

А.А.ХАРКЕВИЧ

СПЕКТРЫ  
И  
АНАЛИЗ

ОМ

А.А.ХАРКЕВИЧ · СПЕКТРЫ И АНАЛИЗ



## АННОТАЦИЯ

Монография посвящена разбору спектральных представлений, применяемых в теории колебаний, акустике и радиотехнике, и обсуждению методов спектрального анализа. Цель книги — расширить теоретический кругозор инженеров, работающих в области радио и акустики.

В третьем издании был сделан ряд добавлений и исправлений. Настоящее четвертое издание печатается без изменений.

Книга рассчитана на инженеров, преподавателей высшей школы и студентов указанных выше специальностей.

*Александр Александрович Харкевич.*

*Спектры и анализ.*

*Редактор А. И. Костиенко.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

Корректор *И. С. Цветкова.*

Печать с матриц. Подписано к печати 30/1 1962 г. Бумага  $84 \times 108^{1/8}$ .  
Физ. печ. л. 7,375. Условн. печ. л. 12,10. Уч.-изд. л. 11,54. Тираж 20 000.

Г-00932. Цена книги 73 коп. Зак. 92.

---

Государственное издательство физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

1-я типография Трансжелдориздата МПС. Б. Переяславская ул., 46.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ГЛАВА I

### СПЕКТРЫ

§ 1. Введение . . . . .	9
§ 2. Ряд и интеграл Фурье . . . . .	12
Определение периодической функции. Ряд Фурье в комплексной и вещественной формах. Предельный переход к интегралу Фурье. Замечание об особенностях интеграла Фурье как суммы, не обладающей свойствами своих слагаемых.	
§ 3. Спектры; определения и классификация . . . . .	17
Спектр и его графическое изображение Спектры амплитуд и фаз. Дискретные (линейчатые) спектры. Гармонические спектры Сплошные спектры. Спектральная плотность Смешанные спектры.	
§ 4. Некоторые теоремы о спектрах . . . . .	20
Принцип наложения. Спектры производных и интегралов. Теорема запаздывания. Теорема смещения. Теорема Рейли. Теорема о спектре произведения функций. Теорема свертывания. Двойственность теорем о спектрах.	
§ 5. Текущий спектр . . . . .	26
Определение спектра и реальные условия наблюдения. Понятие текущего спектра. Формирование спектра во времени. Текущий спектр синусоиды.	
§ 6. Мгновенный спектр . . . . .	30
Понятие мгновенного спектра. Простейшее определение. Определение со «скользящей» весовой функцией. Определения Фано и Пейджа.	

## § 7. Спектры модулированных колебаний . . . . . 34

Определение модуляции. АМ, ЧМ и ФМ. Спектр при АМ. Спектр при ЧМ Действительная ширина спектра при ЧМ. Пример ЧМ — воспроизведение фонограммы при непостоянстве скорости. ФМ и ее сравнение с ЧМ.

## § 8. Перенос спектра . . . . . 46

Постановка задачи; однополосная модуляция. Перенос спектра путем двухфазной и многофазной модуляции. Векторная диаграмма. Возможность переноса спектра импульсным методом

## § 9. Преобразование спектров при детектировании . . . 52

Определение детектирования. Линейное и квадратичное детектирование. Детектирование модулированного колебания. Детектирование биений. Соотношения для гиббаших.

## § 10. Спектр суммы периодических функций . . . . . 58

Спектр суммы в вещественной форме. Спектр суммы двух сдвинутых по времени колебаний. Пример — периодическая последовательность коротких импульсов. Приближенное выражение для случая малого сдвига.

## § 11. Спектры некоторых импульсов . . . . . 62

Спектры разрывных функций. Спектр весьма короткого импульса произвольной формы. Спектры различных импульсов: прямоугольного, треугольного, косинусоидального, колокольного, экспоненциального, в форме затухающей синусоиды, в форме усеченной синусоиды. Спектр периодической последовательности импульсов.

## § 12. Связь между длительностью импульса и шириной его спектра . . . . . 73

Примеры, показывающие зависимость  $\Delta f$  от  $\Delta t$ . Определение длительности как промежутка времени, в котором сосредоточена некоторая доля энергии импульса. Результаты вычислений для нескольких видов импульсов. Общее определение  $\Delta f$  и  $\Delta t$ . Радиус инерции плоской фигуры. Выражение для  $\Delta f \Delta t$  в универсальной форме. Решение вариационной задачи. Сопоставление с результатом вычисления для колокольного импульса.

## § 13. Связь между спектрами и характеристиками линейной системы . . . . . 83

Преобразование Фурье обыкновенного уравнения с постоянными коэффициентами. Связь между спектрами правой части и решения. Определение частотной и вре-

менной характеристик Частотная характеристика — спектр временной характеристики. Примеры Возмож- ность снятия частотной характеристики путем анализа.

#### § 14. Функции с ограниченным спектром . . . . . 87

Теорема Котельникова. Разложение функций с ог- раниченным спектром в ряд по составляющим вида  $\frac{\sin \omega_c(t - k\Delta t)}{\omega_c(t - k\Delta t)}$ .

#### § 15. Интеграл Фурье и дискретные спектры . . . . . 91

Возможность распространения интегрального пред- ставления на линейчатые спектры. Спектр синусои- дального колебания как единичный импульс  $\delta(\omega - \omega_0)$ . Предельный переход от непрерывной функции.

### ГЛАВА II

## АНАЛИЗ

#### § 16. Постановка вопроса . . . . . 95

Определение физического анализа. Роль электри- ческих измерений Анализатор как измерительный прибор.

#### § 17. Спектральные приборы . . . . . 97

Использование для анализа интерференции, прелом- ления и резонанса. Особенности резонатора как анализа- тора. Применение электромеханических резонаторов. Волновой резонанс.

#### § 18. Одновременный и последовательный анализ . . . . 100

Определение одновременного и последовательного анализа. Вариант последовательного анализа с преобра- зованием спектра посредством вспомогательной частоты.

#### § 19. Статическая разрешающая способность и погреш- ность анализатора . . . . . 102

Определение разрешающей способности. Разреша- ющая способность при последовательном анализе. Пока- зание анализатора при наличии двух спектральных линий. Показание анализатора при одновременном анализе. Срав- нение показаний при одновременном и последовательном анализе.

#### § 20. Об анализе без резонаторов . . . . . 111

Идеальный анализатор, выполняющий преобразование Фурье. Гетеродинный анализатор с реальным интегри- рующим звеном. Ваттметр или электрометр в качестве анализатора.

<b>§ 21. Работа резонатора . . . . .</b>	<b>116</b>
Выполняет ли резонатор преобразование Фурье? Весо- вая функция реального резонатора. Применение резо- наторов для получения мгновенного спектра. «Видимая речь».	
<b>§ 22. Действительные условия работы анализатора . . . .</b>	<b>119</b>
Неустановившийся режим анализатора. Связь между разрешающей способностью и временем анализа. Дина- мическая характеристика. Динамическая разрешающая способность.	
<b>§ 23. Связь между разрешающей способностью анализа- тора и временем анализа . . . . .</b>	<b>124</b>
Понятие о времени анализа в связи с устанавливаю- щимися процессами в анализаторе. Общая постановка вопроса, основанная на связи между частотной и вре- менной характеристиками линейной системы. Примеры. Оптимальная система.	
<b>§ 24. Динамическая разрешающая способность резонатора</b>	<b>129</b>
Динамическая характеристика резонатора с постоян- ной настройкой. Зависимость ширины динамической резонансной кривой от времени. Динамическая разре- шающая способность анализатора, состоящего из набора резонаторов с постоянными настройками.	
<b>§ 25. Динамическая характеристика резонатора при воз- действии изменяющейся частоты . . . . .</b>	<b>137</b>
Устанавливающийся режим резонатора при возбуж- дении линейно изменяющейся со временем частотой. Ана- лиз решения и основные черты явления. Приближенные формулы для параметров динамической характеристики.	
<b>§ 26. Анализ одиночных импульсов . . . . .</b>	<b>148</b>
Анализ одиночных импульсов набором резонаторов без затухания. Поправка на затухание. Пример: анализ прямоугольного импульса. Физическая картина явления. Энергетический анализ импульсов.	

## ГЛАВА III

### СПЕКТРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

<b>§ 27. Спектральное представление случайных процессов</b>	<b>161</b>
Спектр случайного процесса, как преобразование Фурье функции корреляции. Выражение статистического спектра через текущий спектр реализации и через сред-	

нее значение мгновенного спектра. Сводка формул для спектра и функции корреляции. Некоторые теоремы о спектрах.

## § 28. Спектры некоторых стационарных процессов . . . . . 171

Примеры: 1) процесс, принимающий значения  $\pm a$  с переменной знака в случайные моменты, 2) процесс, принимающий случайное значение  $\xi_k$  на интервале между двумя случайными моментами. Применение характеристических функций.

## § 29. Понятие спектра в применении к нестационарным процессам . . . . . 179

Усреднение по множеству и по времени. Двойное усреднение неэргодических процессов. Средний спектр и средняя функция корреляции, их взаимная связь через пару преобразований Фурье.

## § 30. Спектры некоторых нестационарных процессов . . . 184

Примеры: 1) процесс, принимающий значения  $\pm a$  с переменной знака в равноотстоящие моменты, 2) процесс, принимающий случайное значение  $\xi_k$  на интервале между равноотстоящими моментами, 3) общий случай АИМ, 4) АМ, 5) ФМ, ЧМ с большим индексом.

## § 31. Замечания об анализе случайных процессов . . . . . 199

Погрешности измерения, обусловленные конечным временем интегрирования. Результаты Райса. Различные методы анализа случайных процессов.

## § 32. О возможностях сжатия спектра . . . . . 205

Постановка задачи. Преобразование, сохраняющее информацию. Возможности нестатистического сжатия спектра. Примеры. Понятие избыточности. Пути статистического сжатия спектра. Модуляция и детектирование как операции, расширяющие и сжимающие спектр.

## ДОБАВЛЕНИЯ

I. О ширине спектра произведения функций . . . . .	213
II. Спектры некоторых частотно-модулированных колебаний . . . . .	217
III. Активная полоса спектра . . . . .	224
IV. Разложение спектров по спектрам составляющих функций . . . . .	226
V. Спектр короткого знакопеременного импульса . . . . .	228
VI. Подробности вычисления $\Delta f$ и $\Delta t$ . . . . .	230
VII. По поводу общего критерия для оценки $\Delta f$ и $\Delta t$ . . . . .	233
Л и т е р а т у р а . . . . .	236





## ГЛАВА I СПЕКТРЫ

### § 1. Введение

Когда И. Бернулли и Эйлер, а затем Фурье впервые применили разложение функций в тригонометрические ряды \*), то это разложение рассматривалось лишь как математическое средство для решения задач математической физики. Сам Фурье пользовался рядами, получившими его имя, для интегрирования уравнения теплопроводности. Метод Фурье стал классическим приемом решения волновых уравнений — уравнения струны и, позднее, телеграфного уравнения. Однако разложение Фурье долгое время не связывалось непосредственно с какими-либо физическими представлениями. Даже после открытия электрических колебаний и волн высказывалось сомнение в адекватности разложения Фурье происходящим физическим явлениям. Например, Герц (см. его переписку с Пуанкаре \*\*)) отрицательно относился к спектральным представлениям.

Долгое время спектральные представления применялись и развивались лишь сравнительно узким кругом физиков-теоретиков. Но, начиная с двадцатых годов, в связи с бурным развитием радиотехники, акустики, колебательной механики и вообще отраслей техники, опирающихся на теорию колебаний, спектральные представления необычайно широко распространились. Была установлена прямая связь между спектральным разложением и поведением реальных колебательных систем. Спектральный способ описания явлений получил всеобщее признание.

---

\*) Любопытно отметить, что самая возможность такого разложения в те времена оспаривалась.

\*\*) Цитируется в работе Н. Н. Андреева [2].

Более того, спектральный язык стал всеобщим языком, на котором объясняются между собой все, имеющие дело с техническими применениями разного рода колебаний. На спектральном (частотном) языке стали описывать не только явления, но и свойства аппаратуры.

Нет сомнения, что такое широкое развитие спектральных представлений сыграло огромную прогрессивную роль; благодаря им сложные колебательные явления стали доступны пониманию широких кругов техников и физиков.

Но история развития спектральных представлений показывает, что эти представления давали иногда «осечку». Совершались — и продолжают совершаться — грубые ошибки. Возникали затяжные дискуссии по основным вопросам (например, дискуссия о боковых полосах при радиопередаче), происходили курьезные недоразумения (например, неправильное представление о ширине полосы при частотной модуляции). Обнаруживались разного рода парадоксы. А парадоксы, как замечательно сказал покойный Л. И. Мандельштам, возможны лишь там, где нет полного понимания, «понимания второго рода», как он выражался (если не говорить о парадоксах, обусловленных несовершенством самой теории).

В действительности спектральный подход безупречен. Он никогда не приведет к ошибкам, если им разумно пользоваться. Вышеупомянутые ошибки и недоразумения — это не порок метода, а результат неумелого его применения.

Можно избежать многих ошибок, если не ограничивать свой кругозор спектральными рамками, а дополнять и углублять спектральный подход подходом временным.

Очень интересно проследить эволюцию спектральных представлений за последнее время. Первоначальное определение спектра основывается на преобразовании Фурье; интегрирование по времени выполняется в бесконечных пределах. Таким образом, преобразованию подвергается функция времени в целом; результат преобразования, т. е. спектр, зависит только от частоты. Однако учет реальных условий эксперимента заставляет ввести новое понятие — понятие «текущего спектра». Текущий спектр определяется как результат преобразования Фурье, но с переменным верхним пределом интегрирования, в качестве которого фигурирует текущее время. Таким образом, появляется спектральная функция, зависящая не только от частоты, но и от вре-

мени — это уже некоторое промежуточное понятие, сближающее частотные и временные представления. Процесс сближения продолжается: вводится, несомненно, полезное понятие «мгновенного спектра» и связанное с ним понятие «активной полосы спектра». От мгновенного спектра остается один лишь шаг до мгновенной частоты, после чего мы можем снова говорить о «синусоиде с переменной частотой», т. е. восстановить в правах понятие, весьма решительно осужденное в свое время. Таким образом, спектральные представления, описав в своем развитии широкий круг, возвращаются почти что к исходным позициям, однако на значительно более высоком уровне: все основные и ряд промежуточных понятий ясно определены и образуют в совокупности мощное и гибкое орудие исследования.

В связи с развитием новых отраслей техники, главным образом радиотехники (например, импульсная техника, специальные виды модуляции и т. п.), от инженеров требуется более глубокое овладение спектральными представлениями. Поэтому одна из задач этой книги состоит в изложении основных вопросов теории спектров в объеме, по возможности отвечающем современным требованиям, и на уровне, несколько превышающем средний уровень знаний, даваемый высшим техническим учебным заведением.

Изложению этих вопросов посвящена первая глава «Спектры».

Практическое применение спектральных представлений неизбежно приводит к необходимости экспериментального осуществления разложения Фурье, т. е. к гармоническому анализу различных явлений. Хотя существует огромное число методов анализа и применяющих эти методы приборов-анализаторов, до сих пор многие основные вопросы анализа оставались недостаточно разработанными, а подчас и не вполне ясными. В частности, основные требования к анализу как к измерительному процессу и к анализатору как измерительному прибору зачастую вовсе не стабились и не обсуждались. Вероятно, это можно объяснить тем, что постановка таких вопросов связана с известными трудностями. Однако эти трудности преодолимы, и необходимо попытаться привести принципиальные вопросы анализа в некоторый порядок. Такая попытка сделана во второй главе «Анализ».

Вопросы, относящиеся к спектрам случайных процессов, выделены в отдельную — третью главу.

Ряд дополнительных вопросов, представляющих тот или иной интерес и имеющих прямое отношение к теме, рассмотрен в «Добавлениях».

## § 2. Ряд и интеграл Фурье

Понятие о разложении Фурье можно считать общеизвестным. Поэтому здесь напоминаются лишь основные соотношения и определения. Математические подробности читатель найдет в любом учебнике.

Мы начинаем с определения периодической функции:

$$f(t) = f(t + nT). \quad (2.1)$$

Здесь  $T$  — постоянная величина, называемая периодом,  $n$  — любое целое число, положительное или отрицательное. Определение (2.1) выражает основное свойство периодической функции, состоящее в том, что ход явления периодически повторяется и что периодичность эта существует вечно, т. е. для всех времен от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Из этого сразу можно заключить, что периодических явлений в строгом смысле определения (2.1) в действительности нет и быть не может. Периодическая функция есть полезная математическая абстракция; ее соотношение с действительными явлениями выяснится в дальнейшем.

Всякая — с несущественными для нас математическими ограничениями \*) — периодическая функция может быть представлена рядом по тригонометрическим функциям

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(2\pi k \frac{t}{T} - \varphi_k\right). \quad (2.2)$$

Периодическая функция  $f(t)$  представлена, таким образом, суммой слагаемых вида

$$c_k \cos\left(2\pi k \frac{t}{T} - \varphi_k\right),$$

---

\*) Именно: функция предполагается ограниченной, кусочно-непрерывной и имеющей на протяжении периода конечное число экстремальных значений (условия Дирихле).

каждое из которых есть синусоидальное колебание с амплитудой  $c_k$  и начальной фазой  $\varphi_k$ . Значения  $c_k$  и  $\varphi_k$  должны быть надлежащим образом подобраны для того, чтобы равенство (2.2) выполнялось. Частоты колебаний, из которых составляется периодическая функция  $f(t)$ , образуют гармоническую последовательность; это значит, что частоты всех составляющих кратны основной частоте  $\frac{1}{T}$ . Отдельные составляющие носят название гармоник. Колебание с частотой  $\frac{1}{T}$  называется первой гармоникой ( $k=1$ ), с частотой  $\frac{2}{T}$  — второй гармоникой ( $k=2$ ), и так далее.

Выражение (2.2) может быть переписано в другой, очень употребительной форме:

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos 2\pi k \frac{t}{T} + b_k \sin 2\pi k \frac{t}{T} \right), \quad (2.3)$$

где

$$a_k = c_k \cos \varphi_k, \quad b_k = c_k \sin \varphi_k,$$

так что

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{b_k}{a_k}.$$

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos 2\pi k \frac{t}{T} dt, \quad (2.4)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin 2\pi k \frac{t}{T} dt. \quad (2.5)$$

Величина  $c_0$  выражает среднее значение функции за период; она называется часто постоянной составляющей и

вычисляется по формуле

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt. \quad (2.6)$$

Если  $a_k$ ,  $b_k$  и  $c_0$  определены по формулам (2.4), (2.5) и (2.6), то равенство (2.3) есть тождество.

Замечательным свойством ряда Фурье является то, что если взять конечное число членов ряда, т. е. аппроксимировать периодическую функцию тригонометрическим полиномом, представив ее в виде

$$f(t) \simeq c_0 + \sum_{k=1}^N \left( a_k \cos 2\pi k \frac{t}{T} + b_k \sin 2\pi k \frac{t}{T} \right),$$

то для любого  $N$  получается наименьшее квадратичное отклонение от точного значения  $f(t)$ , если коэффициенты полинома определены по тем же формулам (2.4), (2.5) и (2.6). С увеличением числа членов  $N$  приближение, разумеется, улучшается, и в пределе, при  $N \rightarrow \infty$  приближенное равенство переходит в точное.

Ряд Фурье может быть также записан в комплексной форме следующим образом:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}, \quad (2.7)$$

где

$$2C_k = c_k e^{-j\varphi_k} = a_k - jb_k; \quad c_k = 2|C_k|; \quad c_0 = C_0.$$

Величина  $2C_k$  есть комплексная амплитуда;  $C_k$  находится по формуле

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt. \quad (2.8)$$

Суммирование в (2.7) ведется по всем целым  $k$  как положительным, так и отрицательным, включая и нуль. Для того

чтобы вернуться от (2.7) к (2.2) или (2.3), нужно вспомнить, что вещественная часть каждого слагаемого под знаком сумм в (2.7) четна по отношению к  $k$ , а мнимая часть — нечетна. В дальнейшем мы будем преимущественно пользоваться компактной формой (2.7).

Ряд Фурье дает разложение периодической функции по тригонометрическим функциям. Это разложение может быть обобщено и на случай непериодической функции. Нестрогий, но наглядный путь к получению разложения Фурье непериодической функции состоит в применении предельного перехода при  $T \rightarrow \infty$ . Действительно, непериодическую функцию можно рассматривать как предельный случай периодической функции при неограниченно возрастающем периоде. Возьмем формулу (2.7) и подставим в нее значение  $C_k$  из (2.8)

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt.$$

Перейдем к пределу, устремляя  $T$  к бесконечности. Вместо  $\frac{1}{T}$  введем круговую основную частоту

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Эта величина есть частотный интервал между соседними гармониками, частоты которых равны  $2\pi \frac{k}{T}$ . При предельном переходе сделаем замену по следующей схеме:

$$T \rightarrow \infty,$$

$$\omega_1 \rightarrow d\omega,$$

$$2\pi \frac{k}{T} \rightarrow \omega,$$

где  $\omega$  — текущая частота, изменяющаяся непрерывно,  $d\omega$  — ее приращение. Сумма перейдет в интеграл, и мы получим:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.9)$$



или

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.10)$$

где

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.11)$$

Формулы (2.10) и (2.11) являются основными формулами теории спектров. Они представляют собой пару преобразований Фурье, связывающих между собой две функции: вещественную функцию времени  $f(t)$  и комплексную функцию частоты  $S(\omega)$ . Формула (2.10) представляет собой интеграл Фурье в комплексной форме. Смысл этой формулы состоит в том, что функция  $f(t)$  представлена суммой синусоидальных составляющих. Но функция  $f(t)$  предполагается непрерывной; поэтому она может быть представлена только суммой бесконечно большого числа бесконечно малых колебаний бесконечно близких по частоте. Комплексная амплитуда каждого отдельного колебания бесконечно мала; она равна

$$dC = \frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega. \quad (2.12)$$

Частотный интервал между двумя соседними колебаниями также бесконечно мал; он равен  $d\omega$ .

Если ряд Фурье представляет периодическую функцию суммой хотя и бесконечного числа синусоид, но с частотами, имеющими определенные дискретные значения, то интеграл Фурье представляет непериодическую функцию суммой синусоид с непрерывной последовательностью частот. В составе непериодической функции имеются, как говорят, все частоты.

Одна из особенностей, отличающих интеграл Фурье от ряда Фурье, состоит в том, что ряд Фурье представляет периодическую функцию как сумму периодических же составляющих, тогда как интеграл Фурье представляет непериодическую функцию суммой периодических составляющих. Таким образом, в случае интеграла Фурье сумма не обладает существенным свойством своих слагаемых, и это обстоятель-

ство необходимо иметь в виду при рассуждениях общего характера о спектральном разложении по Фурье.

Отметим в заключение, что формулу (2.10) можно записать в вещественной форме; тогда интегрирование будет производиться только по положительным частотам. Введя обозначение

$$S(\omega) = A(\omega) + jB(\omega),$$

получим (учитывая, что  $A$  — четная, а  $B$  — нечетная функция)

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t - B(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (2.13)$$

Можно получить еще одну запись формулы (2.10), представив ее в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [S(\omega) e^{j\omega t} + S(-\omega) e^{-j\omega t}] d\omega.$$

В квадратных скобках стоит сумма сопряженных величин, равная удвоенной вещественной части. Поэтому

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.14)$$

### § 3. Спектры; определения и классификация

Вернемся к формуле (2.2) ряда Фурье и перепишем ее в виде

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k).$$

Здесь  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  — основная частота. Как мы видим, сложная периодическая функция  $f(t)$  вполне определяется совокупностью величин  $c_k$  и  $\varphi_k$ . Совокупность величин  $c_k$  носит название *спектра* амплитуд. Совокупность величин  $\varphi_k$  называется соответственно спектром фаз. Для многих применений достаточно знать спектр амплитуд; он применяется настолько часто, что когда говорят просто спектр, то подразумевают обычно именно амплитудный спектр. В остальных случаях

делают соответственные оговорки. Мы будем поступать так же.

Спектр периодической функции можно изобразить графически. Выберем для этого координаты  $c_k$  и  $\omega = k\omega_1$ . Спектр будет изображен в этой системе координат совокупностью дискретных точек, так как каждому значению  $k\omega_1$  соответствует одно определенное  $c_k$ . График, состоящий

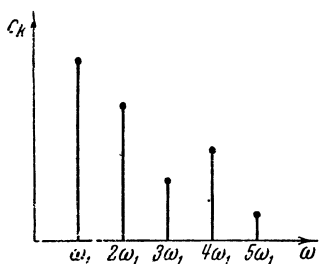


Рис. 1.

из отдельных точек, неудобен. Поэтому принято изображать амплитуды отдельных гармоник вертикальными отрезками соответствующей длины. В результате спектр периодической функции принимает вид, показанный на рис. 1. Это — дискретный спектр; его называют также линейчатым, заимствуя этот термин из оптики. Второе свойство спектра, изображенного на рис. 1, состоит

в том, что этот спектр — гармонический. Это значит, что он состоит из равноотстоящих спектральных линий; частоты гармоник находятся в простых кратных соотношениях. Конечно, отдельные гармоники, иногда даже первая, могут отсутствовать, т. е. амплитуды их могут равняться нулю; это, однако, не нарушает гармоничности спектра.

Не следует думать, что только периодическая функция обладает дискретным спектром. Предположим, например, что сложное колебание есть результат сложения двух синусоидальных колебаний с несоизмеримыми частотами, скажем  $\omega_1$  и  $\sqrt{2}\omega_1$ . Это колебание заведомо непериодическое, однако спектр его дискретен и состоит из двух спектральных линий.

Функция, обладающая дискретным спектром из произвольно расположенных на шкале частот спектральных линий, называется почти-периодической и обладает многими интересными свойствами \*).

\*) См. по этому поводу Г. Б о р, Почти-периодические функции, ГТТИ, 1934, краткий очерк теории почти-периодических функций дан в приложении к книге: И. И. Привалов, Ряды Фурье, ГТТИ, 1934.

Итак, дискретные, или линейчатые спектры могут принадлежать как периодическим, так и непериодическим функциям. В первом случае линейчатый спектр обязательно гармонический.

Большое практическое значение имеет частный случай почти-периодической функции, представляемой разложением вида

$$f(t) = \sum c_k \cos[(\omega_0 + k\omega_1)t - \varphi_k],$$

где  $k$  принимает как положительные, так и отрицательные значения. Спектр, отвечающий этому разложению, характеризуется тем, что линии его эквидистантны; поэтому мы будем называть такого рода линейчатый спектр квазигармоническим. Таковы, например, спектры периодически модулированных колебаний;  $\omega_0$  в этом случае есть не что иное, как несущая частота.

Обратимся теперь к спектрам непериодических функций. Мы уже знаем, что в результате предельного перехода от ряда к интегралу Фурье интервалы между отдельными спектральными линиями неограниченно сокращаются, линии сливаются, и вместо дискретных точек спектр должен изображаться непрерывной последовательностью точек, т. е. непрерывной кривой. Такого рода спектр называется сплошным.

Здесь нужно однако внести одно уточнение. Мы писали формулу интеграла Фурье в виде (2.10):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Подынтегральная функция выражает отдельное, бесконечно малое слагаемое, т. е. колебание с бесконечно малой амплитудой  $dC$ :

$$\frac{1}{\pi} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = dC e^{j\omega t}.$$

Отсюда находим

$$S(\omega) = \pi \frac{dC}{d\omega}.$$

Таким образом, величина  $S(\omega)$  выражает не непосредственно амплитуду, а так называемую *спектральную плот-*

ность. Однако обычно эту деталь опускают и называют  $S(\omega)$  комплексным спектром непериодической функции, а абсолютное значение (модуль) этой величины

$$\Phi(\omega) = |S(\omega)|$$

просто спектром. Это может повести к недоразумениям лишь в том случае, когда мы будем непосредственно сравнивать соотношения для периодических и непериодических функций.

Итак, мы имеем две основные разновидности спектров: линейчатые и сплошные. Гармонические линейчатые спектры принадлежат периодическим функциям, сплошные — непериодическим.

В заключение настоящего параграфа заметим, что теми или иными функциями времени могут выражаться изменения самых различных физических величин. Соответствующий смысл получают и спектры этих функций. В практике приходится, например, иметь дело со спектрами механических величин: смещения, скорости, ускорения, силы, давления и т. п.; электрических величин: тока, напряжения и т. п. Кроме того, нас часто интересуют спектры квадратичных величин: мощности или энергии. Например, в оптике чаще всего имеют дело со спектрами этих величин.

#### § 4. Некоторые теоремы о спектрах

Выведем теперь несколько общих теорем о спектрах, основанных на свойствах преобразования Фурье. Эти теоремы сходны с теоремами операционного исчисления и выводятся аналогичным путем: ведь преобразование Фурье и преобразование Лапласа, составляющее основу операционного исчисления, находятся в близком родстве между собой.

Прежде всего отметим, что преобразование Фурье линейно. Из этого непосредственно следует, что к нему применим принцип наложения. Это обстоятельство можно выразить следующим соотношением:

$$S_1(\omega) + S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} [f_1(t) + f_2(t)] dt. \quad (4.1)$$

Смысл соотношения (4.1) может быть кратко выражен так: спектр суммы равен сумме спектров.

Теперь докажем теорему о спектре производной: если комплексный спектр функции  $f(t)$  есть  $S(\omega)$ , то комплексный спектр  $f'(t) = \frac{df}{dt}$  есть  $j\omega S(\omega)$ ; комплексный спектр производной получается из комплексного спектра функции умножением на  $j\omega$ .

Для доказательства составим выражение

$$S_{(1)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f'(t) dt$$

и проинтегрируем его по частям. Получим

$$S_{(1)}(\omega) = f(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Так как функция, представляемая интегралом Фурье, обращается в нуль при  $t \rightarrow \pm \infty$ , то имеем

$$S_{(1)}(\omega) = j\omega S(\omega). \quad (4.2)$$

Это доказательство может быть распространено на случай  $n$ -й производной. Прделав интегрирование по частям  $n$  раз, получим комплексный спектр  $n$ -й производной [при условии, что все производные функции до  $(n-1)$ -го порядка включительно обращаются в нуль при  $t \rightarrow \pm \infty$ ]

$$S_{(n)}(\omega) = (j\omega)^n S(\omega). \quad (4.3)$$

Подобным же образом может быть выведено выражение для комплексного спектра интеграла от данной функции.

Составляя выражение

$$S_{(-1)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \left( \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right) dt$$

и интегрируя его по частям, находим

$$S_{(-1)}(\omega) = \frac{1}{j\omega} S(\omega) \quad (4.4)$$

при условии, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

Это условие выполняется, например, для всякой нечетной функции, интегрируемой в бесконечных пределах.

Выведем теперь выражение для комплексного спектра функции, отличающейся от исходной запаздыванием на время  $\tau$ . Мы можем записать

$$S_{\tau}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t - \tau) dt.$$

Путем простой замены переменной по формуле  $t_1 = t - \tau$  приходим к результату

$$S_{\tau}(\omega) = e^{-j\omega\tau} S(\omega). \quad (4.5)$$

Если в этом соотношении перейти от комплексных спектров к их модулям, то получим

$$|S_{\tau}(\omega)| = \Phi_{\tau}(\omega) = \Phi(\omega),$$

т. е. при запаздывании — или вообще при смещении функции по шкале времен — спектр ее остается неизменным. Иначе говоря, спектр не зависит от выбора начального момента для отсчета времен, чего и следовало ожидать.

Следующая теорема относится к транспозиции (переносу) спектров. Вопрос ставится следующим образом: какой функции соответствует спектр, смещенный по шкале частот на  $\Omega$ ?

