задания* (*область существования*) функции. В область задания не входят, в частности, те значения переменного, при которых функция: 1) принимает мнимые значения, 2) „обращается в бесконечность“ (см. стр. 300, типы разрывов функций), 3) принимает неопределенные значения (см. стр. 296, раскрытие неопределенностей).

Примеры: 1) $y=\sqrt{1-x^2}$; область существования $|x|\leq 1$ или $-1\leq x\leq 1$, 2) $y=\lg \cos x$; область существования:

$$-\frac{\pi}{2}<x<+\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(4n-1)\pi}{2}<x<\frac{(4n+1)\pi}{2}$$

при n целом.

Функция нескольких переменных — величина, принимающая определенные значения, если заданы значения нескольких, не зависящих друг от друга величин ($x, y, z, \dots$); обозначается $f(x, y)$, $F(x, y, z)$, ... Те системы значений переменных, для которых функция опре-

* Здесь идет речь о функциях действительного переменного; о функциях комплексного переменного см. стр. 454.

делена (см. выше), образуют область задания (существования) функции.

Примеры: 1) $y = \sqrt{1-x^2-y^2}$; область существования: $x^2 + y^2 \leq 1$, 2) $u = \frac{1}{xy}$; область существования: $xy \neq 0$.

Способы задания функции. Функция может быть определена формулой (например: $y = x^2 + 2x - 5$), таблицей (например таблицы тригонометрич. функций, см. стр. 58—63), графиком. Среди функций, определенных формулой, различаются: функции, заданные явно, когда дано выражение y через x ($y = f(x)$); неявно, когда x и y связаны между собой уравнением $[F(x, y) = 0]$, например $x^2 + y^2 - 1 = 0$ или $xy - xu = 0$, и параметрически, когда соответствующие друг другу значения выражены через некоторую третью величину t , называемую параметром [$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$], например $x = a \cos t$, $y = a \sin t$.

Элементарные функции — функции, определенные формулами, содержащими конечное число алгебраических или тригонометрических действий, производимых над независимыми переменными и некоторыми постоянными. В основном они разделяются на алгебраические и трансцендентные функции.

В алгебраических функциях независимая переменная x и ее функция y связаны между собой алгебраическим уравнением $F(x, y) = 0$; например $3xy^3 - 4xy + x^3 - 1 = 0$. Если уравнение удается алгебраически разрешить относительно y , то имеем один из следующих простых типов алгебраических функций.

1) Целая функция (многочлен или полином): над x производится только сложение, вычитание и умножение: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. В частности, $y = a$ (константа), $y = ax + b$ (линейная функция), $y = ax^2 + bx + c$ (квадратичная функция) — целые функции.

2) Дробная (рациональная) функция: над x производится сложение, вычитание, умножение и деление. Дробную функцию всегда можно представить в виде отношения двух целых:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}. \text{ В частности, } y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

носит название дробно-линейной функции.

3) Иррациональная функция: над x , кроме перечисленных в 2) действий, производится извлечение корня. Напри-

$$\text{мер: } y = \sqrt{2x+3}; y = \sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{x}}.$$

Трансцендентные функции — такие, в которых x и y не могут быть связаны алгебраической зависимостью $F(x, y) = 0$. Простейшие из них (элементарные трансцендентные функции):

1) *Показательные функции*: переменная x или ее алгебраическая функция находятся в показателе степени [например $y=e^x$; $y=a^x$; $y=2^{3x^2-5x}$].

2) *Логарифмические функции*: переменная x или ее алгебраическая функция находятся под знаком логарифма [например: $y=\ln x$; $y=\lg_{10} x$; $y=\lg(5x^2-3x)$].

3) *Тригонометрические функции*: переменная x или ее алгебраическая функция находятся под знаком $\sin$, $\cos$, tg , ctg , sc , csc [например: $y=\sin x$; $y=\cos(2x+3)$; $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}$]*.

4) *Обратные тригонометрические функции*: переменная x или ее алгебраическая функция находятся под знаком $\arcsin$, $\arccos$ и т. д. (например $\arcsin x$; $\arccos\sqrt{1-x}$).

Перечисленные функции, как и любые другие, могут всевозможным образом комбинироваться между собой: одна функция может служить аргументом для другой. Это — так называемые *сложные функции* $y=F[f(x)]$; например

$$y = \sin \ln x, \quad y = \operatorname{tg} \sqrt{1-x^2}, \quad y = \frac{\ln x + \sqrt{\arcsin x}}{x^2 + 5e^x} \quad \text{и т. д.}$$

Такие комбинации дают всевозможные элементарные функции. Графики простейших элементарных функций см. стр. 110—127.

Неэлементарные функции могут выражаться математическими формулами следующим образом:

1) Посредством перехода к пределу. Например:

$$\text{а) } y = 1 + \frac{x}{1} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \dots \quad (\text{ряды, см. стр. 306, 328}),$$

$$\text{б) } y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \quad (\text{ряды Фурье, см. стр. 491}),$$

$$\text{в) } y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot n^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)} \quad (\text{бесконечные произведения}),$$



Рис. 1.

$$\text{г) } y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}};$$

$$\text{в этом случае } y = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1 \\ 1/2 & \text{„ } |x| = 1 \\ 0 & \text{„ } |x| > 1 \end{cases}$$

график этой функции см. рис. 1.

* При этом считается, что величина, от которой берется тригонометрическая функция, представляет собой угол, выраженный в радианах.

2) Посредством неопределенных интегралов, не выражаемых через элементарные функции, например: $y = \int \frac{\sin x \, dx}{x}$,

$y = \int \sqrt{1-x^2} \, dx$, см. стр. 333*.

3) Посредством определенных интегралов, содержащих переменный параметр x , например, $y = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \, dt$ (см. стр. 185).

4) Посредством дифференциальных уравнений, решения которых не выражаются в квадратурах; например: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ (см. стр. 425-426)* и другими способами.

Важнейшие типы функций.

1) *Монотонные функции* — функции, удовлетворяющие одному из условий: $f(x_2) > f(x_1)$ при всяких $x_1 < x_2$ (монотонно возрастающая функция) (рис. 2, а) или $f(x_2) < f(x_1)$ при всяких $x_1 < x_2$ (монотонно убывающая функция) (рис. 2, б).

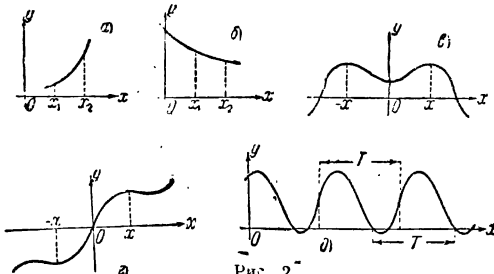


Рис. 2

2) *Четные функции*, удовлетворяющие условию $f(-x) = f(+x)$ (рис. 2, в), например: $y = \cos x$; $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

3) *Нечетные функции*, удовлетворяющие условию $f(-x) = -f(x)$ (рис. 2, г), например: $y = \sin x$; $y = x^3 - x$.

* Чтобы получить однозначное задание функции посредством интегралов или дифференциальных уравнений, следует в первом случае рассматривать определенный интеграл с пе-

ременным верхним пределом (например: $\int_0^x \frac{\sin x \, dx}{x}$), а во вто-
ом — фиксировать некоторые начальные условия.

4) *Периодические функции*, удовлетворяющие условию $f(x+T)=f(x)$; число T называется *периодом* функции (рис. 2, б). Например: $y=\sin x$; $y=\operatorname{tg} x$.

5) *Однородные функции* нескольких переменных — функции, $f(x, y, z, \dots)$, удовлетворяющие условию

$$f(tx, ty, tz, \dots) = t^n f(x, y, z, \dots);$$

число n называется *степенью однородности*. Например:

$$z = x^2 - 3xy + y^2 + x \sqrt{xy + \frac{x^2}{y}} \quad (n=2);$$

$$z = \frac{x+y}{2x-3y} \quad (n=0); \quad z = x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{y} \quad (n=2).$$

Зависимость двух функций двух переменных. Две функции от двух переменных, $z=f(x, y)$ и $u=\varphi(x, y)$, однозначно определенные в некоторой области Γ , называются *зависимыми* одна от другой, если одна из них может быть представлена как функция другой: $u=F(z)$, т. е. для каждой точки (x, y) области Γ имеет место тождество

$$\varphi(x, y) = F[f(x, y)], \quad (*)$$

и *независимыми*, если не существует такой функции F , при которой имело бы место (*). Например, две функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $u = (x^2 + y^2)^2$ зависимы: $u = z^4$. Аналитический признак независимости функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$: их *якобиан*, т. е. определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}, \text{ обозначаемый } \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)},$$

не должен обращаться тождественно в нуль.

Понятие зависимости функций аналогично распространяется на любое число n функций с n переменными.

2. Пределы

Предел числовой последовательности. Бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ имеет *предел* A (обозначается $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$), если эти числа подходят как угодно близко к числу A . *Точная формулировка:* $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, если, задавая произвольное, как угодно малое, положительное число ε , можно указать в данной последовательности такое число a_N , что все без исключения числа a_n , стоящие после a_N (т. е. при $n > N$), будут по

абсолютной величине отличаться от A меньше чем на ε : $|a_n - A| < \varepsilon$. Например: последовательность $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ имеет своим пределом 0 ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$); последовательность

$1, 2, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{5}{8}, 1\frac{7}{8}, \dots, 1 + \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}, 1 + \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}, \dots$ имеет

пределом $1\frac{1}{2}$; последовательность $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ не имеет предела; последовательность $1; 1\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}; 1\frac{1}{4}; 1\frac{3}{4}; 1\frac{5}{8}; 1\frac{7}{8}, \dots$ не имеет предела. Случай, когда предела не существует из-за того, что a_n безгранично возрастает по абсолютной величине, обозначают символом $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ («предел равен бесконечности»).

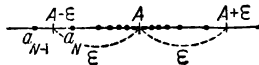


Рис. 3.

Если числа последовательности, имеющей предел A , изображать точками числовой прямой, то, начиная с a_N , все точки попадут в промежуток, ограниченный точками $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$ (рис. 3).

Необходимый и достаточный признак существования предела последовательности: Если при задании любого, сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой член a_N последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, что любые ее два члена, стоящие после a_N , будут отличаться друг от друга на число, меньшее ε , т. е.

$$|a_i - a_j| < \varepsilon \text{ при } i > N \text{ и } j > N,$$

то последовательность имеет предел.

Предел функции. Функция $y = f(x)$ имеет предел A при $x = a$ [обозначается $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$], если, при при-

ближении x к a , $f(x)$ подходит как угодно близко к числу A . (При самом значении $x = a$ функция может и не принимать значения A и вообще, может быть не определена.) Точная формулировка: $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если, задавая произвольное

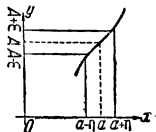


Рис. 4.

как угодно малое положительное число ε , можно указать такое положительное число η , что при любых значениях x в промежутке от $(a - \eta)$ до $(a + \eta)$ [кроме, быть может, значения $x = a$] соответствующие значения $f(x)$ будут находиться в промежутке от $(A - \varepsilon)$ до $(A + \varepsilon)$ (рис. 4).

Функция $f(x)$ имеет предел A при $x = a$, если при любой последовательности значений x ($x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$) которая имеет предел a , последовательность соответствующих зна-

чений функций $[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots]$ также стремится к некоторому пределу A . Если $f(x_n)$ не стремится ни к какому конечному пределу, то функция не имеет предела. При этом $f(x_n)$ может безгранично увеличиваться по абсолютной величине; в этом случае условно говорят, что $f(x)$ „стремится к бесконечности“ [обозначение $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ или,

менее точно, $f(a) = \infty$]; например $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty$; см. стр. 200 (типы разрывов функций).

Если $f(x_n)$ имеет предел A не при всякой последовательности x_n , а только при возрастающей ($x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$), то говорят, что $f(x)$ стремится к пределу A *слева*; это обозначается: $A = f(a-0)$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$,

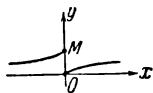


Рис. 5.

при убывающей последовательности x_n ($x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$), то $f(x)$ стремится к пределу A *справа* [$A = f(a+0)$].

Например функция $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$

стремится к различным пределам слева и справа: $f(0-0) = 1$, $f(0+0) = 0$ (рис. 5).

Предел функции при $x \rightarrow \infty$. Если при x , безгранично возрастающем по абсолютной величине ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$), последовательность значений $f(x_n)$ имеет предел A [$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$], то это коротко записывают в виде $A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ или $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Напри-

мер: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Если же $f(x_n)$ также безгранично возрастает, то предела при $x \rightarrow \infty$ нет (это условно обозначают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$); например: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$.

Основные теоремы о пределах:

- 1) предел постоянной величины:
 $\lim A = A$,
- 2) предел суммы (разности) конечного числа функций:
 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$,
- 3) предел произведения конечного числа функций:
 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x) \cdot \psi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$,

4) предел частного двух функций:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}, \text{ если только } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0,$$

5, если функция $f(x)$, заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$[\varphi(x) < f(x) < \psi(x)]$$

и если $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A$,

то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

В а ж н е й ш и е п р е д е л ы:

1) Число e : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828 \dots =$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \text{ (иррациональное число).}$$

Таблица величин, связанных с e , см. стр. 19. Число e служит основанием системы натуральных логарифмов (см. стр. 163).

2) Число $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) =$
 $= C \approx 0,5772$ („постоянная Эйлера“).

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, если x — длина дуги или угол, выраженный в радианах.

Вычисление пределов. Для вычисления пределов функций пользуются указанными выше основными теоремами, а также следующими приемами:

1) Преобразуют функцию к виду, для которого предел легко найти.

$$\text{Примеры: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin (2x)}{2x} = 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin (2x)}{2x} = 2 \text{ и т. п.}$$

2) В случаях, приводящих к „неопределенностям“ вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , применяют *правило Лопиталя*:

а) Для „неопределенностей“ вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Если $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ и $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, или $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ *. В случае, если окажется $\varphi'(a) = \psi'(a) = 0$ или ∞ , то применяют это правило вторично и т. д.

$$\text{Примеры: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \right)_{x=0} = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x} = \left(\frac{\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} \right)_{x=0} = \left(\frac{2 \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} \right)_{x=0} = \frac{\infty}{\infty};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = \left(\frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\cos^2 2x}} \right)_{x=0} = \left(\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \right)_{x=0} = 1. \text{ Следовательно, искомый предел} = 1.$$

б) Для „неопределенностей“ вида $0 \cdot \infty$. Если $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, а $\varphi(a) = 0$ и $\psi(a) = \infty$, то для нахождения предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ выражение преобразуют к виду $\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$

или $\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$, что приводит к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\text{Пример: } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\pi - 2x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{-2}{-1 : \sin^2 x} \right)_{x=\pi/2} = 2.$$

в) Для „неопределенностей“ вида: $\infty - \infty$. Если $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ и $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$, то для нахождения пре-

* При этом предполагается, что искомый предел существует.

дела выражение алгебраически преобразуют к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Это можно сделать различными способами

$$\left(\text{например: } \varphi - \psi = \frac{\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}}{\frac{1}{\varphi \cdot \psi}} \right).$$

$$\text{Пример: } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \ln x - x + 1}{x \ln x - \ln x} \right) = \frac{0}{0}.$$

Применяя дважды правило для случая а), получаем, что искомый предел равен

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{2}.$$

г) Для „неопределенностей“ вида 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . Если $f(x) = \varphi(x)^\psi(x)$ и $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, то сначала находят $\ln f(x) = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x)$, что приводит к виду $0 \cdot \infty$, а затем, найдя предел A этого выражения (случай б)), его потенцируют, т. е. вычисляют e^A .

$$\begin{aligned} \text{Пример: } \lim_{x \rightarrow 0} x^x &= X; \ln x^x = x \ln x; \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = (-x)_{x=0} = 0, \ln X = 0, X = 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

В случаях ∞^0 и 1^∞ поступают аналогично.

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\lg x} = X; \ln \left(\frac{1}{x} \right)^{\lg x} = -\lg x \ln x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-\lg x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} \right) = \left(\frac{\sin^2 x}{x} \right)_{x=0} = \frac{0}{0};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x} \right)_{x=0} = \left(\frac{2 \sin x \cos x}{1} \right)_{x=0} = 0; \ln X = 0, X = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\lg x} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = X; \quad \ln X = x \ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2};$$

$$\ln X = \frac{1}{2}, \quad X = \sqrt{e}. \quad \text{Следовательно, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \sqrt{e}.$$

Кроме правила Лопиталя, для раскрытия неопределенностей пользуются разложением функций в ряд Тейлора. Например:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \dots\right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. Бесконечно малые величины

О п р е д е л е н и я. Переменная величина называется *бесконечно малой*, если она имеет своим пределом нуль, т. е. принимает такие значения, что, начиная с некоторого момента, ее абсолютная величина делается и будет, все время оставаться меньше любого положительного числа ε . Из постоянных величин бесконечно малой является только нуль.

Если переменная величина имеет предел, равный бесконечности*, то она называется *бесконечно большой* величиной; в противном случае переменные величины называются *конечными* или *ограниченными*.

О с н о в н ы е с в о й с т в а: Если $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — бесконечно малые величины и a — конечная, то: 1) сумма или разность $\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \dots$ — бесконечно малая величина (если число слагаемых конечно); 2) произведение $\alpha \cdot \beta$ или $a \cdot \alpha$ — бесконечно малая; 3) частное $\frac{\alpha}{a}$ бесконечно малая (если

$a \neq 0$); 4) частное $\frac{\alpha}{\beta}$ может быть или бесконечно малой, или конечной, или бесконечно большой величиной.

Пример: $\alpha = \sin x, \beta = 1 - \cos x, \gamma = x^2$. При $x \rightarrow 0$ α, β и γ бесконечно малые величины; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0$,

* Точный смысл этого выражения — см. стр. 294.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$; следовательно, $\frac{\beta}{\alpha}$ — бесконечно малая, $\frac{\beta}{\gamma}$ — конечная, $\frac{\alpha}{\gamma}$ — бесконечно большая величина.

Порядок бесконечно малых. Две бесконечно малые имеют одинаковый порядок, если их отношение — конечная величина, не стремящаяся к нулю; если же $\frac{\alpha}{\beta}$ бесконечно мало, то α — бесконечно малая *высшего* порядка, чем β ; если $\frac{\gamma}{\alpha}$ — бесконечно большая, то $\frac{\alpha}{\gamma}$ — бес-

конечно малая и α имеет высший порядок, чем γ . Величины $\beta = 1 - \cos x$ и $\gamma = x^2$ имеют одинаковый порядок, β и γ имеют более высокий порядок, чем $\alpha = \sin x$. Если несколько бесконечно малых $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ сравниваются с одной λ , то α называется бесконечно малой m -го порядка по сравнению с λ , если порядок α такой же, что у бесконечно малой λ^m . Так, например, по сравнению с бесконечно малой $\lambda = x$, бесконечно малая $\alpha = \sin x$ первого порядка, а $1 - \cos x$ и x^2 — второго.

Равносильные бесконечно малые — бесконечно малые одинакового порядка, предел отношения которых равен 1. Например, бесконечно малые x и $\sin x$ при $x \rightarrow 0$ равносильные; бесконечно малые x^2 и $1 - \cos x$ — неравносильные. При отыскании предела отношения двух бесконечно малых каждую из них можно заменить равносильной бесконечно малой, не изменив этим предела.

4. Непрерывность функций

Понятие непрерывности и разрыва. Большинство функций, рассматриваемых на практике, являются *непрерывными*, т. е. у при небольших изменениях x изменяется также весьма мало, и график такой функции является „сплошной“, непрерывной кривой. В отдельных случаях непрерывность может нарушаться и график прерываться — функция претерпевает разрыв, а те значения x , при которых разрыв происходит, называются *точками разрыва*. На рис. 6 изображен график функций, непрерывных всюду за исключением точек разрыва A, B, C, D, E, F (буквы относятся к проекциям точек). Все элементарные функции (стр. 289) непрерывны, за исключением отдельных точек разрыва.

Определения. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке $x = a$* , если: 1) она определена при значе-

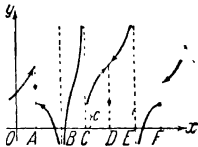


Рис. 6.

нии $x=a$, и 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Если функция непрерывна

при всех значениях x в промежутке от $x=a$ до $x=b$, то она называется *непрерывной на всем промежутке*. Для тех значений $x=a$, в которых функция или не определена совсем, или ее значение не совпадает со значением предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, функция претерпевает разрыв. Если $f(x)$ непре-

рывна во всех точках некоторого промежутка $a \leq x \leq b$ за исключением отдельных точек, в которых она претерпевает конечные разрывы (см. ниже), то такая функция называется *кусочно-непрерывной*.

Типы разрывов функций:

1) *Бесконечный разрыв* („обращение функции в бесконечность“): наиболее часто встречающийся случай (точки B , C , E , ... на рис. 6), например: $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty$, график см. стр. 123; $f(x) =$

$$= \frac{1}{(x-1)^2}, \quad f(1-0) = +\infty, \quad f(1+0) = +\infty; \quad f(x) = \frac{1}{e^x - 1},$$

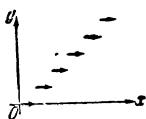


Рис. 7.

$f(1-0) = 0$, $f(1+0) = \infty$, функция при $x=1$ не определена.

2) *Конечный разрыв*: при переходе x через значение a функция „перескакивает“ от одного конечного значения к другому. Самое значение функции $f(a)$ при $x=a$ может быть совсем неопределено, может совпадать со значением $f(a-0)$ или $f(a+0)$ (точка F на рис. 6) и может быть отлично как от $f(a-0)$, так и $f(a+0)$ (точка A на рис. 6). Например:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}, \quad f(1-0) = 1, \quad f(1+0) = 0 \quad (\text{график аналогичен рис. 5 на стр. 294};$$

$f(x) = E(x)$ — „целая часть“ x ; при a целом $f(a-0) = a-1$, $f(a+0) = a$ (график см. рис. 7); $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$; $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$,

$$f(1) = \frac{1}{2} \quad (\text{график см. рис. 1 на стр. 230}).$$

3) *Устранимый разрыв*: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует: $f(a-0) = f(a+0)$, но при $x=a$ функция или совсем не определена, или имеет значение $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (точка D на рис. 6

(стр. 299)). Этот случай разрыва называется *устранимым*, так как, придавая $f(a)$ значение $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, мы делаем функцию

непрерывной. Различные случаи неопределенностей, раскрываемые правилом Лопиталья и другими способами (стр. 296—298) и дающие в результате конечный предел, представляют собой примеры устранимых разрывов; в этих случаях функции можно практически заменить непрерывными функциями.

Например: $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ при $x=0$ дает неопределенность $\frac{0}{0}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$; $f(x)$ будет непрерывна, если принять $f(0) = 1/2$.

Непрерывность и точки разрыва элементарных функций. О полном исследовании элементарных функций см. стр. 263; графики простейших функций см. стр. 110—127. Здесь даются лишь общие сведения о разрывах элементарных функций.

Целые функции (многочлены) непрерывны всюду.

Дробные функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$ [$P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены]

непрерывны всюду за исключением тех значений a , при которых $Q(a) = 0$, но $P(a) \neq 0$; в этом случае имеем бесконечный разрыв. Если a — корень как знаменателя, так и числителя, то имеем бесконечный разрыв в том случае, когда кратность корня знаменателя больше кратности корня числителя; в противном случае разрыв — устранимый.

Иррациональные функции. Радикалы (с целым показателем) из целых функций дают непрерывные функции при всех значениях x , при которых функция существует; радикалы из дробных функций разрывны при тех значениях x , при которых разрывна подкоренная функция*.

Тригонометрические функции. $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны всюду; $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{sec} x$ имеют бесконечный разрыв при $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{csc} x$ — бесконечный разрыв при $x = n\pi$ (n — целое).

Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$ и т. д. непрерывны при всех значениях x , при которых они существуют.

Показательная функция e^x или a^x ($a > 0$) непрерывна всюду.

Логарифмическая функция $\lg x$ обрывается при тех значениях, при которых выражение, стоящее под знаком $\lg$, обращается в 0, причем по одну сторону от обрыва $\lg$ стремится к $-\infty$, а по другую сторону не существует.

* Если функция $f(x)$ существует только по одну сторону от данного значения аргумента $x=a$ (например: $+\sqrt{x}$ при $x=0$; $\arccos x$ при $x=1$), то говорят не о разрыве, а об *обрыве* функции.

При произвольной сложной элементарной функции исследование разрыва производится при тех значениях x , при которых терпят разрывы простые функции, входящие в состав сложных, согласно перечисленным выше случаям.

Пример: определить разрывы функции $y = \frac{1}{e^{x-2} x \sin \sqrt[3]{1-x}}$.

Показатель $\frac{1}{x-2}$ разрывен при $x=2$; $e^{\frac{1}{x-2}}$ имеет при $x=2$ бесконечный разрыв: $\left(\frac{1}{e^{x-2}}\right)_{x=(2-0)} = 0$, $\left(\frac{1}{e^{x-2}}\right)_{x=(2+0)} = \infty$. Знаменатель выражения y при $x=2$ конечен; следовательно, при $x=2$ функция имеет бесконечный разрыв типа точки C на рис. 6. Знаменатель обращается в 0 при $x=0$ и при тех значениях x , которые обращают в нуль $\sin \sqrt[3]{1-x}$; эти последние соответствуют корням уравнения $\sqrt[3]{1-x} = n\pi$ или $x = 1 - n^3\pi^3$, где n — любое целое число. Ни при одном из этих значений числитель в нуль не обращается, и функция имеет при значениях $x=0$, $x=1$, $x=1 \pm \pi^3$, $x=1 \pm 8\pi^3$, $x=1 \pm 27\pi^3$, ... бесконечные разрывы типа точки E на рис. 6.

5. Числовые ряды

О п р е д е л е н и я. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ образуют бесконечную последовательность, называется *числовым рядом*; суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называются *частными суммами ряда*, а член a_n — *общим членом ряда*. Если последовательность частных сумм $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ имеет при $n \rightarrow \infty$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд называется *сходящимся*, а число S — *суммой ряда*; если предела не существует, то ряд *расходящийся*, причем S_n может неограниченно возрастать ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$) или быть колеблющейся величиной. Необходимый и достаточный признак сходимости ряда сводится, таким образом, к признаку существования предела последовательности (с элементами $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$) — см. стр. 293.

Примеры: Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, \quad (1)$$

сходящийся (геометрическая прогрессия), для него общий член $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Ряды:

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots, \quad (2)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \text{ (гармонический ряд) } (3)$$

$$1 - 1 + 1 - 1 \dots + (-1)^n + \dots \quad (4)$$

—расходящиеся. Для рядов (2) и (3) получим: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, ряд (4) — колеблющийся.

Необходимый признак сходимости: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (абсолютная величина членов ряда должна стремиться к нулю при неограниченном возрастании n). Этого недостаточно; например: в гармоническом ряде (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

Принцип сравнения рядов с положительными членами. Если два ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (A)$$

и

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (B)$$

имеют положительные члены и, начиная с некоторого места, $a_n \geq b_n$, то из сходимости ряда (A) следует сходимость ряда (B), а из расходимости ряда (B) — расходимость ряда (A). В этом случае ряд (A) по отношению к (B) называется *мажорантным*, ряд (B) по отношению к (A) — *минорантным*.

Примеры: ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (5)$$

сходящийся, так как ряд (1), мажорантный по отношению к (5), является сходящимся.

Ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots \quad (6)$$

расходящийся, так как ряд (3), минорантный по отношению к (6), — расходящийся.

Признаки сходимости рядов с положительными членами:

Признак Даламбера. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, то ряд сходится при $\rho < 1$ и расходится при $\rho > 1$. При $\rho = 1$ признак не дает ответа: ряд может сходиться и расходиться. Например: для ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots \quad (7)$$

$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$, и ряд (7) сходится; для ряда

$$2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{n+1}{n^2} + \dots \quad (8)$$

$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} : \frac{n+1}{n^2} = 1$, и признак не дает ответа.

Признаки Коши: 1) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, то ряд сходится при $\rho < 1$ и расходится при $\rho > 1$; при $\rho = 1$ признак также не дает ответа. Например: для ряда

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \dots \quad (9)$$

$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$, и ряд (9)

сходится.

2) Ряд с общим членом $a_n = f(n)$ сходится, когда несобственный (см. стр. 371) интеграл $\int_c^\infty f(x) dx$ сходится, и расходится, если этот интеграл не сходится. При этом нижний предел c берется произвольным, так чтобы функция $f(x)$ в промежутке от c до ∞ не имела разрывов. Например: для ряда (8) будет

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}, \quad \int_c^\infty \frac{x+1}{x^2} dx = \left[\ln x - \frac{1}{x} \right]_c^\infty;$$

интеграл расходится и, следовательно, ряд (8) расходится

Абсолютная и условная сходимости. Для установления сходимости ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (A)$$

члены которого имеют разные знаки, его сравнивают с рядом, составленным из абсолютных величин членов ряда (A):

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (B)$$

Если ряд (B) сходится, то и ряд (A) сходится (в этом случае ряд (A) называется *абсолютно сходящимся*); если же (B) расходится, то (A) может расходиться, но может и сходиться (в последнем случае он называется *условно сходящимся рядом*). Например, ряд

$$\frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{2^n} + \dots \quad (10)$$

сходится абсолютно, так как ряд с общим членом $\left| \frac{\sin n\alpha}{2^n} \right|$ минорантный по отношению к сходящемуся ряду (1) с общим членом $\frac{1}{2^n}$. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (11)$$

сходится условно (см. ниже), хотя ряд (3) с общим членом $|a_n| = \frac{1}{n}$ расходится.

Свойства абсолютно сходящихся рядов: 1) Абсолютно сходящиеся ряды можно складывать, вычитать, умножать, т. е. производить над ними действия как над обыкновенными многочленами, и сумма ряда, полученного в результате действий над абсолютно сходящимися рядами, будет равна результату тех же действий над суммами этих рядов. 2) В абсолютно сходящихся рядах члены можно переставлять местами, причем сумма ряда не будет меняться. Меняя же порядок членов в условно сходящемся ряде, можно изменить его сумму и даже сделать ряд расходящимся.

Знакопередающие ряды. Для сходимости ряда $a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_n \mp \dots$, где a_n — положительные числа, достаточно, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$ (признак Лейбница: абсолютные величины членов ряда должны убывать). Так, ряд (11) сходится: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$

Оценка остатка знакопередающегося ряда. Если ограничиться в знакопередающемся ряду n первыми членами,

то частная сумма S_n отличается по абсолютной величине от всей суммы S на величину, меньшую, чем первый отброшенный член: $|S - S_n| < |a_{n+1}|$. Так, в примере 3)

$$\text{см. ниже) } \left| \ln 2 - S_n \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Некоторые числовые ряды:

$$1) 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e$$

$$2) 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \mp \dots = \frac{1}{e}$$

$$3) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \mp \dots = \ln 2$$

$$4) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$5) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$$

$$6) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \pm \frac{1}{2^n} \mp \dots = \frac{2}{3}$$

$$7) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$8) 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \pm \frac{1}{n^2} \mp \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$9) 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$10) 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots \pm \frac{1}{n^4} \mp \dots = \frac{7\pi^4}{720}$$

6. Функциональные ряды

Определения. Ряд, составленный из функций от x : $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$, называется *функциональным*; те значения $x=a$, для которых числовой ряд $f_1(a) + f_2(a) + \dots + f_n(a) + \dots$ сходится, т. е. для которых существует предел $S(a)$ частных сумм $S_n(a)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(a) = S(a),$$

образуют область сходимости функционального ряда.

Функция $S(x)$ называется *суммой ряда* [ряд $\sum f_i(x)$ „сходится к функции $S(x)$ “].

Равномерная и неравномерная сходимости. По определению предела последовательности (стр. 292) ряд сходится в данной точке, если, каково бы ни было заданное малое положительное число ε , можно указать такое целое число N , что $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N$. При этом для функциональных рядов могут представиться два случая: 1) Число N может быть найдено *общим* для *всех* значений x , лежащих в области сходимости. В этом случае ряд $\sum f_i(x)$ называется *равномерно сходящимся* в данной области. 2) Такого общего числа для всех x , лежащих в области сходимости, нет [числа $N(x)$, определенные для каждого значения x , не имеют наибольшего]. В этом случае ряд $\sum f_i(x)$ *сходится* в данной области *не равномерно*.

Примеры: 1) Ряд $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ сходится для *всех* значений x , его сумма равна e^x (см. ниже). Эта сходимостъ—равномерная для любой *конечной* области изменения величины x . В самом деле, при $|x| < a$ имеем $|S(x) - S_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$, но $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ при достаточно большом n (не зависящем от x) может быть сделано меньше ε , так как $(n+1)!$ растет быстрее a^{n+1} . Для *всех* же значений x (от $-\infty$ до $+\infty$) этот ряд сходится *неравномерно*: какие бы n ни были устано-

влены, всегда можно найти такое x , что $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right|$ будет больше любого наперед заданного ε . 2) Ряд $x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \dots + x(1-x)^n + \dots$ сходится для *всех* значений x от 0 до 1, так как $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |1-x| < 1$ для $x > 0$ (а при $x=0$ $S=0$). Но эта сходимостъ *неравномерная*: $S(x) - S_n(x) = x[(1-x)^{n+1} + (1-x)^{n+2} + \dots] = (1-x)^{n+1}$, и какое бы ни было n , найдется такое малое x , что $(1-x)^{n+1}$ может быть сделано как угодно близким к 1, т. е. не будет $< \varepsilon$. В области же от 0 до 1 (a —положительная правильная дробь) ряд сходится *равномерно*.

* По формуле остаточного члена в ряде Маклорена, см. стр. 329.

Свойства равномерно сходящихся рядов: 1) Если $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \dots$ — непрерывные функции в некоторой области x и ряд $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ — равномерно сходящийся в некоторой области, то его сумма $S(x)$ — функция также непрерывная в этой области. Если же ряд сходится неравномерно в конечной области, то $S(x)$ может быть разрывной в этой области; так, в примере 2) сумма ряда разрывна: $S(x)$ равна нулю при $x=0$ и равна единице при $x>0$; в примере 1) функция e^x непрерывна, ибо ряд сходится неравномерно лишь во всей бесконечной области.

2) Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать, и сумма ряда интегралов равна интегралу суммы данного ряда.

Степенные ряды — функциональные ряды вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (\text{A})$$

или вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots, \quad (\text{B})$$

где a_i — постоянные коэффициенты.

Основные свойства степенных рядов:

1) Ряд (A) абсолютно сходится для всех значений x , по абсолютной величине меньших некоторого числа ρ ($|x| < \rho$), называемого *радиусом сходимости* степенного ряда. Для ряда (B) абсолютная сходимость имеет место для x , удовлетворяющих равенству $|x-a| < \rho$. Радиус сходимости может быть определен по формулам:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad \frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

На границах области сходимости (для ряда (A) при $x=\pm\rho$, для ряда (B) при $x=a+\rho$, $x=a-\rho$) ряд может сходиться или расходиться. 2) Если ряд (A) сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно внутри промежутка $(-x_1, +x_1)$ (*теорема Абеля*).

Пример: Ряд $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ имеет

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1, \text{ т. е. } \rho=1, \text{ и ряд сходится абсолютно}$$

для $-1 < x < +1$, причем при $x=-1$ ряд сходится условно [ср. ряд (11) на стр. 305], а при $x=1$ — расходится [ср. ряд (3) на стр. 303]. По теореме Абеля ряд сходится равномерно для области от $-x_1$ до $+x_1$, где x_1 — любое число, меньшее 1.

Разложение функций в ряды: степенные — см. стр. 3-8, тригонометрические — см. стр. 401.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Основные понятия

Производная функции $y=f(x)$ одной переменной — новая функция от x [обозначения: y' , y' , Dy , $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, $Df(x)$], равная при каждом значении x пределу отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx , когда Δx стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной: если $f(x)$ изображена кривой в декартовых координатах, то $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол, который касательная к кривой в данной точке образует с положительным направлением оси x (рисунок 1). Производная *существует* при тех значениях x , где указанное отношение имеет конечный предел, не зависящий от знака Δx ; она не существует в точках разрыва функции; в тех же точках, где функция непрерывна, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ может также не иметь конечного предела; производной при таких значениях x не существует.

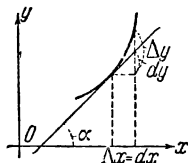


Рис. 1.

Например: 1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(0) = \infty$ (рис. 2, а); 2) $f'(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $f'(0)$ неопределенна (рис. 2, б). Если $\Delta y/\Delta x$ при $x \rightarrow a$ стремится к различным пределам, когда Δx имеет разные знаки, то мы имеем *производную, сле-*

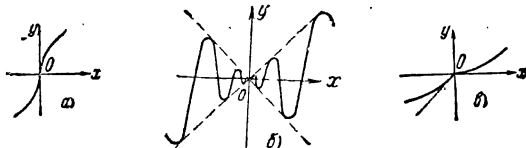


Рис. 2.

д. $f'(a-0) = \operatorname{tg} \alpha_1$ и *производную справа* $f'(a+0) = \operatorname{tg} \alpha_2$; в этом случае кривая имеет излом. Например, $y = x(x + e^{1/x})$ при $x=0$: $f'(-0)=1$, $f'(0)=0$ (рис. 2, в). Элементарные функции имеют производную при всех x , за

исключением некоторых точек, где могут быть случаи указанного типа.

Частная производная функции нескольких переменных $u=f(x, y, z)$ по одной из них, например, по x (обозначения: $\frac{\partial u}{\partial x}$, u'_x , $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x) определяется равенством:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x};$$

приращение получает одна из независимых переменных. Функция n переменных имеет n частных производных: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, ... Вычисление частной производной производится по правилам дифференцирования функции одного переменного (стр. 313—318), причем остальные переменные рассматриваются в данном случае как постоянные.

Например: $u = \frac{x^2 y}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}$.

Геометрический смысл частной производной двух переменных: если $z=f(x, y)$ изображена поверхностью в декартовых координатах, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол, который ка-

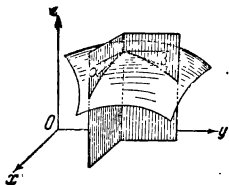


рис. 3.

сательная к поверхности в данной точке, лежащая в плоскости, параллельной плоскости xOz , образует с положительным направлением оси x . Аналогично, $\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$ (рис. 3; на этом рисунке оба угла α и β отрицательны).

Производная в данном направлении и объемная производная см. в теории поля (стр. 474 и 483).

Дифференциалы переменных величин x , y и т. д. определяются различно, в зависимости от того, является ли величина независимой переменной или функцией. Дифференциал независимой переменной — ее приращение, которому можно придавать любое значение ($dx = \Delta x$). Дифференциал функции $y=f(x)$ одной переменной при данном значении x и данном дифференциале dx — произведение $f'(x)$ на dx :

$$dy = f'(x) dx.$$

Геометрический смысл дифференциала: При изображении функции кривой в декартовых координатах dy изображает приращение, которое получает ордината касательной к кривой в данной точке x при данном приращении dx (см. рис. 1).

Основные свойства дифференциала: 1) Инвариантность относительно переменной: выражение $du = f'(x) dx$ остается неизменным, будет ли x независимой переменной или в свою очередь — функцией новой переменной t . 2) Порядок малости: если dx есть бесконечно малая величина, то du и Δu — равносильные бесконечно малые ($\lim \frac{\Delta u}{du} = 1$), и разность между ними $\varepsilon = du - \Delta u$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем dx , du , Δu . Это свойство позволяет при вычислении малых приращений функции заменять их дифференциалами; оно применяется как в приближенных вычислениях (стр. 143), так и в дифференциальном и интегральном исчислении.

Частный дифференциал функции нескольких переменных $u = f(x, y, z)$ по одной из переменных, например по x (обозначается $d_x u$, $d_x f$), определяется равенством:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Полный дифференциал функции нескольких переменных $u = f(x, y, \dots)$ — сумма всех ее частных дифференциалов по всем переменным*:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots \quad (A)$$

Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных $z = f(x, y)$, изображенной поверхностью в декартовых координатах: dz равно приращению аппликаты касательной плоскости в данной точке, если x и y получили приращения dx и dy (рис. 4). Основные свойства полного дифференциала аналогичны свойствам дифференциала одной переменной: 1) инвариантность выражения (A) относительно входящих в него переменных, 2) порядок малости: дифференциал du и приращение $\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, \dots) - f(x, y, z, \dots)$ — равносильные бесконечно малые, и разность между ними ($\varepsilon = du - \Delta u$) бесконечно малая более высокого порядка.

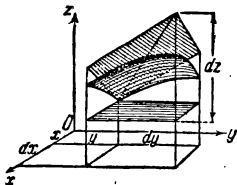


Рис. 4.*

Линейность дифференциальных выражений. Дифференциалы переменных, связанных между собой произвольной функциональной зависимостью (конечны и

* Иначе, в векторной форме: $du = \text{grad } u \cdot dr$. Об этом см. в теории поля, стр. 475.

уравнениям), связаны друг с другом всегда *линейной зависимостью* (дифференциальным уравнением). Это относится как к дифференциалам независимых переменных, так и к дифференциалам функций одной или нескольких переменных (частным и полным).

Получение дифференциального уравнения из конечного называется *дифференцированием*. (В более узком смысле под дифференцированием понимают просто нахождение производной или дифференциала.)

Производные и дифференциалы высших порядков.

Вторая производная от функции одной переменной $y=f(x)$ (обозначается: y'' , D^2y , $\frac{d^2y}{dx^2}$ *, $f''(x)$, $D^2f(x)$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ *) — производная от производной: $f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$.

Аналогично определяются производные любого порядка (обозначаются: y''' , D^3y , $\frac{d^3y}{dx^3}$ *, $f^{(IV)}(x)$, $D^n f(x)$, $\frac{d^5f(x)}{dx^5}$).

Частная производная 2-го порядка от функции $u=f(x, y, z)$ может быть взята по той же переменной, что и первая ($\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) или же — по другой ($\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$); в последнем случае смешанная производная не зависит от порядка переменных, по которым берутся производные ($\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$), если только эти производные непрерывны при данных значениях x и y . Аналогично — для частных производных любого порядка ($\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z}$, ...).

Второй дифференциал функции одной переменной $y=f(x)$ обозначается d^2y , $d^2f(x)$ и представляет собой дифференциал от первого дифференциала: $d^2y = d(dy) = f''(x) dx^2$ **.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков: $d^3y = d(d^2y) = f'''(x) dx^3$ **, $d^n y$.

Полный дифференциал 2-го порядка от функции $u=f(x, y)$:

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 ** = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 u; \end{aligned}$$

* Это обозначение пригодно только в случае, когда x — независимая переменная.

** В случае, когда $x=\varphi(t)$, формулы более сложные. См. об этом стр. 321–323 (замена переменных).

$d^n u$ вычисляется аналогично по символической формуле

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u^*.$$

Для функции большего числа переменных $u = f(x, y, z, \dots)$

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz + \dots \right)^n u^*.$$

2. Техника дифференцирования

Общие указания. Пользуясь приведенными ниже правилами дифференцирования и таблицей производных, можно найти производную любой элементарной функции. Наиболее существенное значение имеет правило дифференцирования функции от функции („цепное правило“, стр. 315); техника его применения разъяснена на следующем примере:

$$\begin{aligned} \text{Пример: } y &= e^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}; \quad \frac{dy}{dx} = e^{\operatorname{tg} \sqrt{x}} \cdot \frac{d(\operatorname{tg} \sqrt{x})}{dx} = \\ &= e^{\operatorname{tg} \sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \frac{d\sqrt{x}}{dx} = e^{\operatorname{tg} \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{e^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Прежде чем дифференцировать, целесообразно, если возможно, преобразовать функцию к виду суммы, раскрывая скобки (стр. 155), выделяя из дроби целую часть (стр. 157), логарифмируя выражение (стр. 164) и т. п.

$$\text{Примеры: 1) } y = \frac{2 - 3\sqrt[3]{t} + 4\sqrt[3]{t} + t^2}{t} =$$

$$= \frac{2}{t} - 3t^{-1/2} + 4t^{-2/3} + t,$$

$$\frac{dy}{dx} = -2t^{-2} + \frac{3}{2}t^{-3/2} - \frac{8}{3}t^{-5/2} + 1;$$

$$2) y = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2-1),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2-1} = -\frac{2x}{x^4-1}.$$

* В случае, когда x и y сами являются функциями новых переменных, формулы более сложные. См. стр. 321—323.

Основные правила дифференцирования

u, v, w — функции независимой переменной x ; u', v', w' — производные этих функций по x .

Название	Функция $y = f(x)$	Производная $\frac{dy}{dx}$	Дифференциал dy
Сумма (разность) нескольких функций	$u + v - w + \dots$	$u' + v' - w' + \dots$	$du + dv - dw + \dots$
Произведение двух функций * .	uv	$uv' + vu'$	$u dv + v du$
Функция с постоянным множителем	cu	cu'	$c du$
Отношение двух функций (дробь)	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$	$\frac{v du - u dv}{v^2}$
Функция в n -й степени	u^n	$nu^{n-1}u'$	$nu^{n-1} du$
Квадратный корень из функции	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{du}{2\sqrt{u}}$

Логарифм функции	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{du}{u}$
Сложная показательная функция	u^v	$vu^v - 1 \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$	$vu^v - 1 du + u^v \ln u \cdot dv$
Функция от функции	$f(u)$	$f'(u) u'$	$f'(u) du$
„Цепное правило“	$\begin{cases} y = f(u), \\ u = \varphi(v), \\ v = \psi(x) \end{cases}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$	$f'(u) du$

(в случае „цепи“ из большего числа функций — аналогично)

* В случае произведения большего числа функций формулы производных аналогичны; так например, $(uvw)' = uvw' + uwv' + vwu'$. Но практически в этом случае применяют метод „логарифмической производной“ (так называется выражение $\frac{y'}{y}$); например $y = \sqrt{x^3} e^{4x} \sin x$, $\ln y = \frac{1}{2} (3 \ln x +$

$$+ 4x + \ln \sin x), \quad \frac{d \ln y}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \left(\frac{3}{x} + 4 + \operatorname{ctg} x \right), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2} x + 2 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x}{\sqrt{x^3} e^{4x} \sin x}.$$

Таблица производных элементарных функций

Функция	Производная	Функция	Производная
C (постоянная)	0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	nx^{n-1}	$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\operatorname{arccg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arccsc} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
e^x	e^x	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
e^{mx}	me^{mx}	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
a^{mx}	$ma^m x \ln a$	$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\lg a$	$\frac{1}{x} \lg a$ $e = \frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\lg_{10} x$	$\frac{1}{x} \lg_{10} e \approx \frac{0,4343}{x}$	$\operatorname{Arctg} x$	$-\frac{1}{1-x^2}$
$\sin x$	$\cos x$		
$\cos x$	$-\sin x$		
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$		
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x$		
$\sec x$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$		
$\operatorname{csc} x$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{csc} x$		

Производные высших порядков
(просгейшие)

Функция	n -я производная
x^m	$m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) x^{m-n}$ (при целом m и $n > m$ производная = 0)
$\frac{1}{x^m}$	$(-1)^n m(m+1)(m+2) \dots$ $\dots (m+n-1) \cdot \frac{1}{x^{m+n}}$
$\sqrt[n]{x}$	$(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{m^n} (m-1)(2m-1) \dots$ $\dots [(n-1)m-1] \frac{1}{m \sqrt[n]{x^{mn-1}}}$
$\ln x$	$(-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{x^n}$
$\lg_a x$	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(\ln a)^n} \frac{1}{x^n}$
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
a^x	$(\ln a)^n a^x$
a^{kx}	$(k \ln a)^n a^{kx}$
$\sin x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\sin kx$	$k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos kx$	$k^n \cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\operatorname{sh} x$	$\begin{cases} \operatorname{sh} x & \text{при } n \text{ четном} \\ \operatorname{ch} x & \text{при } n \text{ нечетном} \end{cases}$
$\operatorname{ch} x$	
Произведение двух функций (формула Лейбница):	
$D^n(uv) = u \cdot D^n v + \frac{n}{1} Du \cdot D^{n-1} v +$ $+ \frac{n(n-1)}{2} D^2 u \cdot D^{n-2} v + \dots + D^n u \cdot v.$	

Производная неявной функции, заданной уравнением $f(x, y) = 0$, определяется из уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} Dy = 0;$$

$$Dy = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}; \quad (*)$$

$D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} Dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (Dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} D^2y = 0.$$

Производная функции, заданной параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$ (штрихами обозначены производные по t):

$$Dx = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'},$$

$$D^2y = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3},$$

$$D^3y = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5}, \dots$$

Производная обратной функции $x = \varphi(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = - \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3},$$

$$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} \frac{d^3y}{dx^3}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^5}, \dots$$

Графическое дифференцирование. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ изображена графиком (Γ) на некотором промежутке $a < x < b$, то график ее производной (Γ') может быть приближенно построен следующим способом.

Предварительная задача: построение касательной к заданной точке кривой может быть осуществлено „на-глаз“ счень неточно; если же задано направление

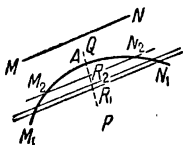


Рис. 5.

правление касательной (MN, рис. 5), то точка прикосновения A может быть построена точнее. Проводим две хорды M_1N_1 и M_2N_2 , параллельные MN, чтобы они пересекли кривую в близких точках, построим середины R_1 и R_2 этих хорд и проведем через R_1 и R_2 прямую PQ; последняя пересечет кривую в точке A, касательная в которой (приближенно) имеет заданное направление.

Для контроля правильности этого построения можно провести третью хорду, которая должна пересекаться прямой PQ в середине.

Построение графика производной. 1) Задавая несколько направлений ($l_1, l_2, \dots$), касательных к кривой $y=f(x)$ (рис. 6), чтобы они соответствовали (на-глаз) рассматри-

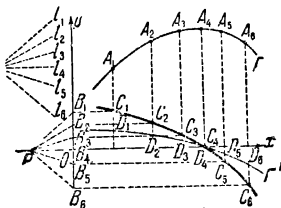


Рис. 6.

ваемому промежутку кривой, определяем точки прикосновения $A_1, A_2, \dots$ предыдущим построением (самих касательных можно не строить).

2) На отрицательной части оси Ox выбираем произвольную точку P („полюс“); отрезок $PO=a$ должен быть тем больше, чем более отлого идет кривал.

3) Из полюса P проводим прямые $PB_1, PB_2, \dots$ параллельно направлениям $l_1, l_2, \dots$ до пересечения с осью Oy в точках $B_1, B_2, \dots$.

4) Через $B_1, B_2, \dots$ проводим горизонтальные прямые $B_1C_1, B_2C_2, \dots$ до пересечения в точках $C_1, C_2, \dots$ с соответствующими ординатами точек $A_1, A_2, \dots$.

5) Точки $C_1, C_2, \dots$ соединяем плавной кривой; ее уравнение будет $y=af'(x)$; при $a=1$ это и будет искомым график производной.

6) Если $a \neq 1$, то строим точки $D_1, D_2, \dots$, ординаты которых равны ординатам точек $C_1, C_2, \dots$, разделенным на a ($a=PO$ на рис. 6; кривая Γ' и есть график производной).

3. Замена переменных в дифференциальных выражениях

Функция одного переменного.

Если

$$y = f(x),$$

и имеется выражение

$$H = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots\right),$$

содержащее аргумент, функцию и ее производные, то, в случае замены переменных новыми, производные вычисляются по следующим формулам:

1) В случае замены независимой переменной x на t , связанную с x формулой $x = \varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{[\varphi'(t)]^3} \left\{ \varphi'(t) \frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t) \frac{dy}{dt} \right\}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{1}{[\varphi'(t)]^5} \left\{ [\varphi'(t)]^2 \frac{d^3y}{dt^3} - 3\varphi'(t) \varphi''(t) \frac{d^2y}{dt^2} + \right. \\ &\quad \left. + [3\varphi''(t)^2 - \varphi'(t) \varphi'''(t)] \frac{dy}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

2) В случае замены функции y на u , связанную с y формулой $y = \varphi(u)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi'(u) \frac{du}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \varphi'(u) \frac{d^2u}{dx^2} + \varphi''(u) \left(\frac{du}{dx} \right)^2, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \varphi'(u) \frac{d^3u}{dx^3} + 3\varphi''(u) \frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dx^2} + \varphi'''(u) \left(\frac{du}{dx} \right)^3. \end{aligned}$$

3) В случае замены x и y на t и u , связанные с x и y формулами $x = \varphi(t, u)$, $y = \psi(t, u)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{du}{dt}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dt}},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{du}{dt}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dt}} \right) = \\ &= \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dt}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{du}{dt}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dt}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{B} \frac{d}{dt} \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{1}{B^2} \left(B \frac{dA}{dt} - A \frac{dB}{dt} \right),\end{aligned}$$

где $A = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{du}{dt}$, $B = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dt}$.

Например, при преобразовании декартовых координат в полярные по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi}{\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)^3}.$$

Функция двух переменных x . Если $\omega = f(x, y)$ и имеется выражение

$$H = F \left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \dots \right).$$

содержащее аргументы, функцию и ее частные производные, то в случае замены переменных x, y на новые u, v , связанные с x, y формулами $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, частные производные $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ находятся из системы уравнений:

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y},$$

откуда получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = A \frac{\partial \omega}{\partial u} + B \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = C \frac{\partial \omega}{\partial u} + D \frac{\partial \omega}{\partial v},$$

где A, B, C, D —функции от u, v . Вторые частные производные вычисляются по этим же формулам, но примененным не к функции ω , а к $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ и $\frac{\partial \omega}{\partial y}$; например:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \omega}{\partial u} + B \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) =$$

$$= A \left(A \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) + \\ + B \left(A \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + B \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial \omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v} \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) \text{ и т. д.}$$

Пример: выразить оператор Лапласа *

$$\Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

в полярных координатах: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Имеем:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \sin \varphi, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \rho \sin \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial y} \rho \cos \varphi;$$

отсюда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right) - \\ - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right).$$

Аналогично вычисляя $\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$, получаем

$$\Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho}.$$

Для функции большего числа переменных формулы записаны получаются подобным же образом.

4. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ролля. Если однозначная функция $y=f(x)$ равна нулю при $x=a$ и при $x=b$ [$f(a)=f(b)=0$], непрерывна и имеет непрерывную производную в промежутке от a до b , то существует по меньшей мере одно такое число c между a и b , что $f'(c)=0$.

Геометрический смысл. Если кривая, являющаяся графиком функции $y=f(x)$, пересекает ось x в двух точках A и B , непрерывна и имеет непрерывно поворачивающуюся касательную на всем протяжении от A до B , то существует

* См. стр. 481.

по меньшей мере одна точка C между A и B , в которой касательная параллельна оси x (рис. 7, а). В случае разрыва функции или ее производной такой точки может и не быть (рис. 7, б и в).

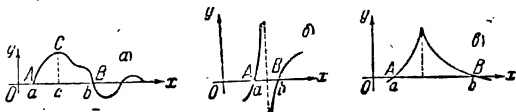


Рис. 7.

Теорема Лагранжа „о конечном приращении“. Если функция $y=f(x)$ и ее производная $f'(x)$ в промежутке от $x=a$ до $x=b$ непрерывны, то существует по меньшей мере одно такое число c между a и b , что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

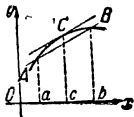


Рис. 8.

