

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}$$



MATHEMATICAL MODELLING

Edited by

J. G. ANDREWS

CEGB, Marchwood Engineering Laboratories
and Department of Mathematics, University of Southampton
and

R. R. McLONE

Department of Mathematics, University of Southampton

BUTTERWORTHS

London — Boston

Sydney — Wellington — Durban — Toronto

1976

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Редакторы
Дж. ЭНДРЮС,
Р. МАК-ЛОУН

Перевод с английского
под редакцией
Ю. П. ГУПАЛО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1979

Книга занимает особое положение в современной научной литературе. Она не является систематическим руководством по математическому моделированию, но призвана дать представление о том, как в наши дни делается математическая обработка реальных прикладных задач. Отдельные главы посвящены конкретным математическим моделям, относящимся к таким областям, как управление движением, истечение жидкости, сверление отверстий лазером, анализ напряжений, развитие популяций, планирование и т. д. Каждая глава заканчивается списком задач для самостоятельной работы.

Широта охвата материала и разнообразие примеров делают книгу полезной для начинающих исследователей по прикладной математике и для научных работников различных специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

1702070000

М $\frac{20204-030}{041 (01)-79}$ 30-79

Chapters 1—12 and 14—17
© Butterworth & Co (Publishers) Ltd 1976
Chapter 13
© R. E. Beard 1976
© Перевод на русский язык, «Мир», 1979

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Проникновение математических методов в самые разнообразные, подчас неожиданные сферы человеческой деятельности означает возможность пользоваться новыми, как правило, весьма плодотворными средствами исследования. Рост математической культуры специалистов в соответствующих областях приводит к тому, что изучение общих теоретических положений и методов вычислений уже не встречает серьезных трудностей. Вместе с тем на практике оказывается, что одних лишь математических познаний далеко не достаточно для решения той или иной прикладной задачи — необходимо еще получить навыки в переводе исходной формулировки задачи на математический язык. Собственно, в этом и состоит проблема овладения искусством математического моделирования.

В нашей стране и за рубежом уже вышел ряд книг, посвященных математическому моделированию как в традиционных, так и в новых областях приложений математического аппарата. Основное внимание их авторов направлено на то, чтобы продемонстрировать мощь математики как инструмента научного исследования. Главная роль при этом отводится обычно методам решения определенных математических задач.

Предлагаемая советскому читателю книга занимает в этом ряду особое место. Ее следует рассматривать как довольно удачную попытку дать представление о том, как «делается» современная наука. Каждая глава написана специалистом в соответствующей области и посвящена детальному анализу процесса построения математической модели вполне конкретного, достаточно простого, но вместе с тем и интересного явления из области механики, физики, химии, биологии, медицины, экономики или социологии. Читатель найдет здесь рассуждения исследователя о подходах к описанию и анализу реальной проблемы, о возможности ее математической идеализации, выборе пути построения модели, степени пригодности и соответствия объекту, методах проверки модели. Этот наиболее существен-

ный и творческий этап работы современного специалиста обычно остается «за кадром» в традиционных учебниках, тяготеющих к аксиоматическому, законченному изложению соответствующих дисциплин.

Книга предназначена в первую очередь начинающим исследователям и может служить переходным мостиком между учебником и живым текущим научным материалом — статьями, монографиями и т. д. Инженерам разных специальностей, физикам, химикам, биологам, экономистам, социологам книга должна помочь повысить эффективность применения математических методов на практике, а математикам она, быть может, даст кроме того и пищу для размышлений о выборе объекта приложений. Следует обратить внимание на то, что творческая работа с книгой подразумевает решение читателем ряда задач, помещенных в конце каждой главы.

Перевод книги выполнили: Ю. А. Сергеев (гл. 1—6, 9, 10), А. С. Кравчук (гл. 7), А. А. Пионтковский (гл. 8, 15, 17), Ю. В. Буркин (гл. 11—14) и М. А. Родионов (гл. 16).

Ю. П. Гупало

ПРЕДИСЛОВИЕ

Традиционный вузовский курс математики приучает большинство студентов несколько формально подходить к изучаемому предмету. Он преподается по хорошо разработанной программе, подчеркивающей основные принципы математики и необходимость строгого анализа. Однако все это составляет лишь часть арсенала средств, необходимых математику в практической деятельности. Распространенная черта молодых специалистов-математиков — их растерянность перед задачами, возникающими непосредственно из практики. Это совсем не обязательно связано с недостатком способностей, а скорее отражает формальный характер вузовского курса математики по сравнению с другими дисциплинами.

Возможным решением этой проблемы следует считать введение в традиционный курс дисциплины, главной целью которой было бы обучение методам постановки математических задач, возникающих в реальных практических ситуациях. Общее название такого подхода — математическое моделирование. В настоящее время не существует общепринятого определения этого термина, однако специалисты разного профиля, связанные с приложениями математики, обычно ясно понимают, что он означает в их собственной области. Цель данной книги — собрать воедино различные аспекты математического моделирования, возникающие при исследованиях в разнообразных областях практической деятельности. Поэтому совсем не обязательно читать все главы последовательно; вместе с тем читатель может руководствоваться общей точкой зрения на предмет, изложенной в гл. 1.

Практически такой курс может принести пользу лишь тем читателям, которые сами займутся моделированием. В конце каждой главы помещены задачи двух типов. Задачи первого типа позволяют читателю проверить усвоение изучаемого материала, а второго дают ему возможность развить собственные идеи.

Курс моделирования в принципе может излагаться на любой стадии обучения, поэтому некоторые приведенные в книге примеры требуют знаний, незначительно выходящих за рамки школьной программы. С другой стороны, для чтения большинства глав необходимы более глубокие математические знания, и, следовательно, эту книгу наиболее целесообразно использовать в качестве основы курса математического моделирования на втором или третьем году обучения в высшей школе.

*Дж. Дж. Эндрюс
Р. Р. Мак-Лоун*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ — ИСКУССТВО ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Р. Р. МАК-ЛОУН ¹⁾

1.1. ПОЧЕМУ ЭТА КНИГА ПОСВЯЩЕНА МОДЕЛИРОВАНИЮ

Большинству студентов-математиков приходится изучать весьма формализованные теории конкретных разделов математики и осваивать ряд математических методов. Обе эти стороны математической подготовки выпускников, несомненно, важны и входят в арсенал средств математика-прикладника ²⁾. Например, изучение ньютоновской механики позволяет увидеть, как принятая модель развивается в стройную теорию. Однако при таком изучении студенту не видно, что пришлось преодолеть Ньютону, прежде чем он выдвинул и развил идеи, составляющие теперь общепризнанную теорию. Кроме того, при этом остается в тени вопрос о том, какое отношение имеет эта модель к практическим проблемам, возникающим в повседневной работе физиков и инженеров на производстве. Так, может создаться впечатление, что приложение математики сводится просто к подбору подходящих формул, в подстановке в них некоторых чисел и взмахе волшебной палочки, в результате чего получается «ответ». При этом совершенно упускается из виду один важный момент, без которого «приложение» математики превращается просто в демонстрацию известных математических приемов.

В чем же состоит этот упущенный момент? Он заключается в переводе нашего так называемого «реального мира» на язык математики, что позволяет нам получить более точное представление о его наиболее существенных свойствах и, как мы надеемся, в некотором смысле предсказать будущие события. Это обстоятельство как раз и отражает термин «математическое моделирование». В настоящей книге мы попытаемся дать будущему специалисту достаточно хорошее представление об этой стороне математического образования.

¹⁾ R. R. McLone, Department of Mathematics, University of Southampton.

²⁾ В данной книге под «математиком-прикладником» понимается всякий, кто пользуется для описания реального мира любой математической дисциплиной — будь то статистика, исследование операций, численный анализ, вычислительная математика или же более традиционные области чистой и прикладной математики,

В проведенном недавно обследовании (Мак-Лоун, 1973), охватившем как дипломированных математиков, окончивших университеты Великобритании, так и тех, кому приходится руководить работой математиков, явственно ощущалась недооценка моделирования во многих традиционных университетских курсах. Такие вопросы, как постановка задач, разработка новых идей и распространение этих идей (или существующих теорий) на новые области приложения, критический анализ выполненных работ, информация о полученных результатах и их интерпретация (особенно для нематематиков) — все это обычно лишь весьма бегло освещается в учебных планах по математике для студентов старших курсов. Между тем указанные навыки (наряду с другими) считаются в образовании студентов самыми главными. Мы ставим себе задачей показать, как эти навыки используются при математическом моделировании, рассмотрев ряд ситуаций из самых различных областей, которые разные авторы пытались моделировать математически.

1.2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРНЫЕ ЧЕРТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Холл (1963) сказал, что целью прикладной математики является математическое осмысление действительности. С другой стороны, инженеру-практику, пожалуй, более важно знать, выдержит ли его мост предполагаемую нагрузку, а администратору больницы — найти способ сократить время, затрачиваемое пациентами местной амбулатории на ожидание, — иными словами, получить конкретные ответы на конкретные вопросы, а не стремиться к более возвышенным целям.

С чего начинается математик-прикладник? На практике исходным пунктом часто является некоторая эмпирическая ситуация, выдвигающая перед исследователем «задачу», на которую требуется найти «ответ». Однако употребление таких слов, как «задача» и «ответ», может ввести в заблуждение. Прежде всего, необходимо установить, в чем именно заключается «задача». Это замечание связано с тем, что реальные ситуации редко бывают четко очерченными, а сложное взаимодействие с окружающей средой часто делает точное описание ситуации затруднительным. Процесс выделения «задачи», поддающейся математическому анализу, часто бывает продолжительным и требует владения многими навыками, не имеющими отношения к математике (например, беседы с коллегами-нематематиками, работающими в данной области, и чтение всевозможной литературы, имеющей отношение к делу, являются важным элементом процесса моделирования).

Часто (но не всегда) параллельно с этой стадией постановки задачи идет процесс выявления основных или существенных особенностей явления (см. рис. 1.1). В частности, для физических явлений этот процесс *схематизации* или *идеализации* играет решаю-

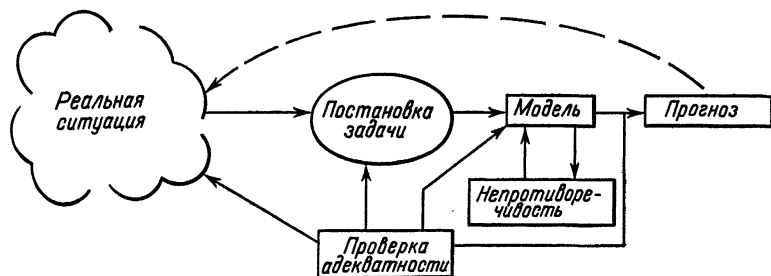


Рис. 1.1.

шую роль, поскольку в реальном явлении участвует множество процессов, и оно чрезвычайно сложно. Некоторые черты явления представляются важными, многие другие — несущественными. Возьмем, к примеру, движение маятника, образованного тяжелым грузом, подвешенным на конце нити. В этой «ситуации» существенным является регулярный характер колебаний маятника, а несущественным обстоятельством — то, что нить белая, а груз черный. После того как существенные факторы выявлены, следующий шаг состоит в переводе этих факторов на язык математических понятий и величин и постулировании соотношений между этими величинами. Как правило, это самая трудная стадия процесса моделирования, причем здесь невозможно дать никаких общих рекомендаций! Рассмотренные в этой книге задачи моделирования иллюстрируют разнообразие подходов, открывающихся здесь перед математиками.

После построения модели ее следует подвергнуть проверке. В действительности адекватность модели до некоторой степени проверяется обычно в ходе постановки задачи. Уравнения или другие математические соотношения, сформулированные в модели, постоянно сопоставляются с исходной ситуацией. Так, в упомянутом случае маятника математическое уравнение движения маятника можно подвергнуть проверке, сравнивая физические размерности величин, входящих в это уравнение.

Существует несколько аспектов проверки адекватности. Во-первых, сама математическая основа модели (которая и составляет ее существо) должна быть непротиворечивой и подчиняться всем обычным законам математической логики. Во-вторых, справедливость модели зависит от ее способности адекватно описывать исходную ситуацию. Однако ответ на вопрос о том, успешно ли проходит предложенная модель такую проверку, в значительной степени субъективен. Модель можно заставить отражать действительность, однако она не есть *сама* действительность. Наш маятник вполне реален, но его часто называют математическим маятником, и вот здесь-то нас поджидает ловушка. Дело в том, что объект, известный физикам, а также математикам-прикладникам под названием про-

стого маятника, это всего лишь математическая идеализация реального объекта, и ничего больше. Это становится очевидным, когда мы замечаем, как размах колебаний нашего маятника уменьшается и, в конце концов, маятник останавливается. Модель математического маятника не предсказывает такого поведения. Означает ли это, что указанная модель неверна? Не обязательно: ведь до полного затухания колебаний может пройти больше часа, а нас, возможно, интересуют лишь события, происходящие в первые пять минут после начала движения.

Адекватность модели проявляется и в других формах. Например, описывая функционирование системы записи на прием в амбулатории, Шахани (1974) применил стандартный подход, основанный на теории очередей, что позволило ему прийти к некоторым заключениям относительно времени ожидания как пациентов, так и врача-консультанта. Его выводы не были основаны на принятии его модели в качестве *истинной*, т. е. правильно отражающей работу системы на всех этапах (такую модель на самом деле было бы трудно обосновать). Они просто основывались на решении вопроса о ее *адекватности*. Иначе говоря, достаточно ли хорошо для *целей рассматриваемой задачи* результаты, полученные на основе этой модели, отражают положение дел. Таким образом, «решение» (даже одной и той же задачи, но в другой раз) зависит от критериев, выдвинутых автором модели, в такой же степени, как и от установления физических, экономических или любых других характеристик исходной ситуации.

Можно потратить много времени на такое улучшение решения для данной модели, которое не оправдано самой постановкой задачи. Это связано, в частности, со степенью точности опытных данных. Так, если имеющиеся исходные данные известны с погрешностью, скажем, 5%, то, разумеется, бессмысленно предлагать «решения», обеспечивающие погрешность, не превышающую 1%. Поэтому нужно подчеркнуть, что ответ, который невозможно реализовать на практике (хотя он и получен с помощью тонкого математического анализа), оказывается бесполезным для данной задачи. Как сказал однажды один инженер, «всякое уравнение длиной более двух дюймов скорее всего неверно!» Кроме того, можно сказать, что приближенный ответ, который получается быстрее, может оказаться более эффективным, чем более точный ответ, на получение которого уходит больше времени. Это часто свидетельствует в пользу непосредственного численного приближенного решения, позволяющего избежать затрат времени на поиски наиболее изящного аналитического решения.

Ситуации моделируют для разных целей. Главная из них — необходимость предсказывать новые результаты или новые свойства явления. Эти предсказания могут быть связаны с распространением уже существующих результатов или иметь более принципиальный

характер. Часто они относятся к условиям, которые, по всей вероятности, будут иметь место в некоторый момент в будущем. С другой стороны, предсказания могут относиться к событиям, непосредственное экспериментальное исследование которых неосуществимо; наиболее важный пример такого рода дают многочисленные прогнозы, которые делались на основе математических моделей в программе космических исследований. Однако для этой цели моделируются не все ситуации: в некоторых случаях достаточно уметь описывать математическими средствами работу системы для того, чтобы добиться более глубокого понимания явления (именно эту роль и играют многие выдающиеся физические теории, хотя на их основе делаются также и прогнозы). Обычно при таком математическом описании не учитывается элемент контроля, однако в моделях, построенных, например, для исследования работы сетей, таких, как схемы движения поездов или самолетов, контроль часто является важным фактором. Действительно, многие модели в исследовании операций или технике имеют целью облегчить администрации процесс принятия *решений*. Другие модели строятся для того, чтобы сделать более удобным масштаб измерения. Так, линейная шкала для температуры является математической моделью, которой пользуются при изготовлении измерительного устройства, а именно термометра. Можно привести и много других примеров.

Математическая модель представляет собой *упрощение* реальной ситуации. Ощутимое упрощение наступает тогда, когда несущественные особенности ситуации отбрасываются и исходная сложная задача сводится к идеализированной задаче, поддающейся математическому анализу. Именно при таком подходе в классической прикладной математике возникли блоки без трения, невесомые нерастяжимые нити, невязкие жидкости и многие другие понятия подобного рода. Эти понятия не существуют в реальной действительности, они являются абстракциями, составной частью идеализации, предпринятой автором модели. И тем не менее их часто можно с успехом считать хорошим приближением к реальным ситуациям.

Это всего лишь одна сторона упрощения. Другая сторона связана с сравнением порядка различных величин, фигурирующих в модели. Например, изменение некоторой величины x с течением времени можно описать уравнением вида

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0.$$

Можно было бы сразу приступить к решению этого уравнения, однако допустим, что в результате наблюдения было замечено, что член $b dx/dt$ гораздо больше по величине, чем cx . В таком случае можно сэкономить много времени, упростив уравнение (отбросив член cx), в результате чего решение получится *быстрее*, но, несмот-

ря на это, оно будет правильно отражать ситуацию. Решение же исходного уравнения, будучи в математическом отношении более точным, может в действительности привести к неверным заключениям.

Описанный образ действий при построении математических моделей не является единственным, и этому совсем не стоит удивляться. В другом возможном подходе первым шагом является построение простой модели нескольких наиболее характерных особенностей явления; это часто делается для того, чтобы «почувствовать» данную задачу, причем делается еще до того, как сама задача окончательно сформулирована. Затем эта простая модель обобщается, чтобы охватить другие факторы, пока не будет найдено «приемлемое» или «адекватное» решение. Есть еще подход, при котором с самого начала вводится в рассмотрение одновременно большое число факторов. Он часто применяется в исследовании операций, и такие модели обычно изучают имитационными методами с использованием ЭВМ.

Важнейшее решение, которое часто принимается в самом начале процесса моделирования, касается природы рассматриваемых математических переменных. По существу они делятся на два класса. В один из них входят известные характеристики, т. е. величины, поддающиеся (по крайней мере теоретически) точному измерению и управлению; они называются *детерминированными* переменными. В другой класс входят неизвестные характеристики, т. е. величины, которые никогда не могут быть точно измерены и имеют случайный характер; они называются *стохастическими* переменными. Модель, содержащая стохастические переменные, должна по определению описываться математическим аппаратом теории вероятностей и статистики; детерминированные переменные часто, но отнюдь не всегда, требуют привлечения обычного математического анализа. Природа некоторых ситуаций бывает ясна не сразу, другие ситуации характеризуются переменными обоих типов. Для построения модели чрезвычайно важно, чтобы природа переменных была правильно установлена.

Наконец, переходим к вопросу об интерпретации вытекающих из модели выводов. Работа математика-прикладника не заканчивается в тот момент, когда после многочисленных выкладок и математических манипуляций получается формула или иной результат. Ему еще предстоит совершить обратный перевод с математического языка на язык, на котором первоначально формулировалась исходная задача: ведь сомнительно, чтобы на коллег-нематематиков (например, из администрации компании) произвели впечатлительные ответы на языке, который для них непонятен. Следует отчетливо осознавать как математический смысл полученных решений, так и то, что они означают на языке реального мира, который математика призвана описывать. Это обстоятельство не всегда подчерки-

вается в традиционных математических курсах, предназначенных для выпускников высших учебных заведений.

Можно сказать, что разработка математической модели напоминает развитие ребенка, который только учится говорить. Ведь язык, в самом простом смысле, является отражением окружающего реального мира, и совершенствование языка ребенка неразрывно связано с его пониманием этого мира. Модель начинается с самого простого и развивается, принимая более сложные очертания, по мере того как достигается более глубокое понимание явления.

1.3. МОДЕЛИ

Искусством построения моделей можно овладеть только в результате собственной практики, однако почувствовать, в чем состоит это искусство, можно, разбирая примеры, которые тем или иным образом иллюстрируют различные особенности процесса моделирования. С широким кругом вопросов, относящихся к приложениям математики, можно познакомиться по книгам, посвященным математической биологии, экономике, политике, психологии и т. д. (см. Смит (1968), Розен (1967), Элкер (1965), Миллер (1964)). В ряде статей более общего характера, посвященных собственно моделированию, уделяется внимание общим принципам (Вудс (1969), Форд и Холл (1970), Холл (1972), Кламкин (1970), Уоллис (1971)).

Описанные в этой книге модели можно разбить, вообще говоря, на четыре группы. В первой группе, к которой относятся главы, написанные Крэггсом, Холлом, Эндрюсом и Этси, Зенкевичем, рассматриваются в основном модели физических явлений, хотя последняя из них посвящена математическому аппарату, который весьма необходим инженеру-строителю. Во второй группе (см. главы, написанные Мэрди и Дэвисом) рассмотрены модели, относящиеся соответственно к ситуациям из области биологии и медицины; впрочем, эти модели, как и модели первой группы, являются по своей природе детерминированными. В третьей группе моделей, к которой относятся работы Эштона, Ломаса, Бартоломео, Берда и Хилла, применяются методы математической статистики и исследования операций; по своему характеру это стохастические модели. К последней группе (Карре, Эткин и Чиллингуорт) относятся модели, отличающиеся по своей природе от остальных; для них характерен чисто математический подход. В заключение этой главы кратко рассмотрим основные особенности моделирования, характерные для каждой из глав книги, выделяя те общие закономерности, о которых шла речь в предыдущем параграфе.

ГЛАВА 2 (КРЭГГС)

В этой главе рассмотрен ряд ситуаций, связанных с перемещением некоторого «тела» из одного положения в другое. Автор решил ограничиться моделированием чисто геометрических вопросов.

Реальной ситуации присущи многие другие характерные особенности; в данной главе рассмотрена лишь одна из них. При моделировании реальных процессов важно решить, при каких условиях чисто геометрическая модель будет адекватной.

ГЛАВА 3 (НОБЛ)

Здесь показано, что на инженерную проблему можно смотреть как на простое приложение хорошо разработанной модели, а именно ньютоновской механики. Детальное описание движения ракеты в земной атмосфере, разумеется, связано с учетом массы ракеты, сопротивления воздуха и т. п. В модели Нобла эти факторы явно исключены из рассмотрения.

ГЛАВА 4 (ЖЭРЛ)

В этой главе из практической ситуации выделена стандартная упрощенная гидродинамическая задача, которая затем решается. Как и в гл. 3, полное описание задачи оказывается очень сложным. В основу моделирования здесь положен тот факт, что площадь поперечного сечения струи мала по сравнению с площадью поперечного сечения жидкости в сосуде, что позволило не учитывать распределение скоростей в поперечном направлении. Поставленная перед исследователем данной задачи цель делает дальнейшее улучшение решения неоправданным, так что полученное решение является приемлемым. Эта модель представляет собой идеализацию, однако такая идеализация оказывается для сложной «реальной» ситуации весьма плодотворной.

ГЛАВА 5 (ХОЛЛ)

Некоторые физические и химические характеристики молекул (такие, как межмолекулярные связи) моделируются простой топологической решеткой с использованием матриц. Такая упрощенная картина позволяет получить представление о химических характеристиках, не привлекая подробного анализа (например, основанного на квантовой теории). Детальный анализ, конечно, представлял бы собой новую модель явления. Степень уточнения модели определяется требуемой точностью, количеством необходимых для этого дополнительных данных и тем временем, которое отпущено на работу над данной проблемой.

ГЛАВА 6 (ЭНДРЮС И ЭТСИ)

Рассмотрен пример ситуации из области техники, в которой возможно протекание большого числа физических процессов. Выделен режим, представляющий определенный интерес, когда основную

роль играет один конкретный физический процесс (теплопередача). Этот режим моделируется при помощи стандартных разработанных теорий. Модель постоянно подвергается проверке на непротиворечивость, чтобы оправдать пренебрежение остальными возможными факторами. Предпринятое в самом начале выделение представляющего интерес режима потребовало многочисленных консультаций с теми, кто работает в данной области техники, а также напряженной творческой работы!

ГЛАВА 7 (ЗЕНКЕВИЧ)

Эта глава содержит хороший пример применения численного метода к группе практических задач, связанных с распределением напряжений в больших конструкциях. В ней показана плодотворная роль одного из инструментов исследования (а именно ЭВМ) в развитии математического метода, точность которого зависит от того, насколько малыми могут быть сделаны конечные элементы. А это в свою очередь зависит от возможностей применяемой вычислительной машины; возникающая при этом численная погрешность является, таким образом, мерой грубости модели.

ГЛАВА 8 (МЭРДИ)

Изучение роста популяции представляет собой обширную проблему, для которой можно построить много моделей. В данной главе рассмотрены специфические задачи, относящиеся к одному виду и двум взаимодействующим видам, с приложениями к проблеме борьбы с сельскохозяйственными вредителями. Рассмотренные модели выдвигают на передний план проблему отождествления введенных параметров с полученными из реальных биологических экспериментов данными.

ГЛАВА 9 (ДЭВИС)

Здесь излагается дифференциальная модель заболевания, известного под названием сахарного диабета. Это пример простой модели, качественно отражающей основные клинические проявления болезни, однако никоим образом не претендующей на описание ее фактических биохимических механизмов, которые чрезвычайно сложны.

ГЛАВА 10 (ЭШТОН)

Ситуации, встречающиеся на транспорте, включают множество факторов — от чисто технических до социальных. Эта глава посвящена моделированию влияния флуктуаций в потоке транспорта на

поведение пешехода, намеревающегося перейти улицу, а также потока автомобилей на перекрестках. Переменные имеют ярко выраженный стохастический характер, и делается попытка применить для моделирования потока транспорта хорошо известные законы распределения вероятностей.

ГЛАВА 11 (ЛОМАС)

Приводится пример моделирования в исследовании операций, когда с самого начала приняты во внимание все существенные факторы; в этом случае должны быть учтены все потоки денежных сумм. Подобные модели коммерческого планирования включают в себя критерии принятия решений, и цель здесь состоит в том, чтобы получить такой алгоритмический процесс, при котором ввод соответствующих данных позволил бы, скажем, управляющему по финансовым вопросам оценить экономическую эффективность коммерческой схемы. Такими моделями обычно пользуются в сочетании с вычислительной машиной.

ГЛАВА 12 (БАРТОЛОМЬЮ)

Здесь идет речь о политике в области штатного расписания в некотором учреждении, связанной с установлением правил перехода сотрудников в пределах данной организации из одной категории в другую, а также изменения личного состава при найме на работу и увольнении. Здесь бессмысленно рассуждать по поводу того, является ли эта модель «истинной»: весь вопрос в том, является ли она плодотворной. При этом жизнеспособность модели, вполне возможно, обусловлена тем, насколько полученные результаты оказываются приемлемыми для той группы людей, к которой эта модель применяется!

ГЛАВА 13 (БЕРД)

Приводится еще одна модель планирования деятельности компании. Теоретически страховая компания может разориться; основная задача поэтому состоит в том, чтобы промоделировать степень риска. Переменные здесь — стохастические, но следует заметить, что процветающие страховые компании считают более безопасным класть в основу распределения вероятностей эмпирические данные, нежели пользоваться известными классическими распределениями (ср. гл. 10).

ГЛАВА 14 (ХИЛЛ)

В этой главе рассмотрена практическая ситуация, возникающая при минировании; она относится к вполне определенному классу математических задач — к теории игр. Вводятся допущения отно-

сительно стратегий противников, которые и составляют существо модели. Вообще способность увидеть, что рассматриваемая ситуация принадлежит к известному классу задач, для которого имеются стандартные теории,— это искусство, имеющее для моделирования огромное значение. В этом как бы фокусируется вся суть прикладной математики, а именно, что один и тот же математический аппарат может описывать очень широкий круг реальных ситуаций, которые сами по себе могут казаться совершенно не связанными друг с другом. (Классическим примером этого служит уравнение простого гармонического колебания и уравнение Лапласа.) Вполне естественно, что в рассматриваемой здесь модели проверка адекватности может оказаться непростым делом!

ГЛАВА 15 (КАРРЕ)

Основное содержание этой главы посвящено формальному изложению модели потока в сети на алгебраическом языке. Здесь возникают задачи о нахождении потоков с минимальными затратами, что находит непосредственное практическое приложение к перевозкам угля с шахт на энергостанции, об управлении запасами и т. д.

ГЛАВА 16 (ЭТКИН)

Рассмотрена модель городского общества, в которой, по утверждению автора, можно учесть все взаимосвязи внутри общества, пользуясь языком алгебры. Модель, таким образом, должна охватывать ситуацию в целом, поскольку для полноты модели в ней должны быть учтены все взаимосвязи. Модели такого рода сопряжены с трудностью оценки того, насколько хорошо отражает модель ту ситуацию, которую она призвана описывать. Такая оценка неизбежно будет весьма субъективной, что лишний раз подчеркивает то обстоятельство, что существуют модели, которые по мнению одних являются адекватными, а по мнению других таковыми не являются!

ГЛАВА 17 (ЧИЛЛИНГУОРТ)

Эта глава посвящена одному из новых и наиболее захватывающих достижений чистой математики. В теории катастроф рассматриваются условия, при которых, казалось бы, устойчивое состояние может скачком перейти в другое устойчивое состояние в рамках той же самой математической модели под воздействием малого возмущения в точках бифуркации. Хотя эта область математики еще находится в зачаточном состоянии, возникает все больше и больше новых примеров реальных явлений, которые подлежат рассмотре-

нию при помощи теории катастроф. Круг дисциплин, в которых возникают примеры подобного рода, весьма широк — от психологии до гражданского строительства и общественных наук.

1.4. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Alker H. R. (1965). *Mathematics and Politics*, Macmillan; London.
- Ford B., Hall G. G. (1970). «Model Building — An Educational Philosophy for Applied Mathematics», *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 1, 77—83.
- Hall G. G. (1963). *The Application of Mathematical Thinking*, University of Nottingham Press.
- Hall G. G. (1972). «Modelling — A Philosophy for Applied Mathematicians», *Bull. I. M. A.*, 8, 226—228.
- Klamkin M. S. (1970). «On the Role of an Industrial Mathematician and its Educational Implications», Publication preprint, Ford Motor Co., USA.
- McLone R. R. (1973). *The Training of Mathematicians*, Social Science Research Council; London.
- Miller G. A. (1964). «Mathematics and Psychology», Wiley; New York.
- Rosen R. (1967). *Optimality Principles in Biology*, Butterworths; London.
- Shahani A. K. (1974). Частное сообщение.
- Smith J. M. (1968). *Mathematical Ideas in Biology*, Cambridge University Press; London. [Имеется перевод: Смит Дж. Математические идеи в биологии. — М.: Мир, 1970.]
- Wallis B. W. (1971). «How is Mathematics Used?», *Mathematics Teaching*, No. 56, 14—17.
- Woods L. C. (1969). «What is Wrong with Applied Mathematics?», *Bull. I. M. A.*, 5, 70.

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

ДЖ. У. КРЭГГС¹⁾

[Предварительных знаний не требуется]

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Управление транспортным средством (велосипедом, автомобилем, кораблем), движущимся от одной заданной точки к другой, — довольно общая задача, важная в таких весьма сложных прикладных областях, как планирование полета к Луне или проектирование управляемой ракеты. Задачи такого типа принадлежат к более широкому классу задач теории управления, сутью которых является перевод системы из одного состояния в другое по экономически выгодному и практически реализуемому пути (часто называемому траекторией системы). К этому обширному классу задач принадлежит, например, планирование постройки здания с минимальными затратами.

В более простых задачах, относящихся к управлению наземными или морскими транспортными средствами, автомобиль или корабль можно моделировать геометрической точкой, движущейся в двумерном пространстве, в котором введена декартова система координат (x, y) . Траектория точки представляет собой параметрическую кривую, задаваемую соотношениями $x=x(\lambda)$, $y=y(\lambda)$. В большинстве случаев в качестве параметра используется текущее время t , но в некоторых задачах оказывается возможным исключить этот параметр и получить более простое уравнение траектории. (В более общих задачах управления просто используется больше координат $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$, ..., $x_n(\lambda)$, и движение системы соответствует движению точки в многомерном пространстве.)

Решение задачи управления состоит из двух этапов. Во-первых, путь системы должен удовлетворять определенным условиям, например следующим:

¹⁾ J. W. Craggs, Department of Mathematics, University of Southampton.

- 1) Проходить от точки $(x, y) = (0, 0)$ до точки $(x, y) = (a, b)$.
- 2) Лежать в заданной области (в данной части плоскости, например для корабля, который движется лишь по воде, но не по суше).
- 3) Минимизировать какую-либо величину экономического характера, которой может быть стоимость израсходованного топлива, затраченное время или общие затраты управляющего.

Второй этап решения состоит в преобразовании его в последовательность инструкций оператору; путь автомобиля, например, выбирается при помощи вращения руля. Если проградуировать поворот руля α (по часовой стрелке или в обратном направлении, отсчитывая от нейтрального положения), то инструкцию оператору можно записать в форме: «в момент времени t установить положение $\alpha = F(t)$, где функция F определяется по времени t согласно сопроводительной таблице». С самого начала удобно делать различие между «переменными состояниями» (x, y) , которые задают положение и, возможно, ориентацию системы, и «переменными управления» α , являющимися в действительности точными инструкциями водителю. В модели это различие состоит в том, что α меняет положение объекта в плоскости (x, y) , но значения x, y непосредственно не влияют на α , так что водитель может в определенных границах по своему выбору изменять α достаточно произвольным образом. Существование ограничений на α весьма очевидно в задаче об управлении рулем. В самом деле, невозможно вращать руль в одном направлении до бесконечности!

Суммируя сказанное, получим, что математическая модель задачи управления состоит из двух систем функций

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \alpha(t) &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \end{aligned}$$

где векторы принадлежат к векторным пространствам различных размерностей, и уравнений, которые могут быть как алгебраическими вида

$$f(\mathbf{x}, \alpha, t) = 0,$$

так и дифференциальными вида

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(\mathbf{x}, \alpha, t), \text{ где } i = 1, 2, \dots, n.$$

Может показаться странным, что в уравнения входят только первые производные. Это, однако, естественно, так как мы имеем право ввести любое число переменных x . Так, например, в одномерном пространстве можно использовать переменную $x_1(t)$ для обозначения положения точки, $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ для обозначения скорости и $x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t)$ для обозначения ускорения.

2.2. ОГРАНИЧЕННЫЕ ОБЛАСТИ

Для иллюстрации возможных типов возникающих задач удобно воспользоваться простыми примерами, в которых основная модель включает лишь двумерное движение точки. Первый пример показывает влияние ограниченности области, внутри которой осуществляется управление.

ПРИМЕР 1

Найдем кратчайший путь от точки A с координатами $(x, y) = (-2, 0)$ до точки B с координатами $(x, y) = (2, 0)$ на плоскости, из которой исключена область D , определенная неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$. (Рассматриваемый пример описывает, в частности, как обойти круглое озеро, не промочив ног!) Пример иллюстрируется на рис. 2.1.

По определению, кратчайшим расстоянием между двумя точками на плоскости является соединяющий их отрезок прямой. Так,

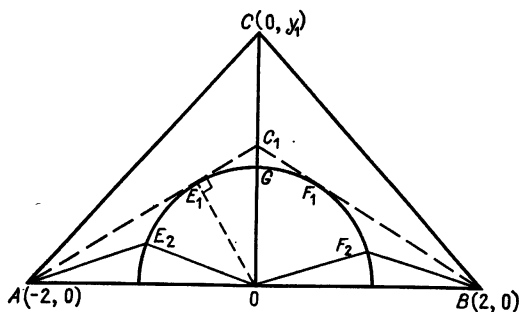


Рис. 2.1. Пути, проходящие вне круга.

если P, Q — некоторые точки пути, обладающие тем свойством, что прямая линия PQ не имеет пересечений с областью D , то искомый путь PQ должен быть прямолинейным. Рассмотрим теперь путь ACB , где C имеет координаты $(0, y_1)$, а y_1 достаточно велико, чтобы отрезки AC и CB не пересекались с D . Тогда по теореме Пифагора

$$ACB = 2(4 + y_1^2)^{1/2},$$

и, следовательно, при убывании y_1 путь сокращается. Будем уменьшать y_1 до тех пор, пока AC не коснется окружности (C_1) . Тогда $\angle OAC_1 = \pi/6 = 30^\circ$. Этот путь является наилучшим среди путей, составленных из двух отрезков прямых линий. Если теперь учесть, что $\angle E_1OC_1 = \alpha$, $E_1C_1 + C_1F_1 = 2 \operatorname{tg} \alpha$, дуга E_1F_1 равна 2α , и что $\operatorname{tg} \alpha > \alpha$ для всех α , принадлежащих интервалу $0 \leq \alpha < \pi/2$, то найдем, что путь, состоящий из отрезка AE_1 , дуги E_1F_1 и отрезка F_1B , является более коротким, чем AC_1B . На той стадии решения задачи,

которой мы сейчас достигли, ясно, что кратчайший путь состоит из двух отрезков прямых линий и дуги окружности. Для окончательного решения задачи рассмотрим путь $(AE_2, \text{дуга } E_2F_2, F_2B)$, где $\angle AOE_2 = \angle BOF_2 = \beta$. Длина этого пути равна $2s$, где

$$s = AE_2 + \text{arc } E_2G = \{(2 - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta\}^{1/2} + \pi/2 - \beta.$$

Минимизация s по переменной β может быть проведена при помощи элементарных вычислений. В результате получим

$$\cos \beta = 1/2.$$

Тогда

$$\beta = 60^\circ.$$

Следовательно, путь AE_1GF_1B действительно кратчайший.

Полученный результат иллюстрирует две важные теоремы (см., например, Крэггс, 1973). Кратчайший путь состоит из дуг, которые представляют собой либо естественные кратчайшие пути в пространстве, либо ограничивают область, в которой допускается движение; переход кратчайшего пути с одной дуги на другую происходит по касательной.

2.3. ДВИЖЕНИЕ В ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ

Вторая весьма поучительная задача — это хорошо известная проблема выбора наилучшего курса яхты, если постоянны скорость и направление ветра (см. рис. 2.2). Пусть ветер дует с востока;

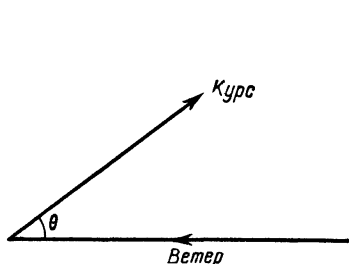


Рис. 2.2. Ветер и курс.

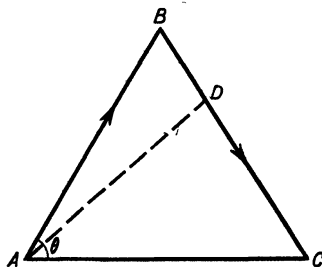


Рис. 2.3. Плавание с переменным галсом.

рассмотрим курс, пролегающий под углом θ к востоку. Тогда скорость яхты зависит от угла θ , и если θ достаточно близко к нулю, скажем $-\beta < \theta < \beta$, продвижение прямо по заданному курсу невозможно. Однако при $\theta > \beta$ или $\theta < -\beta$ с увеличением значения $|\theta|$ скорость движения яхты возрастает.

При условии $\beta < \pi/2$ продвижение в восточном направлении всегда возможно, если выбрать путь с изменением курса (т. е. идти галсами; см. рис. 2.3). Формулировка задачи состоит в следующем: «Когда выгоднее идти галсами, чем прямо по заданному курсу?»

ПРИМЕР 2

Чтобы придать определенность изложенным выше соображениям, рассмотрим модель, в которой скорость v равна

$$v = v_0(1 - 2 \cos \theta)$$

при $\theta > \beta = \pi/3 = 60^\circ$, где v_0 — положительное действительное число. Курс, соответствующий наиболее быстрому движению в восточном направлении, получается в случае, когда угол θ выбран так, чтобы величина

$$\frac{dx}{dt} = v_0(1 - 2 \cos \theta) \cos \theta$$

имела максимальное значение, т. е. когда

$$v_0 \{1/8 - 2(\cos \theta - 1/4)^2\}$$

максимально. Максимум достигается при $\theta = \theta_0$, $\cos \theta_0 = 1/4$ и, следовательно, $v = 1/2 v_0$.

Естественно, что лучше всего идти галсами, если место назначения расположено на востоке. Теперь, однако, предположим, что конечный пункт лежит на прямой AD , так что $\angle CAD = \gamma > \beta$. Тогда время плавания галсами равно

$$\frac{AB}{(1/2)v_0} + \frac{BD}{(1/2)v_0} = \frac{AD}{\sin 2\theta_0} \left\{ \frac{\sin(\theta_0 + \gamma) + \sin(\theta_0 - \gamma)}{(1/2)v_0} \right\},$$

а время, затраченное на плавание по прямолинейному курсу AD , есть $AD/v_0(1 - 2 \cos \gamma)$. Плавание галсами более выгодно, когда

$$\frac{2 \sin(\theta_0 + \gamma) + \sin(\theta_0 - \gamma)}{\sin 2\theta_0} < \frac{1}{1 - 2 \cos \gamma},$$

или, что эквивалентно, при условии

$$4(1 - 2 \cos \gamma)(\sin \theta_0 \cos \gamma) < \sin 2\theta_0 \quad (= 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0).$$

Запишем это неравенство в виде

$$2 \cos^2 \gamma - \cos \gamma - 1/8 > 0,$$

т. е.

$$\left(\cos \gamma - \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \right) \left(\cos \gamma + \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \right) > 0.$$

Изложенные выше соображения применимы, однако, лишь при $\gamma < \theta_0$, $\cos \gamma > 1/4$ и, следовательно, плавание галсами несомненно предпочтительно при условии

$$1/4 < \cos \gamma < (1 + \sqrt{2})/4.$$

Когда $\gamma > \theta_0$, курс AD короче, чем $AB + BD$, а скорость выше, так что прямолинейный курс, конечно, выгоднее (см. рис. 2.4).

Итак, окончательный ответ состоит в том, что существует курс, соответствующий углу $\theta = \theta_0$, который дает наивысшее значение скорости плавания против ветра. Для всех пунктов назначения, расположенных наветреннее этого курса, яхтсмен должен идти галсами, а для расположенных подветреннее нужно выбирать прямолинейный

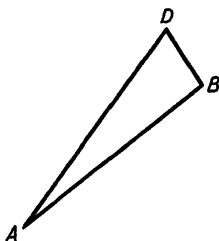


Рис. 2.4. Когда не следует менять галс.

путь. Этот результат был получен для конкретного примера. Однако он применим при любых разумных соотношениях между скоростью и курсовым углом.

Значение этого примера состоит в иллюстрации того факта, что оптимальное решение не всегда должно быть гладкой кривой. В классическом вариационном исчислении проводится различие между наилучшим решением в классе гладких функций (слабые вариации) и наилучшим решением в классе непрерывных, но не обязательно гладких функций (сильные вариации). Общая теория вариационного исчисления позволяет рассматривать задачи, в которых скорость зависит как от положения в пространстве, так и от направления движения — например, задачу управления яхтой в случае, когда принимаются во внимание и течение, и ветер. Однако решение таких задач требует гораздо более глубоких математических знаний, поэтому интересующимся читателям следует прежде прочесть какую-либо хорошую книгу по вариационному исчислению ¹⁾.

2.4. ДВИЖЕНИЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОИЗВОДНЫЕ

Следующими в порядке возрастания сложности являются задачи, в которых различными способами ограничиваются скорости изменения переменных состояния. Это важный класс задач, так как в большинстве случаев непосредственно управлять скоростью или положением движущегося тела невозможно; лишь компоненты ускорения или даже производные более высоких порядков поддаются управлению. Задачи с ограничениями на ускорения могут быть

¹⁾ См., например, Эльсгольд Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965, а также Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961. — *Прим. ред.*

чрезвычайно сложными. Существует, однако, важный подкласс, состоящий из задач с управлением только по одной переменной, ограничения значений которой и обуславливают существование оптимального решения. При этом оказывается, что решение должно соответствовать граничным значениям переменной управления, и задача сводится к тому, чтобы определить, когда нужно переключить управление с одного граничного значения на другое.

ПРИМЕР 3

Необходимо поставить неработающий автомобиль в гараж. Предположим, что желательно переместить автомобиль из одного положения в другое по прямой линии. В простейшей модели предполагается, что никаких сил сопротивления не существует, а есть

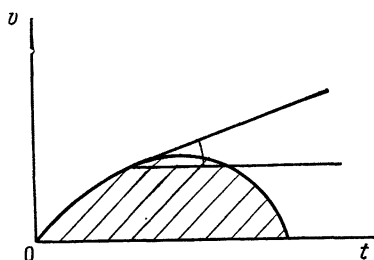


Рис. 2.5. График зависимости скорости от времени. Заштрихованная площадь соответствует пройденному расстоянию, наклон графика — ускорению.

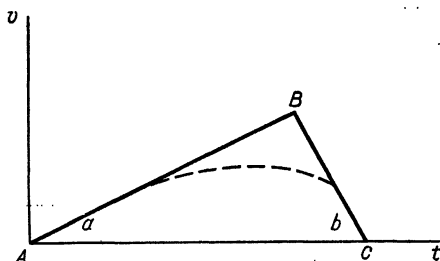


Рис. 2.6. Ускорение и замедление автомобиля.

лишь силы, тянущие или толкающие машину. Направление движения будем считать положительным; предположим также, что можно развить ускорение, не превышающее в положительном направлении величины a , а замедление по абсолютной величине не превышает b . Тогда ускорение f ограничено значениями

$$-b < f < a.$$

Полезным методом представления результатов является диаграмма скорость — время, показанная на рис. 2.5. Задача состоит в том, чтобы найти минимальное время, необходимое для прохождения данного расстояния, в случае, когда начальная и конечная точки соответствуют состояниям покоя.

Решение получается естественным образом при использовании наибольших числовых значений ускорения ($f=a$) и замедления ($f=-b$). Из рис. 2.6 сразу видно, что если ускорение меньше a или численная величина замедления меньше b (штриховая кривая), то расстояние, проходимое за данное время, уменьшается. Метод ре-

шения этой задачи состоит в том, чтобы использовать заданные ограничения для определения границ области изменения переменных, а затем отыскивать решения на границах области.

ПРИМЕР 4

Описанная выше модель может быть улучшена многими способами, например следующим образом.

1) Можно учесть трение или сопротивление вязких сил. Тогда уравнение движения при максимальной силе, действующей в положительном направлении, можно представить в виде

$$m \frac{dv}{dt} + k_1 v + k_2 = a,$$

где m — масса; ограничения теперь накладываются на силу a , а не на ускорения. Влияние указанных сил на решение учитывается простой заменой линий AB , BC кривыми, которые можно определить, владея способом вычисления. Здесь остается неизменной

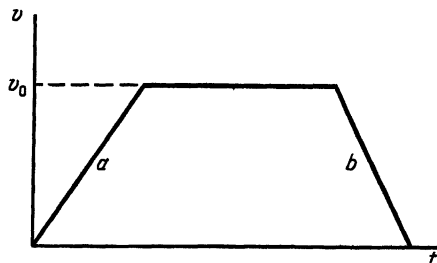


Рис. 2.7. Влияние ограничения максимальной скорости.

основная идея, состоящая в том, что решение должно соответствовать максимальному ускорению, сменяемому затем максимальным замедлением.

2) В задаче о движении между двумя точками можно учесть наличие максимальной безопасной скорости $v=v_0$ наряду с максимальным ускорением a и замедлением b . На диаграмме скорость — время решение, полученное при условии минимальных затрат времени на движение, будет теперь изображаться не двумя, а тремя линиями (рис. 2.7).

3) Определение «оптимального решения» может быть изменено. Например, с целью снижения затрат на горючее водитель должен добиваться минимального расхода топлива, а не максимальной скорости. В этом случае пользоваться тормозом расточительно, и решение, при котором автомобиль движется по инерции к состоянию покоя в конце пути, будет более предпочтительным по сравнению с тем, которое требует резкого торможения.

2.5. МАНЕВРИРОВАНИЕ АВТОМОБИЛЕМ

Применим предложенную модель для исследования управления транспортным средством при движении в двух измерениях. Так как существует минимально допустимый радиус поворота, ограничения теперь будут накладываться на кривизну пути. В качестве простейшей модели более сложных траекторий движения четырехколесного аппарата можно исследовать кратчайшие пути для геометрической точки, траектории движения которой имеют ограниченную кривизну. Можно потребовать, чтобы полное решение состояло из прямолинейных участков (кратчайшие пути в пространстве) и отрезков окружности минимального радиуса; оказывается, однако, что и в общем случае никаких других путей рассматривать не нужно. В приведенных ниже примерах радиус кривизны пути равен a .

ПРИМЕР 5

Автомобиль начинает двигаться из точки A перпендикулярно прямой AB . Определить минимальные пути от A до B без использования заднего хода при следующих предположениях.

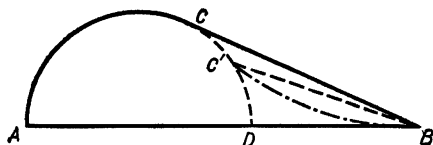


Рис. 2.8. Пути при $AB > 2a$.

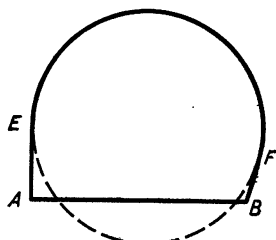


Рис. 2.9. Прямолинейные и криволинейные участки пути.

1) Случай $AB > 2a$ (см. рис. 2.8). Очевидно, что нужно начинать с поворота по направлению к B по окружности ACD радиуса a . Проведем касательную CB . Тогда искомым путем будет ACB .

Из примера 1 видно, что такой путь, как $AC'B$, даже если отсутствует излом в точке C' , будет длиннее, а путь от C' до B , содержащий криволинейный участок для исключения излома (штрихпунктирная линия) должен быть больше, чем $C'B$. Отсюда и следует указанный выше результат.

2) Случай $AB < 2a$. Если точка B лежит внутри AD , круговой участок пути не может проходить через B . Ниже предлагаются два возможных решения.

Можно сначала двигаться по прямой линии AE , затем использовать окружность, касательную к AE , и касательный к ней отрезок прямой FB , проходящий через точку B (рис. 2.9).

Другое решение заключается в использовании сначала дуги окружности AE , изогнутой в направлении от точки B , а затем перехода на сопряженную окружность EB , имеющую противоположную кривизну (рис. 2.10).

В качестве интересного упражнения по элементарной геометрии можно вычислить расстояния в обоих случаях. При этом оказывается, что второй путь лучше.

ПРИМЕР 6

Автомобиль, расположенный в точке A так, что он может начать двигаться под углом θ_0 к линии AB , необходимо переместить в точку B , расположив его под углом θ_1 к AB (на автомобильных стоянках часто требуется ставить машины между разметочных линий, начерченных под определенным углом, см. рис. 2.11).

Метод решения состоит в том, чтобы нарисовать окружности (радиуса a), касающиеся заданных направлений как в точке A , так и в

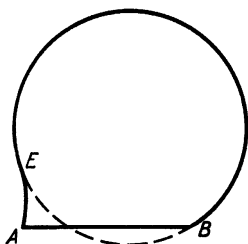


Рис. 2.10. Кривые с кривизной противоположных знаков.

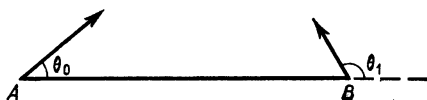


Рис. 2.11. К постановке задачи.

точке B , нанося на них стрелки для обозначения направления движения (рис. 2.12). Соединим теперь одну окружность с другой общей касательной, учитывая направление движения на ее концах, например EH , FG . Отсюда в общем случае нетрудно определить, какой путь будет самым коротким.

В качестве упражнений можно аналогичным образом рассмотреть, во-первых, что произойдет, если водителю будет разрешено включать задний ход, и, во-вторых, что произойдет в общем случае, когда одна или обе окружности, проходящие через точку A , пересекают окружности, проходящие через точку B .

2.6. ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Как утверждалось выше, рассмотренные здесь примеры являются сравнительно простыми случаями задач разных типов, поставляющих подготовительный материал для вариационного исчисления и

теории оптимального управления. В математике эти дисциплины соответствуют некоторым углубленным исследованиям в области дифференциальных уравнений и топологической динамики. Практические приложения включают выбор траектории с минимальными затратами топлива для полетов к Луне и планетам, выбор курса в

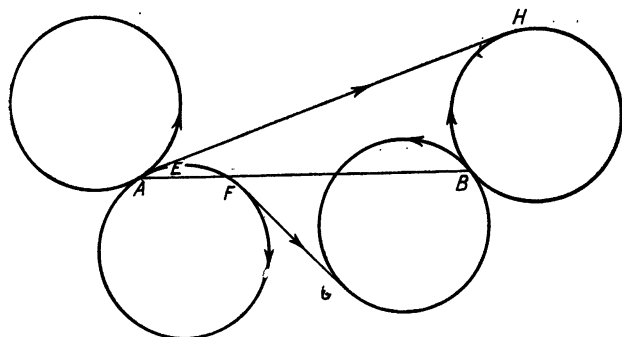


Рис. 2.12. Геометрическое решение.

океане с минимальными затратами времени для яхт и других парусных судов, а также все аналогичные транспортные задачи. Много других приложений обусловлено конструированием управляющих механизмов для автоматических устройств. Строгальный станок, например, должен обладать медленным рабочим ходом и свободным обратным ходом. Управляющее устройство должно минимизировать потребление мощности машиной. Автоматическая печь для обжига глиняной посуды должна быть оборудована транспортером, движущимся через нагревательную камеру и обеспечивающим соответствующие времена пребывания при разных температурах; при этом мощность, затрачиваемая на обогрев камеры, должна быть минимизирована.

2.7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Craggs J. W., (1973). *Calculus of Variations*, Allen and Unwin; London.

2.8. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Евклид определял прямую линию как кратчайшее расстояние между двумя точками. Идея этого определения состоит, грубо говоря, в том, что вы фиксируете один конец лески, например, а в другой точке наматываете леску. Когда наматывать больше невозможно, вы получите кратчайшее расстояние.

- а) Как можно измерить талию, если определить ее как часть туловища, имеющую наименьшую окружность?
- б) «Английская горная дорога» имеет с обеих сторон кирпичные стены, в которых проделаны садовые калитки. Как следовало бы указывать кратчайший маршрут по такой дороге? Что вместо линейки и натянутой струны является в этом случае более подходящим для определения прямой линии?
- в) Берег водоема имеет форму трилистника; такая фигура получается, если провести через данную точку на поверхности земли три равных симметрично расположенных окружности, а затем выкопать землю, принадлежащую хотя бы одному из нарисованных кругов. Поверхность воды представляет собой «объединение» площадей кругов. Найти кратчайший замкнутый путь, огибающий водоем. Как нужно организовать прогулку по этому пути? Как обозначить эту дорогу для слепого при помощи веревки, натянутой на колышки?

2. Перечислить как можно больше случаев, когда путешественник, передвигаясь при помощи транспорта или пешком, найдет, что скорость его движения зависит от направления. (Пример: езда на велосипеде при сильном ветре.)

- а) Лыжник, взбирающийся на гору, использует то обстоятельство, что трение между снегом и лыжами в направлении, поперечном к лыжам, больше, чем в продольном. Каким образом лыжник взбирается на крутые горы?
- б) Если коэффициент трения вдоль лыжи равен 0,05, а поперек — 0,40, наклон снежной горы (отношение длины горы к ее высоте) составляет 5 к 1, каков кратчайший маршрут (и пройденное расстояние), ведущий к желаемой вершине?
- в) Если скорость под углом θ к данной линии составляет $1 + 2\theta/\pi$ ($0 < \theta < \pi$), какой путь является самым быстрым в направлении $\theta = 0$?

3. Если движущийся аппарат способен совершить поворот по любой окружности радиуса, большего a , кратчайший путь будет состоять из дуг окружностей радиуса a и отрезков прямых. Если задний ход не разрешен, круговой путь должен идти лишь в «прямом» направлении. Если задний ход возможен, круговой путь может быть пройден в обоих направлениях.

Нарисуйте три окружности равного радиуса a ; центры A и B двух окружностей находятся на расстоянии $2b = 4a \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$), третья касается первых двух, как показано на рис. 2.13. Проведите с другой стороны общую касательную CD к пересекающимся окружностям. Вычислите теперь длину дуги $PQ + QR + RS$ и длину $PC +$

$+CD+DS$, где точки P и S принадлежат общему диаметру AB . Какая величина больше? Зависит ли это от θ ? Могут ли они быть равными? Далее, сравните длину дуги $LR+RQ+QM$ с длиной дуги $LD+DC+CM$. Ответьте теперь на следующие вопросы.

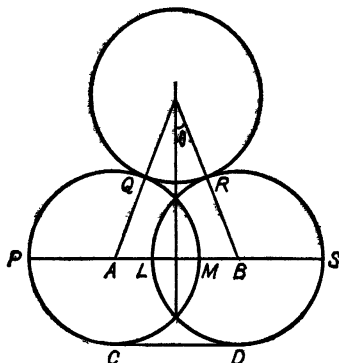


Рис. 2.13. К задаче 3.

- а) Автомобиль, расположенный в точке P и направленный вверх (в плоскости рисунка), нужно передвинуть в точку S так, чтобы он был направлен вниз. Каков кратчайший путь такого перемещения?
- б) Автомобиль, расположенный в точке L и направленный вверх, нужно передвинуть в точку M так, чтобы он был направлен вниз. Каков кратчайший путь, если разрешен задний ход и если задний ход запрещен?
- в) Автомобиль, направленный в точке S вверх, остановить в точке P в таком же положении. Какой путь является кратчайшим при разрешенном заднем ходе и при запрещенном заднем ходе?

4. Требуется обеспечить транспортом данную планету. Поверхность ее настолько неровная, что колесные или гусеничные машины использовать практически невозможно. Планета не имеет атмосферы. Предлагается аппарат, оборудованный управляемым ракетным двигателем, который может быть установлен под некоторым углом к вертикали, чтобы обеспечить подъем и горизонтальное ускорение. Потребление топлива ракетой за единицу времени приблизительно пропорционально квадрату силы тяги (пояснить, почему). Обсудить задачу определения пути, требующего минимальных затрат топлива, между двумя точками на поверхности планеты.

5. Выходная мощность электродвигателя пропорциональна квадрату потребляемого тока. Однако ток может быть уменьшен (при постоянном напряжении питания) только при использовании сопро-

тивления, которое само потребляет мощность, пропорциональную разности между максимально допустимым и используемым током. Двигатель применяется для приведения транспортного средства в движение со средней скоростью V , зависящей от сопротивления F . Выяснить вопрос о потребляемой мощности в следующих случаях:

- а) когда сопротивление используется для управления током с целью достижения постоянной скорости;
- б) когда ток быстро включается и выключается так, что периоды подачи тока занимают определенную долю каждой секунды.

Какая из этих систем обеспечит более экономичное управление транспортным средством?

ПОЧЕМУ СТРОЯТ ТРЕХСТУПЕНЧАТЫЕ РАКЕТЫ?

Б. НОБЛ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: элементарная механика и обыкновенные дифференциальные уравнения]

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель ракеты — это упрощенная схема реальной ракеты. Сущность моделирования состоит в том, что модель должна быть похожа на оригинал одной или несколькими существенными характеристиками. Например, при моделировании ракеты мы можем интересоваться воспроизведением в модели лишь внешнего вида реальной ракеты (и тогда модели вовсе не нужен работающий двигатель) или, напротив, сконцентрировать усилия на создании работающей модели ракетного двигателя (в таком случае внешний вид ракеты для нас уже менее важен). Мы будем иметь дело с умозрительной моделью ракеты. Цель моделирования состоит в том, чтобы понять, почему реальная ракета сконструирована так, а не иначе. Хорошо известно, что для запуска спутника на орбиту используются ракетные ускорители, состоящие из трех ступеней. Сначала работает первая ступень; когда топливо в этой ступени кончается, топливный бак отделяется от ракеты. Аналогично работает вторая и, наконец, третья ступень. Хотелось бы понять, почему мы строим трехступенчатые, а, скажем, не одно-, двух- или четырехступенчатые ракеты.

Наиболее трудным шагом в математическом моделировании является первый. Сначала мы должны решить, какие факторы существенны, а какие можно не принимать во внимание. Ракета — система очень сложная. Она должна иметь мощный двигатель, прочную конструкцию, низкое аэродинамическое сопротивление и т. д. Очевидно, что основное требование состоит в том, чтобы двигатель был достаточно мощным для сообщения ракете довольно высокой скорости. Если конечная скорость окажется слишком низкой, ракета просто упадет на Землю.

Существует соблазн рассмотреть, как спутник выводится на орбиту: ракета-носитель взлетает вертикально из состояния покоя на земной поверхности и затем летит по орбите, вращаясь

¹⁾ B. Noble, University of Wisconsin and University of Oxford.

вокруг Земли. Однако в первую очередь нас будет интересовать требование, чтобы конечная скорость ракеты была достаточно большой. Это приводит к первому вопросу:

1. Как быстро спутник движется по орбите?

Далее нужно рассмотреть, как достичь этой скорости. В любой задаче динамики первым побуждением будет попытаться применить законы движения Ньютона. Второй закон Ньютона для тела постоянной массы утверждает, что

$$\text{сила} = \text{масса} \times \text{ускорение}$$

Для достижения большой конечной скорости за достаточно малое время необходимо большое ускорение, т. е. большая сила и маленькая масса. Это приводит к двум следующим вопросам:

2. Что определяет силу тяги ракетного двигателя?

3. Что определяет массу системы ракета — спутник?

После количественного ответа на эти вопросы мы обнаружим, что строить одноступенчатую ракету для вывода спутника на орбиту непрактично.

3.2. ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА

Рассмотрим вопрос (1). Оказывается, что здесь ключевым фактором является сила тяжести. Качественно ситуация изображена на рис. 3.1; сплошной линией *С* обозначена поверхность Земли, а штриховая линия изображает траекторию движения спутника. Если бы

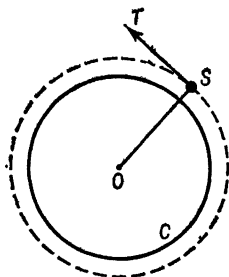


Рис. 3.1.

в точке *S* на спутник не действовали никакие силы, он двигался бы вдоль касательной *ST* к траектории (согласно первому закону Ньютона). В действительности сила тяжести, действующая вдоль прямой *SO* по направлению к центру Земли, заставляет спутник двигаться по пути, форму которого можно приближенно рассматривать как круговую.

Для простоты можно предположить, что Земля фиксирована в пространстве, имеет сферическую форму, а плотность ее вещества

распределена сферически симметрично. Ньютонский закон тяготения гласит, что сила, с которой каждая материальная частица во вселенной притягивается другой частицей, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Широко известно следствие этого закона, состоящее в том, что сила притяжения, действующая со стороны сферы, имеющей постоянную плотность, на массу, расположенную вне сферы, та же что и в случае, если вся масса сферы сосредоточена в ее центре (см. задачу 1). В такой простой модели поля тяготения Земли сила притяжения, действующая на тело массы m , находящееся на расстоянии r от центра Земли (здесь r превышает радиус Земли), определяется выражением

$$\frac{km}{r^2} \quad (k = \text{const}).$$

Эта сила направлена к центру Земли. Для того чтобы определить величину k , заметим, что, если g — ускорение силы тяжести на по-

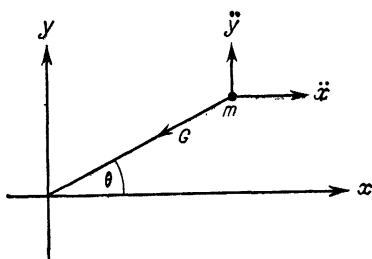


Рис. 3.2.

верхности Земли, второй закон движения Ньютона для тела постоянной массы дает

$$mg = \text{Сила тяжести} = \frac{km}{R^2},$$

где R — радиус Земли. Следовательно, $k = gR^2$, и сила притяжения, действующая на спутник массы m , движущийся на расстоянии r от центра Земли, определяется выражением

$$G = mg \left(\frac{R}{r} \right)^2.$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы написать уравнения движения спутника в плоскости, проходящей через центр нашей идеализированной Земли. Выбирая в этой плоскости фиксированные координатные оси x и y так, как показано на рис. 3.2, получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -G \cos \theta, \\ m\ddot{y} &= -G \sin \theta. \end{aligned}$$

Подставляя $\cos \theta = x/r$, $\sin \theta = y/r$, для круговой орбиты ($r = \text{const}$) прямым интегрированием найдем

$$v^2 = g \frac{R^2}{r}.$$

Здесь $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$,

g = ускорение силы тяжести,

R = радиус Земли,

r = радиус орбиты спутника.

Заметим, что значения $g = 9,81$ м/сек² и $R = 6400$ км можно определить при помощи измерений непосредственно на земной поверхности. Кроме того, значение v не зависит от массы спутника, и его можно грубо считать не зависящим от r для орбит, удаленных меньше чем на несколько тысяч миль от земной поверхности. Для того чтобы дать практический ответ на поставленный выше вопрос, предположим, что спутник движется по орбите на расстоянии 600 км от земной поверхности. Тогда

$$v = R \left(\frac{g}{r} \right)^{1/2} \approx 7,6 \text{ км/сек.}$$

Этот результат является ответом на первый вопрос.

3.3. СИЛА ТЯГИ РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Рассмотрим далее второй вопрос: что можно сказать о тяге ракетного двигателя? Простейшая модель ракеты состоит из двигателя и топливного бака. Получающиеся в результате сгорания топлива газы вытекают в кормовой части ракеты. Поток газа в направлении, противоположном движению ракеты, создает силу, действующую на ракету в направлении движения.

Действие ракетного двигателя можно объяснить при помощи закона сохранения импульса. Импульс отдельной частицы определяется как ее масса, умноженная на скорость. Для того чтобы найти полный импульс системы, нужно сложить импульсы всех ее отдельных частей. Закон сохранения импульса утверждает, что в замкнутой системе, на которую не действуют никакие внешние силы, полный импульс системы не меняется со временем.

Мы можем использовать этот закон для того, чтобы достичь некоторого понимания действия ракетного двигателя, рассматривая упрощенную модель, схематически изображенную на рис. 3.3. Представим себе ракету, движущуюся по прямой линии под действием газов, выбрасываемых из ее кормовой части. (Мы пренебрегаем здесь другими силами, такими, как гравитация, сопротивление воздуха и т. д.) Предположим, что во время t масса ракеты равна

$m(t)$, а ее скорость $v(t)$. Во время $t + \Delta t$ масса ракеты становится равной $m(t + \Delta t)$. Уменьшение массы определяется соотношением

$$- \{m(t + \Delta t) - m(t)\} = - \frac{dm}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2),$$

полученным при помощи теоремы Тейлора. В рассматриваемой упрощенной модели мы предполагаем, что это уменьшение массы происходит благодаря истечению газов с постоянной относительно

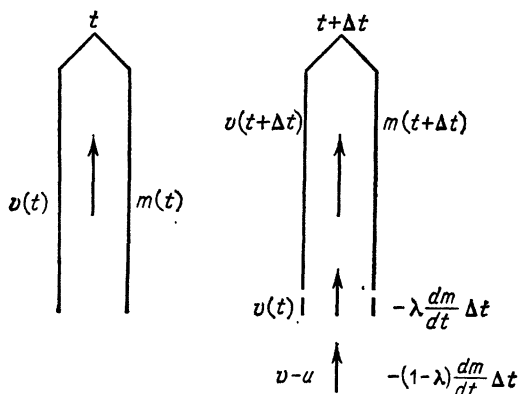


Рис. 3.3.

ракеты скоростью u . Это означает, что скорость газа относительно Земли равна $v(t) - u$.

Можно применить закон сохранения импульса к системе, показанной на рис. 3.3. Это дает

$$m(t) v(t) = m(t + \Delta t) v(t + \Delta t) - \left(\frac{dm}{dt} \Delta t \right) (v(t) - u) + O(\Delta t^2),$$

т.е.

импульс ракеты во время t = импульс ракеты во время $t + \Delta t$ + импульс, переданный газу во время $t + \Delta t$.

(Импульс газов, вышедших из двигателя до момента времени t , может быть учтен просто добавлением одинаковых членов к обеим сторонам этого равенства и, следовательно, может не приниматься во внимание.)

Разлагая величину $m(t + \Delta t)$ в ряд при помощи теоремы Тейлора и вычисляя предел при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} u. \quad (1)$$

Это поучительная формула ¹⁾. Левая часть представляет силу инерции. Следовательно, создаваемая истечением газов сила тяги T ракетного двигателя определяется выражением

$$T = - \frac{dm}{dt} u,$$

которое означает, что тяга равна произведению скорости сгорания топлива на скорость истечения газов относительно ракеты. Это дает ответ на второй вопрос.

Дифференциальное уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{dv}{dt} = - u \frac{d(\ln m)}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение при $u = \text{const}$, получим

$$v(t) = v_0 + u \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right), \quad (2)$$

где m_0 — начальная масса ракеты, а v_0 — ее скорость в момент времени $t=0$. Этот простой результат показывает, что изменение скорости ракеты зависит только от двух величин:

- а) скорости u истечения газов относительно ракеты (предполагаемой здесь постоянной),
- б) отношения массы ракеты во время $t=0$ к ее массе во время t .

3.4. МАССА СИСТЕМЫ РАКЕТА— СПУТНИК

Перейдем теперь к третьему вопросу: что определяет массу системы ракета — спутник?

Рассмотрим ракету массы m_0 , состоящую из

- а) «полезного груза», имеющего массу m_p ,
- б) топлива массы m_F ,
- в) структурной массы, т. е. массы топливного бака и двигателей m_S .

Сначала рассмотрим простейшую модель, согласно которой сгорает все топливо, а оставшаяся масса равна $m_p + m_S$. Топливный бак и двигатель в процессе подъема отделяются от ракеты, оставляя полезный груз, движущийся со скоростью, определяемой соотношением (2):

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_p + m_S} \right)^2. \quad (3)$$

¹⁾ Уравнение (1) — это основное уравнение движения точки переменной массы, полученное И. В. Мещерским в 1897 г. — *Прим. ред.*

²⁾ Это выражение есть известная формула К. Э. Циолковского, полученная им в 1903 г. — *Прим. ред.*

На практике трудно построить двигатель и топливные баки, общая масса которых была бы меньше одной восьмой или одной десятой массы топлива. Введем постоянную λ , определяемую соотношением

$$m_S = \lambda (m_F + m_S) = \lambda (m_0 - m_P),$$

т. е. представляющую отношение структурной массы к сумме структурной массы и массы топлива. Тогда формула (3) дает

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{\lambda m_0 + (1 - \lambda) m_P} \right).$$

Это сразу приводит к важному результату. При данной величине u максимальная скорость, которая может быть развита ракетой, достигается, как и ожидалось, если масса полезного груза равна нулю; величина этой максимальной скорости

$$v = u \ln \left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

Для современных топлив характерная величина u равна 3 км/сек. Если $\lambda = 0,1$, то

$$v = 7 \text{ км/сек.}$$

Так как спутник движется по орбите со скоростью около 7,6 км/сек, а найденное нами максимальное значение скорости получено

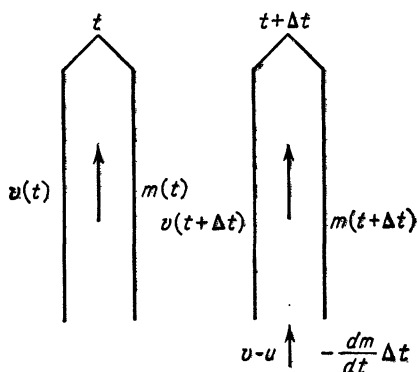


Рис. 3.4.