Так как

$$S(\omega + \Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega + \Omega)t} f(t) dt,$$

то, следовательно, комплексным спектром искомого вида будет обладать функция

$$f_{\Omega}(t) = e^{-j\Omega t} f(t). \quad (4.6)$$

Выведем теперь некоторые более сложные соотношения. Возьмем выражение интеграла Фурье

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

умножим обе части на  $f_2(t)$  и проинтегрируем по  $t$  в пределах  $\pm \infty$ . Получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Изменим порядок интегрирования в правой части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{j\omega t} dt.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega) S_2(-\omega) d\omega. \quad (4.7)$$

Эта формула годится, например, для вычисления энергии, если известны спектры тока и напряжения, или любых двух других функций, произведение которых выражает мощность.

В вещественной форме формула (4.7) может быть представлена в виде [учитывая, что  $S(-\omega) = S^*(\omega)$ ]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi_1(\omega) \Phi_2(\omega) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) d\omega; \quad (4.8)$$

для частного случая  $f_1 = f_2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi^2(\omega) d\omega. \quad (4.9)$$

Последнее соотношение известно под названием теоремы Рэили. Нам предстоит им пользоваться в дальнейшем. Формула (4.9) показывает, что по физическому смыслу функция

$$\Phi^2(\omega) = S(\omega) S^*(\omega)$$

представляет спектральную плотность энергии.



Перепишем формулу (4.7) в новых обозначениях

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) u_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\nu) R_2(-\nu) d\nu$$

и определим функцию  $u_2(t)$  соотношением

$$u_2(t) = f_2(t) e^{-j\omega t}.$$

Если обозначить через  $S_2$  спектр функции  $f_2$ , то на основании теоремы (4.6) будем иметь

$$R_2(\nu) = S_2(\omega + \nu)$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\nu) S_2(\omega - \nu) d\nu.$$

Таким образом, если  $S_1$  и  $S_2$  — соответственно спектры функций  $f_1$  и  $f_2$ , а  $S$  — спектр произведения  $f = f_1 f_2$ , то имеем

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\nu) S_2(\omega - \nu) d\nu. \quad (4.10)$$

Интеграл в правой части носит название свертки функций  $S_1$  и  $S_2$ .

Соотношение (4.10) выражает спектр произведения двух функций через спектры каждой из них.

Выведем, наконец, еще одну формулу. Составим свертку двух функций времени  $t_1$  и  $t_2$ .

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

и вычислим спектр этой функции

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_2(t - \tau) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \tau} f_1(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \mu} f_2(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

Здесь после перемены порядка интегрирования сделана замена переменной по формуле  $\mu = t - \tau$ .

Итак, спектр функции  $f(t)$  есть

$$S(\omega) = S_1(\omega) S_2(\omega). \quad (4.11)$$

Это соотношение дает возможность найти функцию времени, спектр которой известен и выражается произведением спектров двух функций. Полагая в (4.11)

$$S_2(\omega) = S_1^*(\omega),$$

можно убедиться, что  $\Phi^2(\omega)$  есть спектр функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t + \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(\tau - t) d\tau.$$

Применение соотношений (4.1)–(4.11) может в значительной степени облегчить вычисление спектров различных функций.

В заключение настоящего параграфа следует указать на одно интересное обстоятельство. Применяя разложение Фурье, мы имеем дело с парой преобразований Фурье:

$$\left. \begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

В этих формулах обращает на себя внимание то, что время  $t$  и круговая частота  $\omega$  входят в них симметричным образом, на равных началах\*). Но из полной симметрии формул (4.12) следует также, что всякая теорема теории спектров имеет парную теорему, не требующую особого доказательства.

---

\*) Формулы могут быть сделаны совершенно симметричными, если, изменив определения, разнести множитель  $\frac{1}{2\pi}$  на оба интеграла (т. е. ввести в обеих формулах множитель  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ), как часто и делают.

ства и получаемую из данной теоремы простой формальной заменой переменной  $t$  переменной  $\omega$  и функций времени — соответствующими спектральными плотностями.

Пересматривая теоремы настоящего параграфа, мы убеждаемся в том, что они имеют парный характер. Для иллюстрации этого можно записать некоторые из них в форме таблицы:

Исходные преобразования	
$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	
$S_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega t} dt =$ $= e^{-j\omega \tau} S$ <p>Теорема запаздывания</p>	$f_\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega + \Omega) e^{j\omega t} d\omega =$ $= e^{-j\Omega t} f$ <p>Теорема смещения</p>
$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 f_2 e^{-j\omega t} dt =$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\nu) S_2(\omega - \nu) d\nu$ <p>Теорема о спектре произведения</p>	$f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1 S_2 e^{j\omega t} d\omega =$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ <p>Теорема о спектре свертки</p>

## § 5. Текущий спектр

По основному определению (§§ 2 и 3) спектральная плотность выражается формулой

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.1)$$

Таким образом, для нахождения спектра необходимо выполнить интегрирование по времени в бесконечных пре-

делах. Это возможно в принципе, если функция  $f(t)$  задана и известна на всем бесконечном протяжении оси времен. Но если функция  $f(t)$  есть отображение некоторого реального физического процесса, являющегося объектом нашего наблюдения, и если весь ход этого процесса не может быть в точности предсказан на основании теоретических соображений, то сведения о функции  $f(t)$  мы получаем лишь в результате наших наблюдений. Поэтому мы можем выполнить интегрирование не в бесконечных пределах, как этого требует определение (5.1), а лишь до настоящего, текущего момента.

Все прошлое в принципе нам может быть известно, так что интегрирование может быть выполнено в пределах от  $-\infty$  до текущего времени  $t$ . Измененное таким образом определение спектра принимает вид

$$S_t(\omega) = \int_{-\infty}^t f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.2)$$

Величина  $S_t(\omega)$ , являющаяся функцией не только частоты, но и времени, носит название *текущего спектра*.

В действительных условиях наблюдение процесса (или самый процесс) фактически может начинаться в некоторый момент  $t_0$ , находящийся в прошлом на конечном удалении от текущего момента  $t$ . В этом случае момент  $t_0$  может быть принят за начало отсчета времени, и мы можем определить текущий спектр следующим образом:

$$S_t(\omega) = \int_0^t f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau. \quad (5.3)$$

Мы будем в дальнейшем пользоваться обоими определениями текущего спектра.

Ясно, что связывание математического определения спектра с условиями реального эксперимента само по себе имеет большое значение. Об этой стороне дела подробнее говорится в § 18. Но понятие текущего спектра является вообще весьма плодотворным.

Мы начали все изложение теории спектров со спектра периодической функции, определяемой соотношением

$$f(t) = f(t + nT). \quad (2.1)$$

Периодическая функция есть математическая абстракция. Эта абстракция очень полезна. Но надо иметь в виду, что не может существовать никакого реального физического процесса, отвечающего определению (2.1) Всякий действительный процесс имеет начало и конец, и, следовательно, описывается выражением вида (2.1) лишь на протяжении конечного промежутка времени. Мы называем действительный циклически повторяющийся процесс периодическим, если этот процесс длится достаточно долго. Мерилом длительности служит число «периодов»; длительность велика, если число периодов много больше единицы. Если взять короткий отрезок процесса, то он вовсе не будет иметь периодического характера. Периодичность процесса проявляется не сразу; лишь с течением времени обрисовываются характерные черты процесса. Текущий спектр как раз и выражает со спектральной точки зрения это развитие процесса.

Спектр короткого отрезка процесса — за небольшое время от его начала — однороден, так как короткий отрезок любого процесса есть просто короткий импульс. Если в дальнейшем происходит периодическое повторение некоторого цикла явления, то на текущем спектре начинают сформировываться максимумы на основной частоте и ее гармониках. Эти максимумы становятся все более острыми и высокими, а значение спектральной плотности в интервалах между максимумами все убывает и — лишь в пределе, при  $t \rightarrow \infty$ , — сплошной текущий спектр вырождается в линейчатый спектр периодического в строгом смысле процесса.

Конечно, при достаточно больших длительностях процесса максимумы делаются настолько узкими, что их можно уже трактовать, практически, как линии. Однако это не умаляет принципиального значения всего сказанного выше — периодический процесс есть лишь предел, к которому может стремиться с течением времени реальный повторяющийся процесс.

Для уяснения высказанных соображений построим текущий спектр синусоиды. Применяя определение (5.3) и подставляя в него

$$f(t) = \sin \Omega t,$$

найдем

$$S_t = \int_0^t e^{-j\omega t} \sin \Omega t \, dt = \\ = \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \left[ 1 - e^{-j\omega t} (\cos \Omega t + j \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega t) \right]. \quad (5.4)$$

Формулу (5.4) можно существенно упростить, рассматривая значения спектральной плотности для дискретных моментов

$$t = t_n = n \frac{T}{2} = n \frac{\pi}{\Omega}.$$

Подставив это значение в (5.4), получим

$$S_t = \frac{1}{\Omega} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2} \left[ 1 - (-1)^n e^{-jn\pi \frac{\omega}{\Omega}} \right]$$

и спектр

$$\Phi_t = |S_t| = \frac{2}{\Omega} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2} \sin n \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\Omega}. \quad (5.5)$$

В этой формуле знак  $\sin$  относится к четному  $n$ , а знак  $\cos$  — к нечетному  $n$ . Величина  $n$  означает число полупериодов синусоиды с момента включения.

Неопределенность при  $\omega = \Omega$  легко раскрывается:

$$\Phi_t|_{\omega=\Omega} = \frac{1}{2} t = n \frac{T}{4},$$

т. е. спектральная плотность на этой частоте нарастает со временем линейно.

Текущий спектр синусоиды, вычисленный по формуле (5.5), представлен на рис. 2 в виде рельефа. По горизонтальной оси, лежащей в плоскости чертежа, отложено отношение частот  $\frac{\omega}{\Omega}$ , по оси ординат — спектральная плотность; по горизонтальной оси, направленной от зрителя, — число полупериодов  $n$ . Это число, очевидно, пропорционально

времени. Детали на левом склоне рельефа опущены, чтобы не усложнять чертежа.

Рис. 2 ясно показывает, что вначале спектр получается однородным; лишь постепенно формируется максимум на частоте  $\Omega$ ; этот максимум с течением времени становится все более и более острым, но лишь в пределе при  $t \rightarrow \infty$  фигура превратится в дискретную спектральную линию,

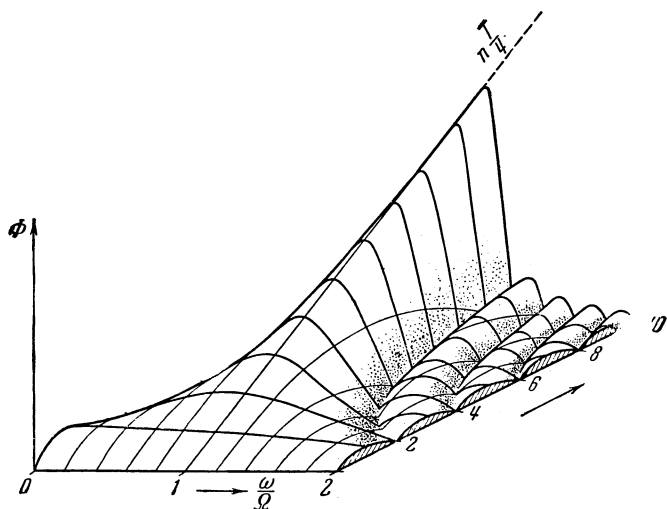


Рис. 2.

которой мы изображаем периодическое, синусоидальное колебание. При этом спектральная плотность на частоте  $\omega = \Omega$  будет бесконечно велика. Так оно и должно быть. По этому поводу нужно вспомнить то, что говорилось в § 4 о соотношении между спектром амплитуд составляющих периодической функции и спектральной плотностью непериодической функции.

## § 6. Мгновенный спектр

Введение понятия текущего спектра значительно расширяет круг спектральных представлений. Это понятие перекидывает мост между частотным и временным описанием

явлений. Но ощущается потребность и в дальнейшем сближении частотной и временной точек зрения; в результате возникает еще одно понятие: понятие *мгновенного спектра*.

Обычное определение спектра (5.1) дает функцию частоты: зависимость от времени выпадает, так как спектр отражает процесс в целом. Определение текущего спектра (5.2) отражает всю предшествующую (вплоть до настоящего момента) историю процесса. Но имеет, очевидно, смысл и понятие о спектре, изменяющемся во времени, и отражающем свойства процесса в данный момент. Представим себе, например, диалог между мужчиной и женщиной, т. е. собеседников с низким и высоким голосом. Совершенно естественно представление, что, когда говорит мужчина, спектр звука располагается в области более низких частот, а когда говорит женщина, спектр перемещается в область более высоких частот. Остается дать этому интуитивно ясному понятию четкое математическое определение.

Простейшее определение мгновенного спектра может быть дано в следующем виде:

$$S_T(\omega, t) = \int_{t-T}^t f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (6.1)$$

т. е. мгновенный спектр определен, как спектр отрезка процесса длительностью  $T$ , непосредственно предшествующего данному моменту  $t$ . В этом определении мы имеем дело со «скользящим» интегрированием: интервал интегрирования имеет постоянную длину, но перемещается по оси времени; расположение интервала неизменно относительно текущего времени  $t$ .

Возможно и более общее определение мгновенного спектра, состоящее в том, что в подынтегральное выражение вводится скользящая (т. е. связанная с текущим временем) весовая функция. Определение принимает вид

$$S_r(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau - t) f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.2)$$

Легко видеть, что определение (6.1) есть частный случай (6.2), если взять весовую функцию в виде

$$r(x) = \sigma(x + T) - \sigma(x),$$



где

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

— единичная функция. Эти соотношения поясняются рис. 3.

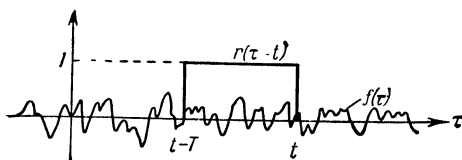


Рис. 3.

Фано [22] применяет определение (6.2), выбирая весовую функцию в виде \*)

$$r(x) = e^{\alpha x} \sigma(-x)$$

(рис. 4). Эта функция учитывает все прошлое процесса, но с весом, экспоненциально убывающим по мере удаления

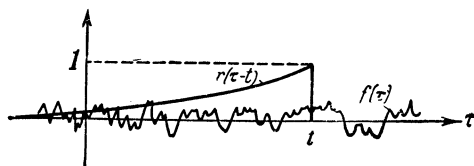


Рис. 4.

от настоящего момента. Основанием для такого выбора весовой функции является то, что она выражает фактический результат спектрального анализа при помощи реальных фильтров, характеризующихся постоянной времени  $\frac{1}{\alpha}$ . К этому вопросу нам еще придется вернуться в главе 2.

---

\*) Здесь опущен фигурирующий у Фано постоянный множитель  $\frac{1}{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}}$ , не имеющий для нас значения.

Обратимся снова к определению (6.1) и перепишем его в виде

$$S_T(\omega, t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{t-T} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Таким образом, мгновенный спектр представлен разностью двух текущих спектров, или, иначе говоря, приращением, получаемым текущим спектром за промежуток времени  $T$ . При достаточно малом  $T$  это приращение могло бы быть выражено через производную текущего спектра по времени

$$\Delta S_t \approx \frac{\partial S_t}{\partial t} T.$$

Это рассуждение подводит нас к определению мгновенного спектра, предложенному Пэйджем [27]. Пэйдж определяет мгновенный спектр мощности следующим образом:

$$\rho(\omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} |S_t(\omega)|^2, \quad (6.3)$$

где  $S_t(\omega)$  — текущий спектр. Интеграл от мгновенного спектра мощности по всей оси частот дает мгновенную мощность, т. е. квадрат функции  $f(t)$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \rho(\omega, t) d\omega = f^2(t).$$

Интеграл от мгновенного спектра мощности по времени по всему прошлому дает квадрат модуля текущего спектра

$$\int_{-\infty}^t \rho(\omega, t) dt = |S_t(\omega)|^2.$$

Как видим, мгновенный спектр может определяться по-разному. Не следует этим смущаться: все определения произвольны. Нужно только выбрать целесообразное в данном случае (например, учитывающее способ действия измерительной аппаратуры) определение и четко сформулировать его с самого начала, чтобы ясно было, о чем идет речь. К сожалению, это элементарное требование далеко не всегда выполняется.

## § 7. Спектры модулированных колебаний

Перейдем теперь от общих соотношений к ряду приложений и займемся прежде всего вопросом о модуляции, играющим в современной технике очень важную роль.

Наибольшее значение имеет модуляция в технике связи. Всякий сигнал радиосвязи — будь то сигнал телеграфный, телефонный, телевизионный или любой другой — получается путем модуляции. Излучение радиостанции без модуляции подобно чистой странице, модулированное излучение подобно странице, на которой напечатаны те или иные буквы или знаки.

Большое значение имеет модуляция и в современной измерительной технике и в ряде специальных отраслей.

При передаче сигналов применяется некоторый физический агент, называемый переносчиком, и характеризующийся в отсутствие модуляции определенным числом постоянных параметров. Модуляция состоит в том, что тот или иной параметр переносчика изменяется во времени в соответствии с передаваемым сигналом. В простейшем случае, рассмотрением которого мы и ограничимся, в качестве переносчика применяется синусоидальное колебание \*). Запишем аналитическое выражение такого колебания.

$$x = c_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.1)$$

Здесь  $c_0$  — амплитуда,  $\omega_0$  — частота,  $\varphi_0$  — начальная фаза. В немодулированном колебании эти три параметра, полностью определяющие колебание, постоянны. В принципе возможно модулировать каждую из трех названных постоянных величин; мы будем иметь соответственно амплитудную модуляцию (АМ), частотную модуляцию (ЧМ) и фазовую модуляцию (ФМ). Разберем каждый вид модуляции подробно.

Воздействие, называемое модуляцией, мы можем характеризовать как умножение модулируемой величины на множитель

$$1 + mf(t),$$

где  $f(t)$  — модулирующая функция, определяемая так, чтобы  $|f(t)| \leq 1$ , а  $m$  — величина, характеризующая степень

---

\*) При импульсном способе передачи переносчиком служит периодическая последовательность импульсов той или иной формы.

воздействия, могущая принимать значения от 0 до 1 и называемая глубиной модуляции.

При амплитудной модуляции модулированное колебание принимает вид

$$x = c_0 [1 + mf(t)] \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (7.2)$$

Начнем с простейшего случая синусоидальной модуляции, т. е. положим

$$f(t) = \sin \Omega t.$$

Подставляя в (7.2), получаем

$$\begin{aligned} x &= c_0 [\sin(\omega_0 t + \varphi_0) + m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \sin \Omega t] = \\ &= c_0 \left\{ \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0] \right\}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Следовательно, модулированное колебание имеет дискретный спектр, состоящий из трех спектральных линий, как показано на рис. 5. Частота немодулированного колебания  $\omega_0$  носит название несущей частоты; возникшие в результате модуляции дополнительные частоты  $\omega_0 - \Omega$  и  $\omega_0 + \Omega$  называются боковыми частотами, или спутниками.

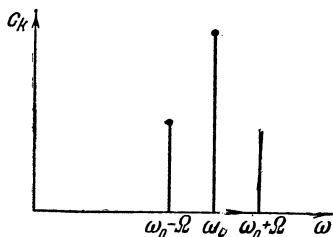


Рис. 5.

Итак, колебание с постоянной частотой, но с переменной амплитудой распадается на несколько синусоидальных колебаний. Напомним, что по определению синусоидальным является только колебание вида (7.1) т. е. колебание с постоянными амплитудой, частотой и фазой. Как угодно модулированная синусоида — это уже не синусоида. Эту истину можно выражать по-разному, но как бы мы ее ни формулировали, она является ключом к правильному пониманию вопросов модуляции.

Рассмотрим несколько более сложный случай, когда модулирующая функция периодична, т. е.

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\Omega t + \varphi_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x &= c_0 \left[ 1 + m \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\Omega t + \varphi_k) \right] \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= c_0 \left\{ \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos[(\omega_0 - k\Omega)t + \varphi_0 - \varphi_k] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos[(\omega_0 + k\Omega)t + \varphi_0 + \varphi_k] \right\}. \end{aligned}$$

Модулированное колебание состоит из несущей частоты и двух групп, называемых боковыми полосами (обе суммы в фигурных скобках). Спектр модулированного колебания изображен на рис. 6.

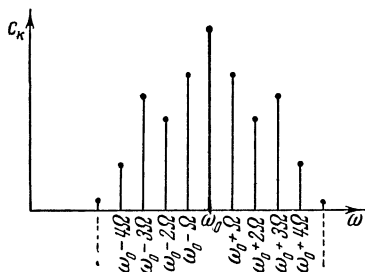


Рис. 6.

Следует заметить, что правая боковая полоса воспроизводит спектр модулирующей функции, а левая представляет собой зеркальное отражение правой. Таким образом, при процессе модуляции осуществляется транспозиция (перенос) спектра модулирующей функции; спектр смещается на величину  $\omega_0$  по шкале частот. Общие заключения по этому поводу можно вывести из теоремы (4.6). Нам еще представится случай вернуться к этому.

Очевидно, что если несущая частота и основная частота модулирующей функции несоизмеримы, то получаемое модулированное колебание непериодично и изображенный на рис. 6 спектр квазигармоничен.

Следует добавить, что при так называемой балансной модуляции несущая частота отсутствует, и спектр состоит только из боковых полос. Математически это выражается тем, что амплитуда несущей частоты умножается не на  $1 + mf(t)$ , а просто на  $f(t)$ . Действительно, слагающая несущей частоты появляется в модуляционном спектре только за счет постоянной составляющей в выражении  $1 + mf(t)$ . При балансной модуляции осуществляется простое перемножение модулирующей функции на колебание несущей частоты. Представим последнее в виде

$$x = c_0 \cos \omega_0 t = \frac{c_0}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}).$$

Для балансно-модулированного колебания получим

$$x = \frac{c_0}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) f(t).$$

Воспользовавшись теоремой (4.6), найдем, что спектр модулированного колебания есть

$$\frac{c_0}{2} [S(\omega_0 - \omega) + S(\omega_0 + \omega)],$$

где  $S(\omega)$  — спектр модулирующей функции  $f(t)$ . Два члена в квадратных скобках выражают обе боковые полосы.

Представляет интерес вопрос о ширине модуляционного спектра; этот вопрос рассмотрен в добавлении I.

Перейдем к несколько более трудному вопросу о частотной модуляции. Нужно сказать, что история развития теории модуляции дает наибольшее количество примеров путаницы в понятиях, связанной с неправильным применением спектрального воззрения на колебания. Даже сравнительно простая амплитудная модуляция послужила (и притом не так давно) поводом для совершенно ошибочных высказываний. Еще хуже обстояло дело с частотной модуляцией. Сущности дела долго не понимали инженеры и исследователи. Поучительно воспроизвести распространенное в свое время рассуждение о свойствах частотной модуляции: при частотной модуляции мы имеем колебание, частота которого непрерывно изменяется в пределах заданного нами интервала  $\omega_0 \pm \Delta\omega$ ; от частоты модуляции  $\Omega$  зависит частота изменения несущей частоты, но не величина этого

изменения. Стало быть, спектр колебания должен быть сплошным (так как частота пробегает все значения в пределах интервала  $\omega_0 \pm \Delta\omega$ ), а ширина спектра должна составлять  $2\Delta\omega$ . А так как эта ширина назначается нами произвольно, то можно сократить полосу, занимаемую на шкале частот передающей радиостанцией.

Все здесь неверно: и спектр получается не сплошной, а дискретный, и ширина его при узком интервале  $2\Delta\omega$  (так называемая полоса качания) не зависит вовсе от величины этого интервала, а определяется, как и в случае АМ, шириной спектра модулирующей функции. Наконец, когда ЧМ получила практическое применение, то оказалось, что, имея значительные специфические преимущества, она требует полосы раз в 15—20 более широкой, чем та, которая отпускается по международным правилам на АМ.

Выведем теперь основные соотношения. Предположим, что частота модулируется по косинусоидальному закону

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t = \omega_0 \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cos \Omega t \right),$$

где  $\Delta\omega$  — частотное отклонение, а  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  — относительное изменение, т. е. глубина модуляции частоты.

По своему определению круговая частота есть производная по времени от аргумента тригонометрической функции, представляющей колебание. Поэтому мы можем записать для частотно-модулированного колебания при синусоидальной модуляции

$$\begin{aligned} x &= c_0 \sin \vartheta = c_0 \sin \left( \int_0^t \omega dt \right) = c_0 \sin \left[ \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t \right] = \\ &= c_0 [\sin \omega_0 t \cos (\beta \sin \Omega t) + \cos \omega_0 t \sin (\beta \sin \Omega t)], \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$  — так называемый индекс модуляции.

Рассмотрим сначала соотношения при малом индексе  $\beta$ . Заменяя в (7.4)  $\cos$  и  $\sin$  малого аргумента соответственно единицей и самим аргументом, получим

$$x \underset{\beta \ll 1}{\approx} c_0 (\sin \omega_0 t + \beta \sin \Omega t \cos \omega_0 t),$$

т. е. выражение, ничем не отличающееся от выражения для АМ колебания. Спектр ЧМ колебания при синусоидальной модуляции с малым индексом, так же как и спектр АМ колебания, состоит из несущей частоты и двух спутников с частотами  $\omega_0 \pm \Omega$ . Обратимся теперь к общему случаю, т. е. к случаю произвольного индекса  $\beta$ .

Используя известные формулы теории бesselевых функций \*)

$$\cos(x \sin \varphi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n\varphi,$$

$$\sin(x \sin \varphi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \sin(2n+1)\varphi,$$

$$\cos(x \cos \psi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos 2n\psi,$$

$$\sin(x \cos \psi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) \cos(2n+1)\psi,$$

найдем:

$$x = c_0 \left\{ \sin \omega_0 t [J_0(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\beta) \cos 2n\Omega t] + \right. \\ \left. + \cos \omega_0 t [2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta) \sin(2n+1)\Omega t] \right\}.$$

Перемножая под знаками сумм, получим окончательно

$$x = c_0 \left\{ J_0(\beta) \sin \omega_0 t + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\beta) [\sin(\omega_0 + k\Omega)t + (-1)^k \sin(\omega_0 - k\Omega)t] \right\}. \quad (7.5)$$

Мы имеем, таким образом, колебание с линейчатым спектром. В отличие от АМ здесь при синусоидальной модуляции возникает бесконечный спектр. Однако практически

---

\*) См., например, Р. О. Кузмин, Бесселевы функции, стр. 120, ОНТИ, 1935. Последние две формулы можно получить, положив

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi.$$



он ограничен. Дело в том, что, как видим, амплитуды гармоник пропорциональны  $J_k(\beta)$ , а эти функции обладают своеобразным свойством: они сохраняют весьма малое значение до значений  $\beta$  тем больших, чем выше порядок  $k$ .

В практике пользуются понятием действительной ширины полосы, занимаемой спектром ЧМ колебания. Действительная ширина есть интервал на шкале частот, вне которого гармоники имеют относительную величину  $\leq 0,01$ . Пользуясь таблицами бесселевых функций, можно найти границы этого интервала, а также его зависимость от индекса модуляции  $\beta$ .

Эта зависимость имеет, очевидно, ступенчатый характер: ее сглаженный график показан на рис. 7. По оси ординат

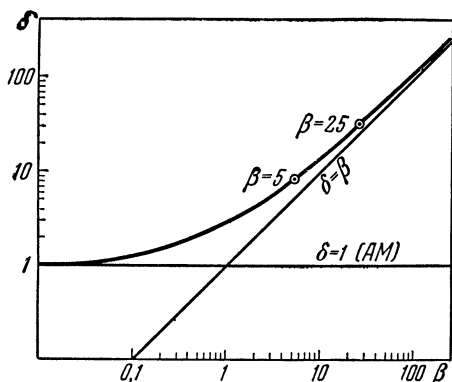


Рис. 7.

отложено обозначенное через  $\delta$  отношение половины действительной ширины спектра модулированного колебания (т. е. ширины одной боковой полосы) к ширине спектра модулирующей функции. По оси абсцисс отложен индекс модуляции  $\beta$ . Нужно заметить, что представленная на рис. 7 зависимость с достаточной для практических надобностей точностью аппроксимируется простой формулой

$$\delta = 1 + \beta.$$

Кривая зависимости  $\delta$  от  $\beta$  вписывается в угол, образованный двумя прямыми. Горизонтальная прямая  $\delta = 1$  отве-

чае условиям, существующим при амплитудной модуляции; как мы уже знаем, при АМ ширина полосы, занимаемой модуляционным спектром, всегда равна двойной ширине спектра модулирующей функции. Наклонная прямая  $\delta = \beta$  является асимптотой нашей кривой при возрастающем  $\beta$ . Как видим, в пределе действительно ширина спектра делается равной полосе качания. Однако это соотношение достигается как раз при очень больших  $\beta$ , тогда как в вышеприведенном высказывании ожидалось, что это соотношение можно получить при очень малых  $\beta$ , на чем и основывалась предполагаемая возможность сужения полосы частот за счет применения ЧМ. В действительности же при ЧМ величина  $\delta$  всегда больше единицы; другими словами, полоса частот, занимаемая спектром, при ЧМ всегда больше, чем полоса частот при АМ. Только при самых малых  $\beta$  полосы сравниваются.

При малых  $\beta$  спектр модулированного колебания при ЧМ получается бедный, практически не отличающийся от спектра при АМ,—при синусоидальной модуляции он состоит практически из двух боковых линий (остальные очень малы).

Такое положение сохраняется до тех пор, пока  $\delta$  мало отличается от единицы. В дальнейшем число достигающих заметной величины гармоник, растет. Величина  $\delta$  непосредственно выражает число этих гармоник.

Интересно проследить вид спектра при больших значениях  $\delta$  и  $\beta$ . На рис. 8 показаны спектры при синусоидальной ЧМ для  $\beta = 5$  и 25.

Считая наибольшее значение  $\Delta f = \frac{1}{2\pi} \Delta \omega = 75$  кГц, получим, что  $\beta = 5$  соответствует модулирующей частоте  $F = \frac{1}{2\pi} \Omega = 15$  кГц, а  $\beta = 25$  соответствует частоте  $F = 3$  кГц. На рис. 8 отмечена полоса качания  $2\Delta\omega$ . Как видим, действительная ширина спектра, равная  $2\delta\Omega$ , приближается к полосе качания. Величина  $2\delta\Omega$  также отмечена на рисунке. Два спектра на рис. 8 отвечают соотношениям между  $\delta$  и  $\beta$ , отмеченным соответствующими двумя точками на кривой рис. 7.

Читатель, не привыкший иметь дело с колебаниями переменной частоты, может быть, испытает затруднения

с истолкованием выражения

$$\sin \vartheta = \sin \left( \int_0^t \omega dt \right).$$

Мы поясним этот пункт, рассмотрев простой пример. Предположим, что имеется правильно записанная фонограмма чистого тона, т. е. синусоидального колебания. Пусть теперь

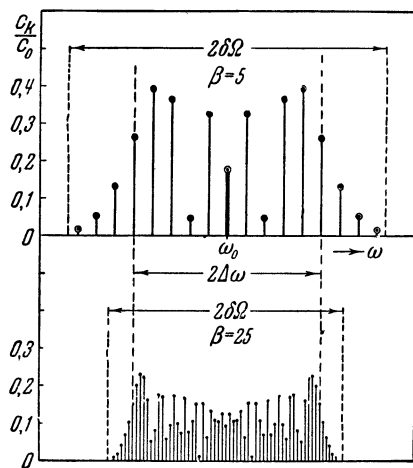


Рис. 8.

эта фонограмма воспроизводится на аппарате, в котором линейная скорость продвижения фонограммы непостоянна. Возникающие при этом искажения представляют собой, как известно, не что иное, как результат частотной модуляции.