В иных обозначениях (полагая $b=a+h$ и обозначая через θ некоторую положительную правильную дробь, $0 < \theta < 1$):

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h).$$

Геометрический смысл: между точками A и B существует такая точка C , касательная к которой параллельна хорде AB (рис. 8).

Теорема Тэйлора. Если функция $y=f(x)$ в промежутке от $x=a$ до $x=a+h$ непрерывна и имеет непрерывные производные от 1-й до n -й включительно, то имеет место равенство (*формула Тэйлора*).

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \\ &+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h), \end{aligned}$$

где θ —некоторая положительная правильная дробь ($0 < \theta < 1$).

Теорема Коши. Если две функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ в промежутке от $x=a$ до $x=b$ непрерывны и имеют непрерывные производные, причем $\varphi'(x)$ не обращается в нуль, то существует такое число c между a и b , что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

5. Нахождение максимума и минимума *

Функция одной переменнoй (в явной форме). Максимум (М) и минимум (м) функции $y=f(x)$ — такое ее значение $f(x_1)$, для которого имеет место неравенство $f(x_1+h) < f(x_1)$ — в случае М — или $f(x_1+h) > f(x_1)$ — в случае м — при малых значениях h независимо от знака h , т. е. $f(x_1)$ больше (меньше) соседних значений функции. Если функция и ее производная непрерывны, то на графике функции касательная в точке М или м параллельна оси x [необходимое, но недостаточное условие: в точке перегиба А нет ни М, ни м (рис. 9)]. Для нахождения М и м [если $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны] находят производную $f'(x)$, ищут корни $x_1, x_2, x_3, \dots$ уравнения $f'(x)=0$ и и следуют каждый корень этого уравнения одним из следующих двух способов:

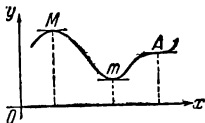


Рис. 9.

1) Определяется знак $f'(x)$ при x , немного меньших и немного больших чем x_1 и отстоящих от x_1 на таком расстоянии, что между x и x_1 нет больше корней уравнения $f'(x)=0$. Если знак $f'(x)$ при этом переходит от „+“ к „-“, то при $x=x_1$ имеем М для $f(x)$; если же от „-“ к „+“, то имеем м; если знак не изменяется, то имеем точку перегиба.

2) Подставляют каждый из корней во вторую производную $f''(x)$. Если $f''(x_1) < 0$, то при $x=x_1$ имеем М, если $f''(x_1) > 0$, то имеем м, если же $f''(x_1)=0$, то подставляют x_1 в третью производную. Если в этом случае $f'''(x_1) \neq 0$, мы при $x=x_1$ не имеем ни М, ни м функции (точка перегиба), если же $f'''(x_1)=0$, то подставляем x_1 в 4-ю производную и т. д.

Общее правило: корень x_1 уравнения $f'(x)=0$ подставляем последовательно во все дальнейшие производные и смотрим, какая из производных первая не будет равна нулю. Если эта производная четного порядка, то функция при $x=x_1$ имеет М или м (в зависимости от того, будет ли эта производная соответственно меньше или больше нуля). Если же эта производная нечетного порядка, то функция не имеет при $x=x_1$ ни М, ни м.

Для отыскания *наибольшего и наименьшего значений*, которые функция принимает в данном промежутке $a \leq x \leq b$, отыскивают: 1) все ее М и м внутри этого промежутка, по указанному правилу, а также 2) исследуют функцию: на концах промежутка, в точках разрыва функции и в точках разрыва ее производной. Искомые значения находятся в одной из рассмотренных точек.

* В анализе понятия максимума и минимума объединяются словом „экстремум“ (крайний).

Примеры (отыскание наибольшего значения):

а) $y = e^{-x^2}$ при $-1 \leq x \leq 1$; наибольшее значение — в точке $x = 0$ (максимум, рис. 10, а),

б) $y = x^3 - x^2$ при $-2 \leq x \leq +2$; наибольшее значение — в точке $x = 2$ (правый конец промежутка, рис. 10, б),

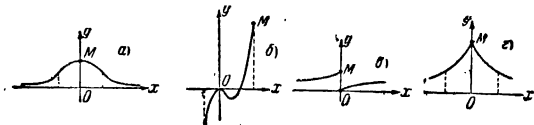


Рис. 10.

в) $y = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ при $-1 \leq x \leq +1$; наибольшее значение — в точке $x = 0$ (разрыв функции, рис. 10, в),

г) $y = 2 - x^{2/3}$ при $-1 \leq x \leq +1$; наибольшее значение — в точке $x = 0$ (разрыв производной, рис. 10, г).

Неявная функция. Для нахождения M и m функции $y = \varphi(x)$, заданной в неявной форме уравнением $f(x, y) = 0$ [если $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны], поступают следующим образом. Решается система уравнений

$$f(x, y) = 0$$

и

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0,$$

и полученные решения (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ... подставляются в $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Если $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ принимают значения с разными знаками, то при данных (x_i, y_i) имеем m ; если $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ — одного знака, то имеем M . Если же одно из выражений $\frac{\partial f}{\partial y}$ или $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ равно нулю, то дальнейшие аналитические методы исследования становятся более сложными.

Функция двух переменных: $z = f(x, y)$. Решается система уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Полученные системы решений (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ... исследуются подстановкой в $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Составляется выражение

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix};$$

если $\Delta > 0$, то z имеет M при $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ и m при $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$.

Если $\Delta < 0$, то z не имеет ни M , ни m . Если же $\Delta = 0$, то методы становятся более сложными и следует просто исследовать функцию z при значениях, близких к (x_i, y_i) , непосредственно убеждаясь, имеем ли мы M или m , или ни то, ни другое.

Функция n переменных $u = f(x, y, z, \dots)$. Необходимые, но недостаточные условия того, чтобы при системе $(x_1, y_1, z_1, \dots)$ функция u имела M или m : $x_1, y_1, z_1, \dots$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \dots$$

Достаточные условия сложны, и практически для установления, будут ли эти значения давать M или m (и что именно) или нет, следует исследовать функцию при значениях, близких к $x_1, y_1, z_1, \dots$ непосредственной подстановкой.

Относительный M и m (метод Лагранжа). Если требуется найти M или m функции нескольких (n) переменных $u = f(x, y, z, \dots)$, которые не независимы между собой, а связаны добавочными условиями (число этих условий равно k):

$$\varphi(x, y, z, \dots) = 0, \quad \psi(x, y, z, \dots) = 0, \dots \quad (k < n),$$

то вводят неопределенные множители $\lambda, \mu, \dots$ и рассматривают функцию $n+k$ переменных:

$$F(x, y, z, \dots, \lambda, \mu, \dots) = \\ = f(x, y, z, \dots) + \lambda \cdot \varphi(x, y, z, \dots) + \mu \cdot \psi(x, y, z, \dots) + \dots;$$

необходимые условия максимума или минимума для нее дают систему $n+k$ уравнений:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \dots,$$

с неизвестными $x, y, z, \dots, \lambda, \mu, \dots$. Система решений $(x_1, y_1, z_1, \dots)$, удовлетворяющих этим уравнениям, может давать M или m (это есть только необходимое

условие). Например, для функции $u=f(x, y)$, если $\varphi(x, y)=0$, система (x_1, y_1) определится из трех уравнений: $\varphi(x, y)=0$, $\frac{\partial}{\partial x} [f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)]=0$, $\frac{\partial}{\partial y} [f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)]=0$ относительно неизвестных x, y, λ .

6. Разложение функций в степенные ряды

Ряд Тэйлора для функции одной переменной. Функцию $y=f(x)$, непрерывную и имеющую все производные при $x=a$, можно во многих случаях представить в виде степенного ряда (см. стр. 308), получающегося из формулы Тэйлора (стр. 324):

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\dots$$

(ряд Тэйлора);

эта формула верна, если ряд сходится, и *остаточный член* $f(x)-S_n=R_n$ стремится к нулю при $n\rightarrow\infty$. Выражения остаточного члена:

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad (\xi \text{ находится между } a \text{ и } x),$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Другая форма ряда Тэйлора:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\dots,$$

причем остаточный член

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) = \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(a+t) dt. \end{aligned}$$

Ряд Маклорена—разложение функции $f(x)$ по степеням x —получается из ряда Тэйлора при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\dots$$

Остаточный член

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Сходимость рядов Тэйлора и Маклорена определяется или исследованием остаточного члена, или установлением радиуса сходимости (стр. 308); в последнем случае иногда может оказаться, что ряд сходится, но его сумма $S(x)$ не равна* $f(x)$.

Ряд Тэйлора для функции двух переменных:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2 \right\} + \dots + R_n$$

или (в символической форме):

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x, y) + \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x, y) + \dots \\ + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x, y) + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k) \quad \begin{pmatrix} 0 < \theta_1 < 1 \\ 0 < \theta_2 < 1 \end{pmatrix}.$$

Для функции многих переменных — аналогичная символическая форма:

$$f(x+h, y+k, z+l, \dots) = f(x, y, z, \dots) + \\ + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \dots \right)^i f(x, y, z, \dots) + R_n,$$

где $R_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot A$; выражение A равно

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \frac{\partial}{\partial z} l + \dots \right)^{n+1} f(x+\theta_1 h, y+\theta_2 k, z+\theta_3 l, \dots).$$

* См. Курант, стр. 532 справочника.

Таблица разложений в ряды некоторых функций

Функция	Разложение в ряд	Область сходимости
$(a+x)^m$	$a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2 + \dots +$ $+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \dots$	$ x < a$
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
a^x	$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x$	$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{tg} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$	$ x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x} - \left\{ \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots \right\}$	$ x < \pi$, кроме значений $x=0$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$	$ x < 1$

$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin x$		$ x < 1$
$\arcsin x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$		$ x \leq 1$
$\operatorname{sh} x$	$\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$		$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$		$-\infty < x < \infty$
$\operatorname{th} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$		$ x < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{cth} x$	$\frac{1}{x} + \left\{ \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots \right\}$		$ x < \pi$, кроме значения $x=0$
$\operatorname{arth} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$		$ x < 1$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$		$-1 < x \leq 1$
$\ln x$	$2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right]$		$x > 0$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$= 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right]$		$ x < 1$
$\ln \frac{x+1}{x-1}$	$= 2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x} \right)^5 + \dots + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{x} \right)^{2n+1} + \dots \right]$		$x < -1, x > 1$

III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

А. Неопределенные интегралы

1. Основные понятия

О п р е д е л е н и я. *Неопределенным интегралом* или *первообразной функцией* данной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная от которой равна $f(x)$ [или дифференциал которой равен $f(x)dx$]; нахождение неопределенного интеграла называется *интегрированием* функции. Обозначение:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

($\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подинтегральная функция, $f(x)dx$ — подинтегральное выражение). $\int f(x) dx$ представляет собой бесконечное множество функций, отличающихся друг от друга на произвольное постоянное слагаемое (*постоянное интегрирования*), и неопределенный интеграл может быть выражен в общей форме так:

$$\int f(x) dx = F(x) + C^*,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функций.

Г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л неопределенного интеграла функции $y=f(x)$: $\int f(x) dx$ изображает переменную

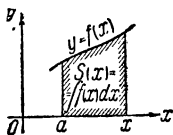


Рис. 1.

площадь $S(x)$, ограниченную кривой $y=f(x)$, осью x и двумя ординатами — постоянной, при $x=a$ (a произвольно) и переменной (рис. 1).

И н т е г р а л ы от непрерывных и разрывных функций. Каждая непрерывная функция имеет неопределенный интеграл, являющийся также непрерывной функцией. Функция, имеющая разрывы при отдельных значениях x , имеет интеграл, являющийся или непрерывной функцией, или имеющей бесконечный разрыв при тех же значениях x .

* Неопределенный интеграл $\int f(x) dx$ равен определенному интегралу от такой же функции с постоянным (произвольным) нижним пределом и переменным верхним пределом, сложенному с произвольной постоянной C :

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C.$$

Например:

$$1) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x} + C;$$

$$2) y = \frac{1}{x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

В обоих примерах подинтегральная функция имеет разрыв при $x=0$. Первый интеграл — непрерывная функция, второй интеграл имеет также разрыв при $x=0$. Поведение интегральной кривой в различных случаях разрыва функции см. на рис. 2: в случае устранимого (а) или конечного (б) разрыва функции интегральная кривая непрерывна; в случае же бесконечного разрыва функции интегральная кривая может быть непрерывной [иметь точку перегиба (в) или точку возврата (г) с вертикальной касательной] или иметь также бесконечный разрыв (д). Аналитический признак того, какой случай имеет место, см. стр. 371—372.

Интегралы от элементарных функций не всегда являются элементарными функциями. На стр. 334—367 изложены приемы интегрирования тех простейших классов функций, интегралы от которых элементарны. Если интеграл не выражается в элементарных функциях, то он образует функцию нового типа, которая в случае необходимости (теоретического интереса или частой применимости на практике) вычисляется с необходимой степенью точности и табулируется (т. е. составляются соответствующие таблицы); таким функциям (при фиксировании произвольного постоянного C установлением нижнего предела, см. примечание на предыдущей странице) часто даются специальные названия; например:

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \text{li } x \quad (\text{„интегральный логарифм“}),$$

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \text{Si } x \quad (\text{„интегральный синус“}).$$

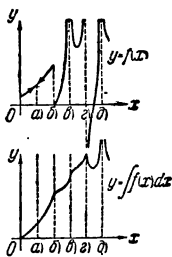


Рис. 2.

$$\int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{V(1-x^2)(1-k^2x^2)} = F(k, \varphi) \quad (\text{„эллиптический интеграл I рода“}) *$$

и т. д. Если функция не интегрируется элементарно или интегрирование производится слишком сложно, то подинтегральная функция разлагается в ряд (см. стр. 328), который (в случае его равномерной сходимости, см. стр. 307) можно почленно интегрировать. Для приближенного интегрирования можно заменить функцию многочленом по способу параболической интерполяции (стр. 376).

2. Общие правила интегрирования

Основные интегралы—формулы интегрирования, получающиеся оборачиванием основных формул дифференцирования (стр. 316—317),—сведены в приводимую ниже таблицу. К этим интегралам стараются привести данный интеграл—путем алгебраических или тригонометрических преобразований или применения правил интегрирования **.

Основные правила интегрирования—свойства неопределенных интегралов, позволяющие преобразовывать интеграл от данной функции к интегралам других функций:

1) *Постоянный множитель* можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx.$$

2) *Интеграл суммы (разности)* равен сумме (разности) интегралов от отдельных членов:

$$\int (u+v-w) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx.$$

3) *Правило подстановки*: если $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

4) *„Интегрирование по частям“*:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

* Таблицы эллиптических интегралов см. стр. 105—107.

** **О графическом интегрировании**—построении графика первообразной функции по графику заданной—см. стр. 376.

Таблица основных интегралов

(постоянные интегрирования здесь и в дальнейших таблицах опущены)

Степенные функции	Показательные функции
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	$\int e^x dx = e^x$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
Тригонометрические функции	Гиперболические функции
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x$	$\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x$
$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x$	$\int \operatorname{cth} x dx = \ln \operatorname{sh} x$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$
Элементарные дроби	Элементарные иррациональности
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x$
$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ (для $ x < 1$)	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{Arsh} x =$ $= \ln (x + \sqrt{x^2+1})$
$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1}$ (для $ x > 1$)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arch} x$ $= \ln (x + \sqrt{x^2-1})$

Общие указания к нахождению интегралов. Нельзя дать общего правила для нахождения интеграла от любой функции; техника интегрирования приобретается опытом. В следующих параграфах систематически рассмотрены приемы интегрирования простейших классов элементарных функций, а также приведены для каждого класса таблицы интегралов, в которых следует искать данный интеграл или близкий к данному. Из общих приемов, ведущих к вычислению интеграла, можно указать на следующие:

1) Алгебраическим или тригонометрическим преобразованием представляют подинтегральную функцию как сумму нескольких функций и разбивают интеграл на сумму интегралов.

Примеры:

$$\begin{aligned}\int (x+3)^3 (x^2+1) dx &= \int (x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9) dx = \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2} x^4 + \frac{10}{3} x^3 + 3x^2 + 9x + C;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos x dx &= \int \frac{1}{2} (\sin 3x + \sin x) dx = \\ &= -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x + C.\end{aligned}$$

2) Если известен (например, из таблиц) $\int f(x) dx = F(x)$, то

$$\begin{aligned}\int f(ax) dx &= \frac{1}{a} F(ax), \quad \int f(x+b) dx = F(x+b), \\ \int f(ax+b) dx &= \frac{1}{a} F(ax+b).\end{aligned}$$

Примеры:

$$\begin{aligned}\int \sin ax dx &= -\frac{1}{a} \cos ax, \quad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} \\ \int \frac{dx}{1+(x+a)^2} &= \operatorname{arctg}(x+a).\end{aligned}$$

3) Если подинтегральное выражение — дробь, числитель которой есть дифференциал знаменателя, то интеграл равен логарифму знаменателя:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{dx} = \ln f(x).$$

Пример: $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5} dx = \ln(x^2+3x-5).$

3. Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях.

Общие правила. Целая рациональная функция (многочлен) интегрируется непосредственно:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) dx = \\ = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C.$$

Дробная рациональная функция $\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx$ (где $Q(x)$

и $P(x)$ — два многочлена степеней, соответственно, m и n) алгебраически преобразуется к виду, удобному для интегрирования, следующим образом: 1) производится сокращение, чтобы $Q(x)$ и $P(x)$ не имели общих множителей; 2) если $m \geq n$, то делением $Q(x)$ на $P(x)$ выделяется целая часть дроби (см. стр. 157), которая интегрируется как многочлен, и остается проинтегрировать остаток — правильную дробь, у которой уже $m < n$; 3) знаменатель $P(x)$ разлагается на линейные множители (или квадратные, в случае комплексных корней знаменателя, см. стр. 171):

$$P(x) = a_0 (x - \alpha)^k (x - \beta)^l \dots (x^2 + px + q)^i (x^2 + rx + s)^j,$$

где

$$\frac{p^2}{4} - q < 0, \quad \frac{r^2}{4} - s < 0 \dots;$$

4) коэффициент a_0 выносится за знак интеграла; 5) полученная правильная несократимая дробь, знаменатель которой разложен на простейшие множители, преобразовывается в сумму «элементарных» дробей (см. стр. 157), которые легко интегрируются. При этом могут быть 4 случая:

1. Все корни знаменателя действительные и простые:

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \dots (x - \lambda).$$

Разложение имеет вид

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \dots + \frac{L}{x - \lambda},$$

где

$$A = \frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)}, \quad B = \frac{Q(\beta)}{P'(\beta)}, \quad \dots, \quad L = \frac{Q(\lambda)}{P'(\lambda)} \quad (\text{см. стр. 153}).$$

Интегрирование производится по формуле

$$\int \frac{A dx}{x - \alpha} = A \ln(x - \alpha) \text{ и т. д.}$$

Пример:

$$\int \frac{(2x+3) dx}{x^3+x^2-2x}; \quad \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2};$$

$$A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2} \right)_{x=0} = \frac{3}{2},$$

$$B = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2} \right)_{x=1} = \frac{5}{3},$$

$$C = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2} \right)_{x=-2} = -\frac{1}{6},$$

$$\int \left(-\frac{3}{x} + \frac{5}{x-1} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}} + C.$$

2. Все корни знаменателя действительные, среди них есть кратные:

$$P(x) = (x-\alpha)^l (x-\beta)^m \dots$$

Разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} &= \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \\ &+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \dots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \dots \end{aligned}$$

Постоянные $A_1, A_2, \dots, A_l, B_1, B_2, \dots, B_m$ вычисляются методом неопределенных коэффициентов (см. стр. 128); интегрирование производится по формулам

$$\begin{aligned} \int \frac{A_1 dx}{x-\alpha} &= A_1 \ln(x-\alpha), \\ \int \frac{A_k dx}{(x-\alpha)^k} &= -\frac{A_k}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} \end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx; \\ \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Метод неопределенных коэффициентов приводит к уравнениям:

$$A+B_1=1, -3A-2B_1+B_2=0, 3A+B_1-B_2+B_3=0, -A=1,$$

откуда $A = -1$, $B_1 = 2$, $B_2 = 1$, $B_3 = 2$;

$$\begin{aligned} \int \left[-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right] dx &= -\ln x + \\ &+ 2 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C = \\ &= \ln \frac{(x-1)^3}{x} - \frac{x}{(x-1)^2} + C. \end{aligned}$$

3. Среди корней знаменателя есть комплексные однократные:

$$P(x) = (x-\alpha)^l (x-\beta)^m \dots (x^2+px+q)(x^2+p'x+q') \dots,$$

причем $\frac{p^2}{4} < q$.

Разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} &= \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \\ &+ \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \dots + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \dots + \\ &+ \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{Ex+F}{x^2+p'x+q'} + \dots \end{aligned}$$

Постоянные вычисляются методом неопределенных коэффициентов (см. стр. 158).

Интегрирование выражения $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$ производится по формулам

$$\int \frac{x dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{2} \ln(x^2+px+q) - \frac{p}{2} \int \frac{dx}{x^2+px+q};$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

Пример:

$$\int \frac{4dx}{x^3+4x}; \quad \frac{4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Метод неопределенных коэффициентов приводит к уравнениям

$$A+C=0,$$

$$D=0,$$

$$4A=4,$$

откуда $A=1$, $C=-1$, $D=0$.

$$\int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + \ln C_1 = \ln \frac{C_1 x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(в данном случае член, содержащий arctg , отсутствует).

4. Знаменатель имеет *кратные комплексные корни*:

$$P(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \dots (x^2+px+q)^m (x^2+p'x+q')^n \dots$$

Разложение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{Q(x)}{P(x)} = & \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \\ & + \frac{C_1 x + D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{C_m x + D_m}{(x^2+px+q)^m} + \\ & + \frac{E_1 x + F_1}{x^2+p'x+q'} + \frac{E_2 x + F_2}{(x^2+p'x+q')^2} + \dots + \frac{E_n x + F_n}{(x^2+p'x+q')^n} + \dots \end{aligned}$$

Постоянные вычисляются методом неопределенных коэффициентов (см. стр. 58).

Интегрирование выражения $\frac{C_m x + D_m}{(x^2+px+q)^m}$ производится следующим образом. Числитель преобразуют:

$$C_m x + D_m = \frac{C_m}{2} (2x+p) + \left(D_m - p \frac{C_m}{2} \right).$$

Искомый интеграл разбивают на два слагаемых. Первое из них интегрируется сразу:

$$\int \frac{C_m}{2} \frac{(2x+p) dx}{(x^2+px+q)^m} = -\frac{C_m}{2(m-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

а второе (без коэффициента) — по формуле понижения степени:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = & \frac{x + \frac{p}{2}}{2(m-1)\left(q - \frac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^{m-1}} + \\ & + \frac{2m-3}{2(m-1)\left(q - \frac{p^2}{4}\right)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}. \end{aligned}$$

Таблица интегралов от рациональных функций

Интегралы, содержащие $ax+b$ (обозначения: $X=ax+b$, $\Delta=bf-ag$).

$$1) \int X^n dx = \frac{1}{a(n+1)} X^{n+1} \quad (n \neq -1).$$

$$2) \int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} \ln X.$$

$$3) \int xX^n dx = \frac{1}{a^2(n+2)} X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)} X^{n+1} \\ (n \neq -1, n \neq -2).$$

$$4) \int \frac{x dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \ln X.$$

$$5) \int \frac{x dx}{X^2} = \frac{b}{a^2 X} + \frac{1}{a^2} \ln X.$$

$$6) \int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{2} X^2 - 2bX + b^2 \ln X \right).$$

$$7) \int \frac{x^2 dx}{X^2} = \frac{1}{a^3} \left(X - 2b \ln X - \frac{b^2}{X} \right).$$

$$8) \int \frac{x^2 dx}{X^3} = \frac{1}{a^3} \left(\ln X + \frac{2b}{X} - \frac{b^2}{2X^2} \right).$$

$$9) \int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b} \ln \frac{x}{X}.$$

$$10) \int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \frac{X}{x}.$$

$$11) \int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{bX} - \frac{1}{b^2} \ln \frac{X}{x}.$$

$$12) \int \frac{dx}{x^2 X^2} = -\frac{b+2ax}{b^2 x X} + \frac{2a}{b^2} \ln \frac{X}{x}.$$

$$13) \int \frac{ax+b}{fx+g} dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2} \ln(fx+g).$$

$$14) \int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \ln \frac{fx+g}{ax+b} \quad (\Delta \neq 0).$$

$$15) \int \frac{x dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{b}{a} \ln(ax+b) - \frac{g}{f} \ln(fx+g) \right] \quad (\Delta \neq 0).$$

$$16) \int \frac{dx}{(ax+b)^2(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta} \ln \frac{fx+g}{ax+b} \right) \quad (\Delta \neq 0).$$

Интегралы, содержащие ax^2+bx+c

(обозначения: $X=ax^2+bx+c$, $\Delta=4ac-b^2$)

$$1) \int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \quad (\text{для } \Delta > 0),$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{Arth} \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} \quad (\text{для } \Delta < 0).$$

$$2) \int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta} \int \frac{dx}{X}.$$

$$3) \int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta} \left(\frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X} \right) + \frac{6a^2}{\Delta^2} \int \frac{dx}{X}.$$

$$4) \int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}.$$

$$5) \int \frac{x dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta} \int \frac{dx}{X}.$$

$$6) \int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln X + \frac{b^2-2ac}{2a^3} \int \frac{dx}{X}.$$

$$7) \int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a\Delta X} + \frac{2c}{\Delta} \int \frac{dx}{X}.$$

$$8) \int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X}.$$

$$9) \int \frac{dx}{x^3 X} = \frac{b}{2c^2} \ln \frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c} \right) \int \frac{dx}{X}.$$

$$10) \int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2-gbf+g^2a)} \left[f \ln \frac{(fx+g)^2}{X} \right] +$$

$$+ \frac{2ga-bf}{2(cf^2-gbf+g^2a)} \int \frac{dx}{X}.$$

Другие рациональные выражения

$$1) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$2) \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} & (\text{для } |x| < a), \\ -\frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} & (\text{для } |x| > a). \end{cases}$$

$$3) \int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{k}{3a} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{k+x^3}{k^2-2kx+x^3} \right) + \right. \\ \left. + V\sqrt[3]{3} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt[3]{3}}{2k-x} \right] \quad (k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}).$$

$$4) \int \frac{x dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{k^2-kx+x^3}{(k+x)^3} \right) + \right. \\ \left. + V\sqrt[3]{3} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt[3]{3}}{2k-x} \right] \quad (k = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}).$$

$$5) \int \frac{x^3 dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3b} \ln(a+bx^3).$$

$$6) \int \frac{x^3 dx}{a+bx^3} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+bx^3}.$$

$$7) \int \frac{dx}{x^4+a^4} = \\ = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \left\{ \ln \left(\frac{x^3+ax\sqrt{2}+a^3}{x^3-ax\sqrt{2}+a^3} \right) + 2\operatorname{arctg} \left(\frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2} \right) \right\}.$$

$$8) \int \frac{dx}{x^4-a^4} = \frac{1}{4a^3} \left\{ \ln \frac{x-a}{x+a} - 2\operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right\}.$$

Некоторые случаи разложения дроби на элементарные

$$1) \frac{1}{(a+bx^2)(f+gx^2)} = \frac{1}{fb-ag} \cdot \left(\frac{b}{a+bx^2} - \frac{g}{f+gx^2} \right).$$

$$2) \frac{1}{(a+bx)(f+gx)} = \frac{1}{fb-ag} \left(\frac{b}{a+bx} - \frac{g}{f+gx} \right).$$

$$3) \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c},$$

$$\text{где } A = \frac{1}{(b-a)(c-a)}, \quad B = \frac{1}{(a-b)(c-b)},$$

$$C = \frac{1}{(a-c)(b-c)},$$

$$4) \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} = \\ = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c} + \frac{D}{x+d},$$

$$\text{где } A = \frac{1}{(b-c)(c-a)(d-a)}, \quad B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)} \text{ и т. д.}$$

4. Интегрирование иррациональных функций

Общие правила. В простейших случаях такие интегралы могут быть приведены к интегралам от рациональных функций при помощи следующих подстановок:

Интеграл *	Подстановка
$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$	$\sqrt[n]{ax+b} = t$
$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}, \dots) dx$	$\sqrt[p]{ax+b} = t,$ где p — общее наименьшее кратное чисел $n, m, \dots$
$\int R(x, \sqrt{x^2+ax+b}) dx$	$\sqrt{x^2+ax+b} = t - x$
$\int R(x, \sqrt{-x^2+ax+b}) dx$	$\sqrt{-x^2+ax+b} =$ $= \sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)**} =$ $= (\alpha-x)t \text{ или } (x-\beta)t$

* Символ R означает рациональную функцию от выражений, к которым он относится.

** α и β — корни уравнения $-x^2+ax+b=0$. В случае интеграла от действительных выражений корни α и β не могут быть комплексными, потому что тогда подкоренная функция была бы при любом значении x отрицательна.

Последние два интеграла легко приводятся также к ниже-
следующим посредством преобразования подкоренного вы-
ражения к сумме или разности двух квадратов, например:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1^2,$$

$$x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

$$-x^2 + 2x = 1 - x^2 + 2x - 1 = 1^2 - (x - 1)^2$$

Интеграл	Подстановка
$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$	$x = a \operatorname{sh} t$ приводит к интегралу от гиперболических функций (см. стр. 360), а $x = a \operatorname{tg} t$ — к интегралу от тригонометрических функций (см. стр. 353—361)
$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$	$x = a \operatorname{ch} t$ или $a \sec t$ приводят к интегралам, соответственно от гиперболических и тригонометрических функций
$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$	$x = a \sin t$ или $x = a \cos t$ приводят к интегралам от тригонометрических функций

Таблица интегралов от иррациональных функций

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax + b}$

(обозначение: $X = ax + b$)

$$1) \int \sqrt{X} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{X^3}.$$

$$2) \int x \sqrt{X} dx = \frac{2(3ax - 2b)\sqrt{X^3}}{15a^2}.$$

$$3) \int x^2 \sqrt{X} dx = \frac{2(15a^2x^2 - 12abx + 8b^2)\sqrt{X^3}}{105a^3}.$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a} \quad 5) \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax - 2b)}{3a^2} \sqrt{X}.$$

$$6) \int \frac{x^2 dx}{V \overline{X}} = \frac{2(3a^2 x^2 - 4abx + 8b^2) V \overline{X}}{15a^3}.$$

$$7) \int \frac{dx}{x V \overline{X}} = \begin{cases} -\frac{2}{V \overline{b}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{X}{b}} = \\ = \frac{1}{V \overline{b}} \ln \frac{V \overline{X} - V \overline{b}}{V \overline{X} + V \overline{b}} & \text{для } b > 0, \\ \frac{2}{V - b} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{X}{-b}} & \text{для } b < 0. \end{cases}$$

$$8) \int \frac{V \overline{X}}{x} dx = 2 V \overline{X} + b \int \frac{dx}{x V \overline{X}}.$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2 V \overline{X}} = -\frac{V \overline{X}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x V \overline{X}}.$$

$$10) \int X^{\pm \frac{n}{2}} dx = \frac{2X^{\frac{2 \pm n}{2}}}{a(2 \pm n)}.$$

$$11) \int x X^{\pm \frac{n}{2}} dx = \frac{2}{a^2} \left(\frac{X^{\frac{4 \pm n}{2}}}{4 \pm n} - \frac{b X^{\frac{2 \pm n}{2}}}{2 \pm n} \right).$$

$$12) \int \frac{X^{\frac{n}{2}}}{x} dx = a \int X^{\frac{n-2}{2}} dx + b \int \frac{X^{\frac{n-2}{2}}}{x} dx.$$

$$13) \int \frac{dx}{x X^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x X^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}}.$$

Интегралы, содержащие $V \overline{ax+b}$ и $V \overline{fx+g}$
(обозначения: $X=ax+b$, $Y=fx+g$, $\Delta=b^2-fa$)

$$1) \int \frac{dx}{V \overline{XY}} = \begin{cases} \frac{2}{V - af} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{fX}{aY}} & \text{для } af < 0, \\ \frac{2}{V af} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{fX}{aY}} = \\ = \frac{2}{V af} \ln \frac{aY + fX + 2V \overline{afXY}}{aY + fX - 2V \overline{afXY}} & \text{для } af > 0. \end{cases}$$

$$2) \int \sqrt{XY} dx = \frac{\Delta \sqrt{2aY}}{4af} \sqrt{XY} - \frac{\Delta^2}{8af} \int \frac{dx}{\sqrt{XY}}.$$

$$3) \int \sqrt{\frac{Y}{X}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{XY} - \frac{\Delta}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{XY}}.$$

$$4) \int \frac{x dx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag + bf}{2af} \int \frac{dx}{\sqrt{XY}}.$$

Интегралы, содержащие $\sqrt{a^2 - x^2}$

(обозначение: $a^2 - x^2 = X$)

$$1) \int \sqrt{X} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right).$$

$$2) \int x \sqrt{X} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{X^3}.$$

$$3) \int x^3 \sqrt{X} dx = -\frac{x}{4} \sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8} \left(x \sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right).$$

$$4) \int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = \sqrt{X} - a \ln \frac{a + \sqrt{X}}{x}.$$

$$5) \int \frac{\sqrt{X}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$6) \int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$7) \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}.$$

$$8) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2} \sqrt{X} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$9) \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{X}}{x} \right).$$

$$10) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$$

$$11) \int \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{4} \left[x \sqrt{X^3} + \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right].$$

$$12) \int x \sqrt{X^3} dx = -\frac{1}{5} \sqrt{X^5}.$$

$$13) \int \frac{dx}{VX^3} = \frac{x}{a^2 VX}.$$

$$14) \int \frac{x dx}{VX^3} = \frac{1}{VX}.$$

$$15) \int \frac{x^2 dx}{VX^3} = \frac{x}{VX} - \arcsin \frac{x}{a}.$$

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2 + a^2}$

(обозначение: $\sqrt{x^2 + a^2} = X$)

$$\begin{aligned} 1) \int VX dx &= \frac{1}{2} \left(x VX + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left[x VX + a^2 \ln (x + VX) \right] + C_1. \end{aligned}$$

$$2) \int x VX dx = \frac{1}{3} VX^3.$$

$$\begin{aligned} 3) \int x^2 VX dx &= \frac{x}{4} VX^3 - \frac{a^2}{8} \left(x VX + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} \right) + C = \\ &= \frac{x}{4} VX^3 - \frac{a^2}{8} \left[x VX + a^2 \ln (x + VX) \right] + C_1. \end{aligned}$$

$$4) \int \frac{VX}{x} dx = VX - a \ln \frac{a + VX}{x}.$$

$$\begin{aligned} 5) \int \frac{VX}{x^2} dx &= -\frac{VX}{x} + \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C = \\ &= -\frac{VX}{x} + \ln (x + VX) + C_1. \end{aligned}$$

$$6) \int \frac{dx}{VX} = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C + \ln (x + VX) + C_1.$$

$$7) \int \frac{x dx}{VX} = VX.$$

$$\begin{aligned} 8) \int \frac{x^2 dx}{VX} &= \frac{x}{2} VX - \frac{a^2}{2} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C = \\ &= \frac{x}{2} VX - \frac{a^2}{2} \ln (x + VX) + C_1. \end{aligned}$$

$$9) \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{X}}{x} \right).$$

$$10) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$$

$$11) \int \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{4} \left(x \sqrt{X^3} + \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} \right) + C = \\ = \frac{1}{4} \left(x \sqrt{X^3} + \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \ln (x + \sqrt{X}) \right) + C_1.$$

$$12) \int x \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{5} \sqrt{X^5}. \quad 13) \int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{X}}.$$

$$14) \int \frac{x dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

$$15) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C = \\ = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln (x + \sqrt{X}) + C_1.$$

Интегралы, содержащие $\sqrt{x^2 - a^2} = X$

(обозначение: $x^2 - a^2 = X$)

$$1) \int \sqrt{X} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{X} - a^2 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} \right) + C = \\ = \frac{1}{2} \left[x \sqrt{X} - a^2 \ln (x + \sqrt{X}) \right] + C_1.$$

$$2) \int x \sqrt{X} dx = \frac{1}{3} \sqrt{X^3}.$$

$$3) \int x^2 \sqrt{X} dx = \frac{x^2}{4} \sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8} \left(x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} \right) + C = \\ = \frac{x^2}{4} \sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8} \left[x \sqrt{X} + a^2 \ln (x + \sqrt{X}) \right] + C_1.$$

$$4) \int \frac{\sqrt{X}}{x} dx = \sqrt{X} - a \arccos \frac{a}{x}.$$

$$5) \int \frac{\sqrt{X}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + C = \\ = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln (x + \sqrt{X}) + C_1.$$

- 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \text{Arch } \frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$
- 7) $\int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$
- 8) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2} \sqrt{X} + \frac{a^3}{2} \text{Arch } \frac{x}{a} + C =$
 $= \frac{x}{2} \sqrt{X} + \frac{a^3}{2} \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$
- 9) $\int \frac{dx}{x \sqrt{X}} = \frac{1}{a} \text{arcsec } \frac{x}{a},$ 10) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$
- 11) $\int \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{4} \left[x \sqrt{X^3} - \frac{3a^3 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \text{Arch } \frac{x}{a} \right] + C =$
 $= \frac{1}{4} \left[x \sqrt{X^3} - \frac{3a^3 x}{2} \sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \ln(x + \sqrt{X}) \right] + C_1.$
- 12) $\int x \sqrt{X^3} dx = \frac{1}{5} \sqrt{X^5}.$ 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{X}}.$
- 14) $\int \frac{x dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$
- 15) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \text{Arch } \frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x + \sqrt{X}) + C_1.$

Интегралы, содержащие $\sqrt{ax^2+bx+c}$

(обозначения: $X = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $\Delta = 4ac - b^2$, $k = \frac{4a}{\Delta}$)

- 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \quad (\text{для } a < 0, \Delta < 0),$
 $= \frac{1}{\sqrt{a}} \text{Arsh } \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} + C \quad (\text{для } a > 0, \Delta > 0)$
 $= \frac{1}{\sqrt{a}} \text{Arch } \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} + C =$
 $= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\sqrt{X} + \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} \right) + C_1$
(для $a > 0, \Delta < 0$).

$$2) \int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

$$3) \int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{3\Delta\sqrt{X}} \left(\frac{1}{X} + 2k \right).$$

$$4) \int \sqrt{X} dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$5) \int X\sqrt{X} dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{8a} \left(X + \frac{3}{2k} \right) + \frac{3}{8k^3} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$6) \int X^2\sqrt{X} dx = \\ = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{12a} \left(X^2 + \frac{5X}{4k} + \frac{15}{8k^2} \right) + \frac{5}{16k^3} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$7) \int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$8) \int \frac{x dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

$$9) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2} \right) \sqrt{X} + \frac{3b^2-4ac}{8a^3} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$10) \int \frac{x^2 dx}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a\Delta\sqrt{X}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$11) \int x\sqrt{X} dx = \frac{X\sqrt{X}}{3a} - \frac{b}{2a} \int \sqrt{X} dx.$$

$$12) \int xX\sqrt{X} dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5a} - \frac{b}{2a} \int X\sqrt{X} dx.$$

$$13) \int x^2\sqrt{X} dx = \left(x - \frac{5b}{6a} \right) \frac{X\sqrt{X}}{4a} + \frac{5b^2-4ac}{16a^3} \int \sqrt{X} dx.$$

$$14) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

$$15) \int \frac{\sqrt{X} dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + c \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

$$16) \int \frac{\sqrt{X} dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} + a \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$\begin{aligned}
 17) \int \frac{dx}{x \sqrt{X}} &= -\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arch} \frac{2c+bx}{x \sqrt{-\Delta}} + C \\
 &\quad (\text{для } c > 0, \Delta < 0), \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arsh} \frac{2c+bx}{x \sqrt{\Delta}} + C \\
 &\quad (\text{для } c > 0, \Delta > 0), \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(\frac{\sqrt{X} + \sqrt{c}}{x} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right) + C_1 = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2c+bx}{x \sqrt{-\Delta}} \\
 &\quad (\text{для } c < 0, \Delta < 0), \\
 &= -\frac{2\sqrt{X}}{bx} \quad (\text{для } c=0).
 \end{aligned}$$

Другие иррациональные выражения

$$\begin{aligned}
 1) \int \frac{n}{\sqrt{ax+b}} dx &= \frac{n(cx+b)}{(n+1)a} \frac{n}{\sqrt{ax+b}}. \\
 2) \int \frac{dx}{\frac{n}{\sqrt{ax+b}}} &= -\frac{n(ax+b)}{(n-1)a} \cdot \frac{1}{\frac{n}{\sqrt{ax+b}}}. \\
 3) \int (a+bx)^{\frac{m}{n}} dx &= \frac{n(a+b)}{a(m+n)} \frac{m+n}{n} \\
 4) \int \sqrt{2ax-x^2} dx &= \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{a}. \\
 5) \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} &= \arccos \frac{x-a}{a}. \\
 6) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^n+a^2}} &= \frac{1}{an} \ln \frac{\sqrt{a^2+x^n-a}}{\sqrt{a^2+x^n+a}}. \\
 7) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^n-a^2}} &= \frac{2}{an} \arccos \frac{a}{x^{n/2}}. \\
 8) \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \frac{2}{3} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right)^{3/2}.
 \end{aligned}$$

5. Интегрирование тригонометрических функций

Общие правила. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ * всегда может быть приведен к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\text{откуда} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Например: } \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx &= \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} \left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(t+2+\frac{1}{t}\right) dt = \frac{t^2}{4} + t + \frac{1}{2} \ln t + C = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{4} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Во многих случаях интегрирование производится проще. Наиболее употребительны случаи:

$$I. \int \sin^n x dx \text{ или } \int \cos^n x dx \quad (n - \text{целое}).$$

Если n нечетное ($n=2m+1$), то

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= \int (1 - \cos^2 x)^m \sin x dx = \\ &= - \int (1-t^2)^m dt, \text{ где } t = \cos x. \end{aligned}$$

Если n четное ($n=2m$), то

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= \int \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \right]^m dx = \\ &= \frac{1}{2^{m+1}} \int (1 - \cos t)^m dt, \text{ где } t = 2x \end{aligned}$$

и степень снижается вдвое; раскрывая $(1 - \cos t)^m$, интегрируем каждый член аналогичным образом.

* Символ R означает рациональную функцию от выражений, на которые он распространяется.

Случай $\int \cos^n x dx$ интегрируется аналогично; для n нечетного делается подстановка $\sin x = t$, для n четного преобразование $\cos^{2m} x = \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \right]^m$.

II. $\int \sin^n x \cos^m x dx$, причем одно из чисел n и m — нечетное, а другое — произвольное, преобразовывается аналогично.

Например: $\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx =$
 $= \int t^2 (1 - t^2)^2 dt \ (t = \sin x); \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = - \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \ (t = \cos x).$

III. $\int \operatorname{tg}^n x dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx =$
 $= \int \operatorname{tg}^{n-2} x d \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx;$
 повторяя этот прием, приведем интеграл при n четном к $\int dx = x$, а при n нечетном — к $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x dx$.

Аналогично интегрируется $\int \operatorname{ctg}^n x dx$.

Таблица интегралов от тригонометрических функций*

Интегралы, содержащие синус.

1) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax.$

2) $\int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax.$

3) $\int \sin^3 ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{3a} \cos^3 ax.$

4) $\int \sin^4 ax dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax.$

5) $\int \sin^n ax dx =$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax \cos ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} ax dx \ (n \text{ целое, } > 0).$$

* Интегралы от функций, содержащих $\sin x$, $\cos x$ в сочетании с гиперболическими функциями и e^{ax} , см. стр. 361—363; интегралы, применяемые в теории колебаний, см. стр. 365.

$$6) \int x \sin ax \, dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}.$$

$$7) \int x^2 \sin ax = \frac{2x}{a^2} \sin ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cos ax.$$

$$8) \int x^n \sin ax \, dx = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx \quad (n > 0).$$

$$9) \int \frac{\sin ax}{x} \, dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7 \cdot 7!} + \dots \text{ (элементарно не интегрируется) }^*.$$

$$10) \int \frac{\sin ax}{x^n} \, dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\sin ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}} \, dx.$$

$$11) \int \frac{dx}{\sin ax} = \int \csc ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} = \\ = \frac{1}{a} \ln (\csc ax - \operatorname{ctg} ax).$$

$$12) \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax.$$

$$13) \int \frac{dx}{\sin^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \frac{\cos ax}{\sin^{n-1} ax} + \\ + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax} \quad (n - \text{целое, } > 1)$$

$$14) \int \frac{x \, dx}{\sin ax} = \frac{1}{a^2} \left(ax + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7(ax)^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31(ax)^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \dots \right. \\ \left. \text{(элементарно не интегрируется)} \right).$$

$$15) \int \frac{x \, dx}{\sin^2 ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \sin ax.$$

$$16) \int \frac{dx}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$17) \int \frac{dx}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$18) \int \frac{x \, dx}{1 + \sin ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

* Определенный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ называется *интегральным синусом* и обозначается $\operatorname{Si}(ax)$:

$$\operatorname{Si} x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

$$19) \int \frac{x dx}{1 - \sin ax} = \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$$

$$20) \int \frac{dx}{b + c \sin ax} =$$

$$= \frac{-2}{a \sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) \right]$$

(для $b^2 > c^2$).

$$= \frac{-1}{a \sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{c + b \sin ax + \sqrt{c^2 - b^2} \cos ax}{b + c \sin ax}.$$

(для $b^2 < c^2$).

$$21) \int \sin ax \sin bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$$

($a^2 \neq b^2$).

Интегралы, содержащие косинус

- 1) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax.$
- 2) $\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax.$
- 3) $\int \cos^3 ax dx = \frac{1}{a} \sin ax - \frac{1}{3a} \sin^3 ax.$
- 4) $\int \cos^4 ax dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax.$
- 5) $\int \cos^n ax = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax dx$
(n — целое, > 0).
- 6) $\int x \cos ax dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}.$
- 7) $\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax.$
- 8) $\int \frac{\cos ax}{x} dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$
(элементарно не интегрируется)*.

* Определенный интеграл $-\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ называется ин-

тегральным косинусом и обозначается $\operatorname{Ci} x$:

$$\operatorname{Ci} x = C + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \dots,$$

где C — эйлерова постоянная (см. стр. 295).

- 9) $\int x^n \cos ax \, dx = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx$
($n > 0$).
- 10) $\int \frac{\cos ax}{x^n} \, dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos ax}{x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\sin ax}{x^{n-1}} \, dx.$
- 11) $\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) =$
 $= \frac{1}{a} \ln (\sec ax + \operatorname{tg} ax).$
- 12) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$
- 13) $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)} \frac{\sin ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$
(n — не четное, > 1).
- 14) $\int \frac{x \, dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{(ax)^3}{2} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5 (ax)^5}{6 \cdot 4!} + \frac{61 (ax)^6}{8 \cdot 6!} + \dots \right)$
(элементарно не интегрируется).
- 15) $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \cos ax.$
- 16) $\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$
- 17) $\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2}.$
- 18) $\int \frac{x \, dx}{1 + \cos ax} = \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \cos \frac{ax}{2}.$
- 19) $\int \frac{x \, dx}{1 - \cos ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2} \ln \sin \frac{ax}{2}.$
- 20) $\int \frac{dx}{b + c \cos ax} = \frac{2}{a \sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right]$
(для $b^2 > c^2$).
 $= \frac{1}{a \sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{c + b \cos ax + \sqrt{c^2 - b^2} \sin ax}{b + c \cos ax}$
(для $b^2 < c^2$).
- 21) $\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin (a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin (a+b)x}{2(a+b)}$
($a^2 \neq b^2$).

Интегралы, содержащие синус и косинус

$$1) \int \sin ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax.$$

$$2) \int \sin^3 ax \cos^3 ax \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a}.$$

$$3) \int \sin^n ax \cos ax \, dx = \frac{1}{a(n+1)} \sin^{n+1} ax \quad (n \neq -1).$$

$$4) \int \sin ax \cos^n ax \, dx = -\frac{1}{a(n+1)} \cos^{n+1} ax \quad (n \neq -1).$$

$$5) \int \sin^n ax \cos^m ax \, dx =$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(n+m)} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} ax \cos^m ax \, dx$$

(понижение степени n ; m и $n > 0$).

$$= \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n ax \cos^{m-2} ax \, dx$$

(понижение степени m ; m и $n > 0$).

$$6) \int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} ax.$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos ax \sin^3 ax} = \frac{1}{a} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{\sin ax} \right].$$

$$8) \int \frac{dx}{\cos^3 ax \sin ax} = \frac{1}{a} \left[\lg \operatorname{tg} \frac{ax}{2} + \frac{1}{\cos ax} \right].$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^m ax} =$$

$$= -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} ax \cos^m ax}$$

(понижение степени n ; $m > 0$, $n > 1$).

$$= \frac{1}{a(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1} ax \cos^{m-1} ax} + \frac{n+m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^n ax \cos^{m-2} ax}$$

(понижение степени m ; $n > 0$, $m > 1$).

$$10) \int \frac{\sin^n ax}{\cos ax} \, dx = -\frac{\sin^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \frac{\sin^{n-2} ax \, dx}{\cos ax}.$$

$$11) \int \frac{\cos^m ax}{\sin ax} \, dx = \frac{\cos^{m-1} ax}{(m-1)a} + \int \frac{\cos^{m-2} ax \, dx}{\sin ax}.$$

$$12) \int \frac{\sin^n ax}{\cos^m ax} dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{a(m-1) \cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1} \int \frac{\sin^n ax}{\cos^{m-2} ax} dx$$

(m и $n > 0$, $m \neq 1$).

$$13) \int \frac{\cos^m ax}{\sin^n ax} dx = \frac{-\cos^{m+1} ax}{a(n-1) \sin^{n-1} ax} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{\cos^m ax}{\sin^{n-2} ax} dx$$

(m и $n > 0$, $n \neq 1$).

$$14) \int \frac{dx}{b \sin ax + c \cos ax} = \frac{1}{a \sqrt{b^2 + c^2}} \ln \operatorname{tg} \frac{ax + \operatorname{arctg} \frac{c}{b}}{2}.$$

$$15) \int \frac{\sin ax dx}{b + c \cos ax} = -\frac{1}{ac} \ln(b + c \cos ax).$$

$$16) \int \frac{\cos ax dx}{b + c \sin ax} = \frac{1}{ac} \ln(b + c \sin ax).$$

$$17) \int \sin ax \cos bx dx = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}$$

($a^2 \neq b^2$).

Интегралы, содержащие тангенс и котангенс

$$1) \int \operatorname{tg} ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax.$$

$$2) \int \operatorname{ctg} ax = \frac{1}{a} \ln \sin ax.$$

$$3) \int \operatorname{tg}^2 ax dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x.$$

$$4) \int \operatorname{ctg}^2 ax = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x.$$

$$5) \int \operatorname{tg}^n ax dx = \frac{1}{a(n-1)} \operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax dx$$

(n — целое, > 1).

$$6) \int \operatorname{ctg}^n ax dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax dx$$

(n — целое, > 1).

$$7) \int \frac{\operatorname{tg} ax}{\cos ax} dx = \frac{1}{a \cos ax}.$$

$$8) \int \frac{\operatorname{ctg} ax}{\sin ax} dx = -\frac{1}{a \sin ax}.$$

$$9) \int \frac{dx}{b+c \operatorname{tg} x} = \frac{1}{b^2+c^2} \left[bx + \frac{c}{a} \ln (b \cos ax + c \sin ax) \right].$$

$$10) \int \frac{\operatorname{tg}^n ax}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a(n+1)} \operatorname{tg}^{n+1} ax \quad (n \neq -1),$$

$$11) \int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{ctg}^{n+1} ax \quad (n \neq -1).$$

6. Интегрирование гиперболических функций

Общие правила. Интегралы, содержащие $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, обычно берутся посредством замены гиперболических функций их выражениями через показательные (стр. 216); наиболее употребительные случаи

$$\left(\int \operatorname{sh}^n x dx, \int \operatorname{ch}^n x dx, \int \operatorname{sh}^n x \operatorname{ch}^m x dx \right)$$

интегрируются приемами, аналогичными тем, которые применялись в тригонометрических функциях (стр. 353 и 354).

Интеграл $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$, аналогично интегралу от тригонометрических функций, всегда может быть приведен к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2}; \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Таблица интегралов от гиперболических функций

$$1) \int \operatorname{sh} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{ch} ax.$$

$$2) \int \operatorname{ch} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax.$$

$$3) \int \operatorname{sh}^2 ax dx = \frac{1}{2a} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax - \frac{1}{2} x.$$

$$4) \int \operatorname{ch}^2 ax dx = \frac{1}{2a} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax + \frac{1}{2} x.$$

$$5) \int \operatorname{sh}^n ax \, dx = \frac{1}{an} \operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sh}^{n-2} ax \, dx \quad (\text{для } n > 0).$$

$$= \frac{1}{a(n+1)} \operatorname{sh}^{n+1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1} \int \operatorname{sh}^{n+2} ax \, dx \quad (\text{для } n < 0).$$

$$6) \int \operatorname{ch}^n ax \, dx = \frac{1}{an} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{ch}^{n-2} ax \, dx \quad (\text{для } n > 0).$$

$$= -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1} \int \operatorname{ch}^{n+2} ax \, dx \quad (\text{для } n < 0).$$

$$7) \int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{th} \frac{ax}{2}. \quad 8) \int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} e^x.$$

$$9) \int x \operatorname{sh} ax \, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax.$$

$$10) \int x \operatorname{ch} ax \, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax.$$

$$11) \int \operatorname{th} ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} ax. \quad 12) \int \operatorname{cth} ax = \frac{1}{a} \ln \operatorname{sh} ax.$$

$$13) \int \operatorname{th}^2 ax \, dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}. \quad 14) \int \operatorname{cth}^2 ax \, dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}.$$

$$15) \int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx \, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} (a \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax)$$

$$16) \int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx \, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} (a \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx - b \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} ax).$$

$$17) \int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx \, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2} (a \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax)$$

$$18) \int \operatorname{sh} ax \sin ax \, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{ch} ax \sin ax - \operatorname{sh} ax \cos ax).$$

$$19) \int \operatorname{ch} ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \sin ax).$$

 $a^2 \neq b^2.$

$$20) \int \operatorname{sh} ax \cos ax \, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \sin ax).$$

$$21) \int \operatorname{ch} ax \sin ax \, dx = \frac{1}{2a} (\operatorname{sh} ax \sin ax - \operatorname{ch} ax \cos ax).$$

7. Интегрирование других трансцендентных функций

Общие правила. Функции, содержащие $\ln$, $\arcsin$, $\arctg$, Arsh , Arth , произведения x^m на e^{ax} , $\sin ax$, $\cos ax$, произведения вида $e^{ax} \cos bx$, $x^n \ln x$ и т. п., интегрируются главным образом применением (один или несколько раз) формулы интегрирования по частям.