при пренебрежении сопротивлением воздуха, тяготением и в предположении, что ракета не несет полезного груза, ясно, что ракета такого типа не может использоваться для выведения спутника на орбиту.

Одна из причин этого осложняющего обстоятельства состоит в том, что двигатель должен ускорять весь мертвый структурный вес вплоть до достижения конечной скорости. Когда топливо почти исчерпано, двигатель затрачивает большую часть своей мощности

на ускорение почти пустого топливного бака. Работу двигателя можно было бы сделать более эффективной, если сбрасывать бесполезный вес по мере выгорания топлива. Рассмотрим идеализированную ситуацию, схематически изображенную на рис. 3.4. Предположим, что между моментами времени t и $t + \Delta t$ изменение отношения масс λ обусловлено только отделяемой структурной массой, а $(1 - \lambda)$ есть доля массы, сгоревшей и в виде газа выброшенной в пространство со скоростью u . (Конечно, построить ракету, работающую таким образом, было бы невозможно, но возражения такого рода не относятся к делу, так как мы сейчас рассматриваем работу идеализированной модели. Если такая модель даст нам желаемый результат, тогда можно будет попытаться приблизиться к идеалу на практике.)

Закон сохранения импульса имеет теперь вид

$$m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) - \lambda \frac{dm}{dt} \Delta t v(t) - (1 - \lambda) \frac{dm}{dt} \Delta t (v - u).$$

Проводя необходимые преобразования и устремляя Δt к нулю, получим соотношение

$$m \frac{dv}{dt} = (1 - \lambda) u \frac{dm}{dt},$$

интегрируя которое, найдем

$$v(t) = (1 - \lambda) u \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right).$$

По виду оно напоминает формулу, полученную ранее, но есть и одно существенное отличие. Это отличие состоит в том, что конечная масса, остающаяся после того, как топливо полностью использовано, есть просто масса полезного груза, так как ко времени, когда сгорает все топливо, вся структурная масса отделяется. Следовательно, конечная скорость равна

$$v = (1 - \lambda) u \ln \left(\frac{m_0}{m_p} \right).$$

При заданных значениях величин u , λ и начальной массы m_0 полезный груз может быть ускорен до любой нужной скорости, хотя чем больше требуемая скорость, тем меньше будет допустимый полезный груз.

Предположим, что с учетом таких факторов, как сопротивление воздуха, гравитация и т. д., наша идеализированная ракета должна быть сконструирована так, чтобы она могла достичь конечной скорости 10,5 км/сек (вместо полученных ранее 7,6 км/сек). Пусть, как и ранее, $\lambda = 0,1$, $u = 3$ км/сек. Тогда

$$\frac{m_0}{m_p} \approx 50,$$

т. е. полезный груз в рассмотренном примере составляет одну пятидесятую начальной массы всей системы. Для полезного груза весом в одну тонну нужна пятидесятитонная ракета.

3.5. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИДЕАЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Следующим является вопрос: как можно приблизиться к этой идеальной конструкции на практике? Ответ состоит в том, что нужно построить ракету, состоящую из отдельных ступеней, и в процессе полета отбрасывать каждую ступень после того, как топливо в ней будет полностью использовано. Пусть

m_i — общая масса топлива и структуры i -й ступени.

Предположим также, что λm_i определяет структурную массу, а $(1-\lambda)m_i$ — массу топлива, и для упрощения считается, что λ одинаково для всех ступеней. Кроме того, для простоты полагаем, что скорость истекающих газов u для всех ступеней одна и та же.

Проанализируем характеристики трехступенчатой ракеты. Начальная масса ракеты определяется выражением

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3.$$

Когда все топливо первой ступени израсходовано, оставшаяся масса равна

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3,$$

а скорость (согласно первоначальной модели)

$$v_1 = u \ln \left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right).$$

После этого структурная масса m_1 отделяется и включается вторая ступень. Когда топливо второй ступени израсходовано, достигается скорость

$$v_2 = v_1 + u \ln \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right).$$

Аналогично, скорость после окончания работы третьей ступени равна

$$v = v_2 + u \ln \left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right).$$

Сейчас мы подошли к тому, чтобы определить параметры трех ступеней, дающие максимальное значение массы полезного груза. Чтобы сформулировать вопрос более точно, предположим, что известна конечная скорость v , которую необходимо развить, скорость истечения газов относительно ракеты u и структурный параметр

λ . Как нужно выбрать m_1 , m_2 и m_3 , чтобы получить максимальное значение массы полезного груза m_p для данной полной начальной массы m_0 ?

Математическая формулировка задачи такова: для данных значений m_0 , v , u , λ найти максимальное значение m_p при условиях

$$m_p + m_1 + m_2 + m_3 = m_0$$

и

$$\frac{v}{u} = \ln \left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right) \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right) \left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right).$$

Решение этой задачи в принципе несложно, но без упрощения исходных выражений некоторые детали решения могут стать слишком громоздкими. Наиболее легким путем решения задачи является введение новых переменных

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}, \quad \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p}.$$

Тогда задача может быть сведена к следующей: минимизировать произведение $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ при условии

$$\frac{v}{u} = \ln \left\{ \left(\frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)} \right) \left(\frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)} \right) \left(\frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)} \right) \right\}$$

(см. задачу 3).

При такой формулировке удачным является то обстоятельство, что задача симметрична по отношению к α_1 , α_2 , α_3 . Это немедленно приводит к выводу, что оптимум должен достигаться, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Если обозначить их общую величину через α , легко увидеть, что

$$\frac{\alpha}{1 + \lambda(\alpha - 1)} = \exp \left(\frac{v}{3u} \right),$$

или

$$\alpha = \frac{1 - \lambda}{P - \lambda}, \quad \text{где } P = \exp \left(-\frac{v}{3u} \right).$$

Напомним, что мы оптимизируем произведение $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, которое равно отношению m_0/m_p , так что величина максимального полезного груза определяется формулой

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1 - \lambda}{P - \lambda} \right)^3, \quad \text{где } P = \exp \left(-\frac{v}{3u} \right).$$

В случае, рассмотренном в конце § 3.4, $v/u = 3,5$, $\lambda = 0,9$; таким образом, находим

$$\frac{m_0}{m_p} = 77.$$

Отсюда следует, что для полезного груза весом в одну тонну нужна трехступенчатая ракета весом 77 тонн. Это значение существенно отличается от тех 50 тонн, которые мы нашли ранее для идеализированной ракеты, отбрасывающей в процессе полета свою структурную массу непрерывным образом.

Исследуем теперь вопрос о том, не является ли более выгодным строить вместо трехступенчатой ракеты двух- или четырехступенчатую. Из анализа трехступенчатой ракеты становится ясно, что оптимальное значение отношения m_0/m_P для n -ступенчатой ракеты в предположении, что u и λ одинаковы для всех ступеней, определяется выражением

$$\frac{m_0}{m_P} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda} \right)^n, \quad \text{где} \quad P = \exp \left(-\frac{v}{nu} \right).$$

Для проверки правильности этого результата устремим n к бесконечности; тогда это отношение будет стремиться к выражению, найденному ранее для идеальной ракеты, структурная масса которой отбрасывается непрерывным образом по мере подъема

$$\frac{m_0}{m_P} = \exp \left(\frac{v}{(1-\lambda)u} \right).$$

Теперь можно составить таблицу масс n -ступенчатой ракеты, предназначенной для вывода на орбиту спутника массой в одну тонну, при значениях v/u и λ , предполагаемых равными использованным выше:

$n =$ число ступеней	1	2	3	4	5	∞
масса (в тоннах)	—	149	77	65	60	50

Очевидно, что имеет смысл использовать три ступени вместо двух. Однако уменьшение массы ракеты, достигаемое при использовании четырех ступеней вместо трех, компенсируется сложностью и большими затратами на создание сложных двигателей и топливных баков. На практике три ступени соответствуют оптимальной конструкции.

До настоящего момента наш анализ представлялся не зависящим от размера ракетного двигателя, хотя очевидно, что для подъема над Землей ракеты весом 77 тонн нужно использовать большой двигатель. Один из удачных моментов анализа состоял в том, что при определении необходимых параметров ракетного двигателя можно было не учитывать влияние силы тяжести. Однако сейчас мы должны рассмотреть процесс выведения спутника на орбиту. В начальный момент ракета находится в состоянии покоя на поверхности Земли, а затем взлетает вертикально вверх. Это означает, что двигатель должен быть мощным настолько, чтобы преодолеть действующую на ракету силу тяжести. Как показано выше, тяга ра-

кеты определяется выражением

$$T = - \frac{dm}{dt} u.$$

В современной технике принято создавать тягу T , превышающую при подъеме вес ракеты приблизительно в 1,25 раза. Кроме того, типичная величина скорости вытекающих из двигателя газов u равна 3 км/сек. Если значение m выражено в тоннах, скорость сгорания топлива в ракетном двигателе должна быть равной

$$- \frac{dm}{dt} = \frac{1,25mg}{u} = \frac{(1,25)(9,81)(60)}{3\,000} m = 0,24 m \text{ тонн/мин.}$$

Таким образом, ракетный двигатель должен сжигать около четверти всей массы ракеты за одну минуту. Теперь ясно, почему ракетный двигатель работает лишь несколько минут. Размеры двигателя, требующегося для подъема нашей 77-тонной ракеты над Землей, можно оценить исходя из того, что согласно написанной выше формуле сгорание топлива должно происходить со скоростью около 20 тонн/мин.

Конечно, обсуждение, приведенное здесь, является только самым начальным подходом к проблеме. Некоторые усложнения, вводимые в математическое моделирование реальных ракет, рассматриваются в книге Болла и Осборна (1967). Это замечательная книга, прекрасно иллюстрирующая принципы построения более сложных моделей, предназначенных для того, чтобы прояснить самые различные аспекты создания космических аппаратов. Ее можно рекомендовать вдумчивому читателю.

3.6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ball K. J., Osborne G. F. (1967). Space Vehicle Dynamics, Oxford University Press; London.

3.7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Вывести выражение для скорости спутника на орбите исходя из описанной ниже модели. Предположим, что Земля фиксирована в пространстве, имеет сферическую форму, а распределение плотности ее вещества сферически симметрично. Ньютоновский закон тяготения гласит, что каждая частица вещества притягивает каждую другую частицу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Сила притяжения пропорциональна произведению масс. Показать, что сила притяжения, действующая на спутник, та же, какая была бы в случае, если бы вся масса Земли бы-

ла сосредоточена в ее центре. Записать уравнения движения спутника, летящего в плоскости, проходящей через центр Земли, предполагая, что орбита спутника представляет собой окружность с центром, совпадающим с центром Земли. Показать, что

$$v^2 = \frac{gR^2}{r},$$

где v — скорость спутника, g — ускорение силы тяжести, R — радиус Земли, r — радиус орбиты спутника. Показать, что скорость спутника, движущегося по орбите, удаленной на несколько сотен километров от поверхности Земли, приближенно равна 7,6 км/сек, или 27 000 км/ч.

2. Вывести закон сохранения импульса из следующих предположений. Рассмотрим систему n частиц; пусть масса i -й частицы равна m_i , а ее положение во время t определяется вектором (x_i, y_i, z_i) . Предположим, что система изолирована, т. е. на нее не действуют никакие внешние силы. В системе присутствуют лишь силы взаимодействия между частицами; силу, с которой частица j действует на частицу i , обозначим вектором $(F_{xij}, F_{yij}, F_{zij})$. (Заметим, что какова бы ни была природа взаимодействия между частицами, сила действия j -й частицы на i -ю в точности равна силе, действующей со стороны частицы i на частицу j . Это — третий закон Ньютона: силы действия и противодействия равны по величине и противоположно направлены.)

3. Вывести формулу для массы полезного груза, который может быть выведен на орбиту n -ступенчатой ракетой. Найти предельный вид формулы при $n \rightarrow \infty$ и вывести его непосредственно из модели, в которой масса конструкций ракеты отделяется непрерывным образом. Убедиться, что массы ракет, требуемые для доставки на орбиту спутника массой в одну тонну, те же, что и в приведенной выше таблице.

4. Доказать основной результат, требуемый для вывода формулы, определяющей массу полезного груза, который может быть выведен на орбиту при помощи n -ступенчатой ракеты: если w_r — общая масса ракеты при включении двигателей ступени r , то при оптимальной конструкции ракеты, максимизирующей полезный груз, выводимый на орбиту, отношение w_{r-1}/w_r является постоянной величиной, не зависящей от r при $r=1, 2, \dots, n$ (w_n равно массе полезного груза).

5. Так как полученные нами формулы зависят лишь от отношения m_0/m_p , казалось бы, что ракета массой 77 кг может вывести спутник массой 1 кг на околоземную орбиту. Ясно, что это неверно. Указать по меньшей мере две причины, по которым предложенная

модель дает этот неточный результат. Перечислить некоторые другие слабые места использованной здесь модели системы ракета — спутник. Какие из них наиболее существенны? Как можно было бы улучшить модель, чтобы учесть некоторые из этих факторов?

6. Как можно найти массы каждой из ступеней трехступенчатой ракеты, предназначенной для вывода на орбиту максимального полезного груза, если μ и λ — постоянные, различные для каждой из трех ступеней?

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ЕМКОСТИ

Н. КЕРЛ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: элементы гидродинамики и теории обыкновенных дифференциальных уравнений]

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Очевидная постановка рассматриваемой в этой главе задачи возникает из повседневной практики доставки молока в полиэтиленовых пакетах. Чтобы перелить молоко из пакета, его сначала устанавливают в «дозировующее устройство» так, чтобы пакет в процессе опорожнения с большой точностью сохранял свою форму. В каждом из двух свободных углов пакета проделывают небольшие отверстия, одно для вытекания молока, а другое для поступления воздуха. Целью главы является вычисление времени, требуемого для того, чтобы все молоко вытекло из пакета.

4.2. ТЕОРИЯ СВОБОДНЫХ СТРУЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА — КИРХГОФА

Используемая ниже модель основана на идеях и результатах теории свободных струй Гельмгольца — Кирхгофа (Милн-Томсон, 1968; гл. 11 и 12). Рассмотрим большую емкость, заполненную жидкостью плотности ρ при давлении p_1 . Вне емкости находится жидкость гораздо меньшей плотности, давление в которой равно p_0 , где $p_0 < p_1$. Если открыть малое отверстие в стенке емкости, жидкость будет вытекать в область более низкого давления в форме струи, граница которой с окружающей (более легкой) жидкостью свободна. Когда устанавливается стационарное течение, скорость струи u можно вычислить указанным ниже способом.

Рассмотрим линию тока AB на рис. 4.1. В стационарном течении из интеграла Бернулли в пренебрежении силами тяжести следует, что величина $p + (1/2)\rho u^2$ вдоль линии тока постоянна, так что

$$p_A + (1/2)\rho u_A^2 = p_B + (1/2)\rho u_B^2. \quad (1)$$

¹⁾ N. Curle, Department of Applied Mathematics, University of St. Andrews.

Учитывая теперь закон сохранения массы для каждой трубки тока и то, что линии тока в окрестности точки B гораздо ближе одна к другой, чем в окрестности точки A , получим

$$u_B \gg u_A.$$

Поэтому, выражение (1) может быть записано в виде

$$p_A \simeq p_B + (1/2)\rho u_B^2.$$

Так как давление должно быть непрерывно при переходе через

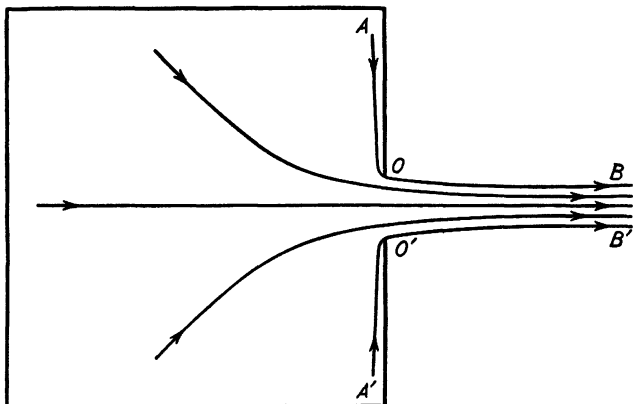


Рис.4.1. Истечение из закрытой емкости,

свободную поверхность струи, то

$$p_B = p_0.$$

Кроме того, так как частицы жидкости вблизи точки A находятся почти в состоянии покоя, имеем

$$p_A = p_1.$$

Следовательно,

$$u_B^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}.$$

Объем жидкости, вытекающей из емкости за единицу времени, равен

$$V = u_B A_B,$$

где A_B — поперечное сечение полностью развитой струи в окрестности точки B . Площадь A_B в общем случае не равна площади отверстия A_0 , так как после выхода из отверстия струя стремится сузиться. Причина сужения состоит в невозможности мгновенного изменения направления течения жидкости вблизи точек O и O' ;

эффект сужения увеличивается с ростом угла поворота линий тока. Коэффициент сужения

$$C = A_B/A_0$$

зависит поэтому от угла α , который образуют обе стенки емкости с осью симметрии струи.

Для плоского течения задачу можно решить точно, используя теорию функций комплексной переменной. Результаты вычисления коэффициента сужения в этом случае приведены для разных углов α в табл. 4.1 вместе с некоторыми экспериментальными данными.

Таблица 4.1

Коэффициент сужения

α	0	22,5°	45°	67,5°	90°	180°
C (теория)	1	0,855	0,745	0,666	0,611	0,500
C (экспер.)	—	0,882	0,753	0,684	0,632	0,541

Следует отметить, что опытные величины несколько выше предсказываемых теорией; отличие лежит в пределах от 1 до 8%.

В случае пространственного осесимметричного истечения из круглого отверстия ситуация несколько иная. Можно показать (см. Милн-Томсон, 1964; Биркгоф, Сарантонелло, 1964), что $C=1/2$ при $\alpha=180^\circ$ и, очевидно, $C=1$ при $\alpha=0$ (так как все линии тока в этом случае являются прямыми линиями). При $\alpha=90^\circ$ в случае, показанном на рис. 4.1, весьма изящное исследование, выполненное Гарабедяном (1956), показывает, что коэффициент сужения очень близок к 0,58 (с точностью до двух значащих цифр). Учитывая, что опытные величины в табл. 4.1 в случае плоского течения слегка превышают вычисленные теоретически, а результаты теории осесимметричного течения несколько ниже, чем для плоской струи, следует заключить, что, вероятно, не будет большой ошибки, если везде далее использовать теоретические величины из табл. 4.1.

Рассмотрим теперь емкость, открытую с обоих концов, и учтем действие силы тяжести. Например, рассмотрим истечение из воронки, половина угла конусности которой равна α , показанное на рис. 4.2. Из интеграла Бернулли следует, что в случае стационарного течения величина $p+(1/2)\rho u^2+\rho gy$ постоянна вдоль каждой линии тока. Тогда для линии тока AB имеем

$$p_B + (1/2)\rho u_B^2 = p_A + (1/2)\rho u_A^2 + \rho gh, \quad (2)$$

где h — высота от OB до свободной поверхности жидкости. Заметим, что h будет уменьшаться при истечении жидкости из воронки; однако, если площадь выходного отверстия достаточно мала, уменьшение высоты h будет происходить очень медленно, и в этом случае течение приближенно можно считать стационарным.

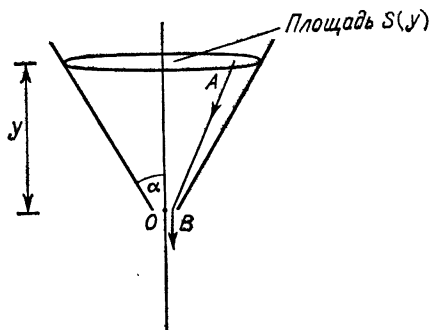


Рис. 4.2. Истечение из открытой емкости.

Давления в точках A и B должны быть равны внешнему давлению p_0 . Как и ранее, величина u_A^2 пренебрежимо мала по сравнению с u_B^2 . Тогда выражение (2) принимает вид

$$(1/2)\rho u_B^2 = \rho gh,$$

или

$$u_B^2 = 2gh.$$

4.3. ВРЕМЯ ОПОРОЖНЕНИЯ ЖЕСТКОЙ ЕМКОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим емкость, в начальный момент заполненную жидкостью до высоты h от малого отверстия, истечение через которое начинается в момент времени $t=0$. Для простоты рассмотрим жесткую емкость, каждая точка которой фиксирована.

Предположим, что высота поверхности в момент времени t равна y , а площадь свободной поверхности — $S(y)$. За время Δt уровень жидкости падает на величину $-\Delta y$. Тогда объем жидкости, покидающей емкость, равен

$$-S(y)\Delta y.$$

Скорость, с которой жидкость вытекает из емкости, равна $(2gy)^{1/2}$, так что объем жидкости, вытекающей за время Δt , равен

$$AC (2gy)^{1/2} \Delta t,$$

где A — площадь выходного отверстия, а C — коэффициент сужения струи. Приравнивая эти выражения, имеем

$$-S(y) \frac{dy}{dt} = AC (2gy)^{1/2}. \quad (3)$$

Это простое уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, из которого можно определить y как функцию t . Действительно,

$$AC (2g)^{1/2} t = - \int_h^y \frac{S(y)}{y^{1/2}} dy. \quad (4)$$

Здесь использовано начальное условие $y=h$ при $t=0$.

В качестве характерного примера рассмотрим коническую емкость с углом 2α при основании. Текущий радиус сечения на высоте y равен $y \operatorname{tg} \alpha$, а площадь сечения имеет вид

$$S(y) = \pi (y \operatorname{tg} \alpha)^2.$$

Тогда выражение (4) дает

$$AC (2g)^{1/2} t = - \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \int_h^y y^{3/2} dy = \frac{2}{5} \pi \operatorname{tg}^2 \alpha (h^{5/2} - y^{5/2}).$$

Емкость полностью опорожняется при $y=0$, а время, необходимое для достижения такого положения поверхности, равно

$$t = \frac{\frac{2}{5} \pi \operatorname{tg}^2 \alpha h^{5/2}}{AC (2g)^{1/2}}. \quad (5)$$

Записывая это выражение в подходящей форме (см. задачу 1), можно показать, что средняя скорость истечения равна $5/6 (2gh)^{1/2}$. Эта величина значительно ближе к максимальной скорости истечения $(2gh)^{1/2}$, чем к минимальной ее величине, равной нулю, так как большая часть жидкости вытекает, пока y достаточно близко к h и $(2gy)^{1/2}$ близко к $(2gh)^{1/2}$. Точная величина постоянной (равной $5/6$ в рассмотренном примере) будет зависеть от формы емкости и должна быть больше $1/2$, если емкость расширяется от основания к верхней части; в этом легко убедиться, если проделать необходимые выкладки. Аналогично, в случае цилиндрической емкости, когда поперечное сечение не меняется с высотой y , можно ожидать, что величина постоянной будет в точности равна $1/2$.

Результатом решения задачи 2, в которой рассматривается семейство емкостей, формы которых определены зависимостью площади поперечного сечения от высоты вида

$$S(y) = S_0 (y_0/h)^{2n},$$

является время опорожнения емкости, равное

$$t = \frac{V_0}{AC\bar{v}}.$$

Здесь V_0 — начальный объем жидкости в емкости; средняя скорость истечения имеет вид

$$\bar{v} = \frac{2n+1/2}{2n+1} (2gh)^{1/2}.$$

Следует отметить, что для цилиндрической емкости, как и ожидалось, $\bar{v} = (1/2) (2gh)^{1/2}$ ($n=0$); для конуса ($n=1$) $\bar{v} = 5/6 (2gh)^{1/2}$.

4.4. ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ОПОРОЖНЕНИЯ ПАКЕТА С МОЛОКОМ

Там, где живет автор этой главы, молоко развозят в пакетах, форма которых приближенно изображена на рис. 4.3. Молоко льется из отверстия B , а воздух входит через отверстие A . Благодаря последнему отверстию существует максимальный угол, на который можно наклонить пакет. Эта максимальная величина θ в начальный

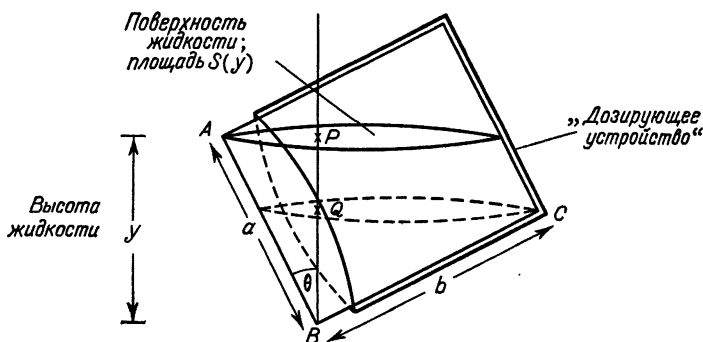


Рис. 4.3. Полиэтиленовый пакет с молоком: начальные стадии опорожнения.

момент времени равна приблизительно 10° , хотя при понижении уровня жидкости этот угол может увеличиваться.

В качестве первого приближения рассмотрим модель, в которой угол θ равен постоянной величине α ($=10^\circ$). Объем, занятый молоком в начальный момент времени, состоит из двух частей. Нижняя часть имеет вид наклонного конуса, вершина которого находится внизу, высотой $BQ = h_1 = b \sin \alpha$; основание приближенно можно считать эллипсом, площадь которого обозначим S_0 . Верхняя часть представляет собой наклонный цилиндр высотой $PQ = h - h_1$ с тем же самым приближенно эллиптическим поперечным сечением пло-

щади S_0 . Таким образом,

$$\begin{aligned} S(y) &= S_0 (y/h_1)^2, & 0 \leq y \leq h_1 \\ S(y) &= S_0, & h_1 \leq y \leq h. \end{aligned} \quad (6)$$

Время, требующееся для вытекания всего молока, определяется из выражения (4) в виде

$$\begin{aligned} AC (2g)^{1/2} t &= \int_0^h \frac{S(y)}{y^{1/2}} dy = \int_0^{h_1} S_0 \left(\frac{y}{h_1} \right)^2 \frac{dy}{y^{1/2}} + \int_{h_1}^h S_0 \frac{dy}{y^{1/2}} = \\ &= 2S_0 \left(h^{1/2} - \frac{4}{5} h_1^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Можно легко убедиться, что этот результат согласуется с полученным выше для цилиндрической емкости ($h_1 \rightarrow 0$) и для конуса ($h_1 \rightarrow h$).

Выражение (7) может быть записано в форме

$$t = \frac{2S_0 h \left\{ 1 - \frac{4}{5} (h_1/h)^{1/2} \right\}}{AC (2gh)^{1/2}}. \quad (8)$$

Поперечное сечение S_0 соответствует высоте h_1 , а величину h можно определить из условия, что начальный объем молока V_0 в точности равен одной пинте. Тогда

$$V_0 = \frac{1}{3} S_0 h_1 + S_0 (h - h_1) = S_0 \left(h - \frac{2}{3} h_1 \right)$$

и соотношение (8) принимает вид

$$t = \frac{2V_0}{AC (2gh)^{1/2}} \frac{1 - \frac{4}{5} \left(\frac{h_1}{h} \right)^{1/2}}{1 - \frac{2}{3} \frac{h_1}{h}}. \quad (9)$$

В опытах, проделанных автором, пакет имел размеры $a=12,7$ см, $b=15,2$ см, а максимальный начальный угол наклона $\alpha=10^\circ$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h} &= \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha = 0,212, \\ \left(\frac{h_1}{h} \right)^{1/2} &= 0,460, \\ h &= (12,7 \cos 10^\circ) \text{ см} = 12,5 \text{ см} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(2gh)^{1/2} = 157 \text{ см/с.}$$

Подставляя эту величину в (9), получим

$$t = \frac{0,00938 V_0}{AC}. \quad (10)$$

В дальнейшем величину V_0 будем представлять в виде

$$V_0 = 1 \text{ пинта} = 0,568 \text{ л.}$$

Измеренное значение площади отверстия A , через которое вытекает молоко,

$$A = 0,258 \text{ см}^2.$$

Тогда выражение (10) приводит к конечному результату:

$$t = 27,7 \text{ с.}$$

Здесь в качестве величины коэффициента сужения струи использовано значение $C = 0,745$ для (максимальной) величины половины угла конусности, равной 45° .

С точностью, которой можно было достичь без секундомера, наблюдения показали, что молоко вытекает из пакета за 25 с, так что согласие между теорией и экспериментом вполне удовлетворительно. Однако полезно напомнить, что даже плохая теория может хорошо согласовываться с экспериментом, если существуют неучитываемые в теории погашающие друг друга эффекты. Поэтому далее мы рассмотрим пути возможного улучшения приведенной выше теории.

4.5. ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ИСТЕЧЕНИЯ

Развитая выше теория представляет собой теорию стационарного течения, предполагающую, что, когда уровень жидкости находится на высоте y , скорость вытекания в точности равна $(2gy)^{1/2}$. Очевидно, что в начальный момент эта скорость должна быть равна нулю, и, таким образом, условия применимости развитой выше теории реализуются лишь по истечении достаточно большого времени. В результате предложенная теория занижает величину времени, требуемого для опорожнения емкости.

О начальной стадии течений со свободной границей известно, вообще говоря, довольно мало, но, к счастью, имеющейся информации вполне достаточно для решения нашей задачи. Для плоской струи, вытекающей из емкости, стенки которой образуют угол $2\alpha = \pi$, показано (Керл, 1956), что существуют решения, отклонения которых от соответствующих стационарных решений убывают со временем как $e^{-\lambda t}$, где наименьшее значение λ равно

$$\lambda = \frac{(\pi + 2) U}{2d} (2 - \sqrt{2}) = \frac{1,506 U}{d}.$$

В этом выражении U представляет собой стационарную скорость струи, а $2d$ — ширину щели (в плоском случае). Для осесимметричного течения из круглого отверстия радиуса r можно соответственно предположить, что приближенное значение λ по порядку величины

будет равно

$$\lambda = \frac{1,506U}{r} \simeq \frac{1,506 (2gh)^{1/2}}{r}.$$

В случае емкости поперечного сечения $S(y)$ уравнение для $y(t)$ можно по аналогии с уравнением (3) записать в виде

$$-S(y) \frac{dy}{dt} = AC (2gy)^{1/2} (1 - e^{-\lambda t}),$$

если предположить, что скорость истечения в точности равна

$$(2gy)^{1/2} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Тогда

$$-\int \frac{S(y)}{y^{1/2}} dy = AC (2g)^{1/2} \int (1 - e^{-\lambda t}) dt$$

и, следовательно,

$$-\int_h^y \frac{S(y)}{y^{1/2}} dy = AC (2g)^{1/2} \left\{ t + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda t} - 1) \right\}.$$

Отсюда видно, что поправка к первоначально найденному времени опорожнения емкости не превышает величины

$$\lambda^{-1} = \frac{0,664r}{(2gh)^{1/2}}.$$

В рассмотренной выше задаче площадь отверстия была $0,258 \text{ см}^2$, так что

$$\pi r^2 = 0,258$$

и, следовательно,

$$r = \frac{0,508}{\sqrt{\pi}} = 0,287 \text{ см.}$$

Так как $(2gh)^{1/2} = 157 \text{ см/с}$, то величина максимальной поправки

$$\lambda^{-1} = 0,0012 \text{ с.}$$

пренебрежимо мала. Очевидно, эффект нестационарности может стать значительным только в случае, когда относительный размер отверстия много больше, чем в этой задаче.

4.6. ВЛИЯНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО НАКЛОНА ЕМКОСТИ

Второй фактор, которым до сих пор пренебрегали, состоит в том, что стенки пакета, примыкающие к отверстию, через которое вытекает молоко, расположены несимметрично относительно вертикали. Однако, хотя в начальные моменты времени угол наклона ограничен

из-за необходимости оставлять верхнее отверстие свободным для прохода воздуха, в процессе вытекания молока постепенно становится возможным увеличивать угол наклона, пока не будет достигнуто положение, симметричное относительно обеих стенок пакета. (В опытах, которые производил автор, такое положение достигалось почти бессознательным движением.)

При данном объеме жидкости в емкости высота поверхности принимает наибольшее значение при указанном выше симметричном

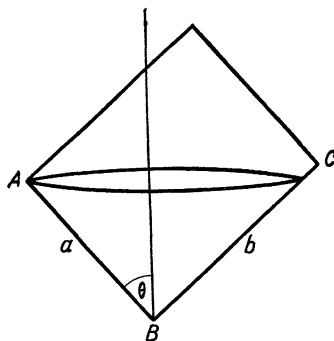


Рис. 4.4. Полиэтиленовый пакет с молоком: более поздние стадии опорожнения.

расположении емкости; увеличение высоты жидкости будет приводить к увеличению скорости истечения и к соответствующему уменьшению времени опорожнения. Вычислим теперь, насколько существен указанный эффект.

Пусть, как показано на рис. 4.3, начальное положение таково, что поверхность жидкости находится чуть ниже вершины угла A . Пусть угол θ постепенно увеличивается, начиная от значения $\alpha (=10^\circ)$, до величины, определяемой из соотношения $\operatorname{tg} \theta = a/b$, при которой поверхность располагается в точности вдоль диагонали AC ; начиная с этого момента условия становятся такими, как показано на рис. 4.4.

Пусть S — поверхность жидкости на начальной стадии. Так как эта поверхность приближенно имеет форму эллипса с большой осью длины $b \sec \theta$ и малой осью приблизительно постоянной длины, можно положить

$$S = S_0 \cos \alpha \sec \theta,$$

где S_0 — начальная площадь поверхности жидкости. Полный объем жидкости, содержащейся в емкости, равен

$$V = S(y - b \sin \theta) + \frac{1}{3} S(b \sin \theta). \quad (11)$$

Здесь первый и второй члены правой части представляют соответственно объем наклонного цилиндра сечением S и высотой $y = b \sin \theta$ и объем наклонного конуса с основанием, равным S , и высотой $b \sin \theta$. Поверхность жидкости находится на высоте

$$y = a \cos \theta. \quad (12)$$

Окончательно

$$\frac{dV}{dt} = -CA (2gy)^{1/2}. \quad (13)$$

Для решения системы уравнений (11) — (13) необходимо сначала исключить две из трех величин V , y и θ . Легче всего исключить V и y ; тогда получим

$$V = S_0 \cos \alpha \left(a - \frac{2}{3} b \operatorname{tg} \theta \right)$$

и, следовательно,

$$-\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3} S_0 b \cos \alpha \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = CA (2ga \cos \theta)^{1/2}.$$

В последнем уравнении переменные разделяются, что дает

$$\frac{3CA (2ga)^{1/2}}{2S_0 b \cos \alpha} t_1 = \int_{\operatorname{tg} \alpha}^{a/b} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau, \quad (14)$$

где $\tau = \operatorname{tg} \theta$, а t_1 — время, требуемое для первой стадии опорожнения. Величина интеграла легко вычисляется численно с использованием правила Симпсона.

На второй стадии ситуация такова, как показано на рис. 4.4. В начальный момент второй стадии (т. е. при $t = t_1$)

$$\begin{aligned} S &= S_1 = S_0 \cos \alpha \sec \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right) \right\} = \\ &= S_0 \cos \alpha \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Начиная с этого времени

$$\begin{aligned} S &= S_1 \operatorname{cosec}^2 \theta \sin^2 \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right) \right\} = \\ &= S_1 \frac{a^2}{a^2 + b^2} \operatorname{cosec}^2 \theta \end{aligned} \quad (15)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S y = \\ &= \frac{1}{3} S_1 \frac{a^3}{a^2 + b^2} \operatorname{cosec}^2 \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

так как объем равен объему наклонного конуса с основанием S и высотой y . Тогда имеем

$$-\frac{dV}{dt} = CA (2ga \cos \theta)^{1/2} = -\frac{1}{3} S_1 \frac{a^3}{a^2 + b^2} \frac{d}{d\theta} (\operatorname{cosec}^2 \theta \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} = \\ = \frac{1}{3} S_1 \frac{a^3}{a^2 + b^2} (\operatorname{ctg}^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta) \operatorname{cosec} \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Мы опять получили уравнение с разделяющимися переменными, решение которого

$$\frac{3CA (2ga)^{1/2} (a^2 + b^2)}{S_1 a^3} t_2 = \int_{\arctg(a/b)}^{\pi/4} \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta}{\sin \theta (\cos \theta)^{1/2}} d\theta,$$

где t_2 — время, требуемое для того, чтобы угол θ увеличился от значения $\arctg(a/b)$ до $\pi/4$. Как и ранее, успешной оказывается замена переменной $\tau = \operatorname{tg} \theta$, что приводит к результату

$$\frac{3CA (2ga)^{1/2} (a^2 + b^2)^{1/2} b}{S_0 a^3 \cos \alpha} t_2 = \int_{a/b}^1 \frac{2 + \tau^2}{\tau^3 (1 + \tau^2)^{1/4}} d\tau. \quad (16)$$

Этот интеграл также легко вычислить по правилу Симпсона.

После того как угол θ увеличился до 45° , он сохраняет постоянное значение, и жидкость вытекает из эллиптического конуса. Из выражения (5) видно, что он опорожняется в течение времени

$$t_3 = \frac{\frac{2}{5} y_2 S_2}{AC (2gy_2)^{1/2}},$$

где y_2 — высота, а S_2 — поверхность жидкости в момент, когда θ впервые принимает значение, равное $\pi/4$. Следовательно,

$$y_2 = a \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

а S_2 определяется из выражения (15) в виде

$$S_2 = S_1 \frac{a^2}{a^2 + b^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{4} = \\ = \frac{2S_0 a^2 \cos \alpha}{b (a^2 + b^2)^{1/2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{CA (2ga)^{1/2} (a^2 + b^2)^{1/2} b}{S_0 a^3 \cos \alpha} t_3 = \frac{(2)^{7/4}}{5}. \quad (17)$$

Тогда из (14), (16) и (17) следует, что общее время опорожнения T определяется выражением

$$\frac{CA(2ga)^{1/2}}{S_0 a \cos \alpha} T = \frac{2b}{3a} \int_{\operatorname{tg} \alpha}^{a/b} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau + \\ + \frac{a^2}{b(a^2 + b^2)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{3} \int_{a/b}^1 \frac{2 + \tau^2}{\tau^3 (1 + \tau^2)^{1/4}} d\tau + \frac{1}{5} (2)^{7/4} \right\}. \quad (18)$$

Для окончательного решения этой задачи заметим (или снова вычислим), что

$$\begin{aligned} a/b &= 0,836, \\ (2ga)^{1/2} &= 158 \text{ см/с}, \\ CA &= 0,192 \text{ см}^3, \\ a \cos \alpha &= 12,5 \text{ см}, \\ S_0 &= 52,9 \text{ см}^2, \end{aligned} \quad (19)$$

и, следовательно,

$$T = 17,4 \int_{0,176}^{0,836} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau + 3,90 \int_{0,836}^1 \frac{2 + \tau^2}{\tau^3 (1 + \tau^2)^{1/4}} d\tau + 7,82.$$

Окончательно, вычисляя интегралы по правилу Симпсона, найдем

$$T = 12,2 + 2,1 + 7,8 = 22,1 \text{ с.}$$

Видно, что теоретически мы можем уменьшить время опорожнения с 28 с до 22 с при условии, что емкость в процессе вытекания наклоняется в точности указанным образом, обеспечивающим оптимальное время опорожнения. На практике сэкономить все 6 с трудно, поэтому следует считать, что опытная величина 25 с находится в очень хорошем соответствии с теорией.

4.7. ВРЕМЯ, ТРЕБУЮЩЕЕСЯ ДЛЯ НАКЛОНА ЕМКОСТИ

Наблюдательный читатель мог заметить одно дополнительное искусственное допущение, ограничивающее применимость результатов приведенного выше анализа. Оно состоит в том, что емкость устанавливается в наклонное положение, показанное на рис. 4.3, до того как проделано отверстие в точке B , через которое вытекает молоко. В действительности большинство нормальных людей сначала вырезает отверстие (когда линия AB горизонтальна), а уже потом наклоняет пакет с удобной для каждого скоростью до тех пор, пока не возникнет опасность вытекания молока из отверстия A , что ограничивает максимальный угол наклона. Так как за это время

вытекает небольшое количество молока, можно увеличить угол θ (см. рис. 4.3) до величины $\beta (>\alpha)$ перед наступлением первой стадии процесса вытекания. Следовательно, при условии $\operatorname{tg} \beta \leq a/b$ соотношение (18) может быть записано в виде

$$\frac{CA (2ga)^{1/2}}{S_0 a \cos \alpha} (T - t_0) = \frac{2b}{3a} \int_{\operatorname{tg} \beta}^{a/b} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau + \\ + \frac{a^2}{b (a^2 + b^2)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{3} \int_{a/b}^1 \frac{2 + \tau^2}{\tau^3 (1 + \tau^2)^{1/4}} d\tau + \frac{1}{5} 2^{7/4} \right\},$$

где t_0 — время, затраченное на процесс начального наклона пакета.

В рассматриваемой здесь задаче с использованием значений параметров (19) это приводит к соотношению

$$T = t_0 + 17,4 \int_{\operatorname{tg} \beta}^{0,836} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau + 3,90 \int_{0,836}^1 \frac{2 + \tau^2}{\tau^3 (1 + \tau^2)^{1/4}} d\tau + 7,82 = \\ = t_0 - 17,4 \int_{\operatorname{tg} \alpha}^{\operatorname{tg} \beta} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau + 22,1 \text{ с.} \quad (20)$$

Второй член правой части представляет время, не учитывавшееся при анализе первой стадии, так как некоторое количество молока вытекает уже перед достижением этой стадии процесса.

Будем отсчитывать время от момента, когда молоко впервые начинает вытекать из емкости, что происходит при достаточном ее наклоне. Для простоты предположим, что с этого момента высота уровня жидкости y над отверстием B линейно возрастает со временем до тех пор, пока в момент времени t_0 не будет достигнута высота y_0 . Следовательно,

$$y = y_0 t / t_0.$$

Тогда, используя уравнение (13), найдем объем жидкости, вытекающей из емкости за время этого процесса, в виде

$$CA (2g)^{1/2} \int_0^{t_0} y^{1/2} dt = \frac{2}{3} CA (2gy_0)^{1/2} t_0$$

и, следовательно, на рассматриваемой стадии при $\theta = \beta$ ¹⁾ получим

$$S_0 \cos \alpha \left(a - \frac{2}{3} b \operatorname{tg} \beta \right) = V_0 - \frac{2}{3} CA (2gy_0)^{1/2} t_0, \quad (21)$$

¹⁾ Здесь угол β соответствует значению $y = y_0$. — Прим. перев.

где объем V_0 равен одной пинте (0,568 л). Заметим также, что из равенства (12) следует

$$y_0 = a \cos \beta. \quad (22)$$

Исключая y_0 из соотношений (21) и (22) и подставляя значения параметров (19), найдем, что

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = 0,0383 (\cos \beta)^{1/2} t_0. \quad (23)$$

Отсюда для любой величины β сразу вычисляем соответствующее время t_0 , а величина

$$17,4 \int_{\operatorname{tg} \alpha}^{\operatorname{tg} \beta} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau$$

определяется численно. Использование соответствующих числовых значений показывает, что с точностью до двух значащих цифр

$$17,4 \int_{\operatorname{tg} \alpha}^{\operatorname{tg} \beta} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau \simeq 0,667 t_0 - 0,002 t_0^2 \quad (24)$$

для величин t_0 , не превышающих 20 с.

В качестве числового примера предположим, что для достижения начального наклона емкости требуется 2 с. (Если наклонять емкость слишком быстро, молоко может потечь в каком-либо неожиданном направлении и пролиться на пол. Подобным образом высокая скорость наклона может привести к чрезмерному наклону пакета, так что молоко станет вытекать через отверстие A ; указанные 2 с представляют собой время, полученное в опытах автора.) Следовательно, время, требующееся для всей процедуры опорожнения, составляет 22,8 с.

4.8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны.— М.: Мир, 1964.
 Curle N. (1956). Unsteady Two-Dimensional Flows with Free Boundaries (I and II), Proc. Roy. Soc., A 235, 375, 382.
 Garabedian P. R. (1956). Calculation of Axially Symmetric Cavities and Wakes, Pacific J. Math., 6, 611.
 Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика.— М.: Мир, 1964.

4.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Используя результат (5), показать, что при вытекании жидкости из конической емкости средняя скорость истечения составляет $5/6$ начального значения.

2. Аналогично, для емкости, сечение которой зависит от высоты y согласно соотношению

$$S(y) = S_0 (y/h)^{2n},$$

показать, что отношение средней скорости истечения к максимальной (начальной) равно

$$(2n + 1/2) (2n + 1).$$

3. Доказать, что для достаточно малых величин t_0 , когда, следовательно, мала также величина $\beta - \alpha$, справедливо разложение

$$\int_{\operatorname{tg} \alpha}^{\operatorname{tg} \beta} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau = (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) (\sec \alpha)^{1/2} + \dots$$

Показать, что

$$17,4 \int_{\operatorname{tg} \alpha}^{\operatorname{tg} \beta} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau \approx 0,667 t_0 + \dots$$

4. В более общем случае, предполагая, что высота жидкости y над отверстием B изменяется согласно формуле

$$y = y_0 f\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

при условии $f(1)=1$ и используя значения параметров (19), показать, что

$$\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha = 0,0574 (\cos \beta)^{1/2} t_0 \int_0^1 \{f(\eta)\}^{1/2} d\eta.$$

С той же точностью, что и в задаче 3, показать, что для достаточно малых величин t_0

$$17,4 \int_{\operatorname{tg} \alpha}^{\operatorname{tg} \beta} (1 + \tau^2)^{1/4} d\tau = 1,00 \int_0^1 \{f(\eta)\}^{1/2} d\eta t_0 + \dots$$

Представляя функцию $f(\eta)$ в виде простых многочленов, удовлетворяющих условиям $f(0)=0$, $f(1)=1$ и условию «гладкого» начала и конца процесса начального наклона, т. е. $f'(0)=0$, $f'(1)=0$, убедиться, что в этом случае

$$\int_0^1 \{f(\eta)\}^{1/2} d\eta = 0,646,$$

что сравнимо с величиной $2/3$, полученной для $f(\eta)=\eta$.

5. Если человек, опорожняющий пакет, пытается избежать потерь молока через отверстие для воздуха A , ему придется удерживать пакет в таком положении, чтобы поверхность жидкости не располагалась слишком близко к A . В результате он будет вести себя так, как если бы размер пакета a был меньше 12,7 см, а начальный угол наклона α соответственно меньше 10° . Попытайтесь провести анализ для меньших величин a , например для $a=12,0$ см.

МОДЕЛИ МОЛЕКУЛ

ДЖ. ДЖ. ХОЛЛ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: элементарная алгебра матриц]

5.1. ВВЕДЕНИЕ

Современная органическая химия имеет дело с разнообразными свойствами огромного множества молекул. Невозможно построить простую теорию, которая описывала бы все молекулы. Отбор молекул, близких по своему строению, дает возможность создать для них модель, проясняющую их свойства при помощи анализа количественной связи этих свойств с геометрическими или топологическими характеристиками молекулярных графов.

Обсуждаемые ниже модели основаны преимущественно на использовании классических представлений о молекулярных связях и валентных структурах. Хотя квантовомеханическая теория движения электронов в молекуле может помочь объяснить успех, достигаемый при применении таких моделей, она не требуется для их описания.

5.2. ПЛОСКИЕ УГЛЕВОДОРОДНЫЕ МОЛЕКУЛЫ

Существует большой класс углеводородных молекул, имеющих большое значение для органической химии и тем не менее достаточно простых как геометрически, так и по электронной структуре, чтобы описывать их при помощи моделей, включающих только характеристики атомных связей. Молекулы эти плоские и имеют скелет, состоящий только из атомов углерода. Каждый атом углерода связан с тремя ближайшими соседними атомами так, что углы между связями равны 120° , а длины связей приблизительно одинаковы. Соседние позиции, не занятые атомами углерода, заняты атомами водорода. По соседству с каждым атомом водорода находится единственный атом углерода. Многие из молекул состоят из гексагонального кольца, но встречаются также и цепи зигзагообразной формы. Так как все атомы в скелете идентичны, не удивительно, что многие свойства молекул должны определяться исключительно топологи-

¹⁾ G. G. Hall. Department of Mathematics University of Nottingham.

ческими свойствами скелета. Скелет может быть изображен плоским графом, вершины которого представляют атомы углерода, а стороны обозначают С—С-связи (С—Н-связи здесь не учитываются). Некоторые примеры показаны на рис. 5.1.

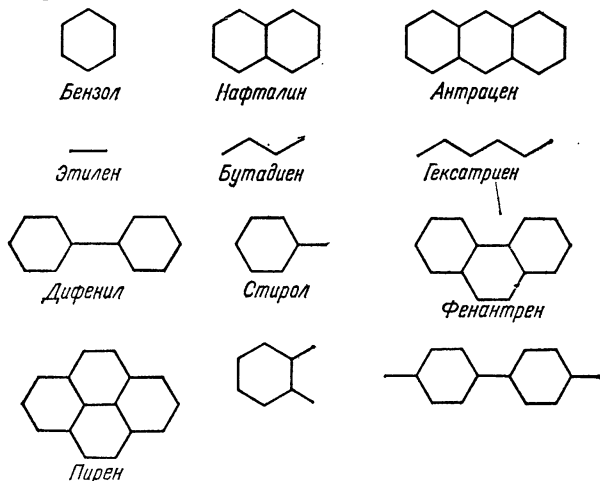
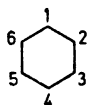


Рис. 5.1. Графы некоторых углеводородных молекул.

Так как графы выражают более существенные особенности молекул, чем химические формулы, в первую очередь они применяются для описания молекул.

5.3. ГРАФИЧЕСКИЕ И МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

Описанные выше молекулярные графы дают возможность находить и исследовать определенные особенности молекул. Однако они не совсем пригодны для численных расчетов, поэтому необходимы также и другие модели. Одна из них состоит в представлении молекулы топологической матрицей T , которая дает возможность описать граф при помощи чисел. Элемент матрицы T_{rs} равен 1, если атомы r и s связаны, и равен 0 в противном случае. Так, молекула бензола, граф которой представляет простой шестиугольник, имеет топологическую матрицу



$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Так как T содержит всю информацию о графе, любое свойство графа может быть соотнесено со свойством T .

Для большинства молекул этого класса топологическая матрица слишком велика. До тех пор пока угол между связями остается равным 120° , эти молекулы не могут образовать кольца, содержащего нечетное число вершин. Отсюда следует, что атомы могут быть пронумерованы так, что любые два связанных соседних атома всегда будут иметь различную четность. Это свойство обычно называют чередованием; в теории графов оно эквивалентно утверждению о том, что вершины можно различить по цвету, если при этом использовать лишь две краски. Число углеводородов, в молекулах которых чередование отсутствует, т. е. содержащих кольца с пятью или семью элементами, сравнительно невелико и в рассматриваемую здесь теорию такие углеводороды не включены.

При расположении всех атомов с нечетными номерами следом за четными атомами топологическая матрица принимает блочный вид

$$T = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

где B — матрица смежности, B^T — матрица, полученная транспонированием B . Матрица B включает все ненулевые элементы матрицы T и, таким образом, содержит всю существенную информацию. Для бензола матричная модель сводится теперь к

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Некоторые элементарные свойства молекулы могут быть достаточно просто получены из B . Общее число атомов углерода n должно быть суммой строк и столбцов B . Подобным образом полное число C—C-связей N является суммой всех элементов B . Значение N удобно представить в виде

$$N = \text{Tr} (B^T B),$$

где $\text{Tr} A$ обозначает след матрицы A . Важной особенностью графа является число колец r , которое получается из B уже не столь очевидным образом. Однако r связано с n и N соотношением

$$r = N - n + 1,$$

откуда r можно сразу определить (см. задачу 2).

При соблюдении требования чередования можно найти много способов нумерации атомов в молекуле, которые будут изменять некоторые свойства B . Важно заметить, что ряд свойств, таких, как значения величин r , N и n , инвариантен по отношению к изменению способа нумерации.

5.4. СВОБОДНЫЕ РАДИКАЛЫ

Одна весьма очевидная особенность матрицы B связана с ее формой — квадратной или прямоугольной. Для того чтобы B была прямоугольной, число нечетных атомов не должно быть равно числу атомов, имеющих четные номера. Когда полное число атомов нечетно, последнее ясно из графа; однако когда n четно, это свойство уже не является очевидным. Чтобы распознать ситуацию при помощи графа, следует заметить, что каждая вертикальная линия графа должна соединять четный и нечетный атомы. Иногда вертикальных

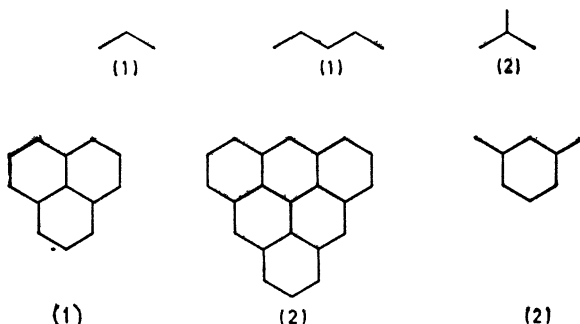


Рис. 5.2. Примеры свободных радикалов, иллюстрирующие разности четностей.

линий нет, и тогда остается рассмотреть лишь Λ верхних и V нижних внешних вершин. Последние должны иметь разную четность, так что избыток атомов одной из четностей равен

$$|\Lambda - V|,$$

что и определяет разность размерностей B .

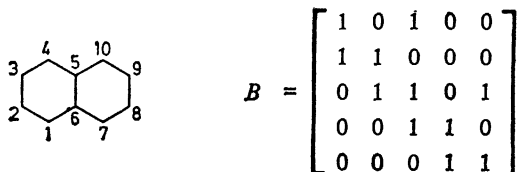
На рис. 5.2 даны некоторые примеры графов, матрицы B которых прямоугольны. Указанное отличие квадратных матриц от прямоугольных оказывается существенным для характеристики химических свойств соответствующих веществ. Вещества, матрица B которых прямоугольна, являются свободными радикалами, обладающими вследствие высокой химической активности коротким временем существования, и, следовательно, идентификация их по графам весьма важна.

5.5. СТРУКТУРЫ

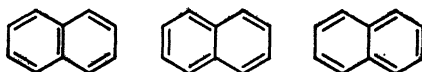
В классической теории химической валентности валентность каждого атома углерода равна четырем. Для формирования связей с соседними атомами используются три из них, так что четвертая может участвовать в образовании двойной связи с одним из ближайших атомов углерода. Большинство таких молекул имеют несколько

разных картин расположения двойной связи, или *структур*. Химическое поведение молекулы часто объясняется в терминах таких структур.

Соотношения между структурой молекулы и ее B -матрицей легче всего установить для чередований, имеющих квадратную матрицу B . Рассмотрим для иллюстрации нафталин



Метод проб и ошибок показывает, что существуют три структуры, графы которых имеют вид



а соответствующие матрицы (здесь указаны лишь двойные связи) таковы:

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} . & . & 1 & . & . \\ 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . \end{bmatrix}$$

Каждая из них является матрицей перестановки и строится с использованием только ненулевых элементов B . Определитель матрицы B (будем обозначать его $|B|$) равен сумме определителей матриц перестановки. Определитель каждой перестановки равен 1, следовательно, $|B|$ дает число структур.

Продолжая эти рассуждения, можно установить общее соотношение между $|B|$ и числом структур. Каждый атом углерода в структуре участвует ровно в одной связи, так что соответствующая матрица имеет по одной единице в каждой строке и каждом столбце, образуя, таким образом, матрицу перестановок. Так как связи выбираются из перечисленных в B и поскольку $|B|$ является суммой по всем возможным перестановкам, эти перестановки дают полный набор структур. Перестановки, включающие связи, не являющиеся связями с ближайшими соседями, не дают вклада в $|B|$. Для колец, содержащих $(4n+2)$ атомов, появляются четные циклические перестановки, включающие нечетное число двойных связей. Если атомы пронумерованы так, что одной из структур является идентичность

расположения всех атомов, тогда все такие определители равны $+1$. Следовательно, для всех молекул число структур определяется значением $|B|$.

Эти простые соотношения становятся несправедливыми, если молекула содержит кольцо, состоящее из $(4n)$ атомов, так как в этом случае перестановки можно разделить на равное число четных и нечетных. Например, циклическая молекула $C_{12}H_{12}$ имеет две струк-



Знаки соответствующих перестановок противоположны, так что $|B|=0$.

Число структур таких молекул определяется выражением

$$|B|_+,$$

в котором все перестановки берутся с положительным знаком.

Класс молекул, для которых величина $|B|$ равна нулю, характеризуется некоторыми общими физическими свойствами. Эти молекулы, как правило, геометрически неустойчивы и деформируются в менее симметричную конфигурацию. Такая деформация может включать стабилизацию структуры при помощи перемежающихся длинных и коротких С—С-связей, приводить к отклонению формы молекулы от плоской, а иногда и к распаду молекулы. Интересно отметить, что здесь особенности молекул, характер которых кажется исключительно математическим, имеют физический смысл. Тот факт, что эта модель обеспечивает такую простую проверку геометрической неустойчивости структур, является серьезным подтверждением ее ценности.

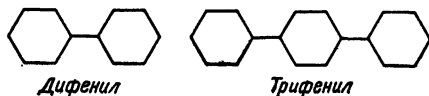
5.6. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ СТРУКТУР

В некоторых химических исследованиях, связанных с рассматриваемыми молекулами, важно знать полное число возможных структур. Первоначально ответ на такой вопрос получали, пытаясь их рисовать; это, однако, становится очень трудным для больших молекул. Кроме того, недостаток подобного метода состоит еще и в невозможности определить, является ли изображенный набор структур полным. Прямое вычисление $|B|$, конечно, возможно, но дает мало информации о том, как от структуры к структуре меняются различные параметры. Следовательно, нужно развить другие графические методы установления структуры, которые были бы как эф-

фективными, так и достаточно общими. Одна из ключевых идей таких методов состоит в том, что если выделить в молекуле одну из связей, то все структуры можно условно разделить на два класса, принадлежность к которым определяется в зависимости от того, является ли эта связь одинарной или двойной. Фиксация характера одной из связей приводит, как правило, к фиксации и других связей. Число структур равно сумме их в каждом классе; установить последние существенно легче. Для облегчения подсчетов разделение на классы можно повторить столько раз, сколько необходимо.

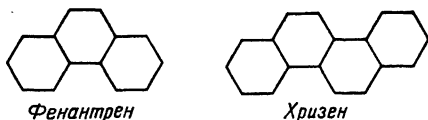
Полиацены — это молекулы, состоящие из цепочек шестиугольников, соединенных своими сторонами. Бензол и нафталин являются первыми двумя членами этой последовательности молекул. Если в таких молекулах выделить одну из вертикальных связей и сделать ее двойной, то легко увидеть, что тем самым все оставшиеся двойные связи определяются единственным образом. Следовательно, число структур определяется числом вертикалей, равным $(r+1)$, где r — число колец.

Полифенилы также состоят из шестиугольников, но они соединены своими вершинами. Первые два члена ряда — дифенил и трифенил:



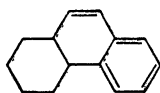
Здесь сразу видно, что не существует таких структур, в которых связь, соединяющая кольца, является двойной. Тогда структуры каждого отдельного кольца могут быть составлены всеми возможными способами. Так как каждое кольцо может образовать две структуры, полное число структур равно 2^r . Таким образом, два очень похожих ряда обнаруживают весьма различную зависимость числа структур от числа колец.

В других рядах молекул, число структур которых также может быть вычислено при помощи общих методов, гексагональные кольца соединены линиями, образующими ненулевой угол с вертикалью, как, например, в молекулах фенантрена и хризена



Выберем второй в ряду шестиугольник и рассмотрим структуры, в которых одна из его горизонтальных связей является одинарной

или двойной, т. е.

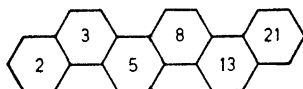


Двойная:
2 структуры



Одинарная:
3 структуры

Ясно, что если эта (верхняя) связь двойная, число структур будет таким же, как и в двух кольцах, рассматриваемых отдельно от всей молекулы. Повторяя рассуждения, приведенные для этих небольших молекул, можно получить общий результат для любых цепочек колец. На практике несколько удобнее обратить направление построения цепочки и строить молекулу вправо от одиночного кольца. Добавление последующих колец приводит для числа структур к последовательности чисел Фибоначчи (такие последовательности повсеместно и довольно часто встречаются в природе и обнаруживаются, например, даже в спиральном расположении цветочных лепестков).



5.7. ЭНЕРГИЯ РЕЗОНАНСА

В классической теории валентности валентность каждого атома соблюдается в каждой из структур. Возрастание устойчивости молекулы, имеющей несколько структур, объясняется обычно некоторым «резонансом» между структурами. Это явление можно обнаружить при помощи тонких экспериментальных исследований теплоты образования молекул; опытные значения «энергии резонанса» найдены для многих молекул. Однако проведение подобных экспериментов и анализ получаемых данных обычно весьма трудны; для наших целей гораздо легче заменить эти данные «энергией резонанса», вычисленной при помощи простой квантовомеханической теории. В соответствии с этой теорией энергия резонанса (в соответствующих единицах) определяется при помощи матрицы B выражением

$$R = 2\text{Tr} [(B^T B)^{1/2} - I].$$

Здесь из матриц, являющихся квадратным корнем произведения $B^T B$, выбрана та, которая соответствует максимальному значению R . Величина R вычислена при помощи ЭВМ для многих молекул. Описание этих вычислений приведено Кулсоном и Стрейтвизером

(1965). Ниже приведена краткая таблица, иллюстрирующая эти результаты. Здесь мы постараемся описать R эмпирическим соотношением, зависящим только от инвариантов рассмотренных выше графов.

Рассмотрим сначала молекулы, графы которых состоят из шести-угольников и не содержат свободных концов. Измерения величины

Таблица 5.1

Энергии резонанса

Бензол	2	Этилен	0	Дифенил	4,383
Нафталин	3,683	Бутадиен	0,472	Трифенил	6,772
Антрацен	5,314	Гексатриен	0,988	Стирол	2,424
Фенантрен	5,449	Хризен	7,190	Пирен	6,505

R показывают, что она приблизительно пропорциональна N ; используя тот факт, что для бензола $R=2$, можно предложить соотношение

$$R \sim \frac{1}{3} N.$$

Точность этой простой формулы иллюстрируется на рис. 5.3. Несколько лучшее соответствие может быть получено при включении в формулу члена, пропорционального числу колец в молекуле. Соотношение

$$R \sim 0,328N + 0,091(r-1)$$

получено при помощи метода наименьших квадратов, примененного к большому числу экспериментально измеренных значений R .

Проанализировать энергию резонанса для других, более сложных устойчивых молекул гораздо труднее. Так как этилен при $N=1$ не имеет энергии резонанса, необходимо включить в рассмотрение другие эффекты. Мы далее предположим, что существенны концевые эффекты, и учтем член, пропорциональный числу окончаний в цепочке связей. Приближенная формула, воспроизводящая основные особенности рассматриваемых молекул, имеет вид

$$R \sim \frac{1}{4} N - \frac{1}{8} S.$$

Здесь S — число атомов углерода, связанных только с одним углеродным атомом. Эта формула должна применяться только после того, как при помощи написанных выше формул учтены различные сложные расположения гексагональных колец атомов в молекуле.

Серьезные трудности возникают при определении энергии резонанса свободных радикалов. Здесь нужно учитывать, что размерность единичной матрицы I в формуле для R равна наименьшему из чисел строк и столбцов матрицы B . Подобно тому как это делалось

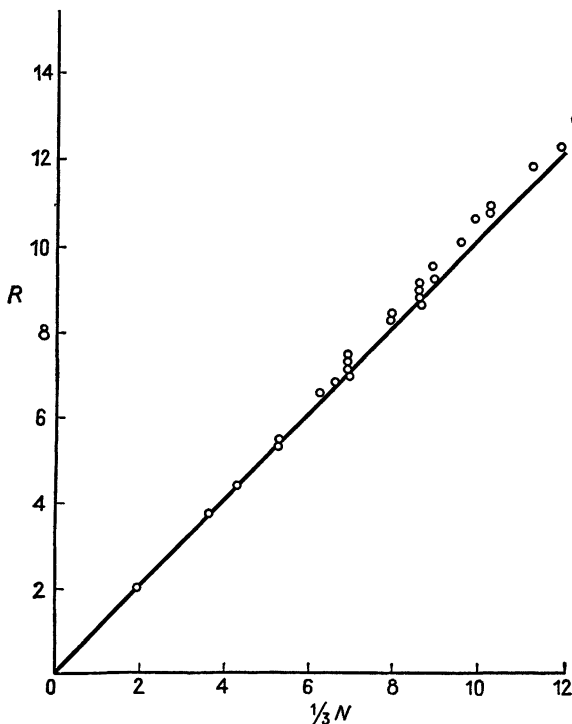


Рис. 5.3. Энергии резонанса, вычисленные согласно соотношению $R \sim \frac{1}{3}N$.

выше, подгонка теоретически вычисленных величин R приводит к выражению

$$R \sim \frac{1}{3}N + \frac{1}{10}(r-1) - 0,17S + 0,56,$$

которое дает приемлемые результаты для широкого класса радикалов.

Успешное применение этих простых выражений для R увеличивает вместе с тем число неясных вопросов. Один из самых очевидных — почему не принимаются во внимание другие, более сложные свойства графов. Первоначально при введении термина «резонанс» имелось в виду, что весьма существенно число структур. Чтобы про-

двинуться дальше, рассмотрим группы молекул, имеющих одинаковые величины n и N . Зависимость энергии резонанса молекул одной из этих групп от величины $|B|$ весьма близка к линейной (рис. 5.4). Для этого соотношения соответствие с опытом существенно лучше, чем приведенная выше зависимость энергии резонанса

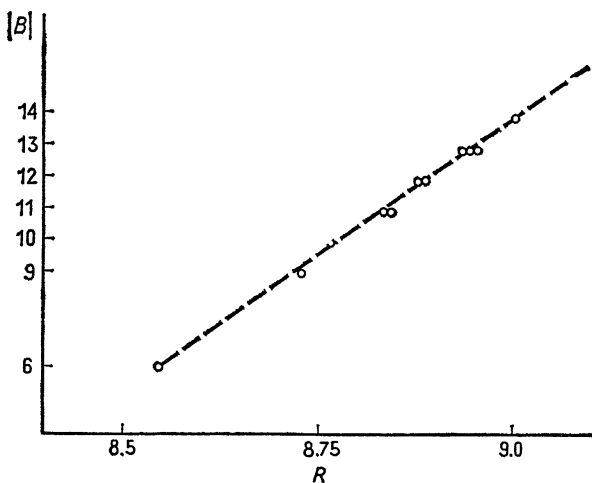


Рис. 5.4. Энергии резонанса молекул, состоящих из 5 колец.

от N . Таким образом, $|B|$ становится существенной переменной при детальном описании структуры R и введение других переменных уже не является необходимым.

Приведенное обсуждение иллюстрирует необходимость интерпретировать результаты сложных вычислений таким способом, который объяснял бы общую тенденцию результатов и связывал бы их с характерными чертами анализируемой ситуации.

5.8. ПОРЯДКИ СВЯЗЕЙ

Если отдельный столбец матрицы B рассматривать как вектор, естественным будет вопрос о том, можно ли найти ортонормированную систему векторов, связанную с векторами-столбцами B , так как наличие ортонормированной системы существенно упрощает теорию. Одно из требований такой теории состоит в том, чтобы скалярные произведения векторов были симметричными. Это эквивалентно соотношению

$$B^T P = P^T B,$$

где P — образующая матрицу система ортонормированных векторов. Свойство ортонормированности означает, что P является орто-

гональной матрицей, т. е.

$$P^T P = P P^T = I.$$

Эти два матричных уравнения достаточны для определения всех элементов P ; легко убедиться, что их решение имеет вид

$$P = B (B^T B)^{-1/2}.$$

Матрица P известна как матрица порядков связей и, очевидно, получается при помощи ортогонализации B .

Энергию резонанса можно теперь определить как

$$R = 2\text{Tr} (B^T P - I).$$

Здесь первый член является суммой порядков связей по всем связям. Так как это определение приводит к результату

$$P_{rs} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial B_{rs}},$$

то становится ясным, что при любом определении R матрица P является естественным образом для молекул, в которых элементы B могут изменяться. Любая аппроксимация P автоматически приводит к одной из моделей для R . Простейшим приближением для P является

$$P \sim (B^T)^{-1},$$

так как это соотношение тождественно удовлетворяет первому уравнению (хотя и не удовлетворяет второму). Очевидно, для R это плохое приближение, так как оно дает $R=0$.

Вычисление B^{-1} по известной матрице B относительно просто. Каждый элемент B^{-1} является алгебраическим дополнением соответствующего элемента B^T , деленным на $|B|$. Величину алгебраического дополнения можно найти графически тем же способом, что и $|B|$; действительно, алгебраическое дополнение элемента матрицы представляет собой определитель, полученный при помощи определителя исходной матрицы, из которого исключены строка и столбец, пересекающиеся на данном элементе.

Следовательно, алгебраическое дополнение равно числу структур молекулы, которое остается после удаления двух соответствующих атомов. Знак этого числа легче всего определить по правилу чередования, состоящему в том, что для первого граничного элемента выбирается знак $+$, третьего по счету $-$, пятого $+$ и т. д. Таким образом, все компоненты $(B^T)^{-1}$ могут быть вычислены графически, а общий результат можно, если потребуется, проверить умножением матриц.