Выведем соответствующие соотношения. Положим, что записано колебание

$$y = \sin \omega_0 t.$$

Фонограмма, полученная при постоянной линейной скорости  $v_0$ , выражается формулой

$$z = \sin 2\pi \frac{x}{\lambda},$$

где  $x = v_0 t$  — координата, отсчитываемая вдоль фонограммы,  $\lambda = 2\pi \frac{v_0}{\omega_0}$  — длина записанной волны. Пусть теперь при воспроизведении фонограмма движется с переменной скоростью  $v(t)$ . Читающий орган, например оптическая щель, воспринимает величину

$$\zeta = \sin 2\pi \frac{\xi}{\lambda},$$

где  $\zeta$  — ордината фонограммы в точке  $\xi$ ;  $\xi$  — путь, пройденный щелью относительно фонограммы (рис 9). Но этот путь, очевидно, равен

$$\xi = \int_0^t v dt$$

и, следовательно,

$$\zeta = \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( \int_0^t v dt \right).$$

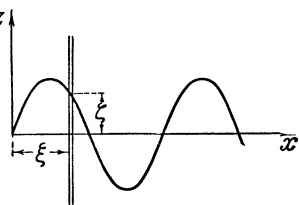


Рис. 9.

[Это совершенно аналогично выражению  $\sin \vartheta = \sin \left( \int_0^t \omega dt \right)$ .

Ведь  $\vartheta$  — это угол, на который поворачивается за время  $t$  вектор, вращающийся с переменной угловой скоростью  $\omega$ .] Если, например,

$$v = v_0 \left( 1 + \frac{\Delta v}{v_0} \cos \Omega t \right),$$

то

$$\begin{aligned} \zeta &= \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \int_0^t (v_0 + \Delta v \cos \Omega t) dt \right] = \\ &= \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left( v_0 t + \frac{\Delta v}{\Omega} \sin \Omega t \right) = \sin \left( \omega_0 t + \frac{\Delta \omega}{\Omega} \sin \Omega t \right), \end{aligned}$$

т. е. имеется типичное частотно-модулированное колебание [ср. (7.4.)]. В этом выражении

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta v = \omega_0 \frac{\Delta v}{v_0}.$$

Обратимся теперь к фазовой модуляции. По общему определению мы должны, взяв немодулированное колебание

$$x = c_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

заменить в нем  $\varphi_0$  величиной

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi \cdot f(t).$$

Тогда мы получим

$$x = c_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi \cdot f(t)]. \quad (7.6)$$

Для частотной модуляции, вводя переменную частоту

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cdot f(t),$$

мы получили бы

$$\begin{aligned} x &= c_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\omega \int_0^t f(t) dt] = \\ &= c_0 \sin[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\omega \cdot F(t)]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Сравнивая (7.6) и (7.7), видим, что ФМ и ЧМ в сущности дают совершенно одинакового вида колебания. Разница заключается лишь в том, что при ФМ в аргумент синусоидальной функции входит модулирующая функция  $f(t)$ , а при ЧМ — ее интеграл.

Если модуляция синусоидальна, то разницы в форме модулированных колебаний и их спектрах вообще усмотреть нельзя, так как интеграл от синусоиды есть косинусоида, т. е. опять-таки синусоида, лишь сдвинутая по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ . Различие все же есть, но более тонкое. Дело в том, что если

$$f(t) = \sin \Omega t,$$

то

$$F(t) = -\frac{1}{\Omega} \cos \Omega t.$$

Появление множителя  $\frac{1}{\Omega}$  означает необходимость введения соответствующих корректирующих цепей.

Если предположить, что дискриминаторы, т. е. элементы, превращающие ФМ и ЧМ в АМ, ведут себя одинаково, то

в дальнейшей схеме приемника ФМ должно быть добавлено одно интегрирующее звено по сравнению с аналогичной схемой приемника ЧМ.

Дальнейшее сравнение ФМ и ЧМ завело бы нас очень далеко в специальные области современной радиотехники.

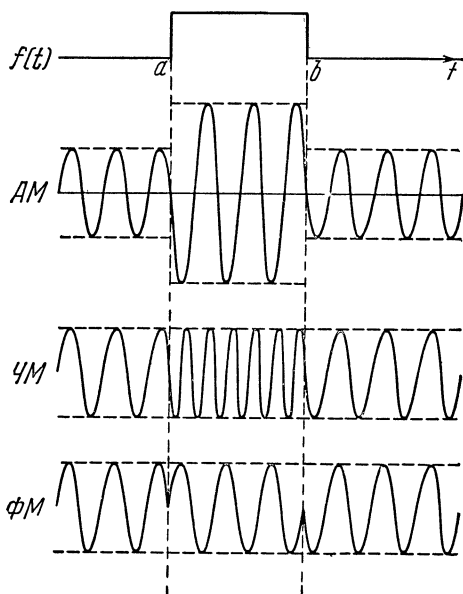


Рис. 10.

Мы ограничимся высказанными общими соображениями и попытаемся лишь в заключение пояснить различие между всеми тремя видами модуляции по возможности наглядным образом.

Как уже говорилось, при синусоидальной ЧМ и ФМ различия в форме модулированных колебаний усмотреть нельзя. Но различие это обнаруживается при более сложном законе модуляции, т. е. когда модулирующая функция обладает более или менее богатым спектром.

Предположим, что модулирующая функция представляет собой импульс следующего вида:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < a), \\ 1 & (a < t < b), \\ 0 & (t > b). \end{cases}$$

Тогда при  $t=a$  скачком изменится амплитуда при АМ, частота при ЧМ и фаза при ФМ.

Обратное скачкообразное изменение до первоначальных значений произойдет при  $t=b$ . Это изображено на рис. 10. Как видим, имеется различие между модулированными колебаниями в случае ЧМ и ФМ. Заметим кстати, что скачкообразное изменение фазы можно толковать как результат бесконечно быстрого изменения частоты на протяжении бесконечно малого промежутка времени. В конце концов все это сводится опять к основным определениям

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt};$$

$$\vartheta = \int \omega dt.$$

## § 8. Перенос спектра

Для техники представляет большой интерес вопрос о возможности такого преобразования заданной функции времени, в результате которого спектр функции переместился бы по шкале частот. При обычной модуляции или преобразовании частоты получаются, как известно, две боковые полосы. Спрашивается, каким образом можно получить спектр, состоящий только из одной боковой полосы (ОБП)? Требуемое преобразование спектра показано на рис. 11. Мы полагаем, что исходный спектр ограничен сверху частотой  $\omega_c$ .

Нужно сразу пояснить, что теорема смещения (§ 4) не дает требуемого преобразования, так как она относится к смещению комплексного спектра  $S(\omega)$ , тогда как нам требуется сместить вещественный спектр амплитуд  $\Phi(\omega) = |S(\omega)|$  (см. [9]).

Простейший способ получения смещенного спектра состоит в том, что сначала посредством балансной модуляции

несущей частоты образуют двухполосный модуляционный спектр, а затем при помощи фильтров подавляют нижнюю боковую полосу. Представляют интерес и другие возможности, две из которых мы здесь рассмотрим.

Будем исходить из выражения (2.14)

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.1)$$

Нам нужно построить функцию, которая имела бы спек-

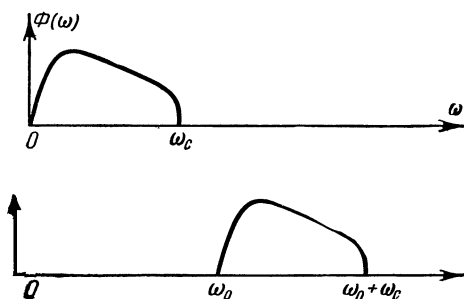


Рис. 11.

ральную плотность  $S(\omega)$  на частоте  $\omega_0 + \omega$ . Для такой функции можем записать

$$f_1(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j(\omega_0 + \omega)t} d\omega. \quad (8.2)$$

Это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} e^{j\omega_0 t} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \cos \omega_0 t \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega - \sin \omega_0 t \operatorname{Im} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \end{aligned}$$



или

$$f_1(t) = f(t) \cos \omega_0 t + f^V(t) \sin \omega_0 t^*). \quad (8.3)$$

Определим функцию

$$f^V(t) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.4)$$

Для этого представим комплексный спектр в виде

$$S(\omega) = A(\omega) + jB(\omega).$$

Подставляя в (8.4), получим

$$\begin{aligned} f^V(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ A \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) - B \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] d\omega, \end{aligned} \quad (8.5)$$

тогда как для функции  $f(t)$  аналогичным путем получаем

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A \cos \omega t - B \sin \omega t) d\omega. \quad (8.6)$$

Сопоставляя (8.5) и (8.6), видим, что функция  $f^V(t)$  отличается от  $f(t)$  тем, что все составляющие повернуты по фазе на  $\pi/2$ . Следовательно, для образования функции  $f^V(t)$ , нужно располагать фазовращателем, поворачивающим фазу на  $\pi/2$  для всех частот, т. е. четырехполюсником, комплексный коэффициент передачи которого равен

$$K = j = e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (8.7)$$

Четырехполюсник с такими свойствами физически неосущест-

---

\*) Комплексная функция

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

вещественная и мнимая составляющие которой здесь фигурируют, носит название «аналитического сигнала» и оказывается удобной в некоторых теоретических исследованиях.

вим; можно, однако, построить реальный четырехполюсник, в котором характеристика (8.7) осуществляется с тем или иным приближением в конечном интервале частот (исключая  $\omega = 0$  и ближайшую окрестность этого значения).

Требуемое преобразование (8.3) выполняется скелетной схемой рис. 12, на которой:  $\Phi$  — фазовращатель, поворачи-

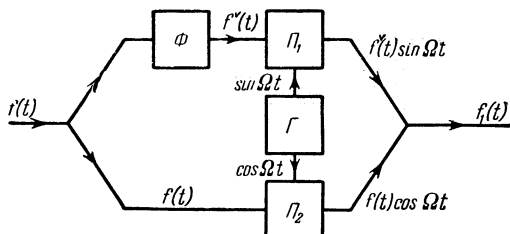


Рис. 12.

чивающий фазу на  $\pi/2$ ;  $\Gamma$  — двухфазный генератор, дающий два сдвинутых на  $\pi/2$  колебания:  $\sin \omega_0 t$  и  $\cos \omega_0 t$ ;  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  — умножители (балансные модуляторы).

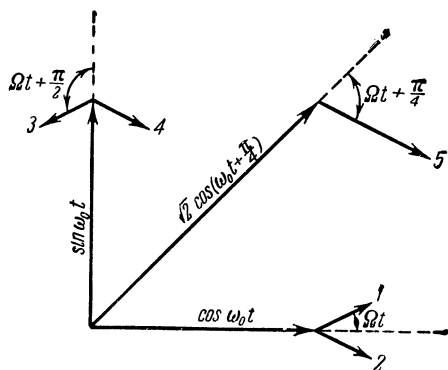


Рис. 13.

Сущность преобразования (8.3) поясняется векторной диаграммой рис. 13, на которой представлен случай

$$f(t) = \cos \Omega t, \quad f^v(t) = -\sin \Omega t = \cos \left( \Omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Для наглядности принята не балансная, а обычная АМ, так что составляющая несущей частоты  $\omega_0$  не уничтожается. По горизонтали отложен вектор несущего колебания  $\cos \omega_0 t$ ; в результате модуляции функцией  $f(t)$  появляются два спутника, представленные векторами 1 и 2, расположенными под углом  $\pm \Omega t$  по отношению к основному вектору. По вертикали отложен вектор  $\sin \omega_0 t$ ; модуляция функцией  $f^V(t)$  дает два спутника, векторы которых 3 и 4 расположены под углом  $\pm \left( \Omega t + \frac{\pi}{2} \right)$  к основному. Направления векторов 2 и 4 совпадают, а направления векторов 1 и 3 — противоположны. В результате сложения получается вектор несущей частоты и один единственный спутник — вектор 5. Второй спутник устраняется, и это и есть однополосная синусоидальная модуляция \*).

Можно показать, что рассмотренное преобразование есть частный случай многофазной модуляции, так что описанный механизм можно назвать двухфазной однополосной модуляцией. С технической точки зрения больший интерес представляет трехфазная однополосная модуляция [17].

Рассмотрим теперь другую возможность переноса спектра. Спектр, ограниченный сверху частотой  $\omega_c$ , может быть представлен рядом Фурье (см. § 14):

$$S(\omega) = \Delta t \sum_{-\infty}^{\infty} f_k e^{-jk\omega \Delta t}, \quad (8.8)$$

где

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c}, \quad f_k = f(k \Delta t).$$

Спектр  $S_1(\omega)$ , сдвинутый на  $\omega_0$  по шкале частот, связан с исходным спектром  $S(\omega)$  соотношением

$$S_1(\omega_0 + \omega) = S(\omega),$$

так что

$$S_1(\omega) = \Delta t \sum_{-\infty}^{\infty} f_k e^{jk(\omega_0 - \omega) \Delta t}. \quad (8.9)$$

---

\*) Векторная диаграмма показывает, что при наличии несущей однополосную модуляцию можно рассматривать как сложную амплитудно-фазовую модуляцию, на чем и основан один из способов получения ОБП, который мы не рассматриваем.

Соответствующая этому спектру функция времени выражается соотношением

$$f_1(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \omega_c} S_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.10)$$

Подставляя сюда выражение (8.8) для спектра, находим [8,9]

$$f_1(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k \frac{\sin \frac{\omega_c}{2} (t - k\Delta t)}{\frac{\omega_c}{2} (t - k\Delta t)} \cos \left( \omega_1 t - k \frac{\pi}{2} \right), \quad (8.11).$$

где

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{1}{2} \omega_c$$

— центральная частота перенесенного спектра. Для исходной функции  $f(t)$  (спектр которой выражается формулой (8.8)) имеем

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k \frac{\sin \omega_c (t - k\Delta t)}{\omega_c (t - k\Delta t)}. \quad (8.12)$$

Рассмотрение формулы (8.11) указывает характер преобразования, которому нужно подвергнуть исходную функцию

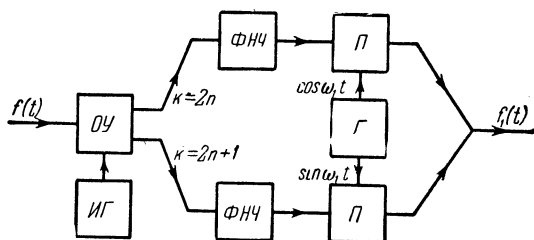


Рис. 14.

$f(t)$ , чтобы получить функцию  $f_1(t)$  со смещенным спектром. Такое преобразование может быть выполнено скелетной схемой рис. 14. На этой схеме: ИГ — импульсный генератор с периодом следования  $\Delta t$ ; ОУ — отсчетное

устройство, назначение которого состоит в том, чтобы в моменты, задаваемые импульсами, поступающими от ИГ, брать отсчеты мгновенных значений функции  $f(t)$ , т. е. определять величины  $f_k$  и выдавать короткие импульсы с площадью, пропорциональной  $f_k$ . Кроме того, требуется, чтобы эти импульсы, во-первых, получали требуемый знак, а во-вторых, чтобы они поочередно поступали на два выхода устройства, т. е. чтобы, например, импульсы четных номеров поступали на верхний выход, а нечетных номеров — на нижний. Далее следуют фильтры нижних частот ФНЧ с верхней граничной частотой  $\frac{1}{2} \omega_c$ . Затем идут два перемножителя  $\Pi$ , на вторые входы которых поступают сдвинутые по фазе на  $\pi/2$  напряжения частоты  $\omega_1 = \omega_0 + \frac{1}{2} \omega_c$  от двухфазного генератора Г. Напряжения, снимаемые с обоих перемножителей, складываются.

Описанная схема интересна тем, что в ней отсутствует широкополосный фазовращатель. Однако для получения хороших результатов нужно, по-видимому, предъявить строгие требования к фильтрам нижних частот.

## § 9. Преобразование спектров при детектировании

Если некоторое периодическое колебание  $x$  подвергнуть нелинейной операции

$$y = \varphi(x),$$

то полученное в результате этой операции колебание  $y$  будет обладать спектром, отличным от спектра  $x$  и, как правило, более богатым. Так, например, если первоначальное колебание представляет собой сумму двух синусоид

$$x = c_1 \sin \omega_1 t + c_2 \sin \omega_2 t$$

и, следовательно, имеет спектр, состоящий из двух спектральных линий, то после нелинейной операции  $\varphi$  мы получим в составе колебания  $y$  спектральные составляющие с частотами

$$\omega_{mn} = m\omega_1 \pm n\omega_2,$$

где  $m$  и  $n$  — в общем случае любые положительные целые числа. Такого рода спектр носит название комбинационного, а частоты  $\omega_{mn}$  называются комбинационными частотами.

Таким изменением спектра пользуются для измерения степени отклонения данной системы от линейности. На вход системы подается колебание  $x$ ; изучается спектр получаемого на выходе колебания  $y$ . Комбинационные частоты не возникают в том единственном случае, когда  $\varphi$  (выражающая в данном случае характеристику исследуемой системы) — линейная функция.

Специальный вид нелинейной операции, преобразовывающей спектр, называется детектированием. В составе модулированного колебания составляющей с частотой модуляции нет. Но эта составляющая нам нужна, так как она-то и представляет собой передаваемый сигнал. Для того чтобы она вновь появилась, надо подвергнуть модулированное колебание некоторой нелинейной операции. Эта операция, имеющая целью образование составляющей с частотой модуляции, и носит название *детектирования* («детектирование» — обнаружение). В результате детектирования получается сложное колебание, в состав которого входит в качестве одной из составляющих интересующее нас колебание с частотой модуляции. Дальнейшее разделение слагаемых не представляет уже никаких затруднений.

Рассмотрение вопросов детектирования в общем виде было бы очень громоздким; мы ограничимся несколькими простейшими примерами.

Рассмотрим простое АМ колебание при синусоидальной модуляции. Первоначально мы имели колебание несущей частоты  $\sin \omega_0 t$  и модулирующее колебание  $1 + m \sin \Omega t$ . В результате некоторой операции, которую мы называем модуляцией, оба эти колебания оказываются перемноженными, и мы имеем

$$x = (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

В составе модулированного колебания, как мы знаем, уже нет составляющей с частотой  $\Omega$ ; спектр  $x$  состоит из трех линий с частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ .

Если мы желаем теперь снова получить колебание с частотой  $\Omega$ , то мы должны соответствующим образом продетектировать  $x$ . Операция детектирования в данном случае

производит действие, обратное операции модуляции, поэтому в применении к модулированным сигналам детектирование называют иногда демодуляцией. Мы будем рассматривать только два основных вида детекторов: «линейный» детектор

$$y = |x|$$

(рис. 15, а) и квадратичный детектор

$$y = x^2,$$

(рис. 15, б). Слово линейный поставлено для первого раза в кавычки, чтобы подчеркнуть, что на самом деле

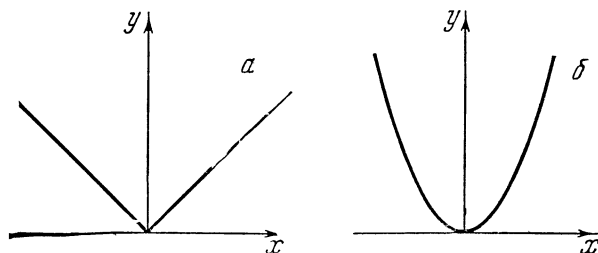


Рис 15.

линейный детектор нелинеен и что линейный в подлинном смысле детектор невозможен (т. е. линейная система не детектирует).

Для детектирования модулированного колебания пригодна линейная детектирование. Воспользовавшись тем, что абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей, можем записать

$$y = |x| = (1 + m \sin \Omega t) |\sin \omega_0 t|.$$

Но функция  $|\sin \omega_0 t|$  может быть представлена следующим рядом Фурье:

$$|\sin \omega_0 t| = \frac{2}{\pi} \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2k\omega_0 t \right),$$

откуда

$$y = |x| = \frac{2}{\pi} \left\{ (1 + m \sin \Omega t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \left[ \cos 2k\omega_0 t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m}{2} \sin (2k\omega_0 + \Omega) t - \frac{m}{2} \sin (2k\omega_0 - \Omega) t \right] \right\}.$$

В этом выражении первый член (в круглых скобках) — модулирующая функция, которую мы и стремились получить; второй член объединяет под знаком суммы составляющие высоких частот  $2k\omega_0$ ,  $2k\omega_0 + \Omega$  и  $2k\omega_0 - \Omega$ , которые нетрудно отделить.

Если бы мы подвергли модулированное колебание квадратичному детектированию, то получили бы

$$y = x^2 = (1 + m \sin \Omega t)^2 \sin^2 \omega_0 t = \\ = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{m^2}{2} + 2m \sin \Omega t - \frac{m^2}{2} \cos 2\Omega t - \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right) \cos 2\omega_0 t - \right. \\ \left. - m \sin (2\omega_0 - \Omega) t + m \sin (2\omega_0 + \Omega) t + \right. \\ \left. + m^2 \cos 2(\omega_0 - \Omega) t + m^2 \cos 2(\omega_0 + \Omega) t \right\}.$$

Таким образом, в этом случае кроме постоянной составляющей  $1 + \frac{m^2}{2}$  и пяти спектральных линий с высокими частотами

$$2\omega_0, 2\omega_0 - \Omega, 2\omega_0 + \Omega, 2(\omega_0 - \Omega), 2(\omega_0 + \Omega),$$

мы получаем две спектральные линии с низкими частотами  $\Omega$  и  $2\Omega$ . Следовательно, спектр модулирующего колебания, состоявший первоначально из одной линии с частотой  $\Omega$ , оказывается искаженным, и данный вид детектирования может применяться только при очень малой глубине модуляции (так как отношение амплитуд второй и первой гармоник равно  $m/4$ ).

На рис. 16 изображены разобранные случаи. На рис. 16, *а* представлены два исходных колебания — несущая частота  $\omega_0$  и модулирующая частота  $\Omega$ ; на рис. 16, *б* изображен спектр модулированного колебания — несущая частота и два спутника; на рис. 16, *в* представлен спектр колебания, получаемого в результате линейного детектирования



модулированного колебания (нужно отметить появление линии с частотой  $\Omega$ ). Наконец, на рис. 16,2 представлен спектр, получаемый в результате квадратичного детектирования (спектр ограничен, но имеются две линии низкой частоты:  $\Omega$  и  $2\Omega$ ).

Рассмотрим вопрос о детектировании биений. Биениями называют интерференционное явление, состоящее в периодическом изменении амплитуды результирующего колебания,

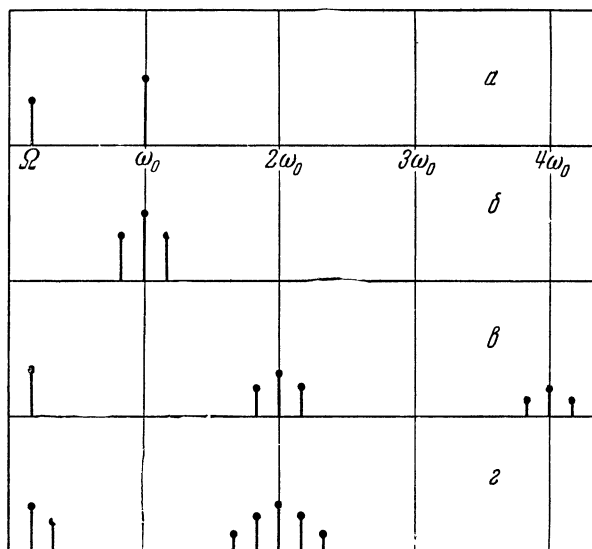


Рис. 16.

составленного из двух простых синусоидальных колебаний с неравными частотами. Говорят, что частота биений равна разности частот образующих колебаний \*).

\*) Это верно, если под частотой биений понимать частоту повторения максимумов или минимумов огибающей результирующего колебания. И это неверно, если под частотой биений понимать основную частоту наблюдаемого процесса. При несоизмеримых частотах образующих колебаний результирующее колебание вообще непериодично.

Положим, что мы ставим своей задачей получение в результате детектирования синусоидального колебания с разностной частотой. Мы имеем

$$x = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t.$$

В данном случае следует применить квадратичное детектирование, которое дает

$$\begin{aligned} y = x^2 &= \sin^2 \omega_1 t + \sin^2 \omega_2 t + 2 \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cos 2\omega_1 t - \frac{1}{2} \cos 2\omega_2 t - \frac{1}{2} \cos(\omega_1 + \omega_2)t + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \end{aligned}$$

Как видим, мы получили кроме постоянной составляющей и высоких частот  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$  и  $\omega_1 + \omega_2$  требуемое колебание с частотой  $\omega_1 - \omega_2$ . Линейное детектирование этого не дает. Применив его, мы получили бы

$$\begin{aligned} y &= |x| = |\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t| = \\ &= 2 \left| \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right| \left| \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right| = \\ &= \frac{8}{\pi^2} \left[ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos k(\omega_1 + \omega_2)t \right] \times \\ &\quad \times \left[ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1} \cos k(\omega_1 - \omega_2)t \right], \end{aligned}$$

т. е., кроме постоянной составляющей и высоких частот, мы имели бы бесконечный спектр низкочастотных слагаемых с частотами  $k(\omega_1 - \omega_2)$ .

Квадратичное детектирование дает при детектировании биений нужный результат и в том более сложном случае, когда амплитуды образующих колебаний не равны, т. е. когда

$$x = \sin \omega_1 t + \varepsilon \sin \omega_2 t$$

( $\varepsilon \geq 1$ ). Выражение для огибающей биений при равенстве амплитуд есть

$$c(t) = \left| \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right|.$$

Если амплитуды не равны, то для огибающей получается

$$c(t) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos(\omega_1 - \omega_2)t}.$$

Это выражение проще всего получить из построения (рис. 17).

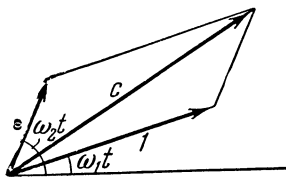


Рис. 17.

Только в пределе при очень малых или очень больших  $\varepsilon$  огибающая биений приближается к синусоиде. При  $\varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned} c(t) &= \sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \approx \\ &\approx \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \approx \\ &\approx 1 + \varepsilon \cos(\omega_1 - \omega_2)t, \end{aligned}$$

и следовательно, при таких условиях можно применять и линейное детектирование. Кривая биений при этом не отличается от кривой синусоидально-модулированного колебания при малой глубине модуляции. Совершенно так же обстоит дело и при  $\varepsilon \gg 1$ .

## § 10. Спектр суммы периодических функций

В § 4 уже говорилось о том, что преобразование Фурье линейно, и к нему применим поэтому принцип наложения. В случае периодических функций это можно записать так:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \sum f_i(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} = \sum_i C_{ik}$$

т. е. комплексная амплитуда  $k$ -й гармоники спектра суммы функций равна сумме  $k$ -х гармоник спектров каждой отдельно взятой функции. Это бесспорно, но нас интересуют обычно действительные амплитуды. Для них можно записать

$$c_k = 2|C_k| = 2\left|\sum_i C_{ik}\right|.$$

С геометрической точки зрения эта величина представляет собой замыкающую ломаной, стороны которой равны  $c_{ik}$

и отложены под соответствующими углами  $\varphi_{ik}$ . Положим, что даны два синусоидальных колебания с комплексными амплитудами

$$2C_1 = c_1 e^{-j\varphi_1}, \quad 2C_2 = c_2 e^{-j\varphi_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2C &= 2(C_1 + C_2) = c_1 e^{-j\varphi_1} + c_2 e^{-j\varphi_2}, \\ c &= |c_1 e^{-j\varphi_1} + c_2 e^{-j\varphi_2}| = \\ &= |c_1 \cos \varphi_1 + c_2 \cos \varphi_2 - j(c_1 \sin \varphi_1 + c_2 \sin \varphi_2)| = \\ &= \sqrt{(c_1 \cos \varphi_1 + c_2 \cos \varphi_2)^2 + (c_1 \sin \varphi_1 + c_2 \sin \varphi_2)^2} = \\ &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Эта формула может применяться и в том случае, когда вместо постоянных фазовых углов  $\varphi$  мы подставляем как угодно зависящие от времени угловые аргументы  $\vartheta$ . Тогда и амплитуда оказывается функцией времени, и выражение (10.1) получает смысл огибающей некоторого сложного колебания. Например, если вместо  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  подставить  $\omega_1 t$  и  $\omega_2 t$ , то мы получим выражение для огибающей биений, возникающих при сложении двух синусоидальных колебаний с амплитудами  $c_1$  и  $c_2$  и частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Рассмотрим вопрос о спектре функции, получаемой в результате сложения двух одинаковых, но сдвинутых по времени периодических функций. Для некоторой периодической функции  $f(t)$

$$C_{1k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt.$$

Для такой же функции, но запаздывающей на время  $\tau$ , имеем

$$C_{2k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t - \tau) e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

или, заменяя  $t \rightarrow \tau$  на  $t_1$ ,

$$C_{2k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t_1) e^{-j2\pi k \frac{t_1 + \tau}{T}} dt_1 = e^{-jk\Omega\tau} C_{1k}.$$

Если теперь сложить функции  $f(t)$  и  $f(t - \tau)$ , то комплексная амплитуда  $k$ -й гармоники их суммы будет равна

$$C_k = C_{1k} + C_{2k} = C_{1k} (1 + e^{-jk\Omega\tau}),$$

а действительная амплитуда равна \*)

$$c_k = 2 |C_k| = c_{1k} |1 + e^{-jk\Omega\tau}| = 2c_{1k} \left| \cos \frac{k\Omega\tau}{2} \right|. \quad (10.2)$$

Итак, для того чтобы получить спектр суммы двух одинаковых функций, сдвинутых на время  $\tau$  (например, сумму сигнала и его отражения), достаточно умножить амплитуду каждой гармоники на  $2 \left| \cos \frac{k\Omega\tau}{2} \right|$ .

Рассмотрим пример. Пусть дана периодическая последовательность коротких импульсов и пусть  $\tau = \frac{T}{2}$ . Тогда множитель в формуле (10.2) принимает вид

$$2 \left| \cos k \frac{\pi}{2} \right| = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ 2 & \text{при } k \text{ четном.} \end{cases}$$

Таким образом, все нечетные гармоники выпадают. Так оно и должно быть: ведь если  $\tau = \frac{T}{2}$ , то это значит, что импульсы второй серии попадают в середину промежутков первой серии, т. е. получается вдвое более частое следование импульсов, и, стало быть, основная частота, а с нею и частоты всех гармоник увеличиваются вдвое.

Легко сообразить, что то же самое получится при  $\tau = \frac{2n+1}{2} T$ , т. е. когда  $\tau$  равно любому нечетному числу

---

\*) Эту формулу можно было бы получить из (10.1), положив

$$c_1 = c_2 = c_{1k}, \quad \varphi_1 = k\Omega\tau, \quad \varphi_2 = 0.$$

полупериодов. Если  $\tau = \frac{2n+1}{4} T$ , то из спектра выпадают вторая, шестая, десятая и т. д. гармоники.

Формула (10.2) дает значение амплитуды  $k$ -й гармоники спектра суммы функций  $f(t)$  и  $f(t - \tau)$ . Если мы составим не сумму, а разность этих двух функций, то, действуя аналогично предыдущему, найдем

$$c_k = c_{1k} |1 - e^{-jk\Omega\tau}| = 2c_{1k} \left| \sin \frac{k\Omega\tau}{2} \right|. \quad (10.3)$$

Предположим теперь, что  $\tau$  настолько малая величина, что справедливо приближенное равенство

$$f(t) - f(t - \tau) = \Delta f(t) \approx \tau f'(t) = \dot{f}(t).$$

Таким образом, мы выразили разность функций через производную. Найдем спектр  $\dot{f}$ :

$$\begin{aligned} \dot{C}_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \dot{f}(t) e^{-jk\Omega t} dt = \frac{\tau}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f'(t) e^{-jk\Omega t} d\tau = \\ &= \tau \left[ \frac{f(t)}{T} e^{-jk\Omega t} \right]_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} + jk\Omega C_k. \end{aligned}$$

Но так как функция  $f(t)$  периодическая, то

$$\dot{C}_k = jk\Omega C_k$$

и, следовательно,

$$\dot{c}_k = k\Omega \tau c_k.$$

Это соотношение могло бы быть получено из (10.3) путем замены синуса его аргументом.