Таблица интегралов от других трансцендентных функций

Показательные функции

$$1) \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}. \quad 2) \int b^{ax} \, dx = \frac{b^{ax}}{a \ln b}.$$

$$3) \int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1). \quad 4) \int x b^{ax} \, dx = \frac{x b^{ax}}{a \ln b} - \frac{b^{ax}}{a^2 (\ln b)^2}.$$

$$5) \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx \quad (n > 0).$$

$$6) \int x^n b^{ax} \, dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b} \int x^{n-1} b^{ax} \, dx \quad (n > 0).$$

$$7) \int \frac{e^{ax}}{x} \, dx = \ln x + ax + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

$$8) \int \frac{b^{ax}}{x} \, dx = \ln x + ax \ln b + \frac{(ax \ln b)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax \ln b)^3}{3 \cdot 3!} + \dots$$

элементарно не интегрируются

$$9) \int \frac{e^{ax}}{x^n} \, dx = \frac{1}{n-1} \left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} \, dx \right) \quad (n - \text{целое}, > 1).$$

$$10) \int \frac{dx}{1 + e^{ax}} = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax}}{1 + e^{ax}}.$$

$$11) \int \frac{dx}{b + ce^{ax}} = \frac{1}{ab} [ax - \ln(b + ce^{ax})].$$

$$12) \int \frac{e^{ax} dx}{b + ce^{ax}} = \frac{1}{ac} \ln(b + ce^{ax}).$$

$$13) \int \frac{dx}{be^{ax} + ce^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{bc}} \operatorname{arctg} \left(e^{ax} \sqrt{\frac{b}{c}} \right) \\ (b > 0, c > 0).$$

$$14) \int e^{ax} \ln x \, dx = \frac{e^{ax} \ln x}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx.$$

$$15) \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

$$16) \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx).$$

$$17) \int x e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{x e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) - \\ - \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2 - b^2) \sin bx - 2ab \cos bx].$$

$$18) \int x e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{x e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) - \\ - \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2} [(a^2 - b^2) \cos bx + 2ab \sin bx].$$

Логарифмические функции

$$1) \int \ln x \, dx = x \ln x - x.$$

$$2) \int (\ln x)^n \, dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx.$$

$$3) \int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}}.$$

$$4) \int \frac{dx}{\ln x} = \ln \ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots \\ (\text{элементарно не интегрируется}). *$$

* Определенный интеграл $\int_0^x \frac{dx}{\ln x}$ называется *интеграль-*

ны и логарифмом и обозначается Πx .

$$5) \int x^m \ln x \, dx = x^{m+1} \left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right].$$

$$6) \int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx,$$

$$7) \int \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$$

$$8) \int \frac{x^m \, dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y} \, dy \quad (\text{где } y = -(m+1) \ln x; \text{ см. интеграл } \S 7 \text{ на стр. 362}).$$

$$9) \int \frac{x^m \, dx}{(\ln x)^n} = - \frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m \, dx}{(\ln x)^{n-1}}.$$

$$10) \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x.$$

$$11) \int \sin \ln x \, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x).$$

$$12) \int \cos \ln x \, dx = \frac{x}{2} (\sin \ln x + \cos \ln x).$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

$$1) \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$2) \int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}.$$

$$3) \int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$4) \int \operatorname{arccotg} x \, dx = x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

$$5) \int x \arcsin x \, dx = \frac{1}{4} [(2x^2-1) \arcsin x + x \sqrt{1-x^2}].$$

$$6) \int x \arccos x \, dx = \frac{1}{4} [(2x^2-1) \arccos x - x \sqrt{1-x^2}].$$

$$7) \int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{1}{2} [(x^2+1) \operatorname{arctg} x - x].$$

$$8) \int x \operatorname{arccctg} x \, dx = \frac{1}{2} [(x^2+1) \operatorname{arccctg} x + x].$$

$$9) \int x^n \arcsin x \, dx = \\ = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \arcsin x - \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

$$10) \int x^n \arccos x \, dx = \\ = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \arccos x + \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

$$11) \int x^n \operatorname{arctg} x \, dx = \\ = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^{n+1} dx}{1+x^2} \right).$$

$$12) \int x^n \operatorname{arccctg} x \, dx = \\ = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} \operatorname{arccctg} x + \int \frac{x^{n+1} dx}{1+x^2} \right)$$

$$13) \int \operatorname{Arsh} x \, dx = x \operatorname{Arsh} x - \sqrt{1+x^2}$$

$$14) \int \operatorname{Arch} x \, dx = x \operatorname{Arch} x - \sqrt{x^2-1}.$$

$$15) \int \operatorname{Arth} x \, dx = x \operatorname{Arth} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2).$$

$$16) \int x \operatorname{Arsh} x \, dx = \frac{1}{4} [(2x^2+1) \operatorname{Arsh} x - x \sqrt{1+x^2}].$$

$$17) \int x \operatorname{Arch} x \, dx = \frac{1}{4} [(2x^2-1) \operatorname{Arch} x - x \sqrt{x^2-1}].$$

8. Интегралы, встречающиеся в теории колебаний

$$1) \int \sin(\omega t + \varphi) \, dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi).$$

$$2) \int \cos(\omega t + \varphi) \, dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi).$$

$$3) \int \sin^2 (\omega t + \varphi) dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin 2 (\omega t + \varphi).$$

$$4) \int \cos^2 (\omega t + \varphi) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4\omega} \sin 2 (\omega t + \varphi).$$

$$5) \int \sin (\omega t + \varphi) \cos (\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2\omega} \sin^2 (\omega t + \varphi).$$

$$6) \int \sin (\omega t + \alpha) \sin (\omega t + \beta) dt = \\ = \frac{1}{2\omega} [\cos (\beta - \alpha) \omega t - \sin (\omega t + \alpha) \cos (\omega t + \beta)].$$

$$7) \int \cos (\omega t + \alpha) \cos (\omega t + \beta) dt = \\ = \frac{1}{2\omega} [\cos (\beta - \alpha) \omega t + \sin (\omega t + \alpha) \cos (\omega t + \beta)].$$

$$8) \int \sin (\omega t + \alpha) \cos (\omega t + \beta) dt = \\ = \frac{1}{2\omega} [-\sin (\beta - \alpha) \omega t + \sin (\omega t + \alpha) \sin (\omega t + \beta)].$$

$$9) \int \sin (mt + \alpha) \sin (nt + \beta) dt = \\ = \frac{1}{2(m-n)} \sin (mt - nt + \alpha - \beta) - \\ - \frac{1}{2(m+n)} \sin (mt + nt + \alpha + \beta).$$

$$10) \int \cos (mt + \alpha) \cos (nt + \beta) dt = \\ = \frac{1}{2(m+n)} \sin (mt + nt + \alpha + \beta) + \\ + \frac{1}{2(m-n)} \sin (mt - nt + \alpha - \beta).$$

$$11) \int \sin (mt + \alpha) \cos (nt + \beta) dt = \\ = -\frac{1}{2(m+n)} \cos (mt + nt + \alpha + \beta) - \\ - \frac{1}{2(m-n)} \cos (mt - nt + \alpha - \beta).$$

$$\begin{aligned}
 12) \int e^{at} \cos(\omega t + \varphi) dt &= \\
 &= \frac{e^{at}}{a^2 + \omega^2} [\omega \sin(\omega t + \varphi) + a \cos(\omega t + \varphi)] = \\
 &= \frac{e^{at}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \cos\left(\omega t + \varphi - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \int e^{at} \sin(\omega t + \varphi) dt &= \\
 &= \frac{e^{at}}{a^2 + \omega^2} [a \sin(\omega t + \varphi) - \omega \cos(\omega t + \varphi)] = \\
 &= \frac{e^{at}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin\left(\omega t + \varphi - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14) \int [e^{at} \sin(\omega t + \varphi)]^2 dt &= \\
 &= \frac{e^{2at}}{4} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2 + \omega^2} [\omega \sin 2(\omega t + \varphi) + a \cos 2(\omega t + \varphi)] \right\} = \\
 &= \frac{e^{2at}}{4} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \cos\left(2\omega t + 2\varphi - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a}\right) \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15) \int [e^{at} \cos(\omega t + \varphi)]^2 dt &= \\
 &= \frac{e^{2at}}{4} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2 + \omega^2} [\omega \sin 2(\omega t + \varphi) + a \cos 2(\omega t + \varphi)] \right\} = \\
 &= \frac{e^{2at}}{4} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \cos\left(2\omega t + 2\varphi - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a}\right) \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16) \int e^{(-b \pm ci)t} dt &= \frac{-b \pm ci}{b^2 + c^2} e^{(-b \pm ci)t} = \\
 &= \frac{e^{-bt}}{b^2 + c^2} [(c \sin ct - b \cos ct) \mp i(b \sin ct + c \cos ct)] = \\
 &= \frac{e^{-bt}}{\sqrt{b^2 + c^2}} [\sin(ct - \delta) \mp i \cos(ct - \delta)], \text{ где } \operatorname{tg} \delta = \frac{b}{c}.
 \end{aligned}$$

Б. Определенные интегралы

9. Основные понятия*

Определение. *Определенным интегралом* непрерывной функции $y=f(x)$ в пределах от a до b

$$\int_a^b f(x) dx$$

верхний предел $\downarrow b$
 подынтегральная функция $\swarrow f(x)$
 знак интеграла $\rightarrow \int$
 нижний предел $\uparrow a$
 подынтегральное выражение $\nwarrow dx$

называется число, получаемое следующим образом:

1) промежуток от $a=x_0$ до $b=x_n$ разбивается на n „элементарных промежутков“ произвольными числами $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (рис. 3, а или б):

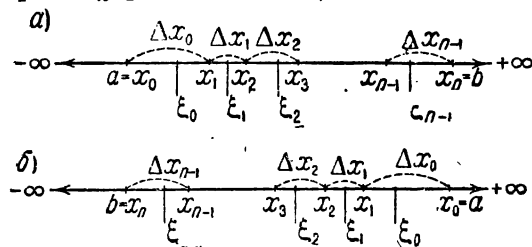


Рис. 3.

2) внутри (или на границе) каждого элементарного промежутка выбирается одно произвольное число ξ_i ;

3) значение $f(\xi_i)$ умножается на разность $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (длину элементарного промежутка со знаком $+$ или $-$);

4) полученные n произведений $f(\xi_i) \Delta x_i$ складываются;

* О криволинейном интеграле см. в главе „Векторное исчисление“, стр. 476.

5) находится предел полученной суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$,

когда каждый элементарный промежуток $\Delta x_i \rightarrow 0$ и, следовательно, $n \rightarrow \infty$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Буква x , находящаяся под знаком определенного интеграла, называется *переменной интегриации*; значение интеграла зависит только от вида функций f и от величины пределов a и b , но не от переменной интегриации, которая может быть обозначена любой буквой. Так:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt \text{ и т. п.}$$

Теорема существования. Определенный интеграл * от функции, непрерывной в промежутке от a до b , всегда существует и не зависит от выбора чисел x_i и ξ_i , лишь бы все $\Delta x_i \rightarrow 0$ **.

Геометрический смысл определенного интеграла—площадь, ограниченная частью графика $y=f(x)$, осью x и ординатами $f(a)$, $f(b)$, взятая со знаком „+“ или „-“ согласно схеме (рис. 4). Если кривая пересекает ось x , то определенный интеграл изображается алгебраической суммой площадей, находящихся по каждую сторону оси x .

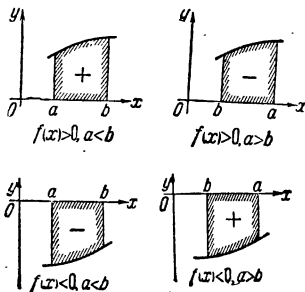


Рис. 4.

* То-есть: указанный выше предел суммы. Именно в этом смысле и говорят о существовании интеграла.

** При соответствующем обобщении понятия интеграла можно в некоторых случаях получить интеграл и от разрывной функции (так называемые *несобственные интегралы*). Об этом см. стр. 371.

Основные свойства определенного интеграла.

1) Перестановка пределов:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

2) Интеграл с равными пределами

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

3) Теорема о разбиении интеграла (при любых a, b, c):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4) Интеграл суммы двух или нескольких функций:

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx.$$

5) Интеграл функции с постоянным множителем:

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Теоремы о среднем значении.

1) Внутри промежутка интегрирования (между a и b) имеется по меньшей мере одно такое число ξ , что

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi);$$

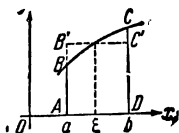


Рис. 5.

геометрический смысл этой теоремы изображен на рис. 5 (площ. $ABCD = \text{площ. } AB'C'D$).

2) Для интеграла от произведения двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ (причем $\varphi(x)$ не меняет знака в промежутке $a < x < b$):

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx \quad (a < \xi < b).$$

Теорема Лейбница-Ньютона. Определенный интеграл с переменным верхним пределом $\int_a^x f(t) dt$ есть непрерывная функция $F(x)$ этого предела, *первообразная* по отношению к подинтегральной функции; т. е. $F'(x) = f(x)$. Выражение определенного интеграла через неопределенный.

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (*)$$

Правая часть равенства (*) часто обозначается посредством символа *подстановки*:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \text{ или } F(x) \Big|_a^b.$$

Постоянное интегрирования C при подстановке пределов уничтожается и при вычислениях поэтому может быть опущено.

Равенство (*) можно выразить в виде интеграла от дифференциала:

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a). \quad (**)$$

Обобщение понятия интеграла (*несобственные интегралы*).

1) *Случай разрыва функции.* Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) , но имеет разрыв при

$x=b$ (или при $x=a$), то $\int_a^b f(x) dx$ определяется, как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (\text{или} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx), \text{ если этот пре-}$$

дел существует. В случае разрыва функции в точке c вну-

$$\text{три промежутка} \quad \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b.$$

Такой интеграл существует всегда в случае конечного или устранимого разрыва (рис. 6, а); в случае бесконеч-

ного разрыва (рис. 6, б) он может существовать (*интеграл сходится*) или не существовать (*интеграл расходится*).

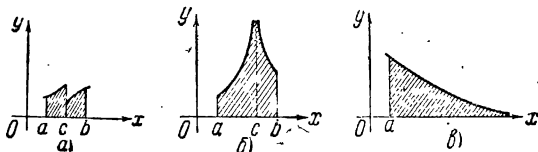


Рис. 6.

Примеры:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\sqrt{a} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{a}$$

(интеграл сходится).

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2 - \varepsilon} \operatorname{tg} x \, dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\ln \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) + \ln \cos 0 \right) = \infty \end{aligned}$$

(интеграл расходится).

2) *Случай бесконечного предела* $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$ (рис. 6, в)

определяется как $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) \, dx$ и также может сходиться или расходиться.

Примеры:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln N = \infty \quad (\text{расходится});$$

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{a} \quad (\text{сходится}).$$

Геометрический смысл обобщенного интеграла (так называемого *несобственного интеграла*) — предел площадей фигур, изображенных на рис. 6.

10. Методы вычисления определенного интеграла

Основной метод — при помощи выражения через неопределенный интеграл (стр. 371):

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_a^b.$$

В этом случае для вычисления определенного интеграла необходимо иметь выражение первообразной функции. При замене переменной интегриации x на t : $[x = x(t), t = \varphi(x)]^*$, определенный интеграл преобразуется по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f[x(t)] x'(t) dt,$$

что дает возможность при вычислении неопределенного интеграла не проводить обратной подстановки.

Пример:

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_{\arcsin 0}^{\arcsin 1} a^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} d \sin t =^{**} \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} [t]_0^{\pi/2} + \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi} \cos z dz = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{4} [\sin z]_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

* Функция $\varphi(x)$ должна быть однозначно определена внутри промежутка $a < x < b$.

** Подстановка $x = a \sin t$.

Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример: $\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e + 1 = 1.$

Искусственные приемы. Если неопределенный интеграл вычислить очень сложно или он вообще не может быть вычислен в элементарных функциях, то в ряде случаев значение определенного интеграла все же может быть найдено искусственными приемами *. Например, можно использовать теорему о дифференцировании интеграла по параметру, выражающуюся формулой

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

Пример: $I = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx.$

Вводим параметр t ; $F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx, \quad F(1) = I,$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{x^t - 1}{\ln x} \right] dx = \int_0^1 \frac{x^t \ln x}{\ln x} dx = \\ &= \left[\frac{1}{t+1} x^{t+1} \right]_0^1 = \frac{1}{t+1}, \end{aligned}$$

$$F(t) = \ln(t+1) + C, \quad I = F(1) = \ln 2 + C,$$

$$F(0) = \int_0^1 0 dx = 0 = \ln 1 + C, \quad C = 0, \quad I = \ln 2.$$

Некоторые употребительные определенные интегралы, найденные искусственными приемами, см. на стр. 385—387.

* Подробнее об этом — см. Смирнов II — стр. 530 справочника.

Приближенные методы. Наиболее употребительные из них основаны на замене интеграла суммой. Для

вычисления $\int_a^b y dx$ промежутков от $a (=x_0)$ до $b (=x_n)$ разделяется на n равных частей, и для точек деления

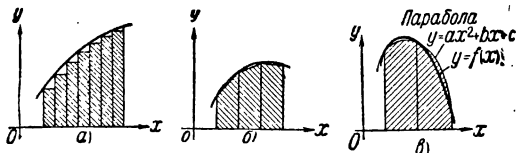


Рис. 7.

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ вычисляются значения интегрируемой функции y . Затем пользуются одной из трех формул (полагая $h = \frac{b-a}{n}$):

1) Формула прямоугольников (рис. 7, а):

$$\int_a^b y dx \approx h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}).$$

2) Формула трапеций (рис. 7, б):

$$\int_a^b y dx \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n).$$

3) Формула парабол (Симпсона); n четное (рис. 7, в):

$$\int_a^b y dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n). \quad (I)$$

Все три формулы тем точнее, чем больше n . При одних и тех же n вторая формула точнее первой, третья — еще точнее и поэтому наиболее употребительна. Для оценки ошибки, получаемой при вычислении интеграла по формуле Симпсона*, вычисляют вспомогательную сумму

$$\frac{2h}{3} (y_0 + 4y_2 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-2} + y_n), \quad (II)$$

* Оценка ошибок других формул — см. Занден, стр. 533 справочника

представляющую собой ту же формулу Симпсона для полосок шириной $2h$ (получающуюся после отбрасывания ординат с нечетными индексами). Можно приблизительно считать, что

$$\int_a^b y \, dx - (I) = \frac{(I) - (II)}{15}.$$

Заменяя подинтегральную функцию каким-либо интерполяционным многочленом (см. стр. 518), можно получить много других формул приближенного интегрирования. Наиболее употребительны из них (обозначения см. стр. 518):

$$\begin{aligned} \int_a^b y \, dx = & 2h [(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + \\ & + \frac{1}{6} (\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_2 + \dots + \Delta^2 y_{n-2}) - \\ & - \frac{1}{180} (\Delta^4 y_{-1} + \Delta^4 y_1 + \dots + \Delta^4 y_{n-3}) + \\ & + \frac{1}{1512} (\Delta^6 y_{-2} + \Delta^6 y_0 + \dots + \Delta^6 y_{n-4})] \quad (n - \text{четное}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b y \, dx = & h \left[\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) - \right. \\ & - \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta y_{n-1} + \Delta y_n}{2} - \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} \right) + \\ & + \frac{11}{720} \left(\frac{\Delta^3 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-1}}{2} - \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{317} \left(\frac{\Delta^5 y_{n-3} + \Delta^5 y_{n-2}}{2} - \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в этих формулах обычно не вычисляется и служит только для приближенной оценки погрешности вычислений по данной формуле.

Графический метод. Если интегрируемая функция $y = f(x)$ изображена графиком AB (рис. 8), то $\int_a^b f(x) \, dx$,

равный площади M_0ABN , может быть найден графически следующим способом: 1) M_0N делим на $2n$ равных частей точками $x_{1/2}, x_1, x_{1 1/2}, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n-1/2}$ (чем боль-

ше точек деления, тем точнее результат); 2) из точек деления $x_{1/2}, x_{1 1/2}, \dots, x_{n-1/2}$ проводим ординаты кривой и откладываем их на оси Oy (отрезки $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$); 3) откладываем отрезок OP произвольной длины в левой части оси x и соединяем P с точками $A_1, A_2, \dots, A_n$; 4) через точку M_0 проводим отрезок M_0M_1 параллельно PA_1 (до пересечения с ординатой точки A_1), через M_1 — отрезок $M_1M_2 \parallel PA_2$, затем $M_2M_3 \parallel OP$ и т. д., пока не достигнем последней ординаты в точке M_n . Интеграл

$\int_a^b f(x) dx$ численно равен про-

изведению длин отрезков OP и NM_n ; произвольной длиной

OP пользуются для регулирования размеров чертежа (чем меньше допустимые размеры, тем большим нужно выби-

рать OP). Если $OP=1$, то $\int_a^b f(x) dx = NM_n$, а ломаная $M_0M_1M_2 \dots M_n$ изображает приблизительно график первообразной функции от $f(x)$ (неопределенный интеграл $\int f(x) dx$).

Вычисление при помощи планиметра. Существуют приборы (планиметры), позволяющие определять площадь, ограниченную произвольной кривой, и таким образом вычислять определенные интегралы от функции $y=f(x)$, заданной своим графиком. Планиметры специального типа вычисляют не только $\int y dx$, но и $\int y^2 dx$ и $\int y^3 dx$. Описание и теория планиметров см. Крылов — стр. 533 справочника.

Интегралы. Существуют также приборы, вычерчивающие график интегральной функции $Y = \int_a^x f(t) dt$ по графику заданной функции $y=f(x)$ — так наз. *интеграфы*. Описание и теория интеграфа см. Крылов — стр. 533 справочника.

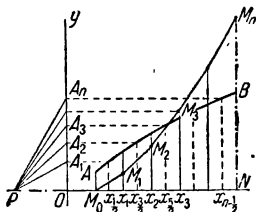


Рис. 8.

11. Приложения интегрального исчисления

Общий принцип приложен и определенному интегралу к вычислению геометрических, физических и других величин

С х е м а	Пример: вычисление объема пирамиды (S — площадь основания, H — высота)
1) Вычисляемая величина A разбивается определенным образом на большое число малых величин: $A = a_1 + a_2 + \dots + a_n;$	1) Вычисляемый объем V разбивается плоскими сечениями на объемы тонких усеченных пирамид (рис. 9, a_i): $V = v_1 + v_2 + \dots + v_n;$
2) Каждая величина a_i заменяется величиной $\tilde{a}_i$ (близкой к a_i), вычисление которой ведется по известной формуле. Ошибка $a_i - \tilde{a}_i$ должна быть бесконечно малой высшего порядка по сравнению с a_i (т. е. a_i и $\tilde{a}_i$ — равносильные бесконечно малые);	2) Каждая усеченная пирамида заменяется призмой $\tilde{v}_i$ той же высоты и с площадью (основания, гавной вершине)у основания, равной пирамиды (рис. 9, $\tilde{v}_i$). Отбра-сываемый объем — бесконечно малая высшего порядка, чем v_i;

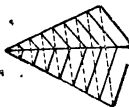


Рис. 9, а



Рис. 9, б

3) Величину a_i вычисляют, стремясь ей придать вид

$$f(x_i) \Delta x_i;$$

4) Искомая величина вычисляется как предел суммы

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x) dx,$$

где a и b — граничные значения x .

3) Формулу объема v_i приводят к виду

$$v_i = s_i \Delta h_i,$$

где h_i — расстояние верхней грани до вершины пирамиды или (т. к. $s_i : S = h_i^2 : H^2$);

$$\sim v_i = \frac{S h_i^2}{H^2} \Delta h_i;$$

4) Искомый объем вычисляется как предел суммы:

$$V_{\text{пир}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{S h_i^2}{H^2} \Delta h_i =$$

$$= \int_0^H \frac{S h^2}{H^2} dh = \frac{SH}{3}.$$

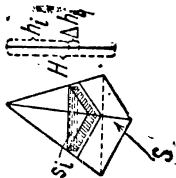


Рис. 9,8

Основные приложения к геометрии:

Площадь. Формула площади криволинейной трапеции (рис. 10, а), если уравнение кривой задано явно [$y=f(x)$, $a < x < b$] или параметрически [$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_1 < t < t_2$]:

$$S_{ABCD} = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt;$$

формула площади криволинейной трапеции, изображенной

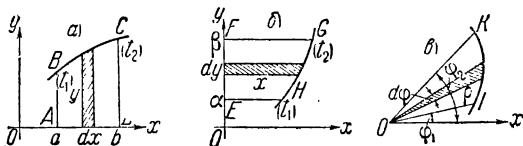


Рис. 10.

на рис. 10, б [$x=g(y)$, $\alpha < y < \beta$ или $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_1 < t < t_2$]:

$$S_{EFGH} = \int_{\alpha}^{\beta} x dy = \int_{\alpha}^{\beta} g(y) dy = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \psi'(t) dt;$$

формула площади криволинейного сектора (рис. 10, в), если кривая задана уравнением в полярных координатах [$\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$]:

$$S_{OIK} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi.$$

Вычисление площадей более сложных фигур—см. стр. 396—397.

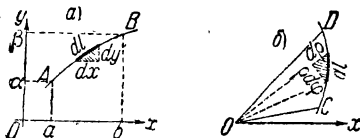


Рис. 11.

Длина дуги. Формула длины дуги кривой (рис. 11, а), если уравнение кривой задано явно [$y=f(x)$ или $x=g(y)$]

или параметрически [$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$]:

$$\begin{aligned} L_{\widehat{AB}} &= \int dl = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \\ &= \int_a^\beta \sqrt{[g'(y)]^2 + 1} dy = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt; \end{aligned}$$

если же кривая (рис. 11, б) задана уравнением в полярных координатах [$\rho=\rho(\varphi)$], то

$$L_{\widehat{CD}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Поверхность. Формула площади поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси x (рис. 12, а):

$$S = 2\pi \int_a^b y dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx;$$

вокруг оси y (рис. 12, б):

$$S = 2\pi \int_a^\beta x dl = 2\pi \int_a^\beta x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy.$$

Вычисление поверхностей, ограничивающих более сложные тела,—см. стр. 396—397.

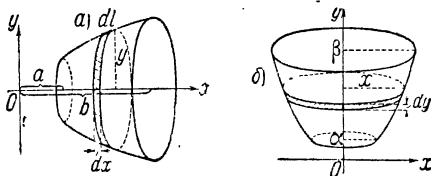


Рис. 12.

Объем. Формула объема тела вращения кривой вокруг оси x (рис. 12, а):

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx;$$

вокруг оси y (рис. 12, б):

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy.$$

Формула объема тела, если площадь его сечения, произведенного перпендикулярно оси x , есть функция x [$S=f(x)$] (рис. 13):

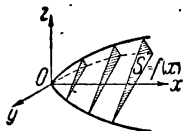


Рис. 13.

$$V = \int_a^b f(x) dx.$$

Например, зная формулу площади эллипса: $s=\pi ab$, можно по этой формуле вычислить объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (см. стр. 250).

Приложения к механике и физике

Путь, пройденный точкой, начиная с момента t_0 до момента T [если скорость движения — переменная, зависящая от времени, $v=f(t)$], определяется по формуле:

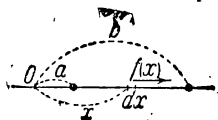


Рис. 14.

$$S = \int_{t_0}^T v dt.$$

Работа, затраченная силой на передвижение тела от $x=a$ до $x=b$ по прямой Ox , совпадающей с направлением силы [если величина силы — переменная $F=f(x)$], определяется по формуле (рис. 14):

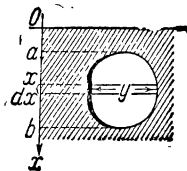


Рис. 15.

$$A = \int_a^b F dx.$$

Давление, производимое жидкостью с удельным весом γ на одну сторону погруженной в нее вертикальной пластинки, если расстояния точек пластинки до уровня жидкости (x) изменяется от a до b (рис. 15), определяется по формуле:

$$P = \int_a^b \gamma x y dx,$$

где y — длина горизонтального сечения пластинки [$y=f(x)$].

Момент инерции: 1) дуги однородной кривой $y=f(x)$ [$a < x < b$] относительно оси y (рис. 16, а) определяется по формуле:

$$J_x = \delta \int_a^b x^2 dl = \delta \int_a^b x^2 \sqrt{1+(y')^2} dx \quad (\delta \text{—линейная плотность});$$

2) однородной плоской фигуры (рис. 16, б) относительно оси y —по формуле:

$$J_x = \delta \int_a^b x^2 y dx,$$

где y —длина сечения, параллельного оси y .

См. также стр. 396—399.

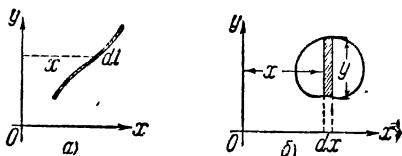


Рис. 16.

Центр тяжести C дуги (рис. 17, а) однородной плоской кривой $y=f(x)$ ($a < x < b$) имеет координаты:

$$x_C = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} dx}{L}, \quad y_C = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx}{L},$$

где L —длина кривой (см. стр. 380—381). Центр тяжести замкнутой кривой (рис. 17, б):

$$x_C = \frac{\int_a^b x (\sqrt{1+(y'_1)^2} + \sqrt{1+(y'_2)^2}) dx}{L},$$

$$y_C = \frac{\int_a^b (y_1 \sqrt{1+(y'_1)^2} + y_2 \sqrt{1+(y'_2)^2}) dx}{L},$$

где $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ — уравнения верхней и нижней частей контура, L — длина всего контура.

1-я теорема Гюльдена: Поверхность тела, описываемого плоской кривой при вращении ее около оси, лежащей в плоскости этой кривой и не пересекающей ее, равна про-

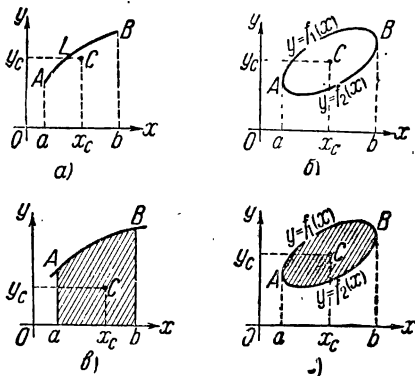


Рис. 17.

изведению длины кривой на длину окружности, описываемой при этом вращении центром тяжести кривой:

$$S_{\text{вр}} = L \cdot 2\pi y_c.$$

Центр тяжести C однородной криволинейной трапеции (рис. 17, в) имеет координаты:

$$x_c = \frac{\int_a^b xy \, dx}{S}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx}{S},$$

где S — площадь трапеции, $y = f(x)$ — уравнение кривой AB .
Центр тяжести произвольной плоской фигуры (рис. 17, г):

$$x_c = \frac{\int_a^b x(y_1 - y_2) \, dx}{S}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) \, dx}{S},$$

где $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ — уравнения верхней и нижней частей контура, S — площадь фигуры.

2-я теорема Гюльдена: Объем тела, описываемого плоской фигурой при вращении ее около оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой при вращении центром тяжести этой площади

$$V_{вр} = S \cdot 2\pi c.$$

О центрах тяжести плоских фигур и тел — см. стр. 396—399 (кратные интегралы).

12. Таблица некоторых определенных интегралов

Интегралы от показательных функций

$$1) \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)^*}{a^{n+1}} \text{ при } a > 0, n > -1.$$

В частности, при n целом положительном этот интеграл равен $\frac{n!}{a^{n+1}}$.

$$2) \int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^*}{2a^{(n+1)/2}} \text{ при } a > 0, n > -1.$$

В частности, при n целом четном ($n=2k$) этот интеграл равен $\frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1) \sqrt{\pi}}{2^{k+1} a^{k+1/2}}$, при n целом нечетном ($n=2k+1$)

он равен $\frac{k!}{2a^{k+1}}$.

$$3) \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$4) \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{b^2}{4a^2}}}{a}.$$

* О функции Γ (гамма) см. стр. 185.

Интегралы от тригонометрических функций

$$5) \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x dx = \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{\alpha! \beta!}{2(\alpha+\beta+1)!} \quad (\text{при } \alpha \text{ и } \beta \text{ целых, положительных}).$$

Эта формула справедлива для любых α и β ; ею можно пользоваться для нахождения

$$\int_0^{\pi/2} V \sin x dx, \int_0^{\pi/2} V^3 \sin x dx, \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{V^3 \cos x} \quad \text{и т. п.}$$

$$6) \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } a > 0, \\ -\pi/2 & \text{при } a < 0; \end{cases} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x} dx = \infty.$$

$$7) \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{Vx} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{Vx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$8) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$9) \int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} dx = \pm \frac{\pi}{2} e^{-|ab|}$$

(знак соответствует знаку числа b).

$$10) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$11) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

$$12) \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } a > b, \\ \pi/4 & \text{при } a = b, \\ 0 & \text{при } a < b. \end{cases}$$

Интегралы от логарифмических функций

$$13) \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = -\frac{\pi^2}{6}.$$

$$14) \int_0^1 \frac{\ln x}{x+1} dx = -\frac{\pi^2}{12}.$$

$$15) \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

Интегралы от алгебраических функций

$$16) \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b} dx = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}} \quad (0 < a < b).$$

$$17) \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} dx = 2 \int_0^1 x^{2\alpha+1} (1-x^2)^{\beta} dx = \\ = \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha+\beta+1)!} \text{ (см. интеграл 5).}$$

$$18) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]^3}{2\pi \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{2}}.$$

$$19) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\sqrt[3]{3} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]^3}{\pi \sqrt[3]{4}}.$$

$$20) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right]^2}{4 \sqrt[4]{2} \pi}.$$

Большая таблица определенных интегралов собрана в книге D. Bierens de Haan, Leiden, 1939.

В. Кратные интегралы

13. Основные понятия

Двойной (или двукратный) интеграл. Двойным интегралом функции двух переменных $w=f(x, y)$ *, распространенным на площадь S

[обозначается: $\int_S f(x, y) dS$, иногда $\iint_S f(x, y) dS$],

называют число, получаемое следующим образом:

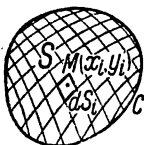


Рис. 18.

1) фигура S (рис. 18) разбивается произвольным образом на n „элементарных площадок“;

2) внутри (или на границе) каждой элементарной площадки произвольно выбирается одна точка (x_i, y_i) ;

3) значение функции w в этой точке, $f(x_i, y_i)$, умножается на величину площади dS_i соответствующей площадки;

4) все полученные таким образом произведения $f(x_i, y_i) dS_i$ складываются;

5) находится предел полученной суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) dS_i$,

когда каждая площадка стремится к нулю**, и, следовательно, число их $n \rightarrow \infty$:

$$\int_S f(x, y) dS = \lim_{\substack{dS_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) dS_i.$$

Двойной интеграл от функции, непрерывной в области S , которая ограничена непрерывной, нигде себя не пересекающей кривой C , всегда существует и не зависит ни от способа разбиения области S , ни от выбора точек (x_i, y_i) (теорема существования).

* w рассматривается здесь как функция точки (см. стр. 468), которая может задаваться не только в декартовой системе координат.

** К нулю должна стремиться не величина площади dS , а сама площадка по своей форме, строго говоря,—диаметр площадки, понимая под последним расстояние наиболее удаленных друг от друга двух точек площадки. Площадь прямоугольника, например, при уменьшении одной из его сторон стремится к нулю, но диаметр его остается конечным.

Геометрический смысл двойного интеграла—объем цилиндрического тела (рис. 19), ограниченного: 1) площадкой S на плоскости xOy , 2) цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси z , а направляющей является контур C , и 3) поверхностью $f=f(x, y)$. Каждый элемент суммы $f(x_i, y_i) dS_i$ дает объем призматического столбика с основанием dS_i и высотой $f(x_i, y_i)$. Объем получается со знаком $+$ или $-$, в зависимости от того, лежит ли соответствующая часть поверхности $z=f(x, y)$ над или под плоскостью xOy (если она пересекает эту плоскость, то объем разбивается на алгебраическую сумму отдельных слагаемых).

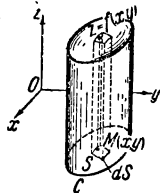


Рис. 19.

Интеграл по поверхности — см. стр. 480—482.

Тройной (трехкратный) интеграл функции трех переменных $w=f(x, y, z)$, распространенный на объем V

$$\text{обозначается: } \int_V f(x, y, z) dV,$$

$$\text{иногда } \iiint_V f(x, y, z) dV,$$

определяется аналогично двойному интегралу: тело V (рис. 20) разбивается на „элементарные тела“ и рассматриваются произведения вида $f(x_i, y_i, z_i) \cdot dV$, где (x_i, y_i, z_i) — точка внутри (или на границе) элементарного тела, а dV — ее



Рис. 20.

объем. Тройным интегралом называется предел суммы таких произведений для всех элементарных тел, на которые разбито тело, если каждое из этих элементарных тел стремится к нулю*, а следовательно, число их—к бесконечности:

$$\int_V f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(x_i, y_i, z_i) dV_i.$$

Для тройного интеграла от непрерывной функции имеет место теорема существования, аналогичная приведенной выше.

* В таком же смысле, как это понималось и для двойного интеграла, к нулю должна стремиться не величина объема, а диаметр тела (расстояние наиболее удаленных друг от друга двух точек тела).

14. Вычисление кратных интегралов

Вычисление двойного и тройного интегралов сводится к последовательному вычислению двух (трех) простых интегралов. Это производится различными способами в зависимости от выбора системы координат*; наиболее употребительны следующие:

Двойной интеграл:

1) В декартовых координатах. Площадь разбивается координатными линиями на прямоугольники (рис. 21, а), и

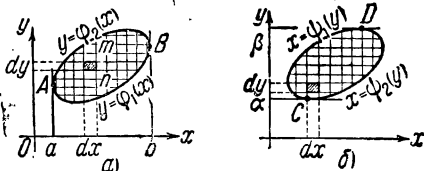


Рис. 21.

суммирование $f(x, y) dS$ производится сначала по всем прямоугольникам вдоль каждой вертикальной полосы, а затем — по всем вертикальным полосам. Аналитически:

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y) dS &= \int_a^b dx \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] = \\ &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dx dy **, \end{aligned}$$

где $y = \varphi_2(x)$ и $y = \varphi_1(x)$ — уравнения верхней (AmB) и нижней (AnB) частей кривой, ограничивающей S ; a и b — абсциссы крайних левой и правой точек кривой; $dx dy = dS$ („элемент площади в декартовых координатах“). Первое интегрирование производится в предположении, что x — постоянная.

* О преобразовании двойного и тройного интегралов для случая произвольной системы криволинейных координат см. Смирнов, т. II (стр. 532 справочника).

** Условились не писать квадратных скобок, а относить внутренний интеграл, стоящий на втором месте, к переменной, дифференциал которой стоит также на втором месте.

Пример: $A = \int_S xy^2 dS$, где S — площадь между параболой $y = x^2$ и прямой $y = 2x$ (рис. 22).

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2 dx dy = \\ &= \int_0^2 x dx \left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} = \frac{1}{3} \int_0^2 (8x^4 - x^7) dx = \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

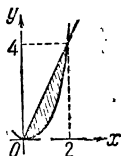


Рис. 22.

Вычисление в декартовых координатах можно проводить и в обратном порядке (см. рис. 21, б)

$$\int_S f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dy dx.$$

Для приведенного примера:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy^2 dy dx = \\ &= \int_0^4 y^2 dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{y/2}^{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int_0^4 y^2 \left(y - \frac{y^2}{4} \right) dy = \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

2) В полярных координатах. Площадь разбивается координатными линиями на элементарные части, ограниченные двумя дугами concentрических окружностей и двумя радиусами (рис. 23), функция выражается в полярных координатах: $w = f(\rho, \varphi)$, и суммирование производится сначала вдоль каждого сектора, а затем — по всем секторам. Аналитически:

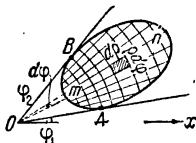


Рис. 23.

$$\int_S f(\rho, \varphi) dS = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi,$$

где $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ — уравнения внутренней (AmB) и внешней (AnB) частей кривой, ограничивающей S ; φ_1 и φ_2 — полярные углы крайних радиусов к площади, $\rho d\rho d\varphi = dS$

(элемент площади в полярных координатах). Обратный порядок интегрирования применяется редко; практически часто встречается случай, когда $\rho_1(\varphi) \equiv 0$ (кривая проходит через полюс).

Пример:



Рис. 24.

$$A = \int_S \rho \sin^2 \varphi dS,$$

где S —площадь полукруга $\rho = 3 \cos \varphi$ (рис. 24).

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos \varphi} \rho \sin^2 \varphi \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{3 \cos \varphi} = \\ &= 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = 1 \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Тройной интеграл

1) В декартовых координатах. Объем разбивается координатными поверхностями (в данном случае—плоскостями) на параллелепипеды (рис. 25), и суммирование $f(x, y, z) dV$ производится сначала по всем параллелепипедам вдоль каждого вертикального столбца (по z), затем—по столбцам вдоль каждого „пласта“ (по y) и, наконец, по всем пластам (по направлению x). Аналитически:

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[dx \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy = \\ &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dx dy dz; \end{aligned}$$

здесь $z = \psi_1(x, y)$ и $z = \psi_2(x, y)$ —уравнения нижней и верхней частей поверхности, ограничивающей объем V , т. е. частей, разделенных кривой Γ , а $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ —уравнения частей кривой C , являющейся проекцией Γ на плоскость xOy , т. е. частей, ограниченных точками $x = a$ и $x = b$.

Как и в случае двойного интеграла, порядок интегрирования может быть любым; таким образом, вычисление трой-

ного интеграла можно производить шестью способами:

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dV &= \iiint f dx dy dz = \iint \int f dx dz dy = \\ &= \iint \int f dy dx dz = \iint \int f dy dz dx = \\ &= \iint \int f dz dx dy = \iint \int f dz dy dx. \end{aligned}$$

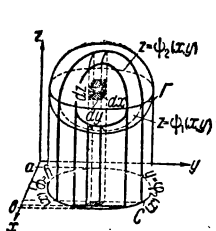


Рис. 25.

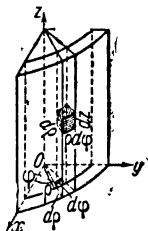


Рис. 26.

Пример: Вычислить интеграл $J = \int_V (y^2 + z^2) dV$, где V — объем пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (y^2 + z^2) dx dy dz = \\ &= \int_0^1 \left\{ dx \int_0^{1-x} \left[dy \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2) dz \right] \right\} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

2) В цилиндрических координатах: Объем разбивается на элементарные части координатными поверхностями*: $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$. Элемент объема: $dV = \rho d\varphi d\rho dz$ (рис. 26). Функция w выражается в цилиндрических координатах:

$$w = f(\rho, \varphi, z).$$

* О цилиндрических и сферических координатах и соответствующих координатных поверхностях см. стр. 238.

Формула:

$$\int_S f(\rho, \varphi, z) dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} f(\rho, \varphi, z) \rho d\varphi d\rho dz.$$

Пример (рис. 27): Вычислить интеграл $J = \int_V dV$, распространенный на объем, ограниченный плоскостями xOy и xOz , цилиндром $x^2 + y^2 = ax$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

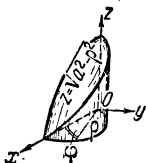


Рис. 27.

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \\ z_2 &= \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \rho^2}, \\ \rho_1 &= 0, \\ \rho_2 &= a \cos \varphi, \\ \varphi_1 &= 0, \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\varphi d\rho dz = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \left[\rho d\rho \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} dz \right] \right\} = \frac{a^3}{18} (3\pi - 4). \end{aligned}$$

3) В сферических координатах. Объем разбивается на элементарные части координатными поверхностями **: $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$. Элемент объема:

$$dV = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr$$

(рис. 28). Функция w выражается в сферических координатах:

$$w = f(r, \varphi, \theta).$$

Формула:

$$\int_V f(r, \varphi, \theta) dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr.$$

* Поскольку здесь $f=1$, интеграл численно равен объему данного тела.

** См. список * на предыдущей странице.

Пример: Вычислить интеграл $J = \int_V \frac{\cos \theta}{r^2} dV$, распространенный на объем конуса, высота которого равна h ,

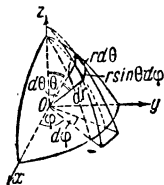


Рис. 28.

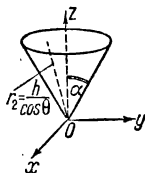


Рис. 29.

угол при вершине равен 2α и который расположен относительно системы координат согласно рис. 29.

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{h}{\cos \theta}, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \alpha, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2\pi.$$

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^{h/\cos \theta} \frac{\cos \theta}{r^2} r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ d\varphi \int_0^\alpha \cos \theta \sin \theta \, d\theta \left[\int_0^{h/\cos \theta} dr \right] \right\} = 2\pi h (1 - \cos \alpha).$$

15. Приложения крат

Двойные

Приложение	Общая формула
Площадь плоской фигуры .	$S = \int_S dS$
Площадь поверхности . . .	$S_{\text{пов}} = \int_S \frac{dS}{\cos \gamma} *$
Объем тела	$V = \int_S z dS$
Момент инерции плоской фигуры относительно оси x .	$J_x = \int_S y^2 dS$
Момент инерции плоской фигуры относительно полюса O	$J_O = \int_S \rho^2 dS$
Масса плоской фигуры с плотностью δ (функцией точки)	$M = \int_S \delta dS$
Центр тяжести однородной плоской фигуры	$x_C = \frac{\int_S x dS}{S}$ $y_C = \frac{\int_S y dS}{S}$

* В данном случае S — проекция поверхности на плоскость xy , γ — угол, образованный нормалью к элементу поверхности

ных интегралов

интегралы

В декартовых координатах	В полярных координатах
$= \iint dx dy$	$= \iint \rho d\varphi d\rho$
$= \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$	$= \iint \sqrt{\rho^2 + \rho \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} d\varphi d\rho$
$= \iint z dx dy$	$= \iint z \rho d\varphi d\rho$
$= \iint y^2 dx dy$	$= \iint \rho^2 \cos^2 \varphi d\varphi d\rho$
$= \iint (x^2 + y^2) dx dy$	$= \iint \rho^3 d\varphi d\rho$
$= \iint \delta dx dy$	$= \iint \delta \rho d\varphi d\rho$
$= \frac{\iint x dx dy}{\iint dx dy}$	$= \frac{\iint \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\rho}{\iint \rho d\varphi d\rho}$
$= \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy}$	$= \frac{\iint \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho}{\iint \rho d\varphi d\rho}$

 с осью z [угол между элементом поверхности и плоскостью xy].

Приложение	Общая формула	В декартовых координатах
Объем тела	$V = \int_V dv$	$= \iiint dx dy dz$
Момент инерции тела относительно оси z	$J_z = \int_V \rho^2 dv$	$= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$
Момент инерции тела относительно полюса O	$J_O = \int_V r^2 dv$	$= \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$
Масса тела с плотностью δ (функция точки)	$M = \int_V \delta dv$	$= \iiint \delta dx dy dz$
Центр тяжести тела .	$x_C = \frac{\int_V x dv}{V}$	$= \frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz}$
	$y_C = \frac{\int_V y dv}{V}$	$= \frac{\iiint y dx dy dz}{\iiint dx dy dz}$
	$z_C = \frac{\int_V z dv}{V}$	$= \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz}$

интегралы

В цилиндрических координатах	В сферических координатах
$= \iiint \varphi \, d\varphi \, d\rho \, dz$	$= \iiint r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$
$= \iiint \rho^3 \, d\varphi \, d\rho \, dz$	$= \iiint r^4 \sin^3 \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$
$= \iiint (\rho^2 + z^2) \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz$	$= \iiint r^4 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$
$= \iiint \delta \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz$	$= \iiint \delta r^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$

IV. ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Общие понятия

Д и ф е р е н ц и а л ь н о е у р а в н е н и е — уравнение, содержащее неизвестные функции, независимые переменные и производные неизвестных функций (или их дифференциалы). *Примеры:* 1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^5 \frac{dy}{dx} + \sin y = 0$; 2) $x \, d^2y \, dx -$

$- dy \, (dx)^2 = e^y \, (dy)^2$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xyz \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$. Если неизвестные

функции зависят от одной независимой переменной — дифференциальное уравнение называется *обыкновенным* (прим. 1, 2). Если неизвестные функции зависят от нескольких независимых переменных, дифференциальное уравнение носит название *уравнения с частными производными* (прим. 3). *Порядком дифференциального уравнения* называется наивысший из порядков производных, входящих в уравнение [уравнение (1) — 1-го порядка, уравнения (2), (3) — 2-го порядка].

И н т е г р а л (и л и р е ш е н и е) д и ф е р е н ц и а л ь н о г о у р а в н е н и я — одно или несколько уравнений, связывающих неизвестные функции и независимые переменные, таких, что данное дифференциальное уравнение обращается в тождество при подстановке в него неизвестных функций и их производных, выраженных из этих уравнений. Интегралы дифференциальных уравнений могут содержать постоянные величины или функции, могущие быть выбранными произвольно (*произвольные постоянные и функции*). Таким образом, отыскание решения дифференциального уравнения является задачей неоднозначной. Обычно на неизвестные функции накладывают добавочные, так называемые *начальные* или *граничные* условия, заключающиеся в том, что неизвестные функции, а также и некоторые их производные должны принимать заданные значения, при некоторых определенных значениях независимых переменных. При этих добавочных условиях решение задачи может оказаться однозначным. Например, обыкновенное дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ имеет (при некоторых ограничениях) единственное решение, если потребовать, чтобы $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ принимали заданные значения при $x = a$ (точнее см. стр. 411).

И н т е г р а л д и ф е р е н ц и а л ь н о г о у р а в н е н и я является *общим*, если из него может быть получено надлежащим выбором произвольных постоянных или функций определенное *частное* решение, соответствующее любым начальным или граничным условиям, допускающим однозначное решение. Дифференциальное уравнение может иметь так называемые *особые* интегралы, которые не могут быть получены из общего интеграла ни при каких частных значениях произвольных постоянных или функций (см. стр. 402).

А. Обыкновенные дифференциальные уравнения

2. Уравнения 1-го порядка: $y' = f(x, y)$

Теоретические сведения. Теорема существования (Коши). Если $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области около точки (x_0, y_0) ($|x - x_0| < a$ и $|y - y_0| < b$) и удовлетворяет в этой области условию Липшица, т. е.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N |y_1 - y_2|,$$

причем N не зависит от x, y_1 и y_2 , то существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в данной области и непрерывное в последней, принимающее при $x = x_0$ значение y_0 . Это решение является непрерывной функцией от y_0 . (Примеры нарушения условий теоремы Коши см. стр. 402 и 406.)

Поле направлений. Если через точку $M(x, y)$ проходит график решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, то угловой коэффициент касательной к графику в данной точке (равный $\frac{dy}{dx}$) может

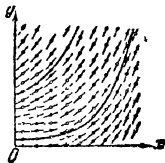


Рис. 1.

быть определен непосредственно из дифференциального уравнения; таким образом дифференциальное уравнение определяет в каждой точке направление касательной к графику решения. Совокупность этих направлений образует **поле направлений** (рис. 1). Решение дифференциального уравнения 1-го порядка сводится геометрически к нахождению уравнения такой кривой (**интегральной кривой**), касательная к которой имела бы в каждой точке кривой направление, совпадающее с направлением поля в этой точке. Согласно теореме Коши, в некоторой области через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая (рис. 2). Меняя y_0 , будем получать различные интегральные кривые. Совокупность всех интегральных кривых будет зависеть от одного параметра, и уравнение этого семейства — общий интеграл уравнения 1-го порядка будет содержать одну произвольную постоянную. Для получения из общего интеграла $F(x, y, C) = 0$ частного интеграла $y = \varphi(x)$, удовлетворяющего условию $y_0 = \varphi(x_0)$, необходимо определить C из уравнения

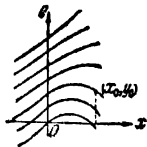


Рис. 2.

$$F(x_0, y_0, C) = 0.$$

Особый интеграл — такой интеграл дифференциального уравнения, для всех точек которого нарушается свойство

единственности решения (см. теорему Коши, стр. 401). Особый интеграл вообще не может быть получен из общего ни при каком значении входящей в него произвольной постоянной.



Рис. 3.

Огибающие (см. стр. 271) интегральных кривых будут представлять собой особые интегралы (рис. 3). Если дифференциальное уравнение $F(x, y, p) = 0$, где $p = \frac{dy}{dx}$, есть многочлен относительно p , то для нахождения особого решения исключают p , присоединяя к данному уравнению уравнение $\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0$. Если полученное соотношение между x и y является решением (но не частным), то это будет особое решение.

Пример: $x - y - \frac{4}{9} p^2 + \frac{8}{27} p^3 = 0$.

Второе уравнение (т. е. $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$): $-\frac{8}{9} p + \frac{8}{9} p^2 = 0$.

Исключая p , получим: а) $x - y = 0$, б) $x - y = \frac{4}{27}$; а) не является решением, б) — особое решение (общее решение этого уравнения: $(y - C)^2 = (x - C)^3$). Если известно уравнение семейства интегральных кривых, т. е. общий интеграл данного дифференциального уравнения, то для нахождения огибающих этого семейства, представляющих собой особые решения, могут быть применены методы дифференциальной геометрии (см. стр. 271).

Основные методы интегрирования. **Разделение переменных.** Если уравнение может быть приведено к виду

$$M(x) N(y) dx + P(x) Q(y) dy = 0,$$

то его можно представить в виде

$$R(x) dx + S(y) dy = 0,$$

где переменные x и y разделены; для этого нужно все уравнение разделить на $P(x) \cdot N(y)$, после чего общий интеграл будет иметь вид

$$\int \frac{M(x)}{P(x)} dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)} dy = C.$$

Пример: $x dy + y dx = 0$;

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = C; \quad \ln y + \ln x = C = \ln c; \quad yx = c.$$

Однородные уравнения. Если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями своих аргументов одинакового измерения (см. стр. 232), то в уравнении $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ переменные разделятся (см. выше) после введения вместо y новой переменной $u = \frac{y}{x}$.

Пример: $y^2 dx + x(x-y) dy = 0$; $y = ux$; $dy = u dx + x du$;
 $u^2 x^3 dx + x^3(1-u)(x du + u dx) = 0$; $\frac{dx}{x} + \frac{(1-u) du}{u} = 0$;
 $\ln x + \ln u - u = C = \ln c$, $ux = ce^{1-u}$; $y = ce^{1-\frac{y}{x}}$.

Уравнения в полных дифференциалах. Выражение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

является полным дифференциалом (см. стр. 311) некоторой функции $\Phi(x, y)$, если $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. В этом случае $\Phi(x, y) = C$ будет общим интегралом уравнения

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0.$$

Функция $\Phi(x, y)$ может быть найдена по формуле:

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x M(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y N(x_0, \eta) d\eta$$

(x_0 и y_0 произвольны).

Пример см. ниже.

Интегрирующий множитель—это функция $\mu(x, y)$ такая, что уравнение $Mdx + Ndy = 0$ от умножения на нее обращается в уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель удовлетворяет уравнению

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x},$$

причем любое частное решение этого уравнения является искомым интегрирующим множителем.

Пример: Найти решение уравнения: $(x^2 + y)dx - xdy = 0$.
 Уравнение для интегрирующего множителя: $-x \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - (x^2 + y) \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 2$. Ищем интегрирующий множитель, не зависящий от y ; тогда $x \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -2$ или $\mu = \frac{1}{x^2}$. Умножаем данное дифференциальное уравнение на μ : $\left(1 + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x} dy = 0$.

Общий интеграл ($x_0=1, y_0=0$):

$$\Phi(x, y) \equiv \int_1^x \left(1 + \frac{y}{\xi^2}\right) d\xi - \int_0^y d\eta = C$$

или

$$x - \frac{y}{x} = C_1 \quad (C_1 = C + 1).$$

Линейное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

имеет интегрирующий множитель $\mu = e^{\int P dx}$. Общий инте-

грал находится по формуле $y = e^{-\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + C \right]$.