Вычисляя величины P и $(B^T)^{-1}$ для многих молекул, можно убедиться в том, что элементы $(B^T)^{-1}$ являются приемлемой аппроксимацией граничных элементов P , хотя значения этих элементов оказы-

ваются несколько заниженными, а значения остальных элементов завышенными. Указанный недостаток можно несколько исправить, выбирая в качестве аппроксимации P линейную комбинацию $(B^T)^{-1}$ и B . Это приближение также удовлетворяет первому уравнению и не удовлетворяет второму. Комбинация

$$P \sim (B^T)^{-1} + \frac{1}{6} B$$

увеличивает значения граничных элементов на $1/6$. Она также приводит к простому выражению для R в виде

$$R \sim \frac{1}{3} N,$$

обсуждавшемуся выше. Несколько лучшее соответствие величин порядков связи для некоторых простых гексагональных молекул дает формула

$$P \sim 0,909 (B^T)^{-1} + 0,210 B,$$

которая приводит к более точному выражению для R :

$$R \sim 0,328 N + 0,091 (r-1).$$

Точность различных соотношений для P иллюстрируется в табл. 5.2 для молекулы хризена

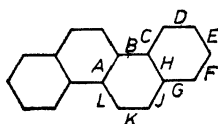


Таблица 5.2

Порядки связей между соседними атомами молекулы хризена

Точные значения P	$(B^T)^{-1}$	$(B^T)^{-1} + \frac{1}{6} B$	$0,909 (B^T)^{-1} + 0,210 B$
A 0,573	0,5	0,667	0,665
B 0,476	0,25	0,417	0,437
C 0,583	0,375	0,542	0,551
D 0,707	0,652	0,792	0,778
E 0,617	0,375	0,542	0,551
F 0,712	0,625	0,792	0,778
G 0,568	0,375	0,542	0,551
H 0,535	0,375	0,542	0,551
I 0,521	0,25	0,417	0,437
J 0,754	0,75	0,917	0,892
K 0,538	0,25	0,417	0,437

5.9. МЕЖЪЯДЕРНЫЕ РАСТОЯНИЯ

При измерении рентгеноскопическими методами расстояний между ядрами атомов углерода в молекуле оказывается, что они слегка меняются. Будучи построены в координатах «порядок C — C-связи» — «межъядерное расстояние», экспериментальные точки укладываются на гладкую кривую. Разумной аппроксимацией этой кривой является линейное соотношение

$$d = 1,517 - 0,18p,$$

где d — расстояние в ангстремах, p — соответствующий порядок связи.

Таким образом, предложенная модель оказывается способной объяснить многие из наблюдаемых свойств молекул.

5.10. НУЛЕВЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Если молекула содержит нечетное число атомов углерода, то не все валентные электроны оказываются необходимыми для формирования связей. «Непарные» электроны «размазаны» в окрестности нескольких различных атомов, и такое распределение имеет непосредственное отношение к способности свободных радикалов образовывать дополнительную связь в местах локализации различных атомов. Это распределение может быть получено из B .

Так как рассматриваемая молекулярная система является свободным радикалом, матрица B не будет квадратной. Рассмотрим случай, когда строк больше, чем столбцов. Локализация «непарных» электронов указывается вектором V , который определяется соотношением

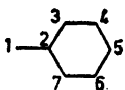
$$V^T B = 0.$$

Вектор V легко определить, если считать одну из компонент V равной 1 и использовать это уравнение для нахождения остальных компонент. Полученный вектор следует затем нормировать так, чтобы

$$V^T V = 1.$$

Если размерности B различаются более чем на 1, уравнение может иметь несколько независимых решений, и для полного анализа потребуется несколько иное рассмотрение.

Чтобы проиллюстрировать метод, рассмотрим бензильный радикал



матрица которого имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Принимая компоненту V у атома 5 равной 1, для оставшихся компонент получим

$$V^T = (2, -1, 1, -1).$$

Для нормировки необходимо разделить этот вектор на $\sqrt{7}$. Так как активность является, по-видимому, возрастающей функцией квадрата компоненты, атом 1 будет наиболее химически активным.

5.11. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Coulson C. A., Streitwieser A. (1965). Dictionary of π -Electron Calculations, Pergamon Press; Oxford.

5.12. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Показать, что для каждой молекулы можно получить несколько различных B -матриц при помощи перенумерации атомов. Как связаны эти матрицы между собой? Какие свойства B при перенумерации изменяются, а какие инвариантны?

2. Доказать, что число колец определяется величиной $(N - n + 1)$.

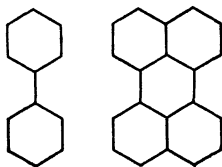
3. Показать, что если существует операция S симметричного отражения молекулы относительно двух прямых, переводящая каждый четный атом в нечетный и наоборот, и если четные атомы перенумерованы в нечетные при помощи преобразования S , то матрица B симметрична. Объяснить, почему это не означает, что $P=B$.

4. Доказать, что числа

$$x_s = \text{Tr} (B^T B)^s \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

не зависят от способа нумерации атомов. Исследовать x_2 для некоторых молекул.

5. Вывести формулу для числа структур ряда молекул



6. *Энергия локализации* отдельной связи в молекуле определяется как разность энергий резонанса в присутствии и при удалении данной связи. Показать, что формулы для R дают теорию энергии локализации в терминах, характеризующих молекулярные системы, остающиеся после удаления связи.

7. Поведение углеводов в электрофильных реакциях часто связывают с энергией локализации атома, которая определяется как разность между величиной R для молекулы и той же величиной для радикала, в котором данный атом отсутствует. Вычисляя эту энергию для некоторых молекул, вывести правила, определяющие, какие атомы в молекуле имеют наибольшую энергию локализации и какие молекулы содержат атомы с наибольшей энергией локализации.

8. Для многих из рассмотренных молекул матрица T имеет единицу в качестве собственного значения. Показать, что это свойство может быть интерпретировано графически, а также что это собственное значение может иметь высокую кратность.

СВЕРЛЕНИЕ ЛАЗЕРОМ

ДЖ. ДЖ. ЭНДРЮС и Д. Р. ЭТСИ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: дифференциальные уравнения и преобразование Лапласа]

6.1. ВВЕДЕНИЕ

Резание и сварка металлов весьма важны для многих областей техники. Так как пила и сварочный аппарат все еще являются самыми распространенными инструментами для такого рода работ, значительный интерес представляет создание новых устройств, предназначенных для специальных материалов, а также для тех случаев, когда желательно обеспечить некоторую степень автома-

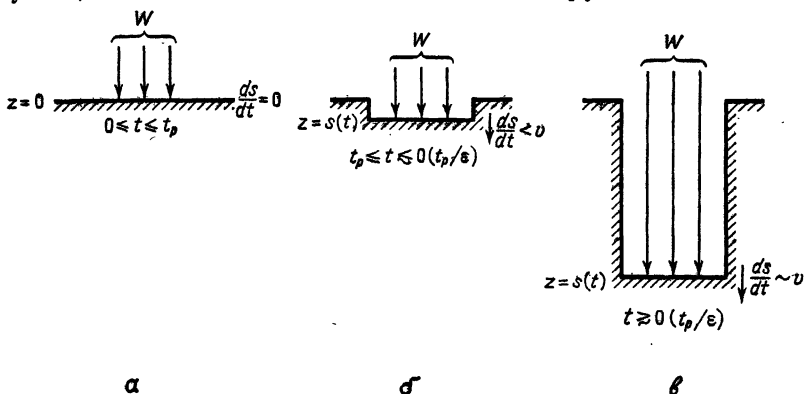


Рис. 6.1. Различные стадии образования выемки: α — предварительный нагрев поверхности металла до температуры испарения; σ — раннее развитие движения на границе; β — установившееся движение на границе.

тизации указанных процессов. В последнее время как для резания, так и для сварки были предприняты попытки использования мощных лазеров (а также электронных пучков).

Основная идея состоит в том, чтобы сфокусировать значительную мощность на малой площади поверхности металла, создавая

¹⁾ J. G. Andrews, D. R. Atthey, CEEB, Marchwood Engineering Laboratories, Southampton.

таким образом интенсивный нагрев и испарение с последующим образованием отверстия (рис. 6.1). При резке необходимо постараться обеспечить такие условия процесса, чтобы проделанное отверстие прямо проходило сквозь материал, и избежать, таким образом, затекания расплавленного металла обратно в отверстие и застывания его там. При сварке ситуация противоположная: два куса металла соединяют и нагревают их вдоль линии соединения так, чтобы металл, расплавленный с обеих сторон, перемешался и после устранения источника тепла застыл.

В этой главе мы рассмотрим математическую модель, главная область применимости которой — глубокая сварка и резание. При помощи модели попытаемся ответить на вопрос, как быстро можно проделать отверстие, используя пучок излучения высокой мощности.

6.2. ОСНОВНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим высокоэнергетический пучок лазерного излучения или электронов, сфокусированный на малом участке поверхности металла. Определенная доля энергии поглощается, а остальная часть отражается. Поглощение энергии происходит внутри слоя, толщина которого обычно гораздо меньше миллиметра, что вызывает поверхностный нагрев материала и рост температуры поверхности. Последняя, однако, растет не безгранично. Существуют два процесса, ограничивающие рост температуры. Первым является перенос тепла в глубь материала от нагретых к холодным участкам, обусловленный теплопроводностью. Второй обусловлен испарением. Когда температура материала достигает точки кипения, скрытое тепло поглощается без дальнейшего увеличения температуры в процессе испарения материала. При удалении пара от поверхности материала в металле образуется выемка. Задача количественного описания этого процесса и вызывает необходимость математического моделирования.

В течение по крайней мере начальных стадий образования выемки гидродинамические явления не играют существенной роли. В рассматриваемой модели предполагается, что процесс образования выемки не осложнен подобного рода явлениями. Для того чтобы показать внутреннюю непротиворечивость этого предположения, на некотором этапе решения задачи будет необходимо сравнить характерное время образования выемки, полученное по модели, основанной на теории теплопроводности, с характерным временем движения жидкости. Таким образом, рассматриваемая модель описывает, по существу, процесс разрушения материала, при котором энергия лазерного излучения не отражается поверхностью, а уходит частично на испарение и частично переносится за счет теплопроводности внутрь материала.

В простейшем для анализа случае считается, что вся энергия, поступающая на поверхность, используется для испарения материала. Этот *предельный режим испарения* может возникать двумя путями. Первый реализуется, когда энергия поступает на поверхность слишком быстро, так что тепло не успевает распространиться в глубь металла. Во втором случае плотность мощности пучка постоянна, а распределение температуры впереди границы области испарения приближается к стационарному.

Предположим, что мощность W распределена равномерно по некоторой площади A поверхности; пусть излучение приложено по нормали к поверхности. За интервал времени δt поступает энергия, равная $W\delta t$. Пусть глубина возникающей выемки равна δs , тогда объем испарившегося материала равен $A\delta s$. Используя закон сохранения энергии, получим

$$h\rho A\delta s = W\delta t.$$

Здесь h — количество тепла, требуемое для испарения единицы массы материала, ρ — плотность материала. Преобразуя это выражение и полагая $\delta t \rightarrow 0$, получим скорость роста глубины выемки в виде

$$\frac{ds}{dt} = \frac{W/A}{h\rho}. \quad (1)$$

Уравнение (1) показывает, что для любого материала предельная скорость пропорциональна плотности энерговыделения W/A . Например, для плотности энерговыделения пучка 1 квт/мм², направленного на поверхность стали, предельная скорость равна 17 мм/с. Интегрируя уравнение (1) и полагая $s=0$ при $t=0$, найдем глубину выемки в произвольный момент времени t

$$s(t) = \frac{1}{h\rho A} \int_0^t W dt,$$

или

$$s(t) = \frac{E(t)}{h\rho A},$$

где $E(t)$ — полная энергия, выделенная источником за промежуток времени $(0, t)$. Таким образом, в предельном режиме испарения глубина выемки зависит только от полной энергии, поступившей на поверхность.

6.3. БОЛЕЕ ТОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ: УЧЕТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

На практике всегда существует перенос некоторого количества тепла в материал за счет теплопроводности, так что скорость в предельном режиме испарения представляет собой верхнюю границу

скорости роста глубины выемки в металле. Интересно вычислить характерное время достижения этой предельной скорости. Общая задача движения границы раздела фаз с учетом теплопроводности известна как *задача Стефана*; также хорошо известно, что ее решение представляет определенные математические трудности (Карслоу и Егер, 1959).

Предположим сначала, что тепло переносится в направлении, нормальном к поверхности. (Учет влияния потерь тепла в боковых направлениях оставлен в качестве задачи для самостоятельного изучения — см. задачу 4.) По существу, необходимо решить одномерное нестационарное уравнение теплопроводности (Карслоу и Егер, 1959)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

для температуры внутри материала $T(z, t)$ вместе с граничными условиями на движущейся границе $z=s(t)$ и на тыльной поверхности материала. Здесь $D=K/(\rho c)$ — коэффициент температуропроводности, K, ρ, c — коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость соответственно.

Условие на движущейся границе получается в результате применения закона сохранения энергии в виде

(скорость поглощения энергии = (скорость преобразования энергии в скрытую + теплоту испарения) (скорость переноса тепла в глубь материала)

т. е.

$$\frac{\dot{W}}{A} = L_v \rho \frac{ds}{dt} - K \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3)$$

где L_v — скрытая теплота испарения на единицу массы. Другое граничное условие состоит в том, что температура движущейся границы приблизительно равна температуре точки кипения, так что

$$T = T_v \text{ при } z = s(t). \quad (4)$$

На практике для всех материалов всегда существует некоторое испарение при температурах ниже действительной точки кипения. Однако давление пара при этом обычно незначительно по сравнению с атмосферным давлением, за исключением случая, когда температура очень близка к точке кипения. Таким образом, условие (4) представляет собой вполне удовлетворительную аппроксимацию.

При сверлении толстого слоя материала наличие тыльной поверхности оказывает несущественное влияние. Поэтому целесообразно для удобства перенести эту поверхность в бесконечность, где полагаем

$$T=0,$$

считая без потери общности температуру окружающей среды равной нулю. Для завершения постановки задачи необходимо также выставить граничные условия на другой границе раздела фаз, т. е. между твердым материалом и жидкостью. Однако для многих важных для практики материалов отношение скрытых теплот плавления и парообразования мало по сравнению с единицей (как показано в табл. 6.1). В результате, сохраняя достаточную точность, можно не учитывать нарушение непрерывности на этой фазовой границе.

Эта задача Стефана по сравнению с ее классическим вариантом оказывается более сложной благодаря наличию слагаемого, описывающего тепловыделение на движущейся границе. Обычным подходом к решению задачи является использование численных методов (Ландау, 1950; Риди, 1965), что вызвано сложностью краевых задач теории теплопроводности с подвижной границей раздела фаз. Здесь, однако, стоит обратить внимание на простоту решения в предельном режиме испарения, описанного в § 6.2. Можно ли использовать эту простоту?

Интуиция подсказывает возможность получения достаточно простого решения по крайней мере в том случае, когда скорость движения границы близка к скорости в предельном режиме испарения. В этом случае порядок отношения характерной величины потерь тепла за счет теплопроводности к величине скрытой теплоты парообразования с использованием соотношения (1) можно записать в виде

$$\left| \frac{K (\partial T / \partial t)}{L_v \rho (ds/dt)} \right| = \frac{K O (T_v / l)}{L_v \rho O (W / h \rho A)},$$

где l представляет собой некоторое характерное расстояние, на котором происходит падение температуры в материале. Это расстояние определяется соотношением

$$l = \frac{D}{(W/h\rho A)} \quad (5)$$

(см. задачу 1). Подставляя значения l и D и полагая $h = L_v + cT_v$, найдем

$$\left| \frac{K (\partial T / \partial z)}{L_v \rho (ds/dt)} \right| = O(\varepsilon),$$

где

$$\varepsilon = \frac{cT_v}{L_v} = \frac{\text{(тепло, требуемое для нагревания материала до точки кипения)}}{\text{(тепло, затрачиваемое на испарение при температуре кипения)}} \quad (6)$$

является величиной, постоянной для данного материала. Для многих материалов, представляющих практический интерес, ε обычно мало по сравнению с единицей (примеры см. в табл. 6.1). Следовательно, решение при $\varepsilon = 0$ (т. е. когда не учитывается теплопровод-

ность, как предполагалось в § 6.2) соответствует приемлемому приближению при условии, что эффекты, связанные с теплопроводностью, малы. Полное решение будем искать в виде ряда по степеням ε , хотя на практике обычно используются только первые два или три члена любого ряда, полученного при помощи такого рода разложений по малому параметру.

Таблица 6.1

Материал	Теплоемкость (отсчет от 0°C) cT_v (кДж/кг)	Скрытая теплота плавления L_f (кДж/кг)	Скрытая теплота парообразо- вания L_v (кДж/кг)	Отноше- ние скрытых теплот L_f/L_v	ε cT_v/L_v
Алюминий	2490	389	10800	0,036	0,23
Уголь (графит)	3350	—	59100	—	0,06
Медь	962	205	4770	0,043	0,20
Золото	368	66,9	1740	0,039	0,21
Железо	1290	272	6070	0,045	0,21
Свинец	217	25,0	861	0,029	0,25
Магний	1150	364	5610	0,065	0,21
Ртуть	41,9	11,7	305	0,038	0,14
Никель	1260	301	6361	0,047	0,20
Вольфрам	690	(256)	4020	(0,063)	0,17
Вода	419	335	2260	0,15	0,19
Цинк	340	109	1780	0,045	0,19

6.4. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Для того чтобы определить движение границы по истечении достаточно большого промежутка времени, построим решение задачи при помощи разложения по малому параметру $\varepsilon = cT_v/L_v$.

Для корректного определения членов различного порядка удобно ввести безразмерные переменные в виде

$$\theta = \frac{T}{T_v}, \quad \zeta = \frac{z}{l}, \quad \tau = \frac{vt}{l}, \quad \xi = \frac{s}{l}. \quad (7)$$

Обозначая через v скорость движения границы в предельном режиме испарения, из уравнения (1) получим

$$v = \frac{W}{(cT_v + L_v) \rho A} = \frac{W/(L_v \rho A)}{1 + \varepsilon}. \quad (8)$$

Характерная длина l определяется соотношением (5). Тогда уравнение (2) в безразмерных переменных принимает вид

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad (9)$$

с условиями

$$\{(d\xi/d\tau) - 1\} - \varepsilon \{(\partial \theta / \partial \xi) + 1\} = 0 \quad (10)$$

и

$$\theta = 1 \quad (11)$$

на подвижной границе

$$\xi = \xi(\tau). \quad (12)$$

Будем искать решение в виде следующих разложений функций θ и ξ по параметру ε :

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_0(\xi, \tau) + \varepsilon \theta_1(\xi, \tau) + \dots, \quad (13)$$

$$\xi(\tau) = \xi_0(\tau) + \varepsilon \xi_1(\tau) + \dots \quad (14)$$

Подставляя θ и ξ в уравнение (9) и условия (10), (11), для членов нулевого порядка получим

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \tau}, \quad \frac{d\xi_0}{d\tau} = 1, \quad \theta_0 = 1. \quad (15)$$

Если не учитывать явления предварительного нагрева, происходящего до достижения на границе температуры, соответствующей точке кипения материала, решение нулевого порядка ξ_0 можно получить путем интегрирования второго уравнения (15) в виде

$$\xi_0 = \tau. \quad (16)$$

Чтобы определить нулевое приближение θ_0 для распределения температуры, необходимо решить уравнение теплопроводности (первое уравнение (15)) в области, граница которой движется с постоянной скоростью $d\xi_0/d\tau = 1$, при температуре на границе $\theta_0 = 1$. Простой метод решения этой задачи заключается в применении преобразования Лапласа к первому уравнению (15), что приводит к распределению температуры в виде

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \left[e^{-(\xi - \tau)} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi/2 - \tau}{\tau^{1/2}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\tau^{1/2}} \right) \right] \quad (17)$$

(см. задачу 2), где $\operatorname{erfc}(x)$ — дополнительная функция ошибок ¹⁾

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_x^\infty e^{-y^2} dy,$$

¹⁾ Дополнительная функция ошибок связана с функцией ошибок $\operatorname{erf}(x)$ соотношением $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$. Таблицу функции $\operatorname{erf}(x)$ можно найти в книге Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М: Наука, 1970. — Прим. ред.

затабулированная, например, в книге Абрамовитца и Стегуна (1964).

Уравнения порядка ε имеют вид

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau}, \quad \frac{d\xi_1}{d\tau} = 1 + \frac{\partial \theta_0}{\partial \xi}, \quad \theta_1 = 0. \quad (18)$$

Дифференцируя θ_0 в выражении (17) по ξ и подставляя полученный результат во второе уравнение (18), найдем

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau^{1/2}}{2} \right) - \frac{1}{(\pi\tau)^{1/2}} e^{-\tau/4}. \quad (19)$$

Объединяя вторые равенства из (15) и (18), получим корректное выражение для безразмерной скорости подвижной границы

$$\frac{d\xi}{d\tau} = 1 + \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau^{1/2}}{2} \right) - \frac{1}{(\pi\tau)^{1/2}} e^{-\tau/4} \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (20)$$

Зависимость безразмерной скорости испаряющейся границы от безразмерного времени приведена на рис. 6.2. Для времени τ по-

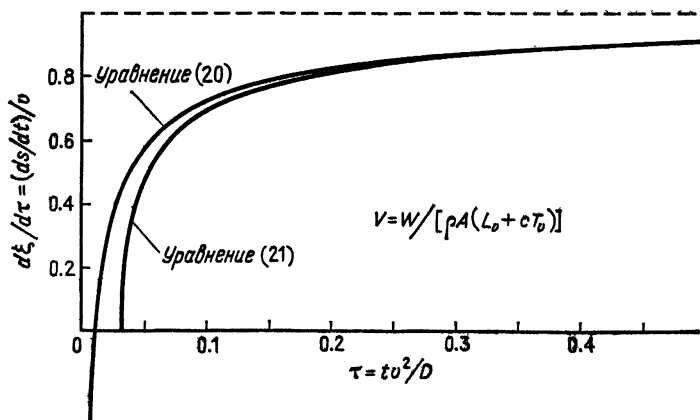


Рис. 6.2. Изменение безразмерной скорости границы фазового перехода в зависимости от безразмерного времени при $\varepsilon=0,2$.

рядка единицы скорость достаточно близка к своему асимптотическому значению, определяемому выражением (1). Однако при малых временах решение (20) становится непригодным, так как оно дает отрицательные скорости. Следовательно, где-то была допущена неточность. Основной недостаток приведенных рассуждений содержится в нашем предположении, что решение при $\varepsilon=0$ (в котором не учитывалась теплопроводность) будет служить хорошим приближением для всех моментов времени; это означает, что в граничном условии (3) слагаемое $-K\partial T/\partial z$, описывающее теплопроводность, должно быть мало по сравнению со слагаемым $L_v \rho ds/dt$, которое со-

ответствует скрытой теплоте парообразования. В действительности же, так как граница начинает двигаться из состояния покоя (т. е. $ds/dt=0$ при $t=0$), то при достаточно малых временах слагаемое, описывающее затраты тепла на испарение, не может быть большим по сравнению со слагаемым, описывающим перенос тепла за счет теплопроводности. Таким образом, для малых времен наше решение содержит внутреннее противоречие. Анализ полученного решения показывает, что из выражения (20) следует $d\xi/d\tau \rightarrow -\varepsilon(\pi\tau)^{-1/2}$ при $\tau \ll 1$.

Для того чтобы обойти возникшую трудность, нужно отдельно рассмотреть решение для малых времен, выбирая иной масштаб для безразмерного времени и положения подвижной границы. Это приводит к обычной задаче теории сингулярных возмущений, и решение ее мы оставляем в качестве упражнения для вдумчивого читателя. Полное решение приведено Эндрюсом и Этси (1975), а читателям, желающим получить результаты самостоятельно, следует воспользоваться общими сведениями по теории сингулярных возмущений, которые можно найти в книгах Коула (1968) и Ван-Дайка (1964). Полное решение с точностью до слагаемых первого порядка по ε имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} = & \left[1 + \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau^{1/2}}{2} \right) - \frac{1}{(\pi\tau)^{1/2}} e^{-\tau/4} \right\} \right] \times \\ & \times \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{(\pi\tau)^{1/2}} \right\} \arcsin \left\{ \left(1 - \frac{\pi\varepsilon^2}{4\tau} \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Это решение приведено графически на рис. 6.2. Заметим, что решение (21) не начинается в точке $\tau=0$. Последнее связано с тем, что для нагрева лицевой поверхности материала от начальной температуры $\theta=0$ до температуры испарения $\theta=1$ требуется определенное время (см. задачу 5а).

6.5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В рассмотренной модели не учитывается движение жидкости. Жидкость будет стекать в выемку по стенкам, и наступит момент, когда модель станет неприменимой.

Оценим влияние сил тяжести на движение жидкости. Из соображений размерности характерная скорость течения под действием сил тяжести равна

$$v = \frac{dz}{dt} \sim (gz)^{1/2},$$

где z — текущая глубина выемки. Полагая $z=0$ при $t=0$, найдем при помощи интегрирования характерное время движения жидко-

сти под влиянием сил тяжести в виде

$$t_{\text{грав}} \sim \left(\frac{2z}{g} \right)^{1/2}.$$

Характерное время образования выемки глубиной z под действием лазерного излучения определяется из уравнения (1) в виде

$$t_{\text{сверл}} \sim \frac{z\rho(L_v + cT_v)}{W/A}.$$

Пренебрежение гидродинамическими эффектами оправдано при условии

$$t_{\text{сверл}} \ll t_{\text{грав}},$$

т. е.

$$z \ll \frac{(W/A)^2}{\rho^2 (L_v + cT_v)^2 g}. \quad (22)$$

Например, для лазера с плотностью энергосвечения $W/A = 20$ кВт/мм, облучающего стальной образец ($\rho = 7,8 \times 10^3$ кг/м³ и $L_v + cT_v = 7,4 \times 10^3$ кДж/кг), условие (22) приводит к требованию

$$z \ll 24 \text{ мм}.$$

На практике оказывается, что глубина выемки в материале ограничена, и приведенная оценка соответствует экспериментально найденным пределам. Следовательно, можно ожидать, что гидродинамические эффекты играют значительную роль в ограничении глубины проникновения в материал.

6.6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Abramovitz M., Stegun J. A. (1956). Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series, 55.
 Andrews J. G., Atthey D. R. (1975). J. Inst. Math. Appl., 15, 59.
 Карслей Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел.— М.: Наука, 1964.
 Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
 Landau H. G. (1950). Q. Appl. Math., 8, 81.
 Ready J. F. (1965). J. Appl. Phys., 36, 462.
 Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.

6.7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Показать, что характерное расстояние (на котором существенно меняется температура) впереди границы, имеющей постоянную температуру и движущейся со скоростью v в материале с постоянной теплопроводностью D , по порядку величины равно $l = D/v$. Указание: сначала показать, что стационарное уравнение теплопроводности в системе координат, связанной с подвижной границей,

имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \left(\frac{v}{D} \right) \frac{\partial T}{\partial z}.$$

2. Получить распределение температуры в нулевом приближении, определяемое выражением (17).

3. В данной главе рассмотрена задача для одномерного уравнения теплопроводности. В действительности тепло переносится во всех трех измерениях. При каких условиях одномерная модель дает приемлемые результаты?

4. Согласно одномерной модели, можно сделать выемку при помощи любого сколь угодно слабого источника тепла в течение достаточно большого интервала времени. На практике источник нагревает только ограниченный участок материала, а тепло переносится в глубь материала по всем трем направлениям. Рассмотрим источник тепла мощности W , нагревающий до постоянной температуры T участок в форме круга радиуса a на поверхности материала постоянной температуропроводности. Показать, что условие образования выемки в материале имеет вид

$$W \geq 4aKT_v.$$

(Указание: рассмотреть аналогичную электростатическую задачу для заряженного проводника в диэлектрике.)

5а. Используя одномерную модель нестационарной теплопроводности, показать, что время, требуемое для подогрева фронтальной поверхности материала от начальной температуры ($\theta=0$) до точки кипения ($\theta=1$), определяется выражением

$$\tau = \frac{\pi \varepsilon^2 / 4}{(1 + \varepsilon)^2}.$$

5б. Решить задачу для времен $\tau = O(\varepsilon^2)$, указанную в § 6.4, методом сингулярных возмущений и сравнить решение для малых времен с решением (20) для больших времен, используя принципы сращивания, описанные Ван-Дайком (Ван-Дайк, 1964). (Трудная задача!)

6. В § 6.5 рассматривалось движение жидкости под действием силы тяжести. Указать влияние поверхностного натяжения. Получить условия (зависящие от коэффициента поверхностного натяжения), при выполнении которых поверхностное натяжение влияет на предельную глубину выемки в материале.

7. Рассмотрим лазер, излучающий малый импульс на поверхность большого бассейна с жидким металлом. Из условия неразрывности имеем $rv = \text{const}$ на любой поверхности. Однако так как плот-

ность жидкости велика по сравнению с плотностью газа, импульс материала ρv^2 изменяется скачком на поверхности испарения. В равновесных условиях это изменение импульса компенсируется скачком давления, создавая таким образом углубление на поверхности. Вычислить равновесную форму поверхности, предполагая, что сила тяжести является единственной силой, стремящейся восстановить форму поверхности, в случаях а) источника, обеспечивающего постоянную плотность энерговыделения на поверхности в виде круга радиуса a , и б) в случае гауссова распределения плотности энерговыделения. Следует ли пренебрегать поверхностным натяжением?

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНСТРУКЦИЯХ И НАЧАЛА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

О. К. ЗЕНКЕВИЧ ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: теория матриц, векторное исчисление и элементарная механика]

7.1. ВВЕДЕНИЕ

Основная задача, возникающая в инженерной практике проектирования тех или иных конструкций, в настоящее время состоит не в том, чтобы создать подходящую математическую модель, а больше связана с расчетами на основании уже имеющихся теорий. Условия совместности деформаций и равновесия внутренних напряжений в форме дифференциальных уравнений установлены еще в начале девятнадцатого столетия в классических трудах основоположников теории упругости (обзор этих работ см. в книге Тодхантера и Пирсона) и остались неизменными до наших дней. И лишь в проблеме построения так называемых «определяющих» соотношений, описывающих свойства реальных материалов в форме связи между напряжениями и деформациями, остались кое-какие возможности для создания новых моделей, но даже здесь простейшее из таких соотношений — линейная теория упругости — была обоснована достаточно хорошо. На самом деле данная форма определяющих уравнений является достаточно надежной основой для решения многих задач проектирования конструкций; к сожалению, с этой задачей математика (и математики) оставляют инженера наедине, так как аналитические решения дифференциальных уравнений можно построить лишь для самых простых случаев.

К счастью, в числе «тривиальных» решений находятся решения для таких элементов конструкций, как балки и стержни. Из этих простых элементов — после предварительного определения основных зависимостей для каждого из них — можно составлять достаточно сложные конструкции, с которыми приходится иметь дело на практике. Так, например, «шарнирно закрепленный» стержень, показанный на рис. 7.1, а, может быть частью очень сложного сооружения, изображенного на рис. 7.1, б. Процедуры синтеза и

¹⁾ О. С. Zienkiewicz, Department of Civil Engineering, University of Wales, Swansea.

расчета таких сложных систем являются чисто алгебраическими и, несмотря на то что их численная реализация может оказаться достаточно трудоемкой, с появлением ЭВМ эти затруднения особых хлопот не доставляют. В настоящее время для решения этой задачи создана доведенная до весьма высокой степени стандартизации методика, краткое описание которой будет приведено в следующем параграфе.

Подлежащие расчету конструкции во многих случаях представляют собой «сплошные» тела, в которых элементы простой структу-

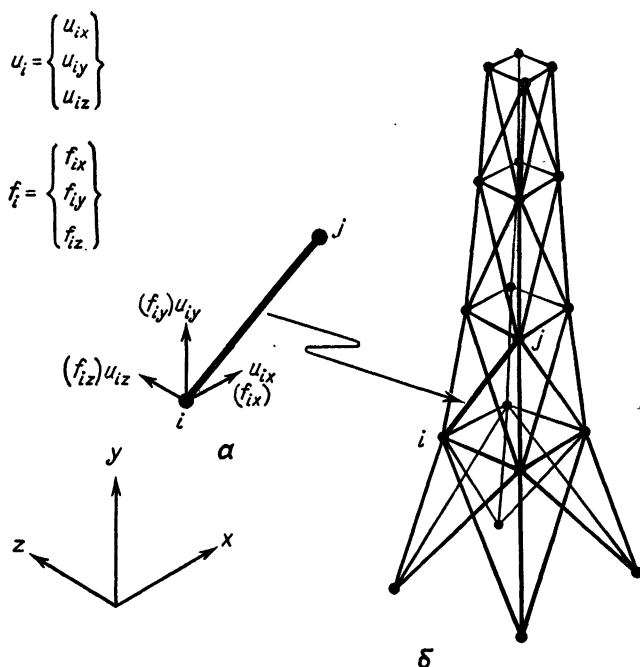


Рис. 7.1. Простая стержневая конструкция и ее типичный элемент.

ры отсутствуют, и мы встречаемся здесь, очевидно, с краевой задачей для уравнений в частных производных, общее решение которой неизвестно. Примеры таких конструкций приведены на рис. 7.2; в их число входят, например, дамбы, мосты, перекрытия, ядерные реакторы.

На первый взгляд кажется, что единственный выход из создавшегося положения состоит в переходе к некоторой идеализированной модели или использовании грубых аппроксимаций, однако этот путь недопустим в тех случаях, когда речь идет о безопасности и жизни людей. Поскольку инженер должен достичь успеха в работе

независимо от того, имеет он опору в математике или нет, и — как хорошо известно — он должен нести полную ответственность за результаты своего труда, то ему ничего не остается делать, как положиться на свою изобретательность. Инженер здесь рассуждал следующим образом: поскольку сложные стержневые конструкции типа ферм поддаются расчету, если их расчленить на основные (составляющие их элементы, то не исключено, что и в случае сплошной

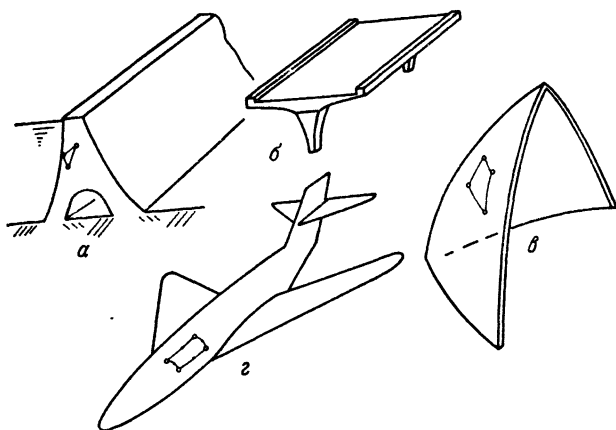


Рис. 7.2. Некоторые типичные «непрерывные» конструкции.

среды применима аналогичная процедура разделения на небольшие «конечные элементы» простой формы, соединенные между собой в конечном числе точек (как показано, например, на рис. 7.2). Интуиция ему подсказывала, что с помощью такой аппроксимации можно будет достичь удовлетворительной для практики точности расчетов, если только базисные элементы выбирать достаточно малыми. Этот путь (интуитивный) обоснования выбора таких конечных элементов позже был «систематизирован», и сразу же было обнаружено, что такая процедура на самом деле применима практически ко всем задачам, для которых имеется математическая постановка. В настоящее время метод конечных элементов изучается не только инженерами, но и математиками, которые исследуют его с позиций более «чистой» науки — как общий метод приближенного решения уравнений в частных производных.

В этой главе мы попытаемся дать набросок основных положений, включая историю их развития, и показать, как было достигнуто обобщение. По нашему мнению, данный пример, показывающий, каким образом из потребностей практики возникает метод, весьма поучителен.

Все выводы и рассуждения будут основаны на примере двумерной задачи; несмотря на это, мы надеемся, что некоторые обобщения

читатель сумеет произвести самостоятельно. По-видимому, первая печатная работа, в которой была изложена концепция метода конечных элементов — это работа Тернера с соавт.; более подробное изложение и различные примеры читатель найдет в книге Зенкевича. Число работ на эту тему в настоящее время очень велико (более 1000, причем большинство из них опубликованы за последние 10 лет), так что здесь цитируются лишь основные. Ссылки на работы Фрейи де Вёбеке, Зламала, Одена и Стренга и Фикса даны для читателей, больше интересующихся чисто математическими аспектами метода.

7.2. ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА

«Решение» простой задачи для балки, показанной на рис. 7.1 (элемент e связан с другими в точках l, m), в случае, когда материал линейно-упругий, представляет собой связь (линейную) между усилиями f_j^e и f_i^e и перемещениями u_i^e и u_j^e , т. е.

$$f_i^e = K_{ij} u_j^e + f_{0i}^e, \quad (1)$$

где u_j^e и f_i^e — векторные величины, имеющие три компоненты, соответствующие трем направлениям координатных осей. Ясно, что при объединении элементов в конструкцию мы приравниваем перемещения узла элемента и соответствующего узла конструкции, т. е. полагаем

$$u_i^e = u_i. \quad (2a)$$

Для того чтобы данный узел находился в равновесии, нужно потребовать, чтобы суммарное усилие здесь было равно нулю:

$$\sum_{e=1}^n f_i^e = 0, \quad (2b)$$

где n — число элементов, пересекающих рассматриваемый узел. Таким образом получается замкнутая система уравнений для всей конструкции; эта система такова:

$$K u + f_0 = 0, \quad (3)$$

где

$$u^T = (u_1^T, u_2^T, \dots)^T, \\ f_0^T = (f_{01}, f_{02}, \dots)^T,$$

и читатель может самостоятельно убедиться в том, что данная система имеет очень простую структуру (см. задачу (1)). Здесь

$$K_{ij} = \sum K_{ij}^e, \\ f_{0i} = \sum f_{0i}^e, \quad (4)$$

причем суммирование распространяется по всем элементам.

Полный расчет ансамбля элементов — задача не более сложная, чем решение системы линейных уравнений высокого порядка с симметричной матрицей ленточной структуры — проблема, в которой инженеры уже успели применить свою изобретательность. ЭВМ, которыми мы располагаем в настоящий момент, позволяют без труда решать системы с числом неизвестных порядка тысячи, мощные же ЭВМ в действительности дают возможность работать с системами, содержащими 20—30 тыс. неизвестных.

7.3. ЗАДАЧА О ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ И ПЕРВЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Конечно-элементную дискретизацию континуума мы проведем для «плоской» задачи, в которой напряжения и перемещения зависят только от двух переменных. Такая задача на практике может возникнуть, например, при исследовании напряжений в длинной плотине, показанной на рис. 7.2, а, материал в любом сечении которой должен вести себя одинаково.

В случае двух измерений мы имеем дело с симметричной системой напряжений σ , определяемой тремя компонентами (см. рис. 7.3, а):

$$\sigma^T = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T. \quad (5)$$

Если массовые силы задаются вектором

$$\mathbf{b}^T = (X, Y), \quad (6)$$

где X и Y — компоненты вектора $\mathbf{b}$ по осям x и y , рассчитываемые на единицу объема, то для того, чтобы имело место равновесие, необходимо, чтобы в области Ω , отвечающей рассматриваемой задаче, выполнялись следующие уравнения:

$$\mathbf{L}\sigma + \mathbf{b} = 0, \quad (7)$$

где $\mathbf{L}$ — дифференциальный оператор вида

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$\mathbf{L}\sigma$ — усилие, действующее на единицу объема материала. Перемещения любой точки задаются двумерным вектором $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}^T = (u, v), \quad (9)$$

где u и v — компоненты вектора $\mathbf{u}$, соответствующие направлениям координатных осей. «Искажение», или деформацию окрестности

любой точки можно описать вектором ε ¹⁾

$$\varepsilon^T = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy})^T, \quad (10)$$

причем

$$\varepsilon = \mathbf{L}u. \quad (11)$$

Заметим, что оператор $\mathbf{L}$ в формуле (11) совпадает с соответствующим оператором в уравнениях равновесия. (Выяснять причины такого совпадения в данный момент нам нет необходимости.)

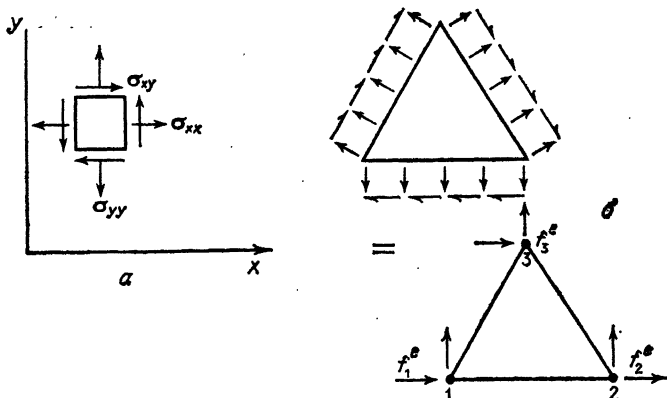


Рис. 7.3. Плоская задача теории упругости. а — определение компонент напряжений; б — замена распределенных по границам конечного элемента напряжений узловыми силами,

Система уравнений, определяющих краевую задачу, теперь замкнута, и мы должны ее решить.

Добавляя к уравнениям (5) и (10) соответствующие граничные условия (обсуждением возможных форм которых здесь мы заниматься не будем) и определяющее уравнение, связывающее σ и ε , получаем полную формулировку задачи, точные решения которой — как уже отмечалось — могут быть найдены лишь для весьма ограниченного числа конфигураций. Определяющее уравнение для линейно-упругого материала будем записывать в следующем виде (удобном для наших целей):

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon, \quad (12)$$

где $\mathbf{D}$ — симметричная матрица модулей упругости размера 3×3 , которую необходимо определять экспериментально.

¹⁾ Векторное представление тензорных величин, обычно записываемых как σ_{ij} , ε_{ij} , особенно хорошо приспособлено для наших целей; появление множителя 2 в формуле (10) объясняется симметрией тензора деформации.

При попытке построить физический «конечный» элемент инженер выделяет из сплошной среды небольшую область несложной формы — треугольник на рис. 7.3, б, и предполагает, что перемещения «узлов» 1, 2 и 3 данного элемента, т. е. величины u_i^e , $i=1, 2, 3$, полностью определяют усилия f_i^e , $i=1, 2, 3$, в соответствующих узловых точках. Ясно, что эти усилия лишь статически эквивалентны множеству возникающих в действительности напряжений, действующих на гранях любого элемента.

С этого момента основным стал вопрос о том, какова должна быть логика действий, позволяющих установить связь этих двух множеств параметров. Мы приведем здесь один из возможных путей, которому следовали на раннем этапе развития метода конечных элементов.

Прежде всего предположим, что перемещения внутри элемента задаются с помощью некоторого множества интерполирующих функций. Так, для показанного выше элемента e

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum N_i u_i, \quad (13)$$

где $N_i = \mathbf{I} N_i$, а N_i — обычные линейные интерполяции.

Для того чтобы получить «узловые усилия», статически эквивалентные внутренним напряжениям, используется принцип возможных перемещений (см., например, Гольдштейн). Таким образом, если вектор δu^e — множество возможных перемещений узловых точек, то, приравнивая возможную работу внешних — узловых — усилий внутренней возможной работе — работе напряжений, получим

$$\delta(u^e)^T f^e = \int_{\Delta} \delta e^T \sigma \, dx \, dy - \int_{\Delta} \delta u^T b \, dx \, dy. \quad (14)$$

Интегрирование здесь проводится по всей области, занятой треугольником. Из уравнения (11) находим

$$\delta e = \mathbf{L} \delta u,$$

и из (13) следует, что

$$\delta u = \sum N_i \delta u_i. \quad (15)$$

Далее, поскольку принцип возможных перемещений справедлив для любых δu_i^e , то мы заключаем, что имеет место соотношение

$$f_i^e = \int_{\Delta} (\mathbf{L} N_i)^T \sigma \, dx \, dy - \int_{\Delta} N_i^T b \, dx \, dy, \quad (16)$$

которое с учетом определяющего уравнения (12), аппроксимации поля перемещений (13) и определения деформаций (11) сводится в точности к зависимости вида (1), установленной ранее для случая

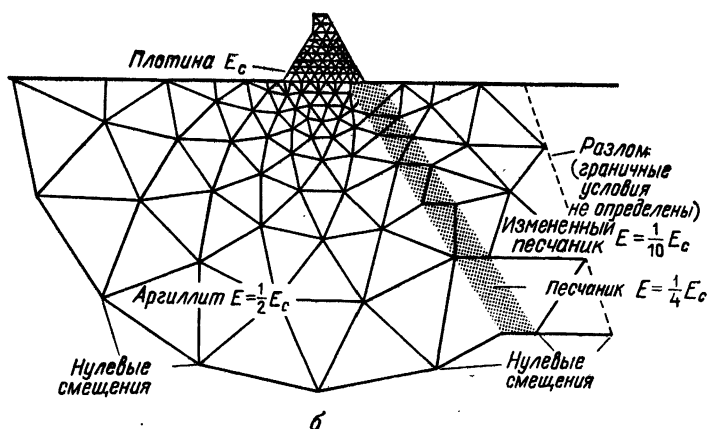
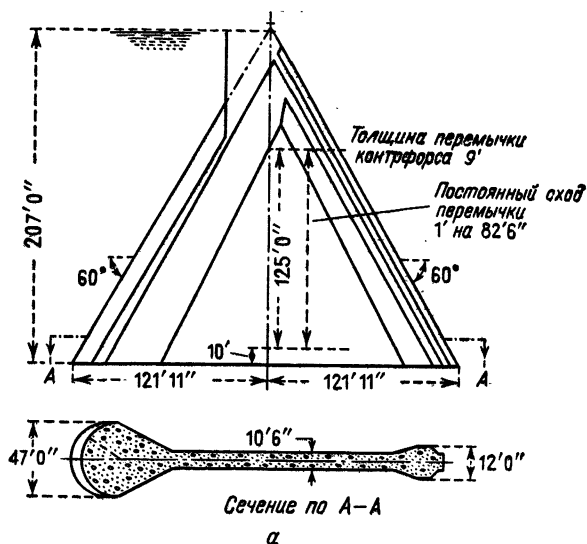


Рис. 7.4. Анализ напряжений в контрфорсной плотине. Принимается предположение о плоском напряженном состоянии плотины и ее основания. а—сечение рассчитываемого контрфорса. б—форма и размеры исследуемой части основания и разбиение на конечные элементы (заимствовано из книги Зенкевича с разрешения издательства Макгроу-Хилл).

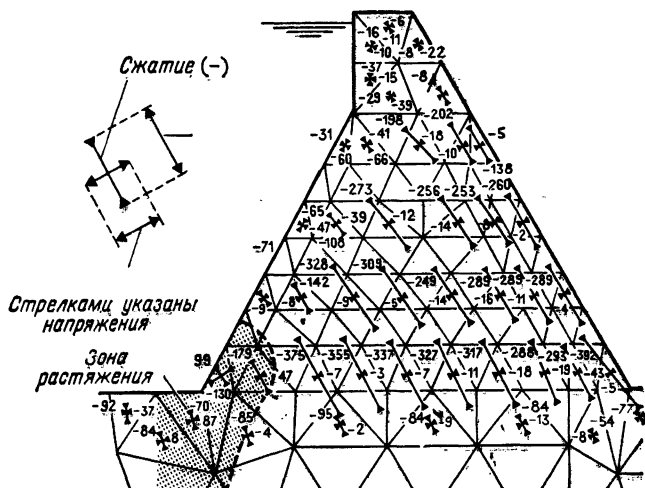


Рис. 7.4. Расчет напряжений в контрфорсной плотине. Принимается предположение о плоском напряженном состоянии плотины и ее основания. σ — расчет напряжений в контрфорсной плотине. Главные напряжения при действии силы тяжести и давления воды, которое учитывается как внешняя нагрузка (заимствовано из книги Зенкевича с разрешения издательства Макгроу-Хилл).

стержней, причем здесь

$$K_{ij} = \int_{\Delta} (LN_i)^T D (LN_j) dx dy, \quad (17a)$$

$$f_{oi} = - \int_{\Delta} N_i^T b dx dy, \quad (17b)$$

Коэффициенты полученной таким способом дискретизации в каждом треугольном элементе определяются весьма просто, после чего расчет соответствующей конструкции производится теми же методами (и с помощью тех же программ), которые ранее были созданы для расчета стержневых (дискретных) систем. Мы не останавливаемся здесь на построении конкретных форм интерполирующих функций и вычислении интегралов по элементам — читатель может получить соответствующие формулы самостоятельно или обратиться к работе Тернера и др. Отметим следующие важные моменты:

1. Для получения аналога дискретных элементов из элементов «непрерывных» создана «разумная» процедура.

2. Путем сравнения с экспериментальными результатами и решениями в замкнутой форме было установлено, что эта процедура позволяет достичь любой заранее заданной точности расчетов.

После этого предложенный процесс стал доступным инструментом, с помощью которого оказалось возможным определять напряженное состояние реальных конструкций, за работоспособность

которых инженер должен нести полную ответственность. На рис. 7.4 мы привели некоторые из результатов подобной процедуры расчета напряжений в плотине на стадии проектирования (1962—1963 гг.); в настоящее время плотина построена и работает вполне удовлетворительно.

7.4. НЕКОТОРЫЕ ОЧЕВИДНЫЕ ВОПРОСЫ И ОБОБЩЕНИЯ

Несмотря на то что «практик» на данном этапе вполне может удовлетвориться получающимися результатами, при более строгом рассмотрении возникает ряд нерешенных вопросов:

1. «Разумна» ли замена множества непрерывно распределенных усилий совокупностью сосредоточенных?
2. Всегда ли процесс сходится к точному решению, если размеры элементов убывают?
3. Существует ли какой-либо метод оценки погрешности аппроксимации?
4. Каково математическое обоснование данной процедуры?

Ответ на последний из поставленных здесь вопросов позволяет сделать наиболее важные выводы. Предположим, что уравнение (13) работает во всей области Ω , причем индекс i на этот раз означает номер произвольной точки внутри области. Функция N_i теперь становится кусочно-определенной во всей области, и если интегралы в формуле (14) подсчитывать по всей области, а не по отдельному элементу, то внутренние силы взаимодействия f_i между элементами в задачу не войдут, левая же часть равенства (14) будет относиться лишь к работе заданных на границе усилий. Далее, если мы предположим, что

$$\int_{\Omega} () dx dy = \sum \int_{\Delta} () dx dy \quad (18)$$

для всех подынтегральных выражений в равенстве (14) (суммирование производится по всем элементам), то получим правило «сборки» дискретной системы без использования сил внутреннего взаимодействия, которое в качестве частного случая содержит формулу (2). Таким образом, мы не только исключили из рассмотрения объект, введение которого представлялось сомнительным из физических соображений, но и получили одновременно ограничения на интерполирующие функции N_i , которые были использованы для описания перемещений внутри каждого «элемента». Ясно, что для того, чтобы формула интегрирования (18) была законной, эти функции — хотя они и определяются кусочным образом — должны обладать некоторыми свойствами непрерывности при переходе от одного элемента к другому. В рассматриваемом случае функции N_i диффе-

ренцируются только один раз, следовательно, эти функции должны быть непрерывными (принадлежать классу C^0). К счастью, при использовании линейных интерполяций в рассмотренном нами выше треугольном элементе и значений функции в соединяющих элементы узлах было наложено именно это условие непрерывности — не исключено, что это произошло случайно.

Более тщательное исследование показывает, что наложение данного требования непрерывности при одновременном соблюдении некоторых критериев полноты аппроксимаций вида (13) на самом деле обеспечивает сходимость к точному решению, и тем самым дается ответ на второй из поставленных выше вопросов.

На данном этапе читатель может заметить, что если некоторая задача, описываемая дифференциальными уравнениями (в частных производных), может быть представлена в форме интегрального тождества

$$F(\varphi) = 0 \rightarrow \int_{\Omega} v F(\varphi) d\Omega = 0, \quad (19)$$

где φ — искомая функция, v — некоторая функция, обладающая подходящими свойствами непрерывности, то рассуждения, проведенные выше для задачи определения упругих напряжений, могут быть применены для приближенного решения и этих задач. Если мы представим φ в виде линейной комбинации кусочно-определенных функций с коэффициентами, совпадающими с определенным образом выбранными искомыми параметрами a_i , т. е.

$$\varphi = \sum N_i a_i, \quad (20)$$

то уравнение (19) немедленно приведет к соответствующему множеству аппроксимаций при условии, что система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов строится с использованием линейно независимых функций v_j , число которых равно числу искоемых параметров.

Отметим, что во многих случаях можно получить интегральные тождества при помощи *принципа экстремума*, отвечающего данной системе дифференциальных уравнений. Обратившись к теории упругости, мы найдем, что принцип возможных перемещений в действительности представляет собой принцип минимума *полной потенциальной энергии*.

Таким образом, здесь мы дали — по крайней мере частичный — ответ на третий вопрос — об оценке погрешности аппроксимации. Мы не будем вникать в суть данной проблемы, сошлемся лишь на раннюю работу Синджа, который, исходя из чисто математических соображений, предвосхитил — в некотором ограниченном смысле — возможность создания метода конечных элементов.

Ясно, что приведенное выше обобщение конечно-элементной процедуры открывает путь не только для расчета напряженно-деформи-

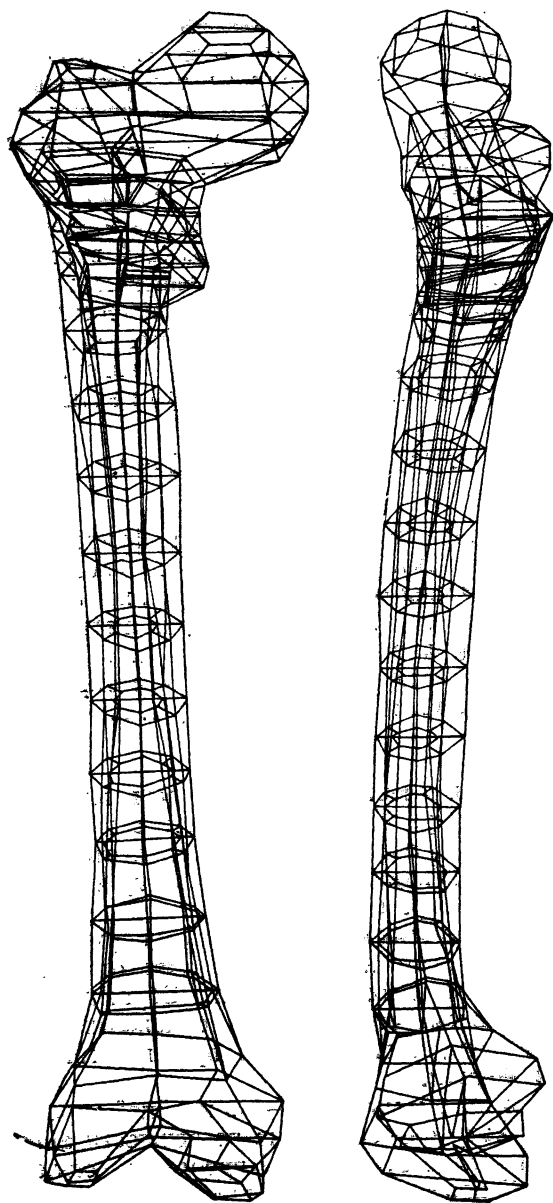


Рис. 7.5. Задача из биомеханики. Все элементы вычерчены прямолинейными — их кривизна не показана. Приведены элементы вырожденной формы,

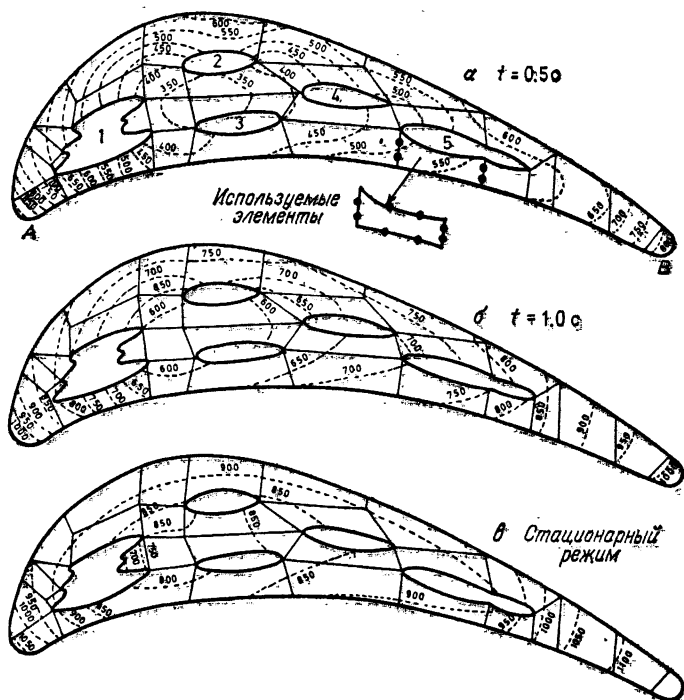


Рис. 7.6. Распределение температур в охлаждаемой лопасти ротора, имеющей нулевую начальную температуру ($\Delta t = 0,01$ с). Удельная теплоемкость $c = 0,11$ кал/г $\times$ $\times$ град, плотность $\rho = 7,99$ г/см³, коэффициент теплопроводности $k = 0,05$ кал/сек $\times$ $\times$ см $\times$ град, температура газа около лопасти равна 1145°C , коэффициент теплоотдачи α на наружной поверхности лопасти изменяется от 0,0390 до 0,056 (сечение (A — B)).

Номер отверстия	Температура	Значения α по периметру каждого отверстия
1	545	0,0980
2	587	0,0871

(Займствовано из книги Зенкевича с разрешения издательства Макгроу-Хилл.)

рованного состояния конструкций, но и для решения большого количества задач, которые можно сформулировать в виде интегрального тождества. Количество вариантов здесь огромно: могут быть использованы самые разнообразные формы элементов, виды аппроксимирующих функций и рассмотрены различные типы конкретных физических задач.

В качестве примера на рис. 7.5 показаны криволинейные «блоки», используемые при расчете полей напряжений в трехмерном случае, на рис. 7.6 — по-настоящему сложная задача теплопроводности,

7.5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Приведенная в данной работе и, бесспорно, неполная история создания метода конечных элементов интересна тем, что здесь запросы развивающейся техники привели к открытию (и иногда переткрытие¹⁾) структурных моделей, имеющих вполне универсальный характер; причем относящиеся сюда математические вопросы были развиты самими инженерами. Такой процесс, который сперва создается и лишь после этого обосновывается, развивается иногда очень быстро и может приводить к весьма неожиданным результатам. Обоснование достаточных условий сходимости, которые здесь сконденсированы до небольшого количества утверждений, было вопросом нескольких лет; не исключено, что это — просто счастливая случайность. В этот же период были построены элементы, для которых установленные достаточные условия сходимости систематически нарушались, возможность их использования не могла быть обоснована с помощью приведенных здесь простых соображений, и тем не менее мы сейчас знаем, что применение этих элементов — весьма эффективных — приводит к сходящемуся процессу. В настоящее время метод конечных элементов развивается по совершенно новым направлениям, причем некоторые из них еще нуждаются в теоретическом обосновании, хотя и широко внедрены в практику.

С точки зрения проблемы моделирования основной интерес представляет не столько физическая сторона дела (которая определяется в основном связью напряжений с деформациями), сколько методика решения уравнений, описывающих соответствующий физический процесс. Искусство применения метода конечных элементов состоит в выборе таких конечных элементов, которые позволяют построить экономичную и в то же время точную модель данной конкретной конструкции.

7.6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гольдштейн Г. Классическая механика. Наука, 1975.
Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Мир, 1975.
Зламал (Zlamal M.) On the finite element method. Num. Math., 12 (1968), 394—409.
Курант (Courant R.) Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration. Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), 1—23.
Оден (Oden J. T.) A general theory of finite elements. Int. J. Num. Meth. Engineering, 1 (1969), 247—259.
Синдж (Synge J. L.) The Hypercircle in Mathematical Physics. Cambridge University Press, London, 1957.
Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Мир, 1977.

¹⁾ Первая печатная работа по использованию аппроксимаций, определяемых кусочным образом по треугольным элементам, была опубликована Курантом в 1943 г.

- Тернер, Клаф, Мартин, Топп (Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J.) Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. J. Aerosp. Sci., **23** (1956), 805—823.
- Тодхантер, Пирсон (Todhunter I., Pearson K.) History of the Theory of Elasticity and Strength of Materials. Dover, New York, 1973.
- Фрейи де Вёбеке (Fraeijs de Veubeke B. M.) Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method, in «Stress Analysis», Eds. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Wiley, New York, 1965.

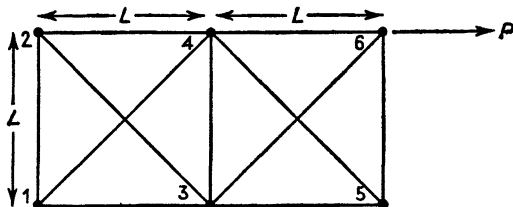
7.7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Дано удлинение Δ стержня, определяемое по формуле:

$$\Delta = \frac{LP}{EA},$$

где L — длина стержня, E — модуль упругости, A — площадь поперечного сечения, P — растягивающая сила.

(а) Найти коэффициенты жесткости K_{ij}^e для стержня, если известны координаты его концов; (б) построить уравнения, описывающие поведение конструкции, показанной на приведенном ниже рисунке,



при условии, что $u_1=v_1=0$, $u_5=v_5=0$, горизонтальная нагрузка P приложена в точке 6.

2. Доказать, что в задаче расчета четырехполюсников возникают уравнения типа (1) и (4).

3. Найти формулу для линейной интерполирующей функции и явный вид выражений (17) для треугольного элемента, показанного на рис. 7.3.

4. Доказать, что задачу, описываемую дифференциальным уравнением

$$F(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q = 0,$$

где $k=k(x, y)$, $Q=Q(x, y)$, при условии, что на границе $\varphi=0$, можно привести к дискретной форме, используя уравнение (19), если положить

$$\varphi = \sum N_i \varphi_i$$

и

$$v = N_j.$$

Доказать, что в задаче в «стандартной» форме

$$K_{ij}^e = \int \left(k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy.$$

(Указание: использовать формулу интегрирования по частям.)

МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИЙ

ДЖ. МЭРДИ ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: теория обыкновенных дифференциальных уравнений]

8.1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема роста населения стала привлекать внимание во всем мире с тех пор, как Мальтус (1798) предложил свою «мрачную теорию»: человечество может выжить, только если периоды роста в геометрической прогрессии будут прерываться эпидемиями и стихийными бедствиями. Сравнительно недавно Эрлих и Эрлих (1970) и Медоуз и др. (1972) рассмотрели в таком же свете экспоненциальный рост населения и истощение невозобновляемых природных ресурсов ²⁾.

Хотя мы не можем отрицать важность проблемы роста населения Земли, было бы нереально предполагать, что модель Мальтуса — единственно возможная для биологических популяций. Действительно, она удовлетворительно описывает только очень короткие периоды жизненного цикла организмов и не является универсальной.

Можно создавать модели, описывающие с определенной степенью точности отдельные события, касающиеся роста численности вида. Значительно труднее строить модели с широким диапазоном применимости. Возникает вопрос, какую пользу можно извлечь из моделей и в какую форму их следует облекать.

Модели могут быть самыми разнообразными — от описательного, эмпирического типа до моделей общего характера (Мэй, 1972). Это различие особенно важно в связи с конкретными приложениями.

¹⁾ G. Murdie, Department of Zoology and Applied Entomology, Imperial College, London.

²⁾ Как известно, уничтожающая критика мальтузианства была дана еще К. Марксом. Что же касается Медоуза и его последователей, то критика теоретических концепций и выводов этих авторов содержится, например, в статьях Геовани В. А., Егоров В. А., Митрофанов В. Б., Пионтковский А. А. Исследование влияния управления на глобальную модель W2. Проблемы кибернетики. Вып. 31. Изд-во «Наука», М., 1976; Гвишиани Д. М. Методологические проблемы моделирования глобального развития. Вопросы философии, № 2, 1978. — *Прим. ред.*

Конуэй и Мэрди (1972) описывают модели, которые могут быть использованы при выборе средств борьбы с вредителями. Однако диапазон этих моделей сравнительно узок: от моделей вспомогательного характера, описывающих, например, половое и территориальное поведение, до моделей, предназначенных для описания очень небольших фрагментов биологической системы, например для изучения популяции одного вредителя хлопчатника на данном поле. Модели такого типа созданы для ответа на вопросы, касающиеся отдельного вида, а не для изучения общих экологических законов. По терминологии Холлинга (1966, 1968) такие модели называются «тактическими».

Общая «стратегическая» модель (Холлинг, 1966) «жертвует точностью в попытке охватить общие законы» (Мэй, 1972). Именно стратегическим моделям и посвящена эта глава. Они создают на формальном языке схему важнейших биологических процессов, таких, как рождение и смерть. Анализ моделей используется для проникновения в сущность этих биологических процессов, особенно процессов биологического взаимодействия, которое может в дальнейшем определить области, где исследование приведет к объяснению основных механизмов регуляции численности в природных популяциях.

Эта глава не претендует на представление обзора моделей, используемых во всех отраслях биологии. Тот факт, что наше внимание будет сосредоточено на моделях популяций, отражает не степень их важности по отношению к другим моделям, а просто соответствует интересам экологов, занимающихся обширной проблемой количественной оценки природных популяций, особенно в области борьбы с насекомыми-вредителями.

Существующие в наше время опасения по поводу загрязнения окружающей среды и использования ядохимикатов делают весомее аргументы тех ученых, которые высказываются за применение преимущественно мер биологического контроля путем использования естественных врагов вредителей. Для изучения возможности использования естественных врагов нам необходимо иметь некоторые сведения о динамике сообществ, состоящих как минимум из двух видов, а скорее даже многовидовых систем. Однако, прежде чем перейти к изучению аспектов этих взаимодействий, полезно разобрать основные черты относительно простой одновидовой системы.

8.2. ОДНОВИДОВЫЕ МОДЕЛИ

Простейшая модель Мальтуса для темпа роста численности популяции организмов, размножающихся при постоянных условиях, гласит:

$$\frac{dN_t}{dt} = bN_t, \quad (1)$$

где b — мгновенная рождаемость в популяции. Интегрируя и полагая $N=N_0$ при $t=0$, получим мгновенную численность популяции, равную

$$N_t = N_0 \exp(bt). \quad (2)$$

В модель можно ввести мгновенную смертность d . Полагая $r_m = b - d$, получим

$$N_t = N_0 \exp(r_m t). \quad (3)$$

Параметр r_m служит мерой внутренней способности популяции к численному росту (Андреуарта и Берч, 1954).

В естественных условиях редко приходится иметь дело с промежуточными временами, достаточно короткими для того, чтобы можно было считать параметр r_m постоянным. В общем случае $r_m = r(t)$ и

$$N_t = N_0 \exp\left(\int_0^t r_m(t) dt\right). \quad (4)$$

Несмотря на то что закон неограниченного экспоненциального роста и был предложен для естественных популяций (например, для популяции человека Мальтусом, 1798, Медоузом и др., 1972), следует помнить, что природные ресурсы, например пространство, количество пищи и воды, ограничены. Это приводит к наличию верхнего уровня численности популяции, который мы обозначим через K . К нему стремится численность, и при достижении этого уровня или его превышении она снова падает, так как недостаток пищи вызывает голодание, что увеличивает смертность и подавляет размножение. Темп возобновления истощенных ресурсов, например, вследствие увеличения производства пищи, определяет время восстановления популяции не поддерживается на постоянном уровне, а колеблется, иногда в очень широких пределах, около своего среднего значения, не превышающего максимальной численности, которую может обеспечить окружающая среда. Разработка моделей популяций помогает изучению механизмов стабилизации этих колебаний.

Из соотношения (3) следует, что $N_t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, когда $r_m > 0$, и $N_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, когда $r_m < 0$. Если $r_m = 0$, то популяция устойчива, ее численность не растет и не уменьшается. Малые возмущения равновесного значения $r_m = 0$ приведут к неограниченным отклонениям численности популяции от положения неустойчивого равновесия. Однако обычно существуют ограничения темпа роста популяций, которые связаны с ее численностью N_t в момент времени t . Это означает, что существует внутренний механизм регуляции, зависящий от плотности. Следовательно, при скорости изменения численности, равной

$$\frac{dN_t}{dt} = (b - d - cN_t) N_t, \quad (5)$$

где c — постоянная, изменение величины r_m пропорционально $(K - N_t)/K$. Линейная зависимость

$$r = r_m \left(\frac{K - N_t}{K} \right) \quad (6)$$

означает, что если N_t приближается к величине максимальной численности K , которую может обеспечить окружающая среда, то r стремится к нулю, а при $N_t \rightarrow 0$ величина r стремится к максимально возможному для вида значению r_m . Выражение $(K - N_t)/K$ яв-

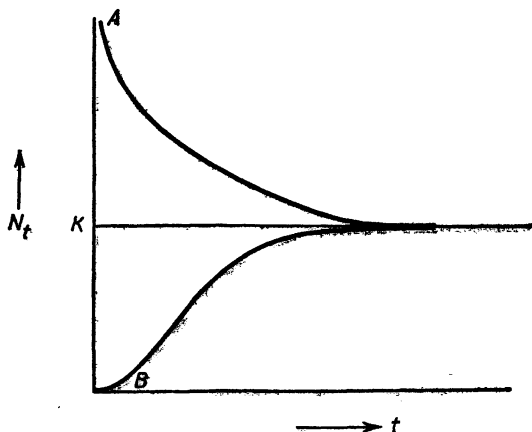


Рис. 8.1. Логистическая функция с равновесным уровнем K : А) $N_0 > K$, численность популяции асимптотически приближается к K сверху, $r < 0$; В) $N_0 < K$, численность популяции асимптотически приближается к K снизу, $r > 0$.

ляется мерой неиспользованных ресурсов. Переписывая уравнение (5) в виде

$$\frac{dN_t}{dt} = r_m \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) N_t \quad (7)$$

и интегрируя, получим так называемое уравнение логистической кривой Верхалста — Перла (рис. 8.1)

$$N_t = \frac{N_0 K \exp(r_m t)}{K - N_0 \{1 - \exp(r_m t)\}} \quad (8)$$

(Верхалст, 1838; Перл, 1927) (см. задачу 1).

При $N_t < K$ величина r положительна, а при $N_t > K$ отрицательна.

Таким образом, плотность популяции приближается к равновесной плотности K сверху или снизу. При $N_t = K$ имеем $r = 0$ и существует положение устойчивого равновесия, около которого происходят колебания численности. Любые отклонения равнове-

ниваются противоположными силами, которые пропорциональны $K - N_t$ и возвращают численность популяции обратно к равновесному уровню. Линейные поправки для t_m , разумеется, не меняют сути дела, так как рассуждения остаются справедливыми и для криволинейных функций.