Все приведенные выше соотношения без труда распространяются и на случай почти-периодической функции; в этом случае во все формулы входит  $\Omega_k$  вместо  $k\Omega$ .

## § 11. Спектры некоторых импульсов

Рассмотрим сначала спектры некоторых специальных разрывных функций, в частности так называемой *единичной функции*  $\sigma(t)$ , определяемой следующим образом:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{1}{2} & t = 0, \\ 1 & t > 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

Более общим является определение запаздывающей на время  $\tau$  единичной функции

$$\sigma(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau, \\ \frac{1}{2} & t = \tau, \\ 1 & t > \tau. \end{cases}$$

Далее вводится определение *единичного импульса* в виде

$$\int_{-\infty}^t \delta(u) du = \sigma(t), \quad (11.2)$$

причем функция  $\delta(t)$  равна нулю повсюду, кроме точки  $t = 0$ , где она равна бесконечности. Итак,  $\delta(t)$  представляет бесконечно короткий импульс с площадью, равной единице. Функция  $\delta(t)$  впервые введена в математический аппарат теоретической физики Дираком; она называется также функцией Дирака, или дельта-функцией.

Дифференцируя (11.2) по  $t$ , получаем формально\*)

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \sigma(t). \quad (11.3)$$

Качественное представление о свойствах функций  $\sigma$  и  $\delta$  и некоторое обоснование соотношения (11.3) можно получить путем предельных переходов. Рассмотрим вспомога-

---

\*) Операция дифференцирования, совершаемая здесь над разрывной функцией  $\sigma$ , в новейшее время узаконена в математике в связи с введением так называемых обобщенных функций

тельную функцию

$$\sigma_a(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{a}{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{a} & -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2}, \\ 1 & t > \frac{a}{2}, \end{cases}$$

и ее производную

$$\delta_a(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{a}{2}, \\ \frac{1}{a} & -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2}, \\ 0 & t > \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Будем переходить к пределу при  $a \rightarrow 0$ . Заметим, что пло-

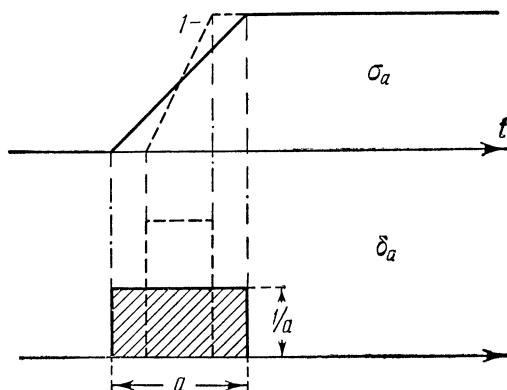


Рис. 18.

щадь прямоугольного импульса  $\delta_a(t)$  остается равной единице, независимо от значения  $a$  (рис. 18). В пределе имеем

$$\sigma_a(t) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \sigma(t), \quad \delta_a(t) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \delta(t).$$

Условившись об определениях, перейдем к спектрам. Для спектра функции  $\delta$  получим

$$S_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \delta(t - \tau) dt = e^{-j\omega \tau}.$$



Таким образом, модуль спектра функции  $\delta$  равен единице. Это значит, что функция  $\delta$  обладает сплошным спектром, простирающимся до бесконечно больших значений частоты с неизменной спектральной плотностью.

При попытке вычислить спектр функции  $\sigma$  возникает затруднение, связанное с тем, что эта функция не абсолютно интегрируема и имеет конечное значение на бесконечности.

Можно обойти это затруднение, умножив функцию  $\sigma$  на  $e^{-\alpha t}$  \*).

Тогда

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} \sigma(t-\tau) dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha+j\omega} e^{-(\alpha+j\omega)\tau} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega\tau}. \end{aligned}$$

Модуль спектра функции  $\sigma$  есть  $\frac{1}{\omega}$ . К этому же результату можно прийти и другим путем. Воспользуемся известным

\*) Иногда пишут просто

$$\int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega},$$

т. е. полагают  $e^{-j\infty} = 0$ , что требует оговорок.

Когда мы пишем  $f(\infty)$ , то понимаем под этим следующее:

$$f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Функция  $e^{-jx}$  при  $x$  стремящемся к бесконечности, не стремится ни к нулю, ни вообще к какому бы то ни было определенному пределу. Поэтому выражение  $e^{-j\infty}$  лишено всякого смысла. Функция  $e^{-jx}$  (как, впрочем, и  $e^{+jx}$ ) имеет модуль, равный единице при любых значениях  $x$ , аргумент же изменяется циклически с возрастанием  $x$ . Другое дело, если показатель есть комплексная величина, т. е. если, например, функция записана в виде

$$f(x) = e^{(-\alpha+j\beta)x}.$$

Тогда при сколь угодно малом, но конечном вещественном и положительном  $\alpha$ , мы можем записать в указанном выше смысле

$$f(\infty) = 0.$$

соотношением \*)

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

Интеграл в правой части можно рассматривать как вещественную форму интеграла Фурье для нечетной функции  $\sigma(t) - \frac{1}{2}$ . В таком случае спектр этой функции (т. е. множитель при синусе) есть  $\frac{1}{\omega}$ .

Рассмотрим теперь спектр весьма короткого импульса произвольной формы. Импульс характеризуется тем, что функция, представляющая его, равна нулю вне некоторого очень малого интервала  $\tau$  около  $t = 0$  \*\*).

Мы можем записать для спектра такого импульса

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} f(t) dt$$

Но если  $\tau$  мало, то  $e^{\pm j\omega \frac{\tau}{2}}$  мало отличается от единицы, и

$$S \approx \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} f(t) dt = q,$$

т. е. спектр равен постоянной величине, определяемой площадью импульса. Такое соотношение мы уже встретили, разбирая вопрос о спектре единичного импульса  $\delta(t)$ . Однако тогда речь шла о некоторой определенной функции, здесь же в интервале, в котором функция существует, она может иметь произвольный вид, т. е. импульс может иметь какую угодно форму, лишь бы длительность его была малой.

\*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2, изд. 9-е, Гостехиздат, 1948, стр. 252—253.

\*\*) Совершенно необязательно располагать импульс в начале шкалы времен: как мы знаем, спектр не зависит от смещения во времени.

Этот вопрос играет здесь основную роль, и мы на нем немного задержимся. Мы требуем, чтобы  $\tau$  было мало. Но требование малости лишено смысла до тех пор, пока не указано, с чем та или иная величина сравнивается. В рассматриваемом случае положение определяется тем, что вследствие малости  $\tau$  функция  $e^{\pm j\omega\frac{\tau}{2}}$  мало отличается от единицы. Но это выполняется при условии

$$\omega \frac{\tau}{2} \ll 1$$

или

$$\tau \ll T,$$

где  $T$  — период, соответствующий частоте  $\omega$  ( $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ).

Таким образом, мы приходим к простому, но очень важному как с принципиальной, так и с практической точки зрения выводу: одиночный импульс произвольной формы

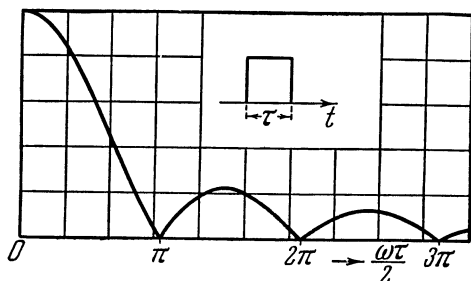


Рис. 19.

имеет сплошной спектр, который может быть приближенно выражен постоянной величиной, пропорциональной площади импульса, в пределах того интервала частот, в котором период остается большим по сравнению с длительностью импульса \*).

Мы будем еще неоднократно возвращаться к этому положению.

\*) Здесь есть одна тонкость: сформулированное положение справедливо для незнакопеременного импульса. Относящиеся сюда подробности разбираются в добавлении IV в конце книги.

С повышением частоты, когда  $T$  делается уже сравнимым с  $\tau$ , функция  $S$  начинает убывать. Прежде чем изучать общие закономерности, мы рассмотрим ряд примеров.

Вычислим спектр прямоугольного импульса высотой  $h$  и длительностью  $\tau$ . Мы получаем

$$S = h \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = -\frac{h}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = q \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}, \quad (11.4)$$

где площадь импульса  $q = h\tau$ . График  $\Phi = |S|$  для этого случая изображен на рис. 19.

В качестве иллюстрации предыдущего заметим, что при  $\omega \frac{\tau}{2} \ll 1$

$$\sin \omega \frac{\tau}{2} \approx \omega \frac{\tau}{2}$$

и

$$S \approx q.$$

Для импульса в форме треугольника с основанием  $\tau$  и высотой  $h$  имеем

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{\tau}{2}, \\ h\left(1 + \frac{2t}{\tau}\right) & -\frac{\tau}{2} < t < 0, \\ h\left(1 - \frac{2t}{\tau}\right) & 0 < t < \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \frac{\tau}{2} < t. \end{cases}$$

Следовательно,

$$S = h \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 \left(1 + \frac{2t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt + h \int_0^{\frac{\tau}{2}} \left(1 - \frac{2t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt = q \frac{1 - \cos \omega \frac{\tau}{2}}{\frac{1}{2} \left(\omega \frac{\tau}{2}\right)^2}, \quad (11.5)$$

где  $q = \frac{1}{2} h\tau$  (рис. 20).

Разлагая числитель в степенной ряд, можно убедиться, что отношение стремится к единице при  $\omega \frac{\tau}{2}$ , стремящемся

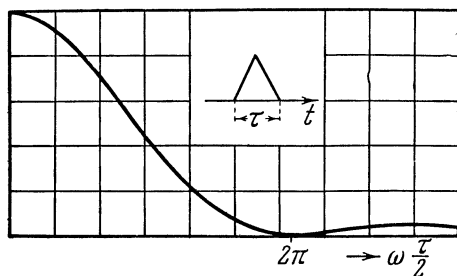


Рис. 20.

к нулю. Для косинусоидального импульса, вырезанного из косинусоиды с периодом  $2\tau$  и амплитудой  $h$ , имеем

$$S = h \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} \cos \pi \frac{t}{\tau} dt = q \frac{\cos \omega \frac{\tau}{2}}{1 - \left(\frac{2}{\pi} \omega \frac{\tau}{2}\right)^2}, \quad (11.6)$$

где  $q = \frac{2}{\pi} h\tau$  (рис. 21).

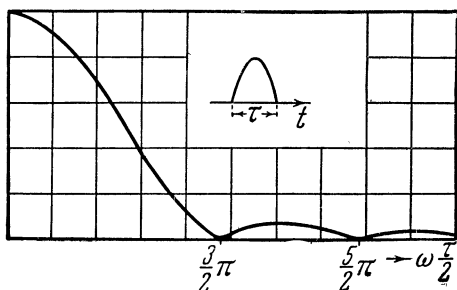


Рис. 21.

За последнее время привлек к себе внимание импульс, называемый в специальной литературе «колокольным»,

Этот импульс выражается функцией

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2}.$$

Функция эта замечательна тем, что она двойственна себе, т. е. что ее преобразование Фурье дает такую же

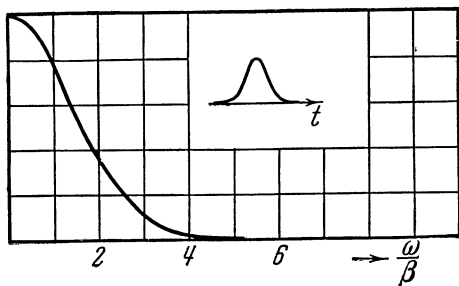


Рис. 22.

функцию. Действительно, для спектра колокольного импульса получаем

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2 t^2} e^{-j\omega t} dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta t + j\frac{\omega}{2\beta})^2} dt = \\ &= \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \end{aligned}$$

(рис. 22).

Рассмотрим еще несколько импульсов, начинающихся при  $t=0$ , но стремящихся к нулю лишь при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть, например, дан экспоненциальный импульс

$$f(t) = e^{-\beta t} \sigma_0(t).$$

Его спектр есть

$$S = \int_0^{\infty} e^{-(\beta + j\omega)t} dt = \frac{e^{-(\beta + j\omega)t}}{\beta + j\omega} \bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\beta + j\omega} \quad (11.7)$$

(рис. 23).

Спектр импульса в форме затухающей синусоиды

$$f(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t \sigma_0(t)$$

имеет вид

$$S = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} \sin \omega_1 t dt = \frac{\omega_1}{\alpha^2 - \omega^2 + \omega_1^2 + 2j\alpha\omega}$$

или, вводя обозначения

$$\alpha^2 + \omega_1^2 = \omega_0^2, \quad d = \frac{2\alpha}{\omega_0},$$

$$S = \frac{\omega_1}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + jd \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (11.8)$$

(рис. 24). Вычислим еще спектр импульса в форме отрезка синусоиды, состоящего из целого числа периодов  $n$ :

$$S = \int_{-\frac{nT}{2}}^{+\frac{nT}{2}} e^{-j\omega t} \sin \omega_0 t dt = \frac{2j\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (-1)^n \sin n\pi \frac{\omega}{\omega_0} \quad (11.9)$$

(рис. 25). Это есть, в сущности, не что иное, как текущий спектр синусоиды (см. § 5).

Очень часто импульсы определенной формы периодически повторяются. Установим связь между спектрами одиночного импульса и периодической последовательности таких же импульсов. Наперед ясно одно: спектр одиночного импульса есть спектр сплошной, так как импульс есть непериодическая функция. Если же импульс какой угодно формы периодически повторять, то мы получим периодическую функцию, обладающую дискретным гармоническим спектром.

Пусть спектр одиночного импульса есть

$$S_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt. \quad (11.10)$$

Если такой импульс повторять через промежутки времени  $T$ , то получится периодическая функция с периодом  $T$

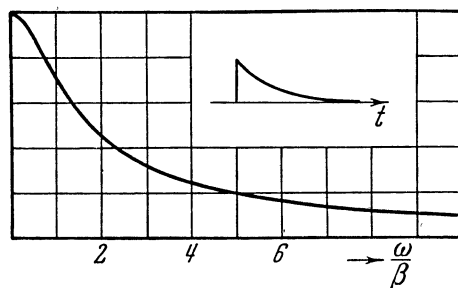


Рис. 23.

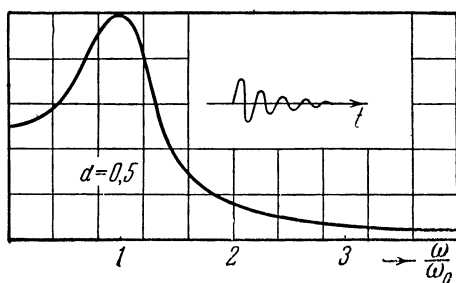


Рис. 24.

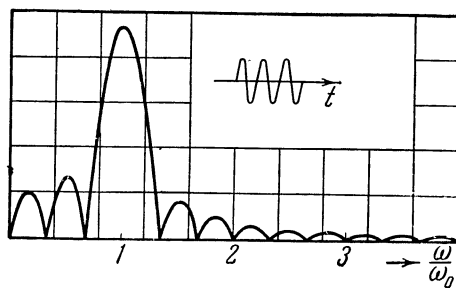


Рис. 25.



(рис. 26). Спектр этой функции может быть получен по формуле

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} f(t) dt. \quad (11.11)$$

Сопоставляя (11.10) и (11.11), мы видим, что значения непрерывной функции  $S_0$  совпадают со значениями  $C_k$  (с точностью до постоянного множителя  $\frac{1}{T}$ ) при определенных значениях аргумента, а именно при

$$\omega = 2\pi \frac{k}{T} = k\omega_1,$$

где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  — круговая частота повторения.

Таким образом, совокупность точек  $TC_k$ , определяющих дискретный спектр периодической последовательности импуль-

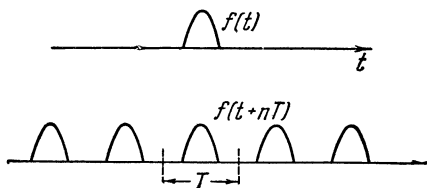


Рис. 26.

**сов**, лежит на кривой  $S_0$ , определяющей спектр одиночного импульса.

Можно еще сказать, что линейчатый спектр периодической последовательности импульсов вписывается в кривую сплошного спектра одиночного импульса.

На этом примере легко проследить предельный переход от ряда к интегралу Фурье: если период повторения возрастает, т. е. если импульсы повторяются все реже и реже, то точки, изображающие линейчатый спектр, оставаясь на кривой  $S_0$ , располагаются на ней все теснее, пока не образуют непрерывную последовательность, т. е. кривую, совпадающую с  $S_0$ .

## § 12. Связь между длительностью импульса и шириной его спектра

Мы уже установили, что чем короче импульс, тем шире его спектр, в частности, бесконечно короткий импульс имеет бесконечно протяженный спектр с равномерной плотностью. В этом проявляется одно весьма общее и имеющее очень большое значение соотношение, к установлению которого мы подойдем постепенно.

Прежде всего заметим, что общее представление о связи между протяженностями во времени и по частоте вытекает непосредственно из общего свойства преобразования Фурье. Положим, что функция  $f(t)$  имеет спектр  $S(\omega)$ . Изменим масштаб времени в  $a$  раз, и найдем спектр функции  $af(at)$  (множитель  $a$  перед функцией добавлен для сохранения площади, т. е. размеры графика функции увеличены по оси ординат во столько же раз, во сколько уменьшены в связи с изменением масштаба размеры по оси абсцисс)

$$S_a = a \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = S\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Таким образом, если длительность функции  $f(t)$  уменьшена в  $a$  раз, то ровно во столько же раз возрастает ширина спектра функции. При этом предполагается, что *определения* длительности функции и ширины её спектра остаются неизменными.

Теперь рассмотрим несколько примеров.

Возьмем снова прямоугольный импульс [см. § 11, формулу (11 4) и рис. 18]. Для спектра такого импульса мы получили

$$S = q \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}. \quad (12.1)$$

Сопоставим теперь длительность импульса и ширину его спектра. Под длительностью импульса  $\Delta t$  естественно в данном случае понимать величину  $\tau$ . Что касается ширины спектра, то здесь нужно выбрать какое-либо определение, так как спектр импульса безграничен. Но так как спектр убывает

с частотой, то можно, например, условиться считать за ширину спектра полосу частот  $\Delta f$  между нулем и тем значением частоты, когда спектр первый раз обращается в нуль. Из формулы (12.1) видно, что это случится, когда аргумент синуса будет равен  $\pi$ . Отсюда следует равенство

$$2\pi\Delta f \frac{\Delta t}{2} = \pi$$

или

$$\Delta f \Delta t = 1,$$

т. е. произведение длительности данного импульса  $\Delta t$  на ширину его спектра  $\Delta f$  (в выбранном нами произвольном определении) равно единице.

Для треугольного импульса мы получили

$$S = q \frac{1 - \cos \omega \frac{\tau}{2}}{\frac{1}{2} \left( \omega \frac{\tau}{2} \right)^2}. \quad (12.2)$$

Первый нуль спектра будет при

$$\omega \frac{\Delta t}{2} = 2\pi,$$

откуда

$$\Delta f \Delta t = 2.$$

Мы сохраняем определения для  $\Delta f$  и  $\Delta t$ :  $\Delta f$  — полоса частот до первого перехода спектра через нуль,  $\Delta t$  — интервал, вне которого функция, представляющая импульс, равна нулю.

Для косинусоидального импульса

$$S = q \frac{\cos \omega \frac{\tau}{2}}{1 - \left( \frac{2}{\pi} \omega \frac{\tau}{2} \right)^2}, \quad (12.3)$$

и искомое соотношение принимает вид

$$\Delta f \Delta t = 1,5.$$

Для всех рассмотренных примеров получается, что

$$\Delta f \Delta t \approx 1. \quad (12.4)$$

Однако, если бы мы захотели увеличить число примеров, то скоро натолкнулись бы на затруднение при выборе определений  $\Delta f$  и  $\Delta t$  для данного конкретного случая. Положим, например, что мы желаем установить соотношение типа (12.4) для экспоненциального импульса

$$f(t) = e^{-\beta t} \sigma(t).$$

Предыдущее определение  $\Delta t$  непригодно, так как очевидно, что эта функция не равна нулю в интервале от 0 до  $\infty$ . Спрашивается, как же определить длительность некоторым универсальным образом?

Прежде всего заметим, что вопрос о соотношении между  $\Delta f$  и  $\Delta t$  имеет не только теоретическое, но и очень большое практическое значение. В современной импульсной технике необходимо создавать очень короткие, но в то же время очень мощные импульсы. Иначе говоря, в импульсе большая энергия должна быть сосредоточена в малом интервале времени.

С другой стороны, требуется, чтобы спектр импульса был как можно менее размыт, поскольку широкий спектр вызывает целый ряд серьезных трудностей в устройстве импульсной аппаратуры.

Таким образом, с одной стороны, мы требуем малого  $\Delta t$ , а с другой — малого  $\Delta f$ . Эти требования, как мы видели, вообще говоря, противоречивы. Однако можно искать вид импульса, для которого произведение  $\Delta f \Delta t$  имеет наименьшее значение.

Если подходить к вопросу об определении величин  $\Delta f$  и  $\Delta t$  с практической точки зрения, то можно предложить следующее определение длительности: под длительностью импульса понимается промежуток времени, в котором сосредоточена подавляющая часть энергии импульса. Аналитически это определение можно сформулировать так:

$$\int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} f^2(t) dt = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \varepsilon A_t. \quad (12.5)$$

Здесь

$$A_t = \int_{-\infty}^{+\infty} J^2(t) dt$$

— величина, пропорциональная полной энергии импульса;  $\eta$  — выражаемая правильной дробью относительная доля полной энергии импульса, приходящаяся на промежуток времени  $\Delta t$ . Уравнение (12.5) может с удобством решаться при помощи планиметрирования.

Аналогичным образом можно определить и ширину спектра

$$\int_0^{\Delta\omega} \Phi^2(\omega) d\omega = \eta \int_0^{\infty} \Phi^2(\omega) d\omega = \epsilon A_{\omega}. \quad (12.6)$$

Заметим, что по теореме Рэяли

$$A_{\omega} = \pi A_t. \quad (12.7)$$

Что касается величины  $t_0$ , входящей в пределы интеграла в левой части (12.5), то в ряде случаев выбор этой величины не оставляет сомнений. Для симметричных импульсов, выражаемых четными функциями,  $t_0 = 0$ . Для импульсов, начинающихся при  $t = 0$ , формулу (12.5) следует переписать в виде

$$\int_0^{\Delta t} f^2(t) dt = \eta \int_0^{\infty} f^2(t) dt.$$

Вернемся к ранее рассмотренным импульсам и вычислим их длительности и ширины их спектров, основываясь на предложенном определении. Выбирая для  $\eta$  значение 0,9 получим следующую сводную таблицу интересующих нас величин (детали вычислений вынесены в добавление VI в конце книги).

Мы ограничимся лишь одним замечанием по поводу этой таблицы: как видим,  $\Delta f \Delta t$  оказывается наибольшим для импульсов, характеризующихся разрывом функции  $f(t)$  (прямоугольный и экспоненциальный); меньшее значение  $\Delta f \Delta t$  получается для импульсов с разрывом в первой производной (треугольный и косинусоидальный) и, наконец, наимень-

Импульс	Рис.	$\Delta t$	$\Delta \omega$	$\Delta f$	$\Delta f \Delta t$
Прямоугольный . .	19	$0,90 \tau$	$5,1 \frac{1}{\tau}$	$0,81 \frac{1}{\tau}$	0,73
Треугольный . . .	20	$0,541 \tau$	$5,3 \frac{1}{\tau}$	$0,84 \frac{1}{\tau}$	0,46
Косинусоидальный .	21	$0,596 \tau$	$4,57 \frac{1}{\tau}$	$0,73 \frac{1}{\tau}$	0,43
Колокольный . . .	22	$0,825 \frac{1}{\beta}$	$1,64 \beta$	$0,26 \beta$	0,22
Экспоненциальный	23	$1,155 \frac{1}{\alpha}$	$6,16 \alpha$	$0,98 \alpha$	1,13

шее  $\Delta f \Delta t$  оказывается у колокольного импульса, отличающегося тем, что выражающая его функция непрерывна со всеми своими производными.

Из всего изложенного можно заключить, что связь между  $\Delta f$  и  $\Delta t$  удовлетворяет в общем случае неравенству

$$\Delta f \Delta t \geq \mu, \quad (12.8)$$

где  $\mu$  — некоторая постоянная, зависящая, конечно, от выбора определений  $\Delta f$  и  $\Delta t$ .

Определения, которыми мы только что воспользовались, при всей их простоте и практическом удобстве не позволяют, к сожалению, поставить и разрешить вопрос в общем виде. Мы введем новые определения для  $\Delta f$  и  $\Delta t$ , основанные на применении понятия о моментах функции.

Для большей наглядности поясним эти определения ссылкой на общеизвестные понятия и определения технической механики. Предположим, что нам дана произвольная плоская фигура в плоскости  $XU$ , и требуется некоторым универсальным образом определить размер этой фигуры в направлении оси  $X$  (рис. 27). Таким универсальным измерителем

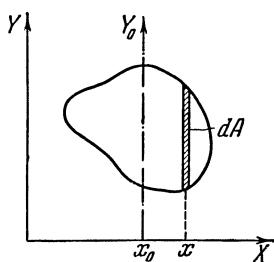


Рис. 27.

может служить *радиус инерции* данной фигуры относительно главной оси  $Y_0$ , параллельной  $Y$ .

Напомним определения. Моментом инерции плоской фигуры относительно оси  $Y$  называется интеграл

$$I = \int x^2 dA.$$

Главной осью называется ось, проходящая через центр тяжести площади. Для определения координаты центра тяжести, т. е. положения главной оси, нужно найти так называемый статический момент площади

$$M = \int x dA,$$

после чего координата центра тяжести определяется по формуле

$$x_0 = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{M}{A}.$$

Главный момент инерции, т. е. момент относительно главной оси  $Y_0$ , будет

$$\begin{aligned} I_0 &= \int (x - x_0)^2 dA = \int x^2 dA - 2x_0 \int x dA + x_0^2 \int dA = \\ &= I + x_0^2 A - 2x_0 M = I - x_0^2 A = I - \frac{M^2}{A}. \end{aligned}$$

Если положить

$$I_0 = r^2 A,$$

то в этом определении величина  $r$  и называется радиусом инерции.

Итак,

$$r^2 = \frac{I}{A} - \frac{M^2}{A^2}, \quad (12.9)$$

и определенная таким образом величина может служить универсальной мерой ширины данной фигуры в направлении оси  $X$ .

Обратимся теперь к импульсам и их спектрам. Графики как тех, так и других являются плоскими фигурами, к которым в полной мере применимо все сказанное выше. Для

импульсов роль оси  $X$  выполняет ось времен, для спектров — ось частот. Элемент площади фигуры выразится произведением значения функции на дифференциал независимой переменной. Однако, ввиду того что нам встречаются и знакопеременные функции, удобнее оперировать не самой функцией, а ее квадратом.

Таким образом, можно ввести следующие обозначения и определения:

$$\begin{aligned} A_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt, & A_\omega &= \int_0^{\infty} \Phi^2(\omega) d\omega, \\ M_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f^2(t) dt, & M_\omega &= \int_0^{\infty} \omega \Phi^2(\omega) d\omega, \\ I_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t) dt, & I_\omega &= \int_0^{\infty} \omega^2 \Phi^2(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Далее, согласно (12.9)

$$\Delta t^2 = \frac{I_t}{A_t} - \frac{M_t^2}{A_t^2}; \quad \Delta \omega^2 = \frac{I_\omega}{A_\omega} - \frac{M_\omega^2}{A_\omega^2}.$$

Отсюда

$$(\Delta \omega \Delta t)^2 = \left( \frac{I_\omega}{A_\omega} - \frac{M_\omega^2}{A_\omega^2} \right) \left( \frac{I_t}{A_t} - \frac{M_t^2}{A_t^2} \right)$$

или, используя (12.7) и вводя  $\Delta f = \frac{1}{2\pi} \Delta \omega$ ,

$$(\Delta f \Delta t)^2 = \frac{1}{4\pi^2 A_t^4} (I_\omega A_\omega - M_\omega^2) (I_t A_t - M_t^2). \quad (12.10)$$

Теперь ограничим и упростим задачу, предположив, что речь идет о четных функциях времени. Тогда

$$\Phi(\omega) = a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

и, кроме того,

$$t_0 = 0; \quad M_t = 0.$$



Условимся, далее, что функция  $f(t)$  нормирована, т. е. что

$$A_t = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = 1$$

и соответственно

$$A_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(\omega) d\omega = \pi.$$

Займемся теперь интегралом

$$I_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t) dt.$$

Мы имеем

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt.$$

Продифференцируем обе части по  $\omega$

$$a'(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \sin \omega t dt = -b_1(\omega),$$

где  $b_1(\omega)$  — спектр нечетной функции

$$f_1(t) = t f(t).$$

Воспользовавшись теоремой Рэяли, получим

$$I_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a'^2(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} N.$$

Введя все эти соотношения в (12.10), находим (индекс  $\omega$  здесь и далее опущен)

$$(\Delta f \Delta t)^2 = \frac{1}{4\pi^5} N (\pi l - M^2). \quad (12.11)$$

Поставим себе теперь задачу найти наименьшее значение  $\Delta f \Delta t$ , т. е. подобрать такую функцию, которая дает

минимальное значение интегральному выражению

$$K = N(\pi I - M^2). \quad (12.12)$$

Воспользуемся для этой цели, следуя Майеру и Леонтович [11], вариационными методами.

Составим первую вариацию величины (12.12):

$$\delta K = \delta N(\pi I - M^2) + N(\pi \delta I - 2M \delta M).$$

Для нахождения минимума мы должны приравнять эту вариацию нулю. Но при этом интегралы  $I$ ,  $M$  и  $N$  примут вполне определенные постоянные значения, которые мы обозначим соответственно через  $l$ ,  $m$  и  $n$ . После этого мы можем объединить варьируемые интегралы и записать

$$\begin{aligned} \delta \int_0^\infty [(\pi l - m)(a')^2 + (\pi n \omega^2 - 2mn\omega)a^2] d\omega = \\ = \delta \int_0^\infty F(\omega, a, a') d\omega = 0. \end{aligned}$$

Теперь мы можем записать уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial F}{\partial a'} \right) = 0$$

в следующем виде:

$$(\pi l - m^2)a'' - (\pi n \omega^2 - 2mn\omega)a = 0. \quad (12.13)$$

Умножим это уравнение на  $a$  и проинтегрируем от нуля до бесконечности. Интеграл в первом члене возьмем по частям

$$\int_0^\infty aa'' d\omega = aa' \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (a')^2 d\omega = -n$$

[так как  $a(\infty) = a'(0) = 0$ ]. Интегрируя второй член, заметим, что

$$\int_0^\infty \omega^2 a^2 d\omega = l; \quad \int_0^\infty \omega a^2 d\omega = m,$$

и таким образом мы получим соотношение

$$2\pi i = 3m^2.$$

Замечая, что согласно (12.12)

$$K_{\min} = n(\pi i - m^2),$$

мы можем теперь записать

$$K_{\min} = \frac{\pi}{3} ni = \frac{\pi}{3} \int_0^{\infty} (a')^2 d\omega \cdot \int_0^{\infty} \omega^2 a^2 d\omega.$$

Для оценки этого выражения обратимся к неравенству Буняковского

$$\int_a^b f_1^2(x) dx \cdot \int_a^b f_2^2(x) dx \geq \left[ \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right]^2.$$

В нашем случае

$$\int_0^{\infty} (a')^2 d\omega \cdot \int_0^{\infty} \omega^2 a^2 d\omega \geq \left[ \int_0^{\infty} \omega a a' d\omega \right]^2.$$

Вычисляя интеграл в правой части неравенства по частям, найдем, что он равен  $-\frac{\pi}{2}$ . Таким образом,

$$K_{\min} \geq \frac{1}{12} \pi^3$$

$$(\Delta f \Delta t)^2 \geq \frac{1}{48\pi^2},$$

откуда, наконец,

$$\Delta f \Delta t \geq \frac{1}{4 \sqrt{3\pi}} = 0,046.$$

Мы получили, таким образом, оценку  $\Delta f \Delta t$  для наивыгоднейшего случая. Интересно сопоставить полученную величину со значением  $\Delta f \Delta t$  для колокольного импульса, для которого, как мы видели, из всех рассмотренных нами импульсов произведение  $\Delta f \Delta t$  получается наименьшим. Нельзя, понятно, воспользоваться ранее вычисленными данными,

так как сейчас мы пользуемся совершенно другими критериями. Мы должны вычислить интегралы, входящие в формулу (12.11).