Если заменить везде в этой формуле неопределенное интегрирование интегрированием в пределах от x_0 до x^* , то получается решение, принимающее значение C при $x=x_0$. Если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ линейного уравнения, то его общее решение найдется по формуле

$y = y_1 + C e^{-\int P dx}$. Если известны два линейно независимых (см. стр. 414) частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то общее решение линейного уравнения найдется без интегрирования: $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$.

Пример: Найти решение уравнения $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=0, y_0=0$. Вычисляем

$$e^{-\int_0^x \operatorname{tg} x dx} = \cos x^{**}$$

и по формуле получим:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\cos x} \int_0^x \cos^2 x dx = \frac{1}{\cos x} \left[\frac{\sin x \cos x + x}{2} \right] = \\ &= \frac{\sin x}{2} + \frac{x}{2 \cos x}. \end{aligned}$$

Уравнение Д. Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

сводится к линейному делением на y^n и введением новой переменной $z = y^{-n+1}$.

* См. сноску на стр. 332.

** См. стр. 162.

Пример: $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$. Здесь $\lambda = \frac{1}{2}$. Разделив на $\sqrt{y}$ и введя новую переменную $z = \sqrt{y}$, получим $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}$.

По формуле решения линейного уравнения: $e^{\int P dx} = \frac{1}{x^2}$ и $z = x^2 \left[\int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} dx + C \right] = x^2 \left[\frac{1}{2} \ln x + C \right]$; следовательно, $y = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln x + C \right)^2$.

Уравнение Риккати

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

вообще говоря, не интегрируется в квадратурах (т. е. нахождение его решения не может быть сведено к ряду последовательных интегрирований). Если же известно одно частное решение y_1 уравнения Риккати, то введением новой переменной $z: y = y_1 + \frac{1}{z}$, уравнение Риккати может быть сведено к линейному уравнению. Если известно еще одно решение y_2 уравнения Риккати, то $z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ будет являться частным решением полученного линейного уравнения, что позволит упростить его интегрирование. Если для уравнения Риккати известно 3 частных решения: y_1, y_2 и y_3 , то его общим интегралом будет $\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C$. Заменой переменных $y = \alpha(x)z$ и $z = u + \beta(x)$ уравнение Риккати всегда может быть приведено к каноническому виду: $\frac{du}{dx} = \pm u^2 + R(x)$.

Пример: $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$. Делаем замену $y = \alpha + \beta(x)$. После замены коэффициент при y в первой степени будет равен $2\beta + \frac{1}{x}$ и, следовательно, он исчезнет, если взять $\beta(x) = -\frac{1}{2x}$. Получим: $z' + z^2 - \frac{15}{4x^2} = 0$. Естественно искать частное решение $z_1 = \frac{a}{x}$. Подстановкой находим $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$ (два частных решения: $z_1 = -\frac{3}{2x}$, $z_2 = \frac{5}{2x}$). Делаем новую замену: $z = \frac{1}{u} + z_1 = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x}$. Получим $u' + \frac{3u}{x} = 1$. Используя частное решение этого уравнения $u_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{x}{4}$,

находим его общее решение: $u = \frac{x}{4} + \frac{C}{x^3} = \frac{x^4 + C_1}{4x^3}$; отсюда

$$y = \frac{1}{u} = \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{2x^4 - 2C_1}{x^4 + C_1x}.$$

Уравнение Клеро

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Его общий интеграл: $y = Cx + f(C)$. Кроме общего интеграла (дающего геометрически семейство прямых, зависящее от одного параметра), имеется особый интеграл, получающийся исключением C из уравнений $y = Cx + f(C)$ и $0 = x + f'(C)$ (геометрически — огибающая данного семейства прямых, рис. 4) (см. стр. 402 и 271).

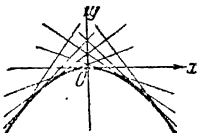


Рис. 4.

Пример: $y = xy' + y'^2$; общий интеграл: $y = Cx + C^2$; особый интеграл (присоединяем уравнение $x + 2C = 0$ и исключаем C): $x^2 + 4y = 0$.

Особые точки. Для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad (ad - bc \neq 0)$$

точка $(0, 0)$ является *изолированной особой точкой*, так как в этой точке нарушаются условия теоремы Коши (см. стр. 401), выполняющиеся в любой другой как угодно близко лежащей точке*. Поведение интегральных кривых вблизи этой особой точки зависит от корней *характеристического уравнения*:

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda + bc - ad = 0,$$

а именно:

1) Если корни действительные, одного знака — особая точка *узла*. Все интегральные кривые в окрестности особой точки проходят через нее, имея здесь (если корни не совпадают) общую касательную за исключением одной интегральной кривой. Если же корни совпадают, то или все интегральные кривые имеют общую касательную, или в каждом направлении через особую точку проходит единственная кривая.

* Строго говоря, условия теоремы Коши нарушаются в для всех тех точек, для которых $cx + dy = 0$, но они будут выполнены, если поменять ролями зависящую и независимую переменные и рассмотреть уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{cx + dy}{ax + by}$.

Примеры: а) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$; интегральные кривые: $y = Cx^2$ (рис. 5); б) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; интегральные кривые: $y = x \ln |x| + Cx$ (рис. 6); в) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; интегральные кривые: $y = Cx$ (рис. 7).

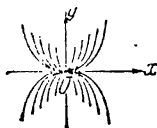


Рис. 5.

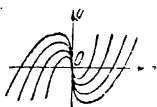


Рис. 6.

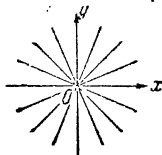


Рис. 7.

2) Если корни действительные, разного знака — особая точка *седло*. Через особую точку проходят 2 интегральные кривые (образующие 4 „уса“ седла).

Пример: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$; интегральные кривые: $xy = C$ (рис. 8), при $C = 0$, частные интегралы: $x = 0$, $y = 0$.

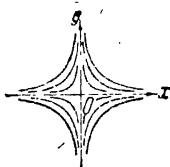


Рис. 8.

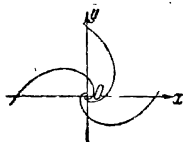


Рис. 9.

3) Если корни комплексные сопряженные — особая точка *фокус*. Интегральные кривые „накручиваются“ на особую точку, совершая при этом бесчисленное множество оборотов.

Пример: $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$; $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$; интегральные кривые (в полярных координатах): $\rho = Ce^{-\varphi}$ (рис. 9).

4) Если корни чисто мнимые — особая точка *центр*. Она окружена бесчисленным множеством замкнутых интегральных кривых.

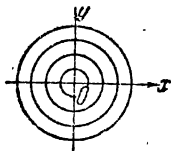


Рис. 10.

Пример: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$; $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Интегральные кривые: $x^2 + y^2 = C$ (рис. 10).
Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

особыми точками являются те, в которых одновременно $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$. Предполагая P и Q функциями с непрерывными частными производными, можем представить наше уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x-x_0) + b(y-y_0) + P_1(x, y)}{c(x-x_0) + d(y-y_0) + Q_1(x, y)},$$

где x_0, y_0 — координаты особой точки и $P_1(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ являются малыми высшего порядка в сравнении с расстоянием точки (x, y) до особой точки. Тогда сказывается, что характер особой точки данного дифференциального уравнения будет тот же, что и у особой точки уравнения первого приближения, получающегося при отбрасывании P_1 и Q_1 . Исключения: а) если особая точка уравнения первого приближения — центр, особая точка основного уравнения может быть центром или фокусом; б) если $ad - bc = 0$ (т. е. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, или $a = c = 0$, или $a = b = 0$ и т. п.), то для определения характера особой точки требуется исследование членов высшего порядка.

Приближенные методы интегрирования. Метод последовательных приближений (Пикара). Уравнение $y' = f(x, y)$ может быть записано в виде

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx. \quad (1)$$

Если в правую часть вместо y подставить какую-либо функцию $y_1(x)$, мы получим слева новую функцию y_2 , не совпадающую с y_1 , если только y_1 не есть решение данного уравнения. Подставляя в правую часть уравнения (1) y_2 вместо y , мы получим функцию y_3 , и т. д.

Полученная последовательность функций $y_1, y_2, y_3, \dots$ стремится к пределу, являющемуся решением данного уравнения, если для каждого из y_i выполнены условия теоремы Коши (см. стр. 401).

Пример: $y' = x + xy$; начальные условия: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.
В интегральной форме уравнение запишется:

$$y = \int_0^x (x + xy) dx.$$

Применяя метод Пикара, получим последовательно:

$$y_1 = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}; \quad y_2 = \int_0^x \left(x + \frac{x^3}{2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} \text{ и т. д.}$$

Применение рядов. Разложение решения дифференциального уравнения в ряд Тейлора (см. стр. 328)

$$y = y_0 + (x - x_0) y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2} y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''_0 + \dots + \frac{(x - x_n)^n}{n!} y^{(n)}_0 + \dots$$

может быть написано, если известны значения y'_0 , y''_0 , y'''_0 , ..., $y^{(n)}_0$, ... всех его производных для начального значения x_0 аргумента. Эти значения могут быть найдены из дифференциального уравнения путем последовательного его дифференцирования и подстановки начальных условий. Если допустимо неограниченное дифференцирование уравнения, полученный ряд всегда будет сходиться в некоторой окрестности начального значения аргумента. Данный метод, очевидно, применим и к уравнениям n -го порядка.

Пример: $y' = x + xy$; начальные условия: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; из уравнения: $y'_0 = 0$; $y''_0 = 1 + y_0 y'_0$; $y''_0 = 1$; $y'''_0 = 2y'_0 + xy''_0$, $y'''_0 = 0$; $y^{IV}_0 = 3y''_0 + xy'''_0$, $y^{IV}_0 = 3$ и т. д. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \dots$

Графическое интегрирование уравнений базируется на понятии поля направлений (см. стр. 401). Интегральная кривая приближенно изображается выходящей из заданной начальной точки ломаной (рис. 11), составленной из небольших отрезков, направление каждого из которых совпадает с направлением поля в начальной точке отрезка, являющейся конечной точкой для предыдущего отрезка. Технику применения этого метода, а также более точные графические способы см. Занден—стр. 533 справочника.

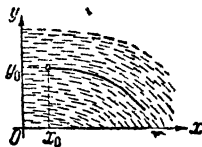


Рис. 11.

Численное интегрирование. При численном интегрировании уравнения $y' = f(x, y)$ составляется таблица искомой функции для значений аргумента $x_k = x_0 + kh$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Если значения функции y для $x_k, x_{k-1}, \dots$ вычислены, следующее значение $y(x_{k+1})$ находится по формуле:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx.$$

Так как значения подинтегральной функции могут быть вычислены при $x = x_k, x_{k-1}, \dots$, то величина интеграла находится по одной из формул приближенного интегрирования. Чаще всего применяют *метод Штёрмера*, использующий формулу (обозначения см. стр. 519):

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = h \left[f_k + \frac{1}{2} \Delta f_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 f_{k-3} \right].$$

Пример: Полученный выше ряд Тейлора для интеграла уравнения $y' = x + xy$, соответствующего начальным условиям $x_0 = 0, y_0 = 0$, позволяет легко вычислить значения y для $x_1 = 0,1, x_2 = 0,2$ и $x_3 = 0,3$: $y_1 = 0,0050, y_2 = 0,0202$ и $y_3 = 0,0460$. Для вычисления последующих значений y по методу Штёрмера строят таблицу по следующей схеме (до ступенчатой черты).

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
0	0,0	0,0000	1005		
0,1	0,0050	0,1005	1035	30	
0,2	0,0202	0,2040	1098	63	33
0,3	0,0460	0,3138	1195	97	34
0,4	0,0832	0,4333			

Далее, для $x_4 = 0,4$ получим:

$$y_4 - y_3 = 0,1 [0,3138 + 0,0549 + 0,0026 + 0,0012] = 0,0372.$$

Подставив $y_4 = 0,0832$ в таблицу и вычислив y'_4 , найдем.

$$y_5 - y_4 = 0,1 [0,4333 + 0,0598 + 0,0040 + 0,0013] = 0,0498,$$

и, следовательно, $y_5=0,1330$; продолжая так далее, найдем $y_6, y_7, \dots$. Следует иметь в виду, что с каждым новым шагом погрешность интегрирования увеличивается.

3. Уравнения высших порядков и системы уравнений

Теоретические сведения. Теорема существования. Всякое уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

введением новых переменных $y_1=y', y_2=y'', \dots, y_{n-1}=y^{(n-1)}$ может быть сведено к системе n уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Более общая система уравнений:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (*)$$

имеет единственную систему решений $y_i=y_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$), определенную и непрерывную в некотором интервале $x_0-h \leq x \leq x_0+h$, принимающую при $x=x_0$ заданные начальные значения: $y_i(x_0)=y_i^0$ ($i=1, 2, \dots, n$), если функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны по всем переменным и удовлетворяют условию Липшица:

$$|f_i(x, y_1+\Delta y_1, y_2+\Delta y_2, \dots, y_n+\Delta y_n) - f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq K(|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \dots + |\Delta y_n|),$$

для значений x, y_i и Δy_i , лежащих в некоторой области вблизи данных их начальных значений. В соответствии с этим, уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y=y_0, y'=y'_0, \dots, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$, при $x=x_0$, непрерывное со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно, если $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ удовлетворяет приведенному выше условию Липшица для функций $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Общее решение. Для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

общее решение содержит n произвольных постоянных:

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Понижение порядка. Одним из основных методов интегрирования уравнений n -го порядка является замена переменных, приводящая к более простым уравнениям, в частности, к уравнениям низшего порядка.

Уравнение, не содержащее явно x :

$$f(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

сводится к уравнению $(n-1)$ -го порядка после замены:

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy} \text{ и т. д.}$$

Пример: $yy'' - y'^2 = 0$, $p = y'$, $p \frac{dp}{dy} = y''$, $yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$, $y \frac{dp}{dy} - p = 0$, $p = Cy = \frac{dy}{dx}$; $y = C_1 e^{Cx}$ (при сокращении на p решение не потеряно, так как $p=0$ дает $y=C_1$, что содержится в полученном общем решении при $C=0$).

Уравнение, не содержащее явно y :

$$f(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

допускает понижение порядка при замене $y' = p$. Если в уравнение не входит k первых производных, следует делать замену $y^{(k+1)} = p$.

Пример: $y'' - xy''' = 0$. Замена $y'' = p$ приводит к уравнению Клеро: $p - x \frac{dp}{dx} + \left(\frac{dp}{dx}\right)^3 = 0$. Его общее ре-

шение: $p = C_1 x - C_1^3$. Отсюда $y = \frac{C_1 x^3}{6} - \frac{C_1^3 x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

Уравнение $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, однородное (см. стр. 292) *относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$* , допускает понижение порядка при введении новой функции $z = \frac{y'}{y}$ (т. е. $y = e^{\int z dx}$).

Пример: $yy'' - y'^2 = 0$; $z = \frac{y'}{y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{yy'' - y'^2}{y^2}$, следовательно, $z = C_1$, откуда $\ln y = C_1 x + C_2$ или $y = C e^{C_1 x}$ (ln $C = C_2$).

Уравнение $y^{(n)} = f(x)$. Общее решение получается последовательным интегрированием в виде

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1} + \psi(x),$$

где

$$\psi(x) = \int \int \dots \int f(x) (dx)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t) (x-t)^{n-1} dt.$$

Линейные уравнения. Линейным уравнением называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + A_2 y^{(n-2)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y = F, \quad (L)$$

где A_i и F (правая часть) — функции от x . Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ — постоянные, то уравнение называется *уравнением с постоянными коэффициентами*. Линейное уравнение называется *однородным**, если $F=0$, и *неоднородным* в противном случае.

Общее решение однородного линейного уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ представляют собой n линейно независимых частных решений этого уравнения. Функции линейно независимы, если их линейная комбинация $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ ни при каких значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$, кроме $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$, не обращается тождественно в нуль. Функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда их определитель Вронского W отличен от нуля**

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Теорема наложения. Если Y_1 и Y_2 являются решениями уравнения (L) для различных правых частей F_1 и F_2 , то их сумма $Y = Y_1 + Y_2$ будет решением такого же уравнения с правой частью $F = F_1 + F_2$. Отсюда следует, что для получения общего решения неоднородного уравнения достаточно к какому-либо его частному решению прибавить общее решение однородного уравнения.

Теорема разложения. Если уравнение (L) имеет действительные коэффициенты и $F = F_1 + iF_2$, где F_1 и F_2 также действительны, то решение его будет комплексным $y = y_1 + iy_2$, причем y_1 и y_2 будут решениями уравнения (L) с правой частью, равной соответственно F_1 и F_2 .

* Термин „однородный“ употребляется здесь в ином смысле, чем на стр. 403.

** Для функций $y_1, \dots, y_n$, являющихся решениями однородного линейного уравнения n -го порядка с непрерывными коэффициентами, определитель W может обращаться в нуль только тождественно (т. е. если $W(x_0) = 0$, то $W \equiv 0$).

4. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Операторная запись. Если в (L) (см. выше) коэффициенты A_i постоянны, то такое уравнение может быть записано символически в виде:

$$P_n(D)y = (D^n + A_1 D^{n-1} + \dots + A_{n-1}D + A_n)y = F,$$

где D есть оператор дифференцирования:

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \quad D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}.$$

Решение однородного уравнения $P_n(D)y = 0$. Для нахождения общего решения необходимо найти корни $r_1, r_2, \dots, r_n$ алгебраического уравнения (см. стр. 165—176) $P_n(r) = 0$ (*характеристическое уравнение*). Каждому корню r_i соответствует решение $e^{r_i x}$ уравнения $P_n(D)y = 0$. Если r_i

является корнем k -й кратности, то $x e^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, \dots, x^{k-1} e^{r_i x}$ также являются решениями. Линейная комбинация этих решений для всех корней r_i

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + \\ + e^{r_i x} (C_i + C_{i+1} x + \dots + C_{i+k-1} x^{k-1}) + \dots$$

является общим решением однородного уравнения.

Если среди корней есть комплексные (они могут быть только попарно сопряженными *), например, если: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, то в соответствующих членах общего решения $e^{r_1 x}$ и $e^{r_2 x}$ должны быть заменены на $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$. Получающиеся при этом выражения вида $C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$ могут быть представлены также в виде $A \cos(\beta x + \varphi)$, где A и φ — произвольные постоянные.

Пример: Для уравнения $y^{VI} + y^{IV} - y'' - y = 0$ характеристическое уравнение $r^6 + r^4 - r^2 - 1 = 0$ имеет корни: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_{3,4} = i$, $r_{5,6} = -i$. Общее решение будет:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \cos x (C_3 + C_4 x) + \sin x (C_5 + C_6 x)$$

или

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + A_1 \cos(x + \varphi_1) + x A_2 \cos(x + \varphi_2).$$

* Мы предполагаем, что коэффициенты A_k действительны.

Решение неоднородного уравнения $P_n(D)y = F(x)$ символически записывают при помощи *обратного оператора* $\frac{1}{P_n(D)}$: $y = \frac{1}{P_n(D)} F(x)$. При этом в большинстве случаев эта запись подразумевает не общее, а частное „*нормальное*“ решение, обращающееся при $x=x_0$ в нуль вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно. Как и всякое другое частное решение, нормальное решение может служить для нахождения общего решения (см. стр. 414). Если по условиям задачи нужно найти частное решение с ненулевыми начальными условиями, на одяг удовлетворяющее этим начальным условиям решение однородного уравнения. Тогда искомое решение неоднородного уравнения получится прибавлением к найденному нормальному решению неоднородного уравнения.

Для нахождения нормального частного решения применяются следующие методы:

Понижение порядка. Если $r_1, r_2, \dots, r_n$ — корни характеристического уравнения $P_n(r)=0$, то операторный многочлен $P_n(D)$ может быть разложен на множители: $P_n(D) = (D-r_1)(D-r_2)\dots(D-r_n)$. Нормальное частное решение получается, если решать последовательно уравнения:

$$(D-r_1)z_1 = F(x); (D-r_2)z_2 = z_1, \dots, (D-r_n)z_n = z_{n-1},$$

с начальными условиями: $z_1 = z_2 = \dots = z_{n-1} = y = 0$ при $x=x_0$, т. е. пользуясь формулой

$$z_k = e^{r_k x} \int_{x_0}^x z_{k-1} e^{-r_k x} dx \quad [k=1, 2, \dots, n; z_0 = F(x), z_n = y].$$

Пример см. ниже.

Разложение на элементарные дроби. Обратный оператор $\frac{1}{P_n(D)}$ разлагается на элементарные дроби (см. стр. 157):

$$\frac{1}{P_n(D)} = \frac{A_1}{D-r_1} + \frac{A_2}{D-r_2} + \dots + \frac{A_n}{D-r_n}.$$

В случае корня кратности k будут встречаться дроби вида $\frac{A}{(D-r)^p}$ ($p \leq k$). Нормальное частное решение находится по формуле:

$$y = \frac{A_1}{D-r_1} F(x) + \frac{A_2}{D-r_2} F(x) + \dots + \frac{A_n}{D-r_n} F(x).$$

где каждое слагаемое вида

$$z = \frac{A}{D-r} F(x) \left[\text{или } z = \frac{A}{(D-r)^p} F(x) \right]$$

есть нормальное решение уравнения $(D-r)z = AF(x)$ [или $(D-r)^p z = AF(x)$], т. е.

$$\begin{aligned} \frac{A}{D-r} F(x) &= e^{rx} \int_{x_0}^{\infty} AF(x) e^{-rx} dx \\ \left[\text{или } \frac{A}{(D-r)^p} F(x) &= e^{rx} \int_{x_0}^{\infty} \int_{x_0}^{\infty} \dots \int_{x_0}^{\infty} AF(x) e^{-rx} (dx)^p = \right. \\ &= \left. \frac{e^{rx}}{(p-1)!} \int_{x_0}^{\infty} AF(t) e^{-rt} (x-t)^{p-1} dt \right]. \end{aligned}$$

При наличии комплексных корней у характеристического уравнения в вычисления по обоим методам будут входить на отдельных этапах комплексные величины, однако конечный результат всегда можно будет представить в действительной форме.

Пример: $y''' - y'' - y' + y = x$; в операторной форме: $(D+1)(D-1)^2 y = x$.

Метод понижения порядка (примем $x_0=0$):

$$\begin{aligned} (D+1)z_1 &= x, \quad z_1 = e^{-x} \int_0^{\infty} x e^x dx = x-1 + e^{-x}; \\ z_1 &= e^x \int_0^{\infty} (x-1 + e^{-x}) e^{-x} dx = -x - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^x}{2}; \\ z_1 = y &= \frac{1}{D^3 - D^2 - D + 1} x = e^x \int_0^{\infty} \left(-x - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^x}{2} \right) e^{-x} dx = \\ &= x + 1 + \frac{1}{4} e^{-x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4} \right) e^x. \end{aligned}$$

Метод разложения на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(D+1)(D-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{D+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{D-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)^2};$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{4} \frac{1}{D+1} x - \frac{1}{4} \frac{1}{D-1} x + \frac{1}{2} \frac{1}{(D-1)^2} x = \\
 &= \frac{e^{-x}}{4} \int_0^x x e^x dx - \frac{e^x}{4} \int_0^x x e^{-x} dx + \frac{1}{2} e^x \int_0^x t e^{-t} (x-t) dt = \\
 &= \frac{1}{4} (x-1+e^{-x}) - \frac{1}{4} (-x-1+e^x) + \\
 &+ \frac{1}{2} (x+2+xe^x-2e^x) = x+1 + \frac{1}{4} e^{-x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right) e^x.
 \end{aligned}$$

Специальная правая часть. В некоторых случаях частное решение (не нормальное) неоднородного уравнения $P_n(D)y = F(x)$ может быть найдено простыми алгебраическими приемами.

Если $F(x) = Ae^{kx}$ и $P_n(k) \neq 0$, то частным решением является $y = \frac{Ae^{kx}}{P_n(k)}$. Если k является корнем характеристического уравнения кратности m , т. е. $P_n(k) = P'_n(k) = \dots = P_n^{(m-1)}(k) = 0$, то частным решением является $y = \frac{Ax^m e^{kx}}{P_n^{(m)}(k)}$. При помощи теоремы разложения (стр. 414)

эти формулы могут быть использованы и в случае, когда $F(x) = Ae^{kx} \cos \omega x$ или $Ae^{kx} \sin \omega x$. Соответствующие частные решения получаются как действительная или мнимая часть решения того же уравнения для правой части: $F(x) = Ae^{kx} (\cos \omega x + i \sin \omega x) = Ae^{(k+i\omega)x}$.

Примеры: 1) Для уравнения $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ частным решением будет $y = -\frac{xe^{2x}}{2}$, так как $P(D) = D^2 - 6D + 8$, $P(2) = 0$ и $P'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$. 2) Для уравнения $y'' + y' + y = e^x \sin x$ частное решение $y_1 = \frac{e^x}{13} (2 \sin x - 3 \cos x)$ получается как мнимая часть от решения

$$y = \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2 + (1+i) + 1} = \frac{e^x (\cos x + i \sin x)}{2 + 3i}$$

уравнения $(D^2 + D + 1)y = e^{(1+i)x}$.

Если $F(x)$ является многочленом степени m от x , то может быть найдено частное решение в виде многочлена той же степени. Если характеристическое уравнение имеет

нуль корнем k -й кратности (т. е. дифференциальное уравнение не содержит $y, y', \dots, y^{(k-1)}$), то это решение будет иметь вид многочлена m -й степени, умноженного на x^k . Для его нахождения может быть использован один из следующих методов: 1) Пишется искомое решение $y = (ax^m + bx^{m-1} + \dots + rx + s)x^k$ с *неопределенными коэффициентами* и подставляется в данное уравнение. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получают алгебраические уравнения для определения коэффициентов $a, b, \dots, r, s$. 2) Записав решение дифференциального уравнения в виде $y = \frac{1}{P_n(D)} F(x)$ (здесь решение

не предполагается нормальным — см. стр. 416), выполняя деление 1 на $P_n(D)$ по восходящим степеням D до m -й степени включительно*. Искомое частное решение получается при действии полученного в результате деления оператора на $F(x)$. Если $F(D)$ имеет вид $P_n(D) = D^k R_{n-k}(D)$, где $R_{n-k}(D)$ — многочлен степени $n-k$, деление выполняется только для оператора $\frac{1}{R_{n-k}(D)}$; после нахождения

$\frac{1}{R_{n-k}(D)} F(x)$ производят еще k -кратное интегрирование (действие оператора $\frac{1}{D^k}$).

Пример: $y^{IV} + 2y''' + y'' = 6x$; I метод: $y = (ax + b)x^2$; подставляя в уравнение, получим $12a + 2b + 6ax = 6x$, откуда $a=1, b=-6$ и $y = x^3 - 6x^2$. II метод: $y = \frac{1}{D^2(1+2D+D^2)} 6x =$
 $= \frac{1}{D^2} (1-2D+\dots) 6x = \frac{1}{D^2} (6x-12) = x^3 - 6x^2$.

* Для этого располагают делитель по возрастающим степеням D и выполняют процесс деления по обычным правилам деления многочленов. Частное получается в виде бесконечного ряда. Например,

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1+2D+D^2 \overline{) 1+2D+D^2} \\ \underline{-2D-D^2} \\ -2D-4D^2-2D^3 \\ \underline{3D^2+2D^3} \end{array}$$

т. е.

$$\frac{1}{1+2D+D^2} = 1-2D+3D^2 \dots$$

жать одну произвольную постоянную. Если все корни характеристического уравнения различны, то сумма всех частных решений будет содержать n независимых произвольных постоянных и будет давать общее решение системы. Если какой-либо корень r_i характеристического уравнения имеет кратность m , то этому корню будет соответствовать система частных решений вида:

$$y_1 = A_1(x) e^{r_i x}, \quad y_2 = A_2(x) e^{r_i x}, \quad \dots, \quad y_n = A_n(x) e^{r_i x},$$

где $A_1(x), \dots, A_n(x)$ — многочлены степени не выше $m-1$. Подставляя эти выражения с неопределенными коэффициентами в данную систему и приравнявая, после сокращения на $e^{r_i x}$, коэффициенты при одинаковых степенях x в правых и левых частях равенств, получая уравнения, позволяющие определить все неизвестные коэффициенты. В некоторых случаях степень многочленов может оказаться ниже чем $m-1$. В частности, в случае, если система (N) симметрична (т. е. $a_{ik} = a_{ki}$), достаточно взять $A_i(x) = \text{const}$. Если среди корней характеристического уравнения окажутся комплексные, то соответствующие члены общего решения могут быть приведены к действительному виду, так же как и в случае одного уравнения с постоянными коэффициентами (см. стр. 415).

Пример: Для системы

$$y'_1 = 2y_1 + 2y_2 - y_3; \quad y'_2 = -2y_1 + 4y_2 + y_3; \quad y'_3 = -3y_1 + 8y_2 + 2y_3,$$

характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-r & 2 & -1 \\ -2 & 4-r & 1 \\ -3 & 8 & 2-r \end{vmatrix} = -(r-6)(r-1)^2 = 0.$$

Для простого корня $r_1 = 6$ получим: $-4A_1 + 2A_2 - A_3 = 0$, $-2A_1 - 2A_2 + A_3 = 0$, $-3A_1 + 8A_2 - 4A_3 = 0$, откуда $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{2} A_3 = C_1$, т. е. $y_1 = 0$, $y_2 = C_1 e^{6x}$, $y_3 = 2C_1 e^{6x}$.

Для кратного корня $r_2 = 1$ полагаем $y_1 = (P_1 x + Q_1) e^x$, $y_2 = (P_2 x + Q_2) e^x$, $y_3 = (P_3 x + Q_3) e^x$. Подставляя в уравнения, получим:

$$P_1 x + (P_1 + Q_1) = (2P_1 + 2P_2 - P_3) x + (2Q_1 + 2Q_2 - Q_3);$$

$$P_2 x + (P_2 + Q_2) = (-2P_1 + 4P_2 + P_3) x + (-2Q_1 + 4Q_2 + Q_3);$$

$$P_3 x + (P_3 + Q_3) = (-3P_1 + 8P_2 + 2P_3) x + (-3Q_1 + 8Q_2 + 2Q_3),$$

откуда:

$$P_1 = 5C_1, \quad P_2 = C_1, \quad P_3 = 7C_1;$$

$$Q_1 = 5C_1 - 6C_2, \quad Q_2 = C_2, \quad Q_3 = 7C_2 - 11C_1.$$

Общее решение системы:

$$y_1 = (5C_1x + 5C_2 - 6C_3)e^x, \quad y_2 = C_1e^{6x} + (C_2x + C_3)e^x, \\ y_3 = 2C_1e^{6x} + (7C_2x + 7C_3 - 11C_4)e^x.$$

Однородные системы 1-го порядка. Общий вид системы линейных однородных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}y'_k + \sum_{k=1}^n b_{ik}y_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Если определитель $|a_{ik}|^*$ не равен 0, то эта система может быть приведена к нормальному виду. Однако решение может быть получено непосредственно из данной системы по тому же методу, что и в случае нормальной системы. Характеристическое уравнение примет вид $|a_{ik}r + b_{ik}| = 0$, а коэффициенты A_i в решении (*), соответствующем простому корню r_j , определятся в этом случае из уравнений

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik}r_j + b_{ik})A_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

В остальном методика нахождения решения та же, что и в случае нормальной системы.

Случай $|a_{ik}| = 0$ нуждается в дополнительном исследовании (см. Степанов — стр. 534 справочника).

Пример. $5y'_1 + 4y_1 - 2y'_2 - y_2 = 0; \quad y'_1 + 8y_1 - 3y_2 = 0$. Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5r+4 & -2r-1 \\ r+8 & -3 \end{vmatrix} = 2r^2 + 2r - 4 = 0; \quad r_1 = -2, \quad r_2 = 1.$$

Находим A_1 и A_2 для $r_1 = -2$: $-6A_1 + 3A_2 = 0$, $6A_1 - 3A_2 = 0$, или $A_2 = 2A_1 = 2C_1$; точно так же для $r_2 = 1$ получим $\bar{A}_2 = 3A_1 = 3C_2$. Отсюда общее решение: $y_1 = C_1e^{-2x} + C_2e^x$, $y_2 = 2C_1e^{-2x} + 3C_2e^x$.

Неоднородные системы линейных уравнений 1-го порядка. Общий вид:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}y'_k + \sum_{k=1}^n b_{ik}y_k = F_i(x) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

* Сокращенное обозначение определителя с элементами a_{ik} .

Теорема наложения. Если $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$ ($j=1, 2, \dots, n$) — решения неоднородных систем, отличающихся только правыми частями, равными соответственно $F_i^{(1)}$ и $F_i^{(2)}$, то $y_j = y_j^{(1)} + y_j^{(2)}$ ($j=1, \dots, n$) будет являться решением такой же системы уравнений, но с правыми частями $F_i(x) = F_i^{(1)}(x) + F_i^{(2)}(x)$. Отсюда следует, что для получения

общего решения неоднородной системы достаточно к ее частному решению прибавить общее решение соответствующей однородной системы. Для нахождения частного решения неоднородной системы применяются следующие методы:

1) **Метод вариации постоянных:** Общее решение однородной системы подставляют в неоднородную систему, заменяя произвольные постоянные $C_1, \dots, C_n$ неизвестными функциями $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. При этом, в выражениях для производных y'_k появятся члены, содержащие производные от новых неизвестных функций $C_k(x)$. При подстановке в заданную систему, в левых частях останутся только эти добавочные члены, остальные же сократятся, так как $y_1, \dots, y_n$ по предположению являются решением однородной системы. Таким образом для $C'_k(x)$ получится неоднородная система линейных алгебраических уравнений. Решая ее и выполняя n интегрирований, найдем функции $C_1(x), \dots, C_n(x)$. Подставляя эти функции вместо постоянных в решение однородной системы, получим искомое частное решение.

2) **Операторный метод:** Заменяя y'_i на Dy_i и записав систему в операторной форме, решают ее относительно $y_1, y_2, \dots, y_n$ как алгебраическую, например при помощи определителей (см. стр. 179). Тогда для каждой неизвестной y_i получится выражение, состоящее из n слагаемых вида $\frac{P_k(D)}{\Delta(D)} F_k(x)$, где $P_k(D)$ и $\Delta(D)$ — соответствующие определители, представляющие собой многочлены относительно D .

Далее, операторную дробь $\frac{P_k(D)}{\Delta(D)}$ разлагают на элементарные (см. стр. 416) и используют формулы стр. 417. При этом для каждой элементарной операторной дроби следует везде пользоваться одним и тем же выражением (т. е. не менять пределов интегрирования и произвольных постоянных).

Пример: $5y'_1 + 4y_1 - 2y'_2 - y_2 = e^{-x}; y'_1 + 8y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}$.

1) Метод вариации постоянных: общее решение однород-

ной системы (см. стр. 422) $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}$; подставляя его в данные уравнения и считая C_1 и C_2 функциями x , получим: $5C_1' e^x + 5C_2' e^{-2x} - 6C_1' e^x - 4C_2' e^{-2x} = e^{-x}$; $C_1' e^x + C_2' e^{-2x} = 5e^{-x}$, или $C_2' e^{-2x} - C_1' e^x = e^{-x}$, $C_1' e^x + C_2' e^{-2x} = 5e^{-x}$. Отсюда $2C_1' e^x = 4e^{-x}$, $C_1 = -e^{-2x} + \text{const.}$; $2C_2' e^{-2x} = 6e^{-x}$, $C_2 = 3e^x + \text{const.}$ (читая все $\text{const.} = 0$ (так как ищется частное решение)), получим $y_1 = 2e^{-x}$, $y_2 = 3e^{-x}$; общее решение: $y_1 = 2e^{-x} + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3e^{-x} + 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}$.
 2) Операторный метод: решая алгебраические уравнения $(5D+4)y_1 - (2D+1)y_2 = e^{-x}$ и $(D+8)y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}$, получим $y_1 = \frac{3e^{-x} - (2D+1)5e^{-x}}{-2D^2 - 2D + 4} = \frac{-4e^{-x}}{D^2 + D - 2} = 2e^{-x}$ (см. стр. 418).
 В данном примере y_2 определяется из второго данного уравнения: $y_2 = 3e^{-x}$.

Системы 2-го порядка. Данные выше методы могут быть перенесены на системы линейных уравнений более высокого порядка. В частности, для системы

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} y_k'' + \sum_{k=1}^n b_{ik} y_k' + \sum_{k=1}^n c_{ik} y_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

также можно искать частные решения вида $y_i = A_i e^{r_i x}$, где r_i определяется из характеристического уравнения:

$$|a_{ik} r^2 + b_{ik} r + c_{ik}| = 0,$$

а A_i — из соответствующих линейных однородных алгебраических уравнений.

6. Линейные уравнения 2-го порядка

Общие методы. Уравнение $y'' + p(x)y' + q(x)y = F(x)$. Общее решение однородного уравнения $[p(x), q(x) = 0]$:
 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$,

где y_1 и y_2 — его два линейно независимых частных решения (см. стр. 414). Если известно одно частное решение y_1 , то второе может быть определено по формуле Лиувилля

$$y_2 = A y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx, \text{ где } A \text{ произвольно.}$$

Частное решение неоднородного уравнения в этом случае находится по формуле:

$$y = \frac{1}{A} \int_{x_0}^x F(\xi) e^{\int p(\xi) d\xi} [y_2(x) y_1(\xi) - y_1(x) y_2(\xi)] d\xi,$$

где y_1 и y_2 — указанные выше частные решения однородного уравнения с той же левой частью.

Если в уравнении $s(x)y'' + p(x)y' + q(x)y = F(x)$ функции $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ являются многочленами или разлагаются в сходящиеся ряды по степеням $x - x_0$ в некоторой области, и $s(x_0) \neq 0$, то решения этого уравнения также разлагаются в ряды, по степеням $x - x_0$, сходящиеся в той же области. Эти решения могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов: искомое решение в виде ряда $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$ подставляется в данное уравнение; приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$, получим уравнения для определения $a_0, a_1, a_2, \dots$.

Пример: $y'' + xy = 0$. Подставляя $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$, $y'' = 2a_2 + 6a_3x + \dots$, получим: $2a_2 = 0$; $6a_3 + a_0 = 0$; ...; $n(n-1)a_n + a_{n-3} = 0$; ...

Решая эти уравнения, получим $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{a_0}{2 \cdot 3}$, $a_4 = -\frac{a_1}{3 \cdot 4}$, $a_5 = 0$, ..., откуда

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^2}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots \right).$$

Уравнение $x^2y'' + rp(x)y' + q(x)y = 0$. Если функции $p(x)$ и $q(x)$ разлагаются в сходящиеся ряды по степеням x , то методом неопределенных коэффициентов могут быть найдены решения вида: $y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$. Значения показателя r находятся из определяющего уравнения

$$r(r-1) + p(0)r + q(0) = 0.$$

Если корни этого уравнения различны или их разность не равна целому числу, мы получим два независимых решения нашего уравнения. В противном случае метод неопределенных коэффициентов даст только одно решение, второе решение отыскивается или по формуле Лиувилля, или каким-либо другим методом (см. Пиаджо — стр. 534 — справочника).

Уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$. Определяющее уравнение: $r(r-1) + r - n^2 \equiv r^2 - n^2 = 0$, откуда $r = \pm n$. Подставляя $y = x^n(a_0 + a_1x + \dots)$ в уравнение,

мы получим, приравнявая нулю коэффициент при x^{n+k} : $k(2n+k)a_k + a_{k-2} = 0$; при $k=1$ получим $(2n+1)a_1 = 0$. Давая k значения 2, 3, ..., получим $a_{2m+1} = 0$ ($m=1, 2, \dots$); $a_3 = -\frac{a_0}{2(2n+2)}$; $a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)}$, ...; a_0 произвольно.

Бесселевы функции. Полученный ряд при $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ определяет *бесселеву* (или *цилиндрическую*) функцию n -го порядка 1-го рода:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \dots \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}. \end{aligned}$$

Графики функций J_0 и J_1 изображены на рис. 12,

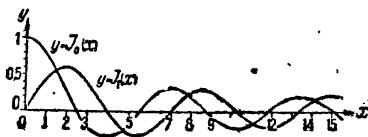


Рис. 12.

Общее решение уравнения Бесселя при n , не равном целому числу, имеет вид $y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$, где $J_{-n}(x)$ определяется рядом, получающимся из приведенного выше ряда для $J_n(x)$ заменой n на $-n$. При n целом $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. В общем решении в этом случае $J_{-n}(x)$ должна быть заменена бесселевой функцией 2-го рода $Y_n(x)$ (функцией Вебера), определяемой равенством

$$Y_n(x) = \lim_{m \rightarrow n} \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}^{**}.$$

* О функции Γ см. стр. 183.

** Разложение функции $Y_n(x)$ в ряд см. Янке и Эмде — стр. 531 справочника. Иногда эта функция обозначается $N_n(x)$.

Графики функций Y_0 и Y_1 изображены на рис. 13.

В некоторых приложениях встречаются бесселевы функции чисто мнимого аргумента; при этом обычно рассматриваются произведения $i^{-n} J_n(ix)$, которые обозначают $I_n(x)$:

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1! \Gamma(n+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2! \Gamma(n+3)} + \dots$$

Эти функции являются решением дифференциального уравнения

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2) y = 0.$$

Графики функций I_0 и I_1 изображены на рис. 14. Таблицы

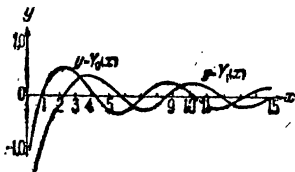


Рис. 13.

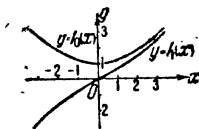


Рис. 14.

функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$ см. стр. 100—103.

Основные формулы для бесселевых функций:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x);$$

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x);$$

$$\int_0^x x^{n+1} J_n(x) dx = x^{n+1} J_{n+1}(x) \quad (n > -1).$$

Эти формулы позволяют от J_{n-1} и J_n переходить к J_{n+1} и обратно, от J_{n+1} и J_n переходить к J_{n-1} .

$$\text{Для } n \text{ целого: } J_{2n}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \varphi) \cos 2n\varphi d\varphi;$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \varphi) \sin (2n+1)\varphi d\varphi$$

или в комплексной форме

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \sin \varphi} \cos n\varphi d\varphi.$$

$J_{n+1/2}(x)$ выражаются через элементарные функции, в частности

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x; \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Для $n \neq 0$ могут быть последовательно применены рекуррентные формулы стр. 427. Дальнейшие сведения о бесселевых функциях см. Смирнов — стр. 54 справочника.

Уравнение Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Для целого n одним из решений этого уравнения являются полиномы Лежандра (шаровые функции):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2-1)^n]}{dx^n}.$$

Графики $P_n(x)$ от $n=1$ до $n=7$ — см. рис. 15. Таблицы этих функций — см. стр. 104.

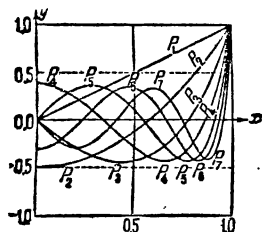


Рис. 15.

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

Основные свойства полиномов Лежандра: $P_n(x) =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \pm \cos \varphi \sqrt{x^2-1})^n d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x \pm \cos \varphi \sqrt{x^2-1})^{n+1}}$$

(знак в обеих формулах любой);

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x);$$

$$(x^2-1) \frac{dP_n(x)}{dx} = n[xP_n(x) - P_{n-1}(x)].$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \text{ для } m \neq n, \quad \int_{-1}^{+1} P_m^2(x) dx = \frac{2}{2m+1}.$$

Полиномы Лежандра могут быть получены при разложении в ряд по степеням z функции

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = P_0(x) + P_1(x)z + P_2(x)z^2 + \dots$$

Дальнейшие сведения о полиномах Лежандра см. Смирнов — стр. 534 справочника.

Б. Уравнения в частных производных

7. Линейные уравнения 1-го порядка

Общий вид *линейного* уравнения с частными производными 1-го порядка:

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = B,$$

где u — неизвестная функция независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ — заданные функции от $x_1, x_2, \dots, x_n$ и u .*

Если $B=0$, то уравнение называется *однородным*. Если коэффициенты $A_1, \dots, A_n$ однородного уравнения:

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (1)$$

не зависят от неизвестной функции u , то задача интегрирования этого уравнения равносильна задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{A_1} = \frac{dx_2}{A_2} = \dots = \frac{dx_n}{A_n}, \quad (2)$$

а именно: всякий первый интеграл системы (2) является решением уравнения (1) и обратно (см. стр. 412). При этом, если мы имеем $n-1$ независимых первых интегралов системы (2):

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

то

$$u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

где Φ означает произвольную функцию, является *общим решением* уравнения (1).

* Часто уравнение такого вида называется *квазилинейным*. Линейным же оно называется только в том случае, если $A_1, \dots, A_n, B$ не зависят от u .

Если искать решение неоднородного уравнения для функции u от n независимых переменных

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = B$$

в неявном виде $V(u, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, то для функции V от $n+1$ независимых переменных получится однородное уравнение

$$A_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + B \frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Случай двух независимых переменных $x_1 = x$, $x_2 = y$. Всякое решение $z = f(x, y)$ уравнения $P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R$ геометрически изображается некоторой интегральной поверхностью в декартовой системе координат. Способом, указанным выше, интегрирование данного уравнения сводится к интегрированию системы обыкновенных уравнений $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$. Общий интеграл этой системы $\varphi(x, y, z) = a$, $\psi(x, y, z) = b$ определяет семейство кривых, называемых *характеристиками*. Через каждую точку пространства всегда проходит и притом только одна характеристика (если выполнены условия теоремы на стр. 411). Так как уравнение интегральной поверхности всегда может быть представлено (см. выше) в виде $\Phi(\varphi, \psi) = 0$, то отсюда вытекает, что всякая интегральная поверхность составляется из характеристик.

Задача Коши. Задача Коши — провести интегральную поверхность через заданную кривую — имеет единственное решение, очевидное геометрически: это — поверхность, составленная из характеристик, проходящих через каждую точку заданной кривой, если только заданная кривая сама не является характеристикой. В последнем случае задача Коши имеет бесконечное множество решений.

Пример. Для уравнения $(mz - ny) \frac{\partial z}{\partial x} + (nx - lz) \frac{\partial z}{\partial y} = ly - mx$ (l, m, n — постоянные) уравнение характеристик будет: $\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx}$; его общий интеграл: $lx + my + nz = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Характеристики — окружности, центры которых расположены на прямой, проходящей через начало координат с направляющими косинусами, пропорциональными l, m, n ; плоскости окружностей перпендикулярны прямой. Интегральными поверхностями будут служить поверхности вращения, имеющие эту прямую (l, m, n) осью вращения.

8. Линейные уравнения 2-го порядка

Теоретические сведения. Общий вид линейного уравнения 2-го порядка в случае двух независимых переменных:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (1)$$

Коэффициенты A , B и C могут зависеть от x , y и u . Наиболее часто встречается в приложениях случай, когда F линейно относительно u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, и когда все коэффициенты уравнения постоянны.

Характеристиками уравнения (1) называются интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

В зависимости от того, будет ли $AC - B^2 < 0$, > 0 или $= 0$, это уравнение будет иметь два семейства действительных, два семейства комплексных или только одно семейство действительных интегральных кривых. В соответствии с этим уравнение (1) называется уравнением *гиперболического типа*, если $AC - B^2 < 0$, *эллиптического типа*, если $AC - B^2 > 0$, и *параболического типа*, если $AC - B^2 = 0$.

Каноническая форма. Путем замены переменных, уравнение (1) всегда может быть приведено к некоторой канонической форме. Если общие решения дифференциального уравнения характеристик имеют вид $\varphi(x, y) = \alpha$, $\psi(x, y) = \beta$, то при выборе α и β в качестве новых независимых переменных, т. е. выборе характеристик за координатные линии, уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) = 0.$$

Эта форма является канонической для уравнений *гиперболического типа*. Для уравнения эллиптического вида функции φ и ψ будут комплексными сопряженными, поэтому данное выше преобразование будет вводить комплексные переменные. Если же взять в этом случае за независимые переменные $\xi = \varphi + \psi$ и $\eta = i(\varphi - \psi)$, то уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Эта форма является канонической для уравнений *эллиптического типа*.

Уравнение параболического типа имеет только одно семейство характеристик $\varphi(x, y) = \alpha$. Если взять α за одну из новых независимых переменных, то при любом выборе

второй независимой переменной $\beta = f(x, y)$, уравнение *параболического* типа преобразуется к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \Phi(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}) = 0.$$

Уравнения математической физики. Рассмотрение различных физических явлений (механических, электрических, тепловых и пр.) приводит в подавляющем большинстве случаев к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных 2-го порядка, которые поэтому и называются уравнениями *математической физики*. Особенно часто встречаются следующие уравнения:

1) *Волновое уравнение*—уравнение распространения колебаний и волн в однородной среде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0,$$

где Δ —оператор Лапласа (см. стр. 487). В декартовых координатах для одномерной среды $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, для двумерной

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ для трехмерной } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

При рассмотрении круговых и шаровых областей вводят полярные или сферические координаты (см. стр. 221, 238 и 487). Если рассматриваются колебания не свободные, а вызываемые возмущающей силой $Q(x, t)$ (отнесенной к единице длины), то в правой части уравнения ноль должен быть заменен на $Q(x, t)$. Для неоднородной одномерной среды волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

2) *Уравнение распространения электрического тока по проводам (телеграфное уравнение)*:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial u}{\partial t} + cu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3) *Уравнения теории потенциала* (см. стр. 490): уравнение Лапласа $\Delta u = 0$; уравнение Пуассона $\Delta u = 4\pi\rho(x, y, z)$.

4) *Уравнение распространения тепла*: $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$.

Уравнения 1) и 2)—гиперболического типа, 3)—эллиптического, 4)—параболического.

Начальные и граничные условия. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных, требуют нахождения такого решения дифференциального уравнения, которое удовлетворяет некоторым добавочным, так называемым *граничным и на-*

чальным условиям. Для различных типов уравнений допустимы различные начальные и граничные условия, обеспечивающие существование единственного решения задачи. Так, например, для уравнений гиперболического типа решение однозначно определяется, если заданы начальные условия типа Коши, т. е. на некоторой кривой (не являющейся характеристикой) заданы значения неизвестной функции и ее производной по нормали к этой кривой. Для уравнения колебания струны (волнового одномерного уравнения) на-

чальным условием типа Коши будет задание u и $\frac{du}{dt}$ при $t=0$

как функции x . Уравнение эллиптического типа может и не иметь решения, удовлетворяющего произвольным начальным условиям типа Коши. Так, например, если на границе некоторой области заданы значения решения уравнения Лапласа, то решение будет этим однозначно определено, и, следовательно, значения производных этого решения не могут быть заданы произвольно. Более подробно о различных граничных условиях — см. Фрай, Горн, стр. 534 справочника. Ниже будет рассмотрено несколько частных задач.

Методы интегрирования. Для уравнений математической физики ищут обычно не общее, а частное решение, удовлетворяющее данным начальным и граничным условиям. Это объясняется тем, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений здесь, в подавляющем большинстве случаев, общее решение, содержащее произвольные функции, не может быть практически использовано для нахождения соответствующего частного решения.

Разделение переменных. Наиболее часто встречается на практике метод отыскания частного решения данного дифференциального уравнения в виде произведения функций от отдельных независимых переменных: $u=f(x)\cdot\varphi(y)\dots$. Тогда, при подстановке этого произведения в дифференциальное уравнение, может оказаться, что переменные разделятся (см. ниже примеры) и для каждой функции $f(x)$, $\varphi(y)$, ... получится обыкновенное дифференциальное уравнение. В частности, этот метод почти всегда может быть с успехом применен к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Надлежащим выбором решений полученных обыкновенных дифференциальных уравнений удается, обычно, удовлетворить части граничных условий, причем получается бесчисленное множество решений, зависящих от некоторых параметров. Беря линейную комбинацию этих решений, стараются удовлетворить оставшимся граничным и начальным условиям (см. примеры). Следует иметь в виду, что полученное по этому способу решение в виде ряда или несобственного интеграла (см. стр. 371) является лишь „формальным“ решением, и после его получения необходимо проверить, имеет ли оно смысл (т. е. сходится ли ряд и т. п.) и удовлетворяет ли оно данному уравнению и граничным условиям (т. е. допустимо ли почленно его дифференцировать, переходить к пределу при подходе к границе и т. п.).

Примеры: 1) Требуется решить уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с граничными условиями: $u(x, 0) = f(x), \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x);$

$u(0, t) = u(l, t) = 0$ (колебания закрепленной струны). Ищем решение в виде $u = X(x) \cdot T(t)$. Подставляя в уравнение, получим $\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$ (переменные разделены). Так как левая часть не зависит от x , а правая — от t , то полученное отношение есть величина постоянная ($=k$). Из уравнения $X'' = kX$ получим $X = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{k}x + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{k}x$. Условие $u(0, t) = 0$ дает $C_2 = 0$. Условию $u(l, t) = 0$ можно удовлетворить только, считая k отрицательным: $k = -\lambda^2$; тогда из условия $\operatorname{sh} \sqrt{k}l = \sin \lambda l = 0$ получается $\lambda = \frac{\pi n}{l}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Интегрируя теперь уравнение $T'' + a^2 \lambda^2 T = 0$, получим частное решение исходного уравнения в виде

$$u_n = \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Потребовав, чтобы $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ обращалось в $f(x)$, а $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ в $\varphi(x)$ при $t=0$, получим, используя формулы разложения $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам (см. стр. 495):

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

2) Требуется решить задачу Дирихле (см. стр. 491) для прямоугольника со сторонами a и b , т. е. найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и условиям (рис. 16):

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ u(0, y) &= \varphi_1(y); \\ 2^\circ u(a, y) &= \varphi_2(y); \\ 3^\circ u(x, -\frac{b}{2}) &= f_1(x); \\ 4^\circ u(x, \frac{b}{2}) &= f_2(x); \end{aligned} \right\} \left(-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right); \quad (0 \leq x \leq a).$$

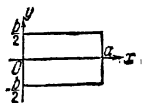


Рис. 16.

Ограничимся случаем $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 0$ *. Подставляя $u = X(x) \cdot Y(y)$ в уравнение, найдем $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} (=k)$. Ана-

* Решая аналогичным способом ту же задачу, но полагая $f_1(x) = f_2(x) = 0$ и складывая полученные решения, найдем решение общей задачи.

логично предыдущему примеру убедимся в необходимости положить $k = -\lambda^2$ и получим частное решение уравнения $\Delta u = 0$, удовлетворяющее условию $u(0, y) = u(a, y) = 0$ в виде

$$u_n = \left(a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Беря теперь $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и требуя удовлетворения других граничных условий, получим

$$a_n = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}, \quad b_n = \frac{\alpha_n - \beta_n}{2 \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{2a}},$$

где α_n и β_n — коэффициенты разложения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в ряд Фурье по $\sin \frac{n\pi x}{a}$. Сходимость полученных рядов в обоих примерах может быть легко доказана.