Серьезным недостатком описанных выше моделей является использование мгновенных значений рождаемости и смертности, полностью определяемых состоянием популяции в данный момент. Несомненно, что рождаемость зависит от событий в более или менее отдаленном прошлом, и её регулирование более естественно связать с численностью популяции в то время. Так, имеется промежуток времени между зачатием и рождением. С другой стороны, по-видимому, с меньшей ошибкой будет связано предположение, что смертность зависит от состояния популяции в данный момент, хотя можно и представить, что какие-то недостатки питания в прошлом могут усилить восприимчивость к заболеваниям в настоящий момент и таким образом увеличить смертность. В природе наличие такого запаздывания по времени легко проследить. Так, например, имеются длительные периоды созревания у млекопитающих, вследствие чего число созревающих особей зависит от численности популяции в предыдущий период размножения, и поэтому на рождаемость во время t влияют условия, существовавшие в момент времени $t - \tau$. С учетом запаздывания по времени логистическое уравнение становится дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\frac{dN_t}{dt} = b_0 \left(1 - \frac{N_{t-\tau_1}}{K} \right) N_{t-\tau_2} - d_0 N_t, \quad (9)$$

где τ_1 и τ_2 — времена запаздывания, а b_0 и d_0 — соответственно основные значения рождаемости и смертности.

Приведенные выше соображения относятся к видам с дискретными поколениями (например, в случаях, когда размножение происходит только в данное время года). Если же поколения перекрываются, мы должны учитывать также определенную возрастную структуру, которую могут иметь некоторые популяции. Например, молодые (еще не размножающиеся) и взрослые особи сильно различаются по смертности, причем молодые, так как они не размножаются, вносят совершенно иной вклад в популяцию. Соображения о возрастных характеристиках популяций использовались демографами и статистиками, и на их основе развиты специальные методы для популяций с возрастной структурой, хотя и существуют общие закономерности, применимые к любым популяциям.

Для любых популяций можно заключить, что если l_x — вероятность достижения индивидуумом возраста x , то $l_0 = 1$ и $l_\infty = 0$. Удобно рассматривать только самок, т. е. репродуктивную часть популяции, обозначив число самок в потомстве одной взрослой самки возраста x через m_x . Общая численность популяции может быть полу-

чена теперь путем умножения числа самок на коэффициент соотношения полов. Если принять время между поколениями за единицу, то скорость роста популяции от поколения к поколению составит

$$R = \sum_0^{\infty} l_x m_x = \frac{N_{t+1}}{N_t}. \quad (10)$$

Если теперь обозначить через $n_{x, t}$ число особей в возрасте от x до $x+1$ в момент времени t , то число особей, родившихся в популяции за время t , будет равно

$$n_{0, t} = \sum_{x=0}^{\infty} n_{x, t} m_x. \quad (11)$$

При изучении популяции с возрастной структурой важным является вопрос об устойчивости распределения по возрасту. Если существует постоянное возрастное распределение, то существует и постоянный относительный прирост численности популяции за один период размножения,

$$R = \frac{\sum n_{x, t+1}}{\sum n_{x, t}}. \quad (12)$$

Тогда для популяций, разделенных числом периодов (т. е. поколений) T , получим

$$n_{x, t} = n_{x, t-T} R^T. \quad (13)$$

Поскольку

$$n_{0, t-x} = n_{0, t} R^{-x} \quad (14)$$

и, таким образом,

$$n_{0, t} = n_{0, t} \sum R^{-x} l_x m_x, \quad (15)$$

то уравнение

$$1 = \sum R^{-x} l_x m_x \quad (16)$$

определяет R для данной возрастной таблицы выживания (l_x) и рождаемости (m_x) при постоянной возрастной структуре (см. задачу 2). При постоянных условиях в случае размножения более чем одной возрастной группы численность будет иметь колебательный характер с затуханием, и стабильное возрастное распределение с постоянными соотношениями численностей всех возрастных групп будет достигнуто.

Следует упомянуть еще две характеристики статистической таблицы ожидаемой продолжительности жизни для разных возрастных групп.

1. Часть популяции, доживающая до возраста x , но умирающая в возрасте от x до $x+1$, равна

$$d_x = -l_{x+1} + l_x. \quad (17)$$

Тогда

$$l_{x+1} = 1 - \sum d_x = l_{x-1} - d_{x-1}. \quad (18)$$

2. Смертность в данной возрастной группе q_x , представляющая собой вероятность смерти особи в возрасте от x до $x+1$, равна

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \quad (19)$$

При неизменных характеристиках таблицы продолжительности жизни возрастных групп популяции, т. е. при отсутствии лимитирующих условий, популяция всегда будет достигать постоянного возрастного распределения. По достижении этого распределения скорость увеличения численности дойдет до постоянного конечного значения R , оценкой которого является величина e^r в случае непрерывно размножающейся популяции. Чтобы оценить r_m , можно преобразовать соотношение (16) для случая непрерывного распределения к виду

$$1 = \int_0^{\infty} e^{-r_m x} l_x m_x dx. \quad (20)$$

Несмотря на возможность оценить оба параметра R и r_m , следует подчеркнуть, что они имеют смысл только при достижении постоянного возрастного распределения. Вместе с тем, хотя постоянное возрастное распределение достигается редко, эти параметры служат важными характеристиками способности вида к увеличению его численности.

8.3. МОДЕЛИ ДЛЯ ДВУХ ВИДОВ

Модели для одного вида позволяют внести некоторую ясность в механизмы возбуждения колебаний, например в механизмы саморегуляции плотности популяции. Совершенно очевидно, однако, что никакой организм не может жить в полной изоляции от других, а, существуя в одной экологической нише, особи часто конкурируют. Конкуренция происходит из-за таких ограниченных ресурсов, как пища, пространство, вода и т. д., и в некоторых случаях один вид может уничтожать другой скорее с целью защиты, а не для использования в качестве источника пищи. Своеобразные проявления межвидовых взаимодействий иллюстрируются системами хищник — жертва и паразит — хозяин, когда один вид служит пищей другому. Действительно, некоторые хищники и паразиты могут использовать

в качестве пищи только один вид, чтобы поддерживать свою жизнь и размножаться. Здесь нас в первую очередь интересуют насекомые, среди которых, как правило, один хищник требует нескольких жертв для полного прохождения своего жизненного цикла, аналогично тому как это делает паук, в то время как паразит (в данном контексте правильнее говорить о паразитоиде) полностью разрушает хозяина, находящегося в состоянии развития (обычно в личиночной стадии). Большинство насекомых-паразитов дают по одному потомку на каждом хозяине, что дает удобное соотношение (один к одному) между числом хозяев, использованных паразитами, и числом паразитов в следующем поколении.

8.3.1. Конкурирующие виды

Рассмотрим непрерывные детерминированные модели для двух видов, живущих раздельно и независимо. Скорости изменения численности видов могут быть выражены из соотношения (11) как

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1 (r_1 - b_{11}N_1), \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2 (r_2 - b_{22}N_2).\end{aligned}\tag{21}$$

В этих логистических формулах используются два коэффициента b_{11} и b_{22} для описания влияния плотности видов на их собственные скорости роста численности. При наличии какого-либо взаимодействия двух видов рост их численности связан не только с плотностью данного вида, но и с плотностью другого вида. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{dt} &= N_1 (r_1 - b_{11}N_1 - b_{12}N_2), \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2 (r_2 - b_{22}N_2 - b_{21}N_1),\end{aligned}\tag{22}$$

где величина $b_{12}N_2$, например, служит мерой подавляющего влияния вида 2 на вид 1. Когда и dN_1/dt и dN_2/dt равны нулю, оба вида находятся в состоянии равновесия плотностей. При небольших по величине отклонениях плотности популяций или возвращаются к положению равновесия (устойчивое равновесие), или все дальше уходят от равновесия и в конечном счете один или оба вида вымирают (неустойчивое равновесие).

В общем случае, если решения уравнений, описывающих межвидовые отношения, зависят от времени, их не удастся получить в явном виде и необходимо графическое исследование (рис. 8.2). При отсутствии одного или другого вида можно выделить два поло-

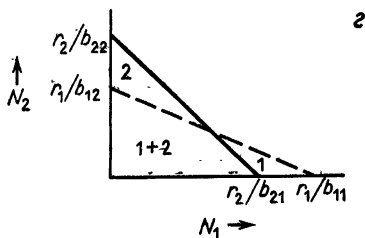
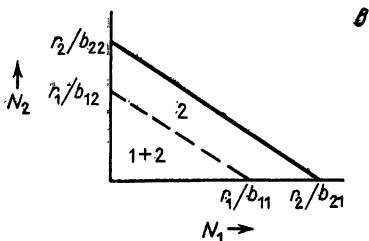
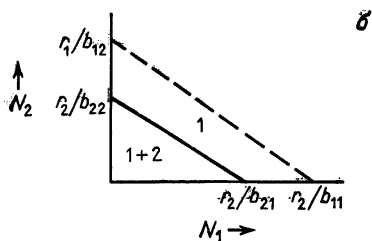
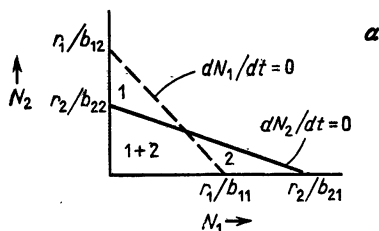


Рис. 8.2. Графическое исследование уравнений Лотки — Вольтерра для конкурирующих видов. Цифрами обозначены области, в которых может увеличиваться численность первого вида (1) и второго вида (2): а — устойчивое равновесие; б — численность первого вида может увеличиваться в области 1 при постоянной численности второго вида, первый вид побеждает в конкуренции; в — ситуация, обратная б, побеждает второй вид; г — неустойчивое равновесие.

жения равновесия

$$\begin{aligned} N_1 &= 0, & N_2 &= \frac{r_1}{b_{22}}, \\ N_2 &= 0, & N_1 &= \frac{r_2}{b_{11}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Третье положение равновесия определяется соотношениями

$$\begin{aligned} r_1 - b_{11}N_1 - b_{12}N_2 &= 0, \\ r_2 - b_{22}N_2 - b_{21}N_1 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Указанные модели можно использовать для изучения взаимодействий любых конкурирующих организмов. Например, Де Вит (1960), исследуя конкуренцию у сорняков, использовал количество семян в конце вегетационного периода в качестве характеристики размера популяции.

8.3.2. Системы паразит-хозяин

Выше рассматривался простой случай двухвидовой системы, когда конкуренция между видами обусловлена ограниченными ресурсами одного или более источников существования. Системы паразит-хозяин и хищник-жертва служат примерами более сложных взаимодействий, когда развитие нападающего вида полностью или частично зависит от доступного ему числа особей вида, используемого в качестве источника пищи. В свою очередь скорость роста численности вида-жертвы зависит от числа особей в данной популяции, уничтожаемых популяцией хищников или паразитов. Разработка моделей паразит-хозяин дает возможность выяснить ряд важных биологических и математических свойств системы.

Если мы примем, что рождаемость паразитов зависит от числа хозяев N_t и что смертность хозяев пропорциональна числу паразитов P_t , то скорости изменения популяций будут определяться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dN_t}{dt} &= (r_n - c_1 P_t) N_t, \\ \frac{dP_t}{dt} &= (-r_p + c_2 N_t) P_t, \end{aligned} \quad (25)$$

которые называются уравнениями Лотки — Вольтерра (Лотка, 1925; Вольтерра, 1926). В них предполагается, что в отсутствие паразитов популяция хозяев имеет экспоненциальный рост (по Мальтусу)

$$\frac{dN_t}{dt} = r_n N_t. \quad (26)$$

В уравнениях (25) r_n — собственная скорость увеличения популяции хозяина, которая снижается (для каждого данного момента времени t) в зависимости от численности популяции паразита P_t в данный момент по линейному закону. Предположим, что в отсутствие хозяев паразиты гибнут. Тогда их численность уменьшается со скоростью $-r_p$. Последняя компенсируется фактором размножения c_2 для отдельного индивидуума при общем числе хозяев N_t .

Рассмотрим соотношение

$$\frac{dN_t}{dP_t} = \frac{(r_n - c_1 P_t) N_t}{(-r_p + c_2 N_t) P_t}, \quad (27)$$

которое после упрощения сводится к следующему:

$$r_p \frac{dN_t}{N_t} - c_2 dN_t + r_n \frac{dP_t}{P_t} - c_1 dP_t = 0. \quad (28)$$

Интегрируя, получим

$$r_p \ln N_t - c_2 N_t + r_n \ln P_t - c_1 P_t = \text{const}. \quad (29)$$

Равенство (29) соответствует набору замкнутых кривых, связывающих P_t и N_t (рис. 8.3), причем постоянная определяется лишь

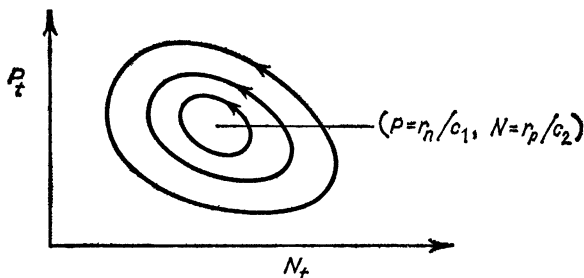


Рис. 8.3. Изменения численностей популяций паразита и хозяина, описываемые уравнениями Лотки — Вольтерра при отсутствии внутреннего механизма регуляции численности каждого вида.

начальными значениями численностей N_0 и P_0 . Достижению равновесия, когда $dN_t/dt = dP_t/dt = 0$, соответствуют значения

$$N = \frac{r_p}{c_2}, \quad P = \frac{r_n}{c_1}. \quad (30)$$

Таким образом, при отклонении популяций от равновесного состояния они к нему не возвращаются, их численности колеблются около равновесных значений (рис. 8.4). Колебания продолжаются неограниченно, с постоянными амплитудами, определяемыми начальными значениями численностей, причем средние значения численностей

равны равновесным

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} N_t dt = \frac{r_p}{c_2}$$

и

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P_t dt = \frac{r_n}{c_1}.$$

(31)

Более близкое соответствие действительности можно обеспечить путем введения в уравнения Лотки — Вольтерра логистических

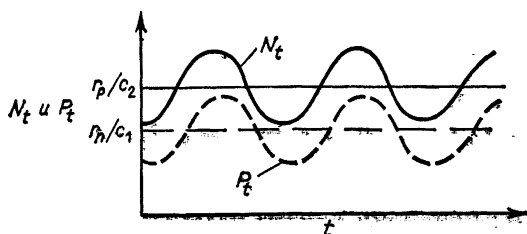


Рис. 8.4. Изменения численностей популяций паразита и хозяина, получаемые с использованием уравнений Лотки — Вольтерра без учета влияния внутривидового взаимодействия на плотность популяций. Обратите внимание на отставание колебаний численности паразита от колебаний численности хозяина. Колебания совершаются с постоянными амплитудами около равновесных значений.

компонент. Конкуренция хозяев легко учитывается таким образом:

$$\frac{dN_t}{dt} = (r_n - c_1 P_t - b N_t) N_t. \quad (32)$$

Тогда график зависимости P_t от N_t имеет вид спирали, закручивающейся к точке положения равновесия (см. рис. 8.5).

$$N = \frac{r_n c_2}{r_p c_1} \quad P = \frac{r_n}{c_1}. \quad (33)$$

К этой точке численности популяций возвращаются после отклонения от равновесных значений, причем для обоих видов характерно возникновение затухающих колебаний (рис. 8.6).

На основании обычных допущений, возможных с точки зрения биологии, нетрудно построить простую модель при помощи уравнений Лотки — Вольтерра. Если предположить, что P паразитов могут отложить по F яиц, то среднее число яиц, откладываемых на каждом из N хозяев, будет равно FP/N . Можно ввести упрощающее допущение, что каждый паразит откладывает яйцо совершенно случайно на одного из N хозяев. Тогда вероятность $P_g(0)$ того, что хо-

заян не подвергнется нападению паразита, согласно распределению Пуассона, будет равна

$$\text{Pr}(0) = \exp\left(-\frac{FP}{N}\right) \quad (34)$$

и численности обеих популяций в момент времени $t+1$ будут описываться выражениями

$$N_{t+1} = f N_t \exp\left(-\frac{FP_t}{N_t}\right) \quad (35)$$

и

$$P_{t+1} = N_t \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{FP_t}{N_t}\right) \right\}, \quad (36)$$

где f — среднее число потомков каждого выжившего хозяина (Томпсон, 1924). Результат основывается на предположении, что хотя

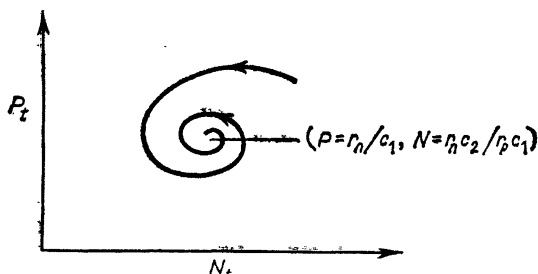


Рис. 8.5. Изменения численностей популяций паразита и хозяина, получаемые с использованием уточненных уравнений Лотки — Вольтерры с учетом саморегуляции численности популяции хозяина в виде функции плотности.

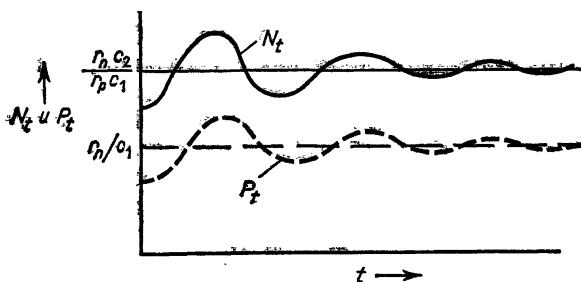


Рис. 8.6. Изменения численностей популяций паразита и хозяина, получаемые с использованием уравнений Лотки — Вольтерры с учетом саморегуляции численности популяции хозяина. Обратите внимание на затухание колебаний. С течением времени численности популяций устанавливаются на равновесных уровнях.

некоторые хозяева получают больше одного яйца паразита, на каждом подвергшемся нападению хозяине развивается только один паразит. Разумеется, существуют такие виды паразитов, которые могут развивать больше одного потомка на хозяине. Это можно учесть путем некоторого видоизменения уравнения (36). Кроме того,

существуют насекомые — паразиты, которые могут «узнавать» зараженных хозяев и откладывать яйца только на незараженных особях. В этом случае откладывание яиц не будет случайным. Никольсон (1933) и Никольсон и Бейли (1935) использовали подобные уравнения при изучении колебаний численности хозяев и паразитов и при исследовании «установившихся состояний» в виде

$$N_{t+1} = fN_t \exp(-aP_t), \quad (37)$$

$$P_{t+1} = \{1 - \exp(-aP_t)\}. \quad (38)$$

Указанные авторы истолковывали a как способность паразита к поиску хозяина (область обнаружения). Они обсуждали предложенную модель с точки зрения анализа равновесных значений и установившихся состояний, однако было показано (Хасселл и Мэй, 1973), что модели такого типа имеют только одну точку равновесия при «установившихся плотностях» популяций паразита и хозяина

$$\begin{aligned} N^* &= \frac{f \ln f}{(f-1)a}, \\ P^* &= \frac{\ln f}{a}. \end{aligned} \quad (39)$$

Неустойчивость таких моделей проявляется в том, что небольшие отклонения от значений N^* и P^* ведут к колебаниям с возрастающей амплитудой и в конечном счете к вымиранию одного из двух видов. Некоторая степень зависимости от плотности популяции, например от плотности популяции хозяина, стабилизирует систему.

При нападении паразита на хозяина необходимо определенное время для откладывания яйца внутри хозяина, и поэтому часть времени жизни паразита затрачивается на процесс откладки яиц. Это «время взаимодействия» T_h (Холлинг, 1959) следует вычитать из общего времени T_t , необходимого для поиска хозяина. Общее время, которое тратится на взаимодействие с хозяевами, линейно зависит от числа хозяев, подвергшихся нападению, т. е.

$$T_s = T_h N. \quad (40)$$

Принимая, что общее время T_t ограничено, получим, что число хозяев, подвергшихся нападению паразитов, не может возрастать линейно с ростом плотности популяции хозяев, это возрастание должно происходить с меньшей скоростью. «Кривая функционального отклика» по Холлингу соответствует представлению числа зараженных хозяев N_a в виде

$$N_a = P \left(\frac{a' T_t N}{1 + a' T_h N} \right), \quad (41)$$

где a' — коэффициент заражения. В этом случае уравнение для численности хозяина принимает вид

$$N_{t+1} = fN_t \exp \left(- \frac{a'T_t P_t}{1 + a'T_h N_t} \right) \quad (42)$$

при сохранении предположения о случайном распределении яиц среди хозяев. Хасселл и Мэй (1973) показали, что указанная модель менее устойчива, чем модель Никольсона — Бейли, и степень неустойчивости зависит от f и T_h .

Дальнейшее уточнение характера устойчивости природных популяций достигается в результате использования того факта, что на эффективность поиска хозяев паразитами могут оказывать влияние другие особи того же вида. Степень этого взаимодействия пропорциональна плотности популяции паразита (Хасселл, 1971). Помехи за счет взаимного влияния могут вести к потере времени при встрече двух взрослых особей, которые при этом, например, избегают друг друга или прекращают откладывание яиц. Такое влияние может быть достаточно существенным, чтобы заставить взрослых особи покидать область обитания потенциальных хозяев. В модели Никольсона — Бейли можно учесть влияние взаимных помех путем следующей модификации области обнаружения (Хасселл и Варли, 1969):

$$a = Q P_t^{-m}, \quad (43)$$

где Q — константа поиска, равная a при $P_t = 1$, и m — константа взаимных помех. Модель принимает вид

$$N_{t+1} = fN_t \exp \left(- Q P_t^{1-m} \right), \quad (44)$$

или с учетом времени взаимодействия

$$N_{t+1} = fN_t \exp \left(- \frac{a'T_t c P_t^{1-m}}{1 + a'T_h N_t} \right) \quad (45)$$

(Хасселл и Роджерс, 1972). Уравнение (45) равносильно (42) при $m=0$ и равносильно (44) при $T_h=0$. Характер устойчивости для таких моделей обсуждался Хасселлом и Мэем (1973).

Рассмотренные выше модели основаны на важном допущении, которое заключается в том, что заражение паразитами хозяев предполагается случайным, причем все N хозяев имеют одинаковую восприимчивость к паразиту и одинаково подвергаются опасности заражения. Ясно, однако, что большинство видов животных не расселены равномерно во всей своей области обитания: очаги высокой плотности встречаются в областях со сравнительно низкой средней плотностью. Расстояние, которое необходимо преодолеть паразиту при переходе от одного хозяина к другому, должно играть определенную роль, совершенно не учитываемую в моделях со случайным заражением. Естественно предположить, что паразиты могут изме-

нить свое поведение с тем, чтобы надлежащим образом использовать наличие высокой локальной концентрации хозяев, например, они могут проводить больше времени или собираться (скапливаться) в областях с высокой плотностью. Однако при этом возникает противоречие между стремлением паразитов к максимально возможному увеличению числа заражаемых хозяев и их стремлением избегать столкновения с другими особями, принадлежащими к этому же виду паразитов. Можно представить себе случай, когда плотность паразитов непрерывно меняется за счет их переселения в область с более высокой плотностью хозяев и последующего расселения из этой области, когда их взаимное влияние становится невыносимым.

Пространственную неоднородность нетрудно учесть путем введения n подобластей, в каждой из которых имеется собственная, отличная от других, плотность хозяев. Предположим, что для каждой подобласти применима модель случайного заражения (Хасселл и Мэй, 1973).

Численность популяции хозяина в рамках простейшей случайной модели в момент времени $t+1$ равна

$$N_{t+1} = f N_t \sum_{i=1}^n \{ \alpha_i \exp(-\alpha \beta_i P_i) \}, \quad (46)$$

или с учетом взаимодействия

$$N_{t+1} = f N_t \sum_{i=1}^n [\alpha_i \exp \{ -Q(\beta_i P_i)^{1-\mu} \}], \quad (47)$$

где α_i и β_i — доли общей численности хозяев и паразитов соответственно в каждой из i областей ($i=1, 2, \dots, n$),

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = 1. \quad (48)$$

Для упрощения вычислений определим β_i следующим образом:

$$\beta_i = c \alpha_i^\mu. \quad (49)$$

Тогда

$$c = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^\mu \right)^{-1}, \quad (50)$$

где μ является мерой скопления паразитов. При $\mu=0$ паразиты распределяются равномерно по всем областям. Если $\mu=1$, то $\alpha_i=\beta_i$ для всех i , и если $\mu>1$, то существуют скопления паразитов, концентрация которых связана экспоненциально с плотностью хозяев.

Указанные видоизменения модели приводят к существенному увеличению области устойчивости, зависящему от α_i , β_i и f — эффективной скорости роста численности хозяев. Хасселл и Мэй об-

судили введенные в модели параметры с целью нахождения характеристик, которыми должны обладать паразиты, отбираемые для применения в качестве биологического средства борьбы с вредителями. В результате они установили некоторые свойства «наиболее совершенного» агента биологического контроля. Теперь очередь биологов — проанализировать использованные ими параметры и решить, пригодны ли они. Разработка и совершенствование моделей паразит — хозяин служат конкретным примером количественного подхода, используемого экологами, имеющими дело с насекомыми. Необходимо более тесное взаимодействие между аналитическими и экспериментальными методами, причем каждый из них должен предлагать пути дальнейшего развития другого. Модели все еще представляют собой упрощенные описания очень сложных взаимодействий, хотя и был достигнут определенный успех в понимании сущности механизмов биологического контроля.

Трудно ответить на вопрос, принесет ли пользу увеличение числа вводимых параметров. Это связано с возрастающими трудностями получения соответствующей биологической информации, в то же время уравнения настолько усложняются, что обычные средства их анализа становятся неприменимыми.

8.4. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Andrewartha H. G., Birch L. C. (1954). *The Distribution and Abundance of Animals*. University of Chicago Press.
- Conway G. R., Murdie G. (1972). «Population Models as a Basis for Pest Control», in *Mathematical Models in Ecology*, 195—213. Ed. J. N. R. Jeffers, Oxford University Press, London.
- Ehrlich P. R., Ehrlich A. H. (1972). *Population, Resources, Environment, Issues in Human Ecology*, Freeman, San Francisco.
- Emlen J. M. (1973). *Ecology: An Evolutionary Approach*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts.
- Hassel M. P. (1971). «Mutual Interference Between Searching Insect Parasites», *J. Anim. Ecol.*, **40**, 473—488.
- Hassell M. P., May R. M. (1973). «Stability in Insect Host Parasite Models», *J. Anim. Ecol.*, **42**, 693—726.
- Hassell M. P., Rogers D. J. (1972). «Insect Parasite Responses in the Development of Population Models», *J. Anim. Ecol.*, **41**, 661—676.
- Hassell M. P., Varley G. C. (1969). «New Inductive Population Model for Insect Parasites and Its Bearing on Biological Control», *Nature*, **223**, 1133—1137.
- Holling C. S. (1959). «The Components of Predation as Revealed by a Study of Small-mammal Predation of the European Sawfly», *Canad. Ent.*, **91**, 293—320.
- Holling C. S. (1966). «The Strategy of Building Models of Complex Ecological Systems», in *Systems Analysis in Ecology*, 195—214. REd. K. E. F. Watt, Academic Press, New York.
- Holling C. S. (1968). «The Tactics of a Predator», in *Insect Abundance*, 47—58. Ed. T. R. E. Southwood, Oxford University Press, London.
- Krebs C. J. (1972). *Ecology: The Experimental Analysis of Distribution and Abundance*, Harper and Row, New York.
- Lotka A. J. (1925). *Elements of Physical Biology*, William and Wilkins, Baltimore. (*Elements of Mathematical Biology* (1957). Dover, New York).

- Malthus T. R. (1798). *An Essay on the Principles of Population*, London [various editions, e. g. Everyman's Library, 2 vols. (1914); Economic Classics, New York (1909)].
- May R. M. (1972). *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton University Press; Princeton.
- Meadows W. H., Meadows D. L., Randers J., Behrens W. W. (1972). *The Limits to Growth*. Universe Books, New York.
- Nicholson A. J. (1933). «The Balance of Animal Populations», *J. Anim. Ecol.*, 2, 132.
- Nicholson A. J., Bailey V. A. (1935). «The Balance of Animal Populations: Part I», *Proc. Zool. Soc. London*, 3, 551.
- Pearl R. (1927). «The growth of populations», *Quart. Rev. Biol.*, 2, 532.
- Pielou E. C. (1969). *Introduction to Mathematical Ecology*. Wiley; New York.
- Royama T. (1971). «A Comparative Study of Models for Predation and Parasitism», *Res. popul. Ecol.*, suppl. I.
- Thompson W. R. (1924). «La théorie mathématique de l'action des parasites entomophages et le facteur du hasard», *Ann. Fac. Sci. Marseille*, 2, 69.
- Verhulst P. E. (1838). «Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement», *Corresp. Math. Phys.*, 10, 113.
- Volterra V. (1926). «Variationi e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi», *Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei.*, Set. VI, 2a (English translation in Chapman R. N., *Animal Ecology*, Ed. R. N. Chapman, McGraw-Hill, New York.)
- de Wit C. T. (1960). «Space Relationships within Populations of One or More Species», *Symp. Soc. Exptl. Biol.*, 15, Mechanisms in Biological Competition, 314.

8.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Рассмотрим логистическое уравнение

$$N_t = \frac{N_{eq}}{\{1 + a \exp(-kt)\}}.$$

Требуется показать, что максимальная скорость роста достигается в точке $(1/k) \ln a$ и численность популяции в этот момент равна $N_{eq}/2$.

Кривая роста по Гомпертцу подобна логистической кривой, т. е.

$$N_t = N_{eq} \exp[-b \exp(-kt)].$$

Указать точку перегиба этой кривой и значение N_t в этой точке.

2. Используя модель Хасселла — Варли (44), исследовать колебания численностей популяций хозяина и паразита, полагая $Q=0,20$; $f=2,0$; $P_0=10$ и $N_0=50$ для случаев

а) $m=0$, т. е. в отсутствие взаимодействия и при условии выполнения модели Никольсона — Бейли (37), (38),

б) $m=0,2$ (слабое взаимодействие),

в) $m=0,6$ (сильное взаимодействие).

Лабораторные эксперименты с гороховой тлей дали следующие результаты.

Возраст в днях	Крупные особи		Мелкие особи	
	l_x	m_x	l_x	m_x
0—4	1,0	0	1,0	0
5—8	1,0	0	1,0	0
9—12	1,0	24,04	1,0	15,00
13—16	0,978	29,94	0,962	20,88
17—20	0,913	23,34	0,889	19,42
20—24	0,783	10,00	0,796	14,10
25—28	0,522	2,94	0,648	6,28
29—32	0,370	0,36	0,574	1,74
33—36	0,217	0	0,370	0
37—40	0,130	0	0,111	0

Считается, что размер особи влияет на скорость роста численности этих видов тли. Определить собственные скорости роста для двух групп и постоянное возрастное распределение. Использовать таблицу и методы матриц Лесли (Leslie (1945), *Biometrika*, 35, 183—212; Leslie (1948), *Biometrika*, 38, 213—245).

Обратите внимание на период после размножения, который характерен для этих видов.

3. Модели паразит — хозяин, основанные на уравнениях Лотки — Вольтерра (25), имеют типично колебательный характер. Чему равен период этих колебаний? Одинаков ли он для хозяев и паразитов? Каково время запаздывания пиков численности паразитов по отношению к изменениям численности хозяев?

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ САХАРНОГО ДИАБЕТА

М. ДЖ. ДЭВИС¹⁾

[Необходимые предварительные сведения:
простейшие дифференциальные уравнения]

9.1. ВВЕДЕНИЕ

Болезнь, известная под названием сахарного диабета, широко распространена. При диабете нарушаются определенные процессы в организме, связанные с процессами окисления сахара, приводящими к выработке энергии. Если нарушено функционирование соответствующего механизма, регулирующего содержание сахара в крови, то оно возрастает. Основное влияние на гомеостаз оказывает инсулин, который участвует в процессах метаболизма сахара. По тем или иным причинам нарушается действие именно этого механизма.

В общем случае дифференциальные модели связаны с теми встречающимися в природе процессами, в которых существенны скорости изменения переменных, другими словами, — с динамическими процессами, определяемыми различными величинами, непрерывно изменяющимися со временем. Наблюдения или эксперименты позволяют установить правила, которым подчиняются эти изменения. Эти правила приводят к уравнениям, включающим как сами переменные, так и их производные, т. е. к дифференциальным уравнениям. Учет большего числа процессов может привести к более совершенной модели, но сейчас наши усилия будут направлены на получение простейшей дифференциальной модели диабета.

9.2. ОСНОВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Две основные переменные, включенные в модель, представляют собой величины, которые можно измерять или управлять ими в клинической практике; это уровень сахара в крови x и уровень инсулина в крови y . Несколько меньшую роль играют также две дополнительные переменные — ввод пищи z и, для больных диабетом, ввод инсулина w .

¹⁾ М. J. Davies, Applied Mathematics Department, University College of Wales, Aberystwyth.

9.3. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Качественное описание биохимических процессов в организме здорового человека можно кратко изложить так (Кэмпбелл, Дикенсон и Слейтер, 1963). Устойчивое состояние, принимаемое за точку отсчета, есть уровень сахара в крови при голодании, x_0 , при нулевом уровне инсулина. Если эти уровни отличаются от соответствующих устойчивому состоянию, то они изменяются в результате действия нескольких независимых механизмов.

1. Если уровень сахара в крови превышает устойчивый, то поджелудочная железа секретирует инсулин в кровеносное русло. Это явление можно описать кусочно-линейной моделью

$$\left[\frac{dy}{dt} \right]_1 = \begin{cases} b_1(x - x_0) & \text{при } x > x_0 \\ 0 & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

2. Содержание самого инсулина уменьшается под влиянием нескольких биохимических процессов; в живом организме половина свободного инсулина инактивируется за время от 10 до 25 мин. Следовательно, можно записать

$$\left[\frac{dy}{dt} \right]_2 = -b_2 y, \quad y \geq 0.$$

3. Любой внешний источник инсулина будет точно описываться слагаемым, соответствующим внешней силе в дифференциальном уравнении. Для здорового организма это слагаемое тождественно равно нулю; для больных диабетом оно будет функцией времени, определяемой графиком инъекций

$$\left[\frac{dy}{dt} \right]_3 = b_3 w(t).$$

Три постоянных b_1 , b_2 , и b_3 по определению положительны. Они могут быть названы чувствительностями и представляют собой соответственно чувствительности градиента инсулина к а) высокому уровню сахара в крови, б) уровню инсулина и в) к вводу инсулина. Некоторую сложность учета фактора (а) можно отразить при помощи ступенчатой функции, определяемой соотношениями

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0 \\ 1 & \text{при } \xi \geq 0, \end{cases}$$

так что суммарный градиент уровня инсулина можно теперь выразить в виде

$$\frac{dy}{dt} = b_1(x - x_0) H(x - x_0) - b_2 y + b_3 w(t).$$

При рассмотрении градиента уровня сахара выделяются следующие составляющие:

1. Присутствие инсулина приводит к метаболизму сахара, что понижает содержание его в крови. Чем выше содержание сахара в крови или уровень инсулина, тем быстрее происходит это понижение. Отсюда следует, что по крайней мере для малых изменений переменных этот эффект будет достаточно хорошо описываться произведением указанных двух уровней

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_1 = -a_1 xy.$$

2. Уровень сахара в крови может падать ниже равновесного (например, вследствие большой физической нагрузки при голодании). Для того чтобы поднять его до нормального уровня, высвобождаются запасы углеводов из печени. Следовательно,

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_2 = \begin{cases} a_2 (x_0 - x) & \text{при } x < x_0 \\ 0 & \text{при } x \geq x_0. \end{cases}$$

3. Имеет место также незначительное естественное падение концентрации сахара, влияние которого на результаты, полученные согласно рассматриваемой модели, мало. Следовательно, хотя в действительности этот фактор и включен в модель, далее мы его не будем рассматривать, а также не будем учитывать и при последующем обсуждении результатов.

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_3 = -a'_2 (x - x_0).$$

4. Внешним источником сахара в крови является потребляемая пища, что можно описать явной функцией времени

$$\left[\frac{dx}{dt} \right]_4 = a_3 z(t).$$

Постоянные a_1 , a_2 , a'_2 и a_3 также положительны и являются соответственно чувствительностями градиента уровня сахара к а) присутствию инсулина, б) низкому уровню сахара в крови, в) высокому уровню сахара в крови и г) приему пищи. С использованием уже введенной ступенчатой функции выражение для суммарного градиента уровня сахара в крови может быть записано в виде

$$\frac{dx}{dt} = -a_1 xy + a_2 (x_0 - x) H(x_0 - x) - a'_2 (x - x_0) H(x - x_0) + a_3 z(t).$$

Отметим, что отклонения содержания сахара в сторону повышения или понижения относительно равновесного уровня компенсируются двумя различными стабилизирующими процессами, так что система является существенно нелинейной. Кроме того, протекание основного процесса удаления сахара зависит от содержания как сахара, так и инсулина. Следовательно, слагаемое, определяющее

убыль сахара, также существенно нелинейно, поэтому использованное выше представление его в виде произведения концентраций соответствует, вероятно, самому простому варианту модели.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая модель — самая простая из тех, которые могут представлять реальность. Входящие в уравнения модели различные слагаемые являются кусочно-линейными, за исключением слагаемых, описывающих взаимодействие, которые представляют собой произведения линейных членов. Однако в действительности наблюдаются пики, разрывы, а также возникновения гистерезиса; для описания таких явлений предлагаемая модель слишком груба.

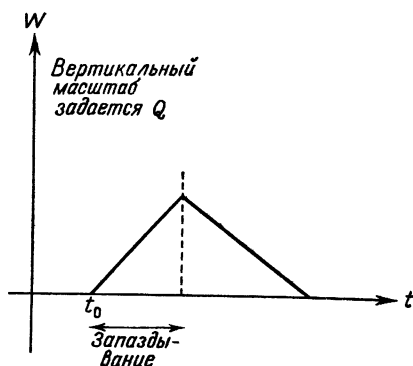
9.4. ВНЕШНИЕ ИСТОЧНИКИ

В норме поступление сахара в кровь зависит от приема пищи, а не от непосредственного введения его в кровяное русло. Запасы пищи в организме пополняются периодически, а не непрерывно; кроме того, далее предполагается, что на любой стадии эти запасы уменьшаются экспоненциально. Тогда слагаемое, описывающее поступление сахара за счет внешних источников, может быть записано в виде $a_3 z(t)$, где

$$z(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ Qe^{-K(t-t_0)} & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

Таким образом, информация, которая должна быть задана относительно каждого приема пищи, содержится в параметрах Q (количество), K (параметр запаздывания), t_0 (время приема пищи). Различные K соответствуют различной пище. Инъекцию глюкозы можно описать, одновременно задав большие значения для Q и для K . Разумеется, параметры a_3 и Q входят в уравнения модели только в виде произведения, их удобно рассматривать по отдельности лишь для того, чтобы оперировать с «количеством» пищи, измеряемым более или менее привычными числовыми значениями.

Естественное поступление инсулина в кровь представляет собой периодически повторяющийся процесс, который регулируется механизмом обратной связи. При нарушении этого механизма применяется введение инсулина, аналогичное введению сахара. Периодические подкожные инъекции можно моделировать пополнением «депо инсулина», из которого последний в течение некоторого времени поступает в кровь. Известно, что «максимальный эффект» инъекции достигается по истечении определенного промежутка времени (обычно около трех часов), и что через некоторое время действие инъекции полностью прекращается. Если считать, что максимальный эффект соответствует максимальной скорости поступления инсулина в кровь и, следовательно, наибольшему влия-

Рис. 9.1. Функция запасов инсулина $w(t)$.

нию на градиент инсулина, то описанную ситуацию можно моделировать, выбирая функцию $w(t)$ такой, как показано на рис. 9.1. Для функции $w(t)$ достаточно легко записать выражение в виде кусочно-линейной функции времени; для этого требуются следующие данные: время инъекции, количество вводимого инсулина, время, необходимое для достижения максимального эффекта, а также наклоны участков возрастания и убывания кривой. В данном случае параметр b_3 — чувствительность уровня инсулина к инъекции — вводится для того, чтобы количество поступающего извне инсулина измерялось привычными числовыми значениями.

9.5. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Наличие в уравнениях модели произведения xu делает невозможным их элементарный анализ. Кусочно-линейная функция поступления инсулина в систему и различные слагаемые, описывающие внешние источники, не представляют существенных трудностей для исследования, и если бы не было слагаемого с произведением xu , можно было бы получить некоторые алгебраические соотношения. Однако область применения этих соотношений была бы чрезвычайно ограниченной в связи с тем, что такого рода моделирование существенно упрощает взаимодействие сахара и инсулина даже в случае двух переменных. В действительности хотелось бы иметь лишь общие сведения относительно особенностей отклика системы на введение различных веществ, а для этого достаточно графиков. Была составлена простая программа для численного решения системы уравнений и для представления результатов с помощью устройства графического вывода.

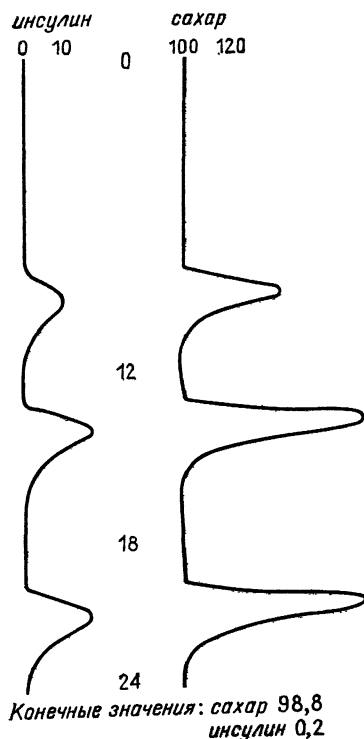


Рис. 9.2. Нормальный отклик уровней сахара и инсулина.

9.6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 9.2 показан построенный на основании данной модели отклик уровней сахара и инсулина в организме здорового человека (т. е. не страдающего диабетом) на три приема пищи в течение дня. При каждом приеме пищи уровень сахара в крови поднимается, стимулируя тем самым производство инсулина; наличие инсулина в крови приводит к снижению содержания сахара, и в свою очередь уровень самого инсулина снижается вследствие естественного процесса распада. Численные данные для этой модели следующие:

Чувствительности: $a_1 = 0,05$,
 $a_2 = 1,0$,
 $a_3 = 4,0$,
 $b_1 = 0,5$,
 $b_3 = 2,0$,
 b_3 — значение несущественно.

Приемы пищи: 8.00 — завтрак, 50 единиц,
13.00 — обед, 100 единиц,
20.00 — ужин, 100 единиц.

Здесь уместно сделать некоторые замечания относительно выбранных значений параметров. Ранее отмечалось, что величина a_3 связана с количеством принимаемой пищи, следовательно, в некоторых пределах она может быть выбрана произвольно. Можно было бы, фактически не меняя модель, положить $a_3=1$, увеличив число единиц принимаемой пищи в четыре раза. Постоянная b_2 определяет скорость разложения свободного инсулина в организме; приняв $b_2=2$, получим период полураспада инсулина равным около 20 мин. Выбор $b_2=3$ приводит к периоду полураспада, равному приблизительно 12 мин. Соответствующие эксперименты показывают, что, действительно, величина b_2 находится в этих пределах. Постоянная a_2 определяет в данной модели скорость восстановления при низком содержании сахара в крови; при значении a_2 , равном единице, время восстановления половины нормального содержания сахара составляет около 40 мин. Постоянные a_1 и b_1 более тесно связаны между собой, а приведенные значения их получены методом проб и ошибок так, чтобы получить максимальное приближение к действительности. Постоянная b_3 в рассматриваемом случае, очевидно, несущественна, так как отсутствует введение инсулина извне.

Этот этап построения модели, который до сих пор не упоминался, на практике, возможно, наиболее труден. Установлены переменные, определяющие состояние системы, а уравнения, описывающие её поведение, получены при помощи идеализации исходной проблемы. Процесс *идентификации системы* (установления в некотором смысле тождественности модели и реального объекта) превращается теперь в чисто техническую задачу определения числовых значений различных параметров, имеющихся в системе, и обычно является этапом моделирования, требующим наибольших затрат времени.

Параметры $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ и т. д. определены путем сравнения результатов, получающихся согласно модели, с результатами наблюдений; такие параметры могут быть найдены только в том случае, если структура модели хорошо соответствует действительности. Лакмусовой бумажкой для проверки модели, и, конечно, любой теории, служит ее способность предсказывать явления; если соответствие модели и действительности может быть установлено только ретроспективно, тогда, разумеется, ценность ее весьма сомнительна. Следовательно, наша модель будет иметь какое-либо значение только в том случае, если она позволит сделать определенные выводы, которые не вытекают непосредственно из результатов уже известных наблюдений.

Уже сейчас можно отразить в модели два независимых эффекта, связанных с диабетом: это уменьшение чувствительности сахара к инсулину a_1 и чувствительности инсулина к сахару b_1 . Первый из них может быть интерпретирован в рамках широкоизвестного явления, заключающегося в том, что больной диабетом испытывает необходимость в гораздо более высоком уровне инсулина (он отражается в величине инъекций), чем здоровый человек. Второй соответствует более непосредственно наблюдаемому уменьшению (или полному отсутствию) выработки инсулина в организме.

В каждом из этих случаев (или при одновременном появлении обоих эффектов) уровень сахара в крови сильно повышается и вступает в действие множество других факторов и процессов, игнорируемых в данной модели. До тех пор пока мы ограничиваемся рассматриваемой моделью, уменьшение чувствительностей a_1 и b_1 делает систему неустойчивой, после чего система уже не сможет сама возвратиться в устойчивое состояние. Для компенсации этого фактора в модель вводится слагаемое, описывающее внешний источник инсулина $w(t)$. Следует отметить, что для здорового организма рассматриваемая система сахар — инсулин устойчива по отношению к введению сахара $z(t)$. Проблема, связанная с диабетом, состоит в том, что система становится неустойчивой. Слабые неустойчивости, т. е. диабет в легкой форме при небольших изменениях основных параметров, характеризующих чувствительность, можно нормализовать соответствующим выбором только функции $z(t)$. Это представляет собой классический метод лечения при помощи диеты и, как упоминалось выше, не может быть отражено в рассматриваемой модели вследствие ее очевидной упрощенности. В случае диабета в тяжелой форме для восстановления устойчивости необходимо введение второй управляющей функции $w(t)$.

Модель диабета, отклик уровней сахара и инсулина для которой представлен на рис. 9.3, характеризуется следующими изменениями в системе. Чувствительность сахара к инсулину a_1 уменьшена от 0,05 до 0,03, в то время как чувствительность инсулина к сахару b_1 почти полностью исчезла, будучи измененной от 0,5 до 0,01. Оказалось, что чувствительность b_3 к введению инсулина извне соответствует действительности при величине 1,0.

Основная задача теперь заключается в разумном выборе такого режима введения инсулина $w(t)$, чтобы поведение полученной в результате полужамкнутой системы и отклик уровней сахара и инсулина на обычный прием пищи достаточно хорошо подражали нормальным. Здесь допустим определенный произвол, поэтому искомым ответом будет суточное количество вводимого инсулина, которое, несмотря на изменения в некоторых пределах нормального содержания сахара в течение дня, будет поддерживать возмущения уровня в определенных границах, а также поддерживать периодичность функционирования системы в течение многих дней.

Теперь выясняется наиболее интересная сторона всей проблемы. Общепринято мнение о необходимости установления классического клинического расписания двух инъекций в день и о том, что они должны «перекрывать» три основных приема пищи — завтрак, обед и ужин. Прежде всего следует учесть, что добиться наличия

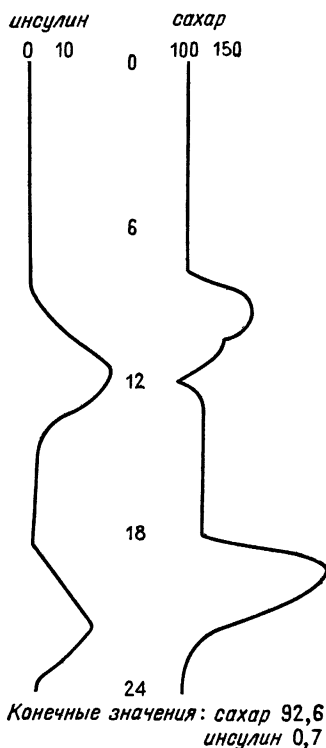


Рис. 9.3. Отклик уровней сахара и инсулина при диабете.

трех пиков (на кривой отклика), подобных откликам здорового организма, только двумя инъекциями невозможно. Первая инъекция должна перекрывать два приема пищи, вторая — третий прием, а также дополнять первые два. Здесь выявляется замечательный факт — даже в этой очень простой модели появляются проблемы, очень близкие к тем, которые возникают в клинической практике. Промежуток времени между завтраком и обедом должен быть сокращен для того, чтобы утренняя инъекция могла перекрыть оба эти приема пищи. Кроме того, для предотвращения «отрицательного пика» на кривой отклика, между приемами пищи нужно предусмотреть легкий второй завтрак, чтобы удержать понижающийся уровень сахара в крови. Время вечернего приема пищи отнесено

на 18.00 просто для удобства; обнаружено, что вечерняя инъекция должна быть много меньшей, чем утренняя.

Две инъекции, последствия которых показаны на рис. 9.3, составляют 20 единиц в 8.30 и 14 единиц в 18.00, в то время как приемы пищи, покрываемые этими инъекциями, составляют 50 единиц в 8.00, 20 единиц в 10.30, 50 единиц в 12.00 и 100 единиц в 18.00.

Относительно рассматриваемой модели и степени отражения ею действительности можно сделать много замечаний. Первое и весьма важное замечание состоит в том, что модель, включающая две переменные, с кусочно-линейными связями между ними и простым представлением взаимодействия в виде произведения уровней, может грубо, но все же верно отображать реальную клиническую ситуацию, т. е. определять времена приема пищи и инъекций, приводить к рекомендации о необходимости дополнительного второго завтрака и т. д. Модель может быть улучшена двумя способами. Можно учесть более сложный характер взаимодействий, вводя в соответствующем слагаемом скачки, максимумы и другие нелинейные особенности. Вероятно, более существенным будет увеличение размерности модели; критики могут утверждать, что пока это не будет сделано, модель останется недостаточно соответствующей действительности. Рассмотрим теперь слагаемые, описывающие источники и стоки, которые характеризуют изменения уровня сахара. В процессе метаболизма сахар используется для выработки энергии, создания депо углеводов в тканях и пополнения запасов гликогена в печени. Источниками сахара являются принимаемая пища, «быстрое» поступление из печени и «медленное» из запасов в тканях. В действительности запасы гликогена в печени ограничены, из них получается всего около 250 г глюкозы. Следовательно, если мы хотим построить модель, отражающую длительное поведение организма, одной из ее переменных должен быть запас гликогена в печени, а отклик величины этого запаса на низкий уровень сахара в крови должен быть нелинейным по отношению к этому уровню и, конечно, нелинейным по отношению к самому количеству гликогена в печени. Подобным образом можно моделировать и «медленное» взаимодействие запасов в тканях с сахаром в крови; количество запасов в тканях определяется весом человека, следовательно, различные чувствительности в свою очередь, возможно, также зависят от веса. Здесь очень много усложняющих обстоятельств, и чем глубже мы вникаем в эту проблему, тем больше возникает интересных моментов.

Один из главных доводов в пользу данной простой модели состоит в том, что информация, получаемая по схеме вход — черный ящик — выход, оказывается на самом деле тесно связанной с клинической практикой. Основным определяемым параметром является уровень сахара в крови, а система в целом стабилизируется

диетой и инъекциями инсулина. Тест на толерантность к глюкозе дает три величины уровня сахара в крови через $1/2$, 1 и 2 часа после введения с пищей стандартного количества (100 г) глюкозы при устойчивом состоянии голодания и служит для отличия здорового человека от больного диабетом. И, наконец, отклик черного ящика на прежнее лечение обуславливает дальнейшее лечение. Нечего и говорить, что состояние самого черного ящика играет главную роль при проведении лечения.

Трудности, возникающие при анализе рассматриваемой проблемы, совершенно очевидны. Любая система метаболизма сахара соответствует ярко выраженному гомеостатическому процессу. Можно установить два ключевых параметра — взаимные чувствительности уровней сахара и инсулина. Следовательно, любая модель, включающая эти параметры, будет с некоторой степенью точности отражать действительность, как и обстоит дело в случае предложенной выше двухпараметрической модели. Рассматриваемая модель является в техническом отношении самой простой моделью низшего порядка, учитывающей указанные ключевые чувствительности.

9.7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Campbell E. M. J., Dickenson D. J., Slater J. D. R. (1963). «Clinical Physiology», Chapter 12 in Energy Sources and Utilization, Blackwell Scientific Publications; Oxford.
- Davis H. T. (1962). Introduction to Non-Linear Differential Equations. Dover; New York.

9.8. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Найти уравнение, связывающее b_2 с периодом полураспада инсулина.
2. Ввести в модель слагаемое, описывающее секрецию инсулина с учетом насыщения (т. е. максимальной скорости секреции) а) кусочно-линейным образом, б) в виде гладкой функции.
3. Указать, для какой системы величина $z(t)$, соответствующая поступлению сахара, является откликом ее подсистемы на введение, описываемое дельта-функцией.
4. Функция поступления инсулина $w(t)$ является на самом деле грубым кусочно-линейным представлением введения, описываемого распределением Гаусса со сдвигом; привести формулу этого распределения. Указать, какая конкретная подсистема будет откликаться подобным образом и на какое введение.
5. Дополнительно включить в модель «быстро используемый» запас гликогена в печени в количестве $\lambda(t)$. Этот запас будет источ-

ником поступления сахара при его низком уровне в крови. Записать уравнение для $\lambda(t)$, вводя потоки сахара, истощающие и пополняющие запасы в печени. (Указание: это уравнение будет нелинейным, так как при $\lambda=0$ сахар в кровь не поступает.)

6. Если не учитывать наличия отсечки, описываемой функцией Хевисайда, структура рассмотренной модели соответствует известной задаче Вольтерра о лисах и кроликах (см. Дэвис, 1962). Выяснить, что это за задача и сравнить роли переменных в обоих случаях.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

У. Д. ЭШТОН ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: элементы теории вероятностей и преобразования Лапласа]

10.1. МОДЕЛИ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Возрастание интенсивности современного дорожного движения ставит острые и неотложные проблемы. С точки зрения общества они имеют огромное социальное воздействие, а для математика открывают область приложения различных теорий, охватывающих большое число математических методов.

Математическому исследованию поддаются, в частности, следующие проблемы:

1. Движение транспорта на перекрестках и свободных дорогах и проблемы стоянок.
2. Инженерные проблемы, такие, как проектирование дорожных систем для новых городов и исследование систем управления движением, включающих светофоры и объездные пути.
3. Проблемы планирования перевозок и составления расписаний для транспортных караванов, включая исследование экономических последствий планирования.
4. Проблемы безопасности движения.

Методы решения этих задач весьма разнообразны. В одном из подходов к изучению плотных транспортных потоков поток автомобилей, движущихся по дороге, рассматривается в терминах кинематики жидкостей (Лайтхилл и Уизем, 1955). В этом случае решения получаются при помощи классических методов. Такого рода модели являются макроскопическими и свойства отдельных автомобилей в них не рассматриваются, поэтому такие теории не содержат какого-либо описания поведения водителей. С другой стороны, динамические модели (модели, «следящие» за отдельным автомобилем) являются моделями «микроскопическими» в том смысле, что в них объектом исследования является поведение двух автомо-

¹⁾ W. D. Ashton, Department of Mathematics, University of Surrey.

билей, движущихся один за другим по дороге. Оба типа моделей по своей природе *детерминированные*.

Существенно отличный от указанных двух тип модели представляет собой *вероятностная*, или *стохастическая* модель, включающая в рассмотрение элементы случайности. В ситуациях, описанных в следующих разделах главы, транспортный поток рассматривается как точечный случайный процесс, вероятностная структура которого выведена, насколько это возможно, из данных, собранных в реальных ситуациях. Для разработки положений такого рода теории, включающей в рассмотрение статистические переменные, нужен сложный математический аппарат.

Каждый из типов моделей имеет свою область применения; различные модели могут дополнять одна другую. Некоторые теоретические подходы основаны на положениях, которые часто критикуются из-за их неадекватности или искусственности. Например, автомобили часто представляют как геометрические точки. В области исследования дорожного движения кажется особенно трудным найти плодотворный теоретический подход, который был бы адекватным и при этом достаточно легко поддавался обработке, чтобы быть полезным. Следовательно, в качестве практической альтернативы следует либо часто прибегать к помощи натурного моделирования, либо комбинировать теорию и моделирование.

10.2. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ОЖИДАНИЯ ПЕШЕХОДА ПРИ ПЕРЕХОДЕ УЛИЦЫ

Рассмотрим следующую простую ситуацию. Пешеход хочет перейти улицу с односторонним движением. Предположим, что движение происходит в один ряд, так что пешеходу требуется за-

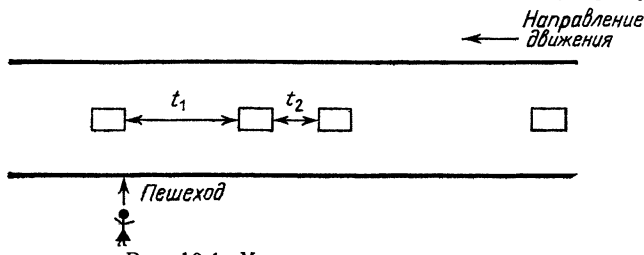


Рис. 10.1. Модель ожидания пешехода.

данное минимальное время для того, чтобы завершить переход улицы; пусть пешеход приходит в точку, из которой начнет переход улицы в момент, когда только что прошел автомобиль. Как будет показано ниже, некоторые из этих ограничений могут быть сняты. Эта ситуация может быть изображена в виде схемы, показанной на рис. 10.1.

При рассмотрении этой проблемы нас интересуют вопросы, включающие определение вероятности задержки пешехода, а также величину времени ожидания. Однако сначала модель должна быть уточнена, т. е. нужна система правил, регулирующих поведение как пешехода, так и автомобилей.

Рассмотрим поведение пешехода. Очевидно, что он основывает свое решение начать переход улицы на многих факторах, самый важный из которых включает оценку близости и скорости ближайшего автомобиля. В задачах об ожидании временной интервал более существен, чем пространственный. Пешеход может принять эти факторы во внимание, наблюдая, например, за временными

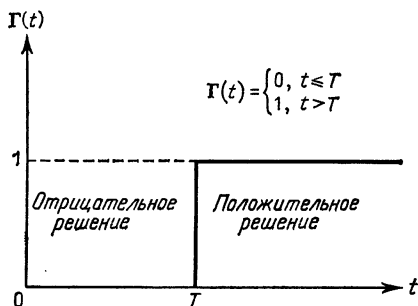


Рис. 10.2. Ступенчатая функция «интервал — решение».

интервалами в потоке автомобилей, т. е. за временем, которое требуется ближайшему автомобилю для того, чтобы доехать до пешехода. Время между прохождением двух последовательных автомобилей будем называть интервалом и измерять от времени появления в точке перехода переднего бампера первого автомобиля до появления переднего бампера второго.

Теперь необходимо уточнить критерий принятия положительного решения о переходе улицы. Можно, например, предположить, что каждому человеку свойствен так называемый *критический временной интервал* между появлением автомобилей, который различен для разных индивидуумов и разных ситуаций. Однако для отдельного человека в данной обстановке временной интервал, требующийся для отрицательного решения о переходе, всегда меньше критического времени; решение перейти улицу принимается только в том случае, если временной интервал превышает критический. Это простейшая из возможных моделей типа интервал — решение; она представляется ступенчатой функцией $\Gamma(t)$, показанной на рис. 10.2. Эта модель очень хорошо соответствует опыту, однако возможны и другие модели. Некоторые из них предложены в § 10.6.

Рассмотрим теперь, как распределено во времени движение автомобилей по дороге. В стохастических моделях расположение

вдоль дороги отдельных автомобилей детально не указывается. Вместо этого в рассмотрение вводится распределение вероятностей интервалов между автомобилями, движущимися в одном ряду.

Простейшей возможностью является предположение о «случайном» распределении интервалов. В статистической теории эти слова означают вовсе не «полную неопределенность», но, напротив, нечто вполне определенное. Множество событий, в данном случае моментов прибытия автомобилей в данную точку дороги, назовем случайным, если:

1. вероятность события в течение малого временного интервала $(t, t+\delta t)$ равна $\lambda \delta t + o(\delta t)$, где λ — постоянная величина;
2. вероятность двух и более событий на интервале $(t, t+\delta t)$ равна $o(\delta t)$;
3. число событий на интервале $(t, t+\delta t)$ не зависит от того, что происходило на временном интервале $(0, t)$.

Постоянная λ определяет плотность транспортного потока, т. е. среднее число автомобилей, приходящих в точку перехода за единицу времени, а $o(\delta t)$ означает величину более высокого порядка малости, которой можно пренебречь. Заметим, что для плотного транспортного потока предположения (2) и (3) не выполняются и наши гипотезы становятся неадекватными (см. задачу (5)). Следовательно, нет ничего удивительного, что распределения, которые выводятся непосредственно из сформулированных выше гипотез о случайном характере процесса движения, не дают *корректного* описания опытных данных для потоков, плотность которых превышает 800 автомобилей в час (при однорядном движении), т. е. когда средний временной интервал между автомобилями меньше чем 4,5 с.

При помощи гипотез 1—3 можно получить два распределения, эквивалентных предположению о случайном характере транспортного потока. «Распределение числа машин» определяет вероятность прибытия любого данного числа машин в данную точку за единицу времени. Если обозначить $P(k)$ вероятность прибытия k машин за единицу времени, получим распределение Пуассона

$$P(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Другое — «распределение интервалов» — дает вероятность существования пробела или интервала данной величины t . При описанных предположениях это распределение будет экспоненциальным (рис. 10.3) с плотностью вероятностей вида

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Последнее распределение связано с поставленной в данном разделе задачей о времени ожидания пешехода. На рис. 10.3 изображен общий вид этого распределения.

Вероятность появления интервала, превышающего данное время T , определяется соотношением

$$\text{Pr}(\text{пробел} > T) = \int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda T}.$$

Для транспортного потока, плотность которого 600 автомобилей в час, $\lambda = 1/6$ автомобиля в секунду. Если пешеходу требуется для

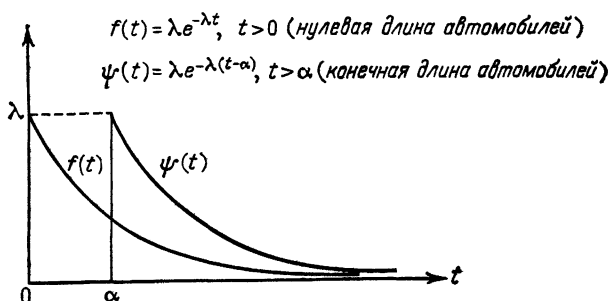


Рис. 10.3. Экспоненциальное распределение и экспоненциальное распределение со сдвигом.

перехода не меньше 8 с, вероятность того, что он перейдет улицу без задержки, составляет $e^{-8/6} = 0,2636$. Если пешеход должен ждать, пока пройдет первый автомобиль, он повторит процесс ожидания в течение второго интервала, и т. д. Действительное время ожидания получается суммированием случайных временных интервалов. Это будет сделано в следующем параграфе.

Перед тем как продолжить изложение, рассмотрим, как сделать эту модель более адекватной. Начнем с того, что поскольку автомобили всегда имеют конечную длину, время между прохождением двух автомобилей всегда отлично от нуля. Тогда более адекватным будет экспоненциальное распределение со сдвигом по времени (см. рис. 10.3). Если минимальный временной интервал равен a , где величина a , вероятно, порядка одной секунды, искомое распределение имеет вид

$$\psi(t) = \lambda e^{-\lambda(t-a)}, \quad t > a.$$

Легко показать, что средний интервал для экспоненциального распределения (при $a=0$) равен $1/\lambda$, а для экспоненциального распределения со сдвигом $(1/\lambda + a)$.

В рассматриваемой модели может быть снято также ограничение, предполагающее, что прибытие пешехода в точку перехода в точности совпадает с прибытием автомобиля в эту точку. Хорошо известный результат, применимый только для экспоненциального распределения (без сдвига), показывает, что распределение остаточных интервалов времени от момента прибытия пешехода до прихода следующего автомобиля, называемых временами запаздывания, в точности то же (и с тем же средним значением), что и распределение временных интервалов между автомобилями. В задачах о задержке пешехода требуется знать как распределение времени запаздывания, характеризующее время, проходящее до появления первого автомобиля, так и распределение интервалов, определяющее время ожидания следующих пропускаемых машин. Время запаздывания и интервалы распределены одинаково только при случайном транспортном потоке. В других случаях анализ более сложен.

Можно снять также ограничение, заключающееся в предположении о том, что движение происходит в один ряд. Для двух случайных транспортных потоков, независимо движущихся в одном и том же направлении, плотности которых равны соответственно λ_1 и λ_2 , можно достаточно просто показать, что распределение интервалов общего транспортного потока определяется функцией плотности вероятностей вида

$$\varphi(t) = (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}, \quad t > 0.$$

Для такого потока средний интервал равен $1/(\lambda_1 + \lambda_2)$, а вероятность того, что пешеход при переходе улицы задержится на время большее, чем T , равна

$$e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T}.$$

Этот результат можно обобщить для большего числа случайных транспортных потоков и для других распределений.

Здесь необходимо сделать одно замечание. Если пешеход должен пересечь дорогу, по которой движется более чем один транспортный поток, он может сделать это по крайней мере двумя различными способами. Он может оценить интервалы в общем транспортном потоке и принять решение пересечь улицу в один прием. Пешеход может также рассмотреть каждый из потоков независимо — в этом случае на середине дороги должен быть воображаемый (а возможно, и настоящий) «островок безопасности». Для этих двух моделей результаты различны.

Если не ввести предположение об островке безопасности, случай двух транспортных потоков, движущихся в противоположных направлениях, проанализировать чрезвычайно трудно; при указанном предположении результаты получаются в точности теми же, что и для двух потоков одного направления,

10.3. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ С ГЛАВНОЙ ДОРОГОЙ

Перекрестки являются важной частью системы дорог; задержки на них приводят к спешке и как следствие к авариям. Управление движением на перекрестках может осуществляться по крайней мере тремя способами, а именно светофорами, развязками и знаками дорожного движения. Первые два обычно используются

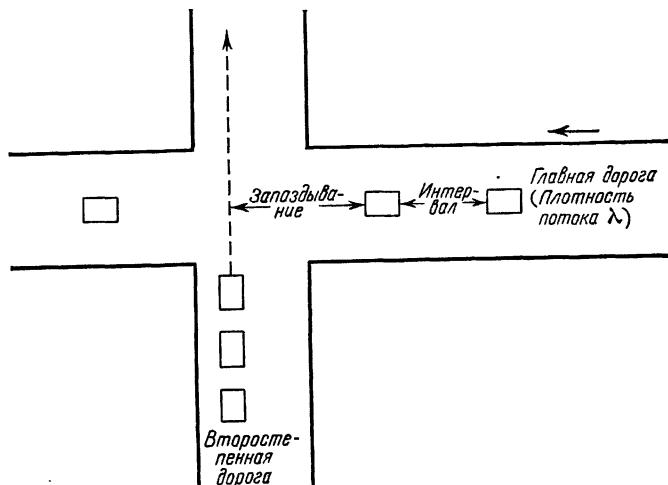


Рис. 10.4. Перекресток с преимущественным правом проезда.

на пересечениях дорог одинаковой важности, а третий — в случае, когда происходит пересечение второстепенной и главной дорог. Такой перекресток, указываемый соответствующим знаком дорожного движения на второстепенной дороге, называется обычно перекрестком с преимущественным правом проезда.

В данном параграфе мы рассмотрим простейшую модель такого перекрестка (рис. 10.4), в которой единственный водитель ждет под знаком дорожного движения возможности пересечь транспортный поток, движущийся по главной дороге. Этот поток предполагается случайным и движущимся в одном направлении. Рассматриваемая задача в точности та же, что и задача о переходящем дорогу пешеходе, однако в данном разделе модель будет построена для пересечения с главной дорогой.

Следует заметить, что результаты, получаемые для модели такого рода, должны иметь стохастический характер. В данном случае они должны иметь форму распределения времени ожидания и определять, в частности, среднее время ожидания.

Для того чтобы получить явное решение, понадобится преобразование Лапласа. Пусть $f(t)$, $F(t)$ и $f^*(s)$ — соответственно плотность вероятности, функция распределения и преобразование Лапласа функции $f(t)$ для потока по главной дороге, так что

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt$$

и

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Заметим, что для случайного потока

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \\ F(t) &= 1 - e^{-\lambda t}, \\ f^*(s) &= \lambda/(\lambda + s). \end{aligned}$$

Перед дальнейшим изложением процитируем стандартный результат для сумм случайных переменных. Рассмотрим два распределения интервалов, характеризуемых в первом случае функциями $f(t)$, $F(t)$, $f^*(s)$ и функциями $g(t)$, $G(t)$, $g^*(s)$ во втором. Функция распределения для суммы двух интервалов, соответствующих указанным распределениям, имеет вид

$$\begin{aligned} H(u) &= \int_0^{\infty} \int_0^{u-t} f(t') g(t) dt' dt = \\ &= \int_0^{\infty} F(u-t) g(t) dt. \end{aligned}$$

Дифференцирование по u под знаком интеграла даст выражение функции плотности вероятностей для суммы интервалов в виде

$$h(u) = \int_0^u f(u-t) g(t) dt.$$

Функция h называется *сверткой* функций f и g и записывается в виде $h = f * g$. Можно показать, что она связана с преобразованием Лапласа соотношением

$$h^*(s) = f^*(s) \cdot g^*(s).$$

Если f и g равны, т. е. суммируются интервалы с одним и тем же распределением, последнее соотношение может быть записано в виде

$$h^*(s) = \{f^*(s)\}^2.$$

Предположим, что автомобиль, движущийся по второстепенной дороге, достигает знака, означающего пересечение с главной дорогой, в момент времени $t=0$, а для пересечения главной дороги требуется время T . Пусть распределение времени ожидания на второстепенной дороге описывается функцией плотности вероятностей $w(t)$, преобразование Лапласа которой $w^*(s)$.