Колокольный импульс и его спектр были определены выше (§ 11):

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2}; \quad a(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}.$$

Из условия нормировки

$$A_t = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = 1$$

определяем  $\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . После этого находим:

$$I = \int_0^{\infty} \omega^2 a^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{\pi}} \omega^2 d\omega = \frac{\pi^2}{2},$$

$$N = \int_0^{\infty} a'^2 d\omega = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{\pi}} \omega^2 d\omega = \frac{1}{2},$$

$$M = \int_0^{\infty} \omega a^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{\pi}} \omega d\omega = -\pi.$$

Подставляя эти значения в формулу (12.12), получим

$$\Delta f \Delta t = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}} = 0,048.$$

Эта величина, как видим, очень близка к теоретическому минимуму.

### § 13. Связь между спектрами и характеристиками линейной системы

Пусть дана некоторая линейная система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t). \quad (13.1)$$

Применим к обеим частям уравнения преобразование Фурье:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

В правой части получится спектр функции  $x(t)$ ; при интегрировании левой части применим формулу (4.3). Тогда

$$[a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0] S_y = S_x \quad (13.2)$$

или, вводя сокращенное обозначение для многочлена в скобках,

$$Z(\omega) S_y = S_x;$$

здесь  $S_x$  и  $S_y$  — соответственно спектры функций  $x(t)$  и  $y(t)$ . Таким образом,

$$S_y = \frac{S_x}{Z}, \quad (13.3)$$

и мы можем вычислить  $y$  по формуле

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_x}{Z} e^{j\omega t} d\omega. \quad (13.4)$$

Эта формула дает решение уравнения (13.1) по методу интеграла Фурье.

Введем еще обозначение

$$K(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}.$$

Эта величина, выражающая отношение комплексных амплитуд на выходе и на входе системы при синусоидальном режиме, называется комплексной частотной характеристикой.

Мы можем переписать (13.3) в виде

$$S_y = K S_x. \quad (13.5)$$

Теперь рассмотрим импульсное возбуждение системы. Пусть на вход подается единичный импульс

$$x(t) = \delta(t),$$

При этом на выходе будет наблюдаться отклик системы на такого рода воздействие, который мы обозначим

$$y(t) = g(t).$$

Функцию  $g(t)$  назовем временной характеристикой системы \*).

Для единичного импульса  $S_x = 1$ ; следовательно, в этом случае согласно (12.5)

$$S_y = K,$$

так что

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

и

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (13.6)$$

т. е. комплексная частотная характеристика линейной системы есть спектр временной характеристики системы.

Приведем пример. Пусть дана электрическая цепь, состоящая из  $R$ ,  $L$  и  $C$  в последовательном соединении. Дифференциальное уравнение такой цепи имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e(t).$$

Обозначим

$$U = \frac{1}{C} \int i dt;$$

тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2\alpha \frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = \omega_0^2 e(t),$$

где, как обычно,

$$2\alpha = \frac{R}{L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

---

\*) Возможны другие термины:  $g(t)$  называется также импульсной реакцией;  $h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$  называется, переходной функцией или переходной характеристикой.

В данном случае

$$K(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha j\omega}. \quad (13.7)$$

Временную характеристику получим как решение уравнения

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + 2\alpha \frac{dg}{dt} + \omega_0^2 g = \omega_0^2 \delta(t)$$

или в операционной форме

$$\bar{g} = pK(p),$$

откуда

$$g(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_1} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t, \quad (13.8)$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2.$$

Мы видим, что, действительно, формула (13.7) дает спектр функции (13.8) [ср. с формулой (11.8)].

Из (13.6) вытекает возможность экспериментального получения частотной характеристики данной системы путем анализа. Действительно, вместо того чтобы снимать частотную характеристику при синусоидальном возбуждении исследуемой системы, можно возбудить систему коротким импульсом и проанализировать получаемую при таком возбуждении функцию времени на выходе системы. Римский-Корсаков и Шумова [13] использовали эту возможность для акустических измерений; они возбуждали объект исследования периодически повторяемыми короткими импульсами и получали искомую частотную характеристику в форме линейчатого спектра при помощи автоматического анализатора.

Мы начали наше рассуждение со случая системы с сосредоточенными постоянными, описываемой уравнением в полных производных. Однако соотношение (13.3) [или (13.5)] справедливо и в том случае, когда система описывается уравнением в частных производных. При этом обычно  $Z$  и  $K$  — трансцендентные функции  $\omega$ .

В заключение этого параграфа заметим еще, что в силу (13.6) к характеристикам линейной системы применимо соотношение

$$\Delta f \Delta t \geq \mu.$$

Оно читается в данном применении следующим образом: произведение длительности  $\Delta t$  временной характеристики на ширину  $\Delta f$  частотной характеристики для любой линейной системы больше некоторой постоянной. При этом подразумевается, что для  $\Delta f$  и  $\Delta t$  выбраны соответствующие определения (см. § 12).

## § 14. Функции с ограниченным спектром

В технике связи при передаче различных сигналов мы имеем обычно дело с функциями времени, спектр которых ограничен, т. е. в спектре которых не содержатся частоты выше некоторой граничной. Такие функции обладают замечательным свойством, установленным впервые в 1933 г. В. А. Котельниковым [8] и выраженным им в теореме, играющей фундаментальную роль в теории связи и, в частности, в импульсной связи.

Свойство это состоит в том, что тогда как в общем случае функция времени вполне определяется бессчетным множеством своих значений (т. е. бесконечным числом значений на протяжении конечного интервала), функция с ограниченным спектром вполне определяется счетным множеством своих значений (т. е. конечным числом значений на протяжении конечного интервала). С геометрической точки зрения это означает, что если задать на протяжении конечного интервала вполне определенное количество точек, изображающих мгновенные значения функции с ограниченным спектром, то непрерывная кривая, представляющая график функции, может быть проведена через эти точки единственным образом. Это положение объясняется тем, что отсутствие высоких частот в составе функции накладывает серьезное ограничение на способы, которыми могут быть соединены каждые две соседние точки, и смысл теоремы Котельникова состоит именно в утверждении, что при достаточно частом расположении точек эти ограничения приводят к тому, что кривая определяется этими точками полностью.

Эту мысль можно пояснить еще следующим примером. Положим, что относительно непрерывной линии известно что она ломаная (в этом состоит в данном примере ограничение свойств линии), и положим, что нам даны точки изломов этой линии. Тогда, зная по свойству ломаной, что



точки изломов соединены отрезками прямых, мы легко восстановливаем всю ломаную линию.

Перейдем к доказательству теоремы, которая в формулировке ее автора гласит: «Любую функцию  $f(t)$ , состоящую из частот от 0 до  $f_c$ , можно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через  $\frac{1}{2f_c}$  секунд».

Доказательство состоит в разложении функции в особого вида ряд.

В общем случае

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (14.1)$$

где

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (14.2)$$

Но в рассматриваемом частном случае функции с ограниченным спектром мы имеем вместо (14.1)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (14.3)$$

так как  $S(\omega) = 0$  при  $\omega > \omega_c$ . Функция же  $S(\omega)$  на конечном промежутке  $(-\omega_c, \omega_c)$  может быть разложена в ряд Фурье по частотам следующим образом:

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k e^{j\pi k \frac{\omega}{\omega_c}}, \quad (14.4)$$

где  $2\omega_c$  играет роль периода по частоте. Коэффициенты  $D_k$  ряда (14.4) определяются по обычной формуле

$$D_k = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(\omega) e^{-j\pi k \frac{\omega}{\omega_c}} d\omega. \quad (14.5)$$

Подставляя (14.4), в (14.3), получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k e^{j\pi k \frac{\omega}{\omega_c}} \right) e^{j\omega t} d\omega$$

или, изменяя порядок действий,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega \left( t + k \frac{\pi}{\omega_c} \right)} d\omega,$$

откуда после интегрирования находим

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} D_k \frac{\sin \omega_c \left( t + k \frac{\pi}{\omega_c} \right)}{t + k \frac{\pi}{\omega_c}}. \quad (14.6)$$

Теперь сравним (14.5) и (14.3). Как видим,

$$D_k = \frac{\pi}{\omega_c} f\left(-k \frac{\pi}{\omega_c}\right) = \Delta t \cdot f(-k \Delta t).$$

Подставляя в (14.6) найденное значение  $D_k$  и меняя знаки под знаком суммы (так как суммирование производится по всем  $k$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ ), получаем окончательно

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(k \Delta t) \frac{\sin \omega_c (t - k \Delta t)}{\omega_c (t - k \Delta t)}. \quad (14.7)$$

Итак, функция с ограниченным спектром может быть представлена рядом (14.7), коэффициенты которого представляют собой отсчеты значений функции, взятые через

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{1}{2f_c}.$$

Этим теорема доказана.

В качестве чисел, определяющих функцию с ограниченным спектром, в предшествующем доказательстве фигурировали отсчеты мгновенных значений функции. Но это могут быть и другие независимые числа, как покажет ниже следующее рассуждение.

Всякая (с несущественными ограничениями) функция может быть представлена на произвольном конечном промежутке  $\left(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$  тригонометрическим рядом

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}. \quad (14.8)$$

Но если спектр функции  $f(t)$  ограничен, т. е. если в ее составе нет частот выше граничной частоты  $\omega_c$ , то и разложение (14.8) ограничивается конечным числом слагаемых, и мы имеем в этом случае

$$f(t) = \sum_{-n}^n C_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}}, \quad (14.9)$$

где номер наивысшей гармоники  $n$  определяется из соотношения

$$2\pi \frac{n}{\tau} = \omega_c$$

или

$$n = f_c \tau.$$

Таким образом, функция полностью определяется на интервале  $\tau$  посредством  $n$  комплексных амплитуд  $C_k$  и постоянной составляющей  $C_0$ . Но так как каждая из амплитуд  $C_k$  в свою очередь определяется двумя числами (или, что то же, каждое слагаемое многочлена (14.9) определяется амплитудой и фазой), то всего для полного определения функции на интервале  $\tau$  нужно

$$m = 2n + 1 = 2f_c \tau + 1 \quad (14.10)$$

чисел. Теперь нужно устремить  $\tau$  к бесконечности, чтобы определить функцию  $f(t)$  на протяжении всей оси времен. При этом, конечно, и  $n$  будет стремиться к бесконечности, так что вместо (14.10) будем иметь асимптотическое равенство

$$m \sim 2n = 2f_c \tau.$$

Если передавать числа равномерно, то в единицу времени нужно передать

$$\frac{m}{\tau} = 2f_c$$

чисел, а временной интервал между двумя числами будет

$$\Delta t = \frac{\tau}{n} = \frac{1}{2f_c}.$$

Таким образом показано, что числами, определяющими функцию с ограниченным спектром, могут быть не только отсчеты мгновенных значений функции, но и коэффициенты ее разложения в ряд Фурье.

Мы имеем на практике дело с процессами, имеющими начало и конец, т. е. с функциями ограниченной длительности  $T$ . Ограниченные во времени функции не могут иметь ограниченный спектр (т. е. спектральную плотность, равную нулю вне конечного интервала) — эти условия противоречивы. Однако можно построить рассуждение на более общей основе, определив ширину спектра  $F$  как интервал частот, вне которого спектральная плотность меньше некоторой заданной величины. Оказывается, что общий смысл теоремы Котельникова, состоящий в том, что функция определяется на интервале  $T$  посредством

$$n = 2FT$$

«координат», при такого рода обобщении сохраняется \*).

## § 15. Интеграл Фурье и дискретные спектры

Спектр функции  $f(t)$  вычисляется по формуле

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (15.1)$$

Это вычисление выполнимо при соблюдении обычных ограничений, накладываемых на функцию  $f(t)$ . Одно из этих ограничений состоит, как известно, в том, что функция  $f(t)$  должна быть абсолютно интегрируема в бесконечных пределах. Очевидно, что это условие не выполняется

---

\*) Мы не приводим здесь этого более широкого рассуждения, так как оно имеет теоретико-информационный характер и выходит за рамки нашего изложения. См. по этому поводу доклад А. Н. Колмогорова на сессии АН СССР по вопросам автоматизации (Москва, 1956).

в случае, когда  $f(t)$  есть периодическая функция. Поэтому формула (15.1) непосредственно неприменима для вычисления дискретных (линейчатых) спектров периодических функций.

Можно, однако, построить некоторое обобщение, хотя и не строгое математически, но во многих отношениях интересное и полезное.

Выясним прежде всего, что представляет собою с математической точки зрения дискретный спектр. Будем рассматривать для простоты чисто синусоидальное колебание с частотой  $\omega_0$ . Спектр такого колебания представляется одной единственной спектральной линией с частотой  $\omega = \omega_0$ . Спектральная плотность на этой частоте равна бесконечности; при всех же остальных значениях частоты она равна нулю. Вместе с тем из определения спектральной плотности (см. § 3)

$$S = \pi \frac{dC}{d\omega},$$

где  $C$  — амплитуда, следует, что интеграл от спектральной плотности по частоте, взятый на любом интервале  $(\omega_1, \omega_2)$ , включающем в себя  $\omega = \omega_0$ , будет равен

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{dC}{d\omega} d\omega = C,$$

т. е. «площадь» контура, очерченного графиком спектральной плотности на спектральной диаграмме, есть постоянная конечная величина, равная амплитуде анализируемого синусоидального колебания.

Но описанные свойства функции, представляющей спектральную плотность, в точности совпадают со свойствами единичного импульса  $\delta$  (см. § 11). Поэтому спектральная плотность синусоидального колебания с частотой  $\omega_0$  может быть представлена в виде

$$S = \pi C \delta(\omega - \omega_0). \quad (15.2)$$

Это представление применимо и к постоянной составляющей, для которой надо положить  $\omega_0 = 0$ .

Таким образом, спектральная плотность любого периодического процесса может быть представлена формулой

$$S = \pi \sum_{k=0}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\omega_1),$$

где  $C_k$  — амплитуда  $k$ -й гармоники,  $\omega_1$  — основная частота.

Обратимся теперь к преобразованиям Фурье. Если применить преобразование (15.1) к единичному импульсу, рассматриваемому как функция времени, то для спектра его получим:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (15.3)$$

Подставляя этот результат в формулу обратного преобразования

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (15.4)$$

мы должны были бы получить

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t). \quad (15.5)$$

Это соотношение, справедливость которого совершенно неочевидна, может быть, однако, принято в качестве условного интегрального определения единичного импульса  $\delta(t)$ .

Если мы согласимся принять это определение, то, видоизменяя его, сразу же можем записать еще ряд соотношений:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = \delta(t - \tau), \quad (15.6)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt = \delta(\omega), \quad (15.7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega - \omega_0)t} dt = \delta(\omega - \omega_0). \quad (15.8)$$

Кроме того, знаки показателей можно менять на обратные на том основании, что  $\delta$  — четная функция.

Нижеследующее рассуждение послужит если не для доказательства справедливости, то для пояснения смысла соотношения (15.5). Рассуждение это основано на том, что мы берем некоторую непрерывную функцию, к которой преобразование Фурье применимо, и делаем от этой функции предельный переход к единичному импульсу. Множество функций годится для этой цели. Мы выберем колокольный импульс, т. е.

$$f(t) = e^{-\beta^2 t^2} \quad (15.9)$$

и запишем

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2 t^2} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}. \quad (15.10)$$

Будем теперь стремиться  $\beta$  к нулю. При этом функция  $e^{-\beta^2 t^2}$  будет приближаться к единице, а функция

$$\frac{1}{2\pi} S = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}$$

— к единичному импульсу. В самом деле, с уменьшением  $\beta$  эта функция стремится к нулю для всех значений  $\omega \neq 0$ ; при  $\omega = 0$  она стремится к бесконечности. Интеграл же от этой функции сохраняет постоянное значение, равное единице:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1.$$

Таким образом, все свойства единичного импульса налицо, и показано, что при  $\beta \rightarrow 0$  выражение (15.10) переходит в пределе в (15.7), которое эквивалентно (15.5).

В заключение отметим, что гармоническое колебание и единичный импульс составляют пару сопряженных функций, соотношения между которыми видны из следующей таблицы, в которой еще раз проявляется уже отмечавшаяся двойственность частотно-временных представлений:

$f(t)$	$e^{j\omega_0 t}$	$\delta(t - \tau)$
$S(\omega)$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$e^{-j\omega\tau}$

## ГЛАВА II

## АНАЛИЗ

### § 16. Постановка вопроса

Приступая к изложению вопросов анализа, постараемся прежде всего определить предмет исследования. Мы будем понимать под анализом получение спектра. Однако необходимо сразу же подчеркнуть, что речь пойдет не об анализе функций, а об анализе физических процессов. Остановимся на этом подробнее.

Если задача состоит в анализе функции, т. е. в нахождении спектра функции, то задача эта будет решаться по-разному, в зависимости от того, как нам задана функция. Она может быть задана трояким способом: либо своим аналитическим выражением, либо графиком, либо таблицей.

В первом случае спектр вычисляется аналитически; в двух других случаях применяются либо графо-аналитические численные методы вычисления спектра, либо специальные приборы — анализаторы — механические, оптико-механические или оптико-электрические. Все эти методы хорошо разработаны и детально описаны; читатель найдет достаточное количество сведений по этим вопросам в энциклопедического характера книге Серебrenникова [14].

Вся эта область нас совершенно не будет интересовать. Мы будем заниматься вопросами *физического* анализа. Этот вид анализа характеризуется тем, что спектр некоторого процесса получается во время течения процесса в результате его воздействия на определенный физический прибор, называемый анализатором. Таким образом, проблема анализа ставится как чисто физическая проблема, и, как мы увидим, ее разрешение связано с целым рядом чисто физических особенностей,



Как уже говорилось в § 3, может потребоваться анализ самых различных физических явлений; нас могут интересовать спектры механических величин — сил, скоростей, ускорений, смещений, моментов и т. д.; электрических величин — токов, напряжений, зарядов, индукций, и т. д.; тепловых, акустических и многих других величин. Было бы крайне неудобно строить анализаторы для каждого рода анализируемой величины. В этом в наше время нет и необходимости. Дело в том, что современная тенденция в области техники измерений состоит в том, что все виды измерений сводятся по возможности к электрическим измерениям. Эта тенденция оправдана, во-первых, наличием громадного ассортимента первоклассных по точности и чрезвычайно чувствительных электроизмерительных приборов, а во-вторых, специфической гибкостью электрических измерений. Не вдаваясь в технические подробности, отметим лишь возможность отнесения измерительного прибора на любое расстояние от объекта измерения, а также то, что электрические измерения позволяют выполнять измерения быстро изменяющихся величин. Для этого служат электромеханические осциллографы, а для особо быстрых процессов — электронные.

Необычайно распространенные в современной технике электрические методы измерения неэлектрических величин основаны на применении приборов, преобразующих измеряемую величину в ту или иную электрическую величину. Эти приборы называются обычно датчиками. Всякое устройство для электрического измерения неэлектрической величины состоит в основном из двух элементов: датчика и подходящего электроизмерительного прибора. Так, например, измерение высоких температур производится электрическим пирометром, состоящим из термопары и милливольтметра; измерение звукового давления — комбинацией высококачественного микрофона и лампового вольтметра с соответствующим усилением. В этих двух примерах термопара и микрофон являются преобразователями и выполняют функции датчиков. Существует громадное количество самых разнообразных датчиков, позволяющих преобразовать какую угодно подлежащую измерению величину в электрический ток или напряжение с выполнением наиболее высоких метрологических требований.

При таком положении вещей очевидно, что и анализ любого физического процесса, состоящего в изменении во времени той или иной физической величины, может быть сведен к анализу электрического процесса, т. е. соответствующим образом изменяющегося тока или напряжения. Поэтому все современные технические анализаторы — это электрические приборы.

Мы определили анализ как операцию нахождения спектра. Спектр представляется совокупностью амплитуд составляющих различной частоты. Следовательно, анализатор есть прибор, позволяющий измерить амплитуду и частоту каждого из синусоидальных колебаний, входящего в состав сложного анализируемого колебания.

Всякий анализатор есть измерительный прибор. Поэтому мы должны уделить достаточное внимание метрологическим характеристикам анализатора и в первую очередь — его точности. Как мы увидим, погрешности анализатора обусловлены в значительной мере очень специальными обстоятельствами, лежащими в природе процесса анализа. В дальнейшем эти обстоятельства обсуждены со всей необходимой подробностью.

## § 17. Спектральные приборы

Для целей анализа может служить любой прибор, поведение которого так или иначе зависит от частоты воздействия на него. Такого рода приборы можно назвать спектральными.

В основе действия спектральных приборов лежит одно из следующих явлений: интерференция, преломление при наличии дисперсии, резонанс \*).

Первые два явления используются для построения целого ряда спектральных приборов в оптике. Интерференционным путем получают оптические спектры в интерференционных спектроскопах, а также в дифракционной решетке. Спектр может быть получен также при помощи призмы, если показатель преломления заметно зависит от частоты,

---

\*) Кроме того, для целей анализа может быть использована селективность, возникающая вследствие ортогональности тригонометрических функций. Рассмотрению этой возможности посвящен специальный § 20.

или, другими словами, если имеет место дисперсия фазовой скорости \*).

Мы не будем останавливаться на теории этих приборов; нас интересует только общая их характеристика. Наиболее существенно, что названные спектральные приборы являются анализаторами, но анализаторами волновыми; они специально приспособлены для анализа волн, падающих на анализатор. Поэтому они как раз весьма удобны в оптике.

Резонатор — прибор, использующий для анализа явление резонанса, — более универсален, так как может применяться как для анализа волн, для чего его следует поместить в волновое поле, так и для анализа сосредоточенных воздействий. В оптике анализ посредством резонатора нельзя осуществить только потому, что мы еще не в состоянии построить электрический резонатор на частоты порядка  $10^{14}$  герц, с которыми мы имеем дело в оптике \*\*). Для радиочастот резонатор уже вполне осуществим, не говоря уже о более низких ультразвуковых и звуковых частотах. А так как анализ различных явлений (кроме оптических) сводится, как уже говорилось, к анализу электрического тока главным образом в цепях с сосредоточенными постоянными, то возможные решения задачи анализа размежевываются в настоящее время так: в оптике применяются исключительно волновые анализаторы, т. е. интерференционные спектрометры, дифракционные решетки и призматические спектрометры; для всех остальных явлений, происходящих с частотами от радиочастот и ниже и допускающих преобразование анализируемой величины в электрическую (ток или напряжение), анализ осуществляется при помощи резонаторов.

---

\*) Не следует думать, что получение спектра на основе дисперсии составляет монополию оптики. Электрический кабель также обладает дисперсией; колебания более высокой частоты распространяются по нему с большей фазовой скоростью. В результате этого на достаточно длинных (например, трансатлантических) кабелях можно наблюдать спектральное разложение сигнала во времени, прекрасно известное инженерам дальней связи. Недавно сделана попытка использовать это явление для анализа (В. И. Тверской, диссертация. Горьковский политехнический институт, 1961).

\*\*) Можно, однако, заметить, что существуют естественные резонаторы на оптические частоты — атомы и молекулы. Действием этих резонаторов обусловлены такие, например, явления, как резонансное поглощение, резонансная флуоресценция и т. п.

Простейшим электрическим резонатором является колебательный контур, состоящий из сосредоточенных индуктивности, емкости и активного сопротивления. Однако эта простейшая форма в ряде случаев оказывается непригодной.

Во-первых, затухание обычного контура довольно велико, а вследствие этого разрешающая способность анализатора мала (об этом подробнее говорится в следующих параграфах). Обычный способ преодоления этого затруднения состоит в замене электрического резонатора механическим, обладающим, как правило, значительно меньшим затуханием. Схема анализатора с применением механического резонатора усложняется: механический резонатор включается между двумя преобразователями. Первый преобразователь превращает ток в механическую силу и возбуждает резонатор. Второй преобразователь воспринимает механическое колебание резонатора и снова преобразовывает это механическое колебание в электрическое. Очень удобно совместить преобразователи и собственно резонатор в одном элементе; так возникают пьезоэлектрические и магнитострикционные резонаторы. Кварцевая пластинка пьезоэлектрического резонатора является одновременно и преобразователем и колебательной системой. То же относится и к магнитострикционному стержню.

Во-вторых, зачастую практически невозможно построить резонатор на заданную частоту в виде системы с сосредоточенными постоянными. В этих случаях используют один из резонансов системы с распределенными постоянными. Но здесь интересно отметить, что резонанс в такой системе — например, в отрезке линии или в стержне — есть волновое явление, и здесь мы снова возвращаемся к принципам, используемым в оптике. Ведь волновой резонанс в отрезке линии представляет собой не что иное, как результат интерференции; отрезок линии как спектральный прибор решительно ничем не отличается по существу происходящих в нем явлений от интерференционного спектроскопа. Таким образом, намеченная выше граница со спектральными приборами оптики не так уж резка. Для полноты картины следует отметить, что диффракционная решетка применялась для анализа явлений ультразвуковой частоты. Для этой цели изучаемое явление превращалось в ультразвуковое излучение в воздухе (эта операция необходима, так как решетка

есть волновой анализатор). Волна попадала на соответствующих размеров диффракционную решетку. Диффракционный спектр наблюдался при помощи ультразвукового микрофона. Едва ли такая сложная схема целесообразна. В дальнейшем мы уделим основное внимание анализу посредством резонаторов.

## § 18. Одновременный и последовательный анализ

Анализ сложного колебания посредством резонаторов может быть осуществлен двумя различными способами. Первый способ состоит в применении набора резонаторов, настроенных на различные частоты и подвергающихся одновременно воздействию исследуемого колебания. Такой способ будем называть одновременным анализом. По второму способу применяется один единственный резонатор с переменной настройкой. Этот вид анализа будем называть последовательным.

Очевидно, что одновременный анализ имеет перед последовательным преимущество в скорости выполнения анализа. Но, кроме того, оба метода имеют и более существенное различие. Дело в том, что процесс перестройки резонатора при последовательном анализе совершается во времени, и наперед ясно, — мы будем еще заниматься этим вопросом подробно, — что перестройка не может происходить очень быстро, так как в противном случае результаты анализа будут искажены переходными явлениями. Следовательно, последовательный способ анализа пригоден для периодических явлений или явлений, характер которых изменяется медленно (т. е. мало изменяется за время анализа). Для анализа же быстро изменяющих свой ход явлений, в частности, для анализа одиночных импульсов, последовательный анализ совершенно непригоден. Правда, очень часто мы располагаем возможностью периодически повторять импульс в целях исследования. В этом случае последовательный способ пригоден для анализа импульсов; к этой возможности постоянно прибегают.

Сущность последовательного анализа состоит в том, что частота резонатора, плавно изменяясь, совпадает поочередно с частотами гармонических составляющих анализируемого колебания. Положение органа настройки позволяет

отсчитать частоту, амплитуду гармоник показывает подключенный к резонатору индикатор. Примером подобного анализатора может служить самый обыкновенный волномер. Градуировка волномера при помощи мультивибратора есть в сущности операция анализа. Правда, анализ здесь качественный, так как амплитудами гармоник при градуировке не интересуются, но очевидно, что они могут быть измерены. При помощи того же волномера можно с успехом проанализировать, например, модулированное колебание. Однако такой простейший анализатор широкого применения иметь не может по следующим причинам.

От современного анализатора, будь то анализатор технических, звуковых, ультразвуковых или радиочастот, требуется обычно очень широкий диапазон частот. Например, звуковой диапазон охватывает около девяти октав. Построить достаточно селективный резонатор с плавным изменением настройки в таком диапазоне практически невозможно. Поэтому прибегают к видоизменению способа последовательного анализа, имеющему в технике анализа большое значение. Видоизменение это состоит в том, что, вместо того чтобы передвигать резонансную частоту по шкале частот относительно неподвижных спектральных линий, заставляют передвигаться по шкале частот весь спектр относительно фиксированной резонансной частоты. И в том и в другом случае наблюдается последовательное совпадение отдельных спектральных линий с частотой резонатора вследствие относительного перемещения их на шкале частот.

Для получения смещающегося по шкале частот спектра необходимо выполнить соответствующее преобразование исходного спектра. Требуемое преобразование получается очень просто: достаточно умножить анализируемое колебание на синусоидальное напряжение переменной частоты. Такое перемножение осуществляется посредством того или иного модулятора.

Пусть анализируемое колебание есть

$$x = \sum c_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k),$$

а вспомогательная частота (по немецкой терминологии «Suchton» — буквально «ищущий тон») есть

$$y = y_m \sin \Omega t,$$

где  $\Omega$  — изменяемая по нашему произволу частота. Составим произведение

$$\begin{aligned} xy &= y_m \sin \Omega t \sum c_k \cos (k\omega_1 t + \varphi_k) = \\ &= \frac{1}{2} y_m \sum c_k \{ \cos [(\Omega - k\omega_1)t - \varphi_k] + \cos [(\Omega + k\omega_1)t + \varphi_k] \}. \end{aligned}$$

Мы получаем модуляционный спектр, воспроизводящий спектр анализируемого колебания в виде двух боковых полос, расположенных симметрично по отношению к несущей частоте  $\Omega$ . Но так как эта частота может изменяться, то весь модуляционный спектр перемещается по шкале частот, следуя за  $\Omega$ . Достаточно теперь выбрать пределы изменения вспомогательной частоты  $\Omega$  так, чтобы через частоту резонатора прошла полностью одна из боковых полос преобразованного спектра. Такой вариант последовательного анализа получил очень большое распространение, вполне оправданное его значительными преимуществами. В технические детали мы здесь входить не будем.

## § 19. Статическая разрешающая способность и погрешность анализатора

Разрешающая способность — важнейшая метрологическая характеристика анализатора. Под разрешающей способностью анализатора понимается вообще способность его *разрешить* (или разделить) две соседние спектральные линии. Количественной мерой разрешающей способности является наименьший интервал по частоте между двумя спектральными линиями, при котором они еще разделяются анализатором. Нужно определенным образом условиться, при каких обстоятельствах мы будем считать линии разделенными. Для этого нужно рассмотреть процесс анализа подробнее.

Начнем с последовательного анализа. Предположим, что имеется одна единственная спектральная линия с частотой  $\omega_1$ . Пусть резонатор постепенно перестраивается, так что его резонансная частота, возрастаая, проходит через значение  $\omega_1$ . При этом индикатор дает наибольший отсчет. Если же записать показания индикатора в функции резо-

нансной частоты, то эта зависимость даст не что иное, как резонансную кривую (рис. 28).

Пусть теперь анализируемый спектр состоит из двух спектральных линий одинаковой интенсивности.