3) Распространение тепла в бесконечном линейном однородном проводнике: требуется найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(0, x) = f(x).$$

Подставляя $u = T(t) \cdot X(x)$ в уравнение, получим $\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} (=k)$. Отсюда $T(t) = e^{ka^2 t}$. Физический смысл имеют, очевидно, только отрицательные значения k (иначе $u \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$). Поэтому, полагая $k = -\lambda^2$, найдем

$$u_{\lambda} = e^{-\lambda^2 a^2 t} [A_{\lambda} \cos \lambda x + B_{\lambda} \sin \lambda x].$$

Так как на λ никаких условий не накладывается, можно по λ проинтегрировать, т. е. рассмотреть решение вида

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda.$$

При $t=0$ $u(x, t)$ должно обратиться в $f(x)$. Этому условию

можно удовлетворить, полагая $A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos s\lambda ds$

$$\text{и } B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \sin \lambda s \, ds \quad (\text{см. стр. 496}). \quad \text{Подставляя}$$

$A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в $u(x, t)$, получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \, ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (s-x) \, d\lambda,$$

или, используя формулу 4) стр. 385:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}} \, ds.$$

Метод Римана. Решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

может быть по Риману получено следующим образом: находится „функция Римана“ $v(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv = 0$$

и условиям:

$$v(x, \eta; \xi, \eta) = e^{\int_{\xi}^x b(\xi, \eta) \, d\xi}, \quad v(\xi, y; \xi, \eta) = e^{\int_{\eta}^y a(\xi, \zeta) \, d\zeta}.$$

Тогда функция $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющая данному уравнению и принимающая на заданной кривой Γ (рис. 17) вместе со своей производной по нормали к этой кривой (см. стр. 474) заданные значения, находится по формуле:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2} [v_P + v_Q] + \int_{PQ} \left[b u v + \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx - \left[a u v + \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dy.$$

Рис. 17.

Последний интеграл может быть вычислен, так как вдоль Γ по условию известны как u , так и ее производные.

Пример: Телеграфное уравнение (стр. 432) заменой известной функции $u = ze^{-(b:a)t}$ приводится к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = m^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n^2 z \quad \left(m^2 = \frac{1}{a}, \quad n^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2} \right)$$

и заменой независимых переменных $\xi = \frac{n}{m} (x + mt)$,

$\eta = \frac{r}{m} (x - mt)$ - к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{z}{4} = 0.$$

Функция Римана $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ должна удовлетворять этому уравнению и обращаться в единицу при $\xi = \xi_0$, а также при $\eta = \eta_0$. Если искать v в виде $v = f(w)$, где $w = (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)$, то $f(w)$ должна быть решением уравнения $w \frac{d^2 f}{dw^2} + \frac{df}{dw} + \frac{f}{4} = 0$, с начальным условием $f(0) = 1$.

Заменой $w = \alpha^2$ это уравнение сводится к уравнению Бесселя нулевого порядка: $\alpha \frac{d^2 f}{d\alpha^2} + \frac{df}{d\alpha} + f = 0$ (см. стр. 426) и, следовательно: $v = J_0(\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)})$.

Если требуется найти решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: $z = f(x)$ и $\frac{\partial z}{\partial t} = g(x)$ при $t = 0$, то, подставляя в формулу Римана найденное значение v и возвращаясь к старым переменным, получим:

$$z(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - mt) + f(x + mt)] -$$

$$- \frac{nt}{2} \int_{x-mt}^{x+mt} f(\xi) \frac{J_0\left(\frac{n}{m} \sqrt{(\xi-x)^2 - m^2 t^2}\right)}{\sqrt{(\xi-x)^2 - m^2 t^2}} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2m} \int_{x-mt}^{x+mt} g(\xi) J_0\left(\frac{n}{m} \sqrt{(\xi-x)^2 - m^2 t^2}\right) d\xi.$$

Метод Грина. Метод Грина для уравнений эллиптического типа аналогичен методу Римана для уравнений гиперболического типа. Если требуется найти в некоторой области функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

я принимающую на границе этой области заданные значения, то находится „функция Грина“ $G(x, y; \xi, \eta)$, удовлетворяющая следующим условиям (ξ и η рассматриваются как параметры): 1) $G(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{\partial (aG)}{\partial x} - \frac{\partial (bG)}{\partial y} + cG = 0$$

везде, кроме точки $x=\xi, y=\eta$. 2) Функция $G(x, y; \xi, \eta) + \ln r$ непрерывна везде в рассматриваемой области со своими производными до второго порядка включительно [r — расстояние от точки (x, y) до точки (ξ, η)]. 3) На границе рассматриваемой области $G(x, y; \xi, \eta) = 0$. Если функция Грина найдена, то искомое решение данного уравнения определится по формуле

$$u(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_S u(x, y) \frac{\partial}{\partial n} G(x, y; \xi, \eta) dS;$$

интегрирование ведется по границе S заданной области, где функция u по условию задана; $\frac{\partial}{\partial n}$ означает производную по внутренней нормали к границе области.

Как в методе Римана, так и в методе Грина требуется сначала найти некоторое специфическое решение дифференциального уравнения, с помощью которого потом может быть получено решение при любых граничных (начальных) условиях. Существенное отличие функции Грина от функции Римана заключается в том, что тогда как последняя зависит только от вида самого дифференциального уравнения, функция Грина зависит от рассматриваемой области. Нахождение функции Грина практически является чрезвычайно трудной задачей, в связи с чем метод Грина применяется преимущественно в теоретических исследованиях.

Пример. Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ и окружности функция Грина может быть легко построена. Если радиус окружности равен R и точка M_1 симметрична относительно окружности с точкой $M(\xi, \eta)$, т. е. M и M_1 лежат на одном радиусе и $OM \cdot OM_1 = R^2$, то функция Грина выражается формулой

$$G(x, y, \xi, \eta) = \ln \frac{1}{r} + \ln \frac{R}{r_1},$$

где $r = MP$, $r = OM$ и $r_1 = M_1P$ (см. рис. 18)

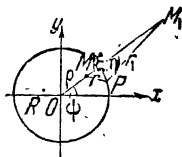


Рис. 18.

Приведенная выше формула для решения задачи Дирихле в данном случае даст после подстановки нормальной производной от функции Грина и некоторых преобразований так называемый *интеграл Пуассона*:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} u(\psi) d\varphi$$

(обозначения те же, что и выше, $\xi = \rho \cos \psi$, $\eta = \rho \sin \psi$, $u(\psi)$ — заданная на окружности функция, определяющая граничные значения искомой функции u).

П р и б л и ж е н н ы е м е т о д ы. При решении конкретных задач, связанных с интегрированием уравнений в частных производных, широко применяются различные приближенные методы как *аналитические*, позволяющие получать приближенное аналитическое выражение для искомой функции, так и *численные*, при помощи которых могут быть получены непосредственно приближенные значения искомой функции для некоторых определенных значений аргументов — см. Канторович и Крылов, Панов, стр. 534 справочника.

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА

I. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

А. Алгебра

1. Основные понятия

Мнимая единица. Формально определяют мнимую единицу i * как число, дающее в квадрате „—1“; введение мнимой единицы приводит к обобщению понятия о числе — к *комплексным числам*, которые играют большую роль в алгебре и анализе и допускают конкретные интерпретации в некоторых геометрических и физических вопросах.

Комплексные числа. Общая форма комплексного числа $a = \alpha + \beta i$; придавая α и β всевозможные действительные значения, получаем всевозможные комплексные числа a . Число α называется *действительной частью* комплексного числа a ; βi — его *мнимой частью*; β — коэффициент при мнимой части. Обозначения:

$$\alpha = R(a),$$
$$\beta = I(a)**.$$

Если $\beta = 0$, то $a = \alpha$ (действительные числа — частный случай комплексных чисел); если $\alpha = 0$, то $a = \beta i$ („чисто мнимые“ числа).

Геометрическая интерпретация. Подобно тому как действительные числа могут быть изображены точками числовой прямой, комплексные числа изображают точками плоскости (*гауссова плоскость*): число $a = \alpha + \beta i$ изображается точкой с абсциссой α и ординатой β (рис. 1). Действительные числа изображаются точками оси абсцисс

* i — от франц. *imaginaire* — мнимый. В электротехнике вместо i употребляют букву j (чтобы не спутать с обозначением i для силы тока).

** R — от франц. *réel* (действительный), I — *imaginaire*.

(действительная ось), чисто мнимые — точками оси ординат (мнимая ось). Так как каждая точка плоскости вполне определяется радиусом-вектором этой точки (см. стр. 461), то каждому комплексному числу соответствует определенный

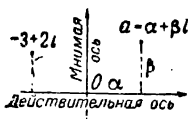


Рис. 1.

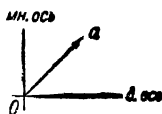


Рис. 2.

вектор, лежащий в гауссовой плоскости и идущий из полюса в точку, соответствующую комплексному числу (рис. 2). Таким образом, комплексные числа могут изображаться как точками, так и векторами.

Равенство комплексных чисел. По определению, два комплексных числа считаются *равными*, если равны отдельно их действительные части и коэффициенты при мнимых частях. Геометрически комплексные числа равны, если равны изображающие их векторы. В противном случае числа не равны; понятий „больше“ и „меньше“ для комплексных чисел не существует.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Выражение комплексного числа $a = \alpha + \beta i$ называется *алгебраической* формой его записи; если ввести вместо декартовых координат точки, изображающей комплексное число, ее полярные координаты (стр. 221), то получаем

$$a = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

— *тригонометрическую форму* записи комплексного числа (рис. 3); ρ — длина радиуса-вектора соответствующей точки — называется *модулем* или *абсолютной величиной* комплексного числа (обозначается $|a|$), угол φ (в радианах) — *аргументом* комплексного числа (обозначается $\arg a$):

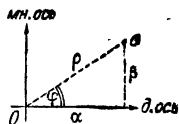


Рис. 3.

$$\rho = |a|, \quad \varphi = \arg a.$$

Связь между ρ , φ и α, β та же, что и между декартовыми и полярными координатами точки (см. стр. 221):

$$\alpha = \rho \cos \varphi, \quad \beta = \rho \sin \varphi,$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha};$$

при этом $0 \leq \rho < \infty$, а φ может принимать любое значение: $-\infty < \varphi < +\infty$; для данного комплексного числа аргумент φ имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi$ (k —целое). *Главное значение* аргумента заключено в промежутке $-\pi < \varphi \leq +\pi$.

Число *нуль* ($0+0i$) имеет модуль, равный нулю; $\arg 0$ —величина неопределенная.

Квадрат модуля, $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2$, называется *нормой* комплексного числа (обозначается $N(a)$):

$$N(a) = \alpha^2 + \beta^2.$$

Показательная форма. Часто применяется следующая форма записи комплексного числа a с модулем ρ и аргументом φ :

$$a = \rho e^{i\varphi} \quad (\text{показательная форма})^*.$$

Так, например, число $1 + \sqrt{3}i$ может быть записано так:

$$\text{алгебраическая форма} \quad 1 + \sqrt{3}i =$$

$$\text{тригонометрическая форма} \quad = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$\text{показательная форма} \quad = 2e^{i\pi/3},$$

а также, если не ограничиваться главным значением аргумента:

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{3}i &= 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \right] = \\ &= 2e^{i \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right)} \end{aligned}$$

Сопряженные комплексные числа. Два комплексных числа называются *взаимно сопряженными* (обозначаются a и $\bar{a}$), если их действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком: $R(\bar{a}) = R(a)$, $I(\bar{a}) = -I(a)$. В геометрической интерпретации точки, изображающие сопряженные числа, расположены симметрично относительно действительной оси. Модули сопряженных чисел равны, аргументы отличаются знаком:

$$a = \alpha + \beta i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

$$\bar{a} = \alpha - \beta i = \rho (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \rho e^{-i\varphi}.$$

* Подробнее об этом см. ниже, стр. 449.

2. Алгебраические действия

Сложение и вычитание двух или нескольких комплексных чисел определяется формулой

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) - (\alpha_3 + \beta_3 i) + \dots = \\ & = (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \dots) + (\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \dots) i. \end{aligned}$$

В геометрической интерпретации для получения вектора, изображающего сумму или разность двух или нескольких чисел, следует сложить или вычесть векторы, изображающие эти числа, по правилу действий над векторами (стр. 461). Результирующий вектор укажет точку и число, являющееся суммой или разностью данных чисел (рис. 4).

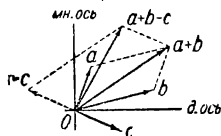


Рис. 4.

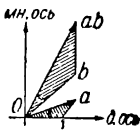


Рис. 5.

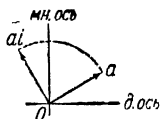


Рис. 6.

Умножение двух комплексных чисел определяется формулой

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) i.$$

Если числа даны в тригонометрической форме, то

$$\begin{aligned} [\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] [\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ = \rho_1 \rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)], \end{aligned}$$

т. е. модуль произведения равен произведению модулей, аргумент произведения — сумме аргументов сомножителей. В геометрической интерпретации вектор, изображающий произведение a на b , получается поворотом вектора a против часовой стрелки на угол, равный $\arg b$, и растяжением его в $|b|$ раз. Произведение ab можно также получить построением подобного треугольника (рис. 5). В частности, при умножении числа a на i вектор, изображающий a , поворачивается на $\pi/2$, не изменяя своей длины (рис. 6).

Деление двух комплексных чисел определяется, как действие, обратное умножению. В тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} [\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] : [\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)], \end{aligned}$$

т. е. модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, аргумент частного — разности их аргументов.

В геометрической интерпретации вектор, изображающий частное $\frac{a}{b}$, получается поворотом вектора, изображающего число a , по часовой стрелке на угол $\arg b$ и сжатием его в $|b|$ раз.

Общее правило для первых четырех действий. Формально вычисления над комплексными числами $\alpha + \beta i$ производятся так же, как и над обыкновенными двучленами, полагая $i^2 = -1$. При делении одного комплексного числа на другое „уничтожают мнимость в знаменателе“ (аналогично уничтожению иррациональности в знаменателе) (стр. 161): умножают числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, пользуясь равенством $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$ (действительное число).

Пример преобразования:

$$\begin{aligned} & \frac{(3-4i)(-1+5i)^2 + 10+7i}{1+3i} + \frac{10+7i}{5i} = \\ &= \frac{(3-4i)(1-10i-25)}{1+3i} + \frac{(10+7i)i}{5i \cdot i} = \\ &= \frac{-2(3-4i)(12+5i)}{1+3i} + \frac{7-10i}{5} = \\ &= \frac{-2(56-33i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} + \frac{7-10i}{5} = \\ &= \frac{-2(-43-21i)}{10} + \frac{7-10i}{5} = \frac{1}{5}(50+19i) = 10+3,8i. \end{aligned}$$

Возведение в n -ю степень комплексного числа производится по *формуле Муавра*, представляющей собой частный случай формулы для произведения комплексных чисел:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

— модуль возводится в n -ю степень, а аргумент умножается на n . Формула Муавра применима при любом значении n : целом, дробном, положительном, отрицательном. При дробном n необходимо учитывать многозначность результата (см. ниже).

В частности, имеем: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ и, далее, $i^{4n+k} = i^k$.

Извлечение корня n -й степени, как действие, обратное возведению в степень, производится по формуле Муавра для дробного показателя: если $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

$$\text{то } \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

Сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в целую степень — действия однозначные; извлечение же корня n -й степени дает всегда n различных значений. Аргу

мент числа a может иметь бесконечное множество значений ($\varphi, \varphi + 2\pi, \dots, \varphi + 2k\pi, \dots$), различные значения k дают различ-

ные выражения для $\sqrt[n]{a}$; при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ аргументы будут отличаться друг от друга на $\frac{2\pi}{n}$; при дальнейших значениях k они будут повторяться с точностью до целого числа 2π . В геометрической интерпретации точки, изо-

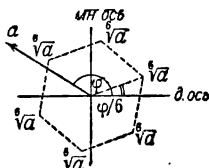


Рис. 7.

бражающие $\sqrt[n]{a}$, являются вершинами правильного n -угольника с центром в полюсе (рис. 7).

Алгебраические функции комплексной переменной. Если величина z является комплексной переменной (величиной, принимающей любое комплексное значение $z = x + yi$), то результат проведения над z (и, может быть, некоторыми постоянными) определенных алгебраических действий является алгебраической функцией этой переменной $w = f(z)$ *. Таковы, например, функции

$$w = az + b, w = \frac{1}{z}, w = z^3, w = \frac{z+i}{z-i}, w = \sqrt{z^2 - a^2}.$$

3. Комплексные числа как операторы

Операторы растяжения и поворота. В электротехнике, где векторами изображаются синусоидальные величины (стр. 209), рассматривается задача перехода от данного вектора a (сила тока) к другому вектору b (напряжение). Это осуществляется умножением длины вектора a на положительное число ρ и поворотом вектора на некоторый угол φ (против часовой стрелки, если $\varphi > 0$, и по часовой стрелке, если $\varphi < 0$). Такой переход от a к b отмечают равенством: $\rho_\varphi a = b$ (на рис. 8, например, $2\pi/4 a = b$). Символ ρ_φ есть оператор растяжения и поворота

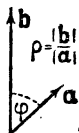


Рис. 8.

* В более общем смысле алгебраическая функция w может быть задана в неявном виде уравнением

$$a_1 z^{m_1} w^{n_1} + a_2 z^{m_2} w^{n_2} + \dots + a_k z^{m_k} w^{n_k} = 0,$$

которое далеко не всегда может быть разрешено явно (в радикалах) относительно w . Об этом см. стр. 172.

(Diehs' reckung operator) *, действующий на вектор a . Если $\rho = 1$, то имеем оператор „чистого“ поворота.

Скалярный множитель как оператор. Умножение скаляра λ на вектор a дает вектор b , коллинеарный a : $\lambda a = b$. Можно рассматривать положительный скаляр как оператор вида ρ_0 , а отрицательный скаляр — как оператор вида ρ_π , например:

$$2_0 a = 2a, \quad 2_\pi a = -2a.$$

Умножение и деление операторов. Последовательное действие двух операторов $\rho_{\varphi'}$ и $\rho_{\varphi''}$ на вектор a растягивает a в $\rho' \cdot \rho''$ раз и поворачивает его на угол $\varphi' + \varphi''$, т. е. соответствует оператору $(\rho' \cdot \rho'')_{\varphi' + \varphi''}$:

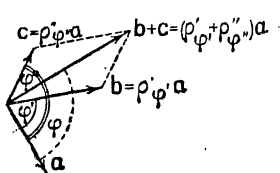
$$\rho_{\varphi'} \cdot \rho_{\varphi''} a = (\rho' \rho'')_{\varphi' + \varphi''} a.$$

Этот оператор называется *произведением операторов*: $\rho = \rho_{\varphi'} \cdot \rho_{\varphi''}$, если $\rho = \rho' \rho''$ и $\varphi = \varphi' + \varphi''$.

Деление операторов — действие, обратное умножению:

$$\rho_{\varphi} = \frac{\rho_{\varphi'}}{\rho_{\varphi''}}, \quad \text{если } \rho = \frac{\rho'}{\rho''} \text{ и } \varphi = \varphi' - \varphi''.$$

Сложение и вычитание операторов.



Пусть два оператора $\rho_{\varphi'}$ и $\rho_{\varphi''}$ действуют на один вектор a :

$$\rho_{\varphi'} a = b$$

и

$$\rho_{\varphi''} a = c.$$

Рис. 9.

Суммой (разностью) этих операторов называется оператор ρ_{φ} , который, действуя на вектор a , дает вектор, являющийся суммой (разностью) векторов b и c (рис. 9):

$$\rho_{\varphi'} \pm \rho_{\varphi''} = \rho_{\varphi},$$

если

$$\rho_{\varphi'} a \pm \rho_{\varphi''} a = \rho_{\varphi} a.$$

* Если $\rho < 1$, то фактически происходит не растяжение, а сжатие.

Возведение оператора в степень и извлечение корня из оператора определяются как поточное умножение и действие, обратное ему:

$$(\rho_\varphi)^n = (\rho^n)_{n\varphi},$$

$$\sqrt[n]{\rho_\varphi} = (\sqrt[n]{\rho})_{\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}.$$

Свойство оператора $1_{\pi/2}$. Оператор $1_{\pi/2}$ (поворот против часовой стрелки на прямой угол без изменения длины вектора) при возведении в квадрат дает 1_π , т. е. оператор -1 :

$$(1_{\pi/2})^2 = -1,$$

$$(1_{\pi/2})^2 a = -a.$$

Это свойство позволяет обозначить оператор $1_{\pi/2}$ символом i . На рис. 10 $b = ia$.

Комплексная форма оператора. Разлагая вектор $b = \rho_\varphi a$ на сумму двух векторов, один из которых коллинеарен a , а другой перпендикулярен к нему:

$$\rho_\varphi a = \alpha a + \beta a,$$

получаем одновременно и разложение оператора ρ_φ на сумму: оператора растяжения (α) и оператора поворота на 90° с растяжением (βi) (рис. 11):

$$\rho_\varphi = \alpha + \beta i.$$

Алгебра операторов. Операторы растяжения и поворота являются одной из интерпретаций комплексных чисел, и алгебра операторов сводится к алгебре комплексных чисел. Оператор ρ_φ соответствует комплексному числу с модулем ρ и аргументом φ :

$$\rho_\varphi = \rho e^{i\varphi} = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Б. Анализ

4. Элементарные трансцендентные функции

Ряды с комплексными членами. Бесконечная последовательность комплексных чисел $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ имеет предел s ($s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$), если $|s - s_n| < \epsilon$ (любого малого положительного числа); иначе: начиная с некоторого k , все точки, изображающие $s_k, s_{k+1}, \dots$, падают в круг радиуса ϵ с центром в s .



Рис. 10.

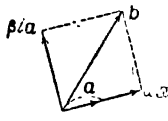


Рис. 11.

Пример: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при любом a (рис. 12).

Бесконечный ряд с комплексными членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

сходится к числу s (сумме ряда), если $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. В случае сходимости ряда конец ломаной из

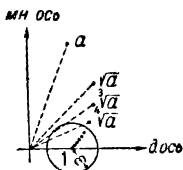


Рис. 12.

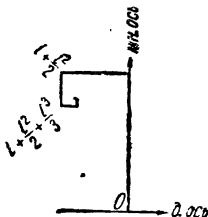


Рис. 13.

векторов, изображающих числа a_n , неограниченно приближается к точке s .

Примеры: 1) $1 + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{3} + \frac{i^4}{4} + \dots$ (рис. 13).

$$2) \frac{i}{2} + \frac{i^2}{2^2} + \frac{i^3}{2^3} + \dots$$

Ряд сходится *абсолютно*, если сходится ряд модулей $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$, и *условно*, если ряд модулей расходится. В примере 1) ряд сходится *условно*, в примере 2) — *абсолютно*. Ряд с переменными членами $f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$ определяет некоторую функцию z для тех значений z , при которых он сходится.

Степенной ряд $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots (a_i — \text{комплексные постоянные})$ сходится *абсолютно* или для всех значений z (для всей плоскости), или же только для значений, лежащих внутри некоторого *круга сходимости* с центром в начале; вне этого круга ряд расходится*. Например: для ряда $1 + z + z^2 + \dots$ *радиус сходимости* $R=1$.

* Сходимость ряда в точках, лежащих на самой окружности круга сходимости, нуждается в дополнительном исследовании в каждом отдельном случае.

Простая показательная функция. По определению

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Этот ряд сходится для всей плоскости. Для чисто мнимого показателя yi :

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y \text{ (формула Эйлера)}, \text{ например:}$$

$$e^{\pi i} = -1.$$

$$e^z = e^x + yi = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y), \text{ т. е.}$$

$$R(e^z) = e^x \cos y, I(e^z) = e^x \sin y, |e^z| = e^x, \arg e^z = y.$$

Отсюда вытекает *показательная форма* комплексного числа: $a + bi = re^{i\varphi}$. Функция e^z — периодическая с периодом $2\pi i$: $e^z = e^{z+2k\pi i}$, например: $e^0 = e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k\pi+1)\pi i} = -1$.

Натуральный логарифм. По определению

$$w = \operatorname{Ln} z, \text{ если } z = e^w.$$

Если $z = re^{i\varphi}$, то $\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$, т. е. $R(\operatorname{Ln} z) = \ln r$, $I(\operatorname{Ln} z) = \varphi + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). $\operatorname{Ln} z$ — функция *многозначная*. Ограничиваясь главным значением φ (стр. 442), получаем *главное значение логарифма* ($\ln z$):

$$\ln z = \ln r + i\varphi \quad (-\pi < \varphi \leq \pi).$$

$\operatorname{Ln} z$ существует для всех комплексных чисел z , кроме нуля.

Общая показательная функция. По определению $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ ($a \neq 0$). a^z — функция *многозначная*. Ее главное значение: $e^{z \ln a}$; $1^z = 1$.

Тригонометрические и гиперболические функции.

По определению

$$\left. \begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \\ \operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ряды сходятся} \\ \text{для всей пло-} \\ \text{скости.} \end{array}$$

* Формула Эйлера справедлива не только для чисто мнимого показателя yi , но и для любого комплексного числа

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z.$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ — периодические с периодом 2π , функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ — с периодом $2\pi i$.

Выражения функций от чисто мнимого аргумента:

$$\sin yi = i \operatorname{sh} y, \quad \cos yi = \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{sh} yi = i \sin y, \quad \operatorname{ch} yi = \cos y.$$

Вычисление $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ при $z = x + yi$ производится по тем же формулам $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ и $\operatorname{sh}(a+b)$, $\operatorname{ch}(a+b)$ *, что и для действительных чисел. Например: $\cos(x+yi) = \cos x \cos y i - \sin x \sin y i = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ и следовательно:

$$\begin{aligned} R(\cos z) &= \cos R(z) \operatorname{ch} I(z), \\ I(\cos z) &= -\sin R(z) \operatorname{sh} I(z). \end{aligned}$$

Функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}; \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \end{aligned}$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arsh} z$, $\operatorname{arch} z$, $\operatorname{arth} z$ определяются так же, как и для действительного переменного**. Например: $w = \arcsin z$, если $z = \sin w$. Эти функции выражаются через логарифмы посредством формул:

$$\arcsin z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

$$\arccos z = i \ln(z + i \sqrt{1-z^2}),$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\operatorname{arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1}),$$

$$\operatorname{arch} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1}),$$

$$\operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

В этих формулах, чтобы избежать многозначности, ограничиваются главными значениями логарифмов.

В таблице на стр. 451 приведены выражения действительной и мнимой частей, модуля и аргумента от тригонометрических и гиперболических функций комплексного переменного $z = x \pm iy$.

* Стр. 207 и 217.

** Стр. 212 и 218.

Выражения $R(w)$ и $I(w)$

Функция $w=f(x \pm iy)$	Действительная часть: $R(w)$	Мнимая часть: $I(w)$
$\sin(x \pm iy)$	$\sin x \operatorname{ch} y$	$\pm \cos x \operatorname{sh} y$
$\cos(x \pm iy)$	$\cos x \operatorname{ch} y$	$\mp \sin x \operatorname{sh} y$
$\operatorname{tg}(x \pm iy)$	$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$	$\pm \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$
$\operatorname{sh}(x \pm iy)$	$\operatorname{sh} x \cos y$	$\pm \operatorname{ch} x \sin y$
$\operatorname{ch}(x \pm iy)$	$\operatorname{ch} x \cos y$	$\pm \operatorname{sh} x \sin y$
$\operatorname{th}(x \pm iy)$	$\frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$	$\pm \frac{\sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$

Выражения $|w|$ и $\arg w$

Функция $w=f(x \pm iy)$	Модуль: $ w $	Аргумент: $\arg w$
$\sin(x \pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$	$\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x \operatorname{th} y)$
$\cos(x \pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$	$\mp \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x \operatorname{th} y)$
$\operatorname{sh}(x \pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$	$\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{cth} x \operatorname{tg} y)$
$\operatorname{ch}(x \pm iy)$	$\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}$	$\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x \operatorname{tg} y)$

5. Уравнения кривых в комплексной форме

Комплексная функция от действительного переменного. Функция $z=f(t)$, где $z=x+iy$, а t —действительное, изображается точками z , образующими при изменении t некоторую кривую. Параметрические уравнения этой кривой:

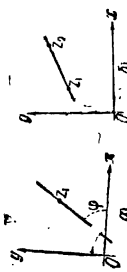
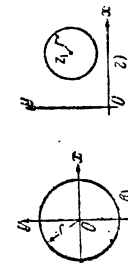
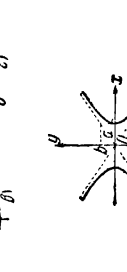
$$x=x(t); y=y(t);$$

уравнение в комплексной форме:

$$z=f(t).$$

На стр. 452—453 приведена таблица примеров важнейших кривых, представленных в комплексной форме.

Важнейшие примеры кривых в комплексной форме

Кривая	Уравнение	Чертеж
1. Прямая линия: а) проходящая через точку z_1 и образующая угол φ с осью x б) проходящая через две точки z_1 и z_2	$z = z_1 + te^{i\varphi}$ $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$	
2. Окружность: в) радиуса r с центром в начале координат г) радиуса r с центром в точке z_1	$z = re^{it}$ $z = z_1 + re^{ti}$	
3. Гипербола: д) в канонической форме $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	или $z = a \operatorname{ch} t + ib \operatorname{sh} t$ $z = ce^t + \bar{c}e^{-t}$ (c и $\bar{c}$ — сопряженные комплексные числа: $c = \frac{a+bi}{2}, \quad \bar{c} = \frac{a-bi}{2}$	

4. Эллипс:

е) в канонической форме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = a \cos t + ib \sin t$$

или

$$z = ce^{ti} + de^{-ti}$$

$$\left(c = \frac{a+b}{2}, d = \frac{a-b}{2} \right).$$

т. е. произвольные действительные числа)

 ж) в общем виде (центр в точке z_1 , оси повернуты на некоторый угол)

$$z = z_1 + ce^{ti} + de^{-ti}$$

 (c и d — произвольные комплексные числа, определяющие длину и поворот осей)

5. Логарифмическая спираль

$$z = ae^{bt}$$

 (a и b — произвольные комплексные числа)

 Полагая $a = \rho e^{i\varphi}$ и $b = (\alpha + \beta i)$, получаем

$$R(z) = \rho e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi'),$$

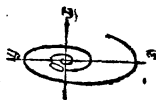
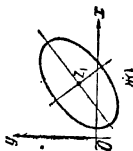
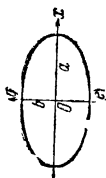
 где $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Следовательно, проекция точки логарифмической спирали на действительную ось совершает затухающие гармонические колебания (стр. 208). Если $\beta = 0$, то получаем *окружность*, и колебание — чисто гармоническое.


Рис. 14.

6. Функции комплексного переменного

Преобразование плоскости. Функция $w=f(z)$, где $z=x+yi$ и $w=u+vi$, определена, если известны две функции от двух действительных переменных:

$$u=u(x, y), \quad v=v(x, y).$$

Функция комплексного переменного производит преобразование плоскости z в плоскость w : каждая точка z_1 переходит в соответствующую точку w_1 , геометрические образы (кривые, области) плоскости z при переходе в плоскость w преобразуются в другие. Кривая $x=x(t)$, $y=y(t)$ переходит в кривую $u=u[x(t), y(t)]$, $v=v[x(t), y(t)]$ (t —параметр).

Координатные линии $y=c$ переходят в $u=u(x, c)$, $v=v(x, c)$, где x —параметр; координатные линии $x=c_1$ переходят в $u=u(c_1, y)$, $v=v(c_1, y)$, где y —параметр.

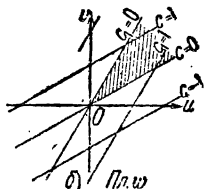
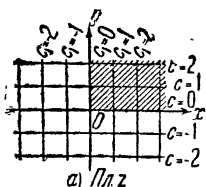


Рис. 15.

Пример отображения: $u=2x+y$, $v=x+2y$ (рис. 15). Линии $y=c$ переходят в $u=2x+c$, $v=x+2c$, т. е. в прямые $v=\frac{u}{2}+\frac{3}{2}c$; аналогично, линии $x=c_1$ в прямые $v=2u-3c_1$, заштрихованная область переходит в заштрихованную.

Аналитические функции. Функция $\tilde{w}$. Пусть $w=f(z)$, $w+\Delta w=f(z+\Delta z)$ (рис. 16).

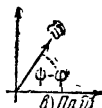
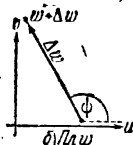
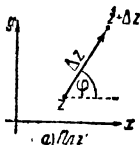


Рис. 16.

Будем уменьшать абсолютную величину Δz , не изменяя его аргумента (направления). Когда w является непрерыв-

ной в точке z , тогда $|\Delta w| \rightarrow 0$ при $|\Delta z| \rightarrow 0$ и при любом направлении Δz . Рассмотрим комплексное число $\tilde{w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$;

оно, вообще говоря, зависит как от числа z (является функцией z), так и от направления Δz . Так как $\tilde{w} \approx \frac{\Delta w}{\Delta z}$ (с точностью до бесконечно малых), то $|\tilde{w}| \approx \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$

и $\arg \tilde{w} \approx \arg \Delta w - \arg \Delta z$: модуль $\tilde{w}$ показывает, во сколько раз при преобразовании плоскости увеличивается длина вектора Δz , а аргумент $\tilde{w}$ показывает, на какой угол поворачивается вектор Δz при переходе к Δw .

Аналитические функции. Если в данной точке z число $\tilde{w}$ одно и то же для всех направлений Δz , то функция w называется *голоморфной* (иначе: *правильной*, *регулярной*, *монотонной*) в этой точке. Функция, голоморфная во всех точках некоторой области, называется *аналитической* в этой области, а $\tilde{w}$, являющееся в этом случае функцией только от z , называется *производной* от функции w и обозначается $\frac{dw}{dz}$ или w' :

$$w' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Необходимые и достаточные условия аналитичности функции $w = f(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{условия Коши-Римана}).$$

Например: функция $w = z^2$ ($u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$) — аналитическая всюду; функция $u = 2x + y$, $v = x + 2y$ — не аналитическая нигде.

Если функция является аналитической в некоторой области за исключением некоторых отдельных ее точек, то такие точки, в которых функция не голоморфна, называются *особыми*. Для аналитической функции u и v являются *гармоническими функциями*, т. е. удовлетворяют уравнению Лапласа (см. стр. 490):

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Зная гармоническую функцию u , можно с точностью до постоянного слагаемого определить сопряженную с ней гармоническую функцию v из условий Коши-Римана:

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \varphi(x), \quad \text{где} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} dy\right)$$

и, аналогично, по v определить u .

Конформные отображения. Преобразование плоскости, осуществляемое аналитической функцией, обладает важным свойством; в окрестности точки z , для которой $w' \neq 0$, бесконечно малые векторы всех направлений: 1) увеличиваются (или уменьшаются) по своей длине в одно и то же число раз, равное $|w'|$ (с точностью до бесконечно малых высшего порядка), и 2) поворачиваются на один и тот же угол, равный $\arg w'$. Таким образом фигуры в бесконечно малой области преобразуются в себе подобные —

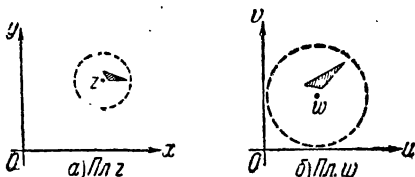


Рис. 17.

сохраняют форму (рис. 17). Такое преобразование называется *конформным отображением*. Фигуры конечных размеров

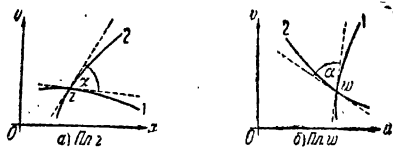


Рис. 18.

искажаются, но углы между двумя кривыми сохраняются (*консерватизм углов*, рис. 18). В частности, координатные

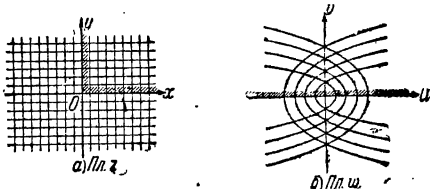


Рис. 19.

линии $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ в конформном отображении преобразуются в два семейства взаимно ортогональных кривых

и, обратно, для любого конформного отображения существует некоторая ортогональная сетка кривых, которая преобразуется в прямоугольную декартову сетку. В примере: $u=2x+y$, $v=x+2y$ (стр. 454) ортогональность нарушалась; в примере $w=z^2$ она сохраняется; координатные линии переходят в два семейства софокусных парабол (рис. 19). В точке $z=0$ имеем $w'=0$ — конформность нарушается. Первый координатный квадрант переходит в верхнюю полуплоскость.

Конформные отображения применяются в электротехнике, гидро- и аэромеханике и других прикладных вопросах. Ниже рассматриваются наиболее употребительные конформные отображения, причем дается чертеж той ортогональной сетки кривых (*изотермическая сетка*), которая преобразуется в декартову прямоугольную сетку. Штрихами отмечены контуры области, переходящей в верхнюю полуплоскость. Черным отмечена область, переходящая в квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ (рис. 20).

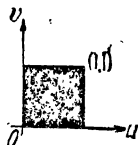
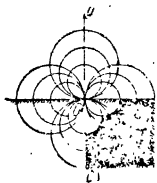
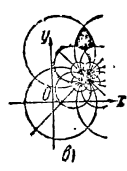


Рис. 20.

7. Важнейшие конформные отображения

Функции и их свойства	Ортогональная сетка, переходящая в прямоугольную декартову сеть
а) Линейная функция: $w = az + b$ ($a = re^{i\varphi}$) Преобразование может быть разложено на три $t = e^{i\varphi} z$ — поворот плоскости на угол φ, $s = \rho t$ — подобное растяжение в ρ раз, $w = s + b$ — параллельный сдвиг на вектор b. В результате, фигуры в плоскости z преобразуются в себе подобные, сопровождаясь поворотом и сдвигом. Точки $z_1 = \frac{b}{1-a}$ и $z_2 = \infty$ переходят сами в себя.	а)

Функции и их свойства	Ортогональная сетка, переходящая в прямоугольную декартову сеть
б) Функция: $w = \frac{1}{z}$. Точка z с радиусом-вектором ρ и полярным углом φ преобразуется в точку с радиусом-вектором $\frac{1}{\rho}$ и углом $-\varphi$. Преобразование состоит из инверсии относительно единичного круга* и зеркального отражения относительно оси Ox. Круги переходят в круги (считая прямую частным случаем круга с радиусом ∞). Точка O переходит в ∞, точки 1 и -1 не сдвигаются с места. Конформность нарушается при $z=0$.	
в) Дробно-линейная функция: $w = \frac{az+b}{cz+d}$. Преобразование может быть разложено на три: $t = cz + d$ (линейная функция), $s = \frac{1}{t}$ $w = \frac{a}{c} + (ad - bc)s$ (линейная функция). В результате дробно-линейная функция переводит круг в круг (считая прямую частным случаем круга); две точки, удовлетворяющие уравнению $z = \frac{az+b}{cz+d}$, не сдвигаются.	

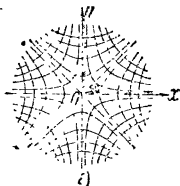
* *Инверсией* относительно данного круга радиуса R называется преобразование точек плоскости, при котором точка M_1 , находящаяся на расстоянии d_1 от центра круга, переходит в точку M_2 , находящуюся на том же радиусе OM_1 (или его продолжении), но на расстоянии $OM_2 = d_2 = \frac{R^2}{d_1}$; при этом точка M_2 переходит в M_1 . Точки, лежащие вне круга, переходят внутрь его и обратно.

Функции и их свойства

Ортогональная сетка, переходящая в прямоугольную декартову сеть

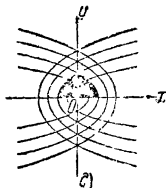
г) Квадратичная функция: $w=z^2$.

Вся плоскость z переходит в двойную плоскость w . Изотермическая сетка плоскости z состоит из двух семейств гипербол $u=x^2-y^2$ и $v=2xy$. Конформность нарушается при $z=0$. Не сдвигаются точки 0 и 1.



д) Квадратный корень: $w=\sqrt{z}$.

Функция двузначная; вся плоскость переходит: 1) в верхнюю полуплоскость, 2) в нижнюю полуплоскость. Изотермическая сетка плоскости z состоит из двух семейств софокусных парабол, с фокусом в начале и с осями, направленными по положительному и отрицательному направлениям оси x . Конформность нарушается при $z=0$. Не сдвигаются точки 0 и $+1$.



е) Логарифм: $w=\Gamma(z)$.

$u=\ln \rho$, $v=\varphi+2k\pi$; изотермическая сетка состоит из окружностей $\ln \rho=\text{const}$ и лучей $\varphi=\text{const}$, т. е. является полярной сеткой. Функция имеет бесконечное множество значений, и вся плоскость переходит в полосу, изображенную на рис. 21.

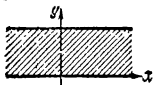
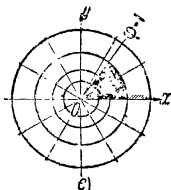


Рис. 21.



II. ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

А. Векторная алгебра и вектор-функции скаляра

1. Основные понятия

Скалярные и векторные величины. Величины, значения которых могут быть изображены положительными или отрицательными числами (скалярами), называются *скалярными* (масса, температура, работа и т. п.); величины же, значения которых отличаются как размерами, так и направлением в пространстве, называются *векторными* (сила, скорость, ускорение, напряженность электрического и магнитного поля и т. п.) и могут быть изображены векторами.

Вектор — отрезок (рис. 1), имеющий определенную длину и направление (обозначается $\overline{AB}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, в немецкой литературе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ...; A — начало, B — конец вектора; длина вектора $\mathbf{a}$ (*модуль* или *абсолютная величина*) обозначается a или $|\mathbf{a}|$. **Нуль-вектор** ($\mathbf{0}$) — вектор, начало и конец которого совпадают; его модуль равен 0, а направление неопределенное. Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ считаются равными, если совпадают их модули и направления (т. е. векторы параллельны и ориентированы в одну сторону). Различают векторы: *связанные*, начало которых закреплено в определенной точке пространства, *скользящие*, начало которых может перемещаться по прямой вдоль своего направления, и *свободные*, начало которых может быть перенесено в любую точку пространства. **Коллинеарные** векторы — параллельные одной и той же прямой, **компланарные** — параллельные одной и той же плоскости. Взаимно *противоположные* векторы — равные по длине и противоположные по направлению: $\overline{AB} = \mathbf{a}$ и $\overline{BA} = -\mathbf{a}$. **Единичные векторы** — модуль которых равен 1; единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, обозначается $\mathbf{a}^0$ и называется *ортом* этого направления. Вектор $\mathbf{a}$



Рис. 1.

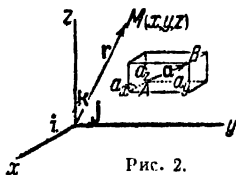


Рис. 2.

можно представить так: $\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0$, где a — модуль вектора $\mathbf{a}$. Орты, параллельные направлению прямоугольных координатных осей Ox , Oy , Oz , обозначаются $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (рис. 2).

Координаты вектора*. Каждый вектор $\overline{AB} = \mathbf{a}$ в пространстве может быть определен тремя скалярами:

* В этой главе принята правая система координат (см. стр. 235).

координатами вектора (обозначаются: a_x , a_y и a_z) — проекциями вектора на три координатные оси (рис. 2); это обозначается:

$$\mathbf{a} \{a_x, a_y, a_z\} \text{ или } \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}^*.$$

При параллельном переносе вектора его координаты не меняются.

Радиус-вектор точки. Вектор $\overline{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке M с декартовыми координатами x , y , z (рис. 2), вполне определяет эту точку и называется *радиусом-вектором* (обозначается $\mathbf{r}$); его координаты:

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z; \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

2. Алгебра векторов

Линейные комбинации векторов. Сумма нескольких векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$, есть вектор $\mathbf{f} = \overline{AF}$, представляющий замыкающую ломаной $ABCDEF$, составленной

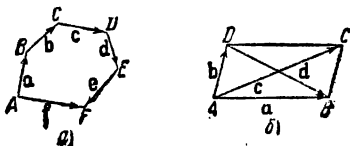


Рис. 3.

из слагаемых векторов (рис. 3, а); сумма двух векторов $\overline{AB} = \mathbf{a}$ и $\overline{AD} = \mathbf{b}$ (рис. 3, б) — вектор $\overline{AC} = \mathbf{c}$, являющийся диагональю параллелограмма $ABCD$. Основные свойства суммы:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}), |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ называется сумма векторов $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{b}$ (диагональ DB на рис. 3, б); $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{d}$; ее свойства: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (нуль-вектор), $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

Произведением скаляра и вектора ($\alpha \mathbf{a}$ или $\alpha \mathbf{a}$) называется вектор, коллинеарный с $\mathbf{a}$, длина которого равна $|\alpha| |\mathbf{a}|$, а направление совпадает с направлением $\mathbf{a}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$; свойства этого произведения:

$$\alpha \mathbf{a} = \mathbf{a} \alpha, \alpha \beta \mathbf{a} = \beta \alpha \mathbf{a}, \\ (\alpha + \beta) \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}, \alpha (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}.$$

* О сложении векторов и умножении вектора на скаляр см. ниже.

Линейная комбинация векторов $a, b, c, \dots, e$ с коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varepsilon$ (скалярными) есть вектор

$$f = \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots + \varepsilon e. \quad (*)$$

Координаты линейной комбинации нескольких векторов равны таким же линейным комбинациям отдельных векторов, это означает, что из векторного равенства $(*)$ вытекает три скалярных:

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x + \dots + \varepsilon e_x, \\ f_y &= \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y + \dots + \varepsilon e_y, \\ f_z &= \alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z + \dots + \varepsilon e_z, \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

и, обратно, из $(**)$ вытекает $(*)$.

В частности, для координат суммы или разности:

$$c = a \pm b,$$

$$c_x = a_x \pm b_x, \quad c_y = a_y \pm b_y, \quad c_z = a_z \pm b_z.$$

Любой вектор a может быть единственным образом разложен на сумму трех векторов, параллельных трем данным (некомпланарным) векторам e_1, e_2, e_3 : $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$; слагаемые $a_i e_i$ называются *компонентами*, а скалярные множители a_i — *коэффициентами* этого разложения. Векторы, лежащие в одной плоскости, могут быть представлены в виде $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$, где e_1 и e_2 — два данных неколлинеарных вектора.

Скалярное умножение векторов. Скалярным произведением векторов a и b (обозначается: ab) называется скаляр, определяемый равенством $ab = ab \cos \varphi$, где φ — угол между векторами a и b , приведенными к общему началу (рис. 4).



Рис. 4.

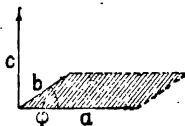


Рис. 5.

Векторное умножение векторов. Векторным произведением векторов a и b (обозначается $a \times b$ или $[ab]$) называется вектор c , длина которого равна $ab \sin \varphi$ (равна площади параллелограмма, см. рис. 5) и который направлен перпендикулярно a и b в такую сторону, чтобы три вектора a, b и c образовали правую тройку (т. е. чтобы после совмещения начал векторов a, b и c кратчайший поворот от a к b казался наблюдателю, смотрящему с конца вектора c , совершаемым против часовой стрелки, см. рис. 5).

Свойства произведений векторов.

$$ab=ba, \text{ но } a \times b = -b \times a$$

(при перестановке множителей векторное произведение изменяет свое направление на обратное);

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b \quad \text{и} \quad \alpha(a \times b) = (\alpha a) \times b;$$

$$a(bc) \neq (ab)c \quad \text{и} \quad a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c;$$

$$a(b+c) = ab+ac \quad \text{и} \quad a \times (b+c) = a \times b + a \times c;$$

$ab=0$, если $a \perp b$ (условие перпендикулярности векторов),
и $a \times b=0$, если $a \parallel b$ (условие коллинеарности векторов);

$$aa=a^2=a^2, \text{ но } a \times a=0.$$

Линейные комбинации векторов можно перемножать как обыкновенные многочлены, учитывая, что для векторного умножения, при перестановке множителей (например, при приведении подобных членов), необходимо изменять знак.

$$\text{Примеры: } 1) (3a+5b-2c)(a-2b-4c) = 3a^2+5ba-2ca - \\ - 6ab-10b^2+4cb-12ac-20bc+8c^2 = 3a^2-10b^2+8c^2-ab- \\ -14ac-16bc.$$

$$2) (3a+5b-2c) \times (a-2b-4c) = 3a \times a + 5b \times a - 2c \times a - \\ - 6a \times b - 10b \times b + 4c \times b - 12a \times c - 20b \times c + 8c \times c = 0 - \\ - 5a \times b + 2a \times c - 6a \times b - 0 - 4b \times c - 12a \times c - 20b \times c + 0 = \\ = -11a \times b - 10a \times c - 24b \times c = 11b \times a + 10c \times a + 24c \times b.$$

Произведения координатных ортов:

$$i^2=j^2=k^2=1, \quad ij=jk=ki=0,$$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0;$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j;$$

$$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j.$$

Выражение произведения в координатах. Если

$$a = a_x i + a_y j + a_z k \quad \text{и} \quad b = b_x i + b_y j + b_z k,$$

то

$$ab = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

и

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k.$$

Последовательные перемножения векторов. Двойное векторное произведение $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ — вектор, компланарный $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, может быть вычислен по формуле:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Смешанное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ численно равно объему параллелепипеда, построенного на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (рис. 6) со знаком „+“, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют правую тройку, и „—“, если — левую (см. выше, стр. 462). Скобки и знак в смешанном произведении обычно опускают:

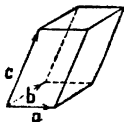


Рис. 6.

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= abc, \\ abc &= bca = cab = \\ &= -acb = -bac = -cba \end{aligned}$$

(перестановка двух множителей меняет знак смешанного произведения; круговая перестановка

Геометрические приложения

Название	Векторная формула
Длина вектора $\mathbf{a}$	$a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$
Площадь параллелограмма, построенного на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$	$S = \mathbf{a} \times \mathbf{b} $
Объем параллелепипеда, построенного на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$	$V = abc $
Угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$	$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\sqrt{a^2 b^2}}$

всех трех—не меняет). Координатная формула для вычисления смешанного произведения:

$$abc = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Формулы для „сложных произведений“:

$(a \times b)(c \times d) = (ac)(bd) - (bc)(ad)$ (тождество Лагранжа):

$$abc \cdot efg = \begin{vmatrix} ae & af & ag \\ be & bf & bg \\ ce & cf & cg \end{vmatrix}.$$

Приложения к аналитической геометрии (векторные уравнения плоскости и прямой) см. на следующей странице.

ния векторной алгебры

Координатная формула

$$a = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$$

$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Векторные уравнения
 x — неизвестный вектор, a, b, c, d — известные векторы,
 x, y и z — неизвестные, α, β, γ — известные скаляры.

Уравнение	Решение
1) $x + a = b$	$x = b - a$
2) $x\alpha = a$	$x = \frac{a}{\alpha}$
3) $xa = a$	Уравнение неопределенное; если все векторы x , удовлетворяющие этому уравнению, свести началами в одну точку, то их концы будут лежать в плоскости, $\perp$ -ной вектору a . Уравнение 3) называется <i>векторным уравнением этой плоскости</i>
4) $x \times a = b \quad (b \perp a)$	Уравнение неопределенное; если векторы x , удовлетворяющие этому уравнению, свести началами в одну точку, то их концы будут лежать на прямой, $\parallel$ -ной вектору a . Уравнение 4) называется <i>векторным уравнением этой прямой</i>
5) $\begin{cases} xa = a \\ x \times a = b \quad (b \perp a) \end{cases}$	$x = \frac{a\alpha + a \times b}{a^2}$
6) $\begin{cases} xa = \alpha \\ xb = \beta \\ xc = \gamma \end{cases}$	$x = \frac{\alpha(b \times c) + \beta(c \times a) + \gamma(a \times c)}{abc}$
7) $d = xa + yb + zc$	$x = \frac{dbc}{abc}, y = \frac{adc}{abc}, z = \frac{abd}{abc}$
8) $d = x(b \times c) + y(c \times a) + z(a \times b)$	$x = \frac{da}{abc}, y = \frac{db}{abc}, z = \frac{dc}{abc}$

3. Векторные функции скалярного переменного

Векторная функция (вектор-функция): $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$ может быть определена, если заданы три скалярные функции:

$$a_x = f_x(t), \quad a_y = f_y(t), \quad a_z = f_z(t).$$

Координатное выражение вектор-функции:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Если представить переменный вектор в виде радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ точки M , то при изменении t точка M опишет кривую в пространстве (рис. 7, а) — *годограф* векторной функции; его уравнение:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Производная векторной функции $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$:

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t},$$

представляет новую векторную функцию от t . Геометрическое значение производной от радиуса-вектора: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ есть

вектор, касательный к годографу в соответствующей точке (рис. 7, б);

длина $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ зависит от выбора параметра t . Если t — время, то функция $\mathbf{r}(t)$ определяет движение точки M в пространстве,

а $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — по величине и по направлению — скорость этого движения. Если t —

длина дуги годографа (от некоторой точки его до M), то $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = 1$.

Правила дифференцирования векторов:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \dots,$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi \mathbf{a}) = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a} + \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (\varphi \text{ — скалярная функция от } t),$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{b} + \mathbf{a} \frac{d\mathbf{b}}{dt},$$

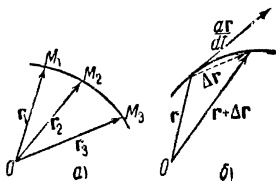


Рис. 7.

$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$ (множители нельзя переставлять местами, см. стр. 463),

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}[\varphi(t)] = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Если вектор $\mathbf{r}$ единичный, то $\mathbf{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ (касательная перпендикулярна к радиусу-вектору, годограф — сферическая кривая).

Ряд Тэйлора для векторных функций:

$$\mathbf{a}(t+h) = \mathbf{a}(t) + h \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} + \dots$$

Сходимость этого ряда (и любого ряда с векторными членами) определяется так же, как и сходимость ряда с комплексными членами (см. стр. 448). О разложении векторной функции в ряд Тэйлора имеет смысл говорить только тогда, когда этот ряд сходится.

Дифференциал функции $\mathbf{a}(t)$ определяется равенством

$$d\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \Delta t.$$

Б. Теория поля

4. Скалярное поле

Функции точки. Скалярная величина U , значения которой зависят от положения точки M в пространстве, называется скалярной функцией точки: $U = U(M)$; точки M образуют в этом случае скалярное поле (например, поле температуры, потенциала, плотности в неоднородной среде и т. п.). Поле может быть определено посредством скалярной функции векторного аргумента $\mathbf{r}$ (радиуса-вектора точки M при выбранном полюсе O , см. стр. 461):

$$U = U(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Поле, определенное только для точек некоторой плоскости, называется плоским.

Центральное и осевое поле. Если функция принимает равные значения для всех точек, находящихся на равных расстояниях от некоторого центра $C(\mathbf{r}_1)$, то поле называется центральным или сферическим; U зависит только от расстояния $CM = r$, например: $U = r$ (само расстояние точки от полюса), $U = \frac{c}{r^2}$ (поле, выражающее освещенность в каждой точке при центральном источнике света), вообще

$$U = f(r). \quad (2)$$

Если функция принимает равные значения для всех точек, находящихся на равных расстояниях от некоторой прямой (*оси поля*), то поле называется *осевым* или *цилиндрическим*.