Если первый интервал или время запаздывания $t_1 > T$, то ожидать не придется; тогда $w(t)$ имеет дискретную составляющую

$$P(t_1 > T) = 1 - F(T) = e^{-\lambda T}.$$

В тех случаях, когда $t_1 < T$, $t_2 < T$ и т. д., нужно рассматривать непрерывную компоненту распределения в интервале $(0, \infty)$. Основания для такого вывода следующие. Если автомобиль должен ждать до момента времени t_{n+1} , где $n > 0$, то требуемое время ожидания будет суммой n случайных временных интервалов

$$\sum_{j=1}^n t_j.$$

Так как автомобиль уже ждет в течение временных интервалов $t_1, \dots, t_n$ (все они меньше T), плотность распределения величин интервала t_j ($j \leq n$) не является определенной выше функцией $f(t)$, а равна функции $f(t)$, нормированной на интервале $(0, T)$, т. е.

$$\frac{f(t)}{F(T)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda T}}, \quad 0 < t < T.$$

Таким образом, непрерывная составляющая условной вероятности $w(t)$ при условии, что пересечение главной дороги происходит в течение $(n+1)$ -го интервала, определяется n -кратной сверткой $f(t)/F(T)$, которая может быть записана как $\{f(t)/F(T)\}^{n*}$. Для того чтобы получить безусловное распределение $w(t)$, это выражение нужно умножить на вероятность пересечения главной дороги в течение $(n+1)$ -го интервала, т. е. на $\{F(T)\}^n \{1 - F(T)\}$, и просуммировать результат по всем n . Добавляя полученную выше дискретную компоненту, получим безусловное распределение в виде

$$w(t) = \{1 - F(T)\} \delta(t) + \{1 - F(T)\} \sum_{n=1}^{\infty} \{f(t)\}^{n*},$$

где $\{f\}^{0*} = 1$, а $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, т. е.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t=0 \\ 0 & \text{для прочих } t \end{cases}$$

и

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t) dt = 1.$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям равенства, найдем

$$\begin{aligned} w^*(s) &= \{1 - F(T)\} + \frac{\{1 - F(T)\} \int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - \int_0^T e^{-st} f(t) dt} = \\ &= \frac{1 - F(T)}{1 - \int_0^T e^{-st} f(t) dt}. \end{aligned}$$

Для экспоненциального распределения $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ это приводит к выражению

$$w^*(s) = \frac{(\lambda + s) e^{-\lambda T}}{s + \lambda e^{-(\lambda + s) T}}.$$

Найти обратное преобразование этой функции довольно трудно, но можно показать, что

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{-\lambda T} \delta(t) + \\ &+ \lambda e^{-\lambda T} \sum_{j=0}^{r-1} \left[(-e^{-\lambda T})^j \left\{ \frac{[\lambda(t-jT)]^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{[\lambda(t-jT)]^j}{j!} \right\} \right], \\ (r-1)T &\leq t \leq rT, \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

К счастью, для того чтобы определить только среднее время ожидания и его дисперсию, нет необходимости выполнять обратное преобразование. Стандартный результат (см., например, Хогг и Крэйг, 1970, стр. 49) приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \text{среднее значение} &= - \frac{d}{ds} w^*(s) \Big|_{s=0}, \\ \text{дисперсия} &= \frac{d^2}{ds^2} w^*(s) - \left(\frac{d}{ds} w^*(s) \right)^2 \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

В нашем случае это приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \text{среднее значение} &= \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda T} - \lambda T - 1), \\ \text{дисперсия} &= \frac{1}{\lambda^2} (e^{2\lambda T} - 2\lambda T e^{\lambda T} - 1). \end{aligned} \quad (1)$$

Если опустить дискретную составляющую, найдем, что лапласовский образ времени ожидания равен

$$\frac{\lambda e^{-\lambda T} \{1 - e^{-(\lambda + s) T}\}}{s + \lambda e^{-(\lambda + s) T}}.$$

Дифференцирование этого выражения дает среднее время ожидания

$$\frac{e^{\lambda T}}{\lambda} - \frac{T}{1 - e^{-\lambda T}}. \quad (2)$$

Если можно допустить, что $\lambda T \ll 1$, то разложение экспоненты в ряд в выражении (1) приводит к приближенной формуле

$$\text{среднее время ожидания} \approx \lambda T^2/2,$$

показывающей, что ожидание возрастает как квадрат критического времени T .

Если предположить, что критическое время различно для различных машин, среднее время ожидания может быть получено осреднением значений T , приближенно дающим $1/2 \lambda \mu'_2$, где μ'_2 — второй момент (относительно точки $T=0$) распределения критических времен. Это показывает, что среднее время ожидания нечувствительно к точной форме последнего распределения (исключая, возможно, случай интенсивного транспортного потока, для которого значение λ велико), но существенно зависит от среднего значения и дисперсии распределения, так как

$$\mu'_2 = \text{дисперсия} + (\text{среднее значение})^2.$$

Теперь можно решить задачу, сформулированную в § 10.2. При $T=8$ с, $\lambda=1/6$ машин/с среднее значение равно $6[e^{4/3} - 7/3] = 8,8$ с. Однако следует заметить, что мы смогли достичь большего, чем ответить только на один вопрос. Результаты, полученные в последнем разделе, показывают, что даже очень простая модель может быть использована для достижения общего понимания различных аспектов исследуемой реальной ситуации.

10.4. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ МОДЕЛИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГЛАВНОЙ ДОРОГИ

Простая модель, рассмотренная в предыдущем разделе, может быть сделана более адекватной различными способами. Например, следовало бы рассмотреть не только одиночный автомобиль на второстепенной дороге, но и очередь машин у перекрестка. Если транспортный поток по главной дороге невелик, предположение о случайном характере подхода машин к перекрестку в значительной степени оправдано. Для потока по главной дороге можно выбрать общее экспоненциальное распределение или одно из распределений частного вида, предложенных в § 10.2 или 10.5. В действительности поток по главной дороге может состоять по меньшей мере из двух потоков, движущихся в одном направлении. (Как указывалось ранее, задача о двух потоках, движущихся в противоположных направлениях, математически очень трудна.)

Если на второстепенной дороге ожидает очередь n ($n > 1$) автомобилей, можно представить себе следующую ситуацию. Первый водитель следит за текущей величиной интервала t и принимает положительное или отрицательное решение о пересечении главной дороги согласно некоторому критерию, который в общем случае может быть записан как $\Gamma(t)$. Возможны также альтернативы к использованным в § 10.6 ступенчатым функциям $\Gamma(t)$. Если первый в очереди водитель решает пересечь главную дорогу, второй передвигается на место первого и вся процедура повторяется с учетом временного интервала, остающегося после того, как первый автомобиль совершит свой маневр. Различные модели этого достаточно общего типа были проанализированы теоретически, обычно с учетом некоторых ограничений на правила принятия водителем решений о пересечении дороги. Например, одна из таких моделей включает в рассмотрение ограничение, заключающееся в том, что в течение каждого интервала главную дорогу пересекает не более одного автомобиля. Всесторонне адекватные модели слишком трудны для теоретического описания, и некоторые модели, подобные описанной выше, подвергались критике как весьма искусственные. Критический обзор моделей различных типов приведен Брайменом (1969). Следует ожидать, что наиболее подходящим для практики методом будет натурное моделирование, или, возможно, комбинация теории и натурального моделирования.

10.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ

Уже хорошо известно, что экспоненциальное распределение со сдвигом является разумной моделью для случайного транспортного потока, плотность которого составляет не более 800 машин в час, и становится непригодной для описания более интенсивных потоков. В городских условиях наличие светофоров, перекрестков и т. д. приводит к образованию движущихся групп машин, и становится возможным предложить целый ряд альтернативных функций распределения (Бакли, 1962; Эштон, 1971).

Возможные функции распределения могут быть построены двумя способами. В первом методе данные, собранные на свободной от перекрестков дороге, изображаются в виде гистограммы, общий вид которой, как правило, близок к изображенному на рис. 10.5. Затем при помощи чисто визуальной подгонки предлагается подходящая теоретическая формула. В этом случае обычно требуется получить в интервале $(0, \infty)$ унимодальную функцию распределения, максимум которой сдвинут в положительном направлении по оси абсцисс. Нормальное логарифмическое и гамма-распределения приближенно имеют такую форму, однако попытки применить эти распределения для аппроксимации эмпирических данных не имели большого успеха.

Во втором методе следует исходить из некоторых гипотез о характере движения транспорта по дороге, другими словами, нужно постулировать некоторый механизм формирования потоков. Адекватность любого распределения, полученного таким способом, должна, естественно, быть проверена путем последующего сравнения с данными наблюдений. Такие сравнения были проведены для

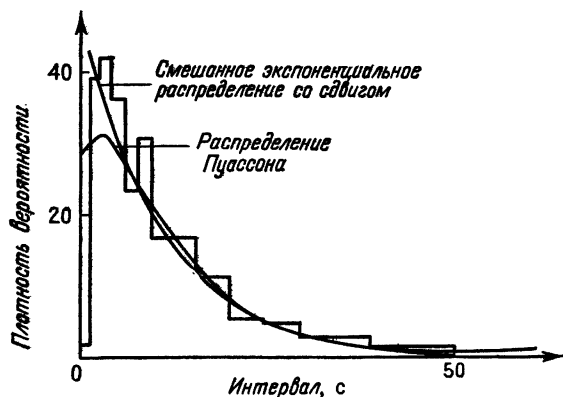


Рис. 10.5. Гистограмма данных об интервалах и подгонка функции распределения.

многих функций распределения, и оказалось, что в настоящее время нет реальных доказательств возможности значительно улучшить экспоненциальное распределение со сдвигом и все еще остается потребность в нахождении удовлетворительной функции распределения.

Приведем два примера использования последнего метода. В качестве первой модели предположим, что машины движутся в один ряд, а весь поток транспорта может быть грубо разделен на две группы машин. Предположим, что разреженный, свободно движущийся поток (например, поток частных автомобилей) занимает долю p общего потока, а оставшаяся доля $(1-p)$ образована тяжелыми грузовыми машинами. Если каждая группа может быть рассмотрена как движущаяся независимо и машины в каждой из них распределены случайным образом, а соответствующие плотности потоков равны λ_1 и λ_2 , то результирующее смешанное экспоненциальное распределение описывается функцией плотностей вероятностей вида

$$f(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-a_1)} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-a_2)} \\ t > \min(a_1, a_2), \quad 0 < p < 1.$$

Вторая модель математически более сложна. Она строится на основе следующих предположений. Допустим, что позади каждого автомобиля существует зона (называемая далее зоной пустоты),

в которую никогда не входят другие машины и которая имеет протяженность Z , где Z является случайной переменной с заданным распределением. Долю p ($0 < p < 1$) интервала составляет время, вычисленное в предположении, что следующий автомобиль находится непосредственно за зоной пустоты. Распределение этих (I типа) интервалов то же, что и распределение случайной величины Z . Оставшаяся доля $(1-p)$ интервалов определяется из предположения о случайном характере расположения «второго» автомобиля позади «первого» при условии отсутствия машин в зоне пустоты Z . Функцией распределения таких (II типа) интервалов является экспоненциальное распределение с параметром λ , сдвинутое по оси так, что минимальный интервал равен Z . Если эти две функции плотности вероятностей равны соответственно $f_1(t)$ и $f_2(t)$, полное распределение определяется выражением

$$f(t) = pf_1(t) + (1-p)f_2(t).$$

Если Z следует гамма-распределению, интервалы типа I имеют функцию плотности вероятностей

$$f_1(z) = \frac{1}{\beta^k \Gamma(k)} z^{k-1} e^{-z/\beta}, \quad z > 0.$$

Пусть функция $f_2(x)$ определяет плотность вероятностей интервалов типа II; найдем $f_2(x)$. Переменная X имеет экспоненциальное распределение со сдвигом, причем $X \geq Z$. Если $F_2(x)$ — функция распределения для X , то

$$F_2(x) = P[X < x] = P[Y < x | Y > Z],$$

где Y — экспоненциально распределенная случайная переменная с функцией плотности вероятностей $g(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $y > 0$. Следовательно,

$$F_2(x) = \frac{P[Z < Y < x]}{P[Y > Z]}.$$

Так как вероятность в знаменателе приведенного выражения не зависит от x , имеем

$$f_2(x) = \frac{d}{dx} F_2(x) = \frac{1}{P[Y > Z]} \frac{d}{dx} P[Z < Y < x].$$

Однако

$$P[Z < Y < x] = \int_0^x \int_0^y g(y) f_1(z) dz dy,$$

так что

$$\frac{d}{dx} P[Z < Y < x] = \int_0^x g(x) f_1(z) dz.$$

Подставляя выражения для $g(x)$ и $f_1(z)$, получим правую часть в виде

$$\frac{\lambda e^{-\lambda x} \gamma(k, x/\beta)}{\Gamma(k)}.$$

Здесь $\gamma(k, x/\beta)$ — неполная гамма-функция. Кроме того,

$$P[Y > Z] = \int_0^\infty \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} \frac{1}{\beta^k \Gamma(k)} z^{k-1} e^{-z/\beta} dz dy, \quad z > 0.$$

Изменение порядка интегрирования и замена переменной $y = z(1/\beta + \lambda)$ непосредственно приводят к результату

$$P[Y > Z] = \frac{1}{(1 + \lambda\beta)^k},$$

так что

$$f_2(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} \gamma(k, x/\beta) (1 + \lambda\beta)^k}{\Gamma(k)}, \quad x > 0.$$

Окончательно, подставляя t вместо z и x , получим

$$\begin{aligned} f(t) &= pf_1(t) + (1-p)f_2(t) = \\ &= \frac{pe^{-t/\beta}}{\beta^k \Gamma(k)} + \frac{(1-p)\lambda e^{-\lambda t} \gamma(k, x/\beta) (1 + \lambda\beta)^k}{\Gamma(k)}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим частный случай функции $f(t)$, полагая в (3) $k=1$, что соответствует экспоненциально распределенной протяженности зоны пустоты. Тогда

$$f(t) = p \frac{e^{-t/\beta}}{\beta} + (1-p)\lambda(1 + \lambda\beta)e^{-\lambda t}(1 + e^{-t/\beta}), \quad t > 0.$$

На рис. 10.5 показано, как смешанное экспоненциальное распределение и «полупуассоновское» распределение, заданное выражением (3), аппроксимируют некоторые данные.

10.6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ «ИНТЕРВАЛ — РЕШЕНИЕ»

Модели, рассмотренные в § 10.4, основаны на простейшей из возможных форм критерия „интервал — решение“, а именно на критерии в виде ступенчатой функции, показанной на рис. 10.2. Другими возможностями являются использование трапецевидной функции и экспоненты со сдвигом, соответствующие функции распределения для которых приведены на рис. 10.6.

Можно также использовать функцию общего вида, в которой каждому интервалу t ставится в соответствие вероятность $\gamma(t)$ положительного решения.

10.7. АДЕКВАТНОСТЬ МОДЕЛИ

Установление адекватности распределений транспортных потоков или зависимостей „интервал — решение“ составляет жизненно важную часть процесса построения моделей. Сама процедура установления адекватности может вызвать затруднения. В качестве иллюстрации опишем характер проблем, возникающих при

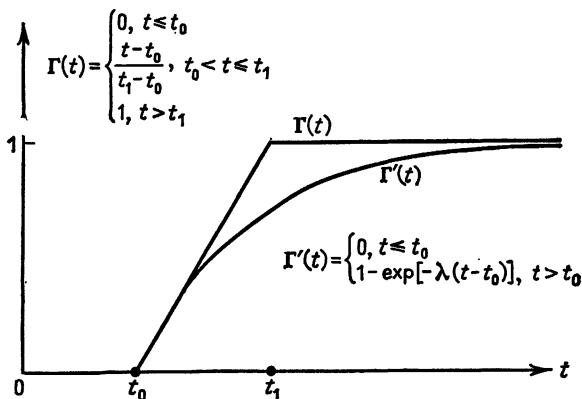


Рис. 10.6. Трапецевидная и экспоненциальная со сдвигом функции «интервал — решение».

проверке адекватности зависимости „интервал — решение“. При использовании данных, полученных для реального перекрестка, могут встретиться трудности как принципиального, так и практического характера. В идеале хотелось бы иметь такую ситуацию, в которой машины, движущиеся в главном потоке, проходили бы мимо ожидающих у перекрестка автомобилей с интервалами, постоянно увеличивающимися от значения, например, в половину секунды. Таким способом можно было бы зарегистрировать первый (т. е. минимальный) интервал, при котором будет принято положительное решение о пересечении дороги. Строго говоря, такой эксперимент нужно было бы повторить большое число раз, прежде чем минимальный интервал, при котором принимается положительное решение, для отдельного водителя (или для группы водителей) будет достоверно определен. Очевидно, что такой опыт неосуществим, и данные обычно собираются путем наблюдения за реальным перекрестком при помощи протоколирования величин интервалов, при которых группа водителей, ожидающих под знаком дорожного движения, принимает положительное или отрицательное решение о пересечении перекрестка. При интерпретации результатов любой теории, основанной на этих данных, нужна особая осторожность.

В первую очередь отметим, что распределение всей совокупности интервалов „отрицательного решения“ состоит из двух компо-

нент, соответствующих распределению интервалов для отдельного водителя и распределению их между водителями. Это означает, что искомое распределение является суперпозицией двух распределений. Вообще говоря, возможен также случай, когда для каждого водителя и каждого интервала с положительным решением существует множество интервалов с отрицательным решением. Другими словами, для каждого водителя и каждого интервала с положительным решением существует распределение интервалов, для которых не принимается решение о пересечении перекрестка, причем, возможно, ни один из этих интервалов не равен „максимальному интервалу с отрицательным решением“. Даже если бы такие распределения можно было получить, они в общем случае не совпадали бы для одного и того же водителя в разные моменты времени. Столь же необычным будет и распределение интервалов с положительным решением, за исключением того, что в каждом частном случае каждый водитель принимает положительное решение для какого-то одного интервала. Эти интервалы вовсе не обязательно равны „минимальному интервалу с положительным решением“. Кроме того, так как интервалов с отрицательным решением гораздо больше, чем интервалов с положительным решением, показатели осторожного водителя при использовании всех данных будут завышенными. Были разработаны различные методы для обхода трудностей такого рода, включающие, в частности, модели, использующие только данные о времени задержки. Однако анализ этих моделей выходит за рамки рассматриваемых здесь задач.

10.8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ashton W. D. (1966). *The Theory of Road Traffic Flow*. Methuen; London.
 Ashton W. D. (1971). Distributions for gaps in road traffic, *J. Inst. Math. Appl.*, 7 37.
 Breiman L. (1969). Data and models in homogeneous one-way traffic flow, *Transportation Research*, 3 235.
 Buckley D. J. (1962). Road traffic headway distributions, *Proc. First Conf. of Australian Road Research Board*.
 Hogg R. V., Craig A. T. (1970). *Introduction to Mathematical Statistics*. Macmillan; London.
 Lighthill M. J., Whitham G. B. (1955). On kinematic waves II. A theory of traffic on long crowded roads. *Proc. Roy. Soc. A*, 229, 317.

10.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Движение однопольного транспортного потока плотностью 900 машин в час происходит случайным образом. Для интервала $t=1/15$ с, вычислить

- а) долю интервалов, превышающих данное время t ,
- б) долю времени, занимаемого интервалами, превышающими t ,
- в) среднюю величину всех интервалов, превышающих t .

Как изменятся эти результаты, если воспользоваться экспоненциальным распределением со сдвигом, равным 1 с, при неизменной плотности транспортного потока?

2. Пусть временные интервалы между моментами, в которые машины проходят мимо данной точки дороги, имеют экспоненциальное распределение с функцией плотности вероятностей $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$. Плотность потока машин составляет 600 машин в час. Какова средняя длина интервала между прохождением последовательно движущихся автомобилей?

Пешеход начинает переход дороги сразу, как только пройдет автомобиль; он переходит дорогу только в том случае, если полагает, что величина интервала составляет по меньшей мере 4 с. Предполагая, что ошибкой в суждениях пешехода можно пренебречь, вычислить

- а) вероятность того, что пешеход задержится при попытке перейти дорогу,
- б) среднюю величину интервала, в течение которого пешеход пересечет дорогу,
- в) среднее время его ожидания при условии, что он должен пропустить ровно один автомобиль,
- г) среднее время его ожидания, если не накладываются ограничения на число автомобилей, проходящих мимо пешехода за период ожидания.

3. Применительно к задаче о переходе улицы предлагается модификация схемы двухрядного одностороннего движения по дороге, состоящая в том, что в модель вводится островок безопасности на середине проезжей части. При условии, что транспортные потоки в каждом ряду можно рассматривать как независимые с плотностями λ_1 и λ_2 , получить выражение для вероятности того, что пешеход будет вынужден ждать, и для среднего времени ожидания в каждой из двух ситуаций, описанных выше, т. е. для рассмотренной ранее модели и для ее модификации. Определите, будет ли указанная модификация полезной по критерию продолжительности ожидания. Какие другие критерии можно было бы рассмотреть?

4. Развить простую модель, рассмотренную в § 10.3, воспользовавшись функцией «интервал — решение», введенной в § 10.6, для различных функций распределения, описывающих поток по главной дороге, таких, как суперпозиция экспоненциальных распределений и гамма-распределение.

5. Учитывая, что модели стохастического типа становятся непригодными при высоких плотностях транспортного потока, предложить адекватную модель для описания плотных потоков.

МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Т. ЛОМАС¹⁾

[Предварительных знаний не требуется]

11.1. ВВЕДЕНИЕ

Отдел телеграфной и телефонной связи в Министерстве почт играет большую и сложную роль, и спрос на соответствующие услуги быстро растет. В связи с громадным размахом и важностью технической стороны дела Главное управление телеграфной и телефонной связи организовано по отделам, администрация которых специализирована в таких областях, как техническое развитие, планирование, финансовая деятельность, услуги. При этом администрация испытывает постоянные трудности в случаях, когда требуется оценить эффективность ее деятельности в масштабе всего предприятия, и при решении вопросов, связанных с планами на будущее. С учетом указанных трудностей структура планирования деятельности предприятия построена таким образом, чтобы текущий план каждого отдела был соотнесен с общим планом деятельности предприятия; последний определяет в общих чертах пути решения принципиальных задач на планируемый период (в данном случае — 11 лет).

В ближайшее десятилетие Главное управление телеграфной и телефонной связи столкнется с проблемой взрывообразного роста, в процессе которого система может удвоиться в своих размерах. В то же время быстро меняется и техника, лежащая в основе телеграфной и телефонной связи. Стратегическое планирование таких крупных и динамичных организаций является делом сложным и чувствительным к весьма малым вариациям методов управления, а также экономических и финансовых факторов. Для того чтобы способствовать развитию и наиболее эффективному стратегическому планированию в этой области, а также для обеспечения выполнения своих функций соответствующей организацией необходимо создать и ввести в практику модель планирования деятельности в области телеграфной и телефонной связи.

¹⁾ T. Lomas, Management Services Department, Post Office Telecommunications Head-quarters, London.

11.2. ОСНОВНЫЕ ЧАСТИ МОДЕЛИ

На рис. 11.1 показан в общих чертах принцип действия этой модели. Каждая выделенная пунктиром область на рисунке соответствует некоторой подмодели, которая здесь определяется как часть общей модели и может при необходимости использоваться независимо. Эти подмодели представляют специальные виды планирования, такие, как

доходы,
текущие расходы,
кадры,
капитальные расходы,
амортизация,
финансирование.

Рассматриваемая модель и составляющие ее подмодели были разработаны как вспомогательные средства планирования. Подмодели сами по себе не выдают планов деятельности предприятия, однако они позволяют администрации и штату плановиков быстро оценивать ряд вводимых допущений относительно спроса на услуги, размеров платежей, производительности труда, цен и т. п. с точки зрения их влияния на вопросы прибыльности, дохода на капитал, потребностей в займах, подлежащих уплате процентов и т. п. Основная цель применения модели заключается в том, чтобы помочь старшей администрации оценить разнообразие возможностей и тем самым способствовать выбору наилучшего плана действий. Такая модель предусматривает также возможность экспериментирования и проведения анализа чувствительности, если нужно изучить чувствительность результатов к допущениям.

Поскольку в модели обрабатывается большой объем данных (одновременно около 7000 входных данных), модель программируется для автономно работающей ЭВМ. Некоторые из подмоделей могут быть обработаны работающими в реальном масштабе времени терминалами для быстрого ввода данных. Следующее описание подмодели доходов показывает, как может быть устроена типовая простая подмодель.

Большую часть поступлений предприятие получает от начислений за установку аппаратуры в виде арендной платы и оплат телефонных разговоров; остальное — от телетайпного и смешанного обслуживания. Например, если производится S_t установок за год t , оплачиваемых в размере u_t за установку, то доходы от установок составят $u_t S_t$. Если имеется T_{it} клиентов в классе i с арендной платой r_{it} от каждого клиента за год t , то эта часть доходов дается выражением

$$\sum_{i=1}^m T_{it} r_{it}.$$

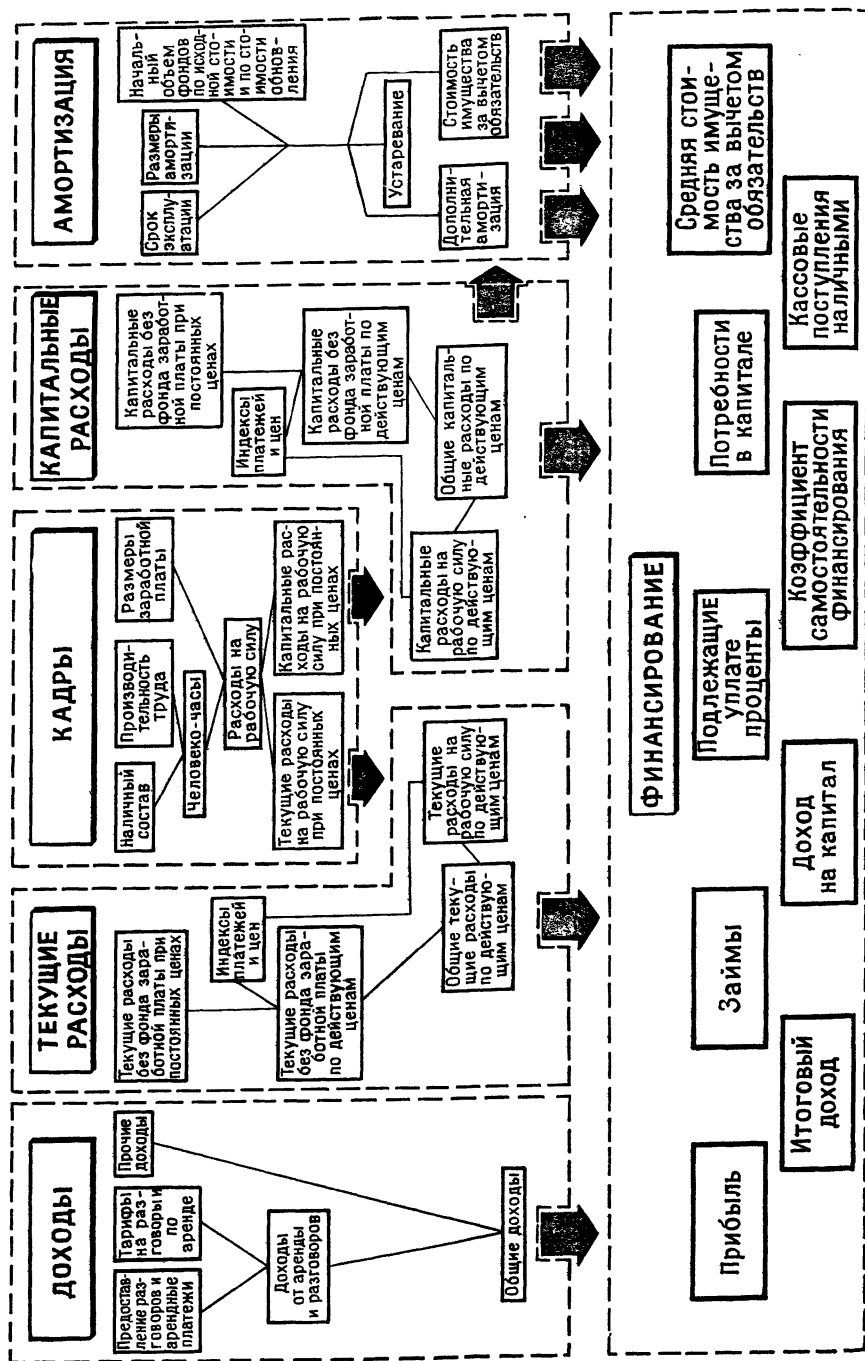


Рис. 11.1. Модель планирования деятельности в области телефонной и телеграфной связи.

Если за год t обеспечивается D_{jt} телефонных разговоров категории j с оплатой в размере x_{jt} за разговор, то эта часть доходов выражается в виде

$$\sum_{j=1}^n D_{jt} x_{jt}.$$

Общие поступления за год t , таким образом, составят

$$J_t = u_t S_t + \sum_{i=1}^m T_{it} r_{it} + \sum_{j=1}^n D_{jt} x_{jt} + V_t, \quad (1)$$

$\uparrow$
 Поступления
в целом

$\uparrow$
 Установка

$\uparrow$
 Арендная
плата

$\uparrow$
 Оплата те-
лефонных
разговоров

$\uparrow$
 Телетайпы
и т. п.

где V_t представляет собой поступления от прочих видов услуг, в основном от оплаты телетайпной связи.

Весь процесс планирования деятельности в области телеграфной и телефонной связи описывается громоздкими алгебраическими выражениями и полностью здесь не приводится, однако некоторое представление о характере расчетов можно получить из рис. 11.1. Ряд наиболее важных подмоделей описан в следующих параграфах.

11.3. ПОДМОДЕЛЬ КАДРОВ

Подмодель кадров, например, строится следующим образом. Число человеко-часов, затраченных на обслуживание, k , пропорционально предложению S_k услуг и обратно пропорционально производительности P_k труда рабочей силы. Тогда затраты E на рабочую силу равны человеко-часам, умноженным на размеры заработной платы W_k , т. е.

затраты на рабочую силу = $\frac{\text{предложение услуг}}{\text{производительность}} \times \text{заработная плата}$

(каждый сомножитель выражается в соответствующих единицах), т. е.

$$E = \sum_{k=1}^n \frac{S_k W_k}{P_k}. \quad (2)$$

Суммирование означает, что подсчет проводится по многим видам предоставляемых услуг, различным уровням заработной платы по разным специальностям и по разной производительности труда. Подсчет может учитывать уровень инфляции путем умножения W на соответствующий индекс.

11.4. ПОДМОДЕЛЬ АМОРТИЗАЦИИ

Подмодель амортизации, вероятно, нуждается в более детальном пояснении. Амортизация — это отчисления, производимые ежегодно в соответствии с прибылями и убытками предприятия для компенсации снижения стоимости действующих фондов (оборудование, кабели и здания) за данный год. Ожидаемый срок службы каждого из видов фондов известен, величина их чистого остатка (продажная стоимость в конце срока службы за вычетом стоимости замены) и амортизация вычисляются так, чтобы покрыть действительную стоимость фондов за вычетом величины остатка по истеченному сроку их работоспособности. Такая амортизация определяется как устаревание. Поскольку по истечении срока использования фондов стоимость их замены может возрасти, например, вследствие роста цен и заработной платы, предусматриваются дополнительные отчисления, называемые дополнительной амортизацией.

Амортизационные расчеты могут быть сведены в три основных уравнения. Эти уравнения таковы.

Общая сумма фондов на конец года = общая сумма фондов на начало года + начисления за год — стоимость фондов, возвращенных за год, т. е.

$$G_{t+1} = G_t + A_t - W_t. \quad (3)$$

Амортизация за год = общая величина фондов на начало года $\times$ коэффициент амортизации, т. е.

$$D_t = G_t \times r. \quad (4)$$

Чистая стоимость фондов на конец года = чистая стоимость фондов на начало года + чистые капитальные расходы за год — амортизация за год, т. е.

$$N_{t+1} = N_t + C_t - D_t. \quad (5)$$

Такие расчеты, проводимые отдельно по каждой группе фондов, повторяются ежегодно за планируемый период, и стоимости фондов оказываются каждый раз уточненными. Эта подмодель позволяет администрации быстро исследовать влияние на амортизацию различных стратегий инвестирования, а также последствия изменения правил амортизации и ее коэффициента.

11.5. ПОДМОДЕЛЬ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Из схемы модели планирования деятельности в области телеграфной и телефонной связи видно, что именно в подмодели финансирования объединяются результаты, полученные от других под-

моделей. Она предназначена для подсчета общих финансовых последствий и показателей, влияющих на изменение плана.

Эта подмодель заслуживает подробного изучения по ряду причин. Во-первых, она как независимая подмодель принимается и охотно используется администрацией сектора эксплуатации. Во-вторых, она показывает, как для анализа системы, описанной математически, можно применить построенную модель для ответа на вопросы, на которые либо вообще невозможно, либо очень трудно ответить заранее. В-третьих, на дальнейшей стадии своего развития эта подмодель иллюстрирует приложение математического программирования к планированию деятельности предприятия. Наконец, эта подмодель показывает, как могут быть развернуты модульные модели в соответствии с запросами администрации и плановиков.

Как уже отмечалось, данная подмодель составляет неотъемлемую и на самом деле самую важную часть модели в целом. Вместе с тем она легкодоступна, что необходимо при использовании ЭВМ с дистанционным доступом, работающей в режиме разделения времени.

Такая форма подмодели, работающей в реальном масштабе времени, описана здесь потому, что это обеспечивает ряд удобств, которые не требуются для общей модели.

Чтобы понять работу подмодели финансирования, необходимо иметь некоторые представления относительно финансовых целей деловой активности таких организаций, как Министерство почт, а также представлять себе, как производится финансирование такой деятельности.

Министерство почт как национализированное предприятие не имеет держателей акций (кроме правительства), требующих выплаты дивидендов. Вся прибыль, таким образом, обращается в капитальные вложения. Необходимо, однако, доказывать правительству, что министерство обладает финансовой эффективностью по общепринятым финансовым критериям, т. е. поступления год за годом должны быть достаточны для покрытия издержек и должен достигаться приемлемый коэффициент дохода на капитал. Поскольку министерство конкурирует с другими организациями общественного сектора в вопросах ссуд от правительства, суммы, которые оно может получить, ограничены, и, следовательно, ему придется финансировать часть своих вложений из своих собственных ресурсов. Короче говоря, министерство должно обладать экономической самостоятельностью.

Подмодель финансирования дает возможность плановикам осуществлять переход от большого числа альтернатив относительно планов деятельности в терминах поступлений, расходов, потребности в капитале и т. п. к выводам относительно выплат по процентам займов, прибылей, доходов на капитал и т. п. Основные входные и выходные переменные этой подмодели представлены в табл. 11.1.

Рассмотрим входные переменные. Поступления от аренды и телефонных разговоров, а также поступления от услуг смешанного характера должны покрыть некоторое расширение эксплуатационных расходов и потребности предприятия в капитале. Эксплуатационные расходы включают в себя заработную плату операторов,

Таблица 11.1

Основные переменные, использованные в подмодели финансирования

Вход		Выход	
Переменные	Обозначения	Переменные	Обозначения
Поступления	J_t	Оплата процентов по займам	I_t
Эксплуатационные расходы	E_t	Задолженность	B_t
Потребности в капитале	C_t	Чистая стоимость фондов	NA_t
Амортизация от устаревания	DH_t	Прибыль	P_t
Амортизация дополнительная	DS_t	Доход на капитал	ROC_t
Процентная ставка	i_t	Доля финансирования из собственных ресурсов	SFR_t

конторского персонала, администрации и стоимость всей работы по поддержанию оборудования в рабочем состоянии. Таким образом, эксплуатационные расходы являются деньгами, текущими из предприятия, т. е. отрицательным потоком наличных средств. Капитал, требующийся предприятию для инвестирования в капитальное оборудование, поступает частично из собственных ресурсов предприятия, частично от займов, получаемых от правительства. Последние, конечно, оплачиваются по соответствующей процентной ставке.

Два других входа в подмодель финансирования, как уже отмечалось, относятся к амортизации от устаревания и дополнительной амортизации оборудования.

Условие того, что сумма поступающих средств должна равняться сумме расходов и средств, принадлежащих предприятию (оборотные средства), принимает вид уравнения баланса

$$J_t + B_t = C_t + E_t + I_t. \quad (6)$$

Займы от правительства поступают при неизменной процентной ставке. В каждый отдельно взятый год будет погашаться несколько таких займов, и если предположить существование некоторой средней процентной ставки за год, то за один год t общая выплата про-

центов по займам составит

$$I_t = \sum_{y=s}^{t-1} i_y B_y + f(B_t) \quad (7)$$

для займов за период от года s до года $t-1$.

Компонента $f(B_t)$ соответствует тому, что задолженность может начаться в любое время в течение года, а не обязательно в конце года. Таким образом, проценты могут отчисляться за часть года, в котором получен заем. Для практических целей вполне приемлемо допустить, что величина $f(B_t)$ прямо пропорциональна выплатам по процентам за полный год, так что

$$f(B_t) = a i_t B_t. \quad (8)$$

Из уравнения (7) можно заключить, что

$$I_t = I_{t-1} + a B_t i_t + (1-a) B_{t-1} i_{t-1}. \quad (9)$$

На практике используется некоторый модифицированный вариант уравнения (9). Величина B_t не включает в себя дополнительных ссуд, которые получены для погашения старых займов. Последнее не отражается на обязательствах предприятия, однако поскольку новые займы предоставляются по процентным ставкам, отличным от прежних ставок, выплаты по процентам каждый год увеличиваются (скажем, на q_t). Тогда уравнение (9) принимает вид

$$I_t = I_{t-1} + a B_t i_t + (1-a) B_{t-1} i_{t-1} + q_t. \quad (10)$$

В этой модели q_t подсчитывается на основании входной информации о займах, подлежащих пролонгации. Прибыль предприятия за год t записывается в виде

$$P_t = J_t - E_t - D H_t - D S_t - I_t. \quad (11)$$

Необходимо рассмотреть еще один важный фактор, характеризующий состояние финансовой деятельности предприятия, — объем его фондов. Критическим показателем такой деятельности является способность этих фондов давать доходы предприятию (прибыль на капитал). Эти доходы в общем определяются отношением поступлений к величине фондов, представленным в процентах, или

$$\frac{\text{поступления}}{\text{объем фондов}} \times 100\%. \quad (12)$$

Для телекоммуникаций в Министерстве почт этот показатель определяется более точно в виде

$$\frac{\text{прибыли} + \text{начисления на прибыль} + \text{дополнительная амортизация}}{\text{средняя величина чистых фондов за весь год}} \times 100\%. \quad (13)$$

В этом случае с учетом (11) получаем

$$ROC_t = \frac{J_t - E_t - DH_t}{(NA_t + NA_{t-1})/2} \times 100\%, \quad (14)$$

где чистые фонды, NA_t , определяются уравнением (5) и, согласно табл. 11.1, задаются как

$$NA_t = NA_{t-1} + C_t - DH_t.$$

Другим показателем, важным для администрации предприятия и его плановиков, является доля вложений предприятия из собственных ресурсов (Self financing ratio) SFR, которая определяется как

$$SFR_t = \frac{P_t + DH_t + DS_t}{C_t} \times 100\%. \quad (15)$$

Используя (6) и (11), имеем

$$SFR_t = \left(1 - \frac{B_t}{C_t}\right) \times 100\%. \quad (16)$$

Уравнения (6) и (16) составляют основную часть описания подмодели финансирования и дают возможность легко оценить финансовые возможности альтернативных стратегий деятельности.

Предположим, например, что заданы все входные данные, показанные в табл. 11.1, и администрации необходимо проанализировать финансовые возможности. Уравнения составляются для каждого последующего года, начиная с первого. После подсчета размеров займов и платежей по процентам за каждый год могут быть решены оставшиеся уравнения. При этом оказывается, что уравнения (6) и (10) составляют два совместных уравнения, где неизвестными являются I_t и B_t . Эти уравнения затем легко решаются.

Можно считать, что данная модель предназначена не для математиков, а для плановиков. Тогда выходы модели должны отвечать реальным понятиям, таким, какими оперируют, например, бухгалтеры, а не математики. Таблица 11.2 показывает типовой выход подмодели финансирования.

Редко бывает так, что первый же план, рассчитанный на модели, окажется удовлетворительным во всех отношениях, отвечая одновременно различным целям и существующим ограничениям. Поэтому администрация ставит обычно ряд вопросов типа следующего: «Что следует изменить для получения такого-то дохода на капитал, или такого-то коэффициента финансирования из собственных резервов, или сохранения задолженности в таких-то пределах?» В принципе может быть достигнута любая из этих целей или удовлетворены ограничения путем варьирования одновременно или порознь доходов, эксплуатационных расходов или потребностей в капитале. На практике допускается варьирование поступле-

Таблица 11.2

Типовой выход подмодели финансирования.
Цифры, использованные в данном примере,
условны и не связаны ни с какими планами Министерства почт.
Хотите ознакомиться со сводкой входов? Да. Сводка входов

Годы ¹⁾	Поступления, млн.	Эксплуатационные расходы, млн.	Потребности в капитале, млн.	Амортизация		Средняя величина чистых фондов, млн.	Процентная ставка, %
				Устаревание, млн.	Дополнительная, млн.		
1974	1100	700,0	700,0	180,0	75,0	3860	9,0
1975	1350	750,0	760,0	200,0	90,0	4400	9,0
1976	1500	800,0	800,0	220,0	105,0	4970	9,0
1977	1650	900,0	850,0	250,0	120,0	5560	9,0
1978	1900	1000,0	900,0	280,0	135,0	6170	9,0
1979	2100	1100,0	950,0	310,0	150,0	6800	9,0
1980	2300	1250,0	1000,0	340,0	165,0	7450	9,0
1981	2500	1400,0	1100,0	370,0	190,0	8145	9,0
1982	2800	1550,0	1200,0	400,0	205,0	8910	9,0
1983	3100	1700,0	1300,0	430,0	220,0	9745	9,0

Годы ¹⁾	Размеры займов, млн.	Прибыли, млн.	Выплаты по процентам, млн.	Доход на капитал, %	Доля финансирования из своих ресурсов, %	Общий доход, млн.	Кассовые поступления наличными, млн.
1974	490,1	—45,1	190,1	5,70	29,99	220,0	300,0
1975	392,6	77,4	232,6	9,09	48,34	400,0	160,0
1976	368,5	106,5	268,5	9,66	53,93	480,0	100,0
1977	404,1	75,9	304,1	8,99	52,46	500,0	100,0
1978	339,9	145,1	339,9	10,05	62,23	620,0	0
1979	321,3	168,7	371,3	10,15	66,18	690,0	—50,0
1980	352,5	142,5	402,5	9,53	64,75	710,0	—50,0
1981	438,2	101,8	438,2	8,96	60,17	730,0	0
1982	428,7	166,3	478,7	9,54	64,28	850,0	—50,0
1983	418,3	231,7	518,3	9,95	67,83	970,0	—100,0

Указать цель + назначить начальный год? Доход на капитал, 1974. Каков доход на капитал (%) по каждому году? 11,0 11,0 11,0 11,0 11,0 11,0 11,0 11,0

Результат при цели доход на капитал:

Годы ¹⁾	Размеры займов, млн.	Прибыли, млн.	Выплата по процентам, млн.	Доход на капитал, %	Доля финансирования из своих ресурсов, %	Поступления, млн.	Потребность в капитале, млн.
1974	279,1	165,9	183,7	11,0	60,13	1304,6	700,0
1975	286,4	183,6	210,4	11,0	62,31	1434,0	760,0
1976	270,4	204,6	237,1	11,0	66,21	1566,7	800,0

Продолжение

Результат при цели доход на капитал:

Годы ¹⁾	Размеры займов, млн.	Прибыли, млн.	Выплата по процентам, млн.	Доход на капитал, %	Доля финансирования из своих ресурсов, %	Поступления, млн.	Потребность в капитале, млн.
1977	250,5	229,5	262,1	11,0	70,52	1761,6	850,0
1978	226,6	258,4	285,3	11,0	74,82	1958,7	900,0
1979	198,2	291,8	306,2	11,0	79,13	2158,0	950,0
1980	164,9	330,1	324,4	11,0	83,51	2409,5	1000,0
1981	175,0	365,0	340,9	11,0	84,10	2666,0	1100,0
1982	178,0	417,0	358,1	11,0	85,17	2930,1	1200,0
1983	173,4	476,6	375,3	11,0	86,66	3202,0	1300,0

Которая из целей + назначить начальный год? Стоп

¹⁾ Данные приведены на конец финансового года (31 марта).

ний, в то время как другие входы сохраняются постоянными и обычно выделен один из выходов. Указанный подход лишь приближенно соответствует реальной ситуации, однако, ввиду растянутости капитальных расходов во времени, он достаточно реалистичен для использования в экспериментальных целях. Более того, такой подход дает необходимые оценки, на которых может быть построен новый план.

В случае варьируемых поступлений уравнения (6) и (10) представляют собой два уравнения с тремя неизвестными, одно из которых находится при помощи дополнительного уравнения. Если дан требуемый доход на капитал, то требуемые поступления определяются уравнением (14). Если необходимо найти коэффициент финансирования из собственных ресурсов, то уравнение (16) определяет сумму, которую следует получить как заем. Если займы лимитируются, то подсчеты сначала проводят в предположении, что поступления, размеры которых уже оценивались, будут достаточными для сохранения уровня займов ниже их лимита. Если окажется, что это предположение несправедливо, то уравнения (6) и (10) решают для поступлений и оплаты процентов со ссуд, равных их лимиту.

11.6. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ К РЕШЕНИЮ ТАРИФНЫХ ВОПРОСОВ

Для студентов, специализирующихся по прикладной математике, определенный интерес представляет оценка тарифной политики, поскольку эта оценка является примером практического при-

менения математического программирования (в частности — динамического программирования).

Основная цель тарифной политики заключается в достижении дохода на инвестиции, достаточного для покрытия потребностей предприятия, путем назначения справедливых цен в отношениях со своими клиентами. Постоянно имея в виду эту цель, необходимо, следовательно, время от времени пересматривать тарифы и, несмотря на постоянное увеличение производительности труда, время от времени повышать их, особенно в периоды высокой инфляции.

Следует добавить, что не принято менять тарифы, если требуется лишь небольшой рост поступлений. В связи с этим используется прием, при котором требования в дополнительных поступлениях переводятся в прогнозы о времени, когда следует планировать увеличение тарифа и в какой мере.

Общая детализация вопроса достигается следующим образом. Для простоты допустим, что изменение всех тарифов происходит в начале года. Пусть K_t — дополнительные поступления, требуемые в год t сверх первоначального прогноза. Они определяются при помощи модели (см. выше), например, в случае выдвижения цели достижения дохода на капитал (в оставшейся части этого раздела величину K_t будем называть поступлениями).

Пусть T_t — поступления от изменений в тарифах за год t , и пусть r_t — коэффициент роста предприятия за тот же год. Это вполне соответствует действительности, поскольку изменения в тарифах, которые первоначально обеспечивают поступления T_t за год, за следующий год дают поступления $r_{t+1}T_t$. В общем изменения тарифов за год t , обеспечивая изменение T_t в поступлениях за этот год, приводят к следующему изменению в поступлениях за год u :

$$T_t r_{t+1} r_{t+2} \dots r_u = \frac{T_t R_u}{R_t},$$

где

$$R_t = \prod_{v=1}^t r_v.$$

Изменения в поступлениях, вызванные изменением некоторого тарифа за какой-либо год, ограничены фиксированными изменениями увеличения m с некоторым минимальным изменением km ,

$$T_t \in \{0, \pm km, \pm (k+1)m, \dots, \pm nm\},$$

где n и k — целые числа. Ограничение на интервал между изменениями тарифа выражается путем введения фиктивной переменной δ_t , принимающей значения 0 и 1, так что

$$\delta_t = \begin{cases} 1, & \text{если имеется изменение тарифа за год } t; \\ 0, & \text{если изменения нет.} \end{cases}$$

Если отдельные изменения тарифа не могут производиться чаще чем за M лет, то мы должны иметь дополнительно

$$\sum_{u=0}^{M-1} \delta_{t+u} \leq 1 \text{ для всех } t.$$

Выбор функции оптимизации является довольно произвольным. Скачки тарифа должны быть выбраны так, чтобы обеспечивать поступления настолько близкими к требуемым, насколько это возможно. Один из методов состоит в том, чтобы минимизировать квадраты отклонений от требуемых поступлений. В этом случае задача может быть сформулирована так:

минимизировать

$$\sum_{t=1}^N \left(K_t - \sum_{u=1}^t \delta_u T_u \frac{R_t}{R_u} \right)^2 \quad (17)$$

при условии

$$\sum_{u=0}^{M-1} \delta_{t+u} \leq 1 \text{ для } t=1, 2, \dots, N,$$

где

$$T_t \in \{0, \pm km, \pm (k+1)m, \dots, \pm nm\}.$$

Сформулированная задача близка к такой задаче, которая может быть решена средствами динамического программирования.

Динамическое программирование является особым приемом в математическом программировании, разработанным впервые Беллманом (1957) и с тех пор широко используемым при исследовании операций. Книга Митчела (1972) содержит введение в этот метод. Смысл метода заключается в сведении задачи к иерархии простых подзадач, каждая из которых может быть решена последовательно. Так, задача о тарифе требует принятия решений по тарифам за каждый год t . Если зависимость наилучшей тарифной политики, которую надо выбрать для года t , от более ранних решений проявляется только в том, что эти решения влияют на сумму общих поступлений на начало года t , то задача может быть представлена иерархией задач вида: «Какова наилучшая политика, которая должна быть выбрана на год t , если поступления на начало года t составляют α ?» Если наилучшая политика на год $(t+1)$ известна для любого данного уровня α поступлений на начало года $(t+1)$, то задача сводится к вычислению эффекта от изменения тарифа за год t и к следованию этой политике в последующие годы. Математическая формулировка такова. Пусть $C(\alpha, t)$ — величина, относящаяся к оптимальной тарифной политике с поступлениями α на начало года t , такая, что $C(\alpha, t)$ есть сумма квадратов разностей, вычис-

ленных на годы $t, t+1, \dots, n$. Тогда, если изменения тарифа могут производиться раз в год, $C(\alpha, t)$ определится как

$$C(\alpha, t) = \min_{\beta} \{V_t(\alpha, \beta) + C(\beta, t+1)\}, \quad (18)$$

где $V_t(\alpha, \beta)$ — квадрат разности на год t от увеличения поступлений с α до β за этот год, $V_t(\alpha, \beta) = (K_t - \beta)^2$. Уравнение (18) решается последовательно за годы $t=N, N-1, \dots, 2, 1$, и $(\beta - \alpha)$ дает оптимальный тариф на каждый год. Решение всей задачи дается величиной $C(0, 1)$. Если изменения тарифа могут происходить не чаще чем один раз за M лет, то задача формулируется аналогично.

Эффективность описанного метода зависит от области допустимых значений, которые может принимать α в любой год. При постановке задачи в форме (17) область значений α весьма обширна, так как объем поступлений за год t зависит от года, в котором были осуществлены предшествующие повышения тарифа. При такой ситуации метод динамического программирования эквивалентен полному перебору; преимущества обнаруживаются в том случае, если набор вероятных сумм поступлений, получаемых за произвольный год, может быть уменьшен до малого числа возможностей. Указанная возможность достигается переопределением задачи с учетом того, что вероятные изменения тарифа со временем компенсируются инфляцией и оптимизируемая функция меняется незначительно. В результате поступления за произвольный год могут теперь принимать только одно из значений $m\lambda R_t$, где λ — неотрицательное целое. Тогда задача состоит в минимизации

$$\sum_{t=1}^N \frac{1}{R_t^2} \left(K_t - \sum_{u=1}^t \delta_u \phi_u R_t \right)^2 \quad (19)$$

при условии

$$\sum_{u=0}^{M-1} \delta_{t+u} \leq 1 \text{ для } t=1, 2, \dots, N,$$

где $\phi_u = T_u/R_u \in \{0, \pm km, \pm(k+1)m, \dots, \pm\lambda m, \dots, \pm nm\}$.

Теперь задача может быть сформулирована как задача динамического программирования. Пусть $C(\lambda, t)$ определяет оценку наилучшей политики за годы $t, t+1, \dots, N$, если поступления на начало года t составляют $m\lambda R_t$. Тогда задача состоит в том, чтобы найти $C(0, 1)$, если дано, что

$$C(\lambda, t) = \min \{D(\lambda, t), E(\lambda, t)\}, \quad (20)$$

где $D(\lambda, t)$ — оценка в случае, если в течение года t не производится изменений тарифа, равная

$$D(\lambda, t) = \left(\frac{K_t}{R_t} - \lambda m \right)^2 + C(\lambda, t+1),$$

и $E(\lambda, t)$ — оценка в случае, если тариф в течение года t изменяется, равная

$$E(\lambda, t) = \min \left\{ \sum_{u=0}^{M-1} \left(\frac{K_{t+u}}{R_{t+u}} - \lambda' m \right)^2 + C(\lambda', t+M) \right\}$$

для $k \leq |\lambda' - \lambda| \leq n$. Уравнения решаются последовательно за годы $N, N-1, \dots, 2, 1$.

Как только задача, определяемая уравнением (19), решена, близкое к оптимальному решение может быть найдено из выражения (17) с последующим округлением скачков тарифа.

Подход с использованием метода динамического программирования является весьма гибким для решения задач выбора между альтернативами. В модели заключены и дополнительные возможности, в том числе возможность рассматривать изменения тарифа в моменты времени, отличные от начала года, изменения тарифа в фиксированных интервалах, а также изменения к установленному сроку.

11.7. ПРИМЕР ТАРИФНЫХ РАСЧЕТОВ

Допустим, что составлен некоторый предварительный план и он проанализирован с использованием подмодели финансирования. Сравнение результатов и целей показало, что для получения желательного результата надо будет иметь дополнительные поступления K_t за каждый год согласно табл. 11.3.

Таблица 11.3

Дополнительные поступления (млн. фунтов)

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_t	10	55	92	121	140	120	112	132	184	258
K_t/R_t	10	50	80	100	110	90	80	90	120	160

Пусть имеются следующие ограничения на мероприятия по изменению тарифа. Изменения тарифа могут происходить не чаще чем раз в два года; они будут увеличивать поступления скачками в 10 млн. фунтов, и каждое изменение тарифа должно обеспечить изменение поступлений по меньшей мере в 20 млн. фунтов. Система растет на 4,9% в год. Другими словами, $r_t = \sqrt[10]{1,1}$, $k=2$, $m=10$ и $M=2$ в обозначениях из соотношений (19) и (20).

Задача решается путем последовательного вычисления всех оценок $C(\lambda, t)$, где t принимает значения $1, 2, \dots, 10$, а λ — значе-

ния 0, 10, 20, . . . , 170. Эти величины приведены в табл. 11.4 и вычислены согласно выражению (20). Поступления λ' , которые соответствуют наилучшей политике, приведены в скобках под оценками. Если наилучшая политика не предусматривает изменение тарифа (т. е. если $\lambda' = \lambda$), то число отмечается звездочкой.

Столбцы табл. 11.4 вычислены в обратном порядке, начиная с года 10. Цифры в этом столбце дают минимальную квадратичную ошибку за год 10, которая обеспечила изменение тарифа, допустимое за тот год, для каждой возможной величины поступлений на конец года 9. Таким образом, требуется минимизировать $1,1^{-10} \times (160 - 10\lambda')^2$, и можно показать, что это достигается при подстановке значения $\lambda' = 16$, а тогда $C(\lambda, 10) = 0$, за исключением случаев $\lambda = 15$ или 17. В этих двух случаях λ' не может быть равным 16, поскольку это соответствовало бы изменению поступлений только за 10 млн. фунтов; наилучшая политика здесь состоит в достижении значения, как можно более близкого к 160, т. е. в том, чтобы не менять тарифа.

Теперь может быть вычислен столбец 9 в табл. 11.4. Здесь следует различать два случая.

Если за год 9 произведено изменение тарифа, то новый уровень поступлений λ' должен быть тем же, что и за год 10. Квадрат ошибки в этом случае составит

$$1, 1^{-9} (120 - 10\lambda')^2 + 1,1^{-10} (160 - 10\lambda')^2,$$

и разыскивается величина λ' , которая минимизирует эту оценку (при условии $|\lambda' - \lambda| \geq 2$). Например, если $\lambda = 7$, то

$$\lambda' = 5 \text{ дает ошибку } 1,1^{-9} (120 - 50)^2 + 1,1^{-10} (160 - 50)^2 = 6743,$$

$$\lambda' = 9 \text{ дает ошибку } 1,1^{-9} (120 - 90)^2 + 1,1^{-10} (160 - 90)^2 = 2271,$$

$$\lambda' = 9 \text{ дает ошибку } 1,1^{-9} (120 - 100)^2 + 1,1^{-10} (160 - 100)^2 = 1557,$$

.

$$\lambda' = 13 \text{ дает ошибку } 389,$$

$$\lambda' = 14 \text{ дает ошибку } 324,$$

$$\lambda' = 15 \text{ дает ошибку } 420,$$

$$\lambda' = 16 \text{ дает ошибку } 679.$$

Рассмотрение прочих возможностей показывает, что минимальная квадратичная ошибка достигается при $\lambda' = 14$ и в этом случае она составляет 324 (таким образом, в обозначениях из соотношения (20) имеем $E(7, 9) = 324$).

Второй случай сводится к тому, чтобы оставить поступления неизменными и следовать наилучшей политике следующего года, т. е. найти $D(7, 9)$. По определению имеем

$$D(7, 9) = 1,1^{-9} (120 - 70)^2 + C(7, 10) = 1060 + 0 = 1060.$$

Таблица 11.4

Вычисление оптимальных скачков тарифа.
В таблице приведены вычисленные оценки $C(\lambda, T)$.
Числа в скобках дают наилучшую политику действий

Поступ- ления, 10 £	Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		809 (0)*	718 (6)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)	0 (16)
1		718 (1)*	718 (6)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)	0 (16)
2		809 (2)*	718 (6)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)	0 (16)
3		1082 (3)*	718 (6)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)	0 (16)
4		1443 (2)	691 (4)*	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)	0 (16)
5		1302 (3)	608 (5)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)	0 (16)
6		1302 (3)	691 (6)*	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)	0 (16)
7		1302 (3)	741 (7)*	410 (7)*	335 (10)	386 (10)	280 (9)	268 (7)*	216 (10)	324 (14)	0 (16)
8		1302 (3)	718 (6)	335 (8)*	335 (10)	335 (10)	273 (8)*	216 (8)*	216 (10)	324 (14)	0 (16)
9		1302 (3)	718 (6)	416 (9)*	341 (11)	529 (9)*	280 (9)*	280 (9)*	229 (11)	324 (14)	0 (16)
10		1302 (3)	718 (6)	609 (8)	335 (10)*	335 (10)*	273 (8)	370 (8)	216 (10)	170 (10)*	0 (16)
11		1302 (3)	718 (6)	608 (8)	341 (11)*	273 (11)*	273 (8)	370 (8)	229 (11)*	42 (11)*	0 (16)
12		1302 (3)	718 (6)	608 (8)	335 (10)	335 (12)*	273 (8)	370 (8)	216 (10)	0 (12)*	0 (16)
13		1302 (3)	718 (6)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	42 (13)*	0 (16)
14		1302 (3)	718 (6)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)*	0 (16)
15		1302 (3)	718 (6)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	389 (13)	39 (15)*
16		1302 (3)	718 (6)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)	0 (16)*
17		1302 (3)	718 (6)	608 (8)	335 (10)	489 (10)	273 (8)	370 (8)	216 (10)	324 (14)	39 (17)*

Это дает квадратичную ошибку при отсутствии изменения тарифа за год 9 и увеличение поступлений на 160 млн. фунтов за год 10. В этом случае $E(7, 9) < D(7, 9)$, и оптимальное изменение тарифа получается при $\lambda' = 14$.

Оставшиеся колонки таблицы получены непосредственно с использованием соотношения (20). Полезно заметить, что $C(\lambda, t)$ дает минимум квадратичной ошибки для всех последующих лет при условии, что имеется возможность произвести изменение тарифа за год t . Так, если изменение тарифа проведено в течение года t ,

то квадратичные ошибки за годы t и $(t+1)$ фиксированы, и наилучшая политика тогда продолжается на год $(t+2)$. В противном случае квадратичная ошибка за год t известна, и наилучшая политика может быть продолжена с года $(t+1)$. Например, если $\lambda=8$ и $t=5$, $E(8,5)$ находится путем следующих выкладок:

$$\lambda'=5; \text{ ошибка } 1,1^{-5} (110-50)^2 + 1,1^{-6} (90-50)^2 + C(5,7) = 2235 + 903 + 370 = 3508;$$

$$\lambda'=6; \text{ ошибка } 1,1^{-5} (110-60)^2 + 1,1^{-6} (90-60)^2 + C(6,7) = 1552 + 508 + 370 = 2430;$$

$$\lambda'=10; \text{ ошибка } 1,1^{-5} (110-100)^2 + 1,1^{-6} (90-100)^2 + C(10,7) = 62 + 56 + 370 = 489;$$

$$\lambda'=11; \text{ ошибка } 1,1^{-5} (110-110)^2 + 1,1^{-6} (90-110)^2 + C(11,7) = 0 + 226 + 370 = 596;$$

$$\lambda'=12; \text{ ошибка } 1,1^{-5} (110-120)^2 + 1,1^{-6} (90-120)^2 + C(12,7) = 62 + 506 + 370 = 938$$

Таким образом, $E(8,5)=489$ при оптимальных поступлениях в 100 млн. фунтов.

Рассмотрев возможность отсутствия изменений тарифа, имеем

$$D(8, 5) = 1, 1^{-5} (110-80)^2 + C(8, 6) = 832.$$

Наилучшим является решение перейти на уровень поступлений $\lambda'=10$, т. е. 100 млн. фунтов.

Таблица завершается минимальной квадратичной ошибкой, которая получается при $C(0,1)$. Различные уровни поступлений, а следовательно, и изменения тарифа также могут быть найдены из табл. 11.4 следующим образом. Начав с $C(0,1)$, находим наиболее подходящие поступления среди приведенных в таблице. Если эти поступления связаны с изменением тарифа (уровень поступлений $\lambda' \neq \lambda$), то переходим к $C(\lambda', t+2)$ и определяем наиболее подходящие поступления. В противном случае переходим к $C(\lambda, t+1)$ и находим там наиболее подходящие поступления. Таким образом, при помощи таблицы можно получить оптимальный уровень поступлений. Результаты этой процедуры представлены в табл. 11.5.

Таблица 11.5

Решение задачи о тарифах

Год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_t/R_t	0	60	60	100	100	80	80	100	100	160
Тариф	0	60	0	40	0	-20	0	20	0	60
Округленный тариф	0	70	0	50	0	-30	0	30	0	100

Теперь изменения тарифа могут увеличиваться с ростом системы (например, на 10% в год), их можно затем округлять к ближайшим значениям, скажем к 10 млн. фунтов.

11.8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Bellman R. (1957). *Dynamic programming*, Princeton University Press; Princeton, New Jersey. [Имеется русский перевод: Беллман Р. Динамическое программирование.—М.: ИЛ. 1960.]

Goch D. (1969). *Finance and accounts for managers*. Pan Books Ltd.; London.

Mitchell G. H. (1972). *Operational research: techniques and examples*, English University Press; London.

11.9. ЗАДАЧИ ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Каковы главные цели применения модели планирования деятельности предприятия? Как бы вы стали использовать такую модель, чтобы исследовать относительную важность различных данных, нужных для планирования деятельности?

2. Соотношение (1) определяет зависимость общих поступлений на предприятие от платы за установку оборудования, арендных платежей, телефонных разговоров, телетайпного и прочих видов обслуживания, причем так, как если бы эти поступления были независимыми. На практике число телефонных разговоров зависит от разных факторов, среди которых — число телефонов. Покажите, как могло бы быть модифицировано соотношение (1) для учета этих взаимосвязей.

3. Подмодель финансирования предложена, как указывалось, для национализированного предприятия. Как можно было бы модифицировать эту подмодель с целью ее использования в аналогичной ситуации в частном секторе?

4. В тексте в примере на расчет тарифной политики принималось, что каждое изменение тарифа должно увеличивать поступления по меньшей мере на 10 млн. фунтов. Как следовало бы изменить расчеты, если бы этот предел был увеличен до 40 млн. фунтов? Опишите без претензии на полноту все расчеты для вычисления нужной политики.

5. Требуется скорректировать коэффициент дохода предприятия на капитал путем увеличения тарифов и соответственно дополнительных поступлений. Считая, что эксплуатационные расходы, потребности в капитале и амортизация остаются неизменными, составьте выражение для изменения коэффициента финансирования из собственных ресурсов, получающегося при данном изменении в коэффициенте дохода на капитал. При каких условиях эти допущения будут приемлемыми?

6. Входы в подмодель финансирования не являются независимыми. Например, амортизация зависит в некоторой степени от капитальных затрат. Для некоторой компании, производящей один вид товаров, выведите математические формулы, связывающие эти входы с объемом производства. Покажите, как можно было бы решить эти уравнения, чтобы определить объем производства, необходимый для обеспечения дохода на капитал в размере 15%. Какие новые задачи возникнут в случае, если компания производит более одного вида продукции? Каков был бы подход в случае, если бы компания выпускала два вида продуктов?

7. Вы являетесь руководителем отдела перспективного планирования, ответственного за прогнозы поступлений, текущих цен и капитальных расходов своего предприятия на более чем десять последующих лет. Как бы вы подошли к этой задаче? Как могли бы вам помочь в этой работе математические модели (см. выше, задачу 6)?

УПРАВЛЕНИЕ СТРУКТУРОЙ ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА В УНИВЕРСИТЕТЕ

Д. ДЖ. БАРТОЛОМЬЮ ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: теория вероятностей
и теория марковских цепей]

12.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В одном американском университете пришлось иметь дело с задачей, типичной для многих организаций в заключительной фазе периода роста. Штат преподавателей был поделен на три категории: профессоры, доценты и ассистенты. Хотя общее число штатных мест перестало увеличиваться, численность старших должностей продолжала расти относительно более низких. Трудность состояла не в том, что персонал старших рангов нежелателен, а в том, что он выше оплачивается. В период застоя в росте ассигнований перспектива постоянного роста расходов на зарплату поставила перед администрацией следующие два вопроса. Имеется ли тенденция к продолжению роста расходов, и если да, то что может быть сделано для его прекращения или, если возможно, даже снижения расходов.

Наша цель заключается в том, чтобы рассмотреть вопрос о формулировке этой задачи в математических терминах, а затем попытаться решить задачу математическими методами. Другими словами, мы собираемся приступить к построению некоторой математической модели для системы кадров, которую затем можно использовать для решения вопросов, указанных выше. Эта модель будет построена в два этапа; сначала будет дано некоторое количественное описание системы, а затем введен ряд допущений относительно происходящих в ней изменений.

12.2. ЗАПАСЫ И ПОТОКИ

Центральное место среди количественных характеристик нашей задачи занимают числа людей в каждом классе на данный момент времени — *запасы*. Будем применять обозначение $n_i(T)$ ($i=1, 2, \dots, k$) для записи числа людей в классе i в момент времени T (на данном

¹⁾ D. J. Bartholomew, Department of Statistics, London School of Economics and Political Sciences.

этапе нет нужды предполагать, что классы ранжированы по старшинству). Объемы запасов могут меняться в любое время, однако в данном случае наибольшее число изменений происходит в конце академического года. Сообразно этому будем аппроксимировать поведение системы, допуская, что интервал между изменениями составляет один год. Таким образом, T выражается в годах и является целым числом.

Размеры запасов изменяются из-за наличия потоков, направленных как в систему, так и из системы (набор и увольнение), а также за счет внутренних перемещений (по большей части за счет перехода сотрудников в класс с повышенной зарплатой). Предположим, что из запаса $n_i(T)$ число людей $n_{ij}(T)$ перемещается в класс j ко времени $T+1$ и что $n_{i, k+1}(T)$ человек покидают университет. Тогда запас в классе i в момент $T+1$ состоит из оставшихся со времени T плюс вновь прибывшие; последние обозначаются через $n_{ji}(T+1)$. В результате соотношение между запасами и потоками записывается следующим образом:

$$n_j(T+1) = n_j(T) + n_{0j}(T+1) + \sum_{i=1}^k n_{ij}(T) - n_{j, k+1}(T) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k n_{ji}(T) = \sum_{i=1}^k n_{ij}(T) + n_{0j}(T+1), \quad (j=1, 2, \dots, k), \quad (1)$$

если определить

$$n_{jj}(T) = n_j(T) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k n_{ji}(T) - n_{j, k+1}(T)$$

как число оставшихся в классе j .

Эти соотношения сами по себе дают весьма мало сведений. Их роль заключается в том, чтобы выявить основные ограничения, в которых действует система. Вместе с тем они помогают обратить внимание на вопросы, которые необходимо конкретизировать для завершения построения модели. Потоки вызывают изменения в запасах, и потому следует приступить к выработке допущений относительно того, как происходят перемещения. Если бы имелись какие-либо средства прогнозирования потоков, то можно было бы просто вывести размеры запасов на год $T+1$ из размеров запасов на год T и т. д., продвигаясь вперед, насколько потребуется.

12.3. ДОПУЩЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОТОКОВ

При построении модели ставится цель по возможности отразить характеристики реальной системы, которую эта модель представляет. На данном этапе необходимо, следовательно, обратиться к

данным о поведении рассматриваемой системы, чтобы изучить возможность введения оправданных допущений. Основой всех научных прогнозов является установление закономерностей, имевших место в прошлом, дополненное допущением о том, что эти закономерности в будущем сохраняются. Дальнейшее продвижение в решении задачи возможно лишь после статистического исследования данных по запасам и потокам за прошлые годы (позднее это утверждение видоизменится).

Рассмотрим в первую очередь потоки, характеризующие повышения в должности. Они управляются некоторой совокупностью факторов, которые варьируются от одного вида найма к другому. Иногда количество повышений прямо связано с числом образующихся вакансий. В других случаях повышения происходят почти автоматически по достижении определенного уровня квалификации. Применительно к университету, который упоминался в начале главы, последняя из указанных возможностей ближе к действительности. Возьмем ее за основу при установлении соотношения между потоками и запасами, порождающими эти потоки. Это соотношение оказывается простой пропорциональной зависимостью, т. е. отношения $n_{ij}(T)/n_i(T)$ ($i=1, 2, \dots, k+1$), если отвлечься от статистических колебаний, суть константы. К такой пропорциональной зависимости мы обычно и приходим на практике, даже в тех случаях, когда функционирование системы наводит на мысль о том, что она могла бы быть и другой. Впрочем, это обстоятельство всегда требует практической проверки; могут быть выдвинуты и другие допущения, если на то имеются достаточные причины.