В этом случае в резонаторе будут существовать одно- временно колебания двух частот, и возникнут биения с разностной частотой. «Амплитуда» сложного колебания при этом не будет уже постоянной величиной. Однако можно условиться понимать под амплитудой ее наибольшее значение, равное сумме амплитуд обоих составляющих колебаний.

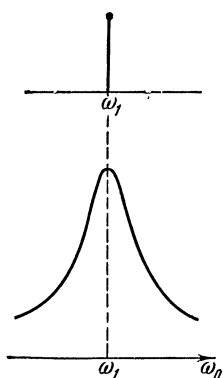


Рис. 28.

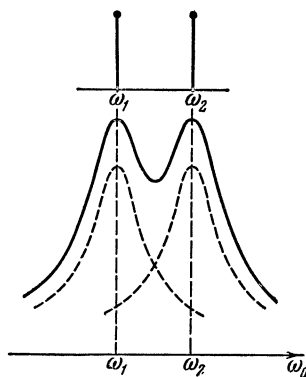


Рис. 29.

Каждая из этих амплитуд зависит от настройки резонатора по отношению к соответствующей частоте, и, следовательно, повторяя предыдущее рассуждение применительно к каждой из двух спектральных линий, мы придем к выводу, что показания индикатора будут представлены графически двугорбой кривой, получаемой при сложении двух смещенных резонансных кривых (рис. 29). Мы видим, что резонатор с затуханием изображает отдельную спектральную линию резонансной кривой. (Вообще невозможно построить анализатор, который давал бы спектр в виде линии.) Спектр же, состоящий из многих линий, будет изображен анализатором в виде плавной кривой с рядом максимумов, отвечающих отдельным спектральным линиям. Задача анализа тем не менее разрешается, так как положение максимумов на



шкале частот определяет положение спектральных линий, а высота максимумов определяет интенсивность линий. Нам остается определить условия разделения.

Для двух резонансных кривых рис. 29 можно записать

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}}, \quad y_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega - \omega_2}{\omega_2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}},$$

где  $d$  — затухание резонатора. Введем

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Тогда

$$\omega - \omega_1 = \omega - \omega_0 + b = \Delta\omega + b, \quad \omega - \omega_2 = \omega - \omega_0 - b = \Delta\omega - b,$$

и уравнение двугорбой кривой есть

$$y = y_1 + y_2 \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\omega + b}{\omega_0}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\omega - b}{\omega_0}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}} \right].$$

При небольшом затухании максимумы кривой будут расположены на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , т. е. при  $\Delta\omega = \pm b$ ; величина максимума приближенно равна

$$y_{\max} \approx \frac{1}{d} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2b}{\omega_0}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}} \approx \frac{1}{d},$$

а ордината седловины, т. е. величина  $y$  при  $\omega = \omega_0$ , или  $\Delta\omega = 0$ , равна

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b}{\omega_0}\right)^2 + d^2}}.$$

Отношение ординаты седла к величине максимума равно

$$\frac{y_0}{y_{\max}} = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{b}{\omega_0}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{2b}{\omega_0 d}\right)^2 + 1}}.$$

Мы видим, что отношение это зависит как от относительного расстояния между линиями  $\frac{b}{\omega_0}$ , так и от затухания  $d$ ,

причем увеличение расстояния равносильно уменьшению затухания, и обратно.

Условимся считать, что две спектральные линии одинаковой интенсивности разделены, если отношение  $\frac{y_0}{y_{\max}}$  не превышает некоторой определенной величины, например  $\frac{1}{2}$ .

Тогда из неравенства

$$\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{2b}{\omega_0 d}\right)^2}} \leq \frac{1}{2}$$

найдем

$$\frac{2b}{\omega_0 d} \geq \sqrt{15} \approx 4$$

или

$$d \leq \frac{1}{4} \frac{2b}{\omega_0}.$$

Итак, в рассмотренном случае разрешающая способность зависит только от затухания резонатора; чем затухание меньше, тем разрешающая способность больше; задавшись разрешающей способностью, можно определить наибольшее допустимое затухание.

Выведенные соотношения иллюстрируются графиком на рис. 30, на котором двугорбая кривая построена для различных значений затухания. Как видим, при определенном затухании седло пропадает, и кривая делается одногорбой. При этом разделение линий, очевидно, уже совершенно невозможно. Величину затухания, соответствующую такому изменению формы кривой, можно определить, положив  $\frac{y_0}{y_{\max}} = 1$ ; это дает

$$d = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2b}{\omega_0}.$$

Обратимся теперь к одновременному анализу. Анализатор состоит из набора резонаторов, настроенных на различные частоты. Все резонаторы одновременно подвергаются действию анализируемого колебания и так или иначе реагируют на него. Пусть анализатор состоит из резонаторов 1, 2, 3, 4, ..., резонансные кривые которых изображены на рис. 31, а. Положим далее, что анализируемое

колебание состоит из одной единственной спектральной линии, положение которой отмечено вертикальным пунктиром. Каждый из резонаторов откликнется на это колебание по-своему; на рис. 31, а точками отмечены ординаты

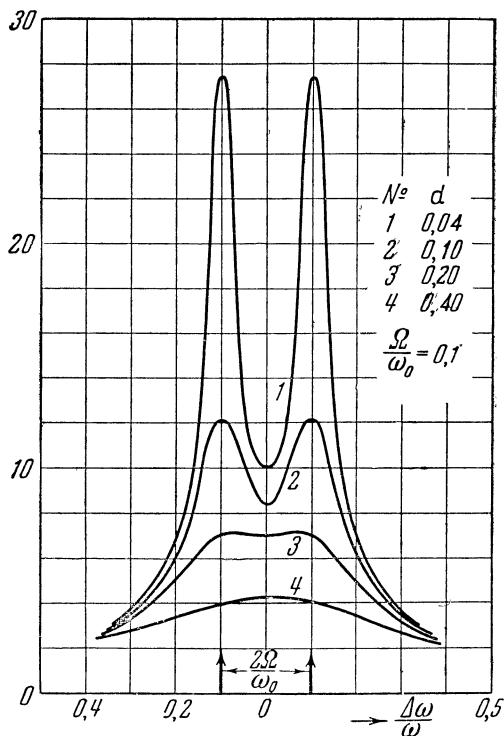


Рис. 30.

каждой из резонансных кривых, дающие величину показания индикатора, подключенного к данному резонатору. Совокупность этих показаний, которую мы в дальнейшем будем кратко называть показанием анализатора, представлена на рис. 31, б.

Итак, вместо единственной линии, имеющейся в действительности, показание анализатора представляется целым спектром, частоты которого вдобавок зависят от настройки резонаторов, а не от частоты анализируемого колебания.

Однако заключение о полной несостоятельности одновременного анализа было бы слишком поспешным. Дело в том, — и это весьма существенно, — что показание анализатора однозначно, т. е. между спектром анализируемого колебания и показанием анализатора существует вполне определенная связь. Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

Пусть анализатор составлен из некоторого числа резонаторов, различающихся по настройке, так что уравнение резонансной кривой  $k$ -го резонатора записывается в виде

$$y_k = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega - \omega_k}{\omega_k}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}},$$

где  $\omega_k$  — резонансная частота. Под воздействием синусоидального колебания с частотой  $\omega_0$  показание анализатора представится совокупностью величин

$$y_{k0} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \omega_k}{\omega_k}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}}.$$

Но в силу тех же самых приближений, при помощи которых выводится выражение для резонансной кривой\*), по-

\*) Точное выражение

$$y = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_k^2} d^2}}$$

для случая малой расстройки, т. е. для селективного резонатора, упрощается, если положить

$$\omega \approx \omega_k, \quad 1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} = \frac{(\omega + \omega_k)(\omega - \omega_k)}{\omega_k^2} \approx 2 \frac{\omega - \omega_k}{\omega_k},$$

что и приводит к приближенной формуле, которой мы пользуемся.

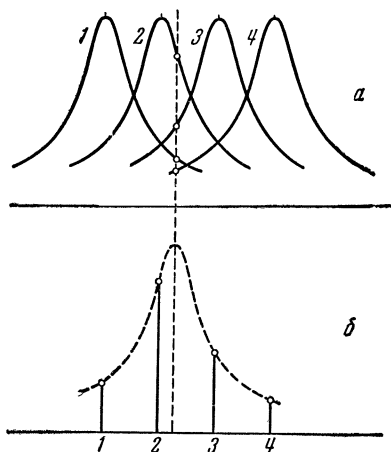


Рис. 31.

следнее соотношение можно переписать в виде

$$y_{k0} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_k - \omega_0}{\omega_0}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}},$$

а это выражение означает, что показание анализатора представляется совокупностью линий с частотами  $\omega_k$ , вписанных в такую же резонансную кривую, но с резонансом при  $\omega_0$ . Последняя резонансная кривая на рис. 31, б намечена пунктиром.

Из этого следует, что если мы составим анализатор из большого числа резонаторов с часто и равномерно расположенными по шкале частот резонансными частотами, то показание такого анализатора даст столь же частый спектр, так что определить по нему положение максимума станет уже возможным. При таком положении можно говорить о разрешающей способности анализатора при одновременном анализе совершенно так же, как и применительно к последовательному анализу. Можно также рассматривать кривую, изображающую показание последовательного анализатора, как предельный случай показания одновременного анализатора при неограниченном увеличении числа резонаторов. Выражая это же соотношение еще иначе, можно сказать, что показания при последовательном и одновременном анализе соотносятся так же, как спектры одиночного и периодически повторяемого импульса: первый спектр — сплошной, второй — линейчатый, вписывающийся в первый.

Возможность хорошего разрешения при помощи одновременного анализа можно иллюстрировать ссылкой на общеизвестный технический язычковый частотомер. Этот прибор состоит из набора механических резонаторов, обладающих большой селективностью. Если настройка выполнена, как обычно, с шагом 1 *гц*, то частота может быть уверенно отсчитана с точностью до 0,5 *гц*, так как, когда частота попадает в середину интервала между частотами двух соседних язычков, они колеблются одновременно с равными амплитудами.

Возможна принципиально иная постановка вопроса об анализе, особенно уместная в применении к одновременному анализу. Представим себе, что анализатор составлен из на-

бора не обычных резонаторов, а идеальных полосовых фильтров с тесно примыкающими границами (рис. 32, а). Тогда при наличии одной спектральной линии (рис. 32, б) показание анализатора будет однозначным: на колебание, отвечающее этой линии, откликнется только тот фильтр, в пределах полосы пропускания которого лежит возбуждающая частота. Показание анализатора изображено условно на рис. 32, в. Однако ясно, что значение частоты не определяется точно; мы можем лишь утверждать, что она находится в пределах той или иной полосы.

Так же ясно, что мерой разрешающей способности такого полосового анализатора является ширина полосы. Если в пределах одной и той же полосы оказывается более чем одна линия исследуемого спектра, то анализатор их не разделяет; он дает лишь некоторое суммарное значение для всех составляющих, частоты которых лежат в пределах той или иной полосы. При таких обстоятельствах естественно заставить полосовой анализатор измерять мощность, так как мощность в полосе выразится простой арифметической суммой мощностей отдельных составляющих.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим вопрос о погрешности анализатора. Если исследуемое колебание синусоидально, то амплитуда и частота колебания могут быть в принципе определены при помощи анализатора точно. Если же анализируется сложное колебание, то возникает неустраняемая погрешность. Погрешность эта обусловлена тем, что на резонатор воздействуют одновременно все составляющие сложного колебания, и мы не в состоянии разделить их влияние, а следовательно, и определить амплитуду и частоту каждой составляющей в отдельности.

Пусть комплексная амплитуда  $k$ -го резонатора под действием  $i$ -й гармоники спектра есть

$$y_{ki} = \frac{x_i}{1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_k}\right)^2 + jd_k \frac{\omega_i}{\omega_k}},$$

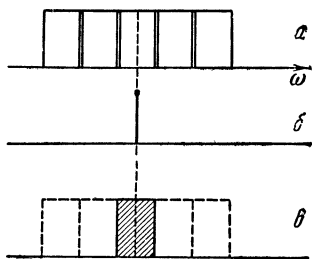


Рис. 32.

где  $\omega_i$  — частота гармоники,  $x_i$  — ее амплитуда,  $\omega_k$  — резонансная частота данного резонатора. Под действием всего спектра амплитуда резонатора будет

$$y_k = \sum_i \frac{x_i}{1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_k}\right)^2 + jd_k \frac{\omega_i}{\omega_k}}.$$

Предположим, что резонатор настроен точно на частоту одной из гармоник. Выделив слагаемое, относящееся к этой гармонике, получим

$$y_k = \frac{x_k}{jd_k} + \sum_{i \neq k} \frac{x_i}{1 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_k}\right)^2 + jd_k \frac{\omega_i}{\omega_k}}.$$

В остающейся здесь сумме суммирование производится по всем остальным гармоникам, т. е. по всем  $i$ , не равным  $k$ . Положим теперь, что спектр гармоничен, т. е. что

$$\omega_i = \Omega i,$$

где  $\Omega$  — основная частота. Кроме того, примем, что относительное затухание для всех резонаторов одинаково, т. е. положим

$$d_k = d.$$

Тогда

$$y_k = \frac{x_k}{jd} + \sum_{i \neq k} \frac{x_i}{1 - \left(\frac{i\Omega}{\omega_k}\right)^2 + jd \frac{i\Omega}{\omega_k}}.$$

Последнее выражение показывает, что отсчет по резонатору пропорционален амплитуде соответствующей гармоники, т. е.

$$|y_k| = \frac{x_k}{d}$$

только при условии, что суммой в правой части можно пренебречь. Таким образом, эта сумма и представляет собой погрешность, совершаемую при анализе.

Рассматривая формулу, мы видим, что погрешность тем меньше, чем реже спектр, т. е. чем больше основная частота  $\Omega$ . Кроме того, относительная погрешность убывает с уменьшением затухания (т. е. с увеличением разрешающей спо-

способности), потому что при этом возрастает первый член в правой части по сравнению с суммой.

Все эти соображения применимы в равной мере как к одновременному, так и к последовательному анализу.

## § 20. Об анализе без резонаторов

До сих пор предполагалось, что анализ выполняется при помощи резонатора, т. е. некоторого устройства, обладающего определенной частотной избирательностью. Простейшим резонатором является колебательный контур; более совершенным избирательным органом может служить полосовой фильтр.

Существует, однако, и другая возможность, которую мы рассмотрим в общих чертах. Составим схему, показанную в скелетной форме на рис. 33. На этой схеме  $\Pi$  — перемножитель (идеальный модулятор), т. е. устройство, на выходе которого получается напряжение, пропорциональное произведению напряжений, поданных на два входа;  $\Gamma$  — генератор синусоидального напряжения с изменяемой частотой и начальной фазой,  $I$  — интегрирующая схема. Если генератор дает напряжение

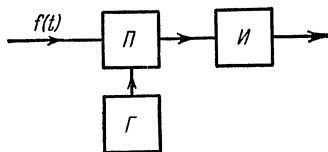


Рис. 33.

$$U = \cos \omega t,$$

то на выходе мы получим

$$A_t(\omega) = \int_0^t f(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

(предполагая, что схема включена в момент  $t = 0$ ). Если изменить начальную фазу напряжения генератора на  $\pi/2$ , то на выходе будем иметь

$$B_t(\omega) = \int_0^t f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Величины  $A_t$  и  $B_t$  представляют собой косинусную и синусную составляющие текущего спектра. Соединив вместе



две схемы рис. 33 с двумя генераторами, дающими сдвинутые на  $\pi/2$  синусоидальные напряжения, и добавив звено, в котором  $A_t$  и  $B_t$  возводятся в квадрат и складываются с последующим извлечением корня, получим анализатор, на выходе которого получается текущий амплитудный спектр функции  $f(t)$

$$\Phi_t(\omega) = \sqrt{A_t^2(\omega) + B_t^2(\omega)}.$$

Можно видоизменить описанный метод получения спектра так, чтобы можно было обойтись одной схемой рис. 33. Для этого нужно при данной частоте  $\omega$  изменять фазу  $\varphi$  напряжения генератора. Тогда на выходе схемы рис. 33 будем иметь

$$x(t, \omega, \varphi) = \int_0^t f(\tau) \sin(\omega\tau + \varphi) d\tau.$$

Найдем наибольшее значение  $x$ , считая фазу  $\varphi$  переменной.

Для этого приравняем нулю производную  $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \int_0^t f(\tau) \cos(\omega\tau + \varphi) d\tau = \\ &= \cos \varphi \int_0^t f(\tau) \cos \omega\tau d\tau - \sin \varphi \int_0^t f(\tau) \sin \omega\tau d\tau = \\ &= A \cos \varphi - B \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\cos \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подставляя эти значения в выражение для  $x$ , получим

$$x_{\max} = \frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{A^2 + B^2} = \Phi_t(\omega)$$

Итак, если подбором фазы добиться максимума (при данной частоте) выходного напряжения схемы рис. 33, то получим непосредственно амплитудный спектр (модуль комплексного спектра).

Вышеописанная схема действует в полном соответствии с математическим определением спектра, выполняя все операции, входящие в это определение; короче говоря, схема рис. 33 выполняет преобразование Фурье. Следовательно, эта схема является идеальным анализатором, обладающим бесконечной разрешающей способностью.

Но теперь нужно заметить, что схема обладает свойствами идеального анализатора лишь поскольку ее составные части идеальным образом выполняют свое назначение, мы предполагали, что перемножитель идеально перемножает, интегратор идеально интегрирует, а генератор дает безукоризненное синусоидальное напряжение. В действительной схеме все эти условия, разумеется, в той или иной мере нарушены.

Мы рассмотрим теперь схему, в которой одно из идеальных звеньев заменено реальным, а именно: вместо идеального интегратора *И* включим в схему рис. 33 простейшую интегрирующую схему в виде *RC*-звена (рис. 34). Положим, для простоты, что анализируемое напряжение чисто синусоидально, и что мы рассматриваем установившийся режим анализатора. Для установившегося режима коэффициент передачи интегрирующей схемы рис. 34 равен

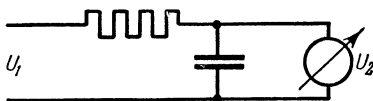


Рис. 34.

$$K = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Напряжение, подаваемое на вход интегрирующей схемы, равно произведению анализируемого напряжения и напряжения генератора (пусть начальные фазы обоих напряжений совпадают):

$$U_1 = \cos \Omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \cos (\omega + \Omega) t + \frac{1}{2} \cos (\omega - \Omega) t.$$

Для комплексных амплитуд напряжения на выходе можем записать

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1 + j(\omega + \Omega) RC}, \quad \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j(\omega - \Omega) RC}.$$

При  $\omega$ , мало отличающейся от  $\Omega$ , первой величиной можно пренебречь, и мы получим

$$|K| \simeq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega - \Omega)^2 \tau^2}}$$

или

$$|K| \simeq \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\Omega \tau}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right)^2 + \frac{1}{(\Omega \tau)^2}}},$$

где

$$\tau = RC$$

— постоянная времени интегрирующей схемы.

Полученное выражение только постоянным множителем  $1/\Omega\tau$  отличается от выражения для коэффициента передачи простого колебательного контура:

$$|K| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} d^2}} \simeq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}}.$$

Таким образом, оказывается, что рассматриваемая нами схема анализатора обладает совершенно такими же свойствами в отношении избирательности, как и обычный резонатор, и, следовательно, к ней применимо все то, что говорилось ранее о разрешающей способности и погрешности анализатора с резонаторами.

Интересно, что в рассматриваемом анализаторе роль затухания играет величина  $1/\Omega\tau$ . Так как для увеличения постоянной времени  $\tau = RC$  нет практических ограничений, то можно получить анализатор с очень высокой разрешающей способностью. С другой стороны, разрешающую способность можно легко и в широких пределах изменять путем изменения  $R$  или  $C$ . Используя это, можно, например, исследовать тонкие детали какого-либо участка спектра.

Техническое выполнение описанной системы возможно в самых различных формах. В качестве поучительного примера приведем предложенное в свое время применение в качестве анализатора обычного ваттметра. В частности, если взять электродинамический прибор, то для использования его в качестве анализатора достаточно подать анализируе-

мое напряжение и напряжение от генератора соответственно на две обмотки прибора (статора и ротора). Вращающий момент пропорционален произведению токов в обмотках; таким образом осуществляется перемножение. Интегрирование выполняется в механической части прибора (за счет баллистических свойств ротора). Если желательно перемножать непосредственно напряжения (а не пропорциональные им токи), то вместо электродинамического ваттметра можно взять квадрантный электрометр. Отсчет в такого рода устройствах берется обычно не по постоянному отклонению

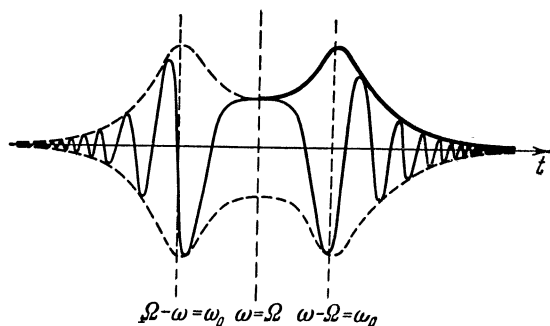


Рис. 35.

(при нулевой разностной частоте), а по амплитуде колебаний подвижной части прибора на низкой частоте  $\omega_0$  ее механического резонанса. Опишем происходящие при этом явления.

Если вспомогательная частота  $\omega$  медленно изменяется, проходя через значение  $\Omega$ , то на прибор действует переменная разностная частота  $|\Omega - \omega|$ , которая сначала убывает до нуля, а затем снова возрастает. При этом подвижная система прибора колеблется, амплитуда колебания имеет два максимума, когда разностная частота сравнивается с собственной частотой подвижной системы. Процесс, происходящий в измерительном приборе при медленном изменении  $\omega$ , показан на рис. 35. Амплитуда сначала мала, затем нарастает до максимума, затем убывает до некоторого постоянного отклонения; затем все происходит в обратном порядке. Огибающая процесса есть не что иное, как

резонансная кривая подвижной системы прибора. С точки зрения основного принципа анализатора мы должны были бы взять отсчет при  $\omega = \Omega$ , когда стрелка остановится. Но практически гораздо удобнее взять отсчет в точках, где подвижная система резонирует.

В заключение нужно дать ответ на естественно возникающий вопрос: существует ли принципиальная разница между анализом при помощи резонаторов и анализом по вышеописанному методу?

Разница, конечно, существует, и имеет принципиальный характер. Это та же разница, какая имеется между фильтрацией и гетеродинированием. Описанный метод есть в сущности метод преобразования частоты, или, в частности, метод синхронного детектирования по отношению к той или иной составляющей спектра. Принципиальный характер различия состоит в том, что фильтрация осуществляется посредством пассивной линейной системы с постоянными параметрами, тогда как рассмотренный гетеродинный анализатор с физико-математической точки зрения сводится к некоторой линейной системе с переменными параметрами.

## § 21. Работа резонатора

Рассматривая действие анализатора с резонаторами, мы считали до сих пор само собою разумеющимся, что, если резонатор обладает частотной избирательностью, то он способен выделить те или иные спектральные составляющие, т. е. произвести анализ. Однако в свете соображений предыдущего параграфа возникает естественный вопрос: действительно ли резонатор способен анализировать, или, иначе, какими свойствами должен обладать резонатор, чтобы наблюдаемая на выходе величина действительно отображала спектр анализируемой функции? Для ответа на этот вопрос мы должны выяснить, при каких условиях величина на выходе резонатора связана со входной величиной посредством преобразования Фурье. Если такая связь существует, то это значит, что резонатор должным образом выполняет свое назначение.

В общем случае отклик резонатора, на вход которого в момент  $t=0$  включено произвольное воздействие  $f(t)$ ,

может быть выражен интегралом Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (21.1)$$

где  $g(t)$  — временная характеристика (импульсная реакция) резонатора. Предположим, что

$$g(t) = \sin \omega_0 t. \quad (21.2)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau = \\ &= \sin \omega_0 t \int_0^t f(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau - \cos \omega_0 t \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau = \\ &= A \sin \omega_0 t - B \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Здесь  $A$  и  $B$  — по-прежнему косинусная и синусная составляющие текущего спектра. Они являются функциями времени, и могут рассматриваться как медленно меняющиеся составляющие амплитуды колебания  $x(t)$ . Огибающая (т. е. зависящая от времени амплитуда) этого колебания равна, очевидно,

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \Phi_t(\omega_0),$$

т. е. текущему амплитудному спектру. Итак, если для анализа применен резонатор с временной характеристикой (21.2), то анализ производится в соответствии с математическим определением спектра, т. е. мы имеем идеальный анализатор. Но временной характеристикой (21.2) обладает контур без потерь, т. е. цепь, составленная из  $L$  и  $C$  ( $R = 0$ ). Поэтому следующий вопрос — это вопрос о том, что дает в качестве анализатора реальный резонатор. Для контура с потерями

$$g(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

и

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(\tau) e^{\alpha(\tau-t)} \cos \omega_0 \tau d\tau = \\ &= \sin \omega_0 t \int_0^t f(\tau) e^{\alpha(\tau-t)} \cos \omega_0 \tau d\tau - \cos \omega_0 t \int_0^t f(\tau) e^{\alpha(\tau-t)} \sin \omega_0 \tau d\tau = \\ &= A_\alpha \sin \omega_0 t - B_\alpha \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

В этом выражении  $A_\alpha$  и  $B_\alpha$  — соответственно косинусная и синусная составляющие текущего спектра, но не функции  $f(\tau)$ , а взвешенной функции

$$f_\alpha(\tau) = e^{\alpha(\tau-t)} f(\tau).$$

Появившаяся здесь скользящая весовая функция — это та самая функция, которой пользуется Фано (см. § 6); вышеприведенные соображения обосновывают, таким образом, предложенные Фано определения.

В более общем случае для узкополосного резонатора произвольного вида временная характеристика может быть представлена в виде

$$g(t) = p(t) \sin \omega_0 t + q(t) \cos \omega_0 t = \operatorname{Re} s(t) e^{j\omega_0 t},$$

где  $\omega_0$  — центральная частота пропускаемой резонатором полосы. В этом случае

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t d\tau f(\tau) \operatorname{Re} s(t-\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} = \\ &= \operatorname{Re} e^{j\omega_0 t} \int_0^t f(\tau) r(\tau-t) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \end{aligned}$$

и интеграл представляет комплексный текущий спектр с весовой функцией

$$r(-t) = s(t) = p(t) - jq(t).$$

Вывод, вытекающий из всего сказанного, заключается в том, что всякий реальный резонатор дает нам не истинный спектр анализируемой функции, а спектр взвешенной функции, причем функция веса зависит от характеристики резонатора. Мы получаем истинный спектр лишь в пределе, когда временная характеристика резонатора приближается к

$$g(t) = \sin \omega_0 t,$$

а весовая функция, следовательно, к единице. На основании этих соображений может быть вычислена погрешность реального анализатора, чем мы, однако, сейчас заниматься не будем (см. § 26).

Из изложенного ясно, что метрологическая характеристика анализатора должна была бы содержать данные о характеристике резонатора, или, по меньшей мере, о постоянной времени. В противном случае нельзя установить, что именно измеряет анализатор. К сожалению, в большинстве случаев указывается лишь ширина полосы пропускания резонатора, что недостаточно.

В качестве иллюстрации упомянем об интересном применении взвешенных спектров, рассматриваемых в качестве мгновенных, а именно о так называемой «видимой» речи [28]. Суть дела заключается в том, что мгновенный спектр (взвешенный при помощи полосовых фильтров) изображается непрерывно на движущемся экране. Так как мгновенный спектр есть функция двух переменных — частоты и времени — то спектр изображается на плоскости экрана в прямоугольных координатах; по оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — частота. Что же касается самой функции этих двух переменных, т. е. спектральной плотности, то она отображается яркостью свечения экрана в данной точке (а при записи — степенью почернения специальной бумаги, как в фототелеграфе). Речь анализируется в диапазоне примерно до 4 кГц, разделенном на полосы по 300 Гц каждая. Получаемая картина дает достаточно полное отображение звуков речи; можно научиться читать «видимую речь» непосредственно с экрана. Первоначально устройство «видимой речи» предназначалось для глухих — чтобы заменить слуховое восприятие зрительным — и, действительно, с успехом применялось для этой цели. Однако такого рода техника может быть использована также для исправления дефектов речи, для фонетических исследований, а также для построения автоматов, фиксирующих звуки речи или выполняющих поданные голосом команды, и т. п.

## § 22. Действительные условия работы анализатора

Выводы § 19 требуют серьезных коррективов с точки зрения действительных условий работы анализатора, которые мы и постараемся сейчас разобрать.

В самом начале отмечалось, что периодическая функция вида

$$f(t) = f(t + nT)$$



есть математическая абстракция. Но если бы даже существовало явление, отвечающее этому определению, то оно не существовало бы для анализатора. Ведь анализатор в действительности включается на конечное время, и, следовательно, анализируемое явление для анализатора представляется отрезком на протяжении от момента включения до момента выключения.

Анализатор может дать истинный спектр явления в том единственном случае, когда анализируемое явление полностью укладывается в этот отрезок времени, т. е. когда анализируется заведомо непериодическое явление типа импульса, равного нулю вне конечного промежутка времени, и при условии, что этот промежуток времени, т. е. длительность импульса, меньше времени включения анализатора. При анализе же длительных явлений, периодических или непериодических, анализатор принципиально не в состоянии дать истинный спектр этих явлений. По определению спектр выражается интегралом

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (22.1)$$

Если анализатор выполняет требуемое умножение и интегрирование, то он во всяком случае не может произвести интегрирование в бесконечных пределах. Анализатор «не знает», что происходило до его включения, и тем более «не знает», что будет происходить после его выключения. Он может лишь произвести интегрирование на промежутке  $t_1 < t < t_2$ , где  $t_1$  и  $t_2$  — соответственно моменты включения и выключения.

В лучшем случае можно ожидать от анализатора, что он, действуя непрерывно, выполняет интегрирование на промежутке от момента включения до текущего момента. Если принять момент включения за начало отсчета времени, то анализатор может измерить величину

$$S_t = \int_0^t f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (22.2)$$

т. е. текущий спектр функции  $f(t)$  (см. § 5). Чем больше время включения, тем больше текущий спектр приближается

к истинному спектру длительного явления. Если время включения очень мало, то каков бы ни был характер явления, анализатор получает лишь короткий импульс, сплошной спектр которого имеет однородную плотность вплоть до частот, определяемых временем включения, и тем более высоких, чем время включения меньше, т. е. чем импульс короче.

Эти соображения легко проверить экспериментально. Синусоидальное колебание воспринимается слухом как чистый музыкальный тон. Если включать этот тон на все более короткие промежутки времени, то ясное ощущение высоты тона будет постепенно утрачиваться, пока, наконец, достаточно кратковременное включение не будет восприниматься просто как щелчок — это и соответствует короткому импульсу с широким сплошным спектром.

Из всего сказанного следует, что результат анализа принципиально зависит от времени. Учесть эту зависимость можно, опираясь на две различные (но приводящие, конечно, к одним и тем же выводам) точки зрения: временную и спектральную (частотную).

Приведем подробное рассуждение о процессе анализа с обеих точек зрения.