Координатное задание поля. Определяя точку M ее координатами (декартовыми x, y, z , цилиндрическими ρ, φ, z или сферическими r, θ, φ^*), получаем выражение скалярного поля (1) в виде функции трех переменных:

$$U = \Phi(x, y, z), \quad U = \Psi(\rho, \varphi, z) \quad \text{или} \quad U = X(r, \theta, \varphi), \quad (1a)$$

а для плоского поля—в виде функции двух переменных (в декартовых и полярных координатах):

$$U = \Phi(x, y) \quad \text{или} \quad U = \Psi(\rho, \varphi) \quad (1b)$$

(функции U в (1a) и (1b) предполагаются однозначными и непрерывными всюду, за исключением отдельных *точек, линий и поверхностей разрыва*). Выражение центрального поля в координатах:

$$U = U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) = U(r); \quad (2a)$$

осевого

$$U = U(\sqrt{x^2 + y^2}) = U(\rho) = U(r \cos \theta); \quad (3)$$

для изучения центральных полей наиболее удобны сферические, для осевых—цилиндрические координаты.

Поверхности и линии уровня. Геометрическое место точек, для которых функция (1) принимает одно и то же значение:

$$U = \text{const}, \quad (4)$$

образует в пространстве *поверхность уровня* (например, поверхность одинаковых температур), уравнение которой в координатах:

$$U = \Phi(x, y, z) = \text{const}, \quad \Psi(\rho, \varphi, z) = \text{const}, \quad X(r, \theta, \varphi) = \text{const}. \quad (4a)$$

При различных $\text{const} = U_0, U_1, U_2, \dots$ получаются различные поверхности; через каждую точку поля проходит одна такая поверхность (за исключением точек, в которых функция U не определена однозначно).

Примеры: 1) Для поля $U = cx = c_x x + c_y y + c_z z$ поверхности уровня—параллельные плоскости. 2) Для поля $U = x^2 + y^2 + 4z^2$ —подобные и подобно расположенные эллипсоиды.

Поверхности уровня центрального поля—концентрические сферы, осевого поля—цилиндры с общей осью.

Для плоского поля уравнения $U = \text{const}$ изображают *линии уровня*:

$$U(x, y) = \text{const}, \quad U(\rho, \varphi) = \text{const}. \quad (4b)$$

* См. стр. 238.

На чертежах линии уровня условно проводятся через определенный одинаковый интервал значений U , и на каждой из них надписывается соответствующее числовое значение U (рис. 8); например: изобары на синоптических или горизонтали (линии одинаковой высоты) на топографических картах. В отдельных случаях линии уровня могут вырождаться в изолированные точки, поверхности уровня—в точки и линии.

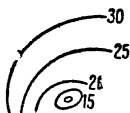


Рис. 8.

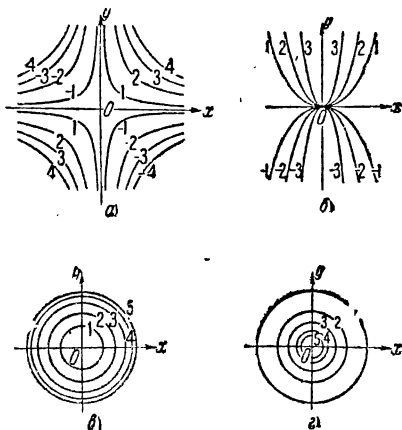


Рис. 9.

Примеры (рис. 9): а) $U = xy$, б) $U = \frac{y}{x^2}$, в) $U = r^2$, г) $U = \frac{1}{r^2}$.

5. Векторное поле

Вектор-функции точки. Векторная величина V , значения которой зависят от положения точки M в пространстве, называется *вектор-функцией точки*; $V = V(M)$; точки M образуют в этом случае *векторное поле* (например: поле скоростей отдельных частиц движущейся жидкости, силовое поле, поле электрической или магнитной на-

пряженности и т. п.). Поле может быть определено посредством векторной функции векторного аргумента $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Векторное поле *плоское*, если все значения как $\mathbf{r}$, так и $\mathbf{V}$ лежат в одной плоскости.

Специальные типы векторных полей.

а) *Центральное векторное поле* (рис. 10, а), в котором все векторы $\mathbf{V}$ проходят через одну определенную точку (*центр*). Если поместить полюс в центре, то такое поле определяется формулой $\mathbf{V} = f(r) \mathbf{r}$; все векторы $\mathbf{V}$ имеют

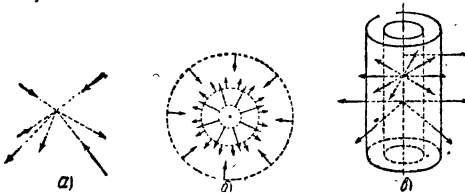


Рис. 10.

направление радиуса-вектора $\mathbf{r}$. Это поле удобнее выразить формулой $\mathbf{V} = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$; $\varphi(r)$ — длина вектора $\mathbf{V}$, $\frac{\mathbf{r}}{r}$ — его орт.

б) *Сферическое векторное поле* (рис. 10, б): $\mathbf{V} = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, важный частный случай центрального поля, в котором длина вектора $\mathbf{V}$ зависит только от расстояния $|r|$, например, поле притяжения Ньютона (Кулона): $\mathbf{V} = \frac{c}{r^2} \mathbf{r} = \frac{c}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$. (Для плоского поля этот случай называется *круговым полем*.)

в) *Цилиндрическое векторное поле* (рис. 10, в), в котором все векторы $\mathbf{V}$ проходят через определенную прямую (*ось*) перпендикулярно к ней, и для точек, находящихся на одинаковых расстояниях от оси, равны по абсолютной величине и направлены все либо от оси, либо к ней. Если поместить полюс на оси поля, определяемой ортом $\mathbf{s}$, то такое поле определяется формулой: $\mathbf{V} = \varphi(\rho) \frac{\mathbf{r}}{\rho}$, где $\mathbf{r}$ — вектор, являющийся проекцией $\mathbf{r}$ на плоскость, перпендикулярную оси, направление которой определяется некоторым ортом $\mathbf{s}$; $\mathbf{r} = \mathbf{s} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{s})$. В сечении этого поля плоскостями, перпендикулярными к оси $\mathbf{s}$, получаем одинаковые круговые поля.

Координатное задание поля. Векторное поле (1) можно определить посредством трех скалярных полей $V_1(\mathbf{r})$, $V_2(\mathbf{r})$ и $V_3(\mathbf{r})$, являющихся коэффициентами разложения $\mathbf{V}$ по трем каким-либо ортам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1 + V_2 \mathbf{e}_2 + V_3 \mathbf{e}_3. \quad (2)$$

Если за орты приняты координатные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, а коэффициенты V_1 , V_2 , V_3 выражены через декартовы координаты x , y , z , то

$$\mathbf{V} = V_x(x, y, z) \mathbf{i} + V_y(x, y, z) \mathbf{j} + V_z(x, y, z) \mathbf{k}, \quad (2a)$$

т. е. векторное поле определено посредством трех скалярных функций от трех переменных (задание поля в *декартовых координатах*). В *цилиндрических* и *сферических координатах* орты — векторы

$\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z (= \mathbf{k})$ и $\mathbf{e}_r$ ($= \frac{\mathbf{r}}{r}$), $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$ являются касательными к координатным линиям в каждой точке (рис. 11 и 12), а коэффициенты выражены в соответствующих координатах:

$$\mathbf{V} = V_\rho(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_\rho + V_\varphi(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_\varphi + V_z(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_z, \quad (2б)$$

$$\mathbf{V} = V_r(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_r + V_\varphi(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_\varphi + V_\theta(r, \varphi, \theta) \mathbf{e}_\theta. \quad (2в)$$

В этих случаях орты изменяют свое направление при переходе от одной точки к другой, оставаясь взаимно перпендикулярными.

Формулы перехода от одной системы к другой:

а) *Выражение декартовых координат через цилиндрические:*

$$V_x = V_\rho \cos \varphi - V_\varphi \sin \varphi, \quad V_y = V_\rho \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi, \quad V_z = V_z.$$

б) *Выражение цилиндрических координат через декартовы:*

$$V_\rho = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \\ V_\varphi = -V_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi, \quad V_z = V_z.$$

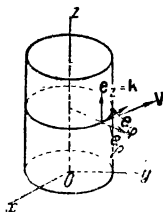


Рис. 11.

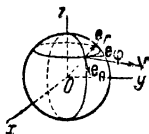


Рис. 12.

в) *Выражение декартовых координат через сферические:*

$$V_x = V_r \sin \theta \cos \varphi - V_\varphi \sin \varphi + V_\theta \cos \varphi \cos \theta,$$

$$V_y = V_r \sin \theta \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi + V_\theta \sin \varphi \cos \theta,$$

$$V_z = V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta.$$

г) *Выражение сферических координат через декартовые:*

$$V_r = V_x \sin \theta \cos \varphi + V_y \sin \theta \sin \varphi + V_z \cos \theta,$$

$$V_\varphi = -V_x \sin \varphi + V_y \cos \varphi,$$

$$V_\theta = V_x \cos \theta \cos \varphi + V_y \cos \theta \sin \varphi - V_z \sin \theta.$$

Выражение сферического векторного поля в декартовых координатах:

$$\mathbf{V} = \varphi (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k});$$

цилиндрического поля в декартовых координатах:

$$\mathbf{V} = \varphi (\sqrt{x^2 + y^2}) (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}).$$

Наиболее удобны для изучения сферических полей сферические координаты $[\mathbf{V} = V(r) \mathbf{e}_r]$, а для цилиндрических — цилиндрические $[\mathbf{V} = V(\rho) \mathbf{e}_\rho]$.

В случае плоского поля:

$$\mathbf{V} = V_x(x, y) \mathbf{i} + V_y(x, y) \mathbf{j} =$$

$$= V_\rho(x, y) \mathbf{e}_\rho + V_\varphi(x, y) \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{рис. 13}),$$

для кругового поля:

$$\mathbf{V} = \varphi (\sqrt{x^2 + y^2}) (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \varphi(\rho) \mathbf{e}_\rho.$$

Линии тока. Кривая Γ , проходящая так, что в каждой ее точке $M(\mathbf{r})$ вектор $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ касается Γ , называется *линией тока* векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ (рис. 14). Через каждую точку поля проходит одна линия тока; линии тока между собой не пересекаются (за исключением точек, в которых функция $\mathbf{V}$ не определена или $\mathbf{V} = 0$).

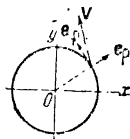


Рис. 13.

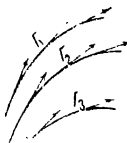


Рис. 14.

Примеры: линии тока центрального поля — прямые, соединяющие центр с точкой поля; линии тока поля $\mathbf{V} = c \times \mathbf{r}$

окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к вектору $\mathbf{c}$ и имеющих центры на оси, параллельной $\mathbf{c}$.

Дифференциальные уравнения линий тока поля, выраженного в декартовых координатах:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}; \text{ для плоского поля } \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} *.$$

6. Градиент

Производной скалярного поля $U=U(\mathbf{r})$ в данной точке $\mathbf{r}$ и в направлении орта $\mathbf{c}$ называется предел отношения:

$$\frac{\partial U}{\partial c} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{c}) - U(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad (\text{рис. 15}).$$

$\frac{\partial U}{\partial c}$ указывает скорость возрастания функции U в направлении $\mathbf{c}$ в каждой точке; наибольшее значение в данной

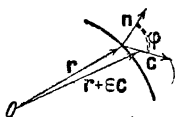


Рис. 15.

точке имеет производная $\frac{\partial U}{\partial n}$ в направлении нормали $\mathbf{n}$ к поверхности уровня в этой точке (в сторону возрастания функции U); производные в другом направлении выражаются формулой:

$$\frac{\partial U}{\partial c} = \frac{\partial U}{\partial n} \cos(\mathbf{c}, \mathbf{n}) = \frac{\partial U}{\partial n} \cos \varphi.$$

Градиент поля $U(\mathbf{r})$ (обозначается: $\text{grad } U$ или ∇U **) — вектор, определенный в каждой точке поля, имеющих направление нормали к поверхности уровня (в сторону возрастания U) и длину, равную $\frac{\partial U}{\partial n}$.

Производная $\frac{\partial U}{\partial c}$ равна проекции $\text{grad } U$ на направление $\mathbf{c}$:

$$\frac{\partial U}{\partial c} = \mathbf{c} \cdot \text{grad } U.$$

Координаты градиента:

в декартовой системе

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k},$$

* Решение этих дифференциальных уравнений см. стр. 402 и 411.

** О символе ∇ (набла) см. стр. 486.

в системе цилиндрических координат

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

в системе сферических координат

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

В тех точках поля, где линии уровня, проведенные согласно условию на стр. 470, оказываются начерченными более густо, абсолютная величина градиента больше; в точках максимума и минимума поля [в них поверхности (линии) уровня вырождаются в точку] $\text{grad } U = 0$.

Дифференциал скалярного поля — полный дифференциал функции U (см. стр. 311) при $d\mathbf{r} \{dx, dy, dz\}$:

$$dU = \text{grad } U d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz.$$

Правила вычисления градиента:

$$\text{grad } c = 0, \quad \text{grad } (U_1 + U_2) = \text{grad } U_1 + \text{grad } U_2,$$

$$\text{grad } (cU) = c \text{ grad } U,$$

$$\text{grad } (U_1 U_2) = U_1 \text{ grad } U_2 + U_2 \text{ grad } U_1, \quad \text{grad } \varphi(U) = \frac{d\varphi}{dU} \text{ grad } U,$$

$$\begin{aligned} \text{grad } (\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2) &= (\mathbf{V}_1 \text{ grad}) \mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_2 \text{ grad}) \mathbf{V}_1 + \\ &+ \mathbf{V}_1 \times \text{rot } \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_2 \times \text{rot } \mathbf{V}_1^*. \end{aligned}$$

В частности, $\text{grad } (r\mathbf{c}) = \mathbf{c}$.

Градиент центрального поля: $\text{grad } U(r) = U'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ (сферическое поле); в частности, $\text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ (поле единичных векторов).

Градиент как объемная производная. Объемная производная скалярного поля (см. стр. 453) есть вектор, являющийся градиентом этого поля; это свойство можно принять за определение градиента:

$$\text{grad } U = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Sigma} U dS}{v}.$$

* О выражениях $(\mathbf{V} \text{ grad}) \mathbf{W}$ и $\text{rot } \mathbf{V}$ см. стр. 484 и 486.

7. Криволинейный интеграл в векторном поле

О п р е д е л е н и е. Криволинейным (линейным) интегралом вектор-функции $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, взятым по пути $\widehat{AB}$ (обозначается $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$) называется

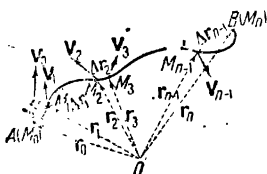


Рис. 16.

скаляр P , получаемый следующим образом: 1) путь $\widehat{AB}$ (рис. 16) разбивается промежуточными точками $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$, ..., $M_{n-1}(\mathbf{r}_{n-1})$ на n малых отрезков, приближенно изображаемых векторами $\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i = \Delta \mathbf{r}_i$; 2) в каждой

точке деления функция $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}(\mathbf{r}_i)$ скалярно умножается на $\Delta \mathbf{r}_i$; 3) все произведения складываются; 4) рассматривается предел суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{V}_i \Delta \mathbf{r}_i \quad \text{при } \Delta \mathbf{r}_i \rightarrow 0 \text{ и, следовательно, } n \rightarrow \infty:$$

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \lim_{\substack{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum \mathbf{V}_i \Delta \mathbf{r}_i.$$

Этот предел зависит от вида функции $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, точек A и B и, вообще говоря, кривой $\widehat{AB}$ и не зависит от разбиения кривой на отрезки, лишь бы их длина $\rightarrow 0$.*

Механическое значение интеграла. Если поле $\mathbf{V}$ — силовое, то $P = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ равно работе, которую сила $\mathbf{V}$ произведет при переносе материальной точки по пути $\widehat{AB}$.

Свойства криволинейного интеграла:

- а) $\int_{\widehat{ABC}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{\widehat{BC}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r};$
 б) $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = - \int_{\widehat{BA}} \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ (рис. 17);

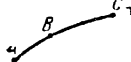


Рис. 17.

* При этом предполагается, что вектор-функция $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ непрерывна; это же условие необходимо и для существования интегралов по поверхности (стр. 480).

$$в) \int_{\widehat{AB}} [V(r) + W(r)] dr = \int_{\widehat{AB}} V(r) dr + \int_{\widehat{AB}} W(r) dr;$$

$$г) \int_{\widehat{AB}} cV(r) dr = c \int_{\widehat{AB}} V(r) dr.$$

Вычисление криволинейного интеграла, заданного в декартовых координатах, производится по формуле

$$\int_{\widehat{AB}} V(r) dr = \int_{\widehat{AB}} (V_x dx + V_y dy + V_z dz). \quad (1)$$

Если путь интегрирования $\widehat{AB}$ задан в параметрической форме (стр. 272):

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (2)$$

и t_0 и T — значения параметра, соответствующие точкам A и B , то интеграл вычисляется подстановкой x , y , z , dx , dy , dz из (2) в (1):

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} V(r) dr &= \int_{t_0}^T \left\{ V_x[x(t), y(t), z(t)] \frac{dx}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + V_y[x(t), y(t), z(t)] \frac{dy}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + V_z[x(t), y(t), z(t)] \frac{dz}{dt} \right\} dt. \end{aligned}$$

Примеры: 1) $P = \int_{\widehat{AB}} (xy dx + (yz) dy + (zx) dz)$, где $\widehat{AB}$ — один

виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$ от $t=0$ до $t=2\pi$.

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin^2 t \cos t + a^2 b t \sin t \cos t + ab^2 t \cos t) dt = \\ &= -\frac{\pi a^2 b}{2}. \end{aligned}$$

2) $P = \int_{\widehat{AB}} y^2 dx + (xy - x^2) dy$, где $\widehat{AB}$ — дуга параболы $y^2 = 9x$ от точки $A(0, 0)$ до $B(1, 3)$.

$$P = \int_0^3 \left[\frac{2}{9} y^3 + \left(\frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{81} \right) \right] dy = 6 \frac{3}{20}.$$

Циркуляцией называется криволинейный интеграл, взятый по замкнутому контуру (обозначается $\oint_C \mathbf{V} d\mathbf{r}$, где C — замкнутая кривая). Площадь плоской фигуры может быть вычислена как циркуляция:

$$S = \frac{1}{2} \oint_C (x dy - y dx),$$

где C — контур, ограничивающий плоскую фигуру (проходится в направлении против часовой стрелки).

8. Потенциал

Консервативное (иначе *потенциальное*) поле — векторное поле, в котором криволинейный интеграл $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V} d\mathbf{r}$ не зависит от пути, соединяющего A и B , а только от положения самих точек A и B . Циркуляция в консервативном поле всегда равна нулю. Консервативное поле всегда *безвихревое*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

(см. стр. 489); если поле задано в декартовых координатах, то необходимые и достаточные условия того, чтобы оно было консервативным:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad (1a)$$

[для плоского поля — только одно первое равенство (1a)].

Потенциал консервативного поля. Если в консервативном поле фиксировать начальную точку $A(r_0)$ и изменять конечную $B(r)$, то интеграл $\int_{\widehat{AB}} \mathbf{V}(r) d\mathbf{r}$ (обозначается $\int_{r_0}^r \mathbf{V}(r) d\mathbf{r}$) является скалярной функцией r :

$\int_{r_0}^r \mathbf{V}(r) d\mathbf{r} = \varphi(r)$, и скалярное поле $\varphi(r)$ называется *потенциальной функцией* или *потенциалом* поля $\mathbf{V}(r)$. Потенциал поля определен с точностью до произвольного постоянного

слагаемого, зависящего от нижнего предела r_0 ; разность

потенциалов: $\varphi(r_2) - \varphi(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} V(r) dr$ *

Связь градиента, криволинейного интеграла и потенциала. Если $V(r) = \text{grad } U(r)$, то $U(r)$ есть потенциал $V(r)$ ** и обратно.

Вычисление потенциала U консервативного поля $V = V_x i + V_y j + V_z k$, заданного в декартовых координатах, равносильно задаче вычисления функции U по ее полному дифференциалу: $dU = V_x dx + V_y dy + V_z dz$ [V_x, V_y, V_z должны удовлетворять условию (1a)]; U определяется из системы уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = V_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = V_z.$$

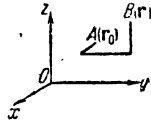


Рис. 18.

Практически потенциал вычисляется интегрированием по ломаной, составленной из отрезков параллельных осям координат (рис. 18):

$$U = \int_{r_0}^r V dr = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^x V_x(x, y_0, z_0) dx + \\ + \int_{y_0}^y V_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z V_z(x, y, z) dz.$$

Пример: $V = (2xy + z^2) i + (2yz + x^2) j + (2zx + y^2) k$. Условия (1a) удовлетворяются. Полагаем $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$. Имеем:

$$U = C + \int_0^x (2 \cdot x \cdot 0 + 0^2) dx + \int_0^y (2 \cdot y \cdot 0 + x^2) dy + \\ + \int_0^z (2zx + y^2) dz = C + x^2 y + z^2 x + y^2 z.$$

* В физике потенциалом $\varphi(r)$ в точке r называют иногда величину, противоположную по знаку: $-\int_{r_0}^r V(r) dr$.

** Или „минус потенциал поля $V(r)$ “ (см. предыдущую сноску).

9. Интегралы по поверхности

Вектором плоской площадки Σ , ограниченной контуром C , вдоль которого установлено положительное направление, называется вектор S (рис. 19, а) с моду-



Рис. 19.

лем, равным величине S площадки Σ и направлением, перпендикулярным к Σ так, чтобы от его конца положительный обход площадки казался идущим против часовой стрелки. Таким образом выбор положительного направления на контуре площадки эквивалентен выбору лицевой стороны площадки; эта связь переносится и на любую поверхность, ограниченную некоторым контуром (рис. 19, б и в).

Три типа интегралов по поверхности Σ (конечной: ограниченной некоторым контуром или замкнутой):

А. Поток скалярного поля $U(\mathbf{r})$:

$$\text{вектор } \mathbf{P} = \int_{\Sigma} U(\mathbf{r}) d\mathbf{S}.$$

Б. Скалярный поток векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r})$:

$$\text{скаляр } Q = \int_{\Sigma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}.$$

В. Векторный поток векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{r})$:

$$\text{вектор } \mathbf{R} = \int_{\Sigma} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S}.$$

О п р е д е л е н и я. Интегралами по поверхности называются величины, образуемые следующим образом: 1) Поверхность Σ , на которой выбрана лицевая сторона (рис. 20), разбивается произвольным образом на n малых (элементарных) площадок dS_i , каждая из которых приближенно принимается за плоскую, и соответствующий вектор площадки

обозначается dS_i (при этом, в случае замкнутой поверхности, положительное направление обхода площадок выбирается так, чтобы лицевая ее сторона, куда направлен вектор dS_i , была внешней). 2) Внутри каждой площадки выбирается произвольная точка r_i и составляется произведение: в случае скалярного поля $U(r_i) dS_i$, а в случае векторного поля $V(r_i) dS_i$ или $V(r_i) \times dS_i$. 3) Произведения, составленные для каждой площадки, складываются, и совершается переход к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $dS \rightarrow 0$ *:

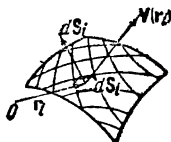


Рис. 20.

А. Поток скалярного поля

$$P = \lim_{dS_i \rightarrow 0} \sum U(r_i) dS_i = \int_{\Sigma} U(r) dS.$$

Б. Скалярный поток векторного поля

$$Q = \lim_{dS_i \rightarrow 0} \sum V(r_i) dS_i = \int_{\Sigma} V(r) dS.$$

В. Векторный поток векторного поля

$$R = \lim_{dS_i \rightarrow 0} \sum V(r_i) \times dS_i = \int_{\Sigma} V(r) \times dS.$$

Эти интегралы не зависят от характера разбиения поверхности на элементарные площадки и от выбора точки r_i , лишь бы все $dS_i \rightarrow 0$.

Вычисление интегралов по поверхности в декартовых координатах производится по следующим формулам:

$$A) \int_{\Sigma} U dS = \int_{\Sigma_{yz}} U dy dz + \int_{\Sigma_{zx}} U dz dx + \int_{\Sigma_{xy}} U dx dy.$$

$$Б) \int_{\Sigma} V dS = \int_{\Sigma_{yz}} V_x dy dz + \int_{\Sigma_{zx}} V_y dz dx + \int_{\Sigma_{xy}} V_z dx dy.$$

$$В) \int_{\Sigma} V \times dS = \int_{\Sigma_{yz}} (V_z j - V_y k) dy dz + \\ + \int_{\Sigma_{zx}} (V_x k - V_z i) dz dx + \int_{\Sigma_{xy}} (V_y i - V_x j) dx dy.$$

* Площадка стремится к нулю в смысле, указанном в примечании, на стр. 288.

Каждый двойной интеграл распространяется на площадь — проекцию Σ на координатные плоскости (рис. 21), причем в выражениях, стоящих под знаком интеграла, следует одно из переменных (x , y или z) выразить через два других из уравнения поверхности Σ .

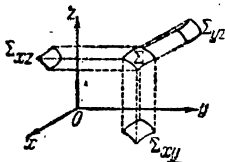


Рис. 21.

Примеры: А) $P = \int_{\Sigma} xyz \, dS$ по

части плоскости $x+y+z=1$, заключенной между тремя координатными плоскостями. Имеем:

$$P = \int_{yz} \int (1-y-z) yz \, dy \, dz + \int_{zx} \int (1-x-z) xz \, dx \, dz + \int_{xy} \int (1-x-y) xy \, dx \, dy;$$

$\int_{yz} \int (1-y-z) yz \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-y-z) yz \, dz \, dy = \frac{1}{120}$; остальные два интеграла вычисляются аналогично, результат: $P = \frac{1}{120} (I + J + K)$.

Б) $Q = \int_{\Sigma} r \, dS = \int_{yz} \int x \, dy \, dz + \int_{zx} \int y \, dz \, dx + \int_{xy} \int z \, dx \, dy$ по

той же поверхности. $\int_{xy} \int z \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) \, dx \, dy = \frac{1}{6}$;

остальные два интеграла вычисляются аналогично;

$$Q = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \quad \text{В) } R = \int_{\Sigma} r \times dS =$$

$$= \int_{\Sigma} (xi + yj + zk) \times (dy \, dz \, i + dz \, dx \, j + dx \, dy \, k)$$

по той же поверхности. Аналогичные вычисления дают $R=0$.

Интегралы по замкнутой поверхности

обозначаются $\oint_{\Sigma} U \, dS$, $\oint_{\Sigma} V \, dS$, $\oint_{\Sigma} V \times dS$.

10. Объемное дифференцирование

Определение. Объемными (иначе пространственными) производными скалярного или векторного поля в точке $\mathbf{r}$ называются величины трех типов, получаемые следующим образом: 1) точка $\mathbf{r}$ поля $U(\mathbf{r})$ или $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ окружается замкнутой оболочкой Σ ; 2) вычисляется интеграл по поверхности Σ $\left(\oint_{\Sigma} U dS, \oint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \text{ или } \oint_{\Sigma} \mathbf{V} \times d\mathbf{S} \right)$; 3) рас-

считывается предел отношения этого интеграла к объему v , заключенному внутри этой поверхности Σ . Этот предел не зависит от формы оболочки Σ , лишь бы объем $v \rightarrow 0$ (в смысле, указанном в примечании на стр. 388).

Объемная производная скалярного поля является его градиентом (см. стр. 475), а объемные производные векторного поля приводят к понятиям дивергенции и ротации.

11. Дивергенция векторного поля

Определение. Дивергенцией, или расхождением, поля $\mathbf{V}$ (обозначается $\text{div } \mathbf{V}$ или $\nabla \mathbf{V}^*$) называется скаляр, определенный в каждой точке поля и являющийся объемной производной этого поля:

$$\text{div } \mathbf{V} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}}{v}.$$

Формулы для вычисления дивергенции:

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{в декартовых координатах});$$

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{в цилиндрических координатах});$$

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta V_{\theta}) \right] \quad (\text{в сферических координатах}).$$

* О символе ∇ (набла) см. стр. 486.

муму, а направление совпадает с направлением вектора площадки $S_{\max}$:

$$|\operatorname{rot} V| = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int V dr}{S_{\max}}; \left. \begin{array}{l} \text{проекция } \operatorname{rot} V \\ \text{(на нормаль к} \\ \text{площадке } S) \end{array} \right\} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int_C V dr}{S}.$$

Ротация потенциального поля равна нулю (следует из теоремы Стокса, стр. 488).

Координаты ротации:

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) k$$

(в декартовых координатах),

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) e_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right) e_\varphi +$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) e_z \quad (\text{в цилиндрических координатах}),$$

$$\operatorname{rot} V = \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\varphi) \right) \right] e_r +$$

$$+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} \right] e_\varphi +$$

$$+ \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \right] e_\theta \quad (\text{в сферических координатах}).$$

Правила для вычисления ротации:

$$\operatorname{rot} (V_1 + V_2) = \operatorname{rot} V_1 + \operatorname{rot} V_2,$$

$$\operatorname{rot} (cV) = c \operatorname{rot} V,$$

$$\operatorname{rot} (UV) = U \operatorname{rot} V + \operatorname{grad} U \times V,$$

$$\operatorname{rot} (V_1 \times V_2) = (V_2 \operatorname{grad}) V_1 - (V_1 \operatorname{grad}) V_2 + V_1 \operatorname{div} V_2 - V_2 \operatorname{div} V_1^*.$$

Вихревыми линиями поля V называются линии тока поля $\operatorname{rot} V$ (стр. 473).

* О выражении $V \operatorname{grad}$ см. стр. 486.

13. Операторы ∇ (Гамильтона), $(a\nabla)$ и Δ (Лапласа)

Оператор Гамильтона ∇ (набла) — символический вектор, заменяющий символы градиента, дивергенции и ротации:

$$\nabla U = \text{grad } U, \quad \nabla V = \text{div } V, \quad \nabla \times V = \text{rot } V;$$

введение его формально упрощает вычисления векторного анализа. Выражение оператора Гамильтона в декартовых координатах:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k};$$

формально перемножая этот вектор на скаляр U или на вектор V (скалярно или векторно), выраженные в декартовых координатах, получаем формулы для градиента (стр. 474), дивергенции (стр. 483) и ротации (стр. 485).

П р а в и л а в ы ч и с л е н и я с оператором ∇ . а) Если ∇ стоит перед линейной комбинацией $\sum a_i x_i$, где a_i — постоянные, а x_i — переменные величины (безразлично — скалярные или векторные), то $\nabla (\sum a_i x_i) = \sum a_i \nabla x_i$.

б) Если ∇ стоит перед произведением двух переменных величин x и y (скалярных или векторных), то он применяется поочередно к каждой из этих величин (над ними в этом случае ставится знак $\downarrow$) и результаты складываются:

$$\nabla (XY) = \nabla (\overset{\downarrow}{X}Y) + \nabla (X\overset{\downarrow}{Y});$$

затем полученные тройные произведения преобразуются по правилам векторной алгебры так, чтобы ∇ стояло только перед множителем, снабженным знаком $\downarrow$, который после вычисления можно не писать.

$$\text{Примеры: } 1) \text{ div } (UV) = \nabla (UV) = \nabla (\overset{\downarrow}{U}V) + \nabla (U\overset{\downarrow}{V}) = \\ = V \cdot \nabla U + U \cdot \nabla V = V \text{ grad } U + U \text{ div } V;$$

$$2) \text{ div } (V_1 \times V_2) = \nabla (V_1 \times V_2) = \nabla (\overset{\downarrow}{V}_1 \times V_2) + \nabla (V_1 \times \overset{\downarrow}{V}_2) = \\ = \nabla \overset{\downarrow}{V}_1 V_2 + \nabla V_1 \overset{\downarrow}{V}_2 = V_2 \nabla V_1 - V_1 \nabla V_2 = V_2 (\nabla \times V_1) - V_1 (\nabla \times V_2) = \\ = V_2 \text{ rot } V_1 - V_1 \text{ rot } V_2.$$

Оператор $(a\nabla)$. При вычислениях может получиться операторное выражение $(a\nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + a_y \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$. Вектор $(a\nabla) V = (a \text{ grad}) V$ называется *градиентом векторного поля V* в направлении a ; он равен произведению

модуля $\mathbf{a}$ на производную вектора $\mathbf{V}$ в направлении $\mathbf{a}$:

$$(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{V} = (\mathbf{a} \text{ grad}) \mathbf{V} = |\mathbf{a}| \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(\mathbf{r} + \varepsilon \mathbf{a}^0) - \mathbf{V}(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad (\text{см. рис. 23}).$$

Пример: $\text{grad}(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2) = \nabla(\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2) =$
 $= \nabla(\downarrow \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2) + \nabla(\mathbf{V}_1 \downarrow \mathbf{V}_2)$; по формуле
 $\mathbf{b}(\mathbf{a} \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \mathbf{b}) \mathbf{c} + \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (см. стр. 434)
 получаем:

$$\begin{aligned} \text{grad} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 &= (\mathbf{V}_2 \nabla) \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 \times (\nabla \times \mathbf{V}_1) + \\ &+ (\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \times (\nabla \times \mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_2 \text{ grad}) \mathbf{V}_1 + \\ &+ \mathbf{V}_2 \times \text{rot} \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_1 \text{ grad}) \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \times \text{rot} \mathbf{V}_2. \end{aligned}$$

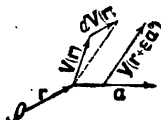


Рис. 23.

Двукратные применения ∇ ; оператор Δ .

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \nabla(\nabla \times \mathbf{V}) &= \text{div rot} \mathbf{V} = 0, \\ 2) \quad \nabla \times (\nabla U) &= \text{rot grad} U = 0, \\ 3) \quad \nabla(\nabla U) &= \text{div grad} U = \Delta U \end{aligned} \right\} \text{ для всякого поля,}$$

Δ (иначе $\nabla \nabla$, ∇^2) — оператор Лапласа; его координатное выражение:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} =$$

(декартовы координаты)

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} =$$

(цилиндрические координаты)

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

(сферические координаты).

4) $\nabla(\nabla \mathbf{V}) = \text{grad div} \mathbf{V}$ и 5) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \text{rot rot} \mathbf{V}$ связаны между собой формулой: $\nabla(\nabla \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \Delta \mathbf{V}$.

$\Delta \mathbf{V} = (\nabla \nabla) \mathbf{V}$ — оператор Лапласа, примененный к вектору $\mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V} &= \Delta V_x \mathbf{i} + \Delta V_y \mathbf{j} + \Delta V_z \mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

* $(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{V}$ может быть преобразован по формуле: $2(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{V} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{a}) + \text{grad}(\mathbf{a} \mathbf{V}) + \mathbf{a} \text{ div} \mathbf{V} - \mathbf{V} \text{ div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{V} + \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{a}$.

14. Интегральные теоремы

Теоремы Гаусса

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{V} dS = \int_v \operatorname{div} \mathbf{V} dv.$$

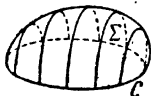
Скалярный поток поля $\mathbf{V}$ через замкнутую поверхность Σ равен интегралу, от дивергенции $\mathbf{V}$, распространенному на объем v , заключенный внутри Σ .

В декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (V_x dy dz + V_y dz dx + V_z dx dy) = \\ = \int \int \int_v \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

(V_x, V_y, V_z — функции трех переменных: x, y и z).

Теорема Стокса



$$\oint_C \mathbf{V} d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{V} dS.$$

Циркуляция поля по кривой C равна потоку ротации через любую поверхность Σ , ограниченную контуром C .

Рис. 24.

В декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \int_C (V_x dx + V_y dy + V_z dz) = \\ = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz dx + \\ + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Для плоского контура (формула Грина):

$$\int_C (V_x dx + V_y dy) = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy$$

(V_x и V_y — функции двух переменных x и y).

Теоремы Грина:

$$1) \int_{\Sigma} U_1 \operatorname{grad} U_2 dS = \int_v (U_1 \Delta U_2 + \operatorname{grad} U_1 \operatorname{grad} U_2) dv,$$

$$2) \int_{\Sigma} (U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1) dS = \int_v (U_1 \Delta U_2 - U_2 \Delta U_1) dv$$

(U_1 и U_2 — скалярные поля, Σ — поверхность, ограничивающая объем v). В частности (при $U_1=1$):

$$3) \int_{\Sigma} \text{grad } U \, dS = \int_v \Delta U \, dv.$$

В декартовых координатах теорема 3) принимает следующий вид:

$$\oint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} dy \, dz + \frac{\partial U}{\partial y} dz \, dx + \frac{\partial U}{\partial z} dx \, dy = \int_v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) dv.$$

15. Безвихревые и соленоидальные векторные поля

Безвихревым полем V называется поле, ротация которого всюду равна 0. Если $\text{rot } V=0$, то $V=\text{grad } U$; функция U (потенциал V)* в любой точке M внутри некоторого объема v выражается формулой:

$$U = -\frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\text{div } V \, dv}{r}, \quad (1)$$

где r — расстояние dv от M .

Соленоидальным полем V называется поле; дивергенция которого всюду равна 0. Если $\text{div } V=0$, то $V=\text{rot } W$, где W (векторный потенциал V) — также соленоидальное поле, выражаемое формулой

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\text{rot } V \, dv}{r}; \quad (2)$$

v и r имеют те же значения, что и в формуле (1).

Любое векторное поле V может быть единственным образом разложено на сумму безвихревого поля V_1 и соленоидального поля V_2 ($V=V_1+V_2$), которые определяются формулами:

$$V_1 = -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \int_v \frac{\text{div } V \, dv}{r},$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_v \frac{\text{rot } V \, dv}{r}.$$

* Или „минус потенциал V “, см. сноску на стр. 479.

Поле с точечными источниками. Поле Ньютона (Кулона) $E = \frac{e}{r^3}$ г безвихревое всюду и соленоидальное всюду за исключением полюса O (источника поля). Его потенциал $U = -\frac{e}{r}$ *. Скалярный поток $\oint_{\Sigma} E dS$ равен

нулю, если поверхность Σ не заключает внутри себя источника, и равен $4\pi e$, если заключает его; величина e называется *обильностью* (или *интенсивностью*) источника.

Ньютоново поле с источником в точке g_1 :

$$E = \frac{e_1}{|r - g_1|^3} (r - g_1);$$

с несколькими источниками $g_1, g_2, g_3, \dots$, обильность которых соответственно равна $e_1, e_2, e_3, \dots$

$$E = \sum \frac{e_i}{|r - g_i|^3} (r - g_i).$$

Поток $\oint_S E dS$ равен нулю, если поверхность S не заключает внутри себя источников, и равен $4\pi \sum' e_i$ ($\sum'$ распространяется на источники, заключенные внутри S).

16. Уравнения Лапласа и Пуассона

Уравнение Лапласа. Разыскание скалярного поля U , для которого $\Delta U = 0$ ($\text{div grad } U = 0$), приводит к уравнению Лапласа — дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

или, на плоскости,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Функции, удовлетворяющие этому уравнению (непрерывные и имеющие непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков), называются *функциями Лапласа* или *гармоническими функциями*. Если известны значения гармонической функции в точках замкнутой поверхности Σ , то этим вполне определяются значения этой функции во всех точках внутри этой поверхности; нахождение их представляет зада-

* Или $+\frac{e}{r}$; см. сноску на стр. 479.

чу Дирихле (см. Смирнов т. II, Кочин—стр. 533 справочника). Если, кроме того, известны значения производных функции U в точках поверхности Σ в направлении нормали к ней („нормальные производные“ $\frac{\partial U}{\partial n}$), то значения U_M в точке M внутри поверхности находятся по формуле:

$$U_M = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} U dS,$$

где r —расстояние dS от точки M .

Уравнение Пуассона. Разыскание скалярного поля U по данной дивергенции $\rho(x, y, z)$ его градиента приводит к уравнению Пуассона:

$$\Delta U = \rho(x, y, z)$$

или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \rho(x, y, z).$$

Если известно, что при $r \rightarrow \infty$ (т. е. при удалении точки в бесконечность) функция U стремится к нулю и притом достаточно быстро, то решением уравнения Пуассона является *ньютонов потенциал* функции ρ , определяемый формулой

$$U_M = - \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\rho dv}{r},$$

где r —расстояние элемента объема dv от точки M ; интеграл распространен по всему пространству (подробнее см. Кочин—стр. 533 справочника).

III. РЯДЫ ФУРЬЕ (ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ)

1. Общие сведения

Основные понятия. В целом ряде задач (дифференциальных уравнениях, теории колебаний) существенно заменить данную периодическую функцию $f(x)$ с периодом T точно или приближенно тригонометрической суммой

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \dots + a_n \cos n\omega x + \\ + b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \dots + b_n \sin n\omega x,$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (если $T=2\pi$, то $\omega=1$). Приближение $s_n(x)$ к $f(x)$ является наилучшим (в смысле, указанном ниже),

если за коэффициенты a_k и b_k ($k=0, 1, 2, \dots$) выбраны коэффициенты Фурье данной функции:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos k\omega x \, dx = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos k\omega x \, dx = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [f(x) + f(-x)] \cos k\omega x \, dx, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin k\omega x \, dx = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin k\omega x \, dx = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [f(x) - f(-x)] \sin k\omega x \, dx \end{aligned}$$

(формулы Эйлера).

Если $s_n(x)$ стремится к определенному пределу $s(x)$ при $n \rightarrow \infty$ (для некоторых значений x), то мы имеем сходящийся ряд Фурье данной функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \dots + a_n \cos n\omega x + \dots + \\ &+ b_1 \sin \omega x + b_2 \sin 2\omega x + \dots + b_n \sin n\omega x + \dots \end{aligned}$$

Ряд Фурье может быть также записан в виде:

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{a_0}{2} + A_1 \sin(\omega x + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega x + \varphi_2) + \dots + \\ &+ A_n \sin(n\omega x + \varphi_n) + \dots, \end{aligned}$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ и $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$. В комплексной форме

ряд Фурье может быть записан так:

$$s(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x},$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx = \begin{cases} a_n - ib_n & \text{при } n > 0, \\ a_{-n} + ib_{-n} & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Нахождение ряда Фурье данной функции $f(x)$ составляет задачу гармонического анализа.

Основные свойства рядов Фурье. 1. При приближенной замене функции $f(x)$ тригонометрической суммой

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k\omega x + \sum_1^n \beta_k \sin k\omega x$$

средняя квадратическая ошибка (см. стр. 516)

$$\delta^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(x) - s_n(x)]^2 dx$$

будет наименьшей, если за коэффициенты α_k и β_k взять коэффициенты Фурье данной функции.

2. Для всякой ограниченной и кусочно-непрерывной (см. стр. 300) функции ряд Фурье *сходится в среднем* к данной функции, т. е.

$$\int_0^T [f(x) - s_n(x)]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из сходимости в среднем следует, что

$$\frac{2}{T} \int_0^T [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_1^\infty (a_k^2 + b_k^2) \quad (\text{равенство Парсеваля}).$$

3. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е.: а) период функции может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна, и б) во всякой точке разрыва $f(x)$ существуют $f(x+0)$ и $f(x-0)$ (см. стр. 294), то ряд Фурье для этой функции *сходится*, и сумма его равна $f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$, а в точках разрыва она равна $\frac{[f(x-0) + f(x+0)]}{2}$.



Рис. 1.

Симметрия. Если $f(x)$ — функция четная, т. е. $f(-x) = f(x)$ (симметрия I рода, рис. 1), то

$$\alpha_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos \frac{k \cdot 2\pi x}{T} dx \quad \text{и} \quad b_k = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Если $f(x)$ — функция нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$ (симметрия II рода, рис. 2), то

$$a_k = 0 \quad \text{и} \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin k \frac{2\pi x}{T} dx \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

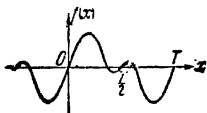


Рис. 2.



Рис. 3.

Если $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$ (симметрия III рода, рис. 3), то

$$a_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos (2k+1) \frac{2\pi x}{T} dx \quad \text{и}$$

$$b_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin (2k+1) \frac{2\pi x}{T} dx, \quad a_{2k} = b_{2k} = 0$$

$$(k=0, 1, 2, \dots).$$

• Если функция нечетная и, кроме того, обладает симметрией

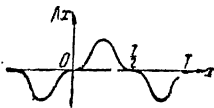


Рис. 4, а.

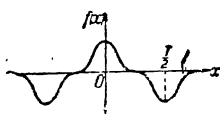


Рис. 4, б.

III рода (симметрия IV а, рис. 4, а), то

$$a_k = b_{2k} = 0 \quad \text{и}$$

$$b_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(x) \sin (2k+1) \frac{2\pi x}{T} dx \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Если функция четная и кроме того обладает симметрией III рода (симметрия рода IV б, рис. 4, 6), то

$$b_k = a_{2k} = 0 \text{ и}$$

$$a_{2k+1} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(x) \cos(2k+1) \frac{2\pi x}{T} dx \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Разложение в ряд Фурье непериодической функции. Всякая функция $f(x)$, удовлетворяющая на промежутке $0 \leq x < l$ условиям Дирихле (см. выше), может быть разложена на этом промежутке в сходящиеся ряды видов:

$$\begin{aligned} 1) \quad f_1(x) = & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi x}{l} + a_2 \cos 2 \frac{2\pi x}{l} + \dots \\ & + a_n \cos n \frac{2\pi x}{l} + \dots \\ & + b_1 \sin \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin 2 \frac{2\pi x}{l} + \dots + b_n \sin n \frac{2\pi x}{l} + \dots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2) \quad f_2(x) = & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos 2 \frac{\pi x}{l} + \dots \\ & + a_n \cos n \frac{\pi x}{l} + \dots \end{aligned}$$

или

$$3) \quad f_3(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin 2 \frac{\pi x}{l} + \dots + b_n \sin n \frac{\pi x}{l} + \dots$$

Функция $f_1(x)$ является периодической с периодом $T=l$,

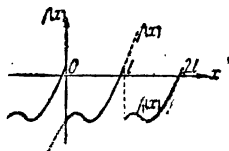


Рис. 5.

совпадающей с $f(x)$ * на промежутке $0 < x < l$ (рис. 5),

* В точках разрыва считаем $f(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$.

Коэффициенты разложения находятся по формулам Эйлера (см. стр. 492) при $\omega = \frac{2\pi}{l}$. Функция $f_2(x)$ является периодической с периодом $T=2l$, обладает симметрией I рода и на промежутке $0 \leq x < l$ совпадает с $f(x)$ (рис. 6). Коэффициенты раз-

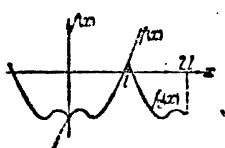


Рис. 6.

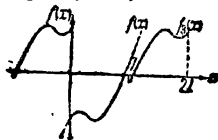


Рис. 7.

ложения $f_2(x)$ находятся по формулам для случая симметрии I рода, при $T=2l$. Функция $f_3(x)$ является периодической с периодом $T=2l$, обладает симметрией II рода и на промежутке $0 \leq x < l$ совпадает с $f(x)$ (рис. 7). Коэффициенты разложения $f_3(x)$ находятся по формулам для случая симметрии II рода при $T=2l$.

Интеграл Фурье. Если функция $f(x)$ на любом конечном интервале удовлетворяет условиям Дирихле

(см. стр. 493), и, кроме того, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится (см. стр. 371—372), то имеет место формула

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) dt \end{aligned}$$

(*интеграл Фурье*). Эта формула может быть рассматриваема как предельная для формулы разложения в тригонометрический ряд непериодической функции $f(x)$ на интервале $(-l, +l)$ при $l \rightarrow \infty$. В то время как ряд Фурье дает представление периодической функции (с периодом T) в виде суммы гармонических колебаний с частотами $\pi_n = n \frac{2\pi}{T}$ ($n=1, 2, \dots$) и амплитудами A_n , интеграл Фурье представляет функцию $f(x)$ как бы в виде суммы бесконечно большого числа колебаний с непрерывно меняющейся частотой u ; говорят, что интеграл Фурье дает разложения

функции в непрерывный спектр, причем частоте ω соответствует плотность спектра

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Интеграл Фурье принимает более простой вид, если $f(x)$ четная:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \, du \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt,$$

и, если $f(x)$ нечетная:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ux \, du \int_0^{\infty} f(t) \sin ut \, dt.$$

Пример: Для четной функции $f(x) = e^{-|x|}$ получим, что плотность спектра равна

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega^2 + 1}, \quad \text{т. е.}$$

$$e^{-|x|} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{u^2 + 1} du.$$

2. Таблица некоторых разложений в ряд Фурье

Ниже даны разложения в тригонометрический ряд некоторых простейших функций, заданных на некотором интервале и далее продолженных периодически. Рядом с разложением дан соответствующий график. Многие простейшие периодические функции могут быть приведены к данному

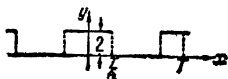


Рис. 8.

таблице виду изменением масштаба как по оси Ox , так и по оси Oy , а также переносом координатных осей. Например, функция с периодом T (рис. 8), заданная условиями:

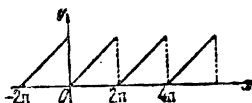
$$y=2 \left(0 < x < \frac{T}{4} \right), \quad y=0 \left(\frac{T}{4} < x < \frac{T}{2} \right), \quad f(-x)=f(x), \text{ сво-}$$

дится к виду 5 ($a=1$, см. таблицу) введением переменных:

$Y=y-1$, $X=\frac{2\pi x}{T} + \frac{\pi}{2}$. Так как $\sin(2n+1)\left(\frac{2\pi x}{T} + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos(2n+1)\frac{2\pi x}{T}$, то, выполняя замену переменных в ряде (5), получим для нашей функции

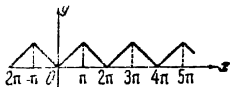
$$y = 1 + \frac{4}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi x}{T} - \cos 3 \frac{2\pi x}{T} + \cos 5 \frac{2\pi x}{T} - \dots \right).$$

1. $y=x$ для $0 < x < 2\pi$



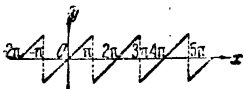
$$y = \pi - 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$$

2. $y=x$ для $0 < x < \pi$



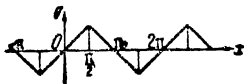
$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

3. $y=x$ для $-\pi < x < \pi$



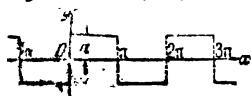
$$y = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

4. $y=x$ для $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



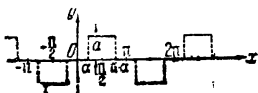
$$y = \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right)$$

5. $y=a$ для $0 < x < \pi$



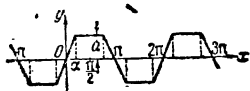
$$y = \frac{4a}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

6. $y=0$ для $0 < x < \alpha$ и для $\pi - \alpha < x < \pi$
 $y=a$ для $\alpha < x < \pi - \alpha$



$$y = \frac{4a}{\pi} \left(\cos \alpha \sin x + \frac{1}{3} \cos 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5} \cos 5\alpha \sin 5x + \dots \right)$$

7. $y = \frac{ax}{\alpha}$ для $0 < x < \alpha$;
 $y=a$ для $\alpha < x < \pi - \alpha$;
 $y = \frac{a(\pi - x)}{\alpha}$ для $\pi - \alpha < x < \pi$

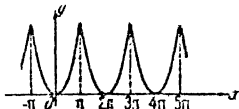


$$y = \frac{4}{\pi} \frac{a}{\alpha} \left(\sin \alpha \sin x + \frac{1}{3^2} \sin 3\alpha \sin 3x + \frac{1}{5^2} \sin 5\alpha \sin 5x + \dots \right)$$

В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

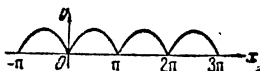
$$y = \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} a \left(\sin x - \frac{1}{5^2} \sin 5x + \frac{1}{7^2} \sin 7x - \frac{1}{11^2} \sin 11x + \dots \right)$$

8. $y=x^2$ для $-\pi < x < \pi$



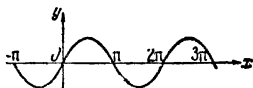
$$y = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

9. $y = x(\pi - x)$ для $0 < x < \pi$



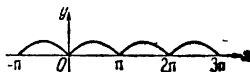
$$y = \frac{\pi^3}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^3} + \frac{\cos 4x}{2^3} + \frac{\cos 6x}{3^3} + \dots \right)$$

10. $y = x(\pi - x)$ для $0 < x < \pi$



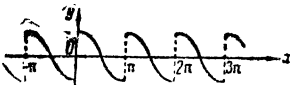
$$y = \frac{8}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3^3} \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5x + \dots \right)$$

11. $y = \sin x$ для $0 < x < \pi$



$$y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

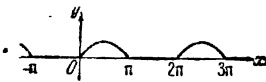
12. $y = \cos x$ для $0 < x < \pi$



$$y = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2 \sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{4 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{6 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

13. $y = \sin x$ для $0 < x < \pi$;

$y = 0$ для $\pi < x < 2\pi$



$$y = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

14. $y = \cos ux$ для $-\pi < x < \pi$

$$y = \frac{2u \sin u\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2u^2} - \frac{\cos x}{u^2 - 1} + \frac{\cos 2x}{u^2 - 4} - \frac{\cos 3x}{u^2 - 9} + \dots \right]$$

(u — произвольное, нецелое число)

$$15. y = \sin ax \text{ для } -\pi < x < \pi$$

$$y = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1-a^2} - \frac{2 \sin 2x}{4-a^2} + \frac{3 \sin 3x}{9-a^2} - \dots \right)$$

(a — произвольное, нецелое число)

$$16. y = x \cos x \text{ для } -\pi < x < \pi$$

$$y = -\frac{1}{2} \sin x + \frac{4 \sin 2x}{1 \cdot 3} - \frac{6 \sin 3x}{3 \cdot 5} + \frac{8 \sin 4x}{5 \cdot 7} - \dots$$

$$17. y = -\ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \text{ для } 0 < x \leq \pi$$

$$y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \dots$$

$$18. y = \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \text{ для } 0 \leq x < \pi$$

$$y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x - \dots$$

3. Приближенный гармонический анализ

Формулы Бесселя. Приближенные вычисления коэффициентов рядов Фурье базируются на замене интегралов в формулах Эйлера (см. стр. 492) суммами по одной из формул приближенного интегрирования. Наиболее удобной является здесь формула трапеций (см. стр. 475). При помощи нее могут быть получены следующие формулы Бесселя для приближенного гармонического анализа. Пусть период T разделен на $2n$ равных частей (рис. 9); абсциссы



Рис. 9.

точек деления $x_k = \frac{kT}{2n}$, ординаты в точках деления $f(x_k) = y_k$ ($k=0, 1, \dots, 2n$). Тогда приближенно

$$2\pi a_0 = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k.$$

$$\pi a_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \cos \frac{k m \pi}{n}, \quad \pi b_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \sin \frac{k m \pi}{n}$$

$m=1, 2, \dots, n$

(при этом всегда $b_n=0$).

Тригонометрическая сумма

$$s_n(x) = a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi x}{T} + a_2 \cos 2 \frac{2\pi x}{T} + \dots + \frac{a_n}{2} \cos n \frac{2\pi x}{T} + \\ + b_1 \sin \frac{2\pi x}{T} + \dots + b_{n-1} \sin (n-1) \frac{2\pi x}{T},$$

коэффициенты которой вычислены по формулам Бесселя, принимает при $x=x_k$ заданные значения y_k и, следовательно, решает задачу *тригонометрической интерполяции* для периодической функции (см. стр. 518). Если построить тригонометрическую сумму

$$s_r(x) = a_0 + \sum_{k=1}^r a_k \cos k \frac{2\pi x}{T} + \sum_{k=1}^r b_k \sin k \frac{2\pi x}{T}, \quad r < n,$$

то эта сумма даст наилучшее приближение (в смысле метода наименьших квадратов — см. стр. 517), если ее коэффициенты будут вычислены по формулам Бесселя.