Теперь можно было бы приступить к прогнозированию размеров запасов, исходя из пропорциональности между $n_{ij}(T)$ и $n_i(T)$ и используя оценку коэффициента пропорциональности, выведенную из наших данных. Выбрав такой путь, мы должны рассматривать модель как детерминированную. Это могло бы, конечно, оказаться приемлемым для достижения непосредственных целей, поставленных в данной главе, однако подобный подход не соответствовал бы действительности и ввел бы в заблуждение при использовании модели для слишком отдаленных периодов. Хотя отношения $n_{ij}(T)/n_i(T)$ могут не зависеть от T систематическим образом, тем не менее они, конечно же, будут меняться. Эти изменения могут быть весьма значительными при малых $n_i(T)$, поскольку, например, уход из системы на уровне отдельных лиц становится в высшей степени непредсказуемым событием. Реалистическая модель, следовательно, должна включать в себя не только регулярные явления, наблюдаемые в коллективе, но и неопределенности поведения индивидуумов. Теория вероятностей представляет собой ветвь математики, которая дает нам возможность количественно оценивать неопределенность, и на этой основе мы будем вводить в модель элемент вероятности (или стохастичности). Допустим, что перемещения происходят независимо

и что индивидуум в классе i характеризуется вероятностью p_{ij} перехода в класс j в течение года, начиная с данного. Пусть вероятность его ухода составляет w_i , тогда, очевидно,

$$\sum_{j=1}^k p_{ij} + w_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (2)$$

поскольку индивидуум должен оставаться в своем классе, переместиться в другой класс или выбыть совсем. При этом допущении число лиц, переходящих из класса i в класс j за год, будет случайной величиной с биномиальным распределением при заданном начальном запасе $n_i(T)$. Тогда *ожидаемый* поток будет равен $n_i(T) p_{ij}$, что соответствует допущению эмпирического характера относительно того, что потоки пропорциональны запасам.

Оставшийся без рассмотрения вопрос относится к набору. Набор удобнее рассмотреть с двух позиций. Первая — общее число лиц, набираемых в систему, вторая — способ распределения этих лиц по классам. В организации, общее число сотрудников которой фиксировано, как в примере, приведенном в начале этой главы, общее число вновь нанимаемых должно быть равно общему числу выбывающих, т. е.

$$R(T+1) = \sum_{i=1}^k n_{i,k+1}(T). \quad (3)$$

Распределение нанимаемых лиц по классам обычно вполне фиксировано, поскольку оно определяется потребностями или политикой организации. Тогда допустим, что доля r_i от общего числа нанимаемых зарезервирована для класса i ($i=1, 2, \dots, k$), причем имеем

$$\sum_{i=1}^k r_i = 1.$$

Собирая эти допущения вместе, получаем, что наша модель в итоге характеризуется:

- 1) матрицей вероятностей переходов, управляющей перемещениями в системе, эту матрицу обозначим через $P = \{p_{ij}\}$;
- 2) вектором вероятностей ухода $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)$, связанным с p_{ij} уравнением (2);
- 3) вектором $r = (r_1, r_2, \dots, r_k)$, определяющим распределение нанимаемых по классам;
- 4) ограничением

$$\sum_{i=1}^k r_i = 1.$$

12.4. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

В соответствии с нашей моделью запасы следующего года суть случайные величины, и потому их значения не могут быть предсказаны точно. В этих условиях мы обычно используем *ожидаемые величины* случайной переменной в качестве прогноза (следовало бы снабдить такое предсказание стандартной ошибкой, с помощью чего и задается стохастический характер модели, однако за недостатком места мы не будем развивать здесь эту идею).

Перейдем к математическим ожиданиям в обеих частях уравнения (1) для запасов в год T . Мы уже отметили, что

$$\bar{n}_{ij}(T) = n_i(T) p_{ij},$$

где черта над n означает математическое ожидание. Набор в класс j , $n_{0j}(T+1)$ можно записать как $R(T+1)r_j$, так что необходимо найти математическое ожидание для $R(T+1)$. Имеем

$$\bar{n}_{i, k+1}(T) = n_i(T) w_i$$

и из (3)

$$\bar{R}(T+1) = \sum_{i=1}^k n_i(T) w_i.$$

Теперь, следовательно, с подстановкой в (1) получим

$$\bar{n}_j(T+1) = \sum_{i=1}^k n_i(T) p_{ij} + r_j \sum_{i=1}^k n_i(T) w_i, \quad (4)$$

$$(j = 1, 2, \dots, k).$$

Эти уравнения могут быть кратко записаны в матричной форме, например, как

$$\bar{\mathbf{n}}(T+1) = \mathbf{n}(T) \{\mathbf{P} + \mathbf{w}'\mathbf{r}\} = \mathbf{n}(T) \mathbf{Q}. \quad (5)$$

Таким образом, если параметры модели известны, то запас следующего года (т. е. $T+1$) может быть найден по запасу текущего года (год T) путем простого перемножения матриц. Прогноз на следующий год; $\bar{\mathbf{n}}(T+1)$, может быть затем использован в качестве основания для прогноза еще на один год вперед, если взять

$$\bar{\mathbf{n}}(T+2) = \bar{\mathbf{n}}(T+1) \mathbf{Q} \quad (6)$$

(мы не можем писать $\mathbf{n}(T+1)$ в правой части, так как эта величина не известна в год T ; поэтому используем *ожидаемую* величину).

Матрица $\mathbf{Q}$ относится к особому классу матриц, называемых стохастическими, и представляет все возможные переходы от одного класса к другому. Она имеет неотрицательные элементы, и суммы всех элементов каждой из строк равны единице (см. задачу 1). По-

добные матрицы играют основную роль в теории марковских цепей, и мы можем применить эту теорию для ответа на вопросы о поведении модели.

12.5. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Первый вопрос, который был поставлен относительно структуры преподавательского состава университета, состоял в том, имеется ли тенденция к продолжению роста. На этот вопрос можно ответить, используя запись (6). Допустим, что начальные запасы и величины параметров таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(0) &= (300, 100, 50) \\ \mathbf{w} &= (0,2; 0,1; 0,2) \quad \text{и} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r} &= (0,75; 0,25; 0) \end{aligned}$$

где классы перечислены в порядке увеличения уровня квалификации. Вид матрицы $\mathbf{P}$, представленной выше, вполне типичен. Нули ниже диагонали означают, что движение из более высоких классов в более низкие отсутствует; происходят разве лишь переводы в более высокие классы. Вектор ухода говорит о высоком коэффициенте потерь наверху и внизу; наверху — это смерть и уход в отставку, случающиеся чаще, чем в двух нижних классах. Наибольший уровень приема на работу имеет место в нижнем классе.

Читателю следует построить матрицу $\mathbf{Q}$ и получить структуру классов на 5 или 10 лет вперед (см. задачу 2). Выкладки покажут постоянно ухудшающееся состояние, поскольку система приобретает признаки перегруженности высоких классов. Такое поведение системы зависит, разумеется, от структуры $\mathbf{P}$, но был взят весьма типичный случай, который, правда, соответствует большим возможностям для повышения, чем это имеет место во многих организациях. Вывод должен быть таким, что политики набора и повышений, представленные как $\mathbf{r}$ и $\mathbf{P}$, несовместимы с сохранением структуры вида $\mathbf{n}(0)$. (Читатель заметит, что элементы вектора предсказанных численностей классов в общем случае не будут целыми; это объясняется тем, что здесь оперируют с математическими ожиданиями. Математику известно, что математические ожидания целых чисел, являющихся случайными переменными, сами не обязательно целые, однако при представлении результатов администрации разговор о дробных значениях числа людей иногда может подорвать доверие к методу!).

Имея прогноз неблагоприятного свойства, необходимо знать меру того, насколько все может стать неблагоприятным. В математических терминах — каково предельное состояние $\mathbf{n}(T)$ при $T \rightarrow \infty$? После T лет будет

$$\bar{\mathbf{n}}(T) = \mathbf{n}(0) \mathbf{Q}^T. \quad (7)$$

В теории марковских цепей показывается при весьма общих условиях, которые будут выполняться в любой разумной постановке задачи о кадрах, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^\infty, \quad (8)$$

где $\mathbf{Q}^\infty$ — стохастическая матрица с одинаковыми строками. Если через $\mathbf{q}$ обозначить общую строку этой матрицы, то устремляя T к бесконечности в (7), получаем

$$\mathbf{n}(\infty) = \mathbf{n}(0) \mathbf{Q}^\infty = N \mathbf{q}, \quad (9)$$

где N — общий (фиксированный) размер системы. Следовательно, имеется предельная структура, которая *не зависит от начальной структуры*. Простейший способ подсчета $\mathbf{q}$ связан с тем, что предельная структура должна удовлетворять условию

$$\mathbf{n}(\infty) = \mathbf{n}(\infty) \mathbf{Q} \text{ или } \mathbf{q} = \mathbf{q} \mathbf{Q}. \quad (10)$$

Эта система уравнений является вырожденной, однако если мы опустим одно из уравнений и используем тот факт, что

$$\sum_{i=1}^k n_j(\infty) = N \left(\sum q_i = 1 \right),$$

то уравнения могут быть легко решены. Читателю предлагается выполнить соответствующие выкладки и сравнить результаты с последовательностью векторов запасов (см. задачу (3)).

12.6. УПРАВЛЕНИЕ: СОХРАНЯЕМОСТЬ СТРУКТУР

С обнаружением неизбежности роста численности более высоких классов с известной скоростью следующей задачей становится задача управления ситуацией. Пусть первой ограниченной целью наших усилий будет удержание системы на том уровне, на котором она находится. Если $\mathbf{n}$ — существующая структура, которую хотелось бы сохранить, то она, очевидно, должна удовлетворять условию

$$\mathbf{n} = \mathbf{n} \mathbf{Q}. \quad (11)$$

В математических терминах задача управления сводится к нахождению матрицы $\mathbf{Q}$, такой, что соотношение (11) удовлетворяется. В то же время $\mathbf{Q}$ является некоторой функцией от $\mathbf{P}$, $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$, а эти величины не все поддаются управлению. Естественные потери, например, не находясь под непосредственным контролем администрации, а увольнение является таким моментом, который большинство работодателей предпочитает избегать. Перевод в более высокий класс находится под непосредственным контролем администрации, однако нехватка подходящих кандидатур на повышение или политика, направленная на заполнение вакансий путем повышений,

могут создать для повышений такую ситуацию, когда они будут ограничены тесными рамками. Вектор приема также является объектом непосредственного управления, однако и здесь снова могут возникнуть ограничения из-за возможности приглашать квалифицированных кандидатов или из-за ограничений, связанных с проводимой политикой.

Математическая задача, с которой мы столкнулись, состоит, таким образом, в поиске матрицы Q , удовлетворяющей условию (11) и учитывающей все те ограничения, которые налагаются практически реализуемой политикой на работу системы. Разумеется, может оказаться вообще невозможным подобрать подходящую политику.

Для иллюстрации решения сделаем довольно простое допущение, которое тем не менее часто соответствует действительности. Допустим, что P и, стало быть, w вообще не могут быть изменены. Все управление, следовательно, должно быть реализовано через вектор r , который, как мы предполагаем, может изменяться по нашему желанию при условии

$$r \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^k r_i = 1. \quad (12)$$

(Неравенство, связывающее два вектора, должно пониматься как действующее в каждой паре элементов.) В этом случае поставленная задача может быть решена отысканием такого вектора r , который удовлетворяет условиям (11) и (12). Заметив, что $Q = P + w'r$, легко показать, что

$$r = n(I - P)(nw')^{-1}, \quad (13)$$

где I — единичная матрица; отметим, что nw' — скаляр. Читатель может убедиться в том, что элементы вектора r , получаемого по (13), в сумме дают единицу. Вместе с тем эти элементы будут все неотрицательны, если

$$n \geq nP. \quad (14)$$

Таким образом можно легко проверить, обладает ли определенная структура способностью сохраняться при управлении наймом.

Такого рода арифметическая проверка годится для достижения непосредственной цели, но она непригодна для того, чтобы прийти к пониманию вопроса о типе структур, которые могут сохраняться. Поэтому мы продолжим поиск характеристик множества структур, которые удовлетворяют условию (14).

Поскольку размеры всей системы фиксированы, будем работать в терминах пропорций каждого из классов и определим их с помощью $x = nN^{-1}$. Таким образом, будем интересоваться множеством таких x , которые удовлетворяют условию

$$x \geq xP. \quad (15)$$

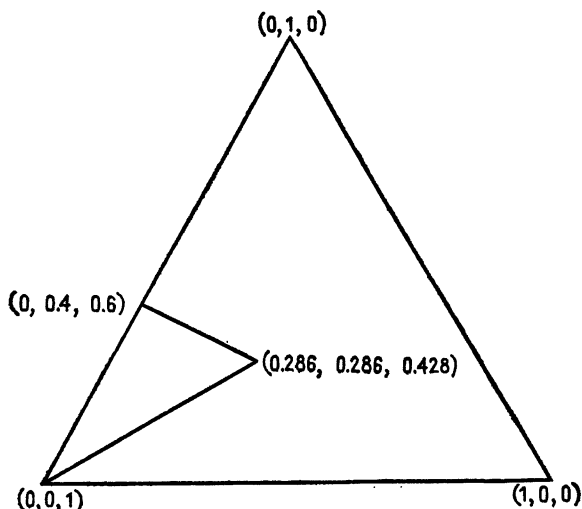


Рис. 12.1. Область, содержащая сохраняющиеся структуры для управления системой путем набора при $k=3$ и при

$$P \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

При $k=3$ можно сделать задачу геометрически наглядной. Вектор x может быть представлен как точка в трехмерном евклидовом пространстве. Каждая такая точка должна лежать на плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ и находиться в положительном октанте. Тогда множество всех возможных структур может быть представлено множеством всех точек равностороннего треугольника с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$, показанного на рис. 12.1.

Неравенство (15) определяет некоторую область в этом треугольнике, содержащую все структуры, которые могут сохраняться. Если найти границу этой области, то окажется возможным непосредственно увидеть, какого рода структуры сохраняются. Это достигается алгебраически путем представления всякого x , удовлетворяющего условию (15), в виде линейной комбинации (линейной функции с положительными коэффициентами, дающими в сумме единицу) фиксированного множества вершин. В результате получается, что область сохраняемости является выпуклой оболочкой, определяемой этими вершинами.

Будем рассуждать в терминах произвольного k , однако сохраняем геометрическую терминологию, использованную для $k=3$.

Из (13) для x получаем

$$x = xw'r(I - P)^{-1}. \quad (16)$$

Умножая обе части соотношения (16) на вектор-столбец из единиц, записываемый как $\mathbf{I}'$, находим, что

$$\mathbf{I} = \mathbf{x}\mathbf{w}'\mathbf{r}(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}\mathbf{I}' = \mathbf{x}\mathbf{w}'\mathbf{r}\mathbf{d}', \quad (17)$$

где элементы $\mathbf{d}$ суть суммы элементов строк матрицы $(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}$. Тогда, производя подстановку (17) в (16), получаем

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}\mathbf{d}')^{-1}\mathbf{r}(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} = \sum_{i=1}^k r_i \mathbf{e}_i (\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} \Big/ \sum_{i=1}^k r_i d_i, \quad (18)$$

где $\mathbf{e}_i$ — вектор, i -я координата которого 1, а остальные координаты — нули.

Пусть

$$a_i = r_i d_i \Big/ \sum_{i=1}^k r_i d_i,$$

тогда $\mathbf{x}$ можно записать как

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k a_i \{\mathbf{e}_i (\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} d_i^{-1}\}. \quad (19)$$

Коэффициенты a_i неотрицательны, и их сумма равна единице. Следовательно, любая такая точка $\mathbf{x}$ лежит в выпуклой области с вершинами, имеющими координаты

$$\mathbf{e}_i (\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} d_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

и каждая такая точка соответствует своему $\mathbf{g}$.

Чтобы проиллюстрировать выкладки, положим

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Для такой матрицы $\mathbf{P}$ получаем

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2,5 & 3,75 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Производя деление каждой строки на сумму элементов этой строки, получаем вершины области, содержащей сохраняющиеся структуры

$$(0; 0; 1), (0; 0,4; 0,6) \text{ и } (0,286; 0,286; 0,428).$$

Эти точки нанесены на рисунке, и область, содержащая сохраняющиеся структуры, есть треугольник, содержащий только структуры с перегрузкой в высших классах. Действительно, наименее перегруженная структура соответствует вершине $(0,286; 0,286; 0,428)$,

для которой высший класс по объему вдвое превышает нижние классы. Это типично для структуры, определяемой треугольной матрицей $\mathbf{P}$ с ненулевыми элементами выше диагонали и с большими элементами на главной диагонали. Читатель может завершить выкладки по численному примеру в § 12.5 (см. задачу 4).

Аналогичный анализ можно провести для случая, когда управлять можно только долей повышений. В данном случае мы фиксируем $\mathbf{g}$ и $\mathbf{w}$ и изучаем влияние изменения элементов $\mathbf{P}$ при ограничении вида $d_i = 1 - w_i$ для всех i . В случае матрицы $\mathbf{P}$ общего вида задача усложняется тем, что имеется бесконечно много матриц $\mathbf{P}$, удовлетворяющих условию (11). Однако если рассматривается некоторая простая иерархия, в которой повышения проводятся только в следующий, более высокий класс, то $\mathbf{P}$ имеет ненулевые элементы только на главной диагонали и на диагонали над нею. В этом случае существует единственное решение уравнения (11), и множество $\mathbf{p}$, которому соответствует некоторая матрица $\mathbf{P}$ с неотрицательными элементами, представляет область репродуктивности. В отличие от области, определяемой управлением набором, оказывается, что эта область включает структуры с перегруженными более низкими классами. Полученный результат наводит на мысль, что сохраняемость структуры, перегруженной нижними классами, может быть более успешно реализована путем управления повышением, а не набором.

12.7. УПРАВЛЕНИЕ: ДОСТИЖИМОСТЬ

Проведенные выше исследования позволяют достичь ясности относительно тех условий, при которых данная структура сохраняется. Знание этих условий не дает ответа на вопрос о том, как достичь требуемой структуры, поскольку говорит лишь о том, как остаться с той структурой, которую мы сейчас имеем. Задача о достижимости состоит в том, чтобы ответить на вопрос, как следует осуществлять переход от данной структуры, скажем $\mathbf{x}(0)$, к нужной структуре $\mathbf{x}^*$. Теория достижимости должна показать, может ли быть вообще достигнута структура $\mathbf{x}^*$, и если да, то каким путем. Полное решение этих трудных вопросов требует привлечения аппарата математического программирования и обсуждения того, что представляет собой оптимальное решение задачи. Тем не менее некоторые важные результаты можно получить весьма простым способом.

Прежде всего заметим, что в области сохраняемости может быть достигнута любая структура, или она может быть приближена сколь угодно точно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай управления набором. В § 12.5 было показано, что при постоянной матрице $\mathbf{Q}$ структура будет со временем сходить к предельной структуре, удовлетворяющей условию

$$\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}(\infty) \mathbf{Q} = \mathbf{x}(\infty) \{\mathbf{P} + \mathbf{w}'\mathbf{r}\}. \quad (20)$$

Следовательно, если желательно свести структуру к виду x^* , то следует делать это путем такого выбора вектора g , чтобы удовлетворить равенству

$$x^* = x^*P + x^*w'g,$$

т. е.

$$g = x^*(I - P)(x^*w')^{-1}. \quad (21)$$

Указанный вектор g определенно имеет неотрицательные элементы, если x^* лежит в области сохраняемости, согласно (15).

Разумеется, управление может быть осуществлено последовательно в том смысле, что g можно менять с каждым шагом. Следует ожидать, что такое управление даст лучшие результаты, чем фиксированная стратегия (21). Какова возможная формулировка задачи о поиске лучшей стратегии? Требуется найти последовательность векторов набора $\{g(T)\}$, таких, что изменение структуры от $x(0)$ к x^* происходит некоторым оптимальным образом. «Оптимальность» может пониматься в смысле «так быстро, как это возможно», «настолько дешево, насколько возможно» или «настолько плавно, насколько это возможно».

На практике администрация не располагает неограниченным запасом времени для достижения цели, как этого требует подобная формулировка. Можно, следовательно, поставить задачу о наилучшем приближении к x^* за данное время. Один путь к осуществлению этой идеи заключается в переводе системы в состояние, возможно более близкое к x^* , за один шаг. Следующий шаг тогда может быть сделан с сохранением той же цели и т. д., пока не будет исчерпано все время. Получение решения в таком случае определяется возможностью достижения соглашения о мере «расстояния». Хорошо изученной функцией, определяющей расстояние в достаточно общем виде, является следующая функция:

$$D = \sum_{i=1}^k W_i |x_i^* - x_i|^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad W_i > 0 \text{ для всех } i. \quad (22)$$

Выбор коэффициентов W_i позволяет придать некоторым классам больший вес по сравнению с другими, а показатель α определяет степень важности, придаваемой большим отклонениям в каждом из классов. Теперь задача состоит в том, чтобы найти вектор g , который переводит систему из $x(0)$ в точку $x(1)$, такую, что расстояние от $x(1)$ до x^* , измеренное согласно определению (22), минимально. Это — задача математического программирования, и, как оказывается, она имеет простое и понятное решение. Читателю предлагается попытаться решить задачу с $k=2$ и $k=3$ и при $\alpha=1$ и $\alpha=2$, когда она может быть представлена геометрически (см. задачу 7).

12.8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Модель системы кадров, которая составила основу данного обсуждения, разумеется, является слишком упрощенной. Составляющие потерь, например, не могут всегда считаться постоянными в пределах одного класса. Все составляющие обнаруживают склонность к изменениям со временем, и, при некоторых условиях достигается возможность планирования этих изменений. Одна из наиболее привлекательных особенностей марковской модели заключается в том, что она может быть легко настроена на охват обобщений такого рода без изменений ее главной структуры. Следовательно, продемонстрированный в этой главе подход относится к числу таких подходов, которые остаются пригодными при значительно более общих условиях по сравнению с частными случаями, которые здесь подробно обсуждались.

Выше мы установили различие между использованием модели для прогнозирования и для управления. В первом случае вводимые допущения должны отображать — настолько точно, насколько это возможно, — реальное поведение системы в недавнем прошлом. При использовании модели для управления допущения распадаются на две группы. Те допущения, которые относятся к неуправляемым аспектам системы, должны, как и в случае прогнозирования, отражать действительность. Те же, которые относятся к переменным управления, имеют другой характер: они касаются возможностей администрации и, таким образом, должны основываться на сведениях об организации системы.

12.9. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Bartholomew D. J. (1973). *Stochastic models for social processes*, 2nd, edn. Wiley; New York.

12.10. ЗАДАЧИ ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Показать, что у матрицы Q , определяемой формулой (5), суммы элементов каждой строки равны единице, как утверждалось в тексте.

2. Вычислить структуру преподавательского состава системы с параметрами, которые даны в § 12.5, на 5 и 10 лет вперед и таким образом проверить утверждения, сделанные в тексте.

3. Получить предельную структуру преподавательского состава для предыдущей задачи и сравнить ее с прогнозами, выдвинутыми на 5 и 10 лет вперед.

4. Найти вершины области, содержащей сохраняющиеся структуры, для примера из § 12.5; начертить область и сравнить ее с примером, изображенным на рис. 12.1.

5. Попытаться определить область, содержащую сохраняющиеся структуры, для управления путем повышений при $k=3$ в случае, когда повышения проводятся в следующий более высокий класс и отсутствуют понижения. Таким образом, предлагается обосновать замечания, сделанные в конце § 12.6.

6. Попытаться выразить критерий оптимальности, предложенный в § 12.7 для управления набором («так быстро, как это возможно», «настолько дешево, насколько это возможно», «настолько плавно, насколько это возможно»), в математической форме.

7. Решить «одноходовую» задачу § 12.7, используя функцию расстояния (22) с $k=2,3$ и $\alpha=1,2$ (рекомендация: рассмотрите задачу геометрически).

8. Существует очевидная аналогия между запасами и потоками нанимаемых фирмой и динамикой народонаселения. Например, рождаемость и иммиграция играют роль набора, а смертность и эмиграция соответствуют потерям. Используйте эту аналогию дальше и рассмотрите вопрос о том, может ли модель, описанная в этой главе (или некоторая модификация ее), оказаться полезной для изучения планирования и управления народонаселением.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРАХОВАНИЯ АВТОМОБИЛЕЙ

Р. Э. БЕРД ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: теория вероятностей
и статистика]

13.1. ВВЕДЕНИЕ

Уже более 200 лет эксперты-статистики страховых предприятий используют математические модели для научного управления операциями страхования жизни и образованием пенсионных фондов. В последние годы наблюдается заметный интерес экспертов к другим областям страхования, и недавно состоявшийся симпозиум на тему «Математика в страховом деле» (Берд, 1972) осветил представительную подборку развивающихся в настоящее время приложений. В данной главе разбирается одна из таких задач, поддающаяся математическому моделированию.

Страхование представляет собой некоторую операцию распределения внутри экономической структуры, и его фундаментальные принципы тесно связаны с социальными взглядами и правовыми основами. Оно требует прогнозирования на довольно длительные сроки, а соответствующие модели нуждаются в постоянной корректировке с учетом изменений в деловой сфере. Действительно, ценность подобных моделей состоит в формулировке общих тенденций в деловой политике, которая будет определяться администрацией на основе собственных представлений о внешних изменениях, относящихся к принятым в модели допущениям.

Настоящая глава посвящена одному из аспектов финансирования и управления в страховании автомобилей. Рассматривается лишь случай компании с ограниченной ответственностью, ведущей дела по страхованию автомобилей в Великобритании. Ограничение на структуру организации в основном соответствует тому, что операции со страховым объединением Ллойд не учитываются, однако, поскольку основные принципы являются сходными, это ограничение относительно несущественно. С другой стороны, тот факт, что рассматриваются лишь операции по страхованию автомобилей в Вели-

¹⁾ R. E. Beard, Department of Trade and Industry and the Department of Mathematics, University of Essex,

кобритании, означает отбрасывание многих важных обобщений, связанных с другими видами страхования. Кроме того, внимание будет направлено в основном на общий характер операций, а не на детали, которыми отличаются друг от друга отдельные случаи страхования. Другими словами, будет рассматриваться, главным образом, макро-, а не микроструктура. Это означает, что не будет затронут весьма обширный круг вопросов, касающихся вычисления страховых премий.

13.2. КРИТЕРИЙ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ БАНКРОТСТВА

Наиболее простая модель операции страхования сводится к начальному фонду, который увеличивается за счет принятия платежей и уменьшается в результате выплат. Если U_0 — начальный фонд, а P_t и C_t — взносы, поступившие в фонд и выплаты из него за интервал времени t , то размеры фонда в конце этого интервала составят

$$U_t = U_0 + P_t - C_t. \quad (1)$$

Если требования по выплатам за этот промежуток времени превысят начальный фонд и поступления, то величина U_t будет отрицательной, т. е. ресурсы будут исчерпаны, а компания окажется несостоятельным должником, т. е. банкротом. Поведение величины U_t в этой связи является центральным вопросом, и бесспорно, что для управления финансами, которое призвано обеспечить непрерывную деятельность компании, должно представлять интерес вероятное поведение величины U_t в будущем. Ясно также и то, что «статические» наблюдения за величиной U_t , как это видно на примере с балансом, имеют ограниченную ценность.

13.3. СЛОЖНЫЙ ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Для исследования изменений U_t необходимо конкретизировать модель, в частности более точно определить величину P_t и C_t . Рассмотрим с этой целью совокупность N идентичных страховых договоров, действующих в течение года, и допустим, что ожидаемое число требований по каждому договору в единицу времени dt составляет μdt ; тогда общее число ожидаемых требований составит $\mu N = n$. Примем, что а) требования в двух непересекающихся интервалах времени являются независимыми; б) число требований за интервал времени (t_1, t_2) зависит только от его продолжительности; в) повторные требования на малом промежутке времени исключены. Тогда процесс поступления требований будет пуассоновским, т. е. вероятность поступления k требований за год равна

$$P_k = \frac{e^{-n} n^k}{k!}. \quad (2)$$

Если $S(x)$ — функция распределения выплат по одному требованию, то математическое ожидание этой величины есть

$$\int_0^{\infty} x dS(x) = m.$$

Для «справедливого» договора ожидания приравниваются, так что можно записать (если π обозначает величину взноса) следующее равенство:

$$\pi = \mu m, \quad (3)$$

а общие поступления за год должны составить

$$\mu \times N \times m = n \times m. \quad (4)$$

Если теперь рассмотреть случай предъявления k требований, то можно найти функцию распределения общей суммы выплат по этим требованиям путем составления k -й свертки $S(x)$ (Берд, Пентикайнен и Песонен, 1969), т. е.

$$S^{k*}(x) = \int_0^{\infty} S^{(k-1)*}(x-z) dS(z). \quad (5)$$

Умножая эти величины на соответствующие вероятности и суммируя по k , получим функцию распределения общей суммы выплат

$$F(x, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-n} n^k}{k!} S^{k*}(x). \quad (6)$$

Теперь записываем выражение (1) в виде

$$U_1 = U_0 + nm - x,$$

где x — случайная переменная, определяемая равенством (6).

Вероятность того, что $U_1 \geq 0$, т. е. что компания не разорится на конец года, таким образом, есть вероятность того, что $x \leq U_0 + nm$, т. е. $F(U_0 + nm, n)$. Если желаемый уровень вероятности отсутствия банкротства фиксирован и равен $1 - \varepsilon$, то имеем уравнение

$$1 - \varepsilon = \text{Pr} \{x \leq U_0 + nm\} = \int_0^{U_0 + nm} dF(x, n) = F(U_0 + nm, n). \quad (7)$$

13.4. ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ МОДЕЛИ

Прежде чем продолжить, сделаем некоторые замечания. Следует учесть, что предположение о том, что последовательность поступлений требований в течение года не важна, является нереалистичным, поскольку предъявление 1-го января требования о произведении выплат кредиторам могло бы привести к немедленному банкрот-

ству. Решение этой проблемы, т. е. обеспечение постоянного превышения собранных страховых взносов над требованиями о выплатах, было и остается центральной задачей в теоретическом изучении страхового дела в течение многих лет, и эта задача выходит за рамки данной частной модели. Анализ указанной задачи можно найти, например, в работе Берд, Пентикайнен и Песонен (1969), однако основные результаты настоящей главы справедливы, когда t не является малым, а ε мало. Полезно также заметить, что в нашей модели «непрерывной проверки» величина $(P_t - C_t)$ (уравнение (1)), классифицируемая обычно как чистый доход, будет случайной переменной с нулевым средним значением. Для заданного значения U_0 существует некоторая положительная вероятность того, что чистый доход окажется ниже $-U_0$, так что вероятность банкротства при $t \rightarrow \infty$ равна единице. Чтобы придать вероятности банкротства значение, меньшее 1, прибегают к дополнительному обложению клиента на величину λ .

Следовало бы также заметить, что, даже если $S(x)$ непрерывна при $x=0$, имеется скачок вероятности при $x=0$ (поскольку $p_0 = e^{-n}$), который должен быть включен в функцию распределения $F(x, n)$.

Предполагается также, что μ — функция интенсивности требований, — остается постоянной на протяжении года. Вообще говоря, это — нереальное предположение, и в обобщенной модели вводятся «флуктуирующие исходные вероятности». Если предположить, что μ распределена как неполная гамма-функция, то можно показать, что вместо пуассоновского распределения для числа требований имеет место отрицательное биномиальное распределение, называемое обычно процессом Пойа (Хайт, 1967). Основным результатом при этом будет состоять в увеличении суммы требуемого начального капитала U_0 .

Возвращаясь теперь к уравнению (7), заметим, что если взносы лишь равны ожидаемым выплатам, то компания не будет располагать ресурсами для нормальной организации обслуживания капитала U_0 . Таким образом, кроме запаса капитала, предохраняющего от банкротства, определенного в исходной модели, следует предусмотреть также некоторое дополнительное обложение, чтобы покрыть расходы на обслуживание. Это приводит к уравнению

$$1 - \varepsilon = F\{U_0 + nm(1 + \lambda), n\}. \quad (8)$$

В принципе при заданном ε и функции распределения $F(\cdot)$ величина λ может быть найдена из уравнения (8). Однако учет реальных условий деятельности приводит к необходимости фиксации более высокого уровня λ . Вообще говоря, это потребует дальнейшего

усложнения модели, поскольку n — ожидаемое число требований — будет частично зависеть от λ , т. е. уровень этой величины определяет позицию компании в условиях конкуренции.

13.5. ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ

Если выбранные величины ϵ и λ оказываются несовместимыми, то для компании необходимо будет рассмотреть некоторую форму перестрахования. В страховании автомобилей это обычно принимает форму страхования от превышения убытков, при которой фирма-перестрахователь соглашается выплачивать суммы по индивидуальным требованиям при превышении ими определенной величины (точка превышения) за плату, выражаемую обычно в виде процента от поступлений первой фирмы. В результате этого доходы последней снижаются, а функция выплат $F(\cdot)$ изменяется за счет освобождения от выплат сверх точки превышения.

Можно описать эту ситуацию уравнением

$$1 - \epsilon = F^M \{U_0 + nm(1 + \lambda)(1 - r), n\}, \quad (9)$$

где M означает, что распределение всех требований $F(\cdot)$ модифицировано путем сокращения распределения одного требования $S(x)$, а r — доля вкладов, идущая перестрахователю.

Теперь возникает задача определения точки превышения по договору о перестраховании, которая удовлетворяет уравнению (9). Следует заметить, что могут быть другие критерии, например максимизация доходов, или может быть введена функция полезности (см., например, Берд, Пентикайнен, Песонен, 1969, стр. 160), и, конечно, результат зависит от введенных ограничивающих допущений модели, касающихся распределения требований и постоянства μ .

13.6. ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР

Чтобы представить себе порядок тех величин, которые здесь обсуждаются, и характер возникающих статистических сложностей, строится гипотетическая модель, в которой базовые параметры соответствуют реальным практическим данным. Различные величины вводятся в модель в том порядке, в каком они появляются. Следует также заметить, что опыт каждой страховой организации индивидуален, так что обобщения, построенные на осредненных по всей отрасли цифрах, могут ввести в заблуждение.

Основным параметром модели является функция распределения одного требования, $S(x)$. Соответствующий эмпирический материал не только весьма скуден, но и запутан влиянием разнородности и инфляции. Для полных страховых полисов в Великобритании предлагаемое страхование предусматривает компенсацию по трем основным статьям: а) травмы лиц, представляющих третью сторону; б) нанесение ущерба имуществу лиц, представляющих третью сторону; в) случайные повреждения собственного автомобиля клиента. Эти три статьи компенсации существенно различаются по своему виду. Поэтому, если для целей статистической регистрации все платежи по полису, выплачиваемые по данному несчастному случаю, свести в одно требование по выплате страховой премии, то результирующее распределение будет смешанным. Еще более трудные вопросы возникают из-за того, что проходит много времени между предъявлением требований об оплате счетов по тяжелым увечьям (с весьма трудной проблемой оценки) и их удовлетворением, а сумма, выплачиваемая по страховке, отнесена к ценности денег на день выплаты, а не на время происшествия. Распределение имеет очень длинный «хвост», который лишь приблизительно можно представить кривой логарифмически нормального распределения или кривой типа Парето. Для нашего случая было принято, что эта функция может быть представлена суммой некоторого числа убывающих экспоненциальных слагаемых и что параметры соответствуют постоянной ценности денег, т. е. не принимались во внимание какие бы то ни было изменения темпа инфляции в будущем.

На практике некоторая часть требований, направляемых компаниям, не предусматривает никаких выплат (например, извещение может иметь предупредительный характер). Для полного анализа доля нуль-требований может быть принята за случайную переменную, но в данном примере подобные запросы были исключены, так что интенсивность требований μ , ожидаемое число n и функция $S(x)$ относятся к ненулевым требованиям.

Численные величины, используемые здесь, таковы:

$$1 - S(x) = 0,003e^{-0,0002x} + 0,330e^{-0,0015x} + 0,667e^{-0,0115x};$$

среднее $= 1,2547 \cdot 10^3$; $\mu_2 = 1,6659 \cdot 10^3$; $\mu_3 = 2,2024 \cdot 10^3$; $\beta_1 = 1,0492 \cdot 10^3$; $\sigma = 4,0815 \cdot 10^2$; $\mu_4 = 4,3891 \cdot 10^{13}$; $\beta_2 = 1,5816 \cdot 10^3$; коэффициент вариации $= 3,2530$.

Такой вид $S(x)$ соответствует реальным условиям, средняя величина около 125,00 фунтов соответствует требованиям, поступившим на конец 1972 г., а коэффициент вариации также типичен для практики.

Значения функции распределения для ряда выбранных значений следующие:

x , фунты	Доля требований, не превосходящих x
0	0,00000
100	0,64809
500	0,96983
1000	0,99532
2000	0,99798
5000	0,99890
10 000	0,99959
15 000	0,99985
20 000	0,99995

Эти значения дают некоторое представление о характере распределения. Следует заметить, что компоненты функции определены методом проб и ошибок с целью получить приемлемое общее представление и не относятся к различным видам страхования.

Интенсивность требований μ для ненулевых требований предполагается равной 0,125. Доля нуль-требований может быть взята около 23% (хотя эта цифра изменяется от компании к компании), что дает общую интенсивность 0,1625. Число полисов N взято равным 16 000 (довольно малое число), что порождает в среднем 2600 требований, из которых 2000 ($=n$) приводят к выплатам. Ожидаемая сумма требований составляет 250 940 фунтов и равна общей сумме страховых премий.

На следующем этапе необходимо использовать уравнение (9). Все величины, кроме точки превышения, даны; требуется найти ее значение, удовлетворяющее уравнению. Необходимые выкладки могут быть проведены, если взять ϵ фиксированным, найти значения y в уравнении $1 - \epsilon = F^M(y, n)$ для различных величин точки превышения и сравнить эти значения y с ресурсами $U_0 + nm(1 + \lambda)(1 - r)$. Это может быть проделано с удовлетворительной для данных целей точностью с использованием так называемого « N - P -метода» (Берд, Пентикайнен и Песонен, 1969, стр. 43), в котором используется разложение Эджворта для произвольной функции распределения в терминах нормального распределения и производных от него. Моменты $F^M(x, n)$ могут быть при этом просто получены из таковых для функции $S^M(x)$ по формулам

$$\mu_1 = nv_1^1$$

$$\mu_2 = nv_2^2$$

$$\mu_3 = nv_3^3$$

$$\mu_4 = nv_4^4 + 3n^2(v_2^1)^2,$$

где μ — моменты $F^M(x, n)$ относительно среднего, а v — моменты $S^M(x)$ относительно нуля.

Процедура предусматривает определение в первую очередь z , где $1 - \varepsilon = \Phi(z)$ (так, например, для $\varepsilon = 0,001$ будет $z = 3,0902$). Затем подсчитывается $z^1 = z + \frac{1}{6} \gamma_1 (z^2 - 1)$, где $\gamma_1 = \mu_3 / \sqrt{\mu_2^3}$, а значение y получается из $n\mu_1 + z^1 \sqrt{n\mu_2}$. Результаты расчета сведены в таблицу.

Точка превышения. фунты	$n\mu_1$	z^1	$n\mu_1 + z^1 \sqrt{n\mu_2}$
1000	$2,254 \cdot 10^5$	4,025	$2,692 \cdot 10^5$
2000	$2,308 \cdot 10^5$	4,123	$2,854 \cdot 10^5$
5000	$2,399 \cdot 10^5$	4,102	$3,054 \cdot 10^5$
10 000	$2,468 \cdot 10^5$	4,049	$3,197 \cdot 10^5$
15 000	$2,494 \cdot 10^5$	4,029	$3,248 \cdot 10^5$
20 000	$2,504 \cdot 10^5$	4,022	$3,267 \cdot 10^5$
∞	$2,509 \cdot 10^5$	4,018	$3,277 \cdot 10^5$

Для подсчета ожидаемого объема ресурсов взят начальный капитал U_0 в размере 50 000 фунтов и дополнительное обложение λ в размере 10% от страховых премий, тогда $nm(1 + \lambda) = 276,034$ фунта. Исходя из этого, нужно определить платежи по перестрахованию, и эти платежи берутся как ожидаемая стоимость сверхнормативных требований, увеличенная в 1/0,75 раз для обеспечения дополнительных издержек перестрахователя и увеличенная на некоторую константу (1,00 фунта на ожидаемое требование) для обеспечения дохода перестрахователя. Существует несколько возможных способов определения платежей по перестрахованию, но основную роль здесь играет рыночная цена, которая может быть получена, а описанный выше подход должен восприниматься не иначе как носящий иллюстративный характер. Последнее, что осталось определить, — конкретные суммы, которые могли бы фигурировать в роли платы за обслуживание в этой модели с капиталом 50 000 фунтов. Операции по страхованию создают фонды, избыток которых над необходимым кассовым резервом, предусматриваемым балансами агентств, можно использовать для инвестирования. Если предположить, что прибыль от инвестиций на фонды, ассигнованные для держателей страховых полисов, т. е. на резервы премий и выплаты, учтена при исчислении страховых премий, то этот капитал будет приносить процентный доход. Однако субсидирующие страховое предприятие круги будут заинтересованы в доходах больших, чем достижимые при чистом инвестировании, так что этому должно уделяться определенное

внимание при управлении финансированием. Для данной модели была принята величина дохода 6% на капитал как реальная цифра.

Ожидаемые ресурсы на конец года могут быть теперь определены следующим образом:

Точка превышения, фунты	Капитал+взносы+обложения ($U_0 + P(1+\lambda)$), фунты	Платежи по перестрахованию (P_r), фунты	Ресурсы ($U_0 + (1+\lambda)P - P_r - 0,06 U_0$), фунты	F для $\varepsilon=0,001$, фунты
1 000	326 034	36 000	$2,870 \cdot 10^5$	$2,692 \cdot 10^5$
2 000	326 034	28 840	$2,942 \cdot 10^5$	$2,854 \cdot 10^5$
5 000	326 034	16 660	$3,064 \cdot 10^5$	$3,054 \cdot 10^5$
10 000	326 034	7 460	$3,156 \cdot 10^5$	$3,197 \cdot 10^5$
15 000	326 034	4 000	$3,190 \cdot 10^5$	$3,248 \cdot 10^5$
20 000	326 034	2 660	$3,204 \cdot 10^5$	$3,267 \cdot 10^5$
∞	326 034	0	$3,230 \cdot 10^5$	$3,277 \cdot 10^5$

В последнем столбце помещены цифры, найденные ранее для уровня вероятности банкротства 0,001. Сравнивая их с цифрами предпоследнего столбца, мы видим, что без перестрахования (точка превышения $=\infty$) ресурсы падают ниже величины F , указывая, что вероятность банкротства больше 0,001. С перестрахованием, фиксированным на точке превышения в 1000 фунтов, ресурсы превышают величину F , показывая, что точка превышения взята на уровне, более низком, чем требуется. Необходимое равновесие достигается при точке превышения где-то между 5000 и 10 000 фунтами.

13.7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Beard R. E. (1972). Mathematics in actuarial work, Bull I. M. A., 8, No. 1, 3.
 Beard R. E., Pentikainen T. and Pesonen E. (1969). Risk theory. Methuen; London.
 Naight F. A. (1967). Handbook of the Poisson distribution. Wiley; New York.

(Примечание: формула 3.6—25 на стр. 46 должна читаться $\mu_4 = \lambda v_4' = 3\lambda^2(v_2')^2$.)

13.8. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Определить функцию распределения $F(x, n)$ всех требований, когда процесс поступления требований подчинен пуассоновскому закону и функция распределения $S(x)$ одного требования имеет вид $1 - e^{-x}$.

2. Найти моменты функции распределения суммы всех требований, когда функция интенсивности требований μ распределена

следующим образом:

$$U(\mu) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{\mu k} e^{-z} z^{k-1} dz.$$

3. Вычислить приближенное значение U_0 , необходимое для того, чтобы обеспечить вероятность краха $\varepsilon=0,001$ за год, когда величина k в задаче (2) равна 100. Пренебрегите перестрахованием и положите $\lambda=0,1$.

4. Моменты от $F(\cdot)$ равны: среднее=4, $\mu_2=4$, $\beta_1=1$, $\beta_2=4,5$. Сравните точное значение для $1-F(x)$, при $x=4, 5, 6, 7$ и 8 с приближенными значениями, полученными по $N-P$ -методу.

5. В результате вызванного случайной флуктуацией неблагоприятного стечения обстоятельств с поступлением требований некоторая компания обнаруживает, что ее свободные ресурсы (капитал) упали ниже уровня, соответствующего допустимой вероятности краха. Рассмотрите влияние на коэффициенты взносов и другие параметры следующих возможных корректирующих мер: а) привлечения дополнительного капитала; б) коррекции уровня превышения перестрахования и в) объединения с другой аналогичной компанией. Какие можно привести соображения в случае, если неблагоприятное положение является скорее постоянной особенностью, нежели флуктуацией?

ВОЕННОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ИГР

У. ХИЛЛ ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: теория вероятностей
и теория матриц]

14.1. ВВЕДЕНИЕ

Существует много ситуаций, в которых люди соревнуются между собой. Иногда, например в салонных играх, правила точно установлены. Возможности, которыми располагает каждый из игроков, известны, и вознаграждения определены заранее. Во многих других ситуациях, таких, как война или бизнес, положение дел определено далеко не так полно. Возможные типы поведения обычно трудно перечислить, а цели зачастую множественны и сложны. Во всех случаях, однако, цели индивидуума или одной из сторон противоположны целям противника. Это — тот элемент соперничества, который является основным для ситуаций, которые изучаются теорией игр.

Как и в любой теории в области прикладной математики, теория игр задает некоторую формальную структуру. Принимается, что все возможные действия каждого игрока могут быть точно установлены и что для каждой комбинации таких действий ожидаемый исход соревнования может быть определен численно. Целью каждого игрока является максимизировать свой ожидаемый выигрыш. Он может предположить о своих соперниках, что каждый из них занят аналогичной оптимизацией.

Видимо, может показаться неожиданным, что для обширного класса задач процесс оптимизации, удовлетворяющий этим критериям, может быть представлен последовательным и логичным образом. Такая возможность была показана Нейманом (1928). При последующем развитии теории удалось получить ряд далеко идущих результатов. Хотя с тем же успехом эти задачи находят применение в разных областях, именно в военной области теория игр привела к нескольким замечательным достижениям. Помимо того что она продемонстрировала свои возможности при анализе тонких вопросов, возникающих даже в простых игровых ситуациях, она осветила стратегические принципы нападения и обороны (Дрешер, 1961). Эта тео-

¹⁾ W. Hill, AUWE, Portland, Dorset.

рия обеспечила рациональный подход к некоторым аспектам систем вооружения и способствовала развитию военной тактики во многих областях.

На основании какой-либо единой теории или одного подхода в большинстве практических задач полное решение не достигается. Обширная область знаний зачастую развивается в несколько этапов, каждый из которых нуждается в специальном аппарате. Теория игр — как раз один из таких аппаратов, от которого нельзя ожидать получения полного ответа в больших и сложных задачах. Тем не менее, будучи правильно примененной, она может дать весомый вклад во многие стороны изучения конфликта.

В данной главе некоторые аспекты этой теории будут развернуты применительно к задачам использования мин в войне на море. При этом преследуются две цели. Первая — дать читателю представление о теории и способах ее применения. Вторая цель — показать, как удастся решить практическую задачу, представив ее сначала в виде простой и весьма искусственной модели, а затем улучшив ее до получения адекватной и реалистической формулировки.

14.2. ИГРЫ ДВУХ ЛИЦ

Использование мин в войне на море дает один пример из класса игр между двумя лицами (в таких играх имеется лишь две противодействующие стороны). Наибольшее число успешных приложений данной теории относится к этой категории игр. Задачи конфликта, включающие n лиц, где $n > 2$, представляют заметно большие трудности из-за возможности коалиций.

14.3. ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ

В дополнение к определению всех возможных действий (или *чистых стратегий*), присущих каждой из сторон, необходимо также установить выигрыши, которые каждый получит при данном наборе противодействующих чистых стратегий. Эти выигрыши именуются *платами* и являются оценками эффективности проведения данной политики. Разумеется, допустима ситуация, когда в результате конфликтного столкновения или «игры» каждая сторона получает выигрыши, не связанные с выигрышами другой; возможна даже ситуация, когда каждая из сторон может выбрать различные оценки эффективности. Обычно же принимается, однако, что каждая сторона будет придерживаться одной и той же оценки и что выигрыш одной стороны есть проигрыш другой. Такие игры называются играми с *нулевой суммой*.

Поиск наилучшей функции платы является зачастую наиболее трудным аспектом теории игр. Обычно здесь можно использовать много разных критериев. Некоторые из них могут быть скорее ка-

чественными, чем количественными, к тому же относительная важность одновременно действующих факторов обычно определена нестрого. Умозрительно представляется возможным достичь единой меры или *полезности* (фон Нейман и Моргенштерн, 1947). В приложениях теории игр, поскольку допускается единственная функция платы, должна быть установлена единая мера эффективности.

14.4. ПРИЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МИН

Для изложения примера из области использования морских мин необходимо в общих чертах описать основные особенности мин и противоминные меры.

Наиболее часто используются мины, размещаемые на дне. Такая мина укладывается на морское дно и приводится в действие за счет изменений физического характера, вызванных близким прохождением судна. Обычным способом предотвращения нанесения ущерба судам является использование минных тралщиков для заблаговременного подрыва мин. Чтобы траление воздействовало на мины, тралщик буксирует мощные источники возмущений, которые создают изменения, физически сходные с теми, которые создает судно, но в более широкой области по траектории судна. Для того чтобы избежать слишком простого уничтожения мин, конструктор мин использует устройство, известное как счетчик судов. Это устройство предохраняет мину от подрыва до тех пор, пока она не подвергнется воздействию заранее заданное число раз (от судна или в процессе траления). Если мина настроена так, что она взрывается при n -м воздействии, говорят, что она настроена на число судов n .

Хотя имеется несколько видов противоминных действий, здесь будет рассмотрен только один из них, а именно — операции, имеющие ограниченную продолжительность. В этих случаях на противоминные операции может быть потрачено лишь конечное время до проведения судов через минное поле.

И минер, и командир, ведающий противоминными мерами, стоят перед проблемой. Минер знает, что если счетчик судов настроен на слишком малое число, то мины легко будут уничтожены, а если счетчик настроен на слишком большое число, это приведет к неудовлетворительному использованию мин. Таким образом, он должен стремиться настроить счетчики судов на числа, которые обеспечивают наилучшие шансы на то, что тралщики сбросят счетчики судов до единицы, и тогда мины будут готовы взорваться под судами. Командир, ведающий разминированием, будет отдавать себе отчет в том, что минный заградитель может вполне учесть эти обстоятельства и что если тралщик будет производить траление фарватера систематически, то он будет играть на руку заградителю. Оба соперника располагают несколькими альтернативными линиями

поведения. Ясно, что можно ожидать некоторого выигрыша каждого из них, если тот откажется от очевидной тактики. Это и есть типичная ситуация в теории игр.

14.5. БАЗОВАЯ ИГРА

Сначала мы предполагаем, что на фарватере имеется только одна мина, подлежащая уничтожению, и что только одно судно пройдет по фарватеру после завершения траления. Примем в качестве платы вероятность потопления судна. Это — простая и естественная мера, которая отражает эффективность таких обеих сторон и вполне приемлема для военного. Использование этой меры в качестве платы предполагает, что эффективность операции зависит от нее линейно, и полезность может быть в этом смысле произвольной.

Определим F_{ij} как вероятность того, что мина со счетчиком судов, настроенным на i , потопит судно, проходящее по фарватеру после j проходов тральщика по тому же фарватеру. Таким образом, (F_{ij}) — матрица плат для этой игры. Теперь должны быть определены оптимальные действия для обеих сторон. Соперники не ограничены детерминистическим выбором своих стратегий. Стратегии могут выбираться некоторым случайным, непредсказуемым образом в соответствии с выбранным распределением вероятностей чистых стратегий. Таким образом, выбор каждого соперника не обязательно будет простой чистой стратегией, а определяется распределением вероятностей по всем его стратегиям.

Допустим, что максимальное число, на которое может быть настроен счетчик судов на mine, равно n_c и что максимальное число проходов траления, которое может быть выполнено за имеющийся интервал времени, равно n_p . Тогда, если минный заградитель выбирает распределение вероятностей своих активных стратегий таким, чтобы вероятность настройки счетчика судов на число i была p_i , то вероятность потопления судна после j проходов тральщика дается выражением

$$F_{.j} = \sum_{i=1}^{n_c} p_i F_{ij},$$

где $p_i \geq 0$ для всех i , и

$$\sum_{i=1}^{n_c} p_i = 1.$$

(Заметим, что точка на месте нижнего индекса означает суммирование по соответствующему параметру.)

Аналогично этому, если командир, ведающий тралением, определяет число проходов при тралении случайным образом, в соответствии с распределением вероятностей, при вероятности q_j вы-

полнения j проходов, тогда вероятность потопления от мины со счетчиком судов, настроенным на i , равна

$$F_{i.} = \sum_{j=1}^{np} F_{ij} q_j,$$

где $q_j \geq 0$ до всех j , и

$$\sum_{j=1}^{np} q_j = 1.$$

Распределения $P = (p_1, p_2, \dots, p_{n_c})$ и $Q = (q_1, q_2, \dots, q_{n_p})$ вероятностей называются *смешанными стратегиями*. Если каждая сторона использует смешанные стратегии, вероятность потопления равна

$$F_{..} = \sum_{\text{по всем } i, j} p_i F_{ij} q_j.$$

Очевидно, что это выражение включает в себя и случаи, когда используется только одна чистая стратегия.

Целью минного заградителя является максимизировать $F_{..}$, а целью командира тральщика — минимизировать эту величину. Предположим, что минный заградитель выбирает смешанную стратегию $P^* = (p_i^*)$. Тогда он будет уверен в достижении вероятности потопления, равной по меньшей мере

$$\min_Q \sum_i \sum_j p_i^* F_{ij} q_j,$$

причем здесь сделано допущение о том, что командир, ведущий траление, выбрал распределение Q , которое минимизирует сумму. Теперь минный заградитель может выбрать распределение P^* , скажем, равным $\hat{P} = (\hat{p}_i)$, которое максимизирует эту величину. Тогда он может быть уверенным в том, что вероятность потопления составляет по меньшей мере

$$\max_P \min_Q \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j,$$

т. е.

$$F_0 = \sum_i \sum_j \hat{p}_i F_{ij} q_j \geq \max_P \min_Q \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j.$$

(Заметим, что индекс 0 указывает на использование максимизирующей стратегии P_j)

Аналогично может быть показано, что командир, ведущий траление, выбрав стратегию $\hat{Q} = (\hat{q}_j)$, может быть уверенным, что вероят-

ность потопления не превысит значения

$$\min_Q \max_P \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j,$$

т. е. что

$$F_{\cdot 0} = \sum_i \sum_j p_i F_{ij} \hat{q}_j \leq \min_Q \max_P \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j.$$

Можно легко показать, что

$$\max_P \min_Q \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j \leq \min_Q \max_P \sum_i \sum_j p_i F_{ij} q_j.$$

Основная теорема матричных игр, однако, показывает, что эти два выражения всегда равны (фон Нейман, 1928; Дрешер, 1961; фон Нейман и Моргенштерн, 1947; Мак-Кинси, 1952). Следовательно,

$$F_{\cdot 0} \leq F \leq F_{0 \cdot}. \quad (1)$$

Число $F = F_{00} = \sum_i \sum_j \hat{p}_i F_{ij} \hat{q}_j$ называется «ценой» игры, а смешанные стратегии $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ называются оптимальными стратегиями.

Итак, мы показали, каким образом могут быть определены оптимальные действия минного заградителя и минного тральщика в простой игре с одной миной и одним судном. Каждый из них может гарантировать, что результат никогда не будет хуже, чем F (с его точки зрения), а если его соперник применяет плохую стратегию, то результат можно улучшить.

Однако следует ясно понимать, что эти результаты представляют собой ожидаемые величины, которые определены *до того*, как в игре применены действительные стратегии, полученные с помощью аппарата вероятностей. После того как стратегии установлены, результат будет получен путем указания плат по матрице игры. В общем случае этот результат будет отличаться от цены игры.

Исключение имеет место в том случае, когда оптимальные стратегии суть чистые стратегии, т. е. если $\hat{p}_i$ и $\hat{q}_j$ — единицы для одного значения i, j . Тогда говорят о решении типа «седловой точки». В такой ситуации каждый игрок поступает детерминистически, зная, что ничего нельзя извлечь из сохранения своих намерений в тайне. Решения типа седловой точки характеризуются тем фактом, что для них

$$\max_i \min_j F_{ij} = \min_i \max_j F_{ij}.$$

Когда разыскиваются решения для игр, то первым делом проводится проверка на существование решения типа седловой точки. Если оно не существует, то нужны более сложные методы. К ним относятся графические методы для игр с матрицей плат размером

$2 \times n$, матричные методы, итеративные методы и методы линейного программирования. Их можно найти в известных работах по теории игр, линейному программированию и исследованию операций (Мак-Кинси, 1952; Данциг, 1963; Гиллер и Либерман, 1966).

14.6. ПЕРВОЕ ОБОБЩЕНИЕ: МНОГО МИН

В нашей простой игре с тралением мин есть много искусственных моментов, которые могли бы существенно ограничить практическую ценность получаемых результатов. Наиболее серьезное допущение состоит в том, что на фарватере имеется в точности одна мина. Обычно мины укладываются на участок дна моря в большом количестве и их точное положение неизвестно. Таким образом, всякий фарватер через минное поле будет содержать некоторое неизвестное число мин.

Следовательно, лучше всего допустить, что мины распределены случайным образом, и оценить плотность минирования. Предположим, что плотность такова, что ожидаемое число мин в фарватере общей длины Y равно N . Тогда вероятность нахождения мины в элементе длины Δy равна $N\Delta y/Y$. Вероятность того, что судно, достигнув этого элемента, пройдет его благополучно, равна

$$1 - \frac{NF_{ij}\Delta y}{Y},$$

где принято, что мины настроены на число i судов и произведено j проходов тральщика.

Если $P(y)$ — вероятность того, что судно не повреждено, когда оно достигло y , то мы получаем, что

$$P(y + \Delta y) = P(y) \left(1 - \frac{NF_{ij}\Delta y}{Y} \right).$$

Тогда

$$\frac{P(y + \Delta y) - P(y)}{\Delta y} = - \frac{NF_{ij}}{Y} P(y)$$

и в пределе, поскольку $\Delta y \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{dP(y)}{dy} = - \frac{NF_{ij}}{Y} P(y).$$

В связи с тем что NF_{ij}/Y — постоянная величина, мы получили простое дифференциальное уравнение первого порядка. Интегрирование дает

$$P(y) = P(0) \exp \left(- \frac{NF_{ij}}{Y} y \right).$$

Далее, $P(0)=1$ и вероятность того, что судно уцелеет, равна

$$P_{ij} = \exp(-NF_{ij}),$$

а вероятность (риск) того, что оно будет потоплено, равна

$$R_{ij} = 1 - \exp(-NF_{ij}). \quad (2)$$

Оказывается, что при неуверенности относительно числа мин на фарватере вероятность потопления в общем случае не является линейной функцией этой вероятности для случая единственной мины, т. е. риск R_{ij} в общем случае не есть линейная функция от F_{ij} .

Таким образом, решения для простой игры не будут, вообще говоря, решением для расширенной игры. Если тем не менее вероятность потопления судна мала ($NF_{ij} \ll 1$ для всех i, j), к чему стремится командир, ведающий тралением, то соотношение (2) может быть заменено приближенной формулой

$$R_{ij} = NF_{ij}. \quad (3)$$

Теперь R_{ij} и F_{ij} связаны линейной зависимостью и применимы решения простой задачи с одной миной. При использовании оптимальной стратегии этой игры минный заградитель получит возможность гарантировать достижение риска, равного $R = NF$ или большего. Аналогично этому командир, ведающий тралением, может обеспечить величину риска, равную R или меньше. Однако, как и в простой игре, эти результаты относятся лишь к ситуации, имевшей место до того, как обеими сторонами определены используемые чистые стратегии, если только игра не имеет решения типа седловой точки. После определения стратегий действительный риск будет соответствовать плате.

14.7. ВТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ: СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Легко видеть, что постановка всех мин с одинаковой настройкой счетчика судов не является удачной политикой для минера. Хотя он может добиться сравнительно высокого риска, если командир тральщика неудачно применит некоторую определенную стратегию, механизм случайного выбора, рекомендуемый теорией игр, делает это маловероятным. Следовательно, минер будет вносить разброс в настройку счетчиков судов таким образом, чтобы получить большую гарантию достижения успеха при целом ряде стратегий своего соперника.

Допустим, что он настроил у части p_i мин счетчик судов на число i ($i=1, \dots, n_c$). Тогда, следуя тем же рассуждениям, которые относились к предыдущим уравнениям, для каждой настройки

счетчика судов по очереди вместо уравнения (3) получим

$$R_{.j} = N \sum_i p_i F_{ij} = \sum_i p_i R_{ij}.$$

Поскольку $p_i \geq 0$ для всех i и

$$\sum_i p_i = 1,$$

видно, что результирующий риск R_{ij} является выпуклой линейной комбинацией рисков, соответствующих отдельным счетчикам судов.

Аналогичные рассуждения могут убедить командира противоминной службы в том, что ему не следует применять один и тот же метод траления по всему фарватеру (если практические соображения не вынуждают его делать именно так). Вместо этого он должен распределить свои усилия неравномерно по длине фарватера. Если он разделит его на участки так, чтобы в части q_j фарватера проводилось траление с j проходами ($j=1, 2, \dots, n_p$), то на участке q_j риск для судна от мин с настройкой счетчика судов на число i составит $\{1 - \exp(-N F_{ij} q_j)\}$. Тогда вероятность потопления на всем фарватере будет равна

$$1 - \prod_j \exp(-N F_{ij} q_j) = 1 - \exp\left(-N \sum_i F_{ij} q_j\right),$$

и поэтому в данном случае уравнение (3) принимает вид

$$R_{i.} = N \sum_j F_{ij} q_j = \sum_j R_{ij} q_j.$$

Можно заметить, что так же как и для минного заградителя, стратегия тральщика, объединяющая некоторое число чистых стратегий, осуществляемых на разных участках фарватера, приводит к риску, являющемуся выпуклой линейной комбинацией рисков, соответствующих каждой из чистых стратегий.

Теперь рассмотрим вполне реальную ситуацию, при которой минер создает некоторый беспорядок в размещении мин по минному полю, а тральщик меняет плотность траления по длине фарватера. Очевидно, что число стратегий, имеющих место в распоряжении минера, теперь весьма велико (при разумном числе мин, уложенных на дне), а для минных тральщиков число таких стратегий бесконечно. Таким образом, эта игра является бесконечной. Так как платы для всех стратегий — выпуклые линейные комбинации плат в простой конечной игре, решение этой конечной игры дает также решения для бесконечной игры. Цены игр — также одинаковые. Решения, соответствующие смешанным стратегиям в простой игре, могут быть интерпретированы двояко. При смешанной стратегии решение определяет ту же политику, что и в простой игре с некоторой вы-

бранной чистой стратегией. Если, однако, распределения вероятности оптимальных стратегий используются для определения смещения мин или проходов при тралении, тогда получается решение типа седловой точки. «Смеси стратегий» задают чистые стратегии в бесконечной игре. Хотя обе интерпретации указывают на тот же ожидаемый риск, последняя из них имеет дополнительное преимущество в том, что изменчивость результата, полученного по нескольким гипотетическим столкновениям соперников, минимальна. Таким образом, применение смешанных стратегий, которое можно интуитивно считать полезным, действительно дает некоторые дополнительные преимущества.

ПРИМЕРЫ

Преимущества, получаемые путем применения смешанной стратегии при проведении операций, можно сделать наглядными при помощи двух простых примеров. В обоих примерах минный заградитель может укладывать свои мины с установкой счетчика судов на 1, 2 и 3, а минные тральщики могут производить 0 или 1 проход. Тогда для простой игры имеем следующую игру (табл. 14.1). Оче-

Таблица 14.1

Решение при простых стратегиях и при смешанной стратегии

Настройка счетчика судов	Траления		Доля p_i
	0	1	
1	2	0	0,5
2	0	2	0,5
3	0	0	0
Доля q_j	0,5	0,5	Цена 0,1

(2 мины на дне, 0 или 1 проход тральщика, настройка счетчика на 1, 2 или 3 судна)

видно, что цена игры с этой матрицей равна 0,1 и что каждая из оптимальных стратегий имеет вероятность 0,5. В каждой отдельной операции, однако, результат будет равен или 0, или 0,2.

В табл. 14.2 иллюстрируется бесконечная игра для того же набора мин и проходов тральщика. Можно видеть, что цена этой игры остается прежней, но в данном случае существует решение типа седловой точки¹⁾, минный заградитель укладывает поло-

¹⁾ Ему соответствует цена игры, указанная в рамке.— Прим. ред.

Таблица 14.2

Решение типа седловой точки при смешанной стратегии

Счетчик судов	Траления				Часть фарватера			Доля p_i	
	0	1	$1-\Delta$	...	0,5	...	Δ	0	
	1	0	Δ	...	0,5	...	$1-\Delta$	1	
	(1,1)	0,2	$0,2(1-\Delta)$	...	0,1	...	$0,2\Delta$	0	0
	(1,2)	0,1	0,1	...	0,1	...	0,1	0,1	1
	(1,3)	0,1	$0,1(1-\Delta)$	...	0,05	...	$0,1\Delta$	0	0
	(2,2)	0	$0,2\Delta$	...	0,1	...	$0,2(1-\Delta)$	0,2	0
	(2,3)	0	$0,1\Delta$	...	0,05	...	$0,1(1-\Delta)$	0,1	0
	(3,3)	0	0	...	0	...	0	0	0
Доля q_j		0	0		1		0	0	Цена 0,1

вину своих мин с установкой счетчика судов на 1, половину — на число 2, тральщики производят траление половины фарватера за один проход. В этом случае командир, ведающий противоминными действиями, может гарантировать, что риск для судна в каждой операции равен цене игры или менее.

14.8. ТРЕТЬЕ ОБОБЩЕНИЕ: МНОГО СУДОВ

Теперь обобщим исследование таким образом, чтобы охватить случай прохода нескольких судов по фарватеру. Вначале рассмотрим случай, когда ожидаемое число судов, потерянных при прохождении по фарватеру, является подходящим критерием для определения эффективности операций. Когда по фарватеру идет одно судно, эффективными могут быть только те мины, у которых счетчик судов после имевших место тралений стоит на единице. Когда же по фарватеру идет не одно судно, это положение, строго говоря, уже не верно. Практически, однако, вероятность вызвать судами более чем одно срабатывание мин весьма мала и будет приравнена нулю. Итак, получается, что вероятность потопления одного из M судов миной с настройкой счетчика судов на i после j проходов тральщика составляет MF_{ij} .

Для определения точного числа судов, потопляемых при прохождении фарватера, потребовалось бы привлечение теории случайных процессов. Однако можно предложить более простой подход, который достаточно точен, если потери малы.

Принимается, что если в фарватер вошли M судов, то вероятность потопления одного судна на любом участке длины Δy фарватера не зависит от всех предыдущих потерь и равна

$$\frac{MNF_{ij}\Delta y}{Y}. \quad (4)$$

Тогда распределение потерь будет пуассоновским и ожидаемое число потопленных судов составит

$$\mu_{ij} = MNF_{ij} = MR_{ij}. \quad (5)$$

Читателю предлагается показать, что как для минера, так и для тральщика ожидаемые потери при смешанных стратегиях являются выпуклыми линейными комбинациями потерь, соответствующих чистым стратегиям в конечной игре. Решение получено Хиллом и Уоллисом (1970). (Следует иметь в виду, что в этом решении строки и столбцы матрицы плат переставлены.)

Итак, решение с критерием ожидаемых потерь в бесконечной игре, когда каждая сторона использует смешанные стратегии, получается как следствие решений для одного судна. Оптимальные стратегии даются таковыми для простой игры (F_{ij}) и могут быть интерпретированы как смешанные стратегии в конечной игре или как смешанные стратегии, приводящие к решению типа седловой точки. Ценой игры будет MNF . Как и в случае одного судна, здесь можно показать, что интерпретация в виде смешанных стратегий дает наименьшее варьирование действительного результата при повторных играх.

14.9. ПОСЛЕДНЕЕ ОБОБЩЕНИЕ: КРИТЕРИЙ НИЗКИХ ПОТЕРЬ

Неопределенность, связанная с исходом военных операций, почти не поддается оценке. Однако это часто не имеет решающего значения в длительных кампаниях, где имеет место большое число сходных столкновений. Высокие потери в одних столкновениях возмещаются низкими потерями в других. Таким образом, для большого числа случаев, несмотря на существующий разброс, именно ожидаемый результат некоторого столкновения является подходящей мерой его успешности. Разумеется, возникает желание снизить разброс насколько это возможно. Метод достижения этой цели путем использования смешанных стратегий был показан в предыдущих параграфах.

В некоторых случаях, однако, отдельные операции имеют решающее значение, и исход всей кампании может существенно зависеть от них. При таких обстоятельствах средний, или ожидаемый, исход не является вполне удовлетворительным критерием, поскольку его вариабельность может быть существенной. Так, на-

пример, при прохождении некоторого числа судов по очищенному фарватеру потери соответствуют пуассоновскому распределению. Свойством этого распределения является то, что математическое ожидание и дисперсия имеют равные величины, и, таким образом, могут быть получены результаты, заметно отличающиеся от средних. Тогда риск провала операции может оказаться высоким, хотя среднее значение могло указывать на успех. В этих случаях при выборе меры эффективности должно быть принято в расчет возможное варьирование результата.

Такая ситуация может появиться и в рассматриваемой здесь игре с использованием мин в войне на море. Большое число противоминных операций будут считаться неудачными, если при прохождении заминированного участка окажется потопленным более определенного процента судов. Таким образом, в этих операциях ожидаемое число потопленных судов не является адекватным критерием эффективности.

Выше было показано, что распределение вероятности потерь является приблизительно пуассоновским при условии, что потери малы. Тогда в случае простой игры с матрицей (F_{ij}) вероятность потерять m или больше из M судов, проходящих фарватер, приближенно дается выражением

$$P_{ij}(m) = 1 - \exp(-MNF_{ij}) \times \\ \times \left\{ 1 + MNF_{ij} + \frac{(MNF_{ij})^2}{2!} + \dots + \frac{(MNF_{ij})^{m-1}}{(m-1)!} \right\}.$$

Из этого выражения видно, что $P_{ij}(m)$ не является выпуклой линейной комбинацией F_{ij} , и потому простая игра не дает решения для конечной игры с матрицей $(P_{ij}(m))$. Чтобы получить решение, должна быть рассмотрена игра, о которой идет речь.

Теперь рассмотрим снова бесконечную игру, в которой каждая сторона может применять смешение своих чистых стратегий в какой-либо одной операции. Пусть через $P_{..}(m)$ обозначается вероятность того, что m или более судов потоплены, когда смешанные стратегии простой игры используются как смешанные стратегии для бесконечной игры. Тогда $P_{..}(m)$ дается выражением

$$P_{..}(m) = 1 - \exp(-MNF_{..}) \times \\ \times \left\{ 1 + MNF_{..} + \frac{(MNF_{..})^2}{2!} + \dots + \frac{(MNF_{..})^{m-1}}{(m-1)!} \right\}.$$

Видно, что $P_{..}(m)$ не есть выпуклая комбинация исходных величин $P_{ij}(m)$. Таким образом, конечная игра с платами $P_{ij}(m)$ в общем случае не дает решения для бесконечной игры.