**а. Временная точка зрения.** Мы исходили в предыдущем при определении разрешающей способности резонатора из его резонансной кривой (частотной характеристики). Но резонансная кривая представляет поведение резонатора в установившемся режиме. Установившимся режимом мы называем режим, достигаемый по окончании переходных явлений, возникающих при включении, т. е. теоретически через бесконечно большое время. Практически переходными явлениями можно пренебречь уже по прошествии конечного времени. Однако время установления тем больше, чем больше избирательность резонатора, т. е. чем меньше его затухание. А в применении к анализу нас интересуют именно резонаторы с высокой избирательностью. Стало быть, исследуя работу анализатора, мы не можем, вообще говоря, игнорировать переходные явления. Составляя и решая соответствующие дифференциальные уравнения, мы получим амплитуду колебаний резонатора как функцию не только частоты (как в установившемся режиме), но и времени. Следовательно, резонансная кривая резонатора будет

различной для различных моментов времени; ее уместно назвать динамической резонансной кривой в противопоставление обычной резонансной кривой, которую мы будем называть статической и которая является предельной формой динамической резонансной кривой при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, все ранее выведенные соотношения сохраняют смысл лишь в качестве предельных. Истинная разрешающая способность анализатора определяется его динамической резонансной кривой. Ее максимум тем тупее, чем меньше время включения; следовательно, анализ выполняется тем точнее, чем больше время анализа.

**б. Спектральная точка зрения.** Мы исходили в предыдущем при определении разрешающей способности анализатора из представления, что на анализатор воздействует периодическое, в частности, синусоидальное колебание. В действительности этого нет: анализатор включается лишь на конечное время. Следовательно, для каждого данного момента воздействие на резонатор может быть представлено непериодическим явлением, а именно отрезком синусоиды, длящимся от момента включения до текущего момента. Анализатор будет анализировать это явление с присущей ему статической разрешающей способностью. Но так как спектр самого воздействия с течением времени изменяется («текущий спектр»), то будет изменяться и показание анализатора. В частности, при анализе синусоиды в самые первые моменты, когда периодический характер явления еще не определился и текущий спектр практически однороден, анализатор даст почти одинаковые показания на всех частотах. Лишь в пределе, когда сплошной текущий спектр выродится в дискретную спектральную линию, анализатор даст спектр, определяемый на основе стационарных представлений, изложенных выше. Эти представления сохраняют, таким образом, силу при выводе предельных соотношений. В действительности же показание анализатора оказывается тем более размытым, т. е. разрешающая способность его тем меньше, чем меньше время включения.

Обе точки зрения — временная и спектральная — теоретически равноценны. В дальнейшем использована временная точка зрения и вот по каким методическим соображениям:

1. Временная точка зрения представляется легче усвояемой и менее формальной.

2. Стоя на временной точке зрения, мы можем характеризовать анализатор как таковой независимо от режима его включения и характера анализируемого явления \*).

3. Некоторые вопросы вообще затруднительно (хотя и возможно в принципе) излагать на спектральном языке. В частности, здесь имеется в виду вопрос о последовательном анализе. Все предыдущее относилось к одновременному анализу, когда речь идет об отклике на то или иное воздействие резонатора с постоянной настройкой. Но если обратиться к анализатору, содержащему резонатор с переменной настройкой, то мы имеем дело с явлениями более сложными, и оказывается более удобным говорить о них на временном языке.

И в случае последовательного анализа очевидно, что свойства резонатора могут описываться статической резонансной кривой лишь при бесконечно медленной перестройке. В действительности анализ происходит с конечной скоростью. Легко понять, что чем быстрее настройка резонатора проходит через частоту данной спектральной составляющей, тем в меньшей степени эта составляющая успеет раскачать резонатор. То же относится и к варианту с применением вспомогательной частоты, когда настройка резонатора неизменна, а спектр исследуемого колебания передвигается с той или иной скоростью по шкале частот.

В случае последовательного анализа свойства анализатора также могут с удобством описываться посредством динамической резонансной кривой. Теория и опыт показывают, что ее максимум тупее, чем у статической резонансной кривой, причем тем тупее, чем больше скорость относительного движения по шкале частот настройки резонатора и исследуемого спектра, т. е. чем больше скорость анализа. Таким образом, и в этом случае разрешающая способность тем меньше, чем больше скорость анализа.

---

\*) Речь идет о том, что при анализе периодического явления мы можем учитывать конечность времени включения анализатора двумя способами: 1) характеризовать явления обычным спектром, а анализатор — динамической частотной характеристикой; 2) характеризовать явление текущим спектром, а анализатор — обычной статической частотной характеристикой. Первый способ, не затрагивающий описания анализируемого явления, но зато охватывающий посредством динамической характеристики как свойства анализатора, так и условия его работы, представляется более естественным и удобным.

Из всего сказанного следует, что понятие разрешающей способности анализатора лишено практического смысла, если оно не связано так или иначе со скоростью (или продолжительностью) анализа. Очевидно, что для полной характеристики свойств анализатора мы должны ввести понятие динамической разрешающей способности анализатора, зависящей как от параметров анализатора, так и от скорости анализа. Последующие параграфы посвящены подробному исследованию этого вопроса, причем одновременный и последовательный анализы рассмотрены порознь, так как постановка вопроса в этих двух случаях довольно существенно различается.

### **§ 23. Связь между разрешающей способностью анализатора и временем анализа**

При анализе периодических явлений имеет силу очень общее положение, гласящее, что чем больше разрешающая способность анализатора, тем больше необходимое для анализа время.

Это положение легко уяснить себе на примере резонатора. С одной стороны, разрешающая способность резонатора тем больше, чем меньше затухание, т. е. чем острее резонансная кривая резонатора. С другой же стороны, чем меньше затухание резонатора, тем медленнее затухают собственные колебания, возникающие при включении, и тем дольше, следовательно, нужно выжидать, пока режим резонатора можно будет считать уже установившимся. [Очевидно, что отсчет по резонатору при анализе периодического явления следует брать при установившемся режиме. В противном случае нельзя пользоваться при определении разрешающей способности резонатора его статической резонансной кривой (об этом подробно говорилось в § 22).]

Пример с резонатором показывает, что высказанное вначале положение имеет в виду влияние переходных (неустановившихся) явлений в анализаторе, и в приведенной формулировке относится только к анализу периодических явлений.

Это положение имеет, как сказано, очень общий характер. Можно привести еще один пример, в котором справедливость этого положения на первый взгляд не очевидна,

Речь идет о диффракционной решетке. Разрешающая способность диффракционной решетки как анализатора зависит, как известно, не от периода решетки, а от общего ее размера (от числа штрихов). Но при увеличении размера решетки возрастают пути пробега волн, а следовательно, и соответствующие времена. Понятно, что в оптике это не имеет никакого практического значения, но нас интересует принципиальная сторона вопроса.

Хотя суть дела в общем ясна, мы не можем, конечно, удовлетвориться пояснением положения о связи между разрешающей способностью и временем анализа на отдельных, хотя бы и убедительных примерах. Задача наша состоит теперь в том, чтобы доказать это положение в общем виде.

Представим себе избирательный элемент анализатора в виде четырехполюсника, на вход которого подается величина  $x$ , на выходе получается величина  $y$ , причем избирательность проявляется в том, что отношение

$$K = \frac{y}{x},$$

т. е. коэффициент передачи зависит определенным образом от частоты, если  $x$  и  $y$  — колебательные величины.

С другой стороны, если возбудить четырехполюсник толчком на входе, то на выходе возникает переходное явление той или иной длительности. Нам нужно найти связь между шириной частотной характеристики  $[K]$  и длительностью переходного явления. Первая величина определяет разрешающую способность, вторая — необходимое для анализа время. Интересующая нас зависимость была уже установлена ранее, в § 12. Именно, было показано, что

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt,$$

т. е. что комплексный коэффициент передачи  $K(\omega)$  есть не что иное, как спектр функции  $g(t)$ , которая представляет собой явление на выходе при подаче на вход возбуждения вида  $\delta(t)$ , и которую мы называли временной характеристикой.

Заметим попутно, что нам удобнее пользоваться для определения длительности переходных явлений именно

функцией  $g(t) = h'(t)$ , а не переходной функцией  $h(t)$  [соответствующей возбуждению вида  $\sigma(t)$ ], так как последняя функция часто может стремиться с возрастанием  $t$  к постоянному пределу.

Итак, дело сводится теперь к тому, чтобы установить связь между длительностью  $\Delta t$  функции  $g(t)$  и шириной  $\Delta f$  ее спектра  $[K(\omega)]$ . Эта задача рассмотрена подробно в § 11, в котором установлено, что

$$\Delta f \Delta t \geq \mu.$$

Применительно к рассматриваемому вопросу это соотношение удобно записать в виде

$$\Delta f \Delta t = A \quad (23.1)$$

и истолковать следующим образом: для *данной* системы необходимое время анализа обратно пропорционально разрешающей способности. Это положение, таким образом, доказано. Остается еще указать на существенную деталь — как следует понимать выражение «данная система».

Соотношение (23.1) не представляло бы для нас никакого интереса, если бы оно не допускало никаких изменений свойств системы. Вопрос ставится так: если дана функция

$$f(a, b, c, \dots, t),$$

где  $a, b, c, \dots$  — параметры, и если, естественно, спектр этой функции будет зависеть от тех же параметров, т. е.

$$\Phi = \Phi(a, b, c, \dots, \omega),$$

то можно ли утверждать, что постоянная  $A$  в выражении (23.1) сохранит свое значение при любых изменениях параметров? В таком общем виде это утверждение было бы неверным. Но заметим, что мы имеем дело, в частности, с такими функциями, в выражения которых параметры входят в качестве сомножителей при независимой переменной. Легко показать, что если умножить аргумент на постоянную величину, то будем иметь

$$f(\alpha t) = f(t_1), \quad \Phi\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \Phi(\omega_1),$$

и следовательно, в этом случае

$$\Delta f \Delta t = \Delta f_1 \Delta t_1 = A,$$

т. е. от изменения параметров произведение  $\Delta f \Delta t$  не меняет своей величины.

Следовательно, под данной системой в вышеприведенной формулировке следует понимать систему, отвечающую данной схеме или, говоря более общим языком, описываемую данного вида дифференциальным уравнением, но без закрепления частных значений коэффициентов этого уравнения.

Так, например, если уменьшить затухание резонатора, то время анализа возрастет во столько же раз, во сколько увеличится разрешающая способность.

Теперь заметим, что к соотношению (23.1) можно подойти и с другой точки зрения. Если  $A$  есть величина постоянная для данной системы, то как выбрать систему для получения наименьшего  $A$ ? Ведь у нас нет никаких оснований для того, чтобы считать обычный резонатор наилучшим видом избирательного элемента для целей анализа. Нельзя ли построить систему, обладающую лучшими свойствами, чем обычный резонатор, например обладающую меньшим временем установления при той же разрешающей способности или большей разрешающей способностью при том же времени установления?

Из сказанного в § 12 по поводу колокольного импульса можно заключить, что этот вид импульса обладает особо выгодными свойствами в смысле малости произведения  $\Delta f \Delta t$ . Для того чтобы можно было использовать эти свойства для целей анализа, нужно подобрать такую функцию, которая, сохраняя колоколообразный характер, имела бы максимум на любой заданной частоте  $\omega_0$ . Легко сообразить, что если спектр обычного колокольного импульса

$$f(t) = e^{-\frac{\pi}{2} t^2}$$

имеет вид

$$\Phi(\omega) = \sqrt{2} e^{-\frac{\omega^2}{2\pi}}.$$



то требуемым свойством будет обладать функция

$$\Phi_1(\omega) = \sqrt{2} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\pi}}.$$

Такому спектру на основании теоремы (4.6) отвечает функция времени

$$f_1(t) = e^{j\omega t} e^{-\frac{\pi}{2} t^2}.$$

Это колебание с колоколообразной огибающей показано на рис. 36.

Подобного рода импульс привлекает к себе внимание в теории связи, где он рассматривается как наивыгоднейший элементарный сигнал. Для нас эта функция имеет другой смысл: она представляет собой временную характеристику некоторой системы, которую мы предполагаем применить в качестве избирательного элемента анализатора. Иначе говоря, эта функция представляет явление на выходе системы при возбуждении на входе вида  $\delta(t)$ .

Можно высказать некоторые общие соображения о свойствах такой системы. Рассматривая рис. 36, можно заметить,

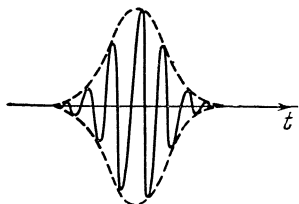


Рис. 36.

что искомая система обладает тем существенным свойством, что колебания в ней возникают не сразу, в момент толчка, а постепенно нарастают до максимума, а затем уже начинают убывать. Следовательно, первым приближением к искомой системе могла бы послужить комбинация двух слабо связанных резонаторов, из которых первый воспри-

нимает толчок, а затем постепенно передает энергию второму резонатору, на выходе которого можно таким образом наблюдать картину, до известной степени сходную с рис. 36. Можно полагать, что для такой комбинации произведение  $\Delta f \Delta t$  окажется меньшим, чем для обычного резонатора. Можно также рассчитывать получить лучшее приближение к требуемым свойствам путем последовательного усложнения системы. И действительно, требуемой характеристикой

обладает система из достаточно большого числа слабо связанных контуров, осуществимая практически в виде многокаскадного резонансного усилителя.

## § 24. Динамическая разрешающая способность резонатора

Пусть резонатор с неизменной настройкой включается при  $t=0$  под синусоидальное воздействие с частотой  $\omega$ . Найдем динамическую характеристику резонатора. Положим, что в качестве резонатора взята электрическая цепь из  $R$ ,  $L$  и  $C$  в последовательном включении. Уравнение резонатора имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = \sin \omega t \quad (t > 0)$$

или, дифференцируя по  $t$  и полагая  $L=1$ ,

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \omega \cos \omega t \quad (t > 0). \quad (24.1)$$

Нам нужно не полное решение этого уравнения, а лишь значение амплитуды, зависящей от времени, т. е. выражение для огибающей. Воспользуемся для ее нахождения методом, состоящим в том, что мы ищем решение в виде

$$i = a(t) \sin \omega t + b(t) \cos \omega t, \quad (24.2)$$

где  $a$  и  $b$  — медленные функции времени, т. е. функции, медленно изменяющиеся по сравнению с  $\sin \omega t$  или  $\cos \omega t$ . Медленность определяется тем, что производные этих функций являются малыми величинами первого порядка по сравнению с производной  $\sin \omega t$  или  $\cos \omega t$ , т. е. по сравнению с  $\omega$ .

Будем, кроме того, полагать, что и  $\alpha$  представляет собой малую величину первого порядка, т. е. что мы имеем дело с цепью высокой избирательности. Дифференцируя (24.2), подставляя в (24.1) и приравнявая порознь коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ , получим после отбрасывания членов второго порядка малости ( $\ddot{a}$ ,  $\ddot{b}$ ,  $\alpha \dot{a}$ ,  $\alpha \dot{b}$ ) так называемые укороченные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) a - 2\omega (\dot{b} + \alpha b) &= 0, \\ (\omega_0^2 - \omega^2) b + 2\omega (\dot{a} + \alpha a) &= \omega. \end{aligned} \right\} \quad (24.3)$$

Эти уравнения имеют уже первый порядок, в чем и состоит преимущество метода. Для решения уравнений (24.3) воспользуемся операционным методом. Запишем операционное изображение этих уравнений:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \bar{a} - 2\omega(p + \alpha) \bar{b} = 0,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \bar{b} + 2\omega(p + \alpha) \bar{a} = \omega,$$

откуда

$$\bar{a} = \frac{1}{2} \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \bar{b} = \frac{1}{2} \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2},$$

где

$$\beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega}.$$

Применяя общеизвестные формулы операционного исчисления, находим

$$a(t) = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cos \beta t - \frac{\beta}{\alpha} \sin \beta t \right) \right],$$

$$b(t) = \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right].$$

Нас интересует огибающая, выражаемая через  $a$  и  $b$  следующим образом:

$$c(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}.$$

Выполняя вычисления, находим

$$c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 - e^{-\alpha t} \cos \beta t)^2 + (e^{-\alpha t} \sin \beta t)^2}{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (24.4)$$

или

$$c = \sqrt{\frac{e^{-\alpha t} (\operatorname{ch} \alpha t - \cos \beta t)}{2(\alpha^2 + \beta^2)}}.$$

Эта формула и представляет собой искомое выражение для динамической характеристики резонатора. Величина  $c$  зависит, как мы видим, от параметров резонатора, т. е. от  $\alpha$  и  $\omega_0$ , а также от двух независимых переменных  $\omega$  и  $t$ . Легко убедиться, что при  $t \rightarrow \infty$  выражение (24.4) стремится в пределе к

$$c \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = y. \quad (24.5)$$

Это и есть выражение для статической характеристики, т. е. обычной резонансной кривой.

Мы получили выражение динамической характеристики резонатора, опираясь на временную точку зрения, т. е. рассматривая устанавливающийся режим резонатора. Тот же вопрос мог бы быть изложен на чисто спектральном языке следующим образом.

Будем решать задачу о поведении резонатора как стационарную, т. е. положим, что приложенное напряжение представлено суммой синусоидальных напряжений. Воспользуемся процедурой, описанной в § 13, т. е. применим к уравнению резонатора

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E(t)$$

преобразование Фурье. Мы получим

$$\left( j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} \right) S_i = Z S_i = S_E,$$

где  $S_E$  и  $S_i$  — соответственно, спектры напряжения и тока. Далее,

$$i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_i e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_E}{Z} e^{j\omega t} d\omega.$$

Но в рассматриваемом случае спектральная плотность является функцией не только частоты, но и времени. В самом деле, приложенное напряжение  $E(t)$  предполагается синусоидальным, но включается на анализатор в момент  $t=0$ . Следовательно, для каждого данного момента времени  $t$  напряжение, воздействующее на анализатор, представляется следующей функцией:

$$E = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ \sin \Omega u & \text{при } 0 < u < t \end{cases}$$

и спектр этой функции в данный момент, т. е. текущий спектр, выражается формулой

$$\begin{aligned} S_E &= \int_0^t \sin \Omega u e^{-j\omega u} du = \\ &= \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \left[ 1 - e^{-j\omega t} \left( \cos \Omega t + j \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega t \right) \right], \end{aligned}$$

где  $\omega$  — текущая частота спектра,  $t$  — текущее время,  $u$  — переменная интегрирования. Таким образом, получаем для тока

$$i = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} - \left( \cos \Omega t + j \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega t \right)}{(\Omega^2 - \omega^2) \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]} d\omega.$$

Подынтегральная функция имеет два простых сопряженных полюса, лежащих над вещественной осью:

$$a = \pm \omega_1 + j\alpha.$$

(Точки  $a = \pm \Omega$  не являются полюсами, в чем легко убедиться, раскрыв получающуюся неопределенность.) Вычеты подынтегральной функции равны

$$\frac{\omega_1 \pm j\alpha}{2j\omega_1 L} \frac{e^{j(\pm \omega_1 + j\alpha)t} - \left( \cos \Omega t + j \frac{\pm \omega_1 + j\alpha}{\Omega} \sin \Omega t \right)}{\Omega^2 - (\pm \omega_1 + j\alpha)^2}.$$

Выполнив вычисление, находим (положив  $L = 1$ )

$$i = \frac{\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2} \{ e^{-\alpha t} [ (\Omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega_1 t - \\ - \frac{\alpha}{\omega_1} (\Omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega_1 t ] - (\Omega^2 - \omega_0^2) \cos \Omega t + 2\alpha\Omega \sin \Omega t \}.$$

Эта формула представляет собой точное решение задачи, совпадающее, разумеется, с решением, полученным любым другим способом. Вычислив огибающую, найдем

$$c = \Omega \sqrt{\frac{1 + \left( \frac{\omega_0}{\omega_1} \right)^2 e^{-2\alpha t} - 2 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\alpha t} \cos (\Omega - \omega_1) t}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}}.$$

Это выражение несколько отличается от (24.4) вследствие того, что формула (24.4) не является точной; она получена из укороченных уравнений (24.3). Интересно заметить, что в точном решении аргумент косинуса имеет более простой вид.

Перейдем теперь к исследованию динамической характеристики. Для того, чтобы можно было составить себе ясное

представление о величине  $c$  как функции двух переменных  $\omega$  и  $t$ , на рис. 37 изображен ее рельеф.

Кривые, лежащие в плоскостях, параллельных  $c0 \frac{\omega}{\omega_0}$ , представляют собой динамические резонансные кривые. Статическая резонансная кривая также показана на рисунке как предел, к которому стремятся динамические кривые.

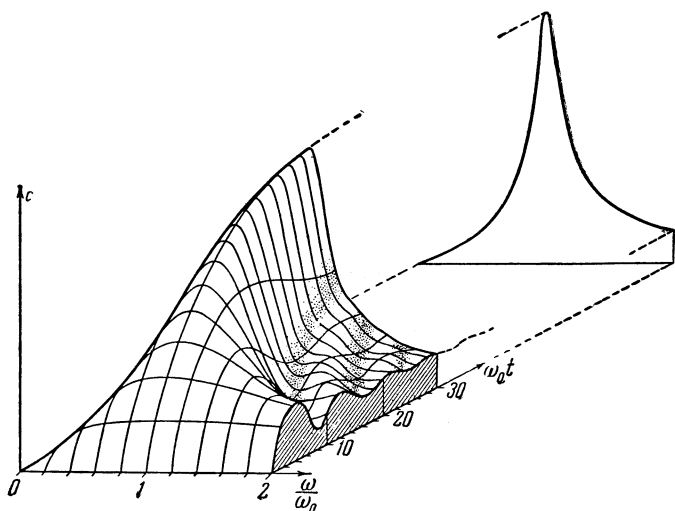


Рис. 37.

Кривые, лежащие в плоскостях, параллельных  $c0\omega_0 t$ , представляют собой кривые установления амплитуды колебаний в резонаторе при различных расстройках. Эти кривые имеют колебательный характер вследствие биений между вынуждающей частотой и частотой собственных колебаний резонатора, возбуждаемых в момент включения. Частота биений, очевидно, тем больше, чем больше расстройка. При  $\omega = \omega_0$ , как известно, процесс установления совершается по экспоненциальному закону.

Рассматривая рис. 37, мы видим, что острота резонансной кривой резонатора зависит от времени включения резонатора; острота резонанса, а следовательно, и разрешающая способность тем больше, чем больше время включения. Так

возникает понятие о динамической разрешающей способности анализатора. Динамическая разрешающая способность в отличие от статической зависит не только от параметров резонатора, но и от времени.

Выведем некоторые соотношения. Положим, что мы условились выражать остроту резонанса шириной  $\Delta\omega$  резонансной кривой на высоте, равной  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  максимальной ординаты. Пользуясь (24.4), заметим, что максимум амплитуды получается при  $\beta = 0$ , так что

$$c_{\max} = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{2\alpha}.$$

Составляя выражение

$$\frac{c^2}{c_{\max}^2} = \frac{1}{2},$$

получим уравнение

$$1 - \cos \beta t - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) (\operatorname{ch} \alpha t - 1) = 0.$$

При  $t \rightarrow 0$  это уравнение принимает вид

$$1 - \cos \beta t - \frac{1}{4} \beta^2 t^2 = 0.$$

Решая эти уравнения методом ложных корней, получаем для  $\alpha = 0,1$  решение, приведенное ниже в виде таблицы

$t$	0	10	20	30
$\beta t$	2,78	2,87	3,13	3,57

Теперь нам нужно перейти от  $\beta$  к  $\omega$ .

Предполагая, как обычно делается в радиотехнике, расстройку малой и резонансную кривую симметричной \*), по-

---

\*) Указанные предположения не обязательны. Можно получить тот же результат более общим путем. У нас обозначено

$$\beta = \frac{|\omega_0^2 - \omega^2|}{2\omega},$$

лучим:

$$\beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} = \frac{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)}{2\omega} \approx \omega_0 - \omega = \frac{\Delta\omega}{2}.$$

т. е.

$$2\beta \approx \Delta\omega.$$

Теперь мы можем составить нижеследующую таблицу:

$t$	0	10	20	30	$\infty$
$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$	$\infty$	0,575	0,313	0,238	0,200
$\Delta\omega \cdot t$	5,56	5,75	6,26	7,14	$\infty$

Первая строка (рис. 38, а) дает относительную ширину резонансной кривой и характеризует, таким образом, динамическую разрешающую способность резонатора. С течением времени  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  стремится к постоянному пределу  $d$  — эта величина выражает относительную ширину статической резонансной кривой.

$$\frac{\beta}{\omega_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

Составляя и решая два квадратных уравнения относительно  $\varepsilon = \frac{\omega}{\omega_0}$ , мы получаем, сохраняя лишь имеющие смысл корни,

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 + 1} - \frac{\beta}{\omega_0},$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 + 1} + \frac{\beta}{\omega_0}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\beta}{\omega_0},$$

откуда по-прежнему

$$\Delta\omega = 2\beta.$$

При этом выводе мы не предполагали ни малости расстройки ни симметрии резонансной кривой.



Вторая строка (рис. 38, б) дает произведение  $\Delta\omega \cdot t$ . При малых  $t$  это есть постоянная величина и притом, что весьма замечательно, не зависящая от затухания резонатора. С течением времени острота резонансной кривой стремится к постоянному пределу, а время неограниченно нарастает. Следовательно, кривая зависимости  $\Delta\omega \cdot t$  от  $t$  имеет асимптотой прямую, проходящую через начало координат. Наклон этой прямой равен, очевидно,  $d$ .

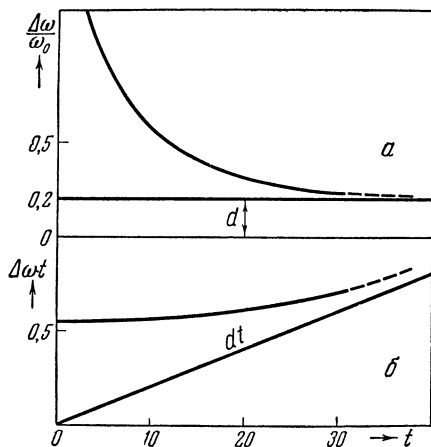


Рис. 38.

Для уяснения понятия динамической разрешающей способности анализатора на рис. 39 представлена картина развития показания анализатора с течением времени \*). Предполагается, что анализатор представляет собой набор резонаторов с одинаковым затуханием и с равноотстоящими резонансными частотами. На анализатор подается при  $t = 0$  два синусоидальных колебания. Как видно из рисунка, в начальной стадии явления анализатор не разделяет этих колебаний. Лишь по прошествии некоторого времени начинает

\*) Рис. 39 построен по тем же данным, что и рис. 37. Однако детали опущены и весь рельеф несколько сглажен, так что рисунок воспроизводит явление лишь в общих чертах.

сформировываться седловина, постепенно углубляющаяся. В пределе получается установившееся показание анализа-

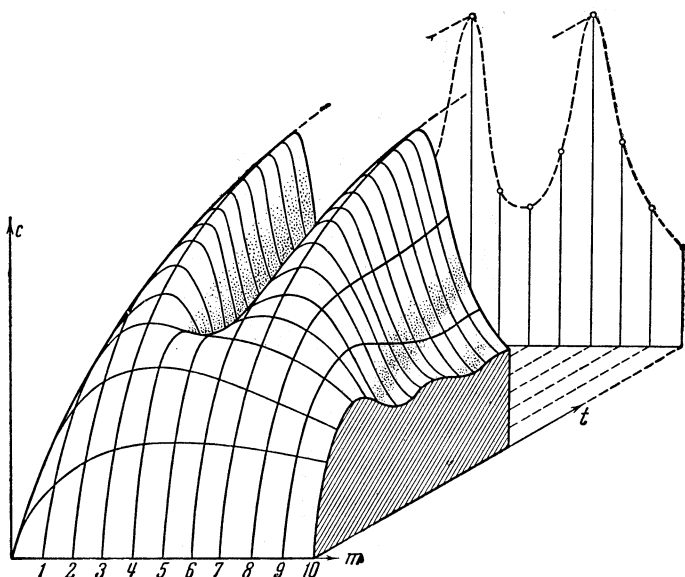


Рис. 39.

тора, огибающая которого имеет вид двугорбой кривой (см. § 19).

### § 25. Динамическая характеристика резонатора при воздействии изменяющейся частоты

В предыдущем параграфе был рассмотрен вопрос о динамической разрешающей способности резонатора в системе одновременного анализа.

Теперь мы разберем соотношения при последовательном анализе, т. е. в случае, когда изменяется возбуждающая резонатор частота.

При воздействии на резонатор изменяющейся во времени частоты наблюдаются резонансные явления. Однако, если изменение частоты происходит достаточно быстро,

то наиболее интенсивные колебания происходят не в тот момент, когда возбуждающая частота совпадает с резонансной, а несколько позже, так как резонатор не успевает раскачаться; по этой же причине и наибольшая амплитуда колебаний оказывается меньше, чем при резонансе в установившемся режиме. Если построить график зависимости амплитуды колебаний от мгновенной частоты, то получится динамическая резонансная кривая. Эта кривая при быстром изменении частоты может существенно отличаться

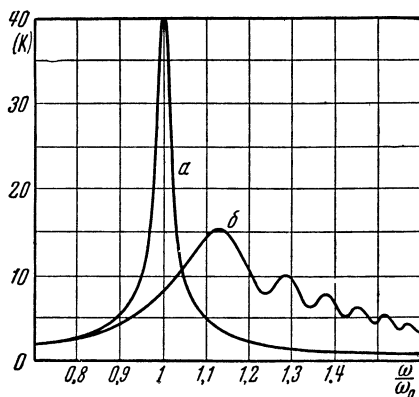


Рис. 40.

от статической резонансной кривой, а именно: 1) положение максимума смещается по шкале частот (что соответствует смещению по шкале времен в сторону запаздывания); 2) высота максимума убывает; 3) кривая становится асимметричной — левый скат делается более пологим; 4) полоса пропускания возрастает (т. е. разрешающая способность убывает); 5) явление осложняется еще убывающими колебаниями амплитуды, обусловленными биениями между вынужденными колебаниями и собственными колебаниями, возникшими при прохождении через резонанс. Все эти особенности видны на рис. 40, на котором представлены статическая (a) и динамическая (b) резонансные кривые.

Теория явления была предметом многочисленных исследований [4, 7, 19, 23, 26]. Нижеследующее изложение ос-

новывается на работах Турбовича [15, 16], дающих достаточно общий подход к проблеме, и в то же время позволяющих получить ответ на вопросы, вытекающие из потребностей практики.

Пусть частота изменяется со временем по линейному закону

$$\omega = \omega_1 + \lambda t. \quad (t > 0)$$

Напряжения, действующее на резонатор, можно записать в комплексной форме

$$U_1 = e^{j\vartheta(t)},$$

где

$$\vartheta(t) = \int_0^t \omega dt = \omega_1 t + \frac{1}{2} \lambda t^2.$$

Выходное напряжение представим интегралом Дюамеля

$$U_2 = \int_0^t g(\tau) U_1(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) e^{j\vartheta(t-\tau)} d\tau,$$

где  $g(\tau)$  — импульсная реакция резонатора. Подставляя значение  $\vartheta$ , находим

$$U_2 = e^{j(\omega_1 t + \frac{1}{2} \lambda t^2)} \int_0^t g(\tau) e^{-j(\omega_1 \tau + \lambda t \tau - \frac{1}{2} \lambda \tau^2)} d\tau.$$

Но

$$e^{j(\omega_1 t + \frac{1}{2} \lambda t^2)} = U_1; \quad \omega_1 + \lambda t = \omega,$$

и, таким образом,

$$U_2 = U_1 \int_0^t g(\tau) e^{-j(\omega \tau - \frac{1}{2} \lambda \tau^2)} d\tau.$$

Динамический коэффициент передачи определим как отношение комплексных напряжений  $U_2$  и  $U_1$ :

$$K_a = \frac{U_2}{U_1} = \int_0^t g(\tau) e^{-j\omega \tau} e^{j\frac{1}{2} \lambda \tau^2} d\tau. \quad (25.1)$$

Это — точная формула, имеющая достаточно универсальный характер, так как она годится для любого резонатора.

Перейдем теперь к приближениям. Прежде всего заметим, что  $g(t)$  есть функция, содержащая экспоненциально убывающие множители. Поэтому, с незначительной погрешностью (которая оценивается ниже) можно заменить верхний предел на бесконечность:

$$K_d \simeq \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} e^{j\frac{1}{2}\lambda\tau^2} d\tau. \quad (25.2)$$

При  $\lambda \rightarrow 0$ , т. е. при переходе к статическому режиму, получим известное выражение для статического коэффициента передачи, как преобразования Фурье импульсной реакции

$$K = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (25.3)$$

Таким образом, разность между динамическими коэффициентами передачи равна

$$\Delta K = K_d - K = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} \left( e^{j\frac{1}{2}\lambda\tau^2} - 1 \right) d\tau. \quad (25.4)$$

Далее отметим, что нас интересует случай, когда динамическая резонансная кривая мало отличается от статической, так как только при этом условии погрешность анализатора, рассчитанного по статическим параметрам, будет мала. Полагая аргумент  $\lambda\tau^2$  малым для всех значений  $\tau$ , для которых убывающая функция  $g(\tau)$  имеет еще заметную величину, можем разложить выражение в круглых скобках под знаком интеграла в (25.4) в степенной ряд и ограничиться для первого приближения всего двумя членами разложения. Это даст

$$\Delta K \simeq \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} \left( j\frac{1}{2}\lambda\tau^2 - \frac{1}{8}\lambda^2\tau^4 \right) d\tau.$$

Теперь заметим, что появление множителей  $\tau^n$  можно представить как результат  $n$ -кратного дифференцирования по параметру  $\omega$ .

Следовательно,

$$\Delta K \simeq -j \frac{1}{2} \lambda \frac{d^2}{d\omega^2} \int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau - \frac{1}{8} \lambda^2 \frac{d^4}{d\omega^4} \int_0^\infty g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

то есть

$$\Delta K \simeq -j \frac{1}{2} \lambda K'' - \frac{1}{8} \lambda^2 K^{IV}.$$

Итак, для динамического коэффициента передачи имеем

$$K_d = K + \Delta K = K - j \frac{1}{2} \lambda K'' - \frac{1}{8} \lambda^2 K^{IV}. \quad (25.5)$$

Полагая

$$K = A + jB, \quad C = |K|^2 = A^2 + B^2,$$

можем составить общее выражение для квадрата модуля динамического коэффициента передачи

$$C_d = |K_d|^2 = C + \lambda (AB'' - BA'') + \\ + \frac{1}{4} \lambda^2 [(A'')^2 + (B'')^2 - AA^{IV} - BB^{IV}]. \quad (25.6)$$

Приближенные формулы (25.5) и (25.6) имеют общий характер. В дальнейшем мы будем рассматривать только простейший резонатор по схеме рис. 41, для которого

$$K = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{\omega_0} d} \simeq \frac{1}{-\varepsilon + jd} = \frac{1}{jd} \frac{1}{1 + jx},$$

где

$$x = \frac{\varepsilon}{d} = \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0 d}$$

— обобщенная расстройка. С точностью до постоянного множителя

$$K = \frac{1}{1 + jx} \quad (25.7)$$

и этим выражением мы и воспользуемся в дальнейшем.

Поставим задачу дальнейшего исследования. Имея в виду практические вопросы расчета и построения анализаторов (а также характеристографов и других приборов, использующих

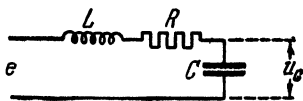


Рис. 41.

модулированное по частоте испытательное напряжение), мы должны, очевидно, выяснить, как зависят те или иные параметры, определяющие резонансную кривую, от скорости изменения частоты. В частности, нас интересует:

1) смещение максимума —  $s$ , 2) уменьшение высоты максимума —  $\Delta C$ , 3) смещение полосы пропускания —  $\frac{1}{2}(s_1 + s_2)$ ,

4) изменение ширины полосы пропускания —  $s_2 - s_1$ . Смысл введенных здесь обозначений поясняется рис. 42, на ко-

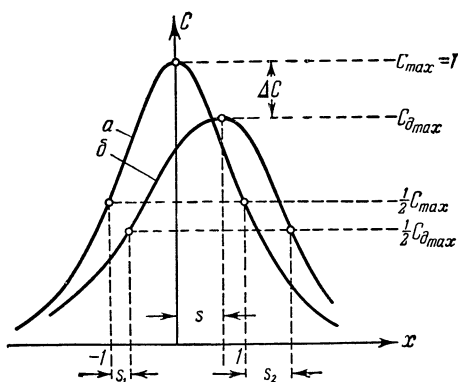


Рис. 42.

тором по-прежнему  $a$  — статическая,  $b$  — динамическая резонансные кривые.

Для определения перечисленных величин будем исходить из выражения (25.5) для динамического коэффициента передачи, переписав его в новых переменных:

$$\begin{aligned} K_d &= K - j \frac{1}{2} \lambda \frac{d^2 K}{d\omega^2} - \frac{1}{8} \lambda^2 \frac{d^4 K}{d\omega^4} = \\ &= K - j \frac{1}{2} \lambda \left( \frac{dx}{d\omega} \right)^2 \frac{d^2 K}{dx^2} - \frac{1}{8} \lambda^2 \left( \frac{dx}{d\omega} \right)^4 \frac{d^4 K}{dx^4} \end{aligned}$$

или

$$K_d = K - j \mu K''_{\omega} - \frac{1}{8} \mu^2 K_{\omega}^{IV}, \quad (25.8)$$

где

$$\mu = \lambda \left( \frac{dx}{d\omega} \right)^2 = \frac{4\lambda}{\omega_0^2 d^2}.$$

В формуле (25.8)  $K = K(x)$  и производные берутся по аргументу  $x$ . Для модуля динамического коэффициента передачи находим

$$|K_d^2| = C_d = C - 4\mu x C^3 - \mu^2 (5C^3 - 48x^2 C^5). \quad (25.9)$$

Максимум статического коэффициента передачи достигается при  $x = 0$

$$C_{\max} = C(0) = 1; \quad C'(0) = 0.$$

Максимум динамического коэффициента передачи имеет место при некотором значении  $x = s$ , которое и является искомым. Разложим  $C'_d$  в ряд Маклорена, ограничившись членом первого порядка:

$$C'_d(s) = C'_d(0) + sC''_d(0) = 0.$$

Подставляя сюда значение  $C_d$  из (25.9) и сохраняя лишь члены до  $\mu$ , получим уравнение относительно  $s$ ; решение этого уравнения есть

$$s = 2\mu, \quad (25.10)$$

т. е. смещение максимума при динамическом резонансе имеет тот же порядок малости, что и параметр  $\mu$ , пропорциональный скорости изменения частоты.

Для нахождения относительного изменения высоты максимума составим выражение

$$\Delta C = C_d(s) - C(0) = C_d(0) + sC'_d(0) - C(0).$$

Подставляя сюда  $C_d$  и  $s$  из (25.9) и (25.10), найдем с точностью до  $\mu^2$

$$\Delta C = -\mu^2. \quad (25.11)$$

Таким образом, изменение высоты максимума имеет второй порядок малости относительно  $\mu$ .

Определим теперь значения обобщенной расстройки  $x$ , при которых квадрат модуля коэффициента передачи равен



половине максимального значения (в соответствии с обычным определением ширины полосы пропускания). Для статического коэффициента передачи

$$C(\pm 1) = \frac{1}{2} C(0) = \frac{1}{2}.$$

Для динамического коэффициента передачи

$$C_d(-1 + s_1) = C_d(1 + s_2) = \frac{1}{2} C_d(s) = \frac{1}{2} (1 - \mu^2).$$

Разложив это выражение в ряд по искомым малым параметрам  $s_1$  и  $s_2$  (с точностью до  $\mu^2$ ), получим уравнения для определения этих величин. Разность  $s_2 - s_1$  дает приращение относительной ширины полосы пропускания; вычисление дает

$$s_2 - s_1 = \frac{5}{2} \mu^2. \quad (25.12)$$

Расширение полосы пропускания имеет, как видим, второй порядок малости относительно  $\mu$ . Центр полосы пропускания для динамической резонансной кривой смещен относительно  $x = 0$  на величину полусуммы  $s_1$  и  $s_2$ . Вычисление дает

$$\frac{1}{2} (s_1 + s_2) = \mu. \quad (25.13)$$

Сравнивая (25.13) и (25.10), замечаем, что смещение центра полосы вдвое меньше смещения максимума. Это обусловлено уже упоминавшейся асимметрией динамической резонансной кривой.

Итак, одночленные выражения первого приближения для рассмотренных параметров динамической резонансной кривой пропорциональны  $\mu$  или  $\mu^2$ , т. е. имеют первый или второй порядок малости, если  $\mu$  — величина первого порядка малости. Грубое искажение резонансной кривой, показанное на рис. 42, едва ли встретится в практике построения радиоизмерительных устройств; динамическая резонансная кривая рис. 42 относится к значению  $\mu \simeq 30$  ( $d = 0,025$ ).

Вернемся от обобщенных переменных к исходным. Обозначим через  $\Delta\omega$  ширину полосы пропускания; знаком  $\delta$  обозначим приращения, получаемые теми или иными параметрами в динамическом режиме. Тогда вместо фор-

мул (25.10), (25.11) и (25.12) будем иметь

$$\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \mu d = \frac{4\lambda}{\omega_0^2 d}, \quad (25.10')$$

$$\frac{\delta C_{\max}}{C_{\max}} = -\mu^2 = -\frac{16\lambda^2}{\omega_0^4 d^4}, \quad (25.11')$$

$$\frac{\delta(\Delta\omega)}{\Delta\omega} = \frac{5}{4} \mu^2 = \frac{20\lambda^2}{\omega_0^4 d^4}. \quad (25.12')$$

Необходимое время анализа (или период частотной модуляции при пилообразном законе модуляции) может быть определено по формуле

$$T = \frac{2}{\pi} \frac{F}{\mu (\Delta f)^2},$$

где  $F$ —размах модуляции, т. е. ширина обследуемого диапазона частот,  $\Delta f$ —разрешающая способность, т. е. ширина полосы пропускания (при выводе этой формулы положено  $\frac{\Delta f}{f_0} = d$ ).

Так, например, для гетеродинного анализатора звуковой частоты ( $F = 10$  кГц) с электромеханическим резонатором, настроенным на частоту 50 кГц, при разрешающей способности 25 гц (что соответствует  $d = 5 \cdot 10^{-4}$ ), задаваясь  $\mu = 0,1$  (т. е. допуская расширение полосы на величину порядка 10%), получим

$$T = \frac{2}{\pi} \frac{10^4}{0,1 (25)^2} \simeq 100 \text{ сек.}$$

На практике считают достаточным ставить менее жесткие требования: полагают  $\mu \leq 1$ . При  $\mu$  порядка единицы вышеприведенные приближенные формулы, разумеется, уже неприменимы.

Вернемся к исходному выражению (25.1) для динамического коэффициента передачи. Мы заменили в этом выражении верхний предел на бесконечность (см. (25.2)), полагая, что вносимая этой заменой погрешность невелика. Нам нужно

теперь оценить величину погрешности равной

$$R = \int_{-\infty}^t g(\tau) e^{-j\omega\tau} e^{j\frac{1}{2}\lambda\tau^2} d\tau.$$

Модуль интеграла меньше интеграла от модуля; поэтому

$$|R| < \int_t^{\infty} |g(\tau)| d\tau.$$

Подставляя

$$g(t) = \omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t,$$

запишем

$$|R| < \omega_0 \int_t^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{2}{d} e^{-\alpha t}.$$

Но

$$\alpha t = \alpha \frac{\omega - \omega_1}{\lambda} = \frac{x - x_1}{\mu}$$

и, стало быть,

$$|R| < \frac{2}{d} e^{-\frac{x-x_1}{\mu}}.$$

Относительную погрешность получим, отнеся  $R$  к  $K_{\max} = \frac{1}{jd}$

$$\left| \frac{R}{K_{\max}} \right| = 2e^{-\frac{x-x_1}{\mu}}.$$

Все расчеты велись с точностью до  $\mu^2$ . Для того чтобы относительной погрешностью можно было пренебречь, достаточно, чтобы она имела следующий порядок малости, т. е. порядок  $\mu^3$ . Отбрасывая не влияющий на порядок множитель 2, будем иметь

$$e^{-\frac{x-x_1}{\mu}} \leq \mu^3$$

или, после логарифмирования

$$x - x_1 \geq 3\mu \ln \frac{1}{\mu}.$$

Смысл этого неравенства состоит в том, что для получения достаточно точных результатов в полосе частот, начиная с обобщенной расстройки  $x$ , нужно, чтобы начальная

частота, соответствующая значению  $x$ , была достаточно удалена от границы исследуемой полосы. Пусть, например,  $\mu = 0,1$ . Тогда

$$x - x_1 \geq 3 \cdot 0,1 \cdot \ln 10 = 0,69.$$

Напомним, что ширина полосы пропускания простого резонатора, выраженная через обобщенную расстройку, равна 2. Таким образом, нужно отступить влево от края исследуемой полосы всего лишь на долю полосы пропускания резонатора, для того чтобы иметь право пренебречь погрешностью  $R$  при переходе от (25.1) к (25.2). Это условие, конечно, на практике всегда выполняется, и все соотношения, выведенные на основании формулы (25.2) таким образом, подтверждены.

Предыдущее изложение основывалось на предположении малости отличия динамической частотной характеристики от статической; считалось само собою разумеющимся, что мы должны стремиться к такому положению. Это справедливо, если мы рассчитываем анализатор на основе параметров статической характеристики резонатора. В этом случае различие между статической и динамической характеристиками рассматривается как источник погрешности, и желательно, разумеется, чтобы эта погрешность была мала. Но возможен и иной подход к вопросу. Именно, если скорость изменения частоты постоянна, то анализатор может рассчитываться на основе параметров динамической характеристики. В этом случае скорость изменения частоты может быть как угодно велика, если только значения динамических параметров (например, ширина полосы пропускания) нас устраивают.

В заключение интересно заметить, что вопрос о явлениях, возникающих при воздействии изменяющейся частоты на резонансную систему представляет интерес и для других отраслей техники. Так, при пуске машин с неуравновешенными вращающимися массами на гибком валу, могут возникать опасные колебания при прохождении через резонанс (так называемая «критическая скорость»). Математическая формулировка задачи в точности совпадает с нашей [7,26]. Однако цель расчета противоположна: нужно подобрать безопасный режим пуска, т. е. обеспечить настолько быстрое изменение скорости вращения, чтобы, так сказать, «проскочить» через резонанс,

не возбуждая на критической скорости колебаний чрезмерной амплитуды. В наших обозначениях это значит, что нужно, задаваясь допустимым наибольшим значением  $K_{\text{дmax}}$ , выбрать наименьшее значение  $\mu \gg 1$ .

## § 26. Анализ одиночных импульсов

Анализ непериодических явлений, в частности импульсов, и по постановке задачи и по картине явлений во многом отличается от анализа периодических явлений.

Для уяснения этих особенностей мы рассмотрим одну из возможностей анализа импульсов. Напомним, что для анализа импульсов метод последовательного анализа совершенно непригоден. Для анализа импульсов может применяться только метод одновременного анализа (в этом уже проявляется различие анализа импульсов и анализа периодических явлений).

Положим, что мы желаем применить для анализа импульсов анализатор, представляющий собой набор настроенных на различные частоты резонаторов. Такой анализатор может служить для анализа периодических явлений; его пригодность для анализа импульсов нужно еще установить.

Покажем прежде всего, что набор резонаторов без затухания может дать точные дискретные значения спектральной плотности импульса. Дело в том, что спектр импульса есть непрерывная кривая, представляющая спектральную плотность как функцию частоты. Ясно, что прибор, состоящий из конечного числа резонаторов, может дать показание, представляемое графически лишь совокупностью отдельных точек. Можно лишь желать, чтобы эти точки лежали на кривой сплошного спектра. Кривая будет определена тем лучше, чем больше число точек, т. е. чем больше число резонаторов. Это соображение дает представление о том, как ставится в данном случае вопрос о разрешающей способности анализатора.

Пусть уравнение резонатора без затухания записано в виде

$$U'' + \omega_k^2 U = \omega_k^2 a_k f(t), \quad (26.1)$$

где  $f(t)$  — анализируемый импульс, который мы будем полагать равным нулю вне промежутка  $0 < t < \tau$ ,  $k$  — порядко-

вый номер резонатора,  $U$  — выходное напряжение,  $\alpha_k$  — коэффициент пропорциональности, задаваемый входным делителем.

Решение (26.1) можно представить в виде

$$U(t) = \alpha_k \int_0^t g(t-u) f(u) du, \quad (26.2)$$

где  $g(t)$  — временная характеристика, т. е. решение (26.1) при правой части вида

$$f(t) = \delta(t).$$

Для рассматриваемого случая мы имеем

$$g(t) = \alpha_k \omega_k \sin \omega_k t,$$

где  $\omega_k = \frac{1}{\sqrt{L_k C_k}}$  — собственная частота  $k$ -го резонатора.

Таким образом,

$$\begin{aligned} U(t) &= \alpha_k \omega_k \int_0^t \sin \omega_k(t-u) f(u) du = \\ &= \alpha_k \omega_k \left[ \sin \omega_k t \int_0^t f(u) \cos \omega_k u du - \cos \omega_k t \int_0^t f(u) \sin \omega_k u du \right]. \end{aligned}$$

Найдем огибающую этого колебания; она будет выражена через сумму квадратов коэффициентов при  $\sin \omega_k t$  и  $\cos \omega_k t$ :

$$c = \alpha_k \omega_k \left[ \left( \int_0^t f(u) \cos \omega_k u du \right)^2 + \left( \int_0^t f(u) \sin \omega_k u du \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (26.3)$$

Эта величина (представляющая собой переменную «амплитуду» колебания) есть функция времени; зависимость от времени определяется тем, что  $t$  входит в верхние пределы интегралов.

Но после  $t = \tau$  импульс  $f(t)$ , а с ним и подынтегральные выражения обращаются в нуль, и следовательно, в дальнейшем, т. е. при  $t > \tau$ , величина  $\xi$  сохраняет постоянное значение, которое она приобрела к моменту времени  $t = \tau$ :

соответствующее значение обозначим через  $c_\tau$ . Физически это означает, что после окончания внешнего воздействия на резонатор амплитуда его колебания останется в дальнейшем неизменной (напомним, что мы пока рассматриваем резонатор без затухания). Но в таком случае мы можем записать выражение  $c_\tau$  с *любыми* постоянными пределами интегрирования, включающими в себя промежуток  $0 - \tau$ ; в частности, и с бесконечными пределами:

$$c_\tau = a_k \omega_k \left[ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \omega_k u \, du \right)^2 + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \omega_k u \, du \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (26.4)$$

В интегралах в правой части легко узнать выражения для синусной и косинусной компонент спектра, так что

$$c_\tau = a_k \omega_k \sqrt{a^2 + b^2} = a_k \omega_k \Phi(\omega). \quad (26.5)$$

Если теперь выбрать множитель

$$a_k \omega_k$$

одинаковым для всех резонаторов, то получается, что наблюдаемые по окончании действия импульса амплитуды колебания резонаторов (с точностью до постоянного множителя) дают точные дискретные значения спектра для частот  $\omega = \omega_k$ .

Что же касается промежутка  $0 < t < \tau$ , то в течение этого времени амплитуды колебания резонаторов дают текущий спектр импульса, как это видно из формулы (26.3).

Нужно заметить, что рассмотренный анализатор, составленный из резонаторов без затухания и дающий, как мы убедились, идеальный анализ импульса, принципиально непригоден для анализа периодических явлений. Дело в том, что для резонатора без затухания установившийся режим вообще не существует, а анализ периодических явлений мыслится именно в установившемся режиме. В этом проявляется еще одно существенное различие анализа периодических явлений и импульсов.

Следует еще заметить, что время анализа импульса определяется длительностью импульса и никак не зависит от свойств анализатора. Следовательно, рассмотренное в § 23

соотношение между временем анализа и разрешающей способностью анализатора к анализу импульсов неприменимо; здесь опять-таки проявляется различие между анализом периодических явлений и импульсов.

Посмотрим теперь, как изменятся соотношения, если мы составим анализатор импульсов из реальных резонаторов с затуханием. Уравнение резонатора в этом случае следующее:

$$\ddot{U} + 2\alpha\dot{U} + \omega_k^2 U = a_k \omega_k^2 f(t). \quad (26.6)$$

Временная характеристика имеет вид

$$g(t) = \omega_k e^{-\alpha_k t} \sin \omega_k t.$$

Решение уравнения (26.6) есть

$$\begin{aligned} U(t) &= a_k \omega_k \int_0^t e^{-\alpha_k(t-u)} \sin \omega_k(t-u) f(u) du = \\ &= a_k \omega_k e^{-\alpha_k t} \left[ \sin \omega_k t \int_0^t e^{\alpha_k u} f(u) \cos \omega_k u du - \right. \\ &\quad \left. - \cos \omega_k t \int_0^t e^{\alpha_k u} f(u) \sin \omega_k u du \right]. \end{aligned}$$

Для огибающей при  $t > \tau$  можем записать

$$\begin{aligned} c &= a_k \omega_k e^{-\alpha_k t} \left[ \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha_k u} f(u) \cos \omega_k u du \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha_k u} f(u) \sin \omega_k u du \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (26.7) \end{aligned}$$

Сравнивая (26.7) и (26.4), замечаем следующее. Во-первых, теперь амплитуда при  $t > \tau$  не сохраняет постоянного значения, а убывает за счет множителя  $e^{-\alpha_k t}$ , так как свободное колебание затухает. Это значит, что показание анализатора зависит от того, в какой момент (конечно, после  $t = \tau$ ) оно будет отсчитано. Однако если сделать



показатель затухания  $\alpha_k$  одинаковым для всех резонаторов, то с течением времени спектр не будет искажаться; будет изменяться только масштабный коэффициент, что несущественно при том условии, что отсчет по всем резонаторам берется одновременно. Во-вторых, наличие затухания проявляется в том, что в подинтегральных выражениях появился весовой множитель  $e^{\alpha u}$ . Его наибольшее значение равно  $e^{\alpha \tau}$ ; это значение тем меньше отличается от единицы, чем меньше произведение  $\alpha \tau$ , т. е. чем меньше затухание, и чем короче импульс.

В ряде случаев может оказаться возможным положить приближенно

$$e^{\alpha u} \approx 1,$$

т. е. пренебречь влиянием затухания, и свести, таким образом, рассматриваемый случай к предыдущему. Если же этого сделать нельзя, то показание анализатора не будет отвечать истинному спектру импульса, и задача состоит в том, чтобы оценить совершаемую погрешность.

Из формулы (26.7) видно, что анализатор дает нам спектр не функции  $f(t)$ , а измененной (взвешенной) функции

$$f_{\alpha}(t) = e^{\alpha t} f(t).$$

Но если спектр функции  $f(t)$  есть

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

то спектр измененной функции  $f_{\alpha}(t)$  будет

$$S_{\alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha t} f(t) e^{-j\omega t} dt = S(\omega + j\alpha).$$

Таким образом, вместо истинных значений  $\Phi(\omega_k)$  мы отсчитаем по анализатору значения

$$\Phi_{\alpha} = |S(\omega_k + j\alpha)|. \quad (26.8)$$

По этой формуле можно подсчитать обусловленное наличием затухания искажение спектра для данного конкретного импульса.

В качестве примера разберем случай анализа прямоугольного импульса длительностью  $\tau$ . Аналитическое выражение такого импульса может быть записано в виде

$$f(t) = \sigma(t) - \sigma(t - \tau).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_k} U(t) &= \int_0^t g(t-u) f(u) du = \int_0^t g(t-u) [\sigma(u) - \sigma(u - \tau)] du = \\ &= \begin{cases} \int_0^t g(t-u) du = \int_0^t g(u) du & 0 < t < \tau, \\ \int_0^\tau g(t-u) du = \int_{t-\tau}^t g(u) du & \tau < t < \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя сюда значение

$$g(t) = \omega_k e^{-\alpha_k t} \sin \omega_k t,$$

выполняя интегрирование и полагая  $\alpha_k \ll \omega_k$ , получим приближенные решения

$$\frac{1}{a_k} U(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha_k t} \cos \omega_k t & 0 < t < \tau, \\ e^{-\alpha_k t} [e^{\alpha_k \tau} \cos \omega_k (t - \tau) - \cos \omega_k t] & \tau < t < \infty. \end{cases} \quad (26.9)$$

Полагая  $a_k \omega_k = 1$ ,  $\alpha_k = \alpha$ , после несложных вычислений получим для огибающей

$$c(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_k} (1 + e^{-\alpha t}) & 0 < t < \tau, \\ \frac{1}{\omega_k} M e^{-\alpha t} & \tau < t < \infty, \end{cases} \quad (26.10)$$

где

$$M = \sqrt{1 - 2e^{\alpha \tau} \cos \omega_k \tau + e^{2\alpha \tau}}. \quad (26.11)$$

Физическая картина явлений такова: при  $t = 0$   $f(t)$  изменяется скачком от 0 до 1, в результате чего возникает свободное колебание резонатора; при  $t = \tau$   $f(t)$  изменяется скачком в обратном направлении, т. е. от 1 до 0. При

этом возникает точно такое же колебание, но с обратным знаком и с запозданием на  $\tau$  (рис. 43, а).

Амплитуда результирующего колебания, устанавливающегося после  $t = \tau$  (рис. 43, б), зависит, понятно, от относительной фазы обоих свободных колебаний; фазовый сдвиг зависит в свою очередь как от частоты  $\omega_k$ , так и от интервала  $\tau$ . Вот почему величина  $M$  есть функция аргумента  $\omega_k \tau$ . Эта зависимость и определяет способность анализатора разобраться в спектральных соотношениях.

Заметим, что колебание  $x$  непрерывно, но огибающая  $s$  претерпевает разрыв при  $t = \tau$ . Первая строка формулы (26.10) включает постоянную составляющую; огибающая по формуле (26.10) отмечена на рис. 43, б.

Для спектра прямоугольного импульса длительностью  $\tau$ , существующего между  $-\frac{\tau}{2}$  и  $+\frac{\tau}{2}$ , мы имели (см. § 11)

$$S(\omega) = \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}.$$

В нашем случае импульс задан на промежутке  $0 < t < \tau$ ; значит, мы имеем для его спектра

$$S(\omega) = e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}.$$

Применим формулу (26.8) для получения искаженного спектра:

$$\Phi_\alpha = |S(\omega + j\alpha)| = \left| e^{\frac{\tau}{2}(-j\omega + \alpha)} \frac{\sin \frac{\tau}{2}(\omega + j\alpha)}{\frac{\tau}{2}(\omega + j\alpha)} \right|,$$

что дает после выполнения вычислений

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{\omega \tau} \sqrt{1 - 2e^{\alpha \tau} \cos \omega \tau + e^{2\alpha \tau}}.$$

Мы видим, таким образом, что, как оно и должно быть, величина  $M$  [см. формулы (26.10) и (26.11)] непосредственно

выражает наблюдаемый спектр. Что же касается искажения спектра, то оно проявляется наиболее заметным образом в том, что вместо нулей истинного спектра при  $\omega\tau = 2n\pi$  искаженный спектр  $\Phi_\alpha$  имеет при тех же аргументах конечные значения

$$\Phi_{\alpha \min} = \frac{1 - e^{\alpha\tau}}{2n\pi}.$$

Очень интересно отметить, что до  $t = \tau$  анализатор еще, так сказать, «не знает», с чем он имеет дело. Он получает

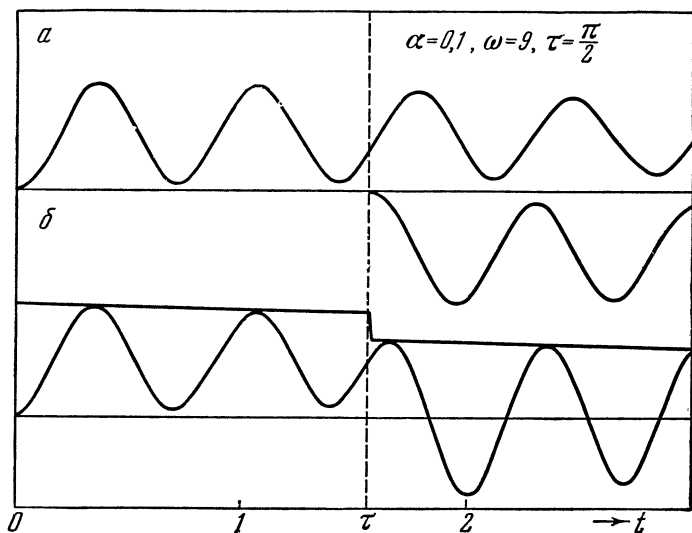


Рис. 43.

в начале импульса толчок, возбуждающий колебания во всех резонаторах. В дальнейшем никакие дополнительные возмущения на резонаторы не действуют вплоть до  $t = \tau$ . Значит, анализатор воспринимает прямоугольный импульс как единичную функцию, и его показание дает спектр этой функции, как видно из первой строки формулы (26.10). При  $t = \tau$  положение внезапно определяется; импульс

сформировался и закончился, и с этого момента анализатор дает спектр импульса \*).

Возьмем численный пример. Пусть анализатор состоит из 10 резонаторов со следующими данными:  $\omega_k = k\omega_0$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\alpha_k = \alpha = 0,1$ , длительность прямоугольного импульса пусть будет  $\tau = \frac{\pi}{2}$ . Тогда нули спектра придутся на значения  $k = 4$  и  $k = 8$ . Множитель  $M$  имеет следующие значения:

$$M = \begin{cases} \sqrt{1 + e^{2\alpha\tau}} = 1,54 & \text{для } k = 1, 3, 5, 7, 9, \\ 1 + e^{\alpha\tau} = 2,17 & \text{для } k = 2, 6, 10, \\ |1 - e^{\alpha\tau}| = 0,17 & \text{для } k = 4, 8. \end{cases}$$

По формулам (26.10) на рис. 44 построен рельеф  $c(k, t)$ . На этом рисунке амплитуда представлена как функция номера резонатора и времени. При  $t < \tau$  анализатор дает гиперболический спектр единичной функции. При  $t = \tau$  амплитуда изменяется скачком; в этот момент сформировывается спектр прямоугольного импульса. Как видим, амплитуды резонаторов  $k = 4$  и  $k = 8$  не равны нулю (искажение спектра). Истинный спектр прямоугольного импульса изображен в подходящем масштабе на переднем плане. В общем анализатор воспроизводит спектр вполне удовлетворительно.

Поскольку для всех резонаторов выбрано одинаковое значение показателя затухания  $\alpha$ , то любое сечение рельефа плоскостью, параллельной  $c0k$  (т. е. снятие показания анализатора в любой момент времени), дает фигуры, различающиеся только вертикальным масштабом.

---

\*) Общая картина явления ясна, но остается еще показать, почему при  $t < \tau$  анализатор не дает текущего спектра прямоугольного импульса, чего следовало бы ожидать на основании формулы (26.3). Дело в том, что, вычислив «оггибающую» по этой формуле, мы действительно получили бы текущий спектр прямоугольного импульса, при этом оказалось бы, что «амплитуда»  $c$  изменяется с частотой  $\frac{1}{2}\omega_k$ , т. е. с частотой того же порядка, что и частота колебания резонатора. Наблюдать изменение амплитуды при таких условиях нельзя, и следовательно, такое рассмотрение вопроса в случае нашего примера было бы формальным.

Итак, мы убедились, что анализатор в форме набора резонаторов может с успехом применяться для анализа импульсов \*).

Разобрав в деталях картину происходящих при этом явлений, мы смогли подметить ряд специфических черт анализа импульсов.

К анализу импульсов посредством резонаторов можно подойти несколько иначе.

Прежде всего заметим, что установившаяся ко времени окончания импульса амплитуда резонатора является мерой