Шаблоны и приборы. Для вычислений по формулам Бесселя применяют специальные вычислительные схемы и шаблоны (см. Занден, Крылов — стр. 535 справочника). Ниже даны схемы для гармонического анализа при делении периода на 12 и 24 части.

Если функция $f(x)$ задана графически, то для приближенного гармонического анализа, кроме применения формул Бесселя, могут быть использованы специальные приборы, называемые *гармоническими анализаторами*. После обвода графика заданной функции штифтом анализатора, специальные счетчики прибора дают приближенные значения коэффициентов Фурье (см. Крылов — стр. 535 справочника).

Схемы для приближенного гармонического анализа

Схема I. Период T разделен на 12 равных частей. Ординаты точек деления: $y_0, y_1, \dots, y_{11}$. Находятся суммы и разности по следующей схеме:

$\pm$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7			s_4	s_5	s_6	s_7	d_5	d_4	
Суммы	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	δ_1	δ_2	δ_3
Разности	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5			τ_0	τ_1	τ_2	τ_3	γ_1	γ_2	

Дальнейшие вычисления производятся по следующей схеме:

Схема для приближенного гармонического анализа

	Члены с косинусами						Члены с синусами					
	σ_0 σ_3	σ_1 σ_2	τ_0	σ_0	$-\sigma_2$	τ_0	δ_3				δ_1	δ_2
I												
I—0,134 (=0,866)			τ_1					δ_3	γ_1	γ_2		
0,5			τ_2	$-\sigma_2$	σ_1		δ_1					
Суммы	I	II	I	I	II	I	I	II	I	II	I	II
Суммы I+II . . .	$12\sigma_0$		$6\sigma_1$	$6\sigma_2$		—	$6\delta_1$		$6\delta_2$		—	
Разности I—II . .	$12\sigma_3$		$6\sigma_2$	$6\sigma_1$		$6\sigma_3$	$6\delta_2$		$6\delta_1$		$6\delta_3$	

Здесь вместо σ_1 , δ_1 и γ должны быть помещены соответствующие суммы и разности, умноженные на стоящие в той же строке слева множители (вместо 0,866 написано 1—0,134, так как, употребляя счетную линейку, на 0,134 можно умножить точнее, чем на 0,866).

Схема II. Период T разделен на 24 части. Ординаты точек деления $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{23}$, записывают следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} y_0 & y_2 & y_4 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{12} \\ & y_{12} & y_{20} & y_{18} & y_{16} & y_{14} & \\ y_2 & y_6 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{13} & y_{15} \\ & y_1 & y_{23} & y_{21} & y_{19} & y_{17} & \end{array}$$

Для каждой группы ординат отдельно ведутся вычисления по данной выше схеме для 12 ординат. Обозначим коэффициенты, полученные от первой группы ординат, через A_k и B_k , а от второй — через A'_k и B'_k . Вычислив $\bar{A}_k$ и $\bar{B}_k$ по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= A'_0, & \bar{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A'_1 - B'_1), & \bar{A}_2 &= -B'_2, \\ \bar{A}_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (A'_3 + B'_3), & \bar{A}_4 &= -A'_4, & \bar{A}_5 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (A'_5 - B'_5), \\ \bar{B}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A'_1 + B'_1), & \bar{B}_2 &= A'_2, & \bar{B}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A'_3 - B'_3), \\ \bar{B}_4 &= -B'_4, & \bar{B}_5 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (A'_5 + B'_5), & \bar{B}_6 &= -A'_6 \end{aligned}$$

(нужно вычислять не $\bar{A}_k$ и $\bar{B}_k$, а их значения, умноженные на 6 или 12, см. ниже), находят суммы и разности, дающие искомые коэффициенты:

	$12A_0$	$6A_1$	$6A_2$	$6A_3$	$6A_4$	$6A_5$	$12A_6$
	$12\bar{A}_0$	$6\bar{A}_1$	$6\bar{A}_2$	$6\bar{A}_3$	$6\bar{A}_4$	$6\bar{A}_5$	
Суммы	$24a_0$	$12a_1$	$12a_2$	$12a_3$	$12a_4$	$12a_5$	$12a_6$
Разности	$24a_{12}$	$12a_{11}$	$12a_{10}$	$12a_9$	$12a_8$	$12a_7$	
	$6\bar{B}_1$	$6\bar{B}_2$	$6\bar{B}_3$	$6\bar{B}_4$	$6\bar{B}_5$	$12\bar{B}_6$	
	$6B_1$	$6B_2$	$6B_3$	$6B_4$	$6B_5$		
Суммы	$12b_1$	$12b_2$	$12b_3$	$12b_4$	$12b_5$	$12b_6$	
Разности	$12b_{11}$	$12b_{10}$	$12b_9$	$12b_8$	$12b_7$		

Синтез. Под *синтезом* понимают обычно вычисление значений периодической функции $f(x)$, заданной своим рядом Фурье. Если в пределах допустимой степени точности можно ограничиться в ряде Фурье первыми шестью гармониками (т. е. считать $a_k = b_k = 0$ при $k > 6$), то вычисление значений $y_k = f(x_k)$ в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{11}$, делящих период на 12 равных частей, может быть проведено с помощью данной выше схемы I (стр. 502—503). Для этого необходимо поставить на место $s_0, s_1, \dots, s_6$ заданные коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_6$, а на место $d_1, d_2, \dots, d_6$ — коэффициенты $b_1, \dots, b_6$ (коэффициент b_0 отбрасывается, так как легко видеть, что соответствующий член ряда никак не влияет на значения функции в рассматриваемых точках) и произвести вычисления согласно схеме до конца. Получающиеся в последних двух строчках таблицы стр. 503 числа (место $12a_0, 6a_1, \dots, 12a_6, 6b_1, \dots, 6b_6$) обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_6, \beta_1, \dots, \beta_6$. Тогда для получения искомых значений функции остается только произвести сложения и вычитания по схеме:

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	
Суммы	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Разности		u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	

ОТДЕЛ ШЕСТОЙ

ОБРАБОТКА НАБЛЮДЕНИЙ

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ОШИБОК

1. Теория вероятностей

Определение. Если при некоторых условиях должно произойти одно из n несовместимых событий, причем нет никаких оснований ожидать, что одно из них предпочтительнее других, то говорят, что эти события имеют одинаковую вероятность, равную $p = \frac{1}{n}$.

Если некоторое событие A появляется как следствие какого-либо из m событий при общем числе n возможных событий (несовместимых и равновероятных), то *вероятностью*

A называют $p = \frac{m}{n}$. Невозможному событию соответствует

вероятность 0, а достоверному — вероятность 1. Вероятность любого события заключается между 0 и 1.

Сложение и умножение вероятностей. Вероятность появления какого-либо одного (безразлично какого) из нескольких несовместимых событий равна *сумме вероятностей* этих событий. Вероятность совместного появления нескольких событий равна *произведению вероятностей* этих событий, причем, если события совершаются последовательно, при вычислении вероятности каждого события должно учитываться возможное влияние всех наступивших ранее событий. Например, в ящике находятся 5 черных, 3 белых и 2 красных шара. Вероятность вынуть наудачу белый шар равна 0,3; вероятность вынуть красный шар равна 0,2; вероятность вынуть белый или красный шар равна $0,3 + 0,2 = 0,5$. Вероятность вынуть последовательно белый и красный шар равна: $0,3 \cdot 0,2 = 0,06$, если первый вынутый шар кладется обратно, и $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = 0,067$, если вынутый шар не возвращается.

Повторные испытания. Если производится n независимых испытаний и при каждом из них вероятность

события A равна p , то вероятность того, что событие A появится m раз, равна $p_{m,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$. Эта вероятность будет наибольшей при $np-p-1 \leq m \leq np+p$. При больших m и n можно получить приближенное значение $p_{m,n}$ при помощи формулы Стирлинга (см. стр. 184):

$$p_{m,n} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

где $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$, $x = (m - np) : \sigma$.

С возрастанием числа испытаний n , наивероятнейшая частота события $\frac{m}{n}$ будет приближаться к вероятности p этого события. При этом вероятность того, что частота события A будет лежать между

$$p - \frac{a\sigma}{n} \quad \text{и} \quad p + \frac{a\sigma}{n},$$

будет приближаться к пределу, равному

$$\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2} dx \quad (\text{теорема Лапласа}).$$

Функция $\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2} dx$ называется *интегралом*

вероятности Гаусса (таблицы $\Phi(x)$ см. стр. 108).

Пример: Какова вероятность того, что при 400 бросаниях монеты частота появления герба будет отличаться от вероятности $p = 1/2$ меньше чем на $1/25$, т. е. что число появлений герба будет заключено между 216 и 184. Так как

$\sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10$ и $\frac{a\sigma}{n} = \frac{1}{25}$, то $a = \frac{400}{10 \cdot 25} = 1,6$. Искомая вероятность по теореме Лапласа $\approx \Phi(1,6) = 0,8904$.

Закон больших чисел. Следствие теоремы Лапласа: С вероятностью, сколь угодно близкой к 1, можно ожидать, что при достаточно большом числе испытаний частота события A будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности (*закон больших чисел — теорема Бернулли*).

Математическое ожидание. Если некоторая величина x может принимать случайные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \dots, p_n$, то *математическим ожиданием* $m(x)$ величины x называется

$m(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$. Для случайной переменной x величина

$m(x)$ играет роль как бы среднего значения этой величины.

Пример: В лотерее из 1000 билетов имеется 1 выигрыш в 1000 руб., 10 выигрышей по 100 руб. и 100 выигрышей по 20 руб. Математическое ожидание выигрыша равно

$$1000 \cdot \frac{1}{1000} + 100 \cdot \frac{1}{100} + 20 \cdot \frac{1}{10} = 4 \text{ руб.}$$

Непрерывные случайные величины. Во многих случаях приходится рассматривать случайные переменные величины, которые могут принимать любые значения в некотором интервале. Вероятность того, что величина A примет какое-либо определенное значение x , в этом случае равна нулю, так как число возможных случаев бесконечно. Считая, что для малых участков на интервале допустимых значений переменной A вероятность попадания A на этот участок пропорциональна его длине, можно охарактеризовать случайную переменную A , указав вероятность $\psi(x) dx$ того, что $x \leq A \leq x + dx$. Величина $\psi(x)$ называется *плотностью вероятности* A в точке x . Функция $\psi(\cdot)$ называется *законом распределения* случайной переменной A . Из теоремы о сложении вероятностей следует, что вероят-

ность попадания A в интервал от a до b равна $\int_a^b \psi(x) dx$

Так как переменная величина A всегда принимает какое-либо значение, то $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 1$. Математическое ожидание величины A будет равно $m(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi(x) dx$.

Пример: Закон распределения Максвелла (в кинетической теории газов): $\psi(V) = 4 \sqrt{\frac{k^3}{\pi}} e^{-kV^2} V^2$; вероятность того, что скорость молекулы однородного газа, находящегося в тепловом равновесии, заключена между V и $V + dV$, равна $\psi(V) dV$ (k — постоянная).

2. Теория ошибок

Случайные ошибки. Полученные из опыта величины неизбежно содержат погрешности, обусловленные самыми разнообразными причинами. Среди них следует различать погрешности *систематические* и *случайные*. Систематические ошибки обуславливаются причинами, действующими вполне определенным образом, и могут быть всегда устранены или достаточно точно учтены (например: ошибки, вносимые неправильно градуированными приборами, вносимые внешними условиями опыта и т. п.). Случайные ошибки вызываются весьма большим числом отдельных

причин, не поддающихся точному учету и действующих в каждом отдельном изменении различным образом. Эти ошибки невозможно совершенно исключить; учесть же их можно только *в среднем*, для чего необходимо знать законы, которым подчиняются случайные ошибки. Будем обозначать измеряемую величину через A , а случайную ошибку при измерении через x . Так как ошибка x может принимать любые значения, то она является непрерывной случайной величиной, которая вполне характеризуется своим законом распределения (см. выше). Этот закон распределения $\varphi(x)$ должен обладать следующими свойствами, необходимыми, как показывает опыт, для случайных ошибок: 1) $\varphi(x)$ — функция *четная*: $\varphi(-x) = \varphi(x)$, т. е. ошибки разного знака равновероятны. 2) $\varphi(x)$ для $x > 0$ является *монотонно-убывающей функцией*, т. е. ошибки большие по абсолютной величине ошибки менее вероятны. 3) Математическое ожи-

дание абсолютной величины ошибки, т. е. $2 \int_0^{+\infty} x\varphi(x) dx$

есть величина конечная. Внося другие добавочные условия, можно получать различные законы распределения.

Нормальный закон распределения. Мера точности. Наиболее простым и достаточно точно отображающим действительность (в подавляющем большинстве случаев) является так называемый *нормальный закон распределения ошибок*:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

Этот закон распределения может быть получен из различных теоретических предпосылок, в частности, из требования, чтобы наиболее вероятным значением неизвестной ве-

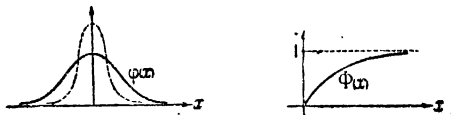


Рис. 1.

личины, для которой непосредственным измерением получен ряд значений с одинаковой степенью точности, являлось среднее арифметическое этих значений. Величина σ^2 называется *дисперсией* данного нормального закона; она может иметь любые значения. С увеличением σ^2 уменьшается максимум $\varphi(x)$, соответствующий $x=0$ и равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Так как при этом площадь под графиком $\varphi(x)$ (см. рис. 1) остается неизменной (≈ 1 , см. стр. 508), то следовательно

увеличению дисперсии соответствует увеличение вероятности больших ошибок. Легко проверить, что дисперсия равна математическому ожиданию квадрата ошибки. $\sigma^2 =$

$$= m(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x) dx. \text{ Вероятность того, что ошибка } x$$

по абсолютной величине не превышает a , в случае нормального закона, равна

$$\Phi(a/\sigma) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sigma} e^{-t^2/2} dt \quad (\text{см. стр. 507}).$$

Величина $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, являющаяся линейной комбинацией случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, с нормальным законом распределения и дисперсиями соответственно $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, подчиняется нормальному закону с дисперсией σ^2 :

$$\sigma^2 = \lambda_1^2 \sigma_1^2 + \lambda_2^2 \sigma_2^2 + \dots + \lambda_n^2 \sigma_n^2.$$

Кроме дисперсии σ^2 для характеристики нормального закона распределения применяются следующие величины:

1) *Простая средняя ошибка* η , представляющая собой математическое ожидание абсолютной величины ошибки:

$$\eta = m(|x|) = 2 \int_0^{\infty} x \varphi(x) dx.$$

2) *Средняя квадратическая ошибка*, или *стандарт* σ , равная корню квадратному из дисперсии.

3) *Вероятная ошибка* r — такая величина, что вероятность ошибки, не превосходящей r по абсолютной величине, равна $1/2$:

$$\int_{-r}^{+r} \varphi(x) dx = \Phi\left(\frac{r}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$4) \text{ Мера точности } h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}.$$

Все эти величины связаны между собой следующими соотношениями *:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi} h} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = \frac{r}{\rho \sqrt{\pi}},$$

* Величина ρ определяется из уравнения $\Phi(\rho\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$.

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2} h} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \eta = \frac{r}{\sqrt{2} \rho},$$

$$r = \frac{\rho}{h} = \rho \sqrt{2} \sigma = \rho \sqrt{\pi} \eta, \quad h = \frac{1}{\sqrt{\pi} \eta} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma} = \frac{\rho}{r}$$

$$\left(\rho = 0,4769; \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5642; \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0,7979 = \frac{1}{1,2533} \right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071 = \frac{1}{1,4141}; \quad \rho \sqrt{2} = 0,6745 = \frac{1}{1,4826};$$

$$\rho \sqrt{\pi} = 0,8454 = \frac{1}{1,1829}).$$

Определение дисперсии по опытным данным. Если для какой-либо величины A непосредственным измерением получено n значений a_i , с одинаковой степенью точности и если ошибки величины A подчинены нормальному закону распределения, то наиболее вероятным значением A будет *среднее арифметическое*

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

Обозначим через ε_i (для каждого наблюдения) отклонение наблюдаемого значения a_i величины A от среднего арифметического a : $\varepsilon_i = a_i - a$.

Для определения дисперсии нормального закона распределения ошибок в этом случае пользуются формулой

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n-1} \quad * \quad \text{или определяют } \sigma \text{ по простой средней ошибке, которая находится по формуле}$$

$$\eta = \frac{\sum |\varepsilon_i|}{\sqrt{n(n-1)}};$$

* В теории вероятностей и математической статистике для обозначения суммирования часто пользуются обозначениями Гаусса: $[\varepsilon]$ вместо $\sum \varepsilon_i$, $[a^2]$ вместо $\sum a_i^2$, $[ab]$ вместо $\sum a_i b_i$ и т. п.

Если значения σ , полученные двумя способами, будут значительно отличаться друг от друга, то это будет показывать неприменимость в данном случае нормального закона распределения.

Если отдельные значения a_i величины A получены с различной степенью точности, характеризуемой средней квадратической ошибкой σ_i , то наиболее вероятным значением величины A является *среднее взвешенное*

$$a = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n},$$

где *веса* w_i — некоторые числа, обратно пропорциональные квадратам соответствующих средних квадратических ошибок. Средняя квадратическая ошибка отдельного значения a_i с весом w_i равна

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i e_i^2}{(n-1) w_i}},$$

где e_i — отклонение a_i от среднего взвешенного. В соответствии с формулой для меры точности линейной комбинации средняя квадратическая ошибка среднего арифметического и среднего взвешенного определяются по формулам:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n(n-1)}} \quad \text{и} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i e_i^2}{(n-1)(w_1 + w_2 + \dots + w_n)}}.$$

Пример: Непосредственным измерением были по пять раз определены размеры внутреннего (d) и внешнего (D) диаметров полого цилиндрического сосуда (см. таблицу на стр. 513). Найдя средние арифметические $d=17,24$ и $D=22,78$, подсчитываем отклонения e_{d_i} и e_{D_i} . По данным выше формулам находим для отдельного измерения d :

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,0921}{4}} = 0,152 \quad \text{или} \quad \eta = \frac{0,56}{\sqrt{20}} = 0,125 \quad (\text{что дает } \sigma = 0,157);$$

для отдельного измерения D :

$$\sigma = \sqrt{\frac{0,0880}{4}} = 0,148 \quad \text{или} \quad \eta = \frac{0,52}{\sqrt{20}} = 0,116 \quad (\text{что дает } \sigma = 0,145).$$

Совпадение полученных двумя способами значений σ вполне удовлетворительно. Для средних арифметических:

$$\sigma_d = \frac{0,152}{\sqrt{5}} = 0,068, \quad \sigma_D = \frac{0,148}{\sqrt{5}} = 0,066.$$

№ наблюдения (i)	d	D	ϵ_{d_i}	$\epsilon_{d_i}^2$	ϵ_{D_i}	$\epsilon_{D_i}^2$
1	17,3	22,7	0,06	0,0036	-0,08	0,0064
2	17,0	22,8	-0,24	0,0576	0,02	0,0004
3	17,3	23,0	0,06	0,0036	0,22	0,0484
4	17,4	22,8	0,16	0,0256	0,02	0,0004
5	17,2	22,6	-0,04	0,0016	-0,18	0,0324
$\sum_i$	86,2	113,9	0,56 *	0,0920	0,52 *	0,0880

Для толщины стенок сосуда $m = \frac{1}{2} (D - d) = 2,77$, средняя квадратическая ошибка:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_D^2 + \frac{1}{4} \sigma_d^2} = 0,047.$$

Метод наименьших квадратов. Если из опыта определяются значения f_i некоторых функций

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

неизвестных величин $x_1, \dots, x_n$, то для определения этих величин необходимо решить систему условных уравнений

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - f_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Эта система, вообще говоря, несовместна (при $m > n$), и для неизвестных величин ищутся наиболее вероятные значения. Если величины $x_1, \dots, x_n$ имеют нормальный закон распределения (что обычно и допускают), то для наиболее вероятной системы значений неизвестных сумма квадратов отклонений $\epsilon_i = \varphi_i - f_i$ будет наименьшей. Если условные уравнения линейны:

$$a_1x_1 + b_1x_2 + \dots + l_1x_n = f_1,$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 + \dots + l_2x_n = f_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_mx_1 + b_mx_2 + \dots + l_mx_n = f_m.$$

* В этом столбце вычислена сумма абсолютных величин.

то требование минимума (см. стр. 327) суммы квадратов отклонений приводит к системе линейных *нормальных уравнений* *:

$$[aa] x_1 + [ab] x_2 + \dots + [aI] x_n = [af],$$

$$[ba] x_1 + [bb] x_2 + \dots + [bI] x_n = [bf],$$

$$[Ia] x_1 + [Ib] x_2 + \dots + [II] x_n = [If].$$

Для получения k -го нормального уравнения необходимо каждое условное уравнение умножить на коэффициент при x_k и все уравнения сложить.

В случае нелинейных зависимостей обычно находят грубо приближенно значения $x_1^0, \dots, x_n^0$ искомых величин $x_1, \dots, x_n$ и разлагают $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ в ряд по степеням $\xi_1 = x_1 - x_1^0, \dots, \xi_n = x_n - x_n^0$. Отбрасывая члены выше первого порядка, получают линейные условные уравнения, при помощи которых определяют наиболее вероятные значения поправок ξ_i .

Указанный метод годится для случая, когда все значения имеют одинаковую точность. В противном случае каждое условное уравнение должно быть предварительно умножено на вес, обратно пропорциональный средней квадратической погрешности соответствующего значения f_i (подробнее см. Крылов — стр. 525 справочника).

Пример: Измерения электрического сопротивления R медного стержня при разной температуре (t° по Цельсию) дали результаты, помещенные в таблице (первые два

t	R	t^2	tR	$R_{\text{вычисл.}}$
19,1	76,30	364,8	1457,3	76,26
25,0	77,80	625,0	1945,0	77,96
30,1	79,75	906,0	2400,5	79,43
36,0	80,80	1296,0	2908,8	81,13
40,0	82,35	1600,0	3294,0	82,28
45,1	83,90	2034,0	3783,9	83,76
50,0	85,10	2500,0	4255,0	85,16
$\Sigma 245,3$	566,00	9325,8	20044,5	

* В обозначениях Гаусса, см. примечание на стр. 511.

столбца). Если искать зависимость R от t в виде $R=a+bt$, то для определения постоянных a и b получим семь условных уравнений вида

$$R_i = a + bt_i,$$

где t_i и R_i — соответствующие значения t и R .

Нормальные уравнения будут:

$$7a + [t] b = [R], \quad [t] a + [t^2] b = [tR]$$

или

$$7a + 245,3b = 565,0, \quad 245,3a + 9325,8b = 20\,044,5.$$

Решая их, получим $a=70,76$ и $b=0,233$. Значения R , вычисленные по формуле $R=70,76+0,238t$, даны в последнем столбце таблицы.

II. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

1. Приближенное изображение функциональной зависимости

Постановка задачи. Во многих случаях бывает необходимо подобрать для функции, заданной только таблицей или графиком, аналитическое выражение, приближенно изображающее эту функцию. Подобная задача может возникнуть и для функции, заданной формулой, если эта формула оказывается слишком сложной или неподходящей для требуемых целей (например: функция должна быть проинтегрирована, а интеграл от нее не выражается через элементарные функции). Формулы, изображающие функциональную зависимость, полученную из опыта в виде таблицы или графика, называются *эмпирическими формулами*. Обычно для приближенного изображения заданной функции $f(x)$ выбирают *аппроксимирующую* (приближающую) функцию $\varphi(x)$ из функций определенного вида, например: ищут $\varphi(x)$ в виде многочлена

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

или в виде

$$\varphi(x) = Ae^{rx} + Be^{sx} + \dots \text{ и т. п.,}$$

требуя наилучшего приближения на некотором определенном интервале ($a < x < b$). В зависимости от того способа, которым оценивается близость функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, будет получаться то или другое наилучшее приближение.

Равномерное приближение. Теоретически целесообразно требовать для наилучшего приближения, чтобы максимум величины $|f(x) - \varphi(x)|$, на том интервале $a < x < b$, на котором нам нужно получить прибли-

женное изображение $f(x)$, был бы наименьшим (по сравнению с другим выбором $\varphi(x)$). Практическое получение приближения по этому способу (так называемого *равномерного приближения*) представляет большие трудности, и поэтому этот способ применяется главным образом в теоретических исследованиях.

Приближение по методу наименьших квадратов. Наиболее употребительным является такое приближение $\varphi(x)$, для которого наименьшее значение имеет величина

$$M = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx.$$

Потребовав обращения в нуль частных производных от M по параметрам $a, b, c, \dots$, определяющим функцию $\varphi(x)$ (см. стр. 327), получают уравнения, позволяющие найти наилучшие (в указанном смысле) значения этих параметров. Величина $\delta = \sqrt{M} : (b - a)$ называется в этом случае *средней квадратической погрешностью*.

Если функция $\varphi(x)$ ищется в виде линейной комбинации некоторых заданных функций

$$\varphi(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$$

(например: $\varphi(x)$ — многочлен, если $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \dots, \varphi_n = x^n$, или тригонометрический многочлен, если $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = \cos x, \varphi_2 = \sin x, \dots, \varphi_{2n-1} = \cos nx, \varphi_{2n} = \sin nx$), то для определения $a_0, a_1, \dots, a_n$ получается система линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial a_k} &= \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx - \\ &- \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Эта система принимает особенно простой вид, если функции $\varphi_i(x)$ обладают свойством *ортogonalности* на интер-

вале (a, b) , т. е. $\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0$ при $i \neq k$.*

* Два примера ортогональных систем функций: 1) $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots; \sin x, \dots, \sin nx, \dots$ на интервале $(0, 2\pi)$. 2) Полиномы Лежандра $P_i(x)$ на интервале $(-1, +1)$ — см. стр. 423.

В этом случае

$$a_k \int_a^b [\tau_k(x)]^2 dx = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

(ср. формулы Эйлера, стр. 492). В связи с этим упрощением, если требуется получить аппроксимацию при помощи полинома, удобнее искать этот полином в виде: $\varphi(x) = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n$, где P_k — полиномы Лежандра, чем в виде

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n.$$

Пример: Найти наилучшее приближение для $y = \sin x$ в виде многочлена 2-й степени на интервале $0 \leq x \leq \pi$. Заменяя независимую переменную $x = \frac{\pi}{2}(t+1)$, переводим интервал $(0, \pi)$ в $(-1, +1)$. Ищем приближение в виде

$$\varphi = a_0 + a_1 P_1(t) + a_2 P_2(t).$$

Тогда (см. стр. 354—355):

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sin \frac{\pi}{2}(t+1) dt = \frac{2}{\pi};$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} t \sin \frac{\pi}{2}(t+1) dt = 0;$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) \sin \frac{\pi}{2}(t+1) dt = \frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right).$$

Итак

$$\begin{aligned} \sin x &\approx \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) = \\ &= 0,980 - 0,418 \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Приближение в отдельных точках. Во многих случаях, в особенности, если функция $f(x)$ задана графиком или таблицей, для оценки степени приближения рассматривают разности $f(x) - \varphi(x)$ не для всех точек интервала (a, b) , на котором требуется приблизительно изобразить функцию $f(x)$, но только для отдельных, заранее выбранных точек $x_0, x_1, \dots, x_n$. Функция $\varphi(x)$ считается наилучшим приближением к $f(x)$ (по методу наименьших

квадратов), если для нее $S = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2$ имеет наи-

меньшее значение в сравнении с другими функциями, из числа которых выбирается искомое приближение *. Если $\varphi(x)$ вполне определяется параметрами $a, b, c, \dots$, то наилучшие (в указанном смысле) значения этих параметров найдутся решением системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \dots$$

Если число параметров равно числу выбранных точек ($n+1$), то, вообще говоря, возможно подобрать $\varphi(x)$ так, чтобы $\varphi(x_i) = f(x_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$), решая эту систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными. Тогда функция $\varphi(x)$ называется *интерполирующей функцией*, процесс нахождения и вычисления значений $\varphi(x)$ — *интерполяцией*.

Наиболее распространенной является *параболическая интерполяция*, когда в качестве интерполирующей функции берется многочлен $\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Для периодических функций применяется *тригонометрическая интерполяция* — см. стр. 502.

Приближение по методу средних — см. стр. 524.

2. Параболическая интерполяция

Основные формулы. Какова бы ни была заданная функция $f(x)$ и как бы ни были выбраны *точки интерполяции* $x_0, x_1, \dots, x_n$, всегда существует единственный многочлен n -й степени $\varphi_n(x)$, принимающий в этих точках те же значения, что и $f(x)$: $\varphi(x_i) = f(x_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$). Для нахождения интерполяционного многочлена может служить *формула Лагранжа*:

$$\varphi_n(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \dots + L_n(x)f_n,$$

где

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}.$$

и

$$f_i = f(x_i).$$

Формула Лагранжа неудобна для вычислений. В наиболее простом и практически важном случае равноотстоящих

* Как и выше, можно определить так же наилучшее приближение как такое, для которого максимум $[f(x_i) - \varphi(x_i)]$ будет наименьшим, однако нахождение приближения по этому способу практически затруднительно.

интерполяционных точек, т. е. когда $x_{i+1} - x_i = \text{const}$, можно применить другие формулы, использующие понятие *разностей* функции. Величина $h = x_{i+1} - x_i$ в этом случае называется *ступенью* заданной таблицы значений $f(x)$; $x_k = x_0 + hk$. (Это обозначение сохраняется и при $k < 0$.)

Первые разности функции по отношению к данному шагу h определяются формулами:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Разности первых разностей образуют *разности 2-го порядка* (или вторые разности):

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x); \quad \Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i.$$

Так же определяются и разности более высоких порядков. Разности могут быть выражены через заданные значения функции:

$$\Delta^k f_0 = f_k - k f_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} f_{k-2} - \dots \pm f_0$$

[символически: $\Delta^k f_0 = (E-1)^k f_0$, если обозначить $E^k f_0 = f_k$].

Для целей интерполяции по заданным значениям функции составляется *таблица разностей* по следующей схеме:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	
...	...					
x_{-2}	f_{-2}	Δf_{-3}	$\Delta^2 f_{-3}$	$\Delta^3 f_{-3}$	$\Delta^4 f_{-3}$	$\rightarrow N_n$
x_{-1}	f_{-1}	Δf_{-2}	$\Delta^2 f_{-2}$	$\Delta^3 f_{-2}$	$\Delta^4 f_{-2}$	
x_0	f_0	Δf_{-1}	$\Delta^2 f_{-1}$	$\Delta^3 f_{-1}$	$\Delta^4 f_{-1}$	$\rightarrow S$
		Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$	$\rightarrow B$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$	
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^4 f_2$	$\rightarrow N_1$
x_3	f_3					
...	...					

В этой таблице всякое число (за исключением находящихся в первом столбце) является разностью двух чисел предыдущего столбца, стоящих на полстроки ниже и на полстроки выше рассматриваемого *. При составлении таблицы разностей следует иметь в виду, что наличие в первом столбце ошибок, не превышающих ϵ по абсолютной величине, может привести к ошибкам, достигающим до 2ϵ во втором, 4ϵ в третьем, $2^m - 1 \epsilon$ в m -м столбце. Поэтому даже незначительные погрешности (например погрешности округления) в значениях функции могут сильно повлиять на разности высших порядков. Вычисления разностей следует прекращать, если все числа некоторого столбца оказываются почти равными между собой („разности постоянны“). Разности m -го порядка будут постоянными для многочлена m -й степени. Поэтому приблизительное их постоянство показывает, что данная функция может быть с достаточной точностью изображена многочленом m -й степени. (Для таблицы на стр. 521 $m=3$; четвертые разности излишни.) При помощи разностей интерполяционный многочлен может быть найден по одной из следующих формул (введено обозначение $u = \frac{x - x_0}{h}$):

$$N_I(x) = f_0 + u \Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \\ + \dots + \frac{u(u-1) \dots (u-n+1)}{n!} \Delta^n f_0,$$

$$N_{II}(x) = f_0 + u \Delta f_{-1} + \frac{u(u+1)}{2} \Delta^2 f_{-2} + \\ + \dots + \frac{u(u+1) \dots (u+n-1)}{n!} \Delta^n f_{-n}$$

(формулы Пьютона),

$$S(x) = f_0 + u \frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{u^3}{2} \Delta^2 f_{-1} + \\ + \frac{u(u^2-1)}{3!} \frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \\ + \frac{u^3(u^2-1)}{4!} \Delta^4 f_{-2} + \dots + \frac{u^2(u^2-1) \dots [u^2 - (n-1)^2]}{(2n)!} \Delta^{2n} f_{-n}$$

(формула Стирлинга),

* Пример такой схемы см. стр. 521.

$$\begin{aligned}
 B(x) = & f_0 + u \Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} + \\
 & + \frac{u(u-1)(u-0,5)}{3!} \Delta^3 f_{-1} + \frac{u(u^2-1)(u-2) \Delta^4 f_{-2} + \Delta^4 f_{-1}}{4! \cdot 2} + \\
 & + \dots + \frac{(u-0,5)u(u^2-1) \dots [u^2-(n-1)^2](u-n)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} f_{-n}
 \end{aligned}$$

(формула Бесселя).

Формулы Ньютона дают интерполяционный многочлен, если x_0 является соответственно первой или последней из интерполяционных точек, тогда как для формул Бесселя и Стирлинга x_0 является средней или одной из средних интерполяционных точек. Разности, используемые при вычислениях по той или иной формуле, отмечены на схеме стр. 519. Интерполяционные формулы применяются главным образом для вычисления промежуточных значений функции заданной таблицы. Надлежащим выбором x_0 можно всегда сделать $|u| < 1$. При $|u| \leq 0,25$ наиболее целесообразно применять формулу Стирлинга, при $0,25 \leq u \leq 0,75$ — формулу Бесселя. Формулы Ньютона употребляются при невозможности использования формул S или B , т. е. когда x лежит вблизи начала или конца таблицы.

Пример: Вычислить для $x=22$ значение функции $f(x)$, заданной следующей таблицей*.

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0				
5	4,87	487	78		
10	10,52	565	107	29	
15	17,24	672	118	31	2
20	25,34	810	172	54	3
25	35,16	982	199	27	-7
30	46,97	1181	231	32	5
35	61,09	1412	264	33	1
40	77,85	1676			

Как уже было замечено, здесь следует ограничиться третьими разностями. Если взять

$$x_0 = 20, \text{ то } u = \frac{22-20}{5} = 0,4.$$

* В таблице разностей обычно не ставят знака дроби, выражая разности в единицах разряда последней значащей цифры.

По формуле Бесселя:

$$f(22) = 25,34 + 0,4 \cdot 9,82 - \frac{0,4 \cdot 0,6}{2} \frac{1,72 + 1,99}{2} + \\ + \frac{0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,1}{6} 0,27 = 29,05.$$

По формуле Стирлинга:

$$f(22) = 25,34 + 0,4 \frac{8,10 + 9,82}{2} + \\ + \frac{0,16}{2} 1,72 - \frac{0,4 \cdot 0,84}{6} \frac{0,34 + 0,27}{2} = 29,05.$$

По 1-й формуле Ньютона:

$$f(22) = 25,34 + 0,4 \cdot 9,82 - \frac{0,4 \cdot 0,6}{2} 1,99 + \frac{0,4 \cdot 0,6 \cdot 1,6}{6} 0,32 = 29,05.$$

Результаты совпадают: если бы мы ограничились вторым разностями, то мы получили бы по формуле *B* 29,05, по формуле *S* 29,06 и по формуле *N* 29,03.

Погрешность интерполяции. Если $f(x)$ задана аналитически и имеет в рассматриваемом интервале достаточное число непрерывных производных, то погрешность, получающаяся от замены $f(x)$ интерполяционным многочленом по формуле Лагранжа, равна

$$f(x) - \pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

где ξ есть некоторое промежуточное значение между наибольшим и наименьшим из чисел $x_0, x_1, \dots, x_n$. Для известных формул:

$$f(x) - N_I(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot u(u-1)\dots(u-n);$$

$$f(x) - N_{II}(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot u(u+1)\dots(u+n);$$

$$f(x) - S(x) = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\xi) \cdot u(u^2-1)\dots(u^2-n^2);$$

$$f(x) - B(x) = \frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \cdot u(u^2-1)\dots(u^2-n^2)(u-n-1)$$

(Число членов в $N_I(x)$, $N_{II}(x)$, $S(x)$ и $B(x)$ предполагается то же, что и на стр. 520—521; ξ — некоторое промежуточное значение между интерполяционными точками, разное в различных формулах; ξ зависит от x .)

Приложения интерполяционных формул.
 Формулы интерполирования могут быть использованы для приближенного интегрирования и дифференцирования. Для этой цели заданную функцию $f(x)$ заменяют интерполяционным многочленом $\Phi(x)$ и выполняют над ним соответствующие операции. Так напр., применяя интерполяционную формулу Стирлинга, можно получить следующую формулу для приближенного значения производной от $f(x)$ при $x=x_0$:

$$\left[\frac{df}{dx} \right]_{x=x_0} = \frac{1}{h} \left[\frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} - \frac{1}{6} \frac{\Delta^3 f_{-1} + \Delta^3 f_{-2}}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{30} \frac{\Delta^5 f_{-2} + \Delta^5 f_{-3}}{2} \dots \right].$$

Наиболее удобные формулы интегрирования, получаемые из интерполяционных формул, даны на стр. 376.

3. Подбор эмпирических формул

Сравнение графиков. Процесс подбора эмпирической формулы для установленной из опыта функциональной зависимости $y=f(x)$ распадается на две части: сначала выбирается вид формулы и уже после этого определяются численные значения параметров, для которых приближение к данной функции оказывается наилучшим. Если нет каких-либо теоретических соображений для подбора вида формулы, обычно выбирают функциональную зависимость из числа наиболее простых, сравнивая их графики с графиком заданной функции. Так как сходство графиков, определяемое грубо на глаз, может оказаться обманчивым, следует, выбрав какую-либо формулу, прежде чем определять значения параметров, проверить возможность ее применения по методу выравнивания.

Метод выравнивания заключается в следующем: в предположении, что между y и x существует зависимость определенного вида, находятся некоторые величины $X=\varphi(x, y)$ и $Y=\psi(x, y)$, которые при сделанном предположении связаны

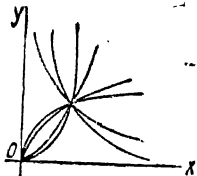
линейной зависимостью (например, если $y = \frac{x}{a+bx}$, то берут

$X=x$, $Y=\frac{x}{y}$ или $X=\frac{1}{x}$, $Y=\frac{1}{y}$). Вычисляя для заданных значений x и y соответственные значения X и Y и изображая их графически, легко сразу увидеть, близка ли зависимость между X и Y к линейной (лежат ли соответствующие точки приблизительно на прямой линии) и, следовательно, подходит ли выбранная формула или нет.

Указания относительно выравнивания некоторых простейших формул даны ниже с указаниями на соответствующие графики—см. стр. 525—528. *Пример*—см. стр. 528.

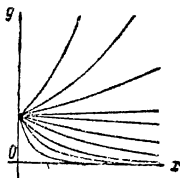
Определение параметров. Наиболее точным методом определения параметров является метод наименьших квадратов (см. стр. 516 и 517). Однако в большинстве случаев могут быть успешно применены более простые методы, в частности, *метод средних*. Если полученная по этому методу формула окажется недостаточно точной, для дальнейшего ее уточнения уже может быть использован метод наименьших квадратов, причем знание приближенных значений параметров позволит сделать вычисления менее громоздкими (см. стр. 514). По методу средних сначала определяется линейная зависимость между „выравненными“ переменными X и Y : $Y = aX + b$. Для этого условные уравнения $Y_i = aX_i + b$, для имеющихся пар значений X_i и Y_i , делятся на две равные (или почти равные) группы в порядке возрастания переменной X_i или Y_i . Складывая уравнения каждой группы, получим два уравнения, из которых и определяются a и b . Выражая X и Y через первоначальные переменные, получим искомую зависимость между x и y . Если при этом еще не все параметры будут определены, то следует применить вновь тот же метод, выравнивая уже другие величины $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ (см. например формулу XIII—стр. 527). *Пример*—см. стр. 528.

Наиболее употребительные эмпирические формулы. Ниже даны некоторые простейшие формулы с соответствующими графиками. На каждом чертеже приведено несколько кривых, для различных значений входящих в формулы параметров (исследование влияния изменения параметров на форму кривых см. в отделе „графики“—стр. 110—122). При рассмотрении графиков следует всегда иметь в виду, что при пользовании эмпирическими формулами используется лишь часть кривой, соответствующая некоторому интервалу изменения независимой переменной. Поэтому, например, не следует думать, что формула $y = ax^2 + bx + c$ (см. ниже) удобна только при наличии у заданной кривой максимума или минимума.

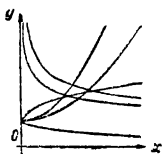


1. $y = ax^b$. График—см. рис. 5, 11, 14 и 15 и пояснения к ним—стр. 112, 116 и 117. Выравниваются $X = \lg x$ и $Y = \lg y$: $Y = \lg a + bX$.

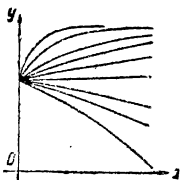
II. $y = ae^{bx}$. График — см. рис. 16 и пояснения к нему — стр. 113. Выравниваются x и $Y = \lg y$: $Y = \lg a + b \lg e \cdot x$.



III. $y = ax^b + c$. Графики те же, что и для формулы I, смещенные в направлении оси y . Если b задано, выравнивают $X = x^b$ и y : $y = aX + c$. Если b неизвестно, выравнивают $Y = \lg(y - c)$ и $X = \lg x$, $Y = \lg a + bX$, определив сначала c . Для этого находят на графике заданной функции три точки с абсциссами x_1, x_2 и $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ и ординатами, соответственно, y_1, y_2, y_3 (x_1 и x_2 выбирают произвольно) и принимают $c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$.



IV. $y = ae^{bx} + c$. Графики те же, что и для формулы II, смещенные в направлении оси y . Выравнивают $Y = \lg(y - c)$ и x : $Y = \lg a + b \lg e \cdot x$, определив сначала c . Для этого находят на графике заданной функции три точки с абсциссами x_1, x_2 и $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ (x_1 и x_2 произвольны) и ординатами, соответственно, y_1, y_2



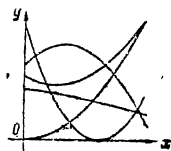
и y_3 и принимают $c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$.

V. $y = ax^3 + bx + c$. График — см. рис. 2 и пояснение к нему стр. 110.

Если выбрать на графике заданной функции какую-либо точку (x_1, y_1) , то выравниваются x и $Y = \frac{y - y_1}{x - x_1}$:

$$Y = (b + ax_1) + ax.$$

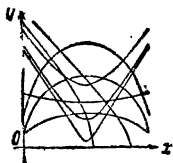
Если заданные значения x образуют арифметическую прогресс-



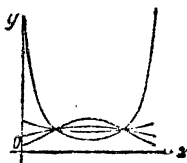
сию с разностью h , то выравниваются $Y = \Delta y$ и x : $Y = (bh + ah^2) + 2ahx$. В обоих случаях, после определения a и b , находят c из уравнения $\sum y = a \sum x^2 + b \sum x + nc$, где n — число заданных значений x , по которым производится суммирование.

VI. $y = \frac{cx+b}{cx+d}$. График — см. рис. 7 и пояснение к нему — стр. 112. На графике заданной функции выбирают какую-либо точку (x_1, y_1) и выравнивают $Y = \frac{x-x_1}{y-y_1}$ и x : $Y = A + Bx$; определением A и B здесь и ограничиваются, переписывая полученную формулу в виде $y = y_1 + \frac{x-x_1}{A+Bx}$.

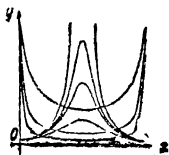
Иногда можно ограничиться формулами вида $y = \frac{x}{cx+d}$ или $y = \frac{1}{cx+d}$. Тогда выравниваются $X = \frac{1}{x}$ и $Y = \frac{1}{y}$ или $Y = \frac{x}{y}$ и x в первом случае, и $Y = \frac{1}{y}$ и x — во втором.



VII. $y^2 = ax^2 + bx + c$. График — см. рис. 13 и пояснение к нему — стр. 116. Если ввести новую переменную $y = y'$, то дальше можно вести вычисления, как для формулы V.

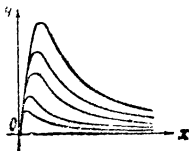


VIII. $y = ae^{bx+cx^2}$ или $\lg y = \lg a + \lg e \cdot bx + \lg e \cdot cx^2$. График — см. рис. 19 и пояснение к нему — стр. 119. Введением новой переменной $y = \lg y$ этот случай сводится к формуле V.

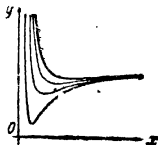


IX. $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$. График — см. рис. 9 и пояснение к нему — стр. 113. Введением новой переменной $\bar{y} = \frac{1}{y}$ этот случай сводится к формуле V.

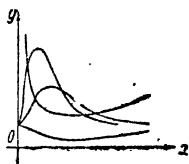
X. $y = \frac{x}{ax^2 + bx + c}$. График — см. рис. 10 и пояснение к нему — стр. 114—115. Введением новой переменной $\bar{y} = \frac{x}{y}$ этот случай сводится к формуле V.



XI. $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$. График — см. рис. 8 и пояснение к нему — стр. 113. Введением новой переменной $\bar{x} = \frac{1}{x}$ этот случай сводится к формуле V.



XII. $y = ax^{be^{cx}}$. График — см. рис. 21 и пояснение к нему — стр. 121. Если заданные значения x образуют арифметическую прогрессию с разностью h , то выравниваются $Y = \Delta \lg y$ и $X = \Delta \lg x$: $Y = hc \lg e + bX$. Если же данные значения x образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q , то выравниваются $Y = \Delta_1 \lg y$ и $X = \Delta_1 \lg q + c(q-1) \lg e \cdot x$ ($\Delta_1 \lg y$ — разность двух последовательных значений $\lg y$). После определения b и c находят a аналогично тому как для формулы V находилось c .



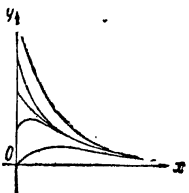
XIII. $y = ae^{bx} + ce^{dx}$. График — см. рис. 23 и пояснения к нему — стр. 120. Если заданные значения x образуют арифметическую прогрессию с разностью h и y_1 и y_2 какие-либо три последовательные значения данной функции, то выравниваются $Y = \frac{y_2}{y_1}$ и

$$X = \frac{y_1}{y} : Y = (e^{bh} + e^{dh})X - e^{bh} \cdot e^{dh}.$$

После определения b и d из этого

уравнения выравнивают $\bar{Y} = ye^{-dx}$ и $\bar{X} = e^{(b-d)x}$: $\bar{Y} = a\bar{X} + c$.

Более подробно о подборе эмпирических формул см. Семедяев — стр. 535 справочника.



Пример: Требуется найти эмпирическую формулу для зависимости между x и y заданной таблицей, помещенной на следующей странице (первые два столбца):

Построив график (рис. 1) и сравнивая его с графиками, помещенными на стр. 525—527, убедимся, что для данного случая могут подойти формулы X или XII. Для формулы X должны выравняться

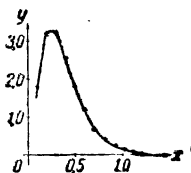


Рис. 1.

$\Delta \frac{x}{y}$ и x^2 ; однако вычисления явно показывают, что зависимость между x и $\Delta \frac{x}{y}$ далека от линейной. Для проверки пригодности формулы XII строим график зависимости между $\Delta \lg x$ и $\Delta \lg y$ (для $h=0,1$; рис. 2), а также между $\Delta_1 \lg y$ и x (для $q=2$; рис. 3). В обоих случаях можно считать совпадение с прямой линией достаточно удовлетворительным и, следовательно, принять $y = ax^b e^{cx}$.

Для определения констант a , b и c ищем линейную зависимость между $\Delta \lg x$ и $\Delta \lg y$ по методу средних. Складывая условные уравнения

$$\Delta \lg y = 0,0434c + b \cdot \Delta \lg x$$

по группам (первая из 5, вторая из 6 уравнений), получим

$$-0,193 = 0,2171c + 0,778b,$$

$$-1,455 = 0,2606c + 0,299b,$$

откуда $b = 1,927$ и $c = 7,793$. Для определения a складываем

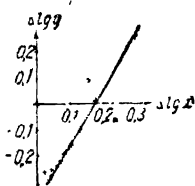


Рис. 2.

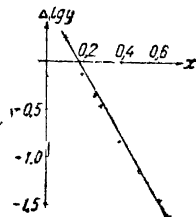


Рис. 3.

все уравнения вида $\lg y = \lg a + b \lg x + c \lg e^x$, что дает

$$-2,670 = 12 \lg a - 6,400 - 26,389,$$

откуда $\lg a = 2,510$, $a = 324$. Значения y , вычисленные по формуле $y = 324 x^{1,927} e^{-7,793x}$, даны в последнем столбце помещенной ниже таблицы.

x	y	$\frac{x}{y}$	$\Delta \frac{x}{y}$	$\lg x$	$\lg y$	$\Delta \lg x$	$\Delta \lg y$	$\Delta_1 \lg x$	$y_{\text{выч}}$
0,1	1,78	0,056	0,007	-1,000	0,250	0,301	0,252	0,252	1,76
0,2	3,18	0,063	0,031	-0,699	0,502	0,176	+0,002	-0,097	3,06
0,3	3,19	0,094	0,063	-0,523	0,504	0,125	-0,099	-0,447	3,07
0,4	2,54	0,157	0,125	-0,398	0,405	0,097	-0,157	-0,803	2,45
0,5	1,77	0,282	0,244	-0,301	0,248	0,079	-0,191	-1,134	1,73
0,6	1,14	0,526	0,488	-0,222	0,057	0,067	-0,218	-1,455	1,13
0,7	0,69	1,014	0,986	-0,155	-0,161	0,058	-0,237	—	0,70
0,8	0,40	2,000	1,913	-0,097	-0,398	0,051	-0,240	—	0,41
0,9	0,23	3,913	3,78	-0,046	-0,638	0,046	-0,248	—	0,24
1,0	0,13	7,69	8,03	0,000	-0,886	0,041	-0,269	—	0,14
1,1	0,07	15,72	14,28	0,041	-1,155	0,038	-0,243	—	0,07
1,2	0,04	30,0	—	0,079	-1,398	—	—	—	0,02

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ.

А. ОБЩАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО МАТЕМАТИКЕ.

Ниже приводится лишь минимальная литература к каждой главе настоящего справочника. Из общих руководств по математике, в которых инженер или студент вуза сможет найти изложение вопросов, относящихся почти ко всем главам, следует указать, прежде всего, на трехтомное руководство:

- 1) *Смирнов В. И.*, Курс высшей математики для техников и физиков, изд. ОНТИ, М.—Л. *.

В дополнение к книге Смирнова можно для нескольких глав указать на следующие полезные для инженера книги:

- 2) *Занден Г.*, Элементы прикладного анализа (пер. с немецкого), ГТТИ, М.—Л., 1932.
- 3) *Крылов А. Н.*, Лекции о приближенных вычислениях, изд. А. Н. СССР, М.—Л., 3-е изд., 1933.

В них специально освещены вопросы, связанные с численными и графическими методами вычислений в различных отделах математики. Эти три книги отмечаются ниже только фамилиями авторов с указанием на соответствующие главы и параграфы.♦

Из справочников по математике общего типа, где помещены более полные сведения, чем в настоящем справочнике, укажем на следующие:

- 1) *Hütte*, Справочная книга для инженеров, архитекторов, механиков и студентов, т. I, отд. I (Математика), ОНТИ, М.—Л. (выдержала ряд изданий). Кроме глав, имеющихс я в настоящем справочнике, освещены вопросы: 1) сложных процентов и рент, 2) номографии, 3) параллельной перспективы.
- 2) *Майзель В. М.* (ред.), Справочное руководство по машиностроению, т. I (Математика), ГНТИ Украины, Харьков, 1937. Кроме глав, имеющихс я в настоящем Спра-

* Выдержал ряд изданий. В дальнейшем ссылки сделаны на 9-е издание I тома (1938), 6-е издание II тома (1937) и 2-е издание III тома (1939).

вочнике, освещены вопросы: 1) вариационного исчисления, 2) уравнений математической физики (более подробно, чем здесь), 3) интегральных уравнений.

- 3) *Выгодский М. Я.*, Справочник по элементарной математике, Гостехиздат, М.-Л., 1941. Освещены более подробно, чем здесь, вопросы элементарной алгебры, геометрии и прямолинейной тригонометрии.

Из руководств и справочников, содержащих более специальные сведения, ограничимся следующими:

- 1) *Frank-Mises*, Die Differential- und Integralgleichungen der Mech. und Physik, т. I, 2. Aufl., Braunschweig (дифференциальные и интегральные уравнения, линейные образы, функции комплексного переменного, бесконечные ряды и произведения, вариационное исчисление).
- 2) *Madelung E.*, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, J. Springer, Berlin, 1922. (Справочник содержит теорию аналитических функций, специальные функции, дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление, геометрические преобразования, элементы тензорного исчисления и другие вопросы).

Б. ЛИТЕРАТУРА К ОТДЕЛЬНЫМ ГЛАВАМ

Отдел первый. Таблицы и графики

И. Таблицы

- 1) Таблицы *Барлоу* — квадратов, кубов, корней квадратных, корней кубических и обратных величин целых чисел от 1 до 10 000. Изд. 2-е., М.-Л., ОНТИ, 1936.
- 2) *Бремикер*, Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с шестью десятичными знаками, Изд. Редбюро ГУГСК НКВД СССР, М., 1938.
- 3) *Петерс И.*, Шестизначные таблицы тригонометрических функций, Изд. 2-е, Редбюро ГУГСК НКВД СССР, М., 1938.
- 4) *Янке и Эмде*, Таблицы специальных функций (перевод с немецкого), Гостехиздат, 1941. Таблицы специальных функций, большей частью с 4 знаками.
- 5) *Keiichi Hayashi*, Fünfstellige Funktionentafeln, Springer, Berlin, 1930 (Тригонометрические, гиперболические, показательные, шаровые, бесселевы, эллиптические функции и др.)
- 6) *Keiichi Hayashi*, Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktionen, Springer, Berlin, 1926.

II. Графики

- 1) *Бермант А. Ф.* (ред.), Графический справочник по математике (атлас кривых), ч. I, ОНТИ, М.-Л., 1937.

- 2) *Бескин Н. М.*, Курс аналитической геометрии для вузов, ч. I, гл. VI (Некоторые кривые, часто встречающиеся в технике) и гл. VII (Графики некоторых часто встречающихся функций), ГТТИ, М.-Л., 1933.
- 3) *Gino Loria*, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven (Theorie und Geschichte), B. I—II, 2. Aufl., Teubner, Leipzig-Berlin, 1911.