Если рассмотреть функцию

$$\theta = 1 - \exp(-\phi) \left\{ 1 + \phi + \frac{\phi^2}{2!} + \dots + \frac{\phi^l}{l!} \right\},$$

то можно получить

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\phi} &= \exp(-\phi) \left\{ 1 + \phi + \frac{\phi^2}{2!} + \dots + \frac{\phi^t}{t!} \right\} - \\ &- \exp(-\phi) \left\{ 1 + \phi + \frac{\phi^2}{2!} + \dots + \frac{\phi^t}{(t-1)!} \right\} = \\ &= \exp(-\phi) \frac{\phi^t}{t!} > 0 \quad \text{для } \phi > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\phi > 0$ θ является возрастающей функцией от ϕ , поскольку P_{ij} — возрастающая функция от F_{ij} . Для подтверждения этого результата может быть привлечен более точный анализ, основанный на теории случайных процессов, упоминавшийся выше.

Итак, из решения для игры с матрицей (F_{ij}) имеем

$$\sum_i \sum_j \hat{p}_i F_{ij} q_j \geq \sum_i \sum_j \hat{p}_i F_{ij} \hat{q}_j \geq \sum_i \sum_j p_i F_{ij} \hat{q}_j, \quad (6)$$

где снова $\hat{p}_i$ и $\hat{q}_j$ — оптимальные стратегии. Если обозначить через $P_{0..}$, $P_{..}$ и $P_{..0}$ величины $P_{..}$, когда смешанные стратегии в бесконечной игре соответственно представлены как $(\hat{p}_i, q_j)$, $(\hat{p}_i, \hat{q}_j)$ и $(p_i, \hat{q}_j)$, то из уравнения (6) и вследствие того, что $P_{..}$ является возрастающей функцией от $F_{..}$, получаем

$$P_{0..}(m) \geq P(m) \geq P_{..0}(m).$$

Можно показать, что этого условия достаточно для утверждения, что $F(m)$ является решением типа седловой точки для бесконечной игры. Итак, снова решение для простой игры (F_{ij}) привело к решению практической задачи.

14.10. РЕЗЮМЕ

Представляется целесообразным собрать воедино все, чему можно научиться на примере из теории игр, рассмотренного в этой главе. Хотя часто говорят, что теория игр неприложима ко многим практическим ситуациям, читатель узнал, что по крайней мере в одном типе военного конфликта теория может быть использована весьма успешно. Было показано также, что часто существует более чем один способ интерпретации результатов, полученных с помощью теории игр, и что одни интерпретации более полезны, чем другие. В частности, всякий раз, когда это возможно, полезно получать решения типа седловой точки.

С помощью исследования операций минимизации и противоминных операций на нескольких этапах усложнения задачи было продемонстрировано, что начальные простые концепции могут быть с успехом усовершенствованы вплоть до получения приемлемой

рабочей модели. Кроме того, более простые исследования в подобных случаях отнюдь не бесполезны, а способствуют выяснению сути дела и иногда приводят к решениям, действительным и в более сложных ситуациях.

14.11. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Dantzig G. B. (1963). Linear programming and extensions, Princeton University Press; New Jersey.
- Dresher M. (1961). Games of strategy: theory and applications. Prentice-Hall Applied Mathematics Series, Prentice Hall; Englewood Cliffs, New Jersey.
- Hill W., Wallis P. R. (1970). The application of the theory of games to mine counter-measures tactics, *J. Inst. Math. Applic.*, 6, 27.
- Hillier F. S., Lieberman G. J. (1966). Introduction to operations research. Holder-Day Inc.: California.
- McKinsey J. C. C. (1952). Introduction to the theory of games. McGraw-Hill; New York.
- Von Neumann J. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.*, 100, 295.
- Von Neumann J., Morgenstern O. (1947). Theory of games and economic behaviour, Princeton University Press; New Jersey.
- Имеются переводы:
- Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его применения и обобщения.— М.: Прогресс, 1966.
- Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения.— М.: Советское радио, 1964.
- Мак-Кинси Дж. И. Введение в теорию игр.— М.: Физматгиз, 1960.
- Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение.— М.: Наука, 1970.

14.12. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. В игре Морра ¹⁾ два игрока одновременно показывают один или два пальца и в то же самое время называют свое предположение о числе пальцев, показанных соперником. Если один игрок отгадывает, он получит от своего соперника число очков, равное общему числу показанных пальцев. Таким образом, если некоторый игрок покажет один палец и назовет «два» и это будет правильно, то он получит три очка от своего соперника. Неправильные догадки обоих игроков дают нулевой счет. Можно легко показать, что матрица игры будет следующей:

		В			
		(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
А	(1, 1)	0	2	—3	0
	(1, 2)	—2	0	0	3
	(2, 1)	3	0	0	4
	(2, 2)	0	—3	4	0

¹⁾ Другое название игры — «гангстерская баккара». — Прим. перев.

Здесь (1, 2) означает стратегию, состоящую в том, что показывается один палец и называется два. A — максимизирующий игрок. Поскольку игра симметрична, очевидно, что ее цена должна быть нулевой. Показать, что оптимальная стратегия для каждого игрока есть (0; 0,6; 0,4; 0).

2. В обозначениях, принятых в данной главе, показать, что $R_0 \leq R$.

3. Пусть дисперсия риска на некотором ансамбле дается выражением

$$\text{var}_0.(R) = \sum_i \hat{p}_i (R_i - R_0.)^2.$$

Показать, что

$$\text{var}_0.(R) = \sum_i \hat{p}_i R_i^2 - R_0^2.$$

4. Объяснить суть допущений, сделанных при выводе пуассоновского распределения в § 14.9.

5. Допуская, что существует незначительная вероятность того, что прохождение M судов приведет в действие какую-либо мину более чем один раз и что вероятность потопления судна на участке Δy фарватера длины Y равна $u\Delta y/Y$, показать, что распределение вероятности потерь судов дается выражением

$$P(k) = \binom{M}{k} \exp(-Mu) \{\exp(u) - 1\}^k, \quad k \leq M,$$

где $P(k)$ — вероятность потопления k судов. (В этом примере необходимо применить теорию случайных процессов.)

6. Единственная контрмера против нового вражеского оружия оказывается неэффективной против других, менее грозных видов оружия. Целесообразно ли развивать эту контрмеру, а если да, то следует ли ожидать возможности ее использования?

7. Полковнику Блотто приказано занять две позиции в расположении противника. Он имеет четыре полка под своим командованием, а вражеский командир имеет три. Обе стороны должны решить, сколько полков направить на каждую позицию. Платы для полковника Блотто определены следующим образом. Он занимает позицию, если направляет на нее больше полков, чем там имеет противник. Мерой его успеха является число, на единицу большее числа вражеских полков на позиции. Если он направил на позицию меньше полков, чем противник, то он теряет позицию. Оценкой его поражения является число, на единицу большее числа полков,

посланных им на атакуемую позицию. Если обеими сторонами направлено одинаковое число полков, оценкой будет нуль. Общая плата равна сумме оценок на этих двух позициях. Составить матрицу плат и решить игру¹⁾. Предположим, что одна из позиций более важна, чем другая. Как этот факт может быть учтен при исследовании?

¹⁾ См. также J. G. Kemeny, G. L. Thompson, The effect of psychological attitudes on the outcomes of games, Contributions to the theory of games 3 (1957), Princeton, 273—298 или перевод Дж. Кемень, Дж. Томпсон, «Влияние психологического отношения на исходы игр» в сб. «Матричные игры» (ред. Воробьев Н. Н.), Физматгиз, М., 1961.— *Прим. перев.*

СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

Б. А. КАРРЕ ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: линейная алгебра и элементы анализа]

15.1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение сетевых моделей началось в 40-х годах в связи с транспортными задачами, т. е. задачами о прикреплении поставщиков к потребителям, минимизирующим суммарные расходы по перевозке. Однако вскоре выяснилось, что методы, развитые при анализе такого рода задач, приложимы и к другим сетевым проблемам, например к задачам об информационных потоках в сетях связи или к задачам о дорожных транспортных потоках. Более того, обнаружилось, что целый ряд прикладных комбинаторных задач, не связанных с реально существующими сетями, допускает тем не менее изящное математическое решение на языке сетевых моделей.

В этой главе формулируются основные принципы теории потоков в сетях и излагается метод решения важного класса сетевых задач. На ряде примеров показано, как построить сетевые модели для разнообразных практических задач. Указываются пути возможных обобщений основных результатов.

Часто существует несколько концептуально различных способов построения математической модели одного и того же физического явления, для которых возможны различные методы решения. Действительно, как показано в последнем параграфе, каждая из представленных здесь задач может быть сформулирована и решена несколькими в корне отличными друг от друга методами.

15.2. СЕТИ

Сеть (или граф) $G = (N, A)$ состоит из:

1. Множества *узлов* $N = \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$.
2. Множества A упорядоченных пар (n_i, n_j) элементов N ; элементы A называются *дугами*.

¹⁾ B. A. Carre, Centre d'Information, Université Paul Sabatier, Toulouse, France and Department of Electronics, University of Southampton.

Сеть может быть графически представлена диаграммой, на которой узлам соответствуют точки плоскости, а каждая дуга (n_i, n_j) изображается стрелкой, направленной из точки n_i в точку n_j . Так, на рис. 15.1 представлена сеть с четырьмя узлами n_1 — n_4 и шестью дугами (n_1, n_2) , (n_1, n_4) , (n_2, n_4) , (n_3, n_2) , (n_4, n_1) и (n_4, n_3) .

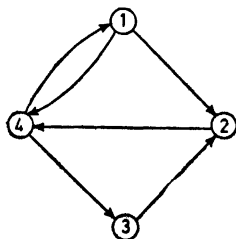


Рис. 15.1.

Многие физические структуры удобно представить в виде сети такого рода (например, систему городских улиц, если каждую улицу с двухсторонним движением рассматривать как пару дуг с одинаковыми конечными узлами, но с противоположной ориентацией).

Будем говорить, что на сети $G=(N, A)$ дуга (n_i, n_j) направлена от n_i к n_j , а точки n_i и n_j называть соответственно *начальным* и *конечным* узлом дуги (n_i, n_j) . Последовательность дуг, в которой конечный узел каждой дуги является в то же время начальным узлом следующей дуги, называется *путем*. Так, на графе (15.1) последовательность (n_1, n_2) , (n_2, n_4) , (n_4, n_3) — путь из n_1 в n_3 .

Цепью называется последовательность дуг, в которой каждая промежуточная дуга соединена с предшествующей концом или началом. Например, на рис. 15.1 (n_1, n_4) , (n_2, n_4) , (n_3, n_2) — цепь из n_1 в n_3 . Двигаясь вдоль цепи, можно пройти дугу в направлении, противоположном ее ориентации. Дуги, проходимые в направлении ориентации, называются *прямыми* дугами цепи, остальные — *обратными* дугами.

15.3. ПОТОКИ В СЕТЯХ

На практике часто возникает задача максимизации потока некоего продукта между двумя заданными узлами сети при условии, что поток вдоль каждой дуги ограничен. Очевидный пример — поток городского транспорта. Математически *задача максимального потока* формулируется следующим образом:

Пусть каждой дуге (n_i, n_j) сети $G=(N, A)$ поставлено в соответствие некоторое неотрицательное вещественное число c_{ij} , называемое *пропускной способностью* дуги. Выделим на сети два узла n_s и n_t , которые назовем *источником* и *стоком* соответственно. Тогда

потокм величины F из n_s в n_t называется функция x , отображающая A на множество неотрицательных вещественных чисел и удовлетворяющая условиям

$$\sum_{(n_i, n_j) \in A_i^+} x_{ij} - \sum_{(n_j, n_i) \in A_i^-} x_{ji} = \begin{cases} F, & \text{если } n_i = n_s, \\ 0, & \text{если } n_i \neq n_s, n_t, \\ -F, & \text{если } n_i = n_t, \end{cases} \quad (1)$$

$$x_{ij} \leq c_{ij} \text{ для всех } (n_i, n_j) \in A, \quad (2)$$

где A_i^+ — множество дуг с начальным узлом n_i , а A_i^- — множество дуг с конечным узлом n_i . Величина x_{ij} называется *потокм по дуге* (n_i, n_j) . Уравнение (1) показывает, что суммарный поток из источника n_s равен F , суммарный поток из каждого промежуточного узла равен 0, а суммарный поток в сток n_t также равен F . Уравнение (2) утверждает, что поток по каждой дуге не превышает ее пропускной способности. *Максимальным потоком* из n_s в n_t назовем такую функцию x , удовлетворяющую (1) и (2), для которой величина F максимальна.

Пример потока в сети дан на рис. 15.2, на котором первое число, поставленное в соответствие каждой дуге — ее пропускная способ-

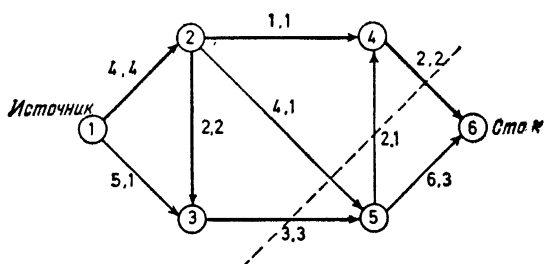


Рис. 15.2. Поток в сети величины 5.

ность, а второе — поток по дуге. Жирными линиями выделены *насыщенные дуги*, т. е. те, поток по которым равен их пропускной способности. На первый взгляд этот поток кажется максимальным, но, как будет показано ниже, в этой сети можно получить поток большей величины (рис. 15.4).

15.4. МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

Введем следующие обозначения: пусть P и Q — два подмножества множества узлов N сети $G=(N, A)$, тогда (P, Q) обозначает множество всех дуг с начальным узлом в P и конечным в Q . Обо-

значим также

$$x(P, Q) = \sum_{\substack{n_i \in P \\ n_j \in Q}} x_{ij}, \quad (3)$$

$$c(P, Q) = \sum_{\substack{n_i \in P \\ n_j \in Q}} c_{ij}. \quad (4)$$

Разобьем теперь N на два непересекающихся множества — P , содержащее источник n_s и дополнительное к нему $\bar{P}$, содержащее сток n_t . Разрезом сети G , отделяющим источник от стока, назовем множество дуг $(P, \bar{P})$. (Очевидно, что, убрав из G все дуги, принадлежащие некоторому разрезу, мы полностью изолируем источник от стока.) Например, пунктирная линия на рис. 15.2 изображает разрез, отделяющий n_1 от n_6 ; здесь $P = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, $\bar{P} = \{n_5, n_6\}$ и

$$(P, \bar{P}) = \{(n_2, n_5), (n_3, n_5), (n_4, n_6)\}.$$

Заметим, что дуга (n_5, n_4) принадлежит к $(\bar{P}, P)$, но не к $(P, \bar{P})$. $c(P, \bar{P})$ назовем пропускной способностью разреза $(P, \bar{P})$. Так, разрез на рис. 15.2 имеет пропускную способность 9. Просуммируем теперь уравнения (1) для всех $n_i \in P$. Проведя сокращения, получим

$$F = x(P, \bar{P}) - x(\bar{P}, P). \quad (5)$$

Так как все $x_{ij} \geq 0$, то $x(\bar{P}, P) \geq 0$; из (2) и (4) следует также, что $x(P, \bar{P}) \leq c(P, \bar{P})$, следовательно,

$$F \leq c(P, \bar{P}). \quad (6)$$

Иными словами, соотношение (6) утверждает, что для произвольного потока и произвольного разреза величина потока всегда не больше пропускной способности разреза. Этот результат довольно очевиден, но он имеет важное следствие. Если мы найдем такой поток x и такой разрез $(P, \bar{P})$, что $F = c(P, \bar{P})$, то мы можем быть уверены, что поток x максимален (а разрез $(P, \bar{P})$ имеет минимальную пропускную способность). Мы покажем ниже, что всегда существует поток x и разрез $(P, \bar{P})$, для которых (6) обращается в равенство, и дадим алгоритм построения такого потока.

Если x — поток в сети $G = (N, A)$, то присоединенной сетью $G'(x)$ назовем сеть, имеющую те же узлы, что и G , и определенные следующим образом дуги. Каждой дуге $(n_i, n_j) \in A$ в сети $G'(x)$ соответствует:

1. Нормальная дуга (n_i, n_j) , если в G

$$x_{ij} < c_{ij} \quad \text{и} \quad x_{ji} = 0 \quad (\text{или} \quad (n_j, n_i) \notin A).$$

2. Обращенная дуга (n_j, n_i) , если в G
 $x_{ij} > 0$.

Зададим следующие пропускные способности дуг присоединенной сети $G'(x)$. Для каждой нормальной дуги (n_i, n_j) положим $c'_{ij} = x_{ij} - c_{ij}$, а для каждой обращенной дуги (n_j, n_i) $c'_{ji} = x_{ij}$. Заметим, что по построению каждой дуге сети $G'(x)$ соответствует определенная дуга из G , имеющая те же конечные узлы. Ориентация этих дуг совпадает, если дуга из $G'(x)$ нормальная, и противоположна, если дуга из $G'(x)$ обращенная.

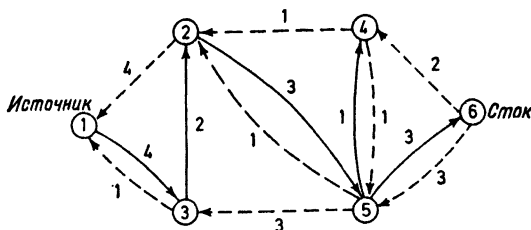


Рис. 15.3. Присоединенная сеть.

На рис. 15.3 показана сеть, присоединенная к потоку в сети рис. 15.2. На рис. 15.3 обращенные дуги изображены пунктирными линиями, числа на дугах показывают их пропускные способности.

Предположим теперь, что на сети $G'(x)$ существует некий путь μ из n_s в n_t и пусть Δ — минимум c'_{ij} , взятый по множеству дуг этого пути. Тогда путь μ определяет цепь γ из n_s в n_t на сети G . (Каждой нормальной дуге μ соответствует прямая дуга γ , а каждой обращенной дуге μ соответствует обратная дуга γ .)

Увеличим теперь в G поток x на величину Δ в каждой прямой дуге цепи γ и уменьшим его на ту же величину в каждой обратной дуге этой цепи. Легко видеть, что при этом не будут нарушены ограничения (2), суммарный поток из каждого промежуточного узла останется равным нулю, а поток из источника в сток увеличится на Δ . Следовательно, мы получим в исходной сети новый поток x' величины $F + \Delta$; так, например, присоединенная сеть рис. 15.3 содержит путь

$$\mu = (n_1, n_3), (n_3, n_2), (n_2, n_5), (n_5, n_6),$$

для которого $\Delta = 2$. Соответствующая модификация потока рис. 15.2 ($F = 5$) приведет нас к новому потоку величины 7, изображенному на рис. 15.4.

Предположим теперь, что сеть $G'(x)$ не содержит ни одного пути из n_s в n_t . Пусть P — подмножество N , состоящее из n_s и всех узлов, достижимых из n_s , т. е. лежащих на путях, исходящих из n_s . Тогда $n_s \in P$ и $n_t \in \bar{P}$, $(P, \bar{P})$ является разрезом G , отделяющим n_s

от n_i . На каждой дуге $(n_i, n_j) \in (\bar{P}, P)$ поток должен быть нулевым. Иначе $G'(x)$ содержала бы обращенную дугу (n_j, n_i) , делающую узел $n_j \in \bar{P}$ достижимым из n_s . Аналогично каждая дуга $(n_i, n_j) \in (P, \bar{P})$

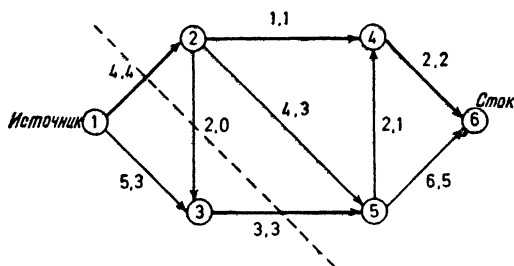


Рис. 15.4. Поток в сети величины 7.

должна быть насыщенной, иначе $G'(x)$ содержала бы нормальную дугу (n_i, n_j) , делающую узел $n_j \in \bar{P}$ достижимым из n_s . Следовательно, $x(\bar{P}, P)=0$, $x(P, \bar{P})=c(P, \bar{P})$ и

$$F = x(P, \bar{P}) - x(\bar{P}, P) = c(P, \bar{P}). \quad (7)$$

Таким образом, как следует из (6) и (7), x — максимальный поток, а $(P, \bar{P})$ — разрез G минимальной пропускной способности.

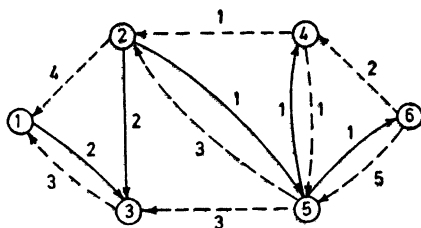


Рис. 15.5. Присоединенная сеть.

На рис. 15.5 изображена присоединенная сеть $G(x)$, где x — поток в сети рис. 15.4. На рис. 15.5 нет пути из источника к стоку и $P=\{n_1, n_3\}$, $\bar{P}=\{n_2, n_4, n_5, n_6\}$. Пунктирная линия на 15.4 показывает соответствующий разрез

$$(P, \bar{P}) = \{(n_1, n_2), (n_3, n_5)\} \quad (8)$$

с пропускной способностью 7, равной величине потока.

Итак, мы доказали следующие утверждения:

1. Поток x в сети G максимален тогда и только тогда, когда присоединенная сеть $G'(x)$ не содержит ни одного пути из источника в сток.

2. Теорему о максимальном потоке и минимальном разрезе (Форд и Фалкерсон, 1962):

Для любой сети максимальная величина потока от источника к стоку равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего источник от стока.

Предположим теперь, что пропускные способности всех дуг сети G — целые числа. Тогда можно предложить следующий простой алгоритм построения максимального потока:

Шаг 1. Выберите произвольно какой-нибудь целочисленный поток из n_s в n_t (один из возможных вариантов — нулевой поток, все $x_{ij}=0$).

Шаг 2. Пусть x — выбранный на шаге 1 поток. Постройте присоединенную сеть $G'(x)$ и найдите в этой сети путь из n_s в n_t . Если такой путь существует, переходите к шагу 3. Если нет — обращайтесь в **КОНЕЦ**.

Шаг 3. Пусть μ — путь из n_s в n_t в сети $G'(x)$, Δ — минимальная пропускная способность на μ и γ — цепь в сети G , порожденная μ . Увеличьте (уменьшите) поток x по каждой прямой (обратной) дуги γ на величину Δ . Затем вернитесь к шагу 2.

КОНЕЦ. Поток x максимален.

Очевидно, что если пропускные способности всех дуг сети целочисленны и на первом шаге выбран целочисленный поток, то и все последующие потоки будут также целочисленными. Так как на шаге 3 величина потока увеличивается как минимум на единицу, максимальный поток будет достигнут за конечное число шагов. Если же пропускные способности дуг не целочисленны, алгоритм может оказаться бесконечным (Форд и Фалкерсон, 1962; Ху, 1969). Однако требование целочисленности не является существенным ограничением в практических задачах. Рациональные величины всегда можно свести к целым приведением к общему знаменателю.

15.5. ПОТОКИ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

Вообще говоря, в сети может существовать несколько потоков одинаковой величины. (Например, в сети рис. 15.2 имеется три различных максимальных потока, одна из альтернатив потоку рис. 15.4 изображена на рис. 15.6.)

В такой ситуации возникает задача выбора из нескольких максимальных потоков одного, минимизирующего некоторую количественную меру, которую мы назовем стоимостью потока. Эту задачу можно сформулировать следующим образом.

Пусть каждой дуге (n_i, n_j) сети $G=(N, A)$ поставлена в соответствие пропускная способность c_{ij} и некоторая неотрицательная

стоимость V_{ij} . Требуется построить такой максимальный поток x , для которого *полная стоимость потока*

$$V(x) = \sum_{(n_i, n_j) \in A} V_{ij} x_{ij} \quad (9)$$

будет минимальной. Например, в транспортной сети V_{ij} может трактоваться как стоимость перевозки единицы продукта вдоль дуги (n_i, n_j) , а $V(x)$ как полная стоимость перевозок, определя-

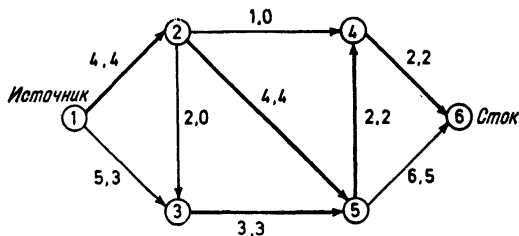


Рис. 15.6.

емых потоком x . В сети дорожного движения V_{ij} трактуется как *время*, необходимое автомобилю для прохождения дуги (n_i, n_j) , а $V(x)$ как суммарное время, затрачиваемое транспортом на путь от источника к стоку. В обоих случаях очевидна желательность минимизации стоимости потока.

Чтобы построить максимальный поток минимальной стоимости, мы будем действовать следующим образом. Предположим вначале, что мы имеем некоторый поток x величины F , стоимость которого минимальна на множестве всех потоков величины F . (Такой поток легко получить. Так как $V(x) \geq 0$ для всех x , то очевидно, что нулевой поток имеет минимальную стоимость среди всех потоков величины 0.) Построим теперь присоединенную сеть, так же как в § 15.4, и припишем каждой из дуг (n_i, n_j) сети $G'(x)$ значение стоимости V'_{ij} , где для каждой *нормальной* дуги $V'_{ij} = V_{ij}$, а для каждой *обращенной* дуги $V'_{ij} = -V_{ji}$.

Предположим теперь, что в сети $G'(x)$ существует путь μ из n_s в n_t , и пусть γ будет соответствующая ему цепь в G . Если мы изменим теперь x , увеличивая (уменьшая) поток в каждой прямой (обратной) дуге цепи γ , *дополнительная стоимость*, связанная с этим изменением, будет равняться сумме стоимостей всех прямых дуг цепи за вычетом суммы стоимостей обратных ее дуг. Следовательно, дополнительная стоимость равна *стоимости пути* μ в сети $G'(x)$

$$V'(\mu) = \sum_{(n_i, n_j) \in \mu} V'(n_i, n_j), \quad (10)$$

т. е. самый дешевый путь от источника к стоку присоединенной сети $G'(x)$ определит и наилучшую (с точки зрения минимальных затрат на увеличение потока) цепь в G . Более того, справедливо следующее утверждение:

Пусть x — поток минимальной стоимости величины F , μ — самый дешевый путь в сети $G'(x)$ минимальной пропускной способности Δ , γ — цепь в G , соответствующая μ . Тогда поток, полученный увеличением (уменьшением) x на прямых (обратных) дугах γ на Δ единиц будет потоком минимальной стоимости величины $F + \Delta$.

Доказательство можно найти в одной из работ, указанных в списке литературы в конце главы (Busacker and Saaty, 1965; Ford and Fulkerson, 1962; Roy, 1970).

Отсюда следует, что максимальный поток минимальной стоимости может быть получен с помощью алгоритма, изложенного в 15.5. Необходимо лишь, чтобы вычисления начинались с потока минимальной стоимости и чтобы на каждом шаге в сети $G'(x)$ выбирался путь минимальной стоимости. В следующем параграфе мы проиллюстрируем этот метод практическим примером.

15.6. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

В этом разделе будет показано, как при некоторых несложных обобщениях рассмотренные выше сетевые модели могут быть использованы при решении ряда прикладных задач.

На первом примере транспортной задачи мы рассмотрим случай нескольких источников и стоков с ограничениями на их мощности. Второй пример покажет, как построение и анализ сетевой модели позволяет решить задачу о назначениях, постановка которой непосредственно не связана с какой-либо физической сетью. В последнем примере рассматривается сетевая модель оптимизации закупок сырья промышленной фирмой.

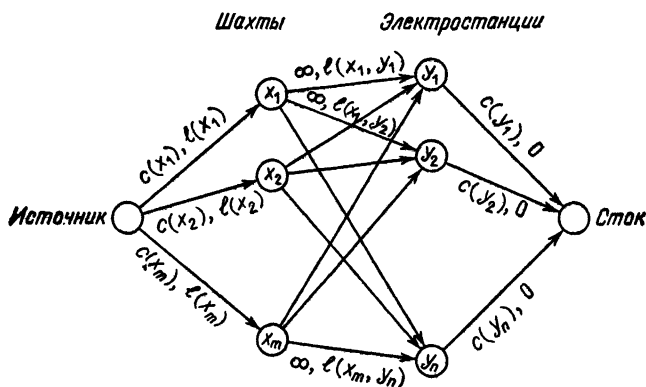
ПРИМЕР 1. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Имеется m угольных шахт $x_1, x_2, \dots, x_m$, и каждая шахта x_i может производить $c(x_i)$ тонн угля в неделю стоимостью $V(x_i)$. Имеется также n электростанций $y_1, y_2, \dots, y_n$, потребляющих $c(y_i)$ тонн угля в неделю. Стоимость перевозки одной тонны из x_i в y_j равна V_{ij} . Сколько угля надо производить на каждой шахте и куда его направлять, чтобы с минимальными расходами удовлетворить потребности всех электростанций?

В терминах сетевой модели проблема может быть сформулирована как задача нахождения максимального потока минимальной

стоимости в сети рис. 15.7, где первые числа указывают пропускную способность, а вторые — стоимость каждой дуги.

Схема 15.8 демонстрирует приложение алгоритма § 15.5 к ре-



шению этой задачи в случае двух шахт и двух станций. В качестве упражнения читатель может нанести значения пропускных способностей дуг на присоединенных сетях.

ПРИМЕР 2. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

В некотором рационально организованном высшем учебном заведении темы дипломных работ студентов определяются следующим образом. Каждый из m научных руководителей $s_1, s_2, \dots, s_m$, представляет список возможных тем. Число предлагаемых тем не ограничивается, но для каждого из руководителей устанавливается верхний предел $c(s_i)$ числа работ, которыми он фактически будет руководить. Таким образом составляется перечень n возможных дипломных работ $p_1, p_2, \dots, p_n$, на котором затем r студентов $u_1, u_2, \dots, u_r$ должны установить свой порядок предпочтений. В результате строится сеть, изображенная на рис. 15.9. Числа на дугах указывают их пропускную способность. Каждой дуге (u_i, p_j) от i -го студента к j -й теме приписывается стоимость $V=k$, $1 \leq k \leq n$, где k — то место, на которое i -й студент поставил j -ю тему в своем порядке предпочтений. Для всех других дуг стоимости равны 0. Очевидно, что любому возможному распределению тем соответствует на сети 15.9 максимальный поток величины r . ($x_{ij}=1$ для дуги (u_i, p_j) , соединяющей i -го студента с назначенной ему j -й темой дипломной работы.) А максимальный поток минимальной стоимости определит такое назначение темы $P(u_i)$ каждому студенту u_i , при котором $\sum_{i=1}^r V(u_i, P(u_i))$ минимальна. Таким образом,

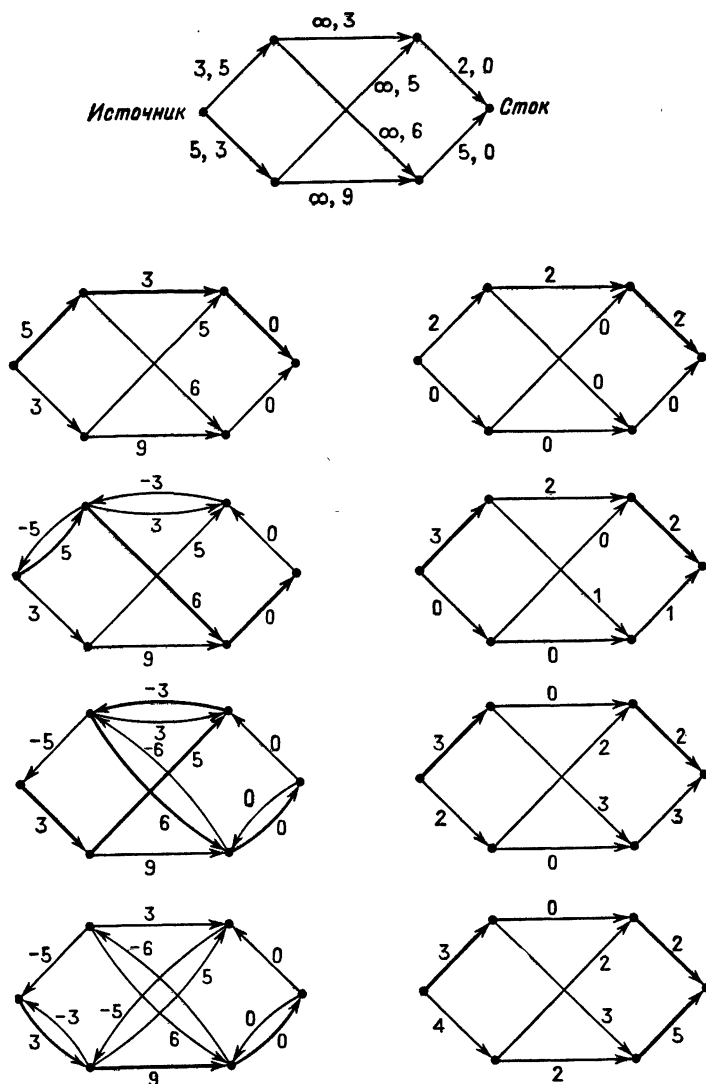


Рис. 15.8. Вверху: исходная сеть (числа указывают пропускные способности и стоимости); слева: присоединенные сети (числа — стоимости, жирные линии — пути минимальной стоимости); справа: последовательное увеличение потоков (числа — потоки, жирные линии — насыщенные дуги).

применяя алгоритм максимального потока, мы получим некоторое разумное распределение тем, и неудачники смогут утешаться тем обстоятельством, что они пострадали ради общего блага. Однако студенты-математики могут возразить, что более справедливо

минимизировать не $\sum_{i=1}^r V(u_i, P(u_i))$, а $\max_{1 \leq i \leq r} \{V(u_i, P(u_i))\}$.

В этом случае возникает так называемая задача «бутылочного горлышка», часто встречающаяся при максимизации потока на конвейерных линиях. Она может быть решена построением последовательности максимальных потоков на сетях, полученных из исходной исключением ряда дуг. (см. Форд и Фалкерсон, 1962).

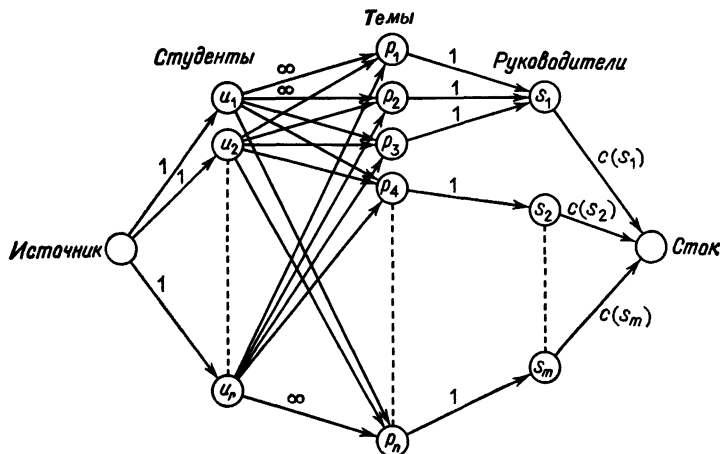


Рис. 15.9.

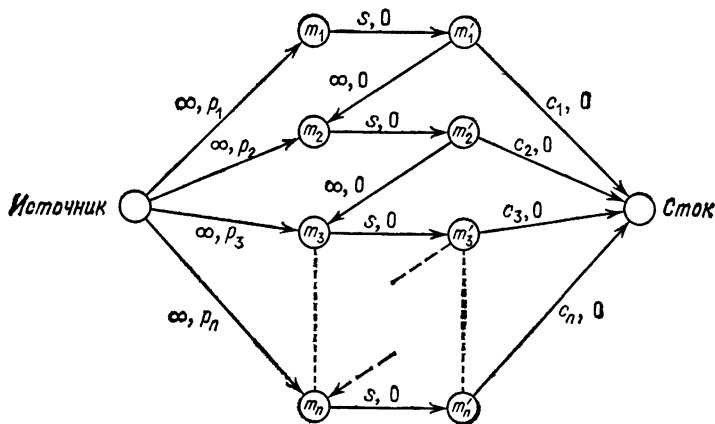


Рис. 15.10.

ПРИМЕР 3. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Фирма закупает сырье в начале каждого месяца. На n ближайших месяцев имеются оценки количества сырья c_i , необходимого для производственного процесса в i -м месяце и стоимости его единицы p_i в начале i -го месяца. Фирма может хранить не более s единиц сырья. В каком количестве необходимо делать закупки в начале каждого месяца, чтобы минимизировать суммарные расходы в течение n месяцев?

Максимальный поток минимальной стоимости в сети рис. 15.10 определяет оптимальную политику закупок. Поток по дуге, соединяющей источник с узлом m_i , определяет количество закупок в начале i -го месяца. Нетрудно также простыми модификациями сети 15.10 учесть такие обстоятельства, как нулевой начальный запас, требуемый конечный запас, стоимость хранения, потеря процентов на истраченный капитал и т. д.

15.7. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

При решении прикладных задач часто появляется необходимость рассмотрения сетевых моделей более общего вида. Например, ограничения на пропускную способность дуг могут иметь более сложную природу, или стоимость потока может нелинейно зависеть от его величины. Однако при этом часто оказывается все же возможным свести задачу к модели, рассмотренной в предыдущих параграфах, и воспользоваться для нахождения решения алгоритмом максимального потока минимальной стоимости. Методы подобного преобразования довольно сложны. Здесь мы укажем лишь основные типы задач, для которых такое преобразование возможно.

Поток по дуге, ограниченный сверху и снизу

Мы предполагали ранее, что ограничения на величину потока имеют вид

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}. \quad (11)$$

Однако для некоторых практических задач ограничения для потока в сети G принимают форму

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}. \quad (12)$$

Если в сети G существует какой-либо поток, удовлетворяющий (12), то максимальный поток x в этой сети может быть определен путем нахождения максимального потока x' , удовлетворяющего (11), в некоторой сети G' , полученной модификацией исходной сети G (Форд и Фалкерсон, 1962).

Таким же образом может быть найден циркулярный поток минимальной стоимости в сети G . Подобная проблема возникает в задаче распределения железнодорожного подвижного состава при заданном расписании (Roy, 1970).

Дуги с нелинейной стоимостью потока

Если стоимость потока по дуге — выпуклая нелинейная функция величины потока, то взяв ее кусочно-линейное приближение, можно построить новую сеть с «параллельными» дугами линейной стоимости. Нетрудно доказать, что алгоритм § 15.5 дает оптимальное решение и для такой расширенной сети (Roy, 1970). Выпуклые функции стоимости возникают при рассмотрении сетей электропередач и дорожного транспорта. (Под «стоимостью» в дорожной сети понимается время прохождения дуги, которое, естественно, является нелинейной функцией плотности движения.)

Максимальные динамические потоки

Для сети G , в которой определены и пропускные способности дуг, и время их прохождения, иногда необходимо найти максимальное количество продукта, которое может достичь стока из источника в заданные p промежутков времени, и определить соответствующий график движения. Такая динамическая задача в сети G может быть сведена к хорошо нам известной статической задаче максимального потока в расширенной сети $G(p)$, в которой каждому узлу n_i сети G соответствует $(p+1)$ узел $n_i(T)$, $T=0, 1, \dots, p$. (Форд и Фалкерсон, 1962.)

15.8. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ

Отметим два очевидных факта:

1. Задача о максимальном потоке, рассмотренная в § 15.4, представляет собой частный случай задачи § 15.5 о максимальном потоке минимальной стоимости. (Стоимости всех дуг равны 0.)

2. Пусть имеется сеть $G=(N, A)$ с источником n_s и стоком n_t . Введем сеть $\tilde{G}=(N, \tilde{A})$, добавив к сети G дугу, направленную из n_t в n_s с бесконечной пропускной способностью и очень большой отрицательной стоимостью. Тогда максимальный поток минимальной стоимости из n_s в n_t на сети $\tilde{G}$ соответствует потоку минимальной стоимости величины 0 на сети $\tilde{G}$.

Определим теперь величины c_{ij} и V_{ij} (для всех $i=1, 2, \dots, p$ и $j=1, 2, \dots, p$) следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{cases} c_{ij}, & \text{если } (n_i, n_j) \in \tilde{A}, \\ 0, & \text{если } (n_i, n_j) \notin \tilde{A}, \end{cases} \\ V_{ij} &= \begin{cases} V_{ij}, & \text{если } (n_i, n_j) \in \tilde{A}, \\ 0, & \text{если } (n_i, n_j) \notin \tilde{A}. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

Как следует из сделанных выше замечаний, все рассмотренные в главе задачи могут быть сформулированы как задачи линейного программирования, а именно:

Найти действительные числа x_{ij} ($i=1, 2, \dots, p$; $j=1, 2, \dots, p$), удовлетворяющие ограничениям

$$\sum_{j=1}^p x_{ij} - \sum_{i=1}^p x_{ji} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, p), \quad (14)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, p; \quad j=1, 2, \dots, p) \quad (15)$$

и минимизирующие функцию

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p V_{ij} x_{ij}. \quad (16)$$

Возможность такой переформулировки ставит ряд интересных вопросов. Чем подход линейного программирования отличается от рассмотренного выше сетевого подхода? Можно ли в свою очередь симплекс-метод свести к алгоритму потока минимальной стоимости, рассмотренному в § 15.5? При каких условиях задача линейного программирования может быть описана сетевой моделью?

Представляем читателю самостоятельно продумать эти вопросы.

Заметим в заключение, что задачи о назначениях и управлении запасами (15.6) могут быть сформулированы в терминах «многошаговых процессов принятия решений» и рассмотрены, естественно, методом динамического программирования (Bellman and Dreyfus, 1962). Здесь снова возникает интересная проблема сравнения различных методов моделирования и решения одной и той же прикладной задачи.

15.9. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Bellman R. E., Dreyfus S. E. Applied dynamic programming, Princeton University Press, New Jersey, 1962.
 Berge C., Ghouila-Houri A. Programming, Games and transportation networks, Methuen, London, 1965.
 Busacker R. G., Saaty T. J. Finite graphs and networks, McGraw-Hill, New-York, 1965.
 Ford L. R., Fulkerson D. R. Flows in networks, Princeton University Press, New Jersey, 1962. (Русский перевод: Форд Л., Фалкерсон Д., Потоки в сетях.— М.: Мир, 1966.)
 Hu T. C. Integer programming and network flows, Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1969. (Русский перевод: Ху Т., Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.)
 Roy B. Algèbre moderne et théorie des graphes, 2, Dunod, Paris, 1970.

15.10. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В транспортных и коммуникационных сетях обычно возникают ограничения сверху на поток, проходящий через каждый узел.

Каким образом эти ограничения могут быть отражены в модели, ограничивающей лишь пропускные способности дуг?

2. Задача о семейной экскурсии. p семей $f_1, f_2, \dots, f_p$, численностью m_i каждая, собираются поехать на экскурсию в q автомобилях $c_1, c_2, \dots, c_q$ вместимости s_i . Можно ли так рассадить пассажиров, чтобы ни в одном автомобиле не оказалось двух или более членов одной и той же семьи?

3. Докажите следующую теорему:

Пусть x — поток величины F на сети $G=(N, A)$. Для того чтобы x был потоком минимальной стоимости (на множестве всех потоков величины F), необходимо и достаточно, чтобы присоединенная сеть $G'(x)$ не содержала ни одного цикла отрицательной стоимости (Busacker and Saaty, 1965; Roy, 1970).

4. Используя утверждение п. 3, докажите теорему § 15.5 о построении максимального потока минимальной стоимости.

5. Транспортные задачи типа рассмотренной в § 15.7 часто решаются методом stepping-stone (разновидность симплекс-метода).

Решите задачу § 15.7 этим методом. Опишите его (в частности, выбор исходного допустимого базисного решения и последующий итеративный процесс) в терминах потоков в сетях. (См. Dantzig G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963.)

6. До сих пор предполагалось, что вдоль сети перемещается только один «продукт», а если имеется несколько пунктов производства и несколько потребителей, то каждый потребитель может снабжаться из любого пункта. Предположим теперь, что мы имеем k продуктов и F_i единиц каждого из них необходимо послать по сети G из источника s_i в сток t_i ($i=1, 2, \dots, k$) при ограничениях на суммарный поток вдоль каждой дуги.

Возникает проблема многопродуктового потока, характерная для ряда транспортных задач. Продумайте подходы к решению такого рода задач (Hu, 1969; Roy, 1970).

7. В чем сходство и различие сетевых потоков, рассмотренных в этой главе, и потоков автотранспорта в сети городских улиц? (См. Herman R. (Ed.), The Theory of Traffic Flow, Elsevier, 1961.)

ГОРОДСКАЯ СТРУКТУРА

Р. Х. ЭТКИН ¹⁾

[Необходимые предварительные сведения: теория множеств
и современная алгебра]

16.1. ВВЕДЕНИЕ

Представления, лежащие в основе математического моделирования, возникли из анализа *систем логики* (Столл, 1961) или наряду с этим из анализа *главных* аксиоматических систем, подобных системам, лежащим в основаниях геометрии (Бланделл, 1961). Эти исследования свидетельствовали о преимуществах, получаемых при формулировании целесообразной системы аксиом некоторым четко определенным математическим способом; таковы, например, ранняя работа Буля в области логики и исследования конечных проективных геометрий. Первый случай служит ясной иллюстрацией использования *алгебры* особого рода, которая *содержит в себе и полностью представляет* аксиоматическую систему; во втором случае обнаруживаем возможность *геометрической* реализации аксиом (даже если имеется еще и алгебраическая реализация). В других областях можно найти попытки создать математические модели в виде систем, например в виде систем линейных дифференциальных уравнений или в виде систем линейных операторов в гильбертовом пространстве; некоторые из таких моделей проиллюстрированы в настоящей книге.

В этой главе автор собирается познакомить читателя с одним из возможных вариантов истолкования понятия городской общности, придать словам «городская структура» некий реальный смысл и сделать это путем попытки введения математического языка, использование которого позволило бы обойтись без упрощения или приближения. Иными словами, автор намерен предложить математическую модель, которая даст полное представление о системе как целостности. Такая модель в случае, если она окажется удачной, будет *являться* структурой, а не «моделировать» структуру в слабом смысле, т. е. пренебрегая чем-то в самой структуре.

¹⁾ R. H. Atkin, Department of Mathematics, University of Essex.

16.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ В ГОРОДСКОЙ ОБЩНОСТИ

Город состоит из различных конечных множеств «объектов». Имеется множество людей (P), множество интересов людей (видов деятельности) (A), множество зданий (B) и множество улиц (S). Город может и не сводиться к перечисленным множествам, но их всегда можно дополнить, да на этой стадии рассмотрения большей точности и не требуется. Например, множество A можно было бы детальнее описать как объединение других множеств, а именно,

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k,$$

где A_1 является множеством видов деятельности, связанных с розничной торговлей,

A_2 — множество общественных форм обслуживания,

A_3 — множество частных услуг (адвокаты, врачи и т. д.) и т. д.

Сущность городской общности заключена в *математических отношениях*, которые существуют между этими различными множествами.

Точнее говоря, множество людей P , например

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_{10}\},$$

связывается отношением со множеством видов деятельности

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_6\},$$

если на вопрос

Q : охвачен ли P_i видом деятельности A_j ?

для каждой пары целых чисел (i, j) , где $i=1, 2, \dots, 10$, $j=1, 2, \dots, 6$, можно дать недвусмысленные ответы. Это условие дает отношение λ , которое обладает *матрицей инцидентности*

$$\Lambda = (\lambda_{ij}),$$

где $\lambda_{ij}=1$ в случае утвердительного ответа на вопрос Q и $\lambda_{ij}=0$ в случае отрицательного ответа на вопрос Q .

Таким образом получается типичная матрица инцидентности вида

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

представляющая отношение

$$\frac{\lambda}{P} \Big| \frac{A}{-}.$$

Обратите внимание, что ответами на вопрос Q должны быть «да» или «нет»; ответы типа «может быть» не допускаются. К тому же на этом этапе вопрос о *ранжировании* видов деятельности $A_1, \dots, A_6$ не встает, хотя его легко принять в расчет на более позднем этапе.

Этому отношению λ можно придать некоторый интуитивный смысл путем задания множества $A = \{A_i\}$ в виде, подобном следующему:

- A_1 — времяпровождение за игрой в гольф;
- A_2 — интерес к местным жителям и событиям;
- A_3 — занятие садоводством;
- A_4 — увлечение автомобилизмом;
- A_5 — изучение в свободное время иностранного языка;
- A_6 — интерес к охране природы и к окружающей среде.

Между, например, множеством зданий B и множеством видов деятельности R будет существовать другое отношение μ , которое описывает розничную торговлю данного города. Таким образом, если R содержит такие элементы, как

- R_1 — торговля косметикой,
- R_2 — торговля молочными продуктами,
- R_3 — мясная торговля,
- R_4 — торговля рыбой и т. д.,

то четко определенным способом получаем матрицу инцидентности μ , которая представляет отношение

$$\frac{\mu}{R} \Big| \frac{B}{-},$$

и если $\mu_{ij}=1$, то вид розничной торговли R_i следует считать размещенным в здании B_j ; если же $\mu_{ij}=0$, то так не считают.

Ясно, что для полного описания рассматриваемого города требуется ряд отношений, подобных λ , μ , ..., между различными парами множеств, подобных P , A , R , B , ... и т. д.

16.3. СТРУКТУРА ОТНОШЕНИЯ

Отношение λ между двумя конечными множествами Y и X является подмножеством декартова произведения $Y \times X$, так что можно записать $\lambda \subset Y \times X$. Если пара $(Y_i, X_j) \in \lambda$, то Y_i находится в отношении λ к X_j . Отношение можно представить *матрицей*

инцидентности $\Lambda = (\lambda_{ij})$, где

$$\lambda_{ij} = 1, \text{ если } (Y_i, X_j) \in \lambda,$$

и

$$\lambda_{ij} = 0, \text{ если } (Y_i, X_j) \notin \lambda.$$

Каждое такое отношение λ порождает *симплициальный комплекс*, обозначаемый через $K_Y(X; \lambda)$, а под «структурой отношения λ » будет подразумевать именно этот комплекс (или его абстрактную геометрическую реализацию). Комплекс $K_Y(X; \lambda)$ определяется следующим образом:

1. $K_Y(X; \lambda)$ является совокупностью симплексов $\{\sigma_p; p=0, 1, \dots, N\}$.
2. Каждый симплекс $\sigma_p \in K$ однозначно определяется некоторым подмножеством из $(p+1)$ различных X_i , для которого имеется по крайней мере одно $Y_k \in Y$, такое, что $(Y_k, X_i) \in \lambda$ для каждого из $(p+1)$ значений i .
3. Симплекс σ_0^i отождествляется с $X_i, i=1, \dots, n$ (n — число элементов множества X).
4. Каждое подмножество симплекса σ_p , определяемое его $q+1$ вершинами ($q < p$), называется q -гранью симплекса σ_p и образует $\sigma_q \in K$ (записывается $\sigma_q < \sigma_p$).

Число N из п. 1 называется *размерностью* комплекса K и записывается как $\dim K$; оно означает наибольшую размерность для любых $\sigma_p \in K$. Множество X также называется *множеством вершин* комплекса $K_Y(X; \lambda)$; заметим также, что, согласно 2, каждый симплекс $\sigma_p \in K$ соответствует по крайней мере одному $Y_k \in Y$. Когда это не может привести к путанице, будем говорить просто о множестве Y , обозначающем симплексы из $K_Y(X; \lambda)$.

Аналогично, если считать, что Y представляет собой множество вершин, то λ^{-1} дает *сопряженный комплекс* $K_X(Y; \lambda^{-1})$, в котором X_i обозначают симплексы. Заметим здесь, что матрицей инцидентности для λ^{-1} является матрица Λ^T , полученная транспонированием Λ .

Отношение между людьми P и видами деятельности A , рассмотренное выше, дает простой числовой пример отношения $\lambda \subset Y \times X$. В этом случае $Y=P$ и $X=A$.

Рассматривая комплекс $K_p(A; \lambda)$, замечаем, что

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle & \text{ есть } \sigma_3 \text{ (его имя } P_1); \\ \langle A_1 A_2 A_5 \rangle & \text{ есть } \sigma_2 \text{ (его имя } P_2), \end{aligned}$$

и т. д.

Геометрическую реализацию комплекса можно получить в евклидовом пространстве E^n и, вообще говоря, можно показать, что

$H=2N+1$, где $N=\dim K$. На рис. 16.1 показана реализация для $K_Y(X; \lambda)$.

Определим важное для структуры этого рода понятие *q-связанности*.

Для заданной пары симплексов $\sigma_p, \sigma_r \in K$ будем говорить, что

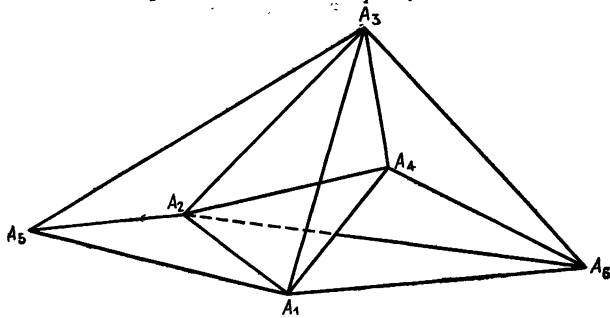


Рис. 16.1.

они соединяются цепью связи, если существует такая конечная последовательность симплексов

$$\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}, \dots, \sigma_{a_h},$$

что

- 1) σ_{a_1} — грань симплекса σ_p ,
- 2) σ_{a_h} — грань симплекса σ_r ,
- 3) σ_{a_i} и $\sigma_{a_{i+1}}$ разделяются общей гранью, скажем σ_{β_i} ,

для $i=1, \dots, (h-1)$.

Будем говорить, что эта цепь связи является *q-связанностью*, если q представляет собой наименьшее из целых чисел

$$\{\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{h-1}, \alpha_h\}.$$

В частности, видим, что симплекс σ_p должен рассматриваться как p -связанный с самим собой, хотя он не может быть $(p+1)$ -связанным ни с каким другим симплексом.

Нетрудно доказать, что если σ_p и σ_r q -связаны, то они также $(q-1)$ -, ..., 1- и 0-связаны в K .

Процесс выделения наибольших частей комплекса K , которые q -связаны для всех значений q от 0 до $\dim K$, предусматривает разделение симплексов из K на каждом уровне q . Таким образом, можно ввести на симплексах из K отношение γ_q , определяемое следующим образом: $(\sigma_p, \sigma_r) \in \gamma_q$ тогда и только тогда, когда симплекс σ_p q -связан с σ_r . Это отношение γ_q рефлексивно, симметрично и транзитивно, а следовательно, является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности для отношения γ_q являются элементами фактормножества K/γ_q и определяют разбиение комплекса K .

Обозначим число элементов множества K/γ_q через Q_q ; оно равно количеству различных q -связанных компонент в K .

Анализ K путем отыскания всех значений

$$Q_0, Q_1, \dots, Q_N,$$

где $N = \dim K$, называется Q -анализом на K .

Алгоритм отыскания значений q для общих граней всех пар симплексов в K , а значит и алгоритм получения значений Q_q , использует матрицу инцидентности Λ , которая определяет K .

Если множества Y и X содержат m и n элементов соответственно, то матрицей Λ служит матрица размера $(m \times n)$, состоящая из нулей и единиц. В произведении $\Lambda \Lambda^T$ число, стоящее на месте (i, j) , является скалярным произведением строк i и j матрицы Λ . Это число равно поэтому числу единиц, стоящих на одних и тех же местах в строках i и j матрицы Λ . Оно равняется, следовательно, значению $(q+1)$, где q — размерность общей грани симплексов σ_p и σ_r , представленных строками i и j . Итак, алгоритм состоит в следующем. Чтобы найти значения q для общих граней всех пар Y -симплексов в $K_Y(X; \lambda)$, необходимо:

1. Составить матрицу $\Lambda \Lambda^T$ размера $(m \times m)$.
2. Оценить $\Lambda \Lambda^T - \Omega$, где $\Omega = (\omega_{ij})$, а $\omega_{ij} = 1$ для $i, j = 1, 2, \dots, m$.

Анализ для $K_X(Y, \lambda^{-1})$ проводится путем составления матрицы $\Lambda^T \Lambda - \Omega'$, где Ω' является матрицей размера $(n \times n)$, состоящей из единиц. Комплекс, приведенный на рис. 16.1, дает, например, следующий набор значений q , причем для облегчения анализа воспроизведена только верхняя треугольная «половина» симметричной матрицы $\Lambda \Lambda^T - \Omega$, в которой вместо $q = -1$ ставится черточка (символ несвязанности):

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	
3	1	0	1	2	0	2	0	2	0	P_1
	2	—	0	0	0	1	0	1	1	P_2
		0	—	0	0	—	0	—	—	P_3
			1	1	—	1	—	1	—	P_4
				3	0	2	0	1	0	P_5
					1	—	1	—	0	P_6
						3	—	2	1	P_7
							1	—	0	P_8
								2	0	P_9
									2	P_{10}

Целые числа на диагонали являются размерностями симплексов P , а Q -анализ производится проверкой других комбинаций номеров строк и столбцов. Таким образом, имеем $\dim K=3$, так как P_1 , P_5 и P_7 — симплексы размерности 3 и

при $q=3$, $Q_3=3$, а именно, $\{P_1\}$, $\{P_5\}$ и $\{P_7\}$;
 при $q=2$, $Q_2=3$, а именно, $\{P_1, P_5, P_7, P_9\}$, $\{P_2\}$ и $\{P_{10}\}$;
 при $q=1$, $Q_1=2$, а именно, $\{P_1, P_2, P_4, P_5, P_7, P_9, P_{10}\}$ и $\{P_6, P_8\}$;
 при $q=0$, $Q_0=2$, а именно, $\{\text{все } P_i\}$.

Таким образом, для конкретного отношения λ можно видеть, как цепи связи соединяют людей P_i в этой гипотетической общности.

При $q=3$ никакие два человека не являются 3-связанными, но P_1 , P_5 и P_7 входят в одну и ту же компоненту при $q=2$. На этом уровне P_2 и P_{10} будут изолированными, но они соединяются с другими при $q=1$, причем на этом уровне P_6 и P_8 входят в отдельную, но несвязанную компоненту. Фактически P_6 и P_8 являются 1-связанными через общую грань (одномерный симплекс $\langle A_3, A_5 \rangle$). По отношению к λ P_6 и P_8 — одинаковые люди, характеризующиеся видами деятельности A_3 (садоводство) и A_5 (иностранный язык). В конце концов все люди оказываются в одной компоненте при $q=0$, так что должны быть цепи 0-связи, которая объединяет всех их вместе (в худшем случае эти цепи составят дерево, имеющее больше одной ветви).

16.4. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Полная совокупность математических отношений λ_i , $i=1, \dots, h$, которые используются для представления городской общности, порождает совокупность, состоящую из $2h$ симплицальных комплексов, по два для каждого λ_i . Эту совокупность S называют *статическим фоном* рассматриваемой общности. На языке абстрактных геометрических понятий это означает, что фон S обладает многомерной структурой в евклидовом пространстве E^{2k+1} , где $k=\max\{\dim K; K \in S\}$. *Динамика общности* должна функционировать именно на этом фоне (другими словами, именно в этой геометрии фона S). Эта динамика будет описываться изменениями моделей (математических функций), определяемых на симплексах совокупности S ; точнее говоря, вводится следующее определение:

Определение I. Моделью π симплицального комплекса K является отображение

$$\pi: K \rightarrow J,$$

при котором образ любого симплекса σ_p , входящего в K (обозначим $\pi(\sigma_p) = (\sigma_p, \pi)$), принадлежит J ; это J обозначает подходящую арифметику.

Приращения в конкретной модели π , рассматриваемые в качестве новой модели $\delta\pi$, можно интерпретировать как «силы» или «воздействия общности», действующие в комплексе K в фоне S . Но так как каждый комплекс K является структурой, разбитой на категории, то естественно считать, что модель *разбита на категории*, записывая это в виде

$$\pi = \pi^0 \oplus \pi^1 \oplus \dots \oplus \pi^t \oplus \dots \oplus \pi^N, \quad N = \dim K,$$

так что

$$\delta\pi = (\delta\pi)^0 \oplus (\delta\pi)^1 \oplus \dots \oplus (\delta\pi)^N.$$

В этом случае оказывается возможным принять в расчет уровень (уровень t), связанный с определенной моделью $\delta\pi$, введя следующее определение:

Определение II. Если $(\delta\pi)^t \in \delta\pi$ является ненулевой моделью, то будем говорить, что она связана с t -силой в фоне S , и назовем отношение $(\sigma_t, (\delta\pi)^t) \div (\sigma_t, \pi^t)$, если оно определено, *интенсивностью t -силы на симплексе σ_t* .

Теперь наиболее важная особенность этих моделей $\delta\pi$ состоит в их связи с геометрией фона и зависимости от нее. Как показывает следующий довод, главное в данном контексте — это структура связанности фона S .

Введем оператор f , называемый *грань-оператором*, который должен заменять симплекс σ_p всеми его гранями, определяемыми p элементами X_i . Точнее, если

$$\sigma_p = \langle X_1 X_2 \dots X_{p+1} \rangle,$$

то

$$\begin{aligned} f(\sigma_p) &= f \langle X_1 X_2 \dots X_{p+1} \rangle = \text{множеству всех граней} = \\ &= \bigcup_{i=1}^{p+1} \langle X_1 X_2 \dots \hat{X}_i \dots X_{p+1} \rangle, \end{aligned}$$

где $\hat{X}_i$ означает, что X_i не должен входить в определяющее симплекс множество $\{X_k\}$. Таким образом,

$$f(\sigma_p) = \bigcup_i \sigma_{p-1}^i, \quad \text{где } \sigma_{p-1}^i \leq \sigma_p.$$

К этому оператору имеется естественный двойственный оператор, который будем обозначать через Δ и называть *когрань-оператором*. Он связывается с f посредством такого определения $\Delta\pi^{p-1}$ на σ_p , что

$$(\sigma_p, \Delta\pi^{p-1}) = (f\sigma_p, \pi^{p-1}).$$

Сразу же заметим, что если π определяется на p -симплексе σ_p , то $\Delta\pi$ определяется на $(p+1)$ -симплексе σ_{p+1} , где $\sigma_p \leq \sigma_{p+1}$.

Если обозначить все p -симплексы комплекса K через K^p , то можно записать

$$K = K^0 \cup K^1 \overset{\overleftarrow{f}}{\underset{\overrightarrow{\Delta}}{\cup}} \dots K^p \overset{\overleftarrow{f}}{\underset{\overrightarrow{\Delta}}{\cup}} K^{p+1} \cup \dots \cup K^N,$$

а стрелки обозначают направления операторов f и Δ , причем, конечно же, Δ действует на модели (на K).

С любым заданным приращением $\delta\lambda$ модели π можно связать новую модель $\Delta\pi$ (поскольку она определяется моделью π) равенством

$$(\sigma_t, \delta\pi) = (f^{-1}\sigma_t, \Delta\pi), \quad (1)$$

где

$$f^{-1}\sigma_t = \bigcup_i \sigma_{i+1}^i, \quad \sigma_t \leq \sigma_{i+1}^i, \quad \left(\bigcup_i \sigma_{i+1}^i, \pi \right) = \sum_i (\sigma_{i+1}^i, \pi).$$

Таким образом, t -силу связывают с моделью $\Delta\pi$, определяемой на некоторых заданных $(t+1)$ -симплексах.

Но теперь видно, каким образом влияет геометрия фона S на роль этой модели $\Delta\pi$ t -силы, являющейся результатом приращения $\delta\lambda$. Если симплекс $\sigma_t \in K$ таков, что $f^{-1}\sigma_t$ — пустое множество, так что нет $(t+1)$ -симплексов, для которых σ_t является гранью, то $\Delta\pi$ — неопределенная модель. Это вытекает из того, что в силу (1) значение $\delta\lambda$ на σ_t , т. е. $(\sigma_t, \delta\pi)$, перераспределяется (разбивается) над множеством $f^{-1}\sigma_t$, и эти компоненты (разбиения) приписываются $\Delta\pi$. Таким образом, если мощностью $f^{-1}\sigma_t$ является $N_{t+1}=0$, то $f^{-1}\sigma_t$ не определено, а значит, $\Delta\pi$ — неопределенная.

Если вернуться к Q -анализу из § 16.3, то увидим, что числа Q_r , $r=0, 1, \dots, \dim K$, дают меру количества существующих симплексов σ_r , которые не являются гранями некоторого σ_{r+1} . Поэтому числа

$$Q = \{Q_n, Q_{n-1}, \dots, Q_1, Q_0\}, \quad n = \dim K,$$

образуют вектор, называемый *вектором структуры* $Q(K)$ комплекса K . Этот вектор структуры уже является, следовательно, показателем встроенного геометрического *препятствия* для существования $\Delta\pi$ при любом π . По причинам, разбирать которые здесь не будем (они указаны в работе Эткина (1974)), если $Q_0=1$, можно ввести *вектор препятствия* $\tilde{Q}$ с компонентами

$$\{Q_n-1, Q_{n-1}-1, \dots, Q_1-1, 0\},$$

который является лучшим показателем этого эффекта.

Попросту говоря, высокое значение t -компоненты вектора препятствия $\tilde{Q}(K)$ показывает, что для свободного изменения моделей на этом уровне t есть встроенное геометрическое препятствие. Изменения могут быть допустимыми (в геометрической структуре фона S), только если они принимают бесконечные значения ($N_{t+1}=0$),

что на практике исключено. Отсюда следует, что возрастание $\tilde{Q}$ (любой из его компонент) является признаком увеличения жесткости в динамике общности.

Для примера рассмотрим город Саутенд-он-Си в Эссексе, Великобритания, который (как и многие другие города) печатает свою «карту города». На ней показано 19 жилых районов в границах города и всего 30 городских и общественных мест отдыха от парков и различных школ до пляжей и фонтанов. Хотя данных довольно мало и они необработанные, тем не менее их достаточно для иллюстрации рассмотренных идей.

Q -анализ отношения λ дал следующие результаты:

1. Крупнейший жилой район являлся симплексом порядка 14.
2. Для двух следующих районов $q=10$, но на этом этапе никакие из трех районов не были связаны; таким образом, $Q_{10}=3$.
3. Для других районов значения q оказались более низкими, но первый признак длинной цепи связи появляется при $q=5$; при $q=6$ имеем $Q_6=9$, а при $q=5$ имеем $Q_5=3$.
4. Полный вектор структуры $Q(K)$ принимает вид $Q(K)=\{1, 1, 1, 1, 3, 5, 8, 11, 9, 3, 4, 1, 1, 1, 1\}$.
5. Вектором препятствия был, следовательно,

$$\tilde{Q}(K)=\{0, 0, 0, 0, 2, 4, 7, 10, 8, 2, 3, 0, 0, 0, 0\}.$$

6. Он показал, что изменение любой модели π_t , для которой $t>4$, было бы затруднено препятствием при явном возрастании компоненты этого вектора при $t=6$. Сразу же можно было бы сказать, что, например, если модель плотности населения является жесткой, то она должна соответствовать π_t при $t>4$. Обычно в действительности подтверждалось, что вектор препятствия для города, основанный на этих конкретных данных, соответствовал четко установленным жесткостям в нескольких обычно рассматриваемых основных моделях.

Таким образом, можно видеть, что взаимодействие между видами человеческой деятельности и пространственным распределением в типичной городской структуре должно разворачиваться на фоне основного комплекса со всеми его связанностями. Следствия из этого факта для планирования и развития города ясно видны всем.

Подкупающее философское следствие из этой точки зрения состоит в том, что нельзя больше считать возможным адекватно описать эту особую человеческую драму в рамках рассматриваемого физиками четырехмерного мира обычного пространства-времени. Размерность этого человеческого мира взаимодействия опреде-

ляется комплексами $K(X)$ и $K(Y)$, которые используются для описания фона.

Приведем другой упрощенный пример.

Возьмем гипотетический фон S , содержащий отношение $\lambda \subset P \times A$, уже обсуждавшееся вместе с Q -анализом $K_p(A; \lambda)$ в § 16.3. Возьмем модель π на этом определенном комплексе, где

$\pi(\sigma_p) = (\sigma_p, \pi)$ = полным расходам множества P на σ_p

за год, так что $(\sigma_p, \pi) = x$ фунтов стерлингов, а x — неотрицательное целое число. Если считать известными индивидуальные расходы, скажем x_{ij} , для каждого P_i на A_j ($i=1, \dots, 10$; $j=1, \dots, 6$), то значение модели π на каждом σ_p определится следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}, \text{ так как } P_1 = \langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle, \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} + x_{25}, \text{ так как } P_2 = \langle A_1 A_2 A_5 \rangle, \end{aligned}$$

и т. д.

Теперь x_1 , например, определяет значение $x_{11} + x_{12}$ на грани $\langle A_1 A_2 \rangle$ у P_1 , и т. д. Следовательно, находится полная модель π и, например, значение

$$(\langle A_1 A_2 A_4 \rangle, \pi) = (x_{11} + x_{12} + x_{14}) + (x_{71} + x_{72} + x_{74}),$$

которое выражает тот факт, что P_1 и P_7 разделяет 2-грань $\langle A_1 A_2 A_4 \rangle$.

Эта модель $\pi: K \rightarrow J$ фунтов стерлингов является существенной частью динамики данной общности и весьма сложным образом определяется геометрией фона S .

Например, если S подвергается изменению путем устранения A_1 (распахивание площадки для игры в гольф), то все размерности симплексов P_1, P_2, P_4, P_5, P_7 и P_9 уменьшаются на единицу. Это воспринимается как воздействующая на людей сила общности. Эта сила прямо выражается *изменением* π , так как устранение A_1 дает в результате $x_{i1} = 0$ для всех i . Таким образом, π превращается в $\pi' = \pi + \delta\pi$, а $\delta\pi$ принимает отрицательные значения; например, на 3-симплексе $\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle$, $\delta\pi = -\pi$, так как этот симплекс из S_1 выпал; на 1-симплексе $\langle A_2 A_4 \rangle$, $\delta\pi = 0$, так как $\pi' = \pi$. Везде, где $\delta\pi$ отрицательно, его можно интерпретировать как «силу отталкивания» в структуре — по ее значению на $\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle$ можно сделать вывод об отсутствии этого тетраэдра. Интенсивность этой 3-силы отталкивания (привязанной к симплексу $\langle A_1 A_2 A_3 A_4 \rangle$) будет отношением значения $\delta\pi$ к значению π , или -1 .

Но теперь мы сталкиваемся с возможностью существования «закона инерции» для социальной общности, в которой, как известно из нашего собственного опыта, наши расходы, по-видимому,

никогда не убывают. Разумеется, это обстоятельство (если оно верно) может быть обусловлено разными причинами, но часть истины вполне мог бы содержать следующий гипотетический постулат.

Предположим, что если A_1 удаляется из S , то модель π перераспределяется на оставшихся симплексах таким образом, что полный расход остается постоянным. Другими словами, если P_1 должен отказаться от своей воскресной игры в гольф, то, для компенсации, он будет расходовать больше, например, на свой сад. Довольно естественно, что он воспринимает такое изменение как *социальную силу* (в структуре).

Это приводит к изменению $\pi \rightarrow \pi' = \pi + \delta\pi$, где $\delta\pi$ теперь является моделью, которой не нужно принимать на симплексах из S только отрицательные (или нулевые) значения. Поэтому можно ожидать, что в различных частях геометрии S найдутся t -силы притяжения ($\delta\pi$ положительно), равно как и силы отталкивания ($\delta\pi$ отрицательно). Такая ситуация может также возникнуть при обстоятельствах, которые вовсе не связаны ни с какими радикальными изменениями в статическом фоне S . Общий результат состоит в том, что при полном описании общности, включающем не только людей и виды деятельности, но и здания, улицы и регулирование уличного движения, по-видимому, у нас будет множество моделей $\{\pi_i\}$, где i принадлежит некоторому множеству индексов I . Изменения этих моделей, дающие модели $\{\Delta\pi_i\}$, будут описываться в терминах t -сил отталкивания и притяжения в структуре S . Если в природе научных «законов» должно быть что-то, описывающее эту динамику, то мы вправе ожидать, что они являются *функциональными соотношениями, связывающими* $\Delta\pi_i$, $i \in I$.

Приведенный выше простой пример показывает возможность наличия одного такого «закона» — закона сохранения расходов, разновидности закона инерции, выражаемого в виде

$$\sum_p (\sigma_p, \delta\pi) = \sum (\sigma_p, \pi) - \sum (\sigma_p, \pi') = 0$$

при $\sigma_p \in S$. При этих обстоятельствах должно соблюдаться равновесие определенного рода, при котором силы притяжения в целом компенсируют силы отталкивания.

Ссылаясь еще раз на отношение λ в § 16.3, заметим, что людей P_i (которых в более общем контексте следует заменить на здания, улицы, общественные интересы, политические убеждения и т. д.) можно некоторым образом охарактеризовать геометрическими связями, которыми они обладают (в данном абстрактном геометрическом пространстве S). Для того чтобы это сделать для каждого индивидуума P_i , вводится число $\text{Есс}(P_i)$, которое будем называть его *эксцентриситетом*. Оно служит мерой его изоляции от других людей.

Вводятся следующие понятия:

1. Верхнее значение q для P_i , т. е. $\hat{q} = \dim P_i$ в K .
2. Нижнее значение q для P_i , т. е. $\check{q}$ = наибольшему значению q , при котором P_i становится связанным с любым отдельным P_j .

Тогда эксцентриситет определяется как

$$\text{Есс}(P_i) = \frac{\hat{q} - \check{q}}{\check{q} + 1}.$$

Таким образом, $\text{Есс}(P_i) = \infty$, только если $q = -1$, т. е. если P_i полностью изолирован от всех остальных.

Из таблицы в § 16.3 видно, что, например,

$$\text{Есс}(P_1) = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3},$$

тогда как

$$\text{Есс}(P_8) = \frac{1-0}{0+1} = 1 \quad \text{и} \quad \text{Есс}(P_4) = 0.$$

Таким образом, можно было бы сказать, что P_8 более эксцентрический, чем P_1 , а P_4 имеет в этой структуре нулевой эксцентриситет — для него верхнее значение q равно нижнему значению.

Вообще создается впечатление, что каждый человек в общности постоянно занят борьбой за достижение подходящего значения его эксцентриситета $\text{Есс}(P)$; он не хочет быть ни слишком похожим на других, ни слишком выделяющимся — или же он может быть человеком такого сорта, который борется за $\text{Есс}(P) \rightarrow 0$ (или ∞ ?).

Эти указания на *метод* анализа, язык связанности, не должны смешиваться с довольно тривиальными конкретными иллюстрациями. Важность этого языка основана на том факте, что он предлагает каждому из нас готовый набор исходных элементов для построения модели; он вовсе не предлагает конкретной модели. В этом смысле он является иллюстрацией «метамодели». Следовательно, он не может быть «ошибочным» на уровне модели, он может быть лишь плохо применяемым.

16.5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Atkin R. H. (1972). From cohomology in physics to q -connectivity in social science, Int. J. Man-Machine Studies, 4.
- Atkin R. H. (1974). An algebra for patterns on a complex, Int. J. Man-Machine Studies, 6.
- Atkin R. H. (1974). Mathematical structure in human affairs. Heinemann Educational Books Ltd.: London.
- Atkin R. H. et al, (1972). Research Report I. Urban structure project, University of Essex.

- Blundell L. M. (1961). A modern view of geometry, W. H. Freeman; San Francisco, California.
- Stoll R. S. (1961). Sets, logic and axiomatic theories, W. H. Freeman; San Francisco, California.

16.6. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Возьмите реальную ситуацию, знакомую вам (дом, школа, розничная торговля и т. д.), и укажите в ней два конечных множества, X и Y . (В розничной торговле X могло бы быть множеством отдельных магазинов, а Y — множеством различных видов товаров, которые в них продаются.) Укажите отношение $\lambda \subseteq Y \times X$ и опишите два комплекса, $K_Y(X; \lambda)$ и $K_X(Y, \lambda^{-1})$. Найдите вектор структуры Q и соответствующий вектор препятствия $\tilde{Q}$. Найдите также эксцентриситеты каждого Y_i и каждого X_j .

2. отождествите модели по вашему выбору (1), например, подсчитывая людей, автомобили, распродажи, ранжирования (нравится и не нравится по шкале 0—10). Рассмотрите наблюдаемые изменения для этих моделей, дайте их интерпретацию на языке социальных сил в структуре.

СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ЗНАЧЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Д. ЧИЛЛИНГУОРТ ¹⁾

[Предварительных знаний не требуется]

17.1. ВВЕДЕНИЕ

Общие представления об *устойчивости* носят основополагающий характер в нашем восприятии мира. Мы в состоянии образовывать мысленные образы лишь таких явлений и структур, которые устойчиво сохраняются во времени или повторяются. Без наличия определенной устойчивости не может существовать сознание, да и вообще живой организм.

Несмотря на достаточную обоснованность этого теоретического принципа, его практическое применение, очевидно, недостижимо без предварительной его формулировки на языке математики и установления границ, в пределах которых следует обсуждать общие идеи об устойчивости моделей. Тем не менее едва ли можно считать, что мы располагали таким языком до шестидесятых годов нашего столетия, когда появилась замечательная работа французского математика Рене Тома. В своей оригинальной книге (Том, 1972), посвященной проблеме устойчивости в целом и ее приложениям к исследованию структур и развития живых систем, Том заложил основы общей теории устойчивости, применимой к математическим моделям самых разнообразных типов ²⁾.

Главный принцип теории Тома состоит в том, что *качественное* объяснение явлений ни в какой мере не является чем-то второстепенным по отношению к их количественному описанию (как это зачастую принималось в современной науке), — напротив, оно носит основополагающий характер и обычно является значительно более существенным. Было бы тщетным пытаться предсказывать точное число листьев, которые появятся на дереве; гораздо важнее уметь различать, скажем, дуб и ясень по их качественным, структурным особенностям. Таким образом, во многих приложениях, особенно в биологии, социологии и психологии, математический метод должен

¹⁾ D. R. J. Chillingworth, Department of Mathematics, University of Southampton.

²⁾ Правильнее будет сказать, что основы общей теории устойчивости были заложены А. М. Ляпуновым и А. Пуанкаре в конце прошлого века и развиты затем в трудах ряда ученых, в том числе и Р. Тома. — *Прим. ред.*

прежде всего существенно отражать качественную сторону; затем, видимо, можно принять во внимание и количественную сторону дела, коль скоро построена удовлетворительная качественная модель. Следует также иметь в виду, что количественные методы часто используются, чтобы получить выводы по существу качественного характера в таких, например, областях практических приложений, как решение вопроса о том, обрушится ли данный мост под действием сильного ветра, или о том, навсегда ли останутся орбиты всех планет солнечной системы близкими к эллиптическим.

Можно подойти к общему определению устойчивости математической модели, говоря, что данная модель *структурно устойчива*, если достаточно малые изменения в структуре самой модели вызывают такое ее поведение, которое в некотором смысле качественно аналогично поведению исходной модели. Разумеется, в каждом конкретном случае мы должны точно определить, что подразумевается под выражениями «достаточно малые» и «качественно аналогично». В результате мы естественным образом приходим к определению *потери устойчивости*, и именно здесь идеи Тома получают далеко идущие приложения.

Ясно, что идеальным решением проблемы было бы получение явной системы критериев, гарантирующих структурную устойчивость или, напротив, неустойчивость любой заданной математической модели, а также полного описания всех способов потери устойчивости. Ясно однако и то, что такая цель никогда не может быть достигнута без предварительной конкретизации типа модели, причем даже для наиболее простых типов поставленная задача выглядит слишком претенциозной. Тем не менее, как показал Том и как мы увидим ниже, определенный прогресс все-таки возможен.

Простейшим примером понятия устойчивости, с которым мы сталкиваемся в прикладной математике, служит определение *устойчивого равновесия* динамической системы. Это понятие важно не только для механики, но и при изучении более общих типов динамических систем — экономических, биологических, электрических и т. д. Существует хорошо разработанный математический аппарат для анализа возможных направлений, по которым развивается поведение системы при малых отклонениях от заданного положения равновесия, а следовательно, и для выяснения того, является ли равновесие «сильно устойчивым», или только «просто устойчивым», или оно устойчиво лишь по отношению к некоторым типам возмущений, будучи неустойчивым под действием других возмущений. Здесь, однако, мы не будем заниматься вопросами такого рода, а рассмотрим более широкую задачу, связанную с анализом устойчивости более общего типа.

Предположим, имеется некоторая система, находящаяся в равновесии, причем сама система медленно изменяется в результате изменения ряда существенных ее параметров. Что произойдет с рав-

новесием? Естественно ожидать, что равновесие также будет медленно изменяться. Может случиться так, что с изменением параметров равновесие будет становиться все менее устойчивым и, наконец, при определенном значении или значениях параметров оно станет неустойчивым или даже вообще неосуществимым. В результате поведение параметризованной системы будет подвергаться внезапному переключению с одного равновесного состояния в другое, которое может быть весьма далеким от первоначального. Математическое исследование, а по возможности и предсказание резких изменений такого рода, несомненно, представляет значительный интерес для любой ситуации, когда система с непрерывными входными данными обнаруживает внезапные скачкообразные изменения на выходе (например, разрушение экономики или строительного сооружения, а также появление четко очерченных геометрических структур при развитии некоторого участка биологической ткани).

Общая природа таких скачкообразных изменений оставалась далеко не ясной, пока Том не показал, что для некоторого широко распространенного вида динамических систем, в которых на практике наблюдаются скачкообразные изменения на выходе, можно дать геометрическое описание путей, по которым происходят такие изменения. Эти пути подпадают под небольшое число классифицируемых типов, названных им *элементарными катастрофами*.

Цель данной главы состоит в том, чтобы дать точную, хотя и не вполне совершенную, формулировку теоремы Тома и наметить направления, на которых с использованием этих важных результатов, а также сообщаемых ниже сведений относительно геометрии элементарных катастроф мы сможем получить ряд новых рекомендаций по конструированию математических моделей, описывающих реальные ситуации, включающие внезапные «катастрофические» изменения.

Это, по существу, первый шаг. За недостатком места здесь нет возможности изложить предложенную Томом общую теорию морфологических структур с ее приложениями к естествознанию, лингвистике и даже к анализу процесса мышления. Мы можем лишь отослать читателя к работам самого Тома (Том, 1972, 1974).

17.2. СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ГЛАДКОЙ ФУНКЦИЕЙ

Необходимо начать с более точных формулировок тех довольно расплывчатых соображений, которые приведены выше.

Рассмотрим динамическую систему, под которой мы можем понимать тот или иной процесс, включающий непрерывное изменение во времени. Для математического моделирования поведения такой системы можно выбрать набор наблюдаемых и измеримых величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, представляющих положение системы в момент времени t как точку $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, в евклидовом n -мер-

ном пространстве, а затем изучать вид траекторий, по которым будет двигаться точка $x(t)$ с изменением t . Если $x(t)$ остается в одном положении при всех t , то система находится в равновесии по отношению к величинам x_i ; если точка $x(t)$ повторно описывает замкнутую петлю, система ведет себя в некотором смысле периодическим образом, и т. д.

Очень часто информация об эволюции системы (подчиняющейся физическим, экономическим или другим законам), которой мы располагаем, задана в виде системы дифференциальных уравнений, сообщающих нам о том, как происходит «бесконечно малое» изменение положения точки $x(t)$, т. е. каковы значения $\dot{x}(t)=dx/dt$ и, быть может, также $\ddot{x}$ и т. д. в разные моменты времени и при разных положениях системы. В этом случае точками равновесия служат как раз те точки, для которых $\dot{x}(t)=0$ при всех t .

Независимо от того, описывается данная система дифференциальными уравнениями или нет, может случиться, что ее поведение достаточно полно характеризуется эволюцией во времени лишь одной специфической функции от $x(t)$. В дальнейшем будем рассматривать системы именно такого типа. Введем сначала формальное определение, а затем разберем несколько элементарных примеров.

Определение. Будем говорить, что динамическая система описывается гладкой функцией V , если V — гладкая (т. е. бесконечное число раз дифференцируемая) функция в пространстве координат $(x_1, \dots, x_n)$, такая, что

1. Точки равновесия системы совпадают с критическими точками V , т. е. с точками, где

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0.$$

2. Вдали от равновесия функция $V(x(t))$ убывает с ростом t .

Пример 1

Рассмотрим живую клетку, подверженную влиянию некоторого химического вещества, концентрация которого внутри клетки равна $x(t)$ в любой момент времени t . В качестве простой гипотезы примем, что это вещество поступает в клетку извне с постоянной скоростью S и разрушается внутри клетки со скоростью, пропорциональной его концентрации. Отсюда следует, что функция $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = -ax + S.$$

Если имеются две клетки одного типа, каждая из которых подвержена влиянию одного и того же вещества, причем клетки не взаимо-

действуют между собой, тогда концентрации $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в каждой клетке удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + S, \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + S.\end{aligned}$$

Теперь усложним модель, предположив, что клетки взаимодействуют со скоростью, пропорциональной разности концентраций в каждой из них. Тогда уравнения записываются в виде следующей системы:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + S + D(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + S + D(x_2 - x_1).\end{aligned}$$

Определив функцию V выражением

$$V(x_1, x_2) \equiv -S(x_1 + x_2) + \frac{a}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{D}{2}(x_1 - x_2)^2,$$

видим, что

$$\dot{x}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2},$$

или

$$\dot{x} = -\text{grad } V.$$

Рассмотренная задача представляет собой пример *градиентной системы*, которая, очевидно, служит частным случаем системы, описываемой потенциальной функцией V . Здесь $n=2$.

Обсуждение ряда вопросов, связанных с указанной системой, а также с другими динамическими системами, встречающимися в биологии, можно найти в гл. 1 и 2 книги Розена (1972) и в книгах Розена (1970) и Павлидиса (1973).

ПРИМЕР 2

Вновь предположим, что $n=2$, и пусть $V(x_1, x_2)$ — любая гладкая функция в плоскости (x_1, x_2) . Геометрически функция V описывается двумерной поверхностью, которую можно представить себе как «ландшафт», причем V — это высота, отсчитываемая от уровня моря. Теперь представим себе помещенный в некоторой точке этого ландшафта шарик, который может двигаться под действием силы тяжести (направленной в сторону отрицательных V). Суммарная сила, действующая на шарик, будет направлена вдоль линии наибольшей крутизны, поэтому единственными точками равновесия будут критические точки функции V . Допустим, кроме того, что существует трение (идеализированное), достаточное, чтобы предотвратить «проскок» шариком нужной точки. Тогда движение от поло-

жения равновесия всегда будет происходить вниз по склону; при этом шарик будет либо приближаться к критической точке, либо постоянно двигаться в направлении $V = -\infty$. Таким образом, рассматриваемая система служит примером системы, описываемой гладкой функцией.

Заметим, что пример 2 дает модель любой системы, описываемой гладкой функцией; при этом координаты x положения шарика соответствуют состоянию системы в данный момент времени t , а траектория, описываемая шариком, моделирует эволюцию системы из заданного начального состояния. Разумеется, полная аналогия с физическим процессом будет при $n=2$, а в общем случае мы должны подразумевать n -мерный ландшафт.

При использовании моделей такого рода на практике не всегда требуется вводить идеальное демпфирование, способное предотвратить все «проскоки» или малые колебания вблизи положения равновесия. При условии, что эти колебания быстро затухают, мы обычно можем ими пренебречь и принять, что ландшафт V дает достаточно хорошую модель системы. В частности, именно *потенциальная энергия*, а не полная энергия, может служить для описания ряда механических и других систем, хотя в действительности они могут и не «описываться» своей функцией потенциальной энергии в том строгом смысле, как это определено выше.

ПРИМЕР 3¹⁾

Для простой модели поведения пологой арки под действием вертикальной нагрузки имеем следующее уравнение, связывающее величину направленной вниз нагрузки q с высотой подъема арки в условиях равновесия (взятой в виде отношения p этой высоты к ее исходному значению, соответствующему $q=0$)

$$1 - kq = p \left(1 - \frac{1}{m} (1 - p^2) \right),$$

где k, m — положительные постоянные. Вычисляя работу, затрачиваемую на уменьшение высоты арки от начального значения a до pa под действием постоянной направленной вниз нагрузки Q , получим выражение для потенциальной энергии

$$\begin{aligned} V &= Qa(p-1) - \frac{a}{k} \left[p - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) p^2 - \frac{1}{4m} p^4 \right] + \text{const} = \\ &= \frac{a}{k} \left[\frac{1}{4m} p^4 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) p^2 - (1 - Qk) p \right] + \text{const}. \end{aligned}$$

¹ Автор признателен М. Горески, обратившему его внимание на этот пример в книге Тимошенко (1936).

Арку можно рассматривать как динамическую систему, описываемую функцией V , поскольку на практике должно иметь место сильное демпфирование колебаний.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $m \geq 1$ существует только одно (действительное) значение p , соответствующее равновесию при любых Q . С другой стороны (и этот случай более интересен), при $m < 1$ имеются определенные значения Q , для которых существуют три значения p , соответствующие равновесию: два устойчивых (одно положительное значение p и одно отрицательное, соответствующее прогнутой арке) и одно неустойчивое.

Примеры такого рода хорошо известны в теории упругой устойчивости конструкций (см., например, книгу Сьюелла (1976) или большое количество примеров в книге Томпсона и Ханта (1973)).

17.3. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Очевидно, что, если система описывается гладкой функцией V , форма графика этой функции определяет поведение системы. Рассмотрим вопрос о том, как может выглядеть такой график в общем случае, особенно вблизи критических точек. При $n=1$ могут быть точки максимума и минимума, а также точки перегиба и даже целые области, где график идет горизонтально. Существуют, однако, серьезные причины, по которым в процессе построения математических моделей реальных систем следует исключать или по крайней мере рассматривать с осторожностью любую функцию $V(x)$, имеющую кроме максимумов и минимумов какие-либо иные критические точки. Такая критическая точка x_0 будет одновременно удовлетворять двум условиям: $V'(x_0)=0$ и $V''(x_0)=0$. Это означает, что график производной, V' , будет иметь в точке x_0 касательную, параллельную оси x . Путем слабого изменения V можно всегда добиться того, чтобы график производной уже нигде не имел такого рода касательных, а следовательно, чтобы все критические точки новой функции V были точками строгого максимума или минимума. Более того, коль скоро это осуществлено, можно увидеть, что все *достаточно малые* изменения, которые допустимы для новой функции V , будут сохранять свойство наличия критических точек только максимума или минимума, если такие изменения сами имеют достаточно малые первую и вторую производные. Последнее означает, что новая функция V будет соответствовать лучшей модели, чем прежде, по двум причинам.

1. Любая реальная система практически всегда подвержена малым возмущениям посредством «шумового фона», поэтому любые частные свойства функции V , которые могут быть нарушены малыми изменениями V , не будут обязательно являться отражением свойств системы.

2. Измерения возможны лишь с точностью до некоторой ненулевой ошибки, поэтому свойства V , которые могут быть нарушены изменениями, лежащими в пределах такой ошибки, вообще не имеют отношения к реальной системе.

Приведенные соображения подчеркивают важную необходимость выполнения следующего условия: *любая математическая модель реальной системы должна в некотором смысле обладать глобальной устойчивостью, соответствующей истинной устойчивости явлений, наблюдаемых в действительности*. Следуя Тому, будем называть это условие «*гипотезой структурной устойчивости*». Она представляет собой основной принцип математического моделирования и играет очень важную роль во всей теории Тома и в развитом им математическом аппарате.

В случае функций двух переменных (x_1, x_2) картина оказывается несколько более сложной. Можно показать, что в этом случае единственными типами критических точек, которые не могут быть устранены в результате малых произвольных возмущений самой функции, являются точки максимума, минимума и седловые точки (в них достигается максимум в одном направлении и минимум в другом), см. рис. 17.1. Аналогичным образом для функций n переменных $(x_1,$

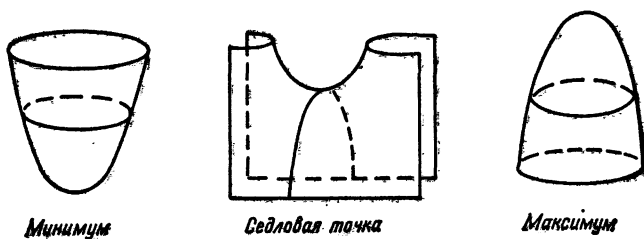


Рис. 17.1.

$x_2, \dots, x_n$) важными критическими точками являются точки максимума, минимума и $(n-1)$ разновидность n -мерных седловых точек (в них достигается максимум по r измерениям, минимум по $(n-r)$ измерениям, причем для каждой точки $r=1, 2, \dots, (n-1)$). Таким образом, если принять гипотезу структурной устойчивости, то можно заключить, что для наших целей наибольший интерес представляют такие функции, критическими точками которых служат максимумы, минимумы и седловые точки. Именно их и необходимо изучать, если мы намереваемся понять эволюцию реальных систем, описываемых гладкими функциями.

Очевидно, что положениям устойчивого равновесия отвечают лишь такие критические точки, которые соответствуют минимумам. В противном случае большинство возмущений (если не все из них) равновесного состояния вызовут дальнейшее отклонение системы

от положения равновесия. Поскольку предполагается, что системы, с которыми мы имеем дело в действительности, постоянно подвержены действию шумового фона и малых возмущений того или иного рода, практически только минимумы будут соответствовать наблюдаемым состояниям равновесия.

17.4. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ * ПАРАМЕТРАМИ

Теперь мы усложним задачу, вводя предположение, что вся система зависит от ряда параметров $c_1, c_2, \dots, c_k$. Например, такая ситуация реализуется в случае, когда мы можем по своему усмотрению физически управлять системой и менять некоторые ее свойства (определяемые параметрами $c_1, c_2, \dots, c_k$); это имеет место, в частности, при изменении Q или, быть может, t в примере 3. С аналогичной ситуацией мы встретимся и в случае, когда нас интересует одновременное поведение целого семейства систем, как в примере 6 (см. ниже). Если предположить, что при каждом значении $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ система описывается гладкой функцией V_c , то положения равновесия системы будут, очевидно, меняться с изменением c . Введем теперь два следующих предположения относительно зависимости системы от параметров $(c_1, c_2, \dots, c_k)$.

1. $V_{(c_1, c_2, \dots, c_k)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — гладкая функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $c_1, c_2, \dots, c_k$.
2. Для каждого c система, описываемая функцией V_c , достигает равновесия настолько быстро, что можно рассматривать этот процесс протекающим мгновенно.

Другими словами, когда мы изменяем c (имея при этом в виду «медленные» изменения), система всегда находится в состоянии равновесия, соответствующем критической точке — фактически точке минимума — функции V_c .

Необходимо также отметить, что при некоторых значениях c может иметься в точности один минимум V_c , т. е. одно устойчивое состояние равновесия, а для других c — несколько минимумов, в результате чего возникает возможность выбора между различными состояниями равновесия. Это можно наглядно показать на следующем примере.

ПРИМЕР 4. МАШИНА КАТАСТРОФ ЗИМАНА. (Зиман, 1972)

Рассмотрим механизм, состоящий из стержня, который может вращаться вокруг одного из своих концов, шарнирно скрепленного с горизонтальной платой, а к его свободному концу прикреплены два упругих жгута, так что вся система расположена на плоскости (см. рис. 17.2). Конец одного из упругих жгутов закреплен в не-

подвижной точке платы, а конец другого жгута можно поместить (если потребуется, то и с растяжением) в любую точку платы (*точку управления*). Точка управления может быть задана координатами (c_1, c_2) по отношению к соответствующей системе координат на плоскости. Для некоторых точек (c_1, c_2) стержень приходит лишь к одному положению устойчивого равновесия, а для других точек имеются два таких положения. Равновесие системы определяется упругими напряжениями в жгутах, поэтому, согласно закону Гука, можно ожидать, что такая система принадлежит к классу систем, описываемых функцией потенциальной энергии. Причем устойчивое равновесие будет в случае, когда потенциальная энергия вытянутых упругих жгутов достигает минимума.

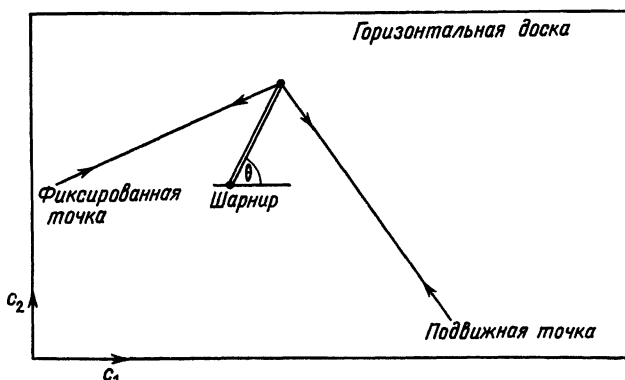


Рис. 17.2. Машина катастроф Зимана.

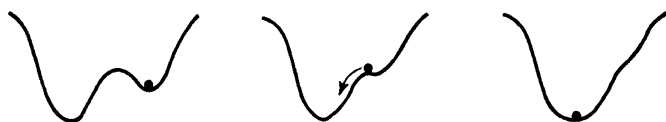


Рис. 17.3.

Расчет на основании уравнений движения подтверждает этот вывод. Для некоторых точек $c = (c_1, c_2)$ потенциальная функция (рассматриваемая как функция угла θ , например, при $0 < \theta < 2\pi$) имеет один минимум, для других точек — два минимума. Ясно, что при наличии двух минимумов между ними должен находиться максимум. И действительно, если точка управления c выбрана так, что эта система имеет два положения устойчивого равновесия, между ними всегда существует состояние неустойчивого равновесия.

Подробное описание машины Зимана можно найти в книге Постона и Вудкока (1973). Однако, чтобы понять ее работу, нет ничего лучшего, чем изготовить эту машину самому.

При медленном передвижении точки управления s состояние равновесия машины обычно меняется тоже медленно, но иногда происходит внезапный и даже резкий скачок из одного положения в другое. С использованием потенциальной функции объяснение этого явления заключается в том, что при изменении s возможно слияние и исчезновение минимума и максимума функции V_c . Если машина находилась в состоянии, соответствующем исчезающему в последствии минимуму, для нее не остается иной возможности, как перейти в состояние, соответствующее другому минимуму (см. рис. 17.3). Здесь мы имеем дело с примером явления, называемого Томом катастрофой. В самом деле, такое явление соответствовало бы настоящей катастрофе, если бы машина была очень большой или если это была бы модель, например, экономической системы.

Важным моментом в приведенном примере является, очевидно, попытка найти точное описание системы точек (c_1, c_2) , в которых возможно возникновение катастроф. Между тем такая попытка относится по существу к частному случаю общей проблемы, касающейся системы с n переменными, описываемой гладкой функцией, содержащей k параметров управления. Мы дадим теперь точную формулировку этой проблемы.

Пусть V — любая гладкая функция n переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, содержащая k параметров $(c_1, c_2, \dots, c_k)$. Рассматривая V как функцию, описывающую динамическую систему, как это делалось выше, назовем пространство $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ *пространством управления* и определим *множество катастроф* K как множество точек $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ в пространстве управления, для которых V_c , как функция от $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, имеет несколько сливающихся критических точек. (Для этой системы точек мы можем ожидать катастрофическое поведение динамической системы.) При $n=1$ сказанное означает, что K представляет собой множество точек c , таких, что V'_c и V''_c одновременно обращаются в нуль для некоторых x . При $n>1$ такое описание усложняется: в этом случае K — множество точек c , таких, что все частные производные

$$\frac{\partial V_c}{\partial x_1}, \frac{\partial V_c}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V_c}{\partial x_n},$$

а также определитель, составленный из вторых производных

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_c}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 V_c}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 V_c}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V_c}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix}$$

одновременно обращаются в нуль при некоторых значениях $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Можно в принципе получить уравнение для K , содержащее параметры $(c_1, c_2, \dots, c_k)$. Впрочем, практическое осуществление этой операции может оказаться непростым делом.

ПРИМЕР 5

Пусть $n=1$, $k=2$ и $V_{(c_1, c_2)}(x) = x^3 + c_1 x^2 + c_2 x$. Критические точки функции V_{c_1, c_2} встречаются там, где $V'_{(c_1, c_2)}(x) = 0$, т. е.

$$3x^2 + 2c_1 x + c_2 = 0.$$

Критические точки совпадают, когда $V''_{(c_1, c_2)}(x) = 0$, т. е.

$$6x + 2c_1 = 0.$$

Исключая x из этих уравнений, получим

$$\frac{1}{3} c_1^3 - \frac{2}{3} c_1^2 + c_2 = 0,$$

т. е.

$$c_2 = \frac{1}{3} c_1^2$$

(уравнение параболы в плоскости (c_1, c_2)). В результате найдем множество катастроф K для заданной функции V . При

$$c_2 < \frac{1}{3} c_1^2$$

имеется один (и только один) максимум $V_{(c_1, c_2)}$; при

$$c_2 > \frac{1}{3} c_1^2,$$

критических точек нет. Когда точка (c_1, c_2) , двигаясь по плоскости, пересекает K таким образом, что c_2 уменьшается, происходит слияние минимума с максимумом и его исчезновение. Система, описываемая функцией $V_{(c_1, c_2)}$ и находящаяся в равновесии, соответствующем минимуму $V_{(c_1, c_2)}$, произведет катастрофический прыжок (по направлению к $V = -\infty$, т. е. $x = -\infty$), как только осуществится указанная ситуация.

Нас интересует поведение динамической системы, описываемой функцией V , поэтому важно знать, как возникают катастрофы в общем случае, т. е. иметь информацию относительно локального поведения вблизи каждой точки c , принадлежащей множеству катастроф K . Здесь следует иметь в виду, что наша задача состоит в построении моделей реальных систем, поэтому мы вновь используем принцип (его обсуждение содержится в п. 3), заключающийся в том,

что для нас важны лишь такие математические построения, которые не нарушаются под действием произвольных малых возмущений исходной модели.

Будем говорить, что множество катастроф K устойчиво, если его геометрическая структура не нарушается при достаточно малом изменении функции V . Здесь имеется в виду, что если функция $W_c(x)$ достаточно близка к $V_c(x)$ и все частные производные W по всем c и x достаточно близки к соответствующим производным V , то существует такое гладкое преобразование координат в пространстве управления, которое приведет множество катастроф для W к множеству катастроф для V .

Теперь можно сформулировать общую задачу в следующем виде.

Задача. Какие локальные геометрические формы могут принимать устойчивые множества катастроф? Каково поведение соответствующих катастроф?

Теорема Тома дает ответы на эти вопросы в случае, когда число параметров $k \leq 4$.

17.5. СЛУЧАЙ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И СЛУЧАЙ МАКСВЕЛЛА

Прежде чем приступить к формулировке теоремы Тома, важно отметить наличие двух путей, следуя которым можно связать геометрию множества катастроф с моделируемой системой. В примере с машиной катастроф мы видели, что система будет оставаться в состоянии устойчивого равновесия, соответствующем данному минимуму функции V , и будет медленно перемещаться при смещении минимума до тех пор, пока этот минимум не исчезнет (когда c пройдет через множество катастроф K) и не возникнет катастрофа. Так ведут себя многие системы, в частности механические. Однако ряд систем (например, в биологии) ведут себя иначе, поскольку они всегда принимают состояние равновесия, соответствующее наименьшему из возможных минимумов. Это означает, что множество катастроф K непосредственно не играет физической роли. Вместе с тем существует сопутствующее K другое множество S точек c , для которых функция V_c имеет два или более в точности одинаковых минимума, и возможно возникновение катастроф при прохождении контрольной точки через множество S . Это множество S называется ударной волной, сопутствующей K , поскольку в теории ударных волн, вызванных движением поршня, имеет место именно такое явление. Таким образом, при интерпретации фактов, касающихся множества катастроф, на языке наблюдаемого «скачка» разрыва нам необходимо знать, какой из следующих двух случаев (либо ни один из них!) реализуется для рассматриваемой системы.

1. *Случай запаздывания.* Система остается в соответствующем заданному минимуму состоянии равновесия в течение сколь угодно

большого промежутка времени и скачком переходит в состояние, отвечающее другому минимуму, лишь при исчезновении первого минимума.

2. *Случай Максвелла*¹⁾. Система выбирает положение равновесия, соответствующее наименьшему из имеющихся минимумов.

Выбор одного из этих случаев зависит от природы (физической, биологической и т. п.) самого явления и не выводится математически. Он представляет собой дополнительный компонент, который должен быть включен в математическую модель.

Если известно, с каким случаем мы имеем дело, то для установления возможных путей возникновения катастроф становится ясным и объект исследований — это будет структура множества катастроф K или ударной волны S .

Чтобы продемонстрировать важнейшую роль структуры K или S с физической точки зрения, приведем упрощенный пример из области биологии, который показывает, каким образом можно увидеть структуру множества катастроф и ударных волн в структурах биологических форм. Примеры такого типа широко использовал Том в своей книге (Том, 1972). Одно из наиболее важных достижений теории катастроф заключается в том, что появляется принципиальная возможность заложить основы математической теории развития биологических форм (морфогенеза).

ПРИМЕР 6

Пусть мы имеем участок однородной живой ткани и интересуемся конкретным свойством каждой клетки, которая может быть там обнаружена (хотя бы теоретически). Назовем это свойством состоянием клетки. Для определенности будем считать, что таким свойством является цвет, зависящий для каждой клетки от концентрации некоторого пигмента (ср. с примером 1). Теперь предположим, что концентрация в каждой клетке определяется взаимодействием некоторого, быть может, очень большого числа n химических веществ, концентрации которых $x_1, x_2, \dots, x_n$, и, кроме того, что изменение x_i в каждой клетке представляет собой динамический процесс, описываемый гладкой функцией V_C . Предположим далее, что

1. Число клеток в ткани достаточно велико, поэтому каждую клетку C можно рассматривать как точку пространства с координатами (c_1, c_2, c_3) , т. е. V_C примет вид $V_{(c_1, c_2, c_3)}$.
2. $V_{(c_1, c_2, c_3)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является гладкой функцией всех x и c .

¹⁾ В честь физика Максвелла, который имел дело с таким явлением при изучении фазовых переходов.

3. В каждой клетке концентрация $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ мгновенно достигает равновесия.

После введения этих предположений становится ясным, что при описании состояния клеточек ткани мы пользуемся динамической моделью точно такого типа (динамическая система, управляемая гладкой функцией), который изучался в данной главе (см. п. 17.4).

Важно понять, что пространство *управления* в данном примере представляет собой трехмерную область, относящуюся к собственной ткани — это вытекает из предположения 1 (см. выше). С другой стороны, пространство переменных имеет n измерений (n может достигать значения 5000) в соответствии с количеством входящих веществ. Множество катастроф K и множество ударных волн S , как подмножества пространства управления, соответствуют множеству точек (клеток) C ткани, где конфигурация возможного равновесия V_C меняется — другими словами, где состояние может измениться внезапно. Конкретные способы изменения состояния будут зависеть теперь от других физических и биологических факторов, которые не входят в нашу модель. Вместе с тем, если мы предположим, что имеет место случай отставания или случай Максвелла, становится ясным, что *геометрические формы множества катастроф K и ударных волн S прямо соответствуют геометрическим формам наблюдаемых скачкообразных изменений в состоянии ткани*. Следовательно, можно ожидать, что изучение геометрических структур множеств катастроф и связанных с ними ударных волн приведет к более глубокому пониманию геометрии биологических форм вообще.

Разобранный выше пример можно усовершенствовать путем учета фактора времени. Вместо V_C для каждой клетки C будем иметь $V_{C,t}$ для клетки C в момент времени t . Тогда модель будет описываться теми же переменными $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, но пространство управления станет областью в четырехмерном пространстве (три измерения пространства плюс одно измерение — время), соответствующей изменению состояния ткани во времени. Множества катастроф и ударных волн K и S будут в этом случае подмножествами четырехмерного пространства. При изменении ткани во времени интересно рассмотреть различные структурные формы K и S , изменяющиеся с течением времени. Это и послужило основой применения Томом теории катастроф к описанию морфогенеза.

17.6. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Сформулируем теперь теорему Тома.

Теорема. *Для систем, описываемых гладкими функциями, содержащими не более четырех параметров (при любом числе переменных) в принципе существует в сущности только семь возможных*

типов локальных геометрических структур для устойчивых множеств катастроф.

Некоторые выражения в этой формулировке требуют пояснений.

Том перечислил семь явных функций (моделей катастроф), свойство которых заключается в том, что любая другая функция $V_c(x)$, которая включает

- 1) не больше четырех параметров,
- 2) устойчивое множество катастроф K ,

может быть представлена (см. ниже) в окрестности любой точки c в K только одной из семи моделей катастроф. Причем это представление осуществляется посредством гладкого преобразования координат, которое одновременно в сущности переводит K во множество катастроф модели. Преобразование координат может привести также к появлению аддитивной постоянной в V_c для каждого c . Ясно, однако, что это не влияет на критические точки V_c , которые в данном случае и представляют интерес. Наконец, для получения одной из функций Тома, возможно, будет необходима замена V_c на $-V_c$. Это также не влияет на расположение критических точек, но превращает максимум в минимум и наоборот, что следует учитывать в приложениях.

Часто оказывается возможным включение дополнительных переменных в каждую модель без внесения изменений в множество катастроф. Например, это достигается путем добавления члена вида

$$\sum_{i=1}^m \pm y_i^2,$$

где y_i — дополнительные переменные и m может быть как угодно велико. Чтобы показать, что указанная операция не меняет множества K , достаточно заметить, что

$$\frac{\partial V_c}{\partial y_i} = 0$$

в точности при $y_i = 0$ и расширенная матрица вторых производных имеет нулевой определитель там же, где и исходная. Фактически исходная матрица изменена лишь добавлением диагональных элементов, каждый из которых равен ± 2 . В этом случае соотношение, описывающее множество катастроф, не меняется и катастрофа в целом определяется в пространстве исходных переменных при равенстве всех новых переменных $y_1, y_2, \dots, y_m$ нулю (см. ниже, пример 7).

Может оказаться, что некоторой точке c в K соответствуют два или более различных слияния критических точек V_c , встречающихся-

ся одновременно, так что в действительности c лежит на пересечении нескольких локально независимых множеств катастроф, несмотря на то что их объединение может составлять часть более крупного множества катастроф в каком-то ином участке пространства управления. В этом случае перечисленные Томом функции не определяют локальные конфигурации, но позволяют дать локальное описание каждой составляющей, проходящей через c .

Выражение «в сущности» в формулировке теоремы означает, что при интерпретации заданной катастрофы как одного из семи случаев, указанных Томом, следует сделать все описанные выше допущения.

17.7. СЕМЬ МОДЕЛЕЙ КАТАСТРОФ ТОМА

1. Складка

$$V_{c_1}(x) \equiv x^3 + c_1 x.$$

При $c_1 < 0$ имеется один минимум и один максимум, при $c_1 > 0$ критические точки отсутствуют. Множество катастроф K состоит из одной точки $c=0$ (сравните с катастрофой в примере 5). Если построить зависимость критических точек V_{c_1} от c_1 , получим параболу $3x^2 + c_1 = 0$ на плоскости (c_1, x) . Ветвь параболы при $x > 0$ соответствует минимуму V_{c_1} , а при прохождении параметром c_1 нуля снизу минимум исчезает и точка равновесия «скатывается» с кривой к $x = -\infty$. По указанным причинам этот тип катастрофы и был назван складкой.

2. Сборка

$$V_{(c_1, c_2)}(x) \equiv x^4 + c_1 x^2 + c_2 x.$$

Критические точки появляются при $V'_{(c_1, c_2)}(x) = 0$, т. е. при

$$4x^3 + 2c_1 x + c_2 = 0,$$

и они сливаются при $V''_{(c_1, c_2)}(x) = 0$, т. е. при

$$12x^2 + 2c_1 = 0.$$

Исключение x дает уравнение, определяющее множество катастроф K :

$$8c_1^3 + 27c_2^2 = 0.$$

Легко проверить, что это уравнение описывает кривую в виде мыса, или сборки, изображенной на рис. 17.4 в координатах (c_1, c_2) .

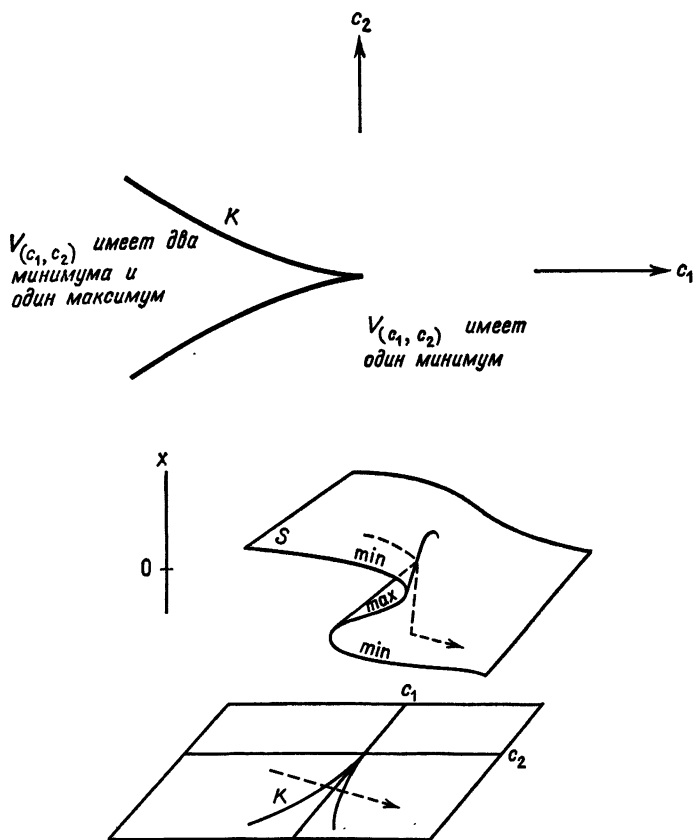


Рис. 17.4. Сборка.

Если в пространстве (c_1, c_2, x) выделить все точки, такие, что x — критическая точка функции $V(c_1, c_2)$, то получится поверхность S , имеющая складку. Точки на поверхности S , в которых касательная плоскость вертикальна, дают в проекции сборку в плоскости $c_1 c_2$. При помощи поверхности S можно увидеть, как происходит переключение состояний равновесия при изменении параметров c_1, c_2 , т. е. при движении в плоскости $c_1 c_2$.

При $8c_1^3 + 27c_2^2 > 0$ функция $V_{(c_1, c_2)}$ имеет только одну критическую точку (минимум); при $8c_1^3 + 27c_2^2 < 0$ она имеет два минимума и один максимум.

В следующих трех случаях вычисления становятся очень громоздкими, поэтому ограничимся тем, что будем приводить функции и множества катастроф в пространстве управления, указывая природу критических точек V_c для s в каждой области, дополняющей K . Во всех случаях пространство управления имеет три измерения.

3. Ласточкин хвост

$$V_{(c_1, c_2, c_3)}(x) \equiv x^5 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x.$$

4. Эллиптическая омбилическая точка, или волос

$$V_{(c_1, c_2, c_3)}(x_1, x_2) \equiv x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + c_1(x_1^2 + x_2^2) + c_2 x_1 + c_3 x_2.$$

5. Гиперболическая омбилическая точка, или падающая волна

$$V_{(c_1, c_2, c_3)}(x_1, x_2) \equiv x_1^3 + x_2^3 + c_1 x_1 x_2 + c_2 x_1 + c_3 x_2.$$

Для последних двух моделей пространство управления имеет четыре измерения, поэтому показать множество катастроф невоз-

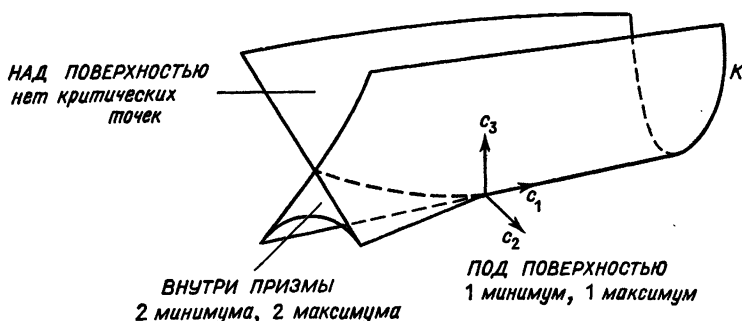


Рис. 17.5. Ласточкин хвост.

можно. Ограничимся приведением лишь самих функций для этих двух случаев.

6. Бабочка

$$V_{(c_1, c_2, c_3, c_4)}(x) \equiv x^6 + c_1 x^4 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x.$$

7. Параболическая омбилическая точка, или гриб

$$V_{(c_1, c_2, c_3, c_4)}(x_1, x_2) \equiv x_2^4 + x_1^2 x_2 + c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_1 + c_4 x_2.$$

Некоторое представление о структуре множества катастроф для случаев бабочки и параболической омбилической точки можно получить путем рассмотрения сечений пространства (c_1, c_2, c_3, c_4) гиперплоскостями при $c_1=0$, $c_2=0$ и т. д. Бабочка оказывается аналогичной некоторой сборке в четырехмерном пространстве с налегающими более мелкими сборками. Некоторые трехмерные сечения в случае параболической омбилической точки имеют вид гиперболи-

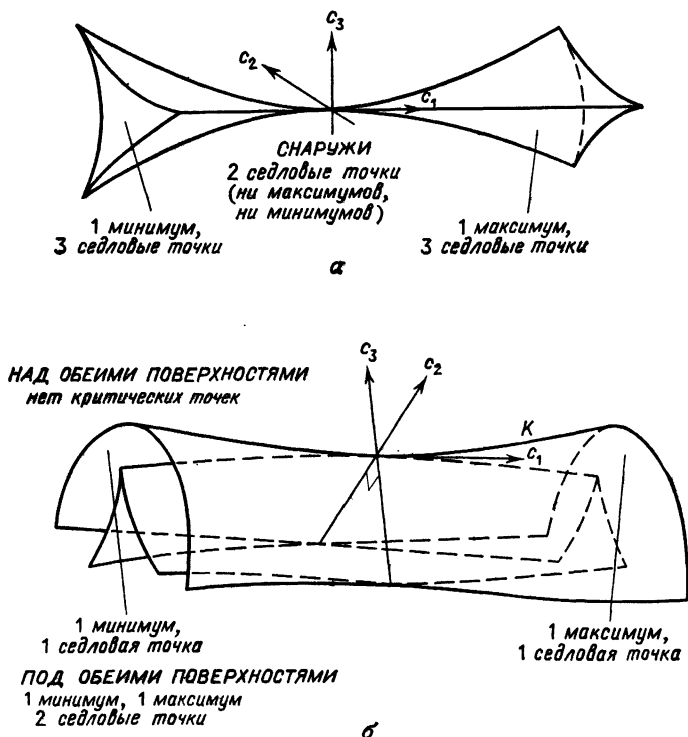


Рис. 17.6. а — эллиптическая омбилическая точка; б — гиперболическая омбилическая точка.

ческой точки и некоторые — вид эллиптической омбилической точки. Поэтому случай параболической омбилической точки можно рассматривать как переходную форму между двумя последними случаями.

Изображения множеств катастроф с разных точек зрения можно найти в работах Брекера и Ландера (1974), Кэллехена (1974), Годвина (1971), Тома (1972), Вудкока и Постона (1974).

Согласно теории, каждому множеству катастроф соответствует сопутствующее множество ударных волн. Последнее легко изобразить в случае сборки — это будет, очевидно, линия симметрии $c_2=0$ при $c_1<0$ — и в случае ласточкиного хвоста (см. Том (1972), стр. 67 английского текста). Для случая бабочки в результате более громоздкого построения можно получить интересную геометрическую структуру, названную Томом образованием карманов (там же, стр. 69—73). В случаях эллиптической и гиперболической омбилических точек ударные волны отсутствуют, так как им соответствует не более одного минимума. Пока не было дано удовлетворительного

описания множества ударной волны для параболической омбилической точки.

Замечание. Все перечисленные выше функции, как можно заметить, являются многочленами. Однако важно понять, что условие представления гладкой функции в виде многочлена не является требованием, необходимым для применимости к ней теоремы Тома. Сила математического метода в данном случае проявляется именно в том, что исследование любой гладкой функции сводится к исследованию многочлена при условии устойчивости множества катастроф K .

Следующие два примера служат иллюстрацией применения теоремы Тома.

ПРИМЕР 7

Пусть

$$V_{(c_1, c_2)}(x_1, x_2) \equiv x_1^3 - 2x_1x_2 + c_1x_1^2 + x_2^2 + c_2x_1.$$

Критические точки определяются из уравнений

$$\frac{\partial V_{(c_1, c_2)}}{\partial x_1} \equiv 3x_1^2 - 2x_2 + 2c_1x_1 + c_2 = 0,$$

$$\frac{\partial V_{(c_1, c_2)}}{\partial x_2} \equiv -2x_1 + 2x_2 = 0,$$

т. е. $x_1 = x_2$ и $3x_1^2 + 2(c_1 - 1)x_1 + c_2 = 0$. Критические точки сливаются, когда определитель, составленный из вторых производных

$$\begin{vmatrix} 6x_1 + 2c_1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

обращается в нуль, т. е. при $2(6x_1 + 2c_1) - 4 = 0$, или $x_1 = \frac{1}{3}(1 - c_1)$. Подставив это выражение в квадратное уравнение относительно x_1 (см. выше), получим

$$c_2 = \frac{1}{3}(c_1 - 1)^2.$$

Таким образом, множество катастроф K представляет собой параболу в координатах (c_1, c_2) . Это множество оказывается устойчивым (здесь мы примем это без доказательства). Следовательно, согласно теореме Тома, существует гладкое преобразование координат, которое в принципе приведет эту модель к одной из семи элементарных моделей. Найти соответствующие новые координаты в общем случае довольно сложно, особенно если функции не являются многочленами. Последнее связано с необходимостью привлечь ряд общих результатов относительно существования решений систем

дифференциальных уравнений. Здесь же мы просто утверждаем, оставляя проверку этого утверждения в качестве упражнения, что новые координаты (u_1, u_2) , (γ_1, γ_2) , которые задаются в виде

$$u_1 = x_1 + \frac{1}{3}(c_1 - 1),$$

$$u_2 = x_1 - x_2,$$

$$\gamma_1 = c_2 - \frac{1}{3}(c_1 - 1)^2,$$

$$\gamma_2 = c_1 - 1,$$

приводят $V_{(c_1, c_2)}(x_1, x_2)$ к виду

$$W_{(\gamma_1, \gamma_2)}(u_1, u_2) \equiv u_1^3 + \gamma_1 u_1 + u_2^2 - \frac{1}{3} \gamma_2 \left(\gamma_1 + \frac{1}{9} \gamma_2^2 \right).$$

Если изменить масштаб по оси W_{γ_1, γ_2} (для всех (γ_1, γ_2)), добавив член

$$\frac{1}{3} \gamma_2 \left(\gamma_1 + \frac{1}{9} \gamma_2^2 \right),$$

получим

$$W_{(\gamma_1, \gamma_2)}(u_1, u_2) \equiv u_1^3 + \gamma_1 u_1 + u_2^2,$$

т. е. по существу (если ввести несущественное слагаемое u_2^2 и отбросить γ_2) модель катастрофы типа складки. Заметим, что в результате преобразования координат множество катастроф K в плоскости (c_1, c_2) представлено в виде прямой линии $\gamma_1 = 0$ в плоскости (γ_1, γ_2) .

ПРИМЕР 8

Пусть

$$V_{(c_1, c_2)}(x) \equiv x_1^3 + (c_1^2 + c_2^2) x_1.$$

Легко заметить, что множество катастроф K состоит из единственной точки $(0, 0)$ в координатах (c_1, c_2) . Для всех остальных точек имеем $c_1^2 + c_2^2 > 0$, и, следовательно, функция $V_{(c_1, c_2)}$ критических точек не имеет. Данный случай в принципе не соответствует ни одному из двух типов катастроф с двумя параметрами (случаи сборки или складки с одним несущественным параметром). В соответствии с теоремой Тома единственное объяснение этого факта заключается в том, что множество K не может быть устойчивым. Другими словами, меняя саму функцию V и все ее производные сколь угодно малым образом, мы можем изменить структуру K . Легко заметить, что в данном случае дело обстоит именно так. Например, заменим $V_{(c_1, c_2)}$ на функцию $V_{(c_1, c_2)}^\varepsilon$, задаваемую в виде

$$V_{(c_1, c_2)}^\varepsilon(x) \equiv x_1^3 + (c_1^2 + c_2^2 - \varepsilon) x_1$$

для любого ε . При $\varepsilon < 0$ множество катастроф пусто, при $\varepsilon > 0$ оно представляет собой окружность $c_1^2 + c_2^2 = \varepsilon$. Можно доказать, что в обоих случаях множество катастроф устойчиво.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Катастрофы, происходящие в машине катастроф Зимана, могут быть в соответствии с теорией локально описаны одной из моделей Тома, содержащей два параметра. Представляет интерес экспериментальная проверка (подразумевается, что машина работает исправно) того факта, что множество катастроф K представляет собой кривую в пространстве управления с четырьмя сборками. Последнее было показано Постоном и Вудкоком (1973).



Рис. 17.7.

2. Гладким преобразованием координат можно переводить прямые линии в кривые, но нельзя осуществить их касание и образовывать новые углы. Так, например, кривые на рис. 17.7 не могут быть преобразованы одна в другую путем гладкого преобразования координат. Из этого вытекает, например, существенное отличие сборки в модели 2 от параболы в примере 5.

17.8. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ КАТАСТРОФ

Теория катастроф, или, точнее, метод теории катастроф дает, как было показано, способ моделирования некоторых нарушений непрерывности развивающихся процессов различных типов. Этот метод позволяет описать разнообразие разрывов с единой математической точки зрения и по крайней мере дает возможность получить удовлетворительное теоретическое обобщение ряда явлений. Более того, метод теории катастроф служит и для качественной характеристики разрывов, свидетельствуя о существовании определенных, четко различимых геометрических структур (сборка, ласточкин хвост и т. д.), которые отражают возникновение разрывов в системах, описываемых гладкими функциями с числом параметров $k \leq 4$ при любом числе переменных.

Тем не менее специалист по прикладной математике имеет право поставить вопрос о том, может ли теория катастроф дать информацию о реальных процессах, причем такую, о которой ранее было не-

известно. Можно, несомненно, приветствовать определение для каждого случая красивой внутренней геометрической структуры. Однако остается неясным, позволяет ли это определение строить такие заключения о поведении системы, которые невозможно было построить раньше. Ниже мы рассмотрим некоторые возможные ответы на эти замечания.

1. Выяснение и понимание качественной стороны явления может быть более ценным, чем технические количественные выводы (см. введение), и во многих случаях такое понимание дает важную отправную точку для дальнейших исследований. Для значительного продвижения в изучении отдельных сторон явления необходимо иметь общую картину происходящих процессов. Эта точка зрения занимает центральное место в статьях Тома, где особое внимание уделяется биологическим моделям развития (Том, 1972, 1973).

2. Если нарушения непрерывности данной динамической системы отвечают определенным геометрическим структурам, свидетельствующим о наличии одной из катастроф Тома, то можно предположить, что система некоторым образом описывается гладкой функцией, содержащей не более четырех параметров. Далее, согласно развитой теории, заключаем, что путем подходящего преобразования параметров и переменных можно в принципе (в смысле, указанном в § 17.6) получить один из семи типов катастроф Тома. Это дает основание рекомендовать физику, биологу, социологу или другому исследователю отыскать одну или две ключевых переменных x или x_1, x_2 и $k \leq 4$ ключевых параметра, описывающих рассматриваемую катастрофу. Можно гарантировать, что все остальные накопленные данные будут несущественными при изучении качественной стороны явления и заключений относительно возникновения разрывов в развитии системы. Указанные соображения широко использовались Зиманом в его работах, посвященных приложениям теории катастроф к различным социологическим и психологическим явлениям (Иснард и Зиман, 1975; Зиман, 1971, 1974; см. также Зиман, 1976).

3. Предположим, что исследуется случай, для которого уже известна возможность моделирования, например, путем преобразования переменных конкретным типом катастрофы. Например, при рассмотрении слияния двух минимумов функции $x^4 + \lambda x^2 + \mu x$ при изменении μ и λ можно использовать известную структуру катастрофы (в данном случае это сборка и соответствующая трехмерная структура; см. рис. 17.4) с целью получения более точной качественной информации о характере изменения минимумов и максимумов при варьировании параметров в пространстве управления. Разумеется, если бы мы знали, что искать, аналогичный результат можно получить путем непосредственных вычислений с использованием явного

выражения для данной функции, но при этом результат не был бы столь нагляден, как при использовании геометрической модели. Именно эта сторона метода имеет первостепенное значение в структурных исследованиях (Сьюелл, 1976, Томпсон, 1975).

4. Важная особенность теории состоит в том, что в ней рассматриваются устойчивые множества катастроф, т. е. такие множества, которые не претерпевают возмущений при любых малых возмущениях всей системы. Это означает следующее. Допустим, что созданная нами модель для реальной системы заведомо описывается семейством гладких функций, причем оказалось, что множество катастроф K в пространстве управления в принципе не является ни одной из семи катастроф Тома, хотя число параметров и не превышало четырех. Тогда следует заключить, что эта модель должна быть неустойчивой и, следовательно, она не пригодна для описания реальных систем. Можно дать определенные рекомендации по улучшению модели путем включения небольшого переменного члена, который сделает ее устойчивой, как в примере 8. Подобные соображения успешно применяли Берри (1976) в работе по изучению рефракции света и Чиллингуорт и Фернесс (1975) при изучении простой модели изменения магнитного поля Земли.

17.9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По мере развития теории катастроф предлагается все большее число математических моделей, предназначенных для исследования реальной действительности. Эта теория находится пока в стадии младенчества, однако взгляды Тома уже сильно повлияли на работу математиков, занимающихся моделированием динамических систем. Будущее покажет, в какой степени работы Тома приведут к подлинному успеху в понимании природных процессов. В настоящее время важная задача состоит в том, чтобы собрать больше примеров систем, разрывы в которых можно представить в виде известных катастроф (набор катастроф Тома может быть расширен для классификации катастроф с числом параметров $k > 4$). Для этого необходимо рассмотреть соответствующие геометрические структуры и научиться распознавать их проявление в окружающем мире. Знание таких структур поможет получить новое неожиданное объяснение многих часто встречающихся явлений, таких, как рост грибов, или плохое настроение, или похожая на сборку *каустика* отраженного света на поверхности чая в чашке.

17.10. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Berry M. V. (1976). «Waves and Thom's Theorem», *Advances in Physics*, **25**, 1.
Bröcker Th., Lander L. (1974). *Differentiable Germs and Catastrophes*, London Mathematical Society Lecture Notes, **17**. [Имеется перевод: Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы.— М.: Мир, 1977.]

- Callahan J. J. (1974). «Singularities and Plane Maps». Amer. Math. Monthly, **81**, 211.
- Chillingworth D. R. J., Furness P. M. D. (1975). Dynamical Systems — Warwick 1974. Ed. Manning, A. Springer Lecture Notes in Mathematics, **468**, 91.
- Godwin A. N. (1971). «Three-dimensional Pictures for Thom's Parabolic Umbilic», Publ. Math. IHES, **40**, 117.
- Isnard C. A., Zeeman E. C. (1975). «Some Models from Catastrophe Theory in the Social Sciences», in Use of Models in the Social Sciences. Ed. Collins, L. Tavistock, London.
- Pavlidis Th. (1973). Biological Oscillators: Their Mathematical Analysis. Academic Press, New York.
- Poston T., Woodcock A. E. R. (1973). «Zeeman's Catastrophe Machine», Proc. Cambridge Philos. Soc., **74**, 217.
- Rosen R. (Ed.) (1972). Foundations of Mathematical Biology, II. Academic Press, New York.
- Rosen R. (1970). Dynamical System Theory in Biology. Wiley, New York.
- Sewell M. J. (1976). «Some Mechanical Examples of Catastrophe Theory», Bull. Inst. Math. Appl. **12**, 163.
- Thom R. (1972). Stabilité Structurelle et Morphogénèse. Benjamin, Reading, Massachusetts.
- Thom R. (1973). «A Global Dynamical Scheme for Vertebrate Embryology», Some Mathematical Questions in Biology VI, Amer. Math. Soc., 3.
- Thom R. (1974). Modèles Mathématiques de la Morphogénèse, Union Générale d'Éditions («10/18» series), Paris.
- Thompson J. M. T. (1975). «Experiments in Catastrophe», Nature, **254**, 392.
- Thompson J. M. T., Hunt G. W. (1973). A General Theory of Elastic Stability. Wiley, New York.
- Timoshenko S. (1936). Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New York.
- Woodcock A. E. R., Poston T. (1974). A Geometrical Study of the Elementary Catastrophes, Springer Lecture Notes in Mathematics, **373**.
- Zeeman E. C. (1972). «The Geometry of Catastrophe», The Times Literary Supplement, 1556.
- Zeeman E. C. (1972). «A Catastrophe Machine». In Towards a Theoretical Biology Vol. IV. Ed. Waddington, C. H. Edinburgh University Press.
- Zeeman E. C. (1974). «On the Unstable Behaviour of Stock Exchanges», J. Math. Economics, **1**, 39.
- Zeeman E. C. (1976). «Catastrophe Theory», Scientific American, **234**, 65.

Дополнительная литература

В настоящее время наиболее полные сведения по практическому применению теории катастроф содержатся в прекрасном обзоре Зимана (Зиман, 1976). Однако для более глубокого и тонкого понимания основных вопросов, а также чтобы представить себе широкие возможности применения моделирования методом теории катастроф для изучения явлений природы, необходимо по крайней мере ознакомиться с книгой Тома (Том, 1972). Рекомендуется ознакомиться с его интервью в The Times Higher Educational Supplement (5.XII.75). Приведем список других рекомендуемых статей по общим вопросам.

- Chillingworth D. R. J. (1975). Elementary Catastrophe Theory, Bull. Inst. Math. Appl., **11**, 155.
- Stewart I. N. (1975). The Seven Elementary Catastrophes, New Scientist, **68**, 447.
- Sussman H. J. (1975). Catastrophe Theory, Synthèse, **31**, 229.
- Thom R., Zeeman E. C. (1975). Catastrophe Theory: Its Present State and Future Perspectives, Dynamical Systems — Warwick, 1974, Ed. Manning, A. Springer Lecture Notes in Mathematics, **468**, 366.

17.11. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Уравнение движения маятника, представляющего собой материальную точку массы m на конце невесомой нити длины l , имеет вид

$$\theta + \frac{b}{ml} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (*)$$

где θ — угол отклонения нити от вертикального направления, $\dot{\theta} = d\theta/dt$, а b — положительная постоянная, которая вводится для учета влияния трения. Полагая $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, представить уравнение (*) в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка и найти функцию $V(x_1, x_2)$, которая описывает данную динамическую систему. (Указание: рассмотреть общую энергию системы.)

2. Рассматривая Q и m как параметры пространства управления в примере 3, найти множество катастроф K . Является ли данная катастрофа одной из семи катастроф Тома? Если да, то какой именно? Если нет, то почему?

3. Пусть система описывается гладкой функцией

$$V_{(c_1, c_2)}(x) \equiv x^4 + c_1 x^2 + c_2 x.$$

Допустим, что точка $c = (c_1, c_2)$ в пространстве управления испытывает вынужденные колебания во времени в соответствии с уравнением

$$c(t) = (-1, A \cos 2\pi t).$$

Показать, как будет меняться наблюдаемое равновесное значение x при а) малом A , б) большом A . Рассмотреть для каждой области значений A 1) случай отставания, 2) случай Максвелла.

4. Пусть K — множество катастроф типа «ласточкин хвост» (рис. 17.6). В некоторых точках множество K локально выглядит как пересечение двух плоскостей, которые почти перпендикулярны одна другой, хотя такая структура не соответствует ни одной из катастроф Тома. Как можно объяснить это кажущееся противоречие?

5. Предположим, что изучается динамическая система, описываемая гладкой функцией с двумя параметрами (c_1, c_2) , причем найдено множество катастроф, состоящее из двух полуосей $c_1 = 0, c_2 > 0$ и $c_2 = 0, c_1 > 0$. Требуется вывести заключение о степени пригодности этой модели для описания системы, встречающейся в реальной жизни. Путем анализа различных двумерных сечений множества катастроф гиперболической омбилической точки предложите способ усовершенствования описанной выше модели.

6. Постоянная функция $V(x) \equiv b$ не является устойчивой в том смысле, что путем произвольного малого изменения V и V' можно преобразовать V в функцию с любым числом максимумов и минимумов. Однако очевидно, что функции, представляющие собой константу, имеют широкое практическое применение. Этот факт кажется несовместимым с гипотезами о структурной устойчивости. Насколько уместно применять понятие структурной устойчивости в данном случае?

7. Укажите, какие математические представления соответствуют слову «устойчивый» в каждом из следующих выражений: устойчивое равновесие, устойчивая катастрофа, устойчивая экономика, устойчивая личность.

8. Машина катастроф Зимана фактически представляет собой механический переключатель больших размеров (под переключателем здесь понимается устройство, изменяющее вводимые в него непрерывные данные так, что на выходе имеется разрыв). Изучите возможность получения других устройств типа переключателей, соответствующих катастрофам, отличным от сборки. Сколько таких устройств можно получить? На основе метода теории катастроф дайте теоретическое описание биологического переключателя в случае, когда постепенное возрастание концентрации одного из химических веществ в клетке внезапно вызывает определенную реакцию.

9. Система, описываемая гладкой функцией V , не может обладать никакими периодическими свойствами, так как $V(x(t))$ всегда уменьшается с ростом t во всех точках, кроме равновесных. Тем не менее в общем случае изменения динамических систем могут быть периодическими для определенных начальных точек. Укажите, как можно обобщить понятия точки равновесия и устойчивого равновесия. Попробуйте сформулировать определение катастрофы для данного более общего случая.

10. Отметьте важность качественных и количественных результатов для прикладной математики, учитывая примечания к § 17.8. Насколько вы согласны с формой изложения взглядов Тома в этой главе?

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Р. Р. Мак-Лоун. Математическое моделирование—искусство применения математики. Перевод Ю. А. Сергеева	9
Глава 2. Дж. У. Крэггс. Задачи управления движением. Перевод Ю. А. Сергеева	21
Глава 3. Б. Нобл. Почему строят трехступенчатые ракеты? Перевод Ю. А. Сергеева	35
Глава 4. Н. Керл. Истечение жидкости из емкости. Перевод Ю. А. Сергеева	49
Глава 5. Дж. Дж. Холл. Модели молекул. Перевод Ю. А. Сергеева	65
Глава 6. Дж. Дж. Эндрюс и Д. Р. Этси. Сверление лазером. Перевод Ю. А. Сергеева	81
Глава 7. О. К. Зенкевич. Исследование напряжений в конструкциях и начала метода конечных элементов. Перевод А. С. Кравчука	93
Глава 8. Дж. Мэрди. Модели популяций. Перевод А. А. Пионтковского	109
Глава 9. М. Дж. Дэвис. Дифференциальная модель сахарного диабета. Перевод Ю. А. Сергеева	128
Глава 10. У. Д. Эштон. Стохастические модели дорожного движения. Перевод Ю. А. Сергеева	140
Глава 11. Т. Ломас. Модель планирования деятельности предприятия. Перевод Ю. В. Буркина	158
Глава 12. Д. Дж. Бартоломью. Управление структурой преподавательского состава в университете. Перевод Ю. В. Буркина	178
Глава 13. Р. Э. Берд. Математическая модель страхования автомобилей. Перевод Ю. В. Буркина	192
Глава 14. У. Хилл. Военное приложение теории игр. Перевод Ю. В. Буркина	202
Глава 15. Б. А. Карре. Сетевые модели. Перевод А. А. Пионтковского	219
Глава 16. Р. Х. Эткин. Городская структура. Перевод М. А. Родионова	235
Глава 17. Д. Чиллингуорт. Структурная устойчивость математических моделей. Значение методов теории катастроф. Перевод А. А. Пионтковского	248

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Под ред. Дж. Эндрюса и Р. Мак-Лоуна

Научные редакторы А. А. Бряндинская,
С. В. Чудов
Мл. научный редактор Ю. С. Андреева
Художник Ю. Е. Фомин
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор И. М. Кренделева
Корректор Н. И. Баранова

ИБ № 1524

Сдано в набор 22.02.79.
Подписано к печати 13.06.79.
Формат 60×90¹/₁₆.
Бумага типографская № 1.
Гарнитура латинская. Печать высокая.
Объем 8,75 бум. л. Усл. печ. л. 17,50.
Уч.-изд. л. 15,72. Изд. № 1/9882.
Тираж 22 000 экз. Зак. 3795. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Мир»
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валуевая, 28

35T
M340