Отдел второй. Элементарная математика

I. Приближенные вычисления

- 1) *Франк М. Л.*, Элементарные приближенные вычисления, 3-е изд., ОНТИ, М.-Л.
- 2) *Занден **, гл. I (О численных и графических методах вычисления вообще); гл. II (Счетная линейка и счетные машины).
- 3) *Крылов **, гл. I (Общие правила приближенных вычислений).
- 4) *Панов Д. Ю.*, Счетная линейка, изд. 4-е, ОНТИ, М.-Л., 1936.

II. Алгебра

- 1) *Киселев А. П.*, Алгебра, учебник для средней школы, Учпедгиз.
- 2) *Шапиро Г. М.*, Высшая алгебра, Учпедгиз.
- 3) *Смирнов **, том I, гл. VI, § 2 (Основные свойства целых многочленов и вычисление их корней).
- 4) *Занден **, гл. III (Целые рациональные функции), гл. VIII (Решение уравнений).
- 5) *Крылов **, гл. II (Решение численных уравнений).

III. Геометрия

- 1) *Киселев А. П.*, Геометрия, учебник для средней школы, ч. I (Планиметрия), ч. II (Стереометрия), Учпедгиз, М., 1938.

IV. Тригонометрия

- 1) *Рыбкин*, Прямолинейная тригонометрия, учебник для средней школы, Учпедгиз, М.
- 2) *Шмулевич П. К.*, Прямолинейная тригонометрия, ГОНТИ, изд. 7-е, М.-Л., 1938. Более полный курс, с указаниями на технические применения.
- 3) *Штаерман И. Я.*, Гиперболические функции, ОНТИ, М.-Л., 1935.

- 4) *Смирнов **, том I, гл. VI, § 1 (Синусоидальные величины).
- 5) *Фишман Н. М.*, Комплексные числа, ряды и гиперболические функции, гл. III, § 10—12 (Гиперболические функции), изд. 2-е, ГТИ, М.-Л., 1933.
- 6) *Степанов Н. Н.*, Сферическая тригонометрия, ОНТИ, М.-Л., 1936.

Отдел третий. Аналитическая и дифференциальная геометрия

I. Аналитическая геометрия

- 1) *Привалов Н. И.*, Аналитическая геометрия, ГОНТИ, М.-Л., 1939.

II. Дифференциальная геометрия

- 1) *Фиников С. И.*, Дифференциальная геометрия, Учпедгиз, М., 1939.
- 2) *Смирнов **, том I) гл. II, § 6 (Плоские кривые), том II, гл. V (Плоские и пространственные кривые, поверхности).

Отдел четвертый. Основы математического анализа

I. Введение в анализ

- 1) *Курант Р.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. I, ГТИ, М.-Л., 1931, гл. I (Предварительные сведения), гл. VIII (Бесконечные ряды и другие предельные процессы).
- 2) *Смирнов **, том I, гл. I (Функции), гл. II, § 1 (Теория пределов), гл. IV, § 1 (Ряды) и § 3 (Дополнительные сведения из теории рядов).

II. Дифференциальное исчисление

- 1) *Курант Р.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления, гл. II, III, VI, ч. I, ГТИ, М.-Л., 1931.
- 2) *Смирнов **, том I, гл. II, IV (§ 2), V.
- 3) *Занден **, гл. V, § 30 (Численное дифференцирование), гл. VI, § 39 (Графическое дифференцирование).

III. Интегральное исчисление

- 1) *Курант Р.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления, гл. II, III, IV, V, ч. I, ГТИ, 1931.
- 2) *Смирнов **, т. I, гл. III, т. II, гл. III.
- 3) *Занден **, гл. V, § 31—34 (Численное интегрирование), гл. VI, § 36—38 (Графическое интегрирование).
- 4) *Крылов **, гл. III (Приближенное вычисление определенных интегралов), гл. IV (Механические приборы для вычисления определенных интегралов).

* См. стр. 530.

IV. Дифференциальные уравнения

- 1) *Смирнов **, т. II, гл. I (Обыкновенные дифференциальные уравнения), гл. II (Линейные уравнения и дополнительные сведения по теории дифференциальных уравнений), гл. VII (Уравнения с частными производными математической физики), т. III, гл. VIII (Линейные дифференциальные уравнения — аналитическая теория), гл. IX (Специальные функции).
- 2) *Степанов В. В.*, Курс дифференциальных уравнений, 3-е изд., ОНТИ, М.-Л., 1938. Учебник для университетов; содержит методы интегрирования и основные вопросы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных 1-го порядка.
- 3) *Пиаджо Г.*, Интегрирование дифференциальных уравнений, ГТТИ, М.-Л., 1933. Книга содержит много фактического материала как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных (методы интегрирования, приближенные методы, некоторые теоретические вопросы).
- 4) *Фрай Т.*, Элементарный курс дифференциальных уравнений, ГТТИ, М.-Л., 1933. Помимо методов интегрирования и некоторых теоретических вопросов для обыкновенных дифференциальных уравнений, в книге уделено много места приложениям дифференциальных уравнений к физике и технике.
- 5) *Горн*, Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными, ГОНТИ, М.-Л., 1938. Освещена математическая сторона вопроса.
- 6) *Занден **, гл. IX и X (Графическое и численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений).
- 7) *Крылов **, гл. VII (Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений).
- 8) *Канторович Л. и Крылов В.*, Методы приближенного решения уравнений в частных производных, ОНТИ, М.-Л., 1936.
- 9) *Панов Д. Ю.*, Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных, изд. А. Н. СССР, М., 1938.

Отдел пятый. Дополнительные главы анализа

I. Комплексные числа

- 1) *Фишман Н. М.*, Комплексные числа, ряды и гиперболические функции, ГТТИ, М.-Л., 1933.
- 2) *Янчевский С. А.*, Функции комплексного переменного 2-е изд. ОНТИ, М.-Л., 1937.

* См. стр. 530.

- 3) *Смирнов **, т. I, гл. VI, § 1 (Алгебра и элементарные функции), т. III, гл. IV—VI (Функции комплексного переменного).

II. Векторное исчисление

- 1) *Дубнов Я. С.*, Основы векторного исчисления, ч. I, Векторная алгебра, изд. 3-е, Гостехиздат, М.-Л., 1939.
- 2) *Кочин Н. Я.*, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, ОНГИ, М.-Л.
- 3) *Смирнов **, т. II, гл. IV.

III. Ряды Фурье

- 1) *Смирнов **, т. II, гл. VI (Ряды Фурье).
- 2) *Крылов **, гл. V (Разложение функций в тригонометрические ряды).
- 3) *Занден **, гл. VII, § 43 (Гармонический анализ).

Отдел шестой. Обработка наблюдений

I. Основы теории вероятностей и теория ошибок

- 1) *Фрай Т.*, Теория вероятностей для инженеров, ГТТИ, М.-Л., 1934.
- 2) *Крылов **, гл. VIII, § 118—122 (Теория ошибок).

II. Эмпирические формулы

- 1) *Занден **, гл. IV (Экстраполяция и интерполяция), гл. VII, (Приближенные аналитические выражения для эмпирических функций), гл. VIII, §§ 47 и 51 (Метод наименьших квадратов).
- 2) *Крылов **, гл. III, § 28 и гл. VI (Формулы интерполирования), гл. VIII, §§ 130—136 (Способ наименьших квадратов).
- 3) *Семендяев К. А.*, Эмпирические формулы, ГТТИ, М.-Л., 1933.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры обозначают страницы)

А

Абея теорема 308
 Абсолютная величина: вектора 460, комплексного числа 441
 — погрешность (предельная) 141
 — сходимости рядов 305, с комплексными членами 448
 Абсцисса 220, 235
 Адьюнкта определителя 177
 Алгебра 154—188, основная теорема 171
 — векторная 460—466
 — комплексных чисел 440—447
 — операторов растяжения и поворота 447
 Алгебраическая дробь 157
 — кривая 223, 265
 — форма комплексного числа 441
 — функция 289, комплексной переменной 445
 Алгебраическое выражение 154
 Алфавит латинский и греческий 15
 Амплитуда синусоиды 123, 208
 Анализ гармонический 491—505, приближенный 501
 — математический 238—439, функций комплексного переменного 447—450, 454—459
 Анализатор гармонический 502
 Аналитическая геометрия 220—254
 Аналитические функции 454

Антилогарифмы, таблицы 54—56
 Аньези локон 128
 Аполлония теорема 229
 Апофема правильного многоугольника 191
 — правильной пирамиды 196
 Аппликата 238
 Аппроксимирующая функция 515
 Аргумент 288
 — комплексного числа 441
 Ареа-функции (ареа-синус, ареа-косинус, ареа-тангенс, ареа-котангенс) 218, графики 126
 Арифметическая прогрессия 182
 Арифметическое среднее 183
 Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс 212, графики 124
 Архимедова спираль 137
 Асимптотические точки 264, 265
 Асимптотический конус 251
 Асимптоты 266—268
 — гиперболы 231
 Астроида 136

Б

Базис циклоиды 133, 134
 Бегунок (счетной линейки) 148
 Безвихревое поле 478, 489
 Бернулли теорема (закон больших чисел) 507

Бернулли демниската 133
 — уравнение 404
 Бесконечно большие величины 298
 — малые величины 298
 — убывающая геометрическая прогрессия 183
 Бесконечность 294
 Бесконечные пределы (при интегрировании) 372
 — произведения 290
 — разрывы 300
 — ряды см. Ряды
 Беспорядок (инверсия) 177
 Бесселевы функции 426, основные формулы 427, таблицы 100—103
 Бесселя уравнение 425
 — формулы: интерполяционная 521, квадратичной интерполяции 17, в приближенном гармоническом анализе 501
 Биквадратное уравнение 170
 Бином Ньютона 187
 Биномиальные коэффициенты 187
 Бинормаль 273
 Биссектриса треугольника 189, 212
 Большая ось эллипса 228
 Большие, бесконечно большие величины 298
 Больших чисел закон 507
 Большой круг 200, 214
 Бочка 202
 Брадиса правила (приближенных вычислений) 144
 Бригговы логарифмы 163

В

Вариация постоянных 423
 Вебера функция 426
 Вектор 460
 — площадки 480
 Вектор-функция: скалярного переменного 467, точки 470
 Векторная алгебра 460—466
 — диаграмма 209
 — функция см. Вектор-функция
 Векторное двойное произведение 464

Векторное исчисление 460—491
 — поле 470
 — умножение, произведение 462
 Векторные величины 460
 — уравнения 466
 Векторный потенциал 489
 — поток 480
 Величины векторные, бесконечно малые и т. п. — см. соотв. названия
 Вероятностей теории 506—508
 Вероятности интеграл 507, таблицы 108—109
 Вероятность 506
 Вершина кривой-264
 — конической поверхности 199
 — эллипса 228, гиперболы 230, параболы 233
 Взаимно сопряженные см. Сопряженные
 Внешнее среднее 512
 Вихревые линии 485
 Вихрь 484
 Вогнутость и выпуклость 259
 Возврата точки 264, 265
 Возвратное уравнение 170
 Возрастающая прогрессия 182
 Волновое уравнение 432
 Волны длина 208
 Вписанной окружности радиус 191, 212, центр 189
 Вписанный угол 191
 Вращения поверхность 242, вычисление при помощи интеграла 381
 — параболоид 251
 — тела объем 381
 — эллипсоид 250
 Времени ось 209
 Вронского определитель 414
 Второго порядка линейные дифференциальные уравнения: обыкновенные 424, в частных производных 431
 — — кривые 234—237
 — — поверхности 250—254
 Второй степени уравнение 167
 Вынесение за знак корня 160
 — за скобки 155

Выпуклость и вогнутость 259
Выравнивания метод 523

Выражение алгебраическое 154

— дифференциальное (замена переменных) 321

— подинтегральное 332

Высота треугольника 189, 212

Высших порядков дифференциальные уравнения 411

— — производные 318

Вытянутый эллипсоид вращения 250

Вычисления приближенные 141—154

Вычитание векторов 461

— комплексных чисел 443

Г

Гамильтона оператор (набла, ∇) 486

Гамма-функция (Γ) 185, таблицы 99

Гармонические функции 490, 455

Гармонический анализ 491—505

— анализатор 502

— ряд 303

— синтез 505

Гармоническое колебание 208

Гаусса интеграл вероятности 507

— кривая 119

— теорема 488

Гауссова кривизна поверхности 286

— плоскость 440

Гауссовы координаты на поверхности 279

Геодезические линии на поверхности 287, на сфере 214

Геометрическая интерпретация комплексных чисел 440

— прогрессия 182

Геометрическое среднее 184

Геометрия элементарная 188—202

— аналитическая 220—254

— дифференциальная 254—287

— на сфере 214

Гипербола 230—232, 112, 116

— равнобочная 112, 232

Гипербола, уравнение в комплексной форме 452

Гиперболическая спираль 138, 215

— точка 286

— тригонометрия 215

Гиперболические логарифмы 163

— обратные функции 218, графики 126, таблица интегралов 365, комплексной

переменной 450

— уравнения 174

— функции 215, графики 125—126, таблицы 64—71, таблица интегралов 360—362

— функции комплексной переменной 449

Гиперболический параболоид 251

— цилиндр 252

Гиперболического типа уравнение 431

Гиперболоид однополостный, двуполостный 250

Гиперболы сопряженные 232

Гипогенуза 189

Гипотрохоида 136

Гипоциклоида 135

Главная нормаль 273, 275—276

Главное значение аргумента (комплексного числа) 442

— — логарифма 449

— — обратной тригонометрической функции 212

Главные радиусы кривизны 284

Годограф 467

Голоморфная функция 455

Градиент 474

— векторного поля 486

Градусы, перевод в радианы 202, таблицы 57

Граничные условия 400, 432

Графики 110—140, см. также соотв. названия

Графическое дифференцирование 319

— интегрирование 376

— решение уравнений 174, системы уравнений 182, дифференциальных уравнений 409

Греффе метод 172
 Греческий алфавит 15
 Грина метод решения дифференциальных уравнений 437
 — теоремы 483
 — формула 489
 Группировки способ (разложение на множители) 156
 Гюльдена теоремы 384—385

Д

Давление 382
 Даламбера признак сходимости 304
 Движок (счетной линейки) 148
 Двойное векторное произведение 464
 Двойной (двукратный) интеграл 388, приложения 396—397
 — кривизны кривые 272—278
 Двугранный угол 194
 Двуполостный гиперболоид 250
 Двуугольник сферический, площадь 215
 Действительная ось: гиперболы 230, комплексной плоскости 441
 — часть комплексного числа 440
 Декарта правило 172
 Декартов лист 128
 Декартовы координаты 220, 235
 — — поля 472
 Декремент логарифмический затухания 122
 Деление в крайнем и среднем отношении 184
 — комплексных чисел 443
 — отрезка в данном отношении 222, 240
 — сокращенное, формулы 156
 Десятичные логарифмы 163, таблицы 51—56
 Детерминанты (определители) 176
 Диаграмма векторная 209
 Диаметр площади 388, тела 389
 — эллипса 229, гиперболы 232, параболы 233

Дивергенция 483
 Диркlesa циссоида 128
 Директориальное свойство, директрисы: эллипса 228, гиперболы 231, параболы 233, кривой второго порядка 235
 Дирихле задача 491, 434
 — условия 493
 Дискриминант квадратного уравнения 167, кубического уравнения 168
 Дисперсия нормального закона распределения 509, 510
 Дифференциал 310, частный 311, полный 311, второй и высших порядков 312
 — векторной функции 468
 — дуги 256, на поверхности 282
 Дифференциальная геометрия 254—287
 Дифференциальное исчисление 309—331
 Дифференциальные выражения (замена переменных) 321
 Дифференциальные уравнения 312, 400—439, см. также название каждого типа
 Дифференцирование 312, техника 313—320
 — векторов 467
 — графическое 320
 — интеграла по параметру 374
 — объемное 483
 Длина вектора 460
 — дуги 380
 Додекаэдр 198
 Долгота 238, на сфере 279
 Дроби, преобразование дробных выражений 156
 — элементарные (простейшие), разложение алгебраической дроби 157, некоторые случаи 343—344, разложение оператора 416
 Дробная функция 289, графики 112, интегрирование 337
 Дробно-линейная функция 289, график 112, конформное отображение 458
 Дробные рациональные выражения 155

Дуги дифференциал 256, на поверхности 282
 — длина 380
 — центр тяжести 383

Е

e^* , основание натуральных логарифмов 295, таблицы величин, связанных с e 19, 64—75

Единица мнимая 440

Единичные векторы 460

Ж

g^* (же), ускорение силы тяжести, таблицы величин, связанных с g 19

З

Зависимость функций 292

Задания (функции) область 288

Закон больших чисел 507

Замена переменных 321

Заострения точки 264

Затухающее колебание 122, 453

Знакопеременные ряды 305

Знаменатель, уничтожение иррациональности 160, обращение в нуль 166

— прогрессии 183

Значащие цифры 141

Золотое сечение 184

И

Избыток сферический 214

Изгибание поверхностей 283

Излома точки 264, 265

Измерения на поверхности 283

Изолированные точки: кривой 264—265, дифференциального уравнения 406

Изотермическая сетка 457

Икосаэдр 198

Инвариантные свойства 254

Инварианты кривой 2-го порядка 234

— поверхности 2-го порядка 254

Инверсия (беспорядок) 177

— (преобразование) 458

Инволюта 270

Инерции момент: дуги кривой 383, плоской фигуры 396, тела 398

Интеграл, интеграла знак 332, 368

— вероятности (Гаусса) таблицы 108—109

— двойной 388

— дифференциального уравнения (общий, частный, особый) 400

— кратный 388—399, вычисление 390, приложения 396—399

— криволинейный 476

— неопределенный 332—367, таблицы см. Интегралов таблицы

— несобственный 371

— определенный 368—387, таблицы см. Интегралов таблицы

— особый 401

— первый (системы дифференциальных уравнений) 412

— по поверхности 480

— Пуассона 439

— тройной 389

— Фурье 496

— эллиптический 334, таблицы и формулы 105—107

Интегралов таблицы:

— — основных 335

— — от рациональных функций:

содержащих $ax + b$ 341

— $ax^2 + bx + c$ 342

— другие выражения 343

— от иррациональных функций:

содержащих $\sqrt{ax + b}$ 345

— $\sqrt{ax + b}$ и $\sqrt{fx + g}$ 346

— $\sqrt{a^2 - x^2}$ 347

— $\sqrt{x^2 + a^2}$ 348

— $\sqrt{x^2 - a^2}$ 349

— $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ 350

— другие выражения 352

Интегралов таблицы от тригонометрических функций:
 содержащих синус 354
 " косинус 356
 " синус и косинус 358
 " тангенс и котангенс 359
 — от гиперболических функций 360
 — от других трансценд. функций:
 логарифмических 363
 обратных тригонометрических и гиперболических 364
 показательных 362
 — встречающихся в теории колебаний 365
 — определенных 385
 Интегральная кривая 401
 — поверхность 430
 Интегральное исчисление 332—399, приложения 378—385, 396—399
 Интегральные теоремы (векторного анализа) 488
 Интегральный косинус 350
 — логарифм 333, 363
 — синус 333, 355
 Интеграф 377
 Интеграции переменная 369
 Интегрирование 332, см. также Интегралов таблицы
 — графическое 376, дифференциальных уравнений 409
 — дифференциальных уравнений 400—439
 — по частям 334, 374
 — приближенное 375
 — численное (дифференциальных уравнений) 410
 Интегрирования постоянная 332
 Интегрирующий множитель 403
 Интенсивность источника 490
 Интерполирующая функция 518
 Интерполяционная поправка 16
 Интерполяция 16
 — квадратичная 17, таблица 98

Интерполяция линейная 16, 175
 — параболическая 518—523
 — тригонометрическая 502
 Интерпретация геометрическая комплексных чисел 440
 Иррациональная функция 289, графики 116, интегралы см.
 Интегралов таблицы
 Иррациональность в знаменателе, уничтожение 160—161
 Иррациональные выражения 155, 160
 — уравнения 166
 Искусственная форма логарифма (отрицательного) 164
 Источники поля 490
 Исчисление векторное 460—491
 — дифференциальное 309—331
 — интегральное 332—399
 Итерации метод 175

K

Каноническая форма (уравнений в частных производных) 431
 — система линейных уравнений 179
 Каноническое уравнение: эллипса 228, гиперболы 230, параболы 233
 — — поверхностей второго порядка 250
 Кардана формула 168
 Кардиоида 131, 135
 Касательная к плоской кривой 256, построение 320
 — к пространственной кривой 273—275
 — к эллипсу 229, к гиперболе 231, к параболе 233
 — плоскость 279, 280
 Касательной отрезок 258
 Кассини овалы 132
 Катет 189
 Квадрат 190
 Квадратичная интерполяция 17, таблицы 98
 — форма первая 282, вторая 285
 — функция 289, график („квадратный трехчлен“) 110, конформное отображение 459

- Квадратическая средняя ошибка 510
 Квадратическое среднее 184
 Квадратное уравнение 167
 Квадратный корень; таблицы 24—46, график функции 116, конформное отображение 459
 — трехчлен, график 110
 Квадратов наименьших метод 513, приращение по методу наименьших квадратов 516
 Квадраты чисел, таблицы 24—46, целых чисел 20—22
 Квазилинейное уравнение 429
 Клеро уравнение 406
 Клион 197
 Клотоида 139
 Колебание гармоническое 208
 — затухающее 122, 453
 — струны 434
 — (интегралы, встречающиеся в теории колебаний) 365
 Коллинеарные векторы 460
 Кольцо круговое 193
 Компланарные векторы 460
 Комплексная форма: оператора растяжения и поворота 447, уравнения кривой 451
 — функция от действительной переменной 451
 Комплексной переменной функция 447—450, 454—459
 Комплексные числа 440—459
 Компоненты вектора 462
 Конечное приращение (теорема Лагранжа) 324
 — уравнение 311
 Конечные величины 298
 — ряды 183
 Конечный разрыв 300
 Коническая поверхность 159
 — точка поверхности 282
 Конические сечения 234
 Консервативное поле 478
 Консерватизм углов 456
 Константа 289, таблицы 18—19
 Косус 199, уравнение 251
 — прямой круглый 200
 Конформное отображение 456, таблица 457—459
 Конхоида, конхоида Никомеда 129
 Координатные линии 238, на поверхности 279
 — поверхности 238
 Координаты точки: на плоскости 220, в пространстве 235
 — вектора 460
 — векторного поля 472
 — гауссовы на поверхности 279
 — декартовы прямоугольные 220, 235, преобразование 221, 239
 — полярные 221
 — сферические 238
 — цилиндрические 238
 Корень, преобразования корней 160
 — извлечение из комплексного числа 444
 — квадратный: таблицы 24—46, график 116, конформное отображение 459
 — кубический, таблицы 24—46
 — многочлена 171, уравнения 165
 Корню спираль 139
 Косеканс 203
 — гиперболический 216
 Косинус 203, таблицы 58—60, 64—71, график 123
 — гиперболический 215, таблицы 64—71, график 125
 — интегральный 356
 — направляющий 239
 Косинусов теорема 210
 Косинусоида 123
 Косоугольный треугольник, решение 210—211
 Котангенс 203, таблицы 61—63, график 123
 — гиперболический 216, график 126
 Коши задача (об интегральных поверхностях) 430
 — признаки сходимости 304
 — Римана условия 455
 — теорема 324
 — теорема существования 401
 Коэффициенты биномиальные 187

Коэффициенты неопределенные, метод 158, 419
 — постоянные, уравнения с пост. к-тами 414, 415—424
 — угловые 224
 — Фурье 492
 Кратные корни уравнения 171
 — интегралы 388—399
 — точки 265
 Кратчайшее расстояние между прямыми 245
 Кривая, общее исследование по уравнению 268
 — интегральная 401
 — мнимая 223
 — плоская 255—272
 — пространственная 272—278
 — уравнение в векторной форме 467, в комплексной форме 451—453
 — см. также названия отдельных кривых
 Кривизна плоской кривой 259
 — линий на поверхности 283
 — поверхности: средняя, гауссова (полная) 286
 — пространственной кривой 276
 Кривизны круг 261
 — линии 285
 — радиус: плоской кривой 259, пространственной кривой 276, главные радиусы кривизны 284
 — центр 261
 Криволинейная трапеция: площадь 380, центр тяжести 384
 Криволинейные координаты (на поверхности) 279
 Криволинейный интеграл 476
 — сектор, площадь 380
 Круг, окружность 191, уравнение 227
 — большой 200, 214
 — кривизны 261
 — сходимости 448
 Круга площадь 193, таблицы 84—87
 Круглые тела 198—202
 Круглый конус прямой 200, уравнение 251, усеченный 200

Круглый цилиндр прямой и усеченный 199
 Круговая точка 286
 Круговое кольцо 193
 — поле 471
 Круговые функции 212, графики 121—125
 Кручение 277
 Куб 196, 198
 Кубическая парабола 110
 Кубические корни, таблицы 24—46
 Кубическое уравнение 168
 Кубы чисел, таблицы 24—46, целых чисел 20—22
 Кулона поле 471, 490
 Кусочно-непрерывная функция 300

Л

Лагранжа метод (относительный максимум и минимум) 327
 — теорема 324
 — тождество 465
 — формула (параболической интерполяции) 518
 Лапласа оператор 323, 432, 487
 — теорема 507
 — уравнение 490
 — функции 490
 Латинский алфавит 15
 Левая система координат 235
 Лежандра уравнение, полиномы 428, таблица 104
 Лейбница формула 318
 Лейбница-Ньютона теорема 371
 Лемниската Бернулли 133
 Линейка счетная 148
 Линейная комбинация: векторов 462, строк определителя 178
 — интерполяция 16, 175
 — функция 289, график 110, конформное отображение 457
 Линейно-независимые решения дифференц. уравнения 414
 Линейное уравнение алгебраическое 167, система 179

Линейное уравнение дифференциальное: 1-го порядка 404, 2-го порядка 424, высших порядков 414, с постоянными коэффициентами 415, системы 420, в частных производных 429—439

Линейный интеграл 476

— элемент поверхности 282

Линии вихревые 485

— геодезические 287, на сфере 214

— координатные 238, 279

— кривизны 285

— тока 473

— уровня 469

Линия, уравнение линии 223, в пространстве 242, см. также: Прямая линия, Кривая, см. также названия отдельных кривых линий

Липшица условие 401, 411

Лишние корни уравнения 166

Логарифм, определение и свойства, системы 162—163

— интегральный 333, 363

— десятичный 163, таблицы мантисс 51—53, таблицы антилогарифмов 54—56

— натуральный 163, таблицы 76—79, комплексного переменного 449, конформное отображение 459

Логарифмика 118

Логарифмирование 163

Логарифмическая (счетная) линейка 148

— производная 315

— спираль 138, уравнение в комплексной форме 453

— функция 290, график 118, таблица интегралов 363

— шкала 148

Логарифмический декремент затухания 122

Логарифмическое выражение 155

— уравнение 173

Локальные свойства 255

— элементы кривой 255

Локоны Анъези 128

Лопиталия правило 296

М

Мажорантный ряд 303

Маклорена ряд 328

Максимум и минимум 325—328

Малая ось эллипса 228

Малые, бесконечно-малые 298

Мантисса логарифма 163, таблицы 51—53

Масса тела 398

Математическое ожидание 507

Математической физики уравнения 432

Медиана треугольника 188, 212

Меньше теорема 284

Мера точности 510

Меридианы (на сфере) 279

Метод см. соогв. название

Метрика поверхности 283

Механика, приложения интегрального исчисления 382

Минимум и максимум 325—328

Минор определителя 177

Минорантный ряд 303

Мнимая единица 440

— кривая 223

— ось: гиперболы 230, комплексной плоскости 441

— поверхность 2-го порядка 253—254

— часть комплексного числа 440

Мнимого аргумента бесселевы функции 427

Многогранники 195—198

Многогранный угол 194

Многозначная функция 288

Многоугольник 191, площадь 223

— правильный 191—192

Многочлен, действия, разложение на множители 155

— как функция 289, графики 110—112, корень 171

Множитель, разложение на множители многочлена 155, оператора 416

— интегрирующий 403

— нормирующий 225, 243

Модуль вектора 460

— комплексного числа 441

Модуль перевода системы логарифмов 163
 Мольвейде формулы 210
 Момент инерции: дуги кривой 383, плоской фигуры 396, тела 398
 Моногенная функция 455
 Монотонные функции 291
 Муавра формула 217, 444

Н

n -ой степени уравнения 171
 Набла (оператор Гамильтона) ∇) 486
 Наблюдений обработка 506—529
 Наибольшее и наименьшее значение 325
 Наименьших квадратов метод 513, приближение по методу 516
 Наложение поверхностей при изгибании 283
 Наложения теорема 414, 423
 Направлений поле 401
 Направляющая: конической поверхности 199, цилиндрической поверхности 198
 Направляющие косинусы 239
 Натуральная логарифмика 118
 — показательная кривая 118
 Натуральные логарифмы 163, таблицы 76—79, комплексной переменной 44^а, конформное отображение 459
 Начало координат 220
 Начальные условия 400, 432
 Независимость функций 292
 Нейля парабола 127
 Неоднородные линейные уравнения, система 180, дифференциальные уравнения 414, 415—420, системы дифференциальных уравнений 422—424
 Неопределенности, раскрытие 296—298
 Неопределенные интегралы 332—367, см. также Интегралов таблицы

Неопределенные коэффициенты, метод 158, 419
 Непера правило 215
 Непериодическая функция (разложение в ряд Фурье) 495
 Неперовы логарифмы 163
 Неполная система уравнений 180
 — форма логарифма (отрицательного) 164
 Неправильная дробь (алгебраическая) 157
 Непрерывность функций 299—302
 Непрерывные случайные величины 508
 — функции 299
 Непрерывный спектр разложения в ряд 497
 Неравномерная сходимости рядов 307
 Несобственные интегралы 371
 Несократимая дробь (алгебраическая) 157
 Нечетные функции 291
 Неэлементарные функции 290
 Неявное задание функции 289, производная неявной функции 319
 Никомеда конхоида 129
 Норма комплексного числа 442
 Нормаль к плоской кривой 256
 — главная (к пространственной кривой) 273, 275—276
 — к поверхности 280, 281
 —, отрезок нормали 258
 Нормальная плоскость 273—275
 — производная 491
 — система дифференциальных уравнений 420
 Нормальное решение дифференциального уравнения 416
 — уравнение прямой 225, плоскости 242
 Нормальные уравнения (в мин. квадратов) 514
 Нормальный вид иррационального выражения 160
 — закон распределения 509, кривая 118
 Нормирующий множитель 225, 243

- Нуль-вектор 400
- Ньютона бином 187
- метод приближенного решения уравнений 175
- поле 471, 490
- потенциал 491
- формулы интерполяционные 520
- Лейбница теорема 371

О

- Обелиск 197
- Обильность источника поля 490
- Область задания (существования) функции 288
- сходимости ряда 306
- Обозначения математические 11—14
- Обработка наблюдений 506—529
- Образующая конической поверхности 199, цилиндрической поверхности 198
- Обратная пропорциональность, график 112
- функция, производная 319
- Обратные величины, таблицы 47—49
- гиперболические функции 218, графики 126, комплексной переменной 450, таблицы интегралов 365
- тригонометрические функции 212, 290, графики 124, комплексной переменной 450, таблицы интегралов 365
- Общий интеграл дифференциального уравнения 400, 401, 412
- Объем тела 396, 398, 389, вращения 381, см. также названия отдельных тел
- Объема элемент 392—394
- Объемная производная 475—483
- Объемное дифференцирование 483
- Обыкновенные дифференциальные уравнения 400, 401—429
- Овалы Кассини 132
- Огибающая семейства кривых 271
- Ограниченные величины 298
- Однозначная функция 288
- Однополостный гиперболоид 250
- Однородная система линейных уравнений 180
- функция 292
- Однородное дифференциальное уравнение 403, линейное 414
- Ожидание математическое 507
- Округление 142
- Окружность 191, длина 193, таблицы длины 80—83, описанная и вписанная (радиус) 212, уравнение 227, уравнение в комплексной форме 452
- Октаэдр 198
- Омбилическая точка 286
- Оператор Гамильтона (набла, ∇) 486
- дифференцирования 415
- Лапласа 323, 432, 487
- , обратный дифференциальному 416
- растяжения и поворота 209, 445
- Операторная запись дифференциального уравнения 415
- Операторный метод решения дифференциальных уравнений 415, системы 423
- Описанной окружности радиус 212
- Определенные интегралы 368—387, таблицы 385
- Определитель (детерминант) 176
- Вронского 414
- преобразования 240
- Определителя элемент, член, минор, адъюнкта 176—177
- Определяющее уравнение 425
- Отображение конформное 456, таблица 457—459
- Ордината 221, 238
- Орт 460, 472
- Ортогональные системы функций 516
- Ортоцентр треугольника 189
- Осевое поле 469
- Основание системы логарифмов 163
- Основная теорема алгебры 171

- Основные интегралы, таблица 335
 Особые точки кривой 264—266, поверхности 282, дифференциального уравнения 406, функции комплексного переменного 455
 Особый интеграл, особое решение дифференциального уравнения 400, 402
 Остаточный член ряда 328—329
 Ось абсцисс 220, 235, ординат, аппликат 238
 — времени 209
 — действительная, мнимая гиперболы 230, комплексной плоскости 441
 — поля скалярного 469, векторного 471
 — полярная 221
 — эллипса 228, гиперболы 230, параболы 233
 Относительная погрешность (предельная) 141
 Относительный максимум и минимум 327
 Отношение, деление отрезка в данном отношении 222, 240
 Отрезок, деление в данном отношении 222, 240
 — касательной, нормали 253
 — середина 222, 241
 — уравнение прямой в отрезках 224, плоскости в отрезках 243
 — цилиндра 199
 Оценка корней уравнения 174
 — остатка ряда 305
 Ошибка простая, средняя, средняя квадратическая, вероятная 510, случайная 508
 Ошибок теории 508—514
- П**
- Парабол формула (Сампсона) 375
 Парабола 233, график функции 110, 116
 Парабола кубическая 110
 — Нейля (полукубическая) 127
 — n -го порядка 112
 Параболическая интерполяция 518
 — точка 286
 Параболический цилиндр 252
 Параболического типа уравнение 431
 Параболоид эллиптический, гиперболический 251
 Параллелепипед 195—196, объемом (векторная формула) 464
 Параллели (на сфере) 279
 Параллелограмм 189, площадь (векторная формула) 464
 Параллельность прямых 227, прямых и плоскостей в пространстве 249
 Параллельный перенос 221, 239
 Параметр 154
 —, дифференцирование интеграла по параметру 374
 —, параметрическое задание функции 289, ее дифференцирование 319
 — фокальный эллипса 228, гиперболы 230, параболы 233
 Парсеваля равенство 493
 Паскаля треугольник 187
 — улитка 130, 137
 Первая квадратичная форма 282
 Первого порядка дифференциальные уравнения 401, в частных производных 429
 Первой степени уравнение 167
 Первый интеграл (системы дифференциальных уравнений) 412
 Перегиб точки 262
 Переменная интеграции 369
 Переменной комплексной функции 447—451, 454—467
 Переменных замена 321
 — разделение 402, в уравнениях математической физики 433

- Пересечение, точка пересечения прямых 225, 246
 Перестановки, число перестановок 186
 Периметр эллипса 230
 Период 208, 292
 Периодические функции 292
 Перпендикулярность прямых 227, прямых и плоскостей в пространстве 249
 π („пи“) 193, таблицы величин, связанных с π 18—19
 Пикара метод последовательных приближений 408
 Пирамида 196
 Пифагора теорема 189
 Планиметр 377
 Планиметрия 188—193
 Плоские фигуры 188—193
 Плоское поле: скалярное 468, векторное 471
 Плоскостей пучок 243
 Плоскости преобразование 454
 Плоскость, уравнение 242, векторное уравнение 466
 — гауссова (комплексная) 440
 — касательная 279, 281
 — нормальная соприкасающаяся, спрямляющая 273—275
 Плотность вероятности 508
 — спектра 497
 Площади элемент 390, 392
 Площадки вектор 480
 Площадь: плоской фигуры 380, 478, поверхности 396, см. также названия отдельных фигур
 Поверхность 278—287
 — второго порядка 250
 — вращения 242, вычисление при помощи интеграла 381
 — коническая 199
 —, интеграл по поверхности 480
 — интегральная 430
 — координатная 238
 — уровня 469
 — цилиндрическая 198
 Поверхности линейный элемент 282
 — уравнение 241
 Поворот осей координат 221, 239
 Поворота и растяжения оператор 445
 Погрешность 141
 — интерполяции 522
 — функции 143
 Подинтегральная функция 332, 368
 Подинтегральное выражение 332, 368
 Подкасательная 258
 Поднормаль 258
 Подобные треугольники 189
 Подстановки правило при интегрировании 334, 373
 Показатель, обобщение понятия 161
 Показательная кривая 118
 — форма комплексного числа 442, 449
 — функция 290, таблицы 64—75, график 118, таблица интегралов 362, комплексной переменной 449
 Показательные выражения 155, 162
 — уравнения 173
 Поле, теория поля 468—491
 — безвихревое 478, 489
 — векторное 470
 — консервативное (потенциальное) 478
 — направлений 401
 — притяжения (Ньютона) 471, 490
 — скалярное 468
 — соленоидальное 489
 Полином 289
 Полиномы Лежандра 428, таблицы 104
 Полная кривизна поверхности 286
 — система уравнений 180
 Полные дифференциалы 311, уравнения 403
 Положительные корни уравнения 172
 Полукубическая парабола (Нейля) 127
 Полюс 221
 Полярная касательная, нормаль, подкасательная, поднормаль 258

- Полярная ось 221
 Полярное расстояние 238
 Полярные координаты 221,
 в пространстве 238
 Полярный угол 221
 Понижение порядка дифферен-
 циального уравнения 413,
 416
 Поправка интерполяционная
 16
 Порядок бесконечно-малых
 299
 — дифференциального уравне-
 ния 400
 — кривой 223
 — разности 519
 Последовательности предел
 292
 Последовательных приближе-
 ний метод 408
 Постоянная интегрирования
 332
 — произвольная 400
 — Эйлера 295
 Постоянные величины, таб-
 лицы 18—19
 — коэффициенты (уравнения с
 постоянными коэффициен-
 тами) 414, 415—424
 — метод вариации постоян-
 ных 423
 Потенциал 478—479
 — безвихревого поля 489
 — векторный 489
 — Ньютона 491
 Потенциальная функция 478
 Потенциальное поле 478
 Потенцирование 163
 Поток скалярного, векторного
 поля 480
 Правая система координат 235
 Правило см. соотв. название
 Правильная дробь (алгебраи-
 ческая) 157
 — пирамида 196
 — призма 195
 — функция 455
 Правильные многоугольники
 191—192
 — многогранники 197—198
 Пределы 292—298
 бесконечные при интегри-
 ровании 372
- Пределы интеграла 368
 Предельная абсолютная по-
 грешность, относительная
 погрешность 141
 Прекращения точки 264, 265
 Преобразование координат: на
 плоскости 221, в простран-
 стве 239
 — плоскости 454
 — тождественное 154
 Преобразования определитель
 240
 Приближение в отдельных
 точках 517
 — последовательное, метод
 408
 — равномерное 515, по способу
 наименьших квадратов 516
 Приближенные вычисления
 141—154
 — изображения функциональ-
 ных зависимостей 515
 — методы интегрирования 375,
 дифференциальных уравне-
 ний 408
 — — решения уравнений 174
 — формулы 145—147
 — числа, действия над ними
 142
 Призма 195
 Признаки сходимости рядов
 303—305
 Приращение конечное, тео-
 рема Лагранжа 324
 Притяжения поле (Ньютона)
 471, 490
 Прогрессии 182
 Произведение бесконечное
 290
 — векторное 462, двойное 464
 — скаляра на вектор 461
 — скалярное 462
 — смешанное 464
 Производная 309, таблицы
 производных 314—318
 — аналитической функции
 455
 — вектор-функции 467, 483
 — высшего порядка 312
 — логарифмическая 315
 — невязной функции 319
 — нормальная 491
 — обратной функции 319

Производная объемная (пространственная) 475, 483
 — частная 310, высших порядков 312
 Производные пропорции 160
 Произвольные постоянные, функции 400
 Пропорции, преобразование 160
 Пропорциональное среднее 184
 Пропорциональные части, таблицы 96—97
 Простейшие (простые, элементарные) дроби 157, некоторые случаи 343—344, разложение оператора 416
 Пространственная производная 483
 Пространственные кривые 272—278
 Противоположные векторы 460
 Противоречивая система уравнений 180
 Прямая линия, уравнение и задачи: на плоскости 110, 224, в пространстве 244, векторное уравнение 466, уравнение в комплексной форме 452
 — призма 195
 Прямых пучок 226
 Прямолинейные образующие 252
 Прямоугольник 190
 Прямоугольников формула (приближенного интегрирования) 375
 Прямоугольные декартовы координаты 220, 235
 Прямоугольный параллелепипед 196
 — треугольник 189, решение 210
 Пуассона интеграл 439
 — уравнение 491
 Путь 382
 Пучок плоскостей 243
 — прямых 226

Р

Работа 382, 476
 Равенство векторов 460

Равенство комплексных чисел 441
 — Парсеваля 493
 Равнобокая трапеция 190
 Равномерная сходимост рядов 307
 Равномерное приближение 515
 Равносильные бесконечно малые 299
 Равносторонняя гипербола 112, 232
 Радианы, радианное измерение углов 202, таблицы перевода радианов в градусы 57
 Радиус вписанной, описанной окружности 212
 — кривизны: плоской кривой 259, пространственной кривой 276, главный 284, эллипса 229, гиперболы 232, параболы 234
 — сходимости 308, в комплексной области 448
 Радиус-вектор 221, 238, 461
 Разбиение интеграла 370
 Развертка 270, круга 138
 Разделение переменных 402, в уравнениях математической физики 433
 Разложение в ряд, см. Ряды
 — многочлена на множители 155
 Разложения теорема 414
 Размещения, число размещений 186
 Разность первая, вторая и т. д. 519
 — прогрессии 182
 Разрыв функции 300, интегрирование разрывной функции 371
 Разрыва точки 299, 469, линии и поверхности 469
 Распадение кривой 2-го порядка 234
 Распределения закон 508, нормальный закон 509
 Распространения тепла уравнение 432
 Расстояние: между двумя точками 222, 240, от точки до

прямой 225, 245, от точки до плоскости 245, кратчайшее между двумя прямыми 245
 Расстояние полярное 238
 Растяжения и поворота операторы 445
 Расходимость интеграла 372
 Расходящийся ряд 302
 Расхождение 483
 Рациональная функция 289, интегрирование 337, таблицы интегралов 341—344
 Рациональные выражения (целые, дробные) 155
 „Regula falsi“ (линейная интерполяция) 175
 Регулярная функция 455
 Резольвента системы уравнений 182
 Решение уравнения 165, приближенное 174
 — дифференциального уравнения 400
 Риккати уравнение 405
 Римана метод решения дифференциальных уравнений 436
 — функция 436
 Римана-Коши условия 455
 „Риц“, система счетной линейки 148
 Ролья теорема 323
 Ромб 190
 Ротация, ротор 484
 Ряд Маклорена 328, таблица разложений 330—331
 — Тэйлора 328, 329
 Ряды степенные 308, применения к решению дифференциальных уравнений 409, 425
 — функциональные 306
 — числовые 302, таблицы 306, с комплексными членами 447

С

С, постоянная Эйлера 295
 Самоприкосновения точки 264, 265
 Саррюса правило 179
 Свободные векторы 460
 Связанные векторы 460

Сегмент круга 193, таблицы 88—94
 — шаровой 201
 Седло, особая точка дифференциального уравнения 407
 Седлообразная точка 286
 Секанс 203, график 124
 — гиперболический 216
 Секансоида 124
 Сектор криволинейный, площадь 380
 — круга 193
 — шаровой 201
 Семейство кривых 271
 Середина отрезка 222, 241
 Серре-Френе формулы 218
 Сетка изотермическая 457
 Сечение золотое 184
 Сечения конические 234
 Симметрия I, II, III, IV рода 493—494
 Симпсона формула 375
 Синтез гармонический 505
 Синус 203, таблицы 58—60, 64—71, график 122
 — гиперболический 215, таблицы 64—71, график 125
 — интегральный 333, 355
 Синусов теорема 210
 Синусоида 122, 208
 Синусоидальные величины 208
 Системы координат: на плоскости 220, в пространстве 225
 — логарифмов 163
 — уравнений: алгебраических 165, 179, дифференциальных 411, 420
 Скаляр, скалярная величина 460
 Скалярное поле 468
 — умножение, произведение 462
 Скалярный поток 480
 Скользящие векторы 460
 Сложение векторов 461;
 — вероятностей 506
 — комплексных чисел 443
 Сложные функции 290
 Слой шаровой 201
 Случайные величины, ошибки 508

- Смешанное произведение 464
 Событие: вероятность 506, частота 507
 Соединения 186
 Сокращенного умножения формулы 156
 Соленоидальное поле 489
 Сопровождающий трехгранник 273
 Сопряженные гармонические функции 455
 — гиперболы 231
 — диаметры эллипса 229, гиперболы 232
 — комплексные числа 442
 — корни уравнения 171
 Сочетания, число сочетаний 186
 Спектр разложения в ряд 497
 Специальная правая часть (линейного дифференциального уравнения) 418
 Специальные функции, таблицы 99—109
 Спирали 137—139
 Спираль логарифмическая, уравнение в комплексной форме 453
 Сплюснутый эллипсоид вращения 250
 Спрямяющая плоскость 273
 Среднее арифметическое 183
 — взвешенное 512
 — геометрическое (пропорциональное) 184
 — значение, теоремы 370
 — квадратическое 184
 Средних метод (подбора эмпирических формул) 524
 Средняя величина 183—184
 — кривизна поверхности 286
 — линия трапеции 190
 — ошибка, средняя квадратическая ошибка 510
 Стандарт 510
 Степени, преобразования 160
 — целых чисел, таблицы 20—22, 50
 Степенная функция, графики 116, 117
 Степенные ряды 308, 328—331, с комплексными членами 448
 Степень, возведение комплексных чисел в степень 444
 — однородности 292
 — уравнения 165
 Стереометрия 194—202
 Стирлинга формула 184, ин-терполяционная 520
 Стокса теорема 488
 Стрела сегмента круга 193, таблицы 88—94
 Строфоиды 129
 Струны колебания 434
 Ступень таблицы 519
 Сумма ряда 302
 — векторов 461
 Существование предела 293
 Существования теоремы: определенного интеграла 369, двойного интеграла 383, решения дифференциального уравнения 1-го порядка 401, n -го порядка 411
 Сфера 200, уравнение 250
 Сферическая тригонометрия 214—215
 Сферическое поле: скалярное 468, векторное 471
 Сферические координаты 238, поля 472
 Сферический избыток (эксцесс) 214
 — треугольник 214
 Схемы для гармонического анализа 502—504
 Сходимости круг 448
 — радиус 308, 448
 — ряда область 307, признаки 303—305
 Сходимость интеграла 372
 — ряда 302, абсолютная, относительная 305, равномерная, неравномерная 307, Фурье 493, с комплексными членами 448
 Счетная линейка 148
- Т
- Таблицы 16—109, см. также соответствующие названия
 Тангенс 203, таблицы 61—71, график 123

- Тангенс гиперболический 216, таблицы 64—71, график 126
 Тангенсов теорема 210
 Тангенсоида 123
 Телеграфное уравнение 432
 Телесный угол 195
 Теорема, см. соотв. название
 Теория вероятностей 506—508
 — ошибок 509—515
 — поля 468—491
 Тепла распространения уравнение 432
 Тетраэдр 196, 198, объем (векторная формула) 241
 Тожественное преобразование 154
 Тожество 154
 Тока линии в векторном поле 473
 Тор 201
 Точечные источники поля 490
 Точки особые: узловые, изолированные, возврата 1-го и 2-го рода, самоприкосновения, асимптотические 264—266, дифференциального уравнения 406, функции комплексной переменной 455
 — перегиба 262
 — поверхности: эллиптические, круговые (омбилические), гиперболические, параболические 286
 — разрыва 299
 — специального типа 262—266
 — характеристические 271
 Точки функция 468
 Точности мера 510
 Трактриса 140
 Трансцендентные кривые 265
 — уравнения 172
 — функции 289, комплексной переменной 447, интегралов таблицы 354—365
 Трапеций формула (приближенного интегрирования) 375
 Трапеция 190
 — криволинейная: площадь 380, центр тяжести 384
 Третьей степени уравнение 168
 Треугольник 188—189, площадь (в аналитич. геометрии) 223, решение (в тригонометрии) 210
 — Паскаля 187
 — сферический 214
 Трехгранник сопровождающий 273
 Трехгранный угол 194
 Трехкратный интеграл 389
 Трехчлен квадратный, график 110
 Тригонометрическая интерполяция 502
 — форма комплексного числа 441
 Тригонометрические уравнения 174
 — функции 202, 290, таблицы 58—71, графики 122—125, таблицы интегралов 353—360, комплексной переменной 449
 — обратные функции 212, таблицы интегралов 363, комплексной переменной 450
 Тригонометрия 202—219, прямолинейная 202—213, гиперболическая 215, сферическая 214
 Тройной интеграл 389—399
 Трохоиды 134
 Труба цилиндрическая 199
 Тэйлора ряд 328, для вектор-функций 468
 — теорема, формула 324
 Тяжести центр: дуги 384, криволинейной трапеции 384, плоской фигуры 384, 396, тела 398, системы материальных точек 222, 241
- у
- Убывающая прогрессия 182, 183, бесконечная 183
 Углов консерватизм 456
 Угловой коэффициент 224
 Углы, радианное измерение 202
 — в окружности 191
 — двугранные 194

- Углы многогранные 194
 — полярные 221
 — пространственные 194—195
 — телесные 195
 — трехгранные 194
 Угол между: векторами 464,
 двумя кривыми 259, кривы-
 ми на поверхности 283,
 двумя прямыми 226, 248,
 двумя плоскостями 248, пря-
 мой и плоскостью 249
 Удлиненная циклоида 134
 — эпи- и гипоциклоида 136
 Узел—особая точка дифферен-
 циального уравнения 406
 Узловые точки 264, 265
 Укороченная циклоида 134
 — эпи- и гипоциклоида 136
 Улитка Паскаля 130, 137
 Умножение вероятностей 506
 —векторное, скалярное 462
 —комплексных чисел 443
 —сокращенное формулы, 156
 Уничтожение иррациональ-
 ности в знаменателе 160
 Уравнение 165—182, см. так-
 же соответствующее на-
 звание
 Уровня поверхности, линии
 469
 Усеченная пирамида 197
 —призма 195
 Усеченный конус 200
 —круглый цилиндр 199
 Условие Липшица 401
 Условие Дирихле 493
 —Коши-Римана 455
 —начальные и граничные
 400, 432
 Условная сходимость рядов
 305, с комплексными члена-
 ми 448
 Условные уравнения 513
 Устранимый разрыв 300
- Ф
- Фаза начальная 123, 208
 Факториал 184, таблица 50
 Фигуры плоские 188
 Физики математической урав-
 нения 432
 Физические приложения ин-
 тегрального исчисления 382
- Фокальное свойство эллипса
 228, гиперболы 230, пара-
 болы 233
 Фокальный параметр эллипса
 228, гиперболы 230, пара-
 болы 233
 Фокусы эллипса 228, гипер-
 болы 230, параболы 233,
 кривой 2-го порядка 235
 —, особые точки дифферен-
 циального уравнения 407
 Форма: первая квадратичная
 282, вторая квадратичная
 285, см. также соотв. на-
 звание
 Формула, см. соответствующее
 название
 Френе-Серре формулы 278
 Функция, определение 288, см.
 соответствующие названия
 Фурье интеграл 496
 — коэффициенты 492
 — ряды 491—505
- Х
- Характеристика логарифма
 163
 —, кривая 430, 431
 — семейства кривых 271
 Характеристическая точка 271
 Характеристическое уравне-
 ние 406, 410, 415
 Хорда круга 193, таблица
 88—94
- Ц
- Целая часть дроби (алгебраи-
 ческой) 157
 — функция 289, интегриро-
 вание 337
 Целые рациональные выра-
 жения 154, 155
 Центр—особая точка дифе-
 ренциального уравнения 408
 — вписанной, описанной ок-
 ружности 189
 — гиперболы 230
 — кривизны 261
 — поверхности 250
 — поля; скалярного 468, век-
 торного 471

Центр тяжести, см. Тяжести
 центр
 — эллипса 228
 Центральная поверхность
 250
 Центральное поле: скалярное
 468, векторное 471, градиент
 центрального поля 475
 Цепная линия 125, 139
 „Цепное правило“ 315
 Циклоида 133
 — удлинённая, укороченная
 134
 Цилиндр 198, круглый 199,
 эллиптический, гиперболический,
 параболический 252
 Цилиндра отрезок 199
 Цилиндрическая поверхность
 198, уравнение 241
 — труба 199
 Цилиндрические координаты
 238, поля 472
 — функции 426
 Цилиндрическое поле: ска-
 лярное 469, векторное 471
 — тело, объем 389
 Циркуляция 478
 Циссоида Диоклеса 128

Ч

Части, интегрирование по ча-
 стям 334, 374
 — пропорциональные, таб-
 лицы 96—97
 — комплексного числа; дей-
 ствительная и мнимая
 440
 Частная производная 310,
 уравнения в частных произ-
 водных 400, 429—439
 Частное решение дифферен-
 циального уравнения 400
 Частота 123, колебания 208,
 события 507
 Четвертой степени уравне-
 ние 170
 Четные функции 291
 Четырёхугольник 190
 Чисел больших закон 507
 Числа комплексные 440—459

Численное интегрирование
 дифференциальных уравне-
 ний 410
 Числовые ряды: конечные 183,
 бесконечные 302—306
 Чисто мнимые числа 440
 Член определителя 177
 — прогрессии 182
 — ряда 302

Ш

Шаблоны (для гармонического
 анализа) 502
 Шаг таблицы 519
 Шар, сфера 200, уравнение
 250
 Шаровой сектор, сегмент,
 слой 201
 Шаровые функции 428, таб-
 лицы 104
 Широта (на сфере) 279
 Шкала логарифмическая
 148
 Шкалы счетной линейки
 149
 Штермера метод 410
 Штурма теорема 172

Э

Эвольвента 271, круга 138
 Эволюта 270
 Эйлера постоянная 295
 — теорема (о многогранниках)
 197
 — формула: в комплексных
 числах 449, в теории поверх-
 ностей 284, в рядах Фурье
 492
 Экстремум 325
 Эксцентриситет: эллипса 228,
 гипербола 230, парабола
 233
 Эксцесс сферический 214
 Элемент линейной поверх-
 ности 282
 — объема 392, 393, 394
 — определителя 282
 — площади 390, 392
 Элементарные (простейшие)
 дроби 157, разложение опе-
 ратора 416

Элементарные функции 289, таблицы 18—98, графики 110—127, таблицы производных 316—317 — трансцендентные функция 289, комплексной переменной 447 Эллипс 228—230, 216, уравнение в комплексной форме 453, периметр 230, площадь 229 Эллипсоид, эллипсоид вращения 250 Эллиптическая точка 286	Эллиптические интегралы 107, 134, таблицы 104—107 Эллиптический параболоид 250 — цилиндр 252 Эллиптического типа уравнение 431 Эмпирические формулы 514—528, подбор 523 Эпитрохоида 136 Эпициклоида 135 Я Явное задание функции 289 Якобиан 181; 292



LEM 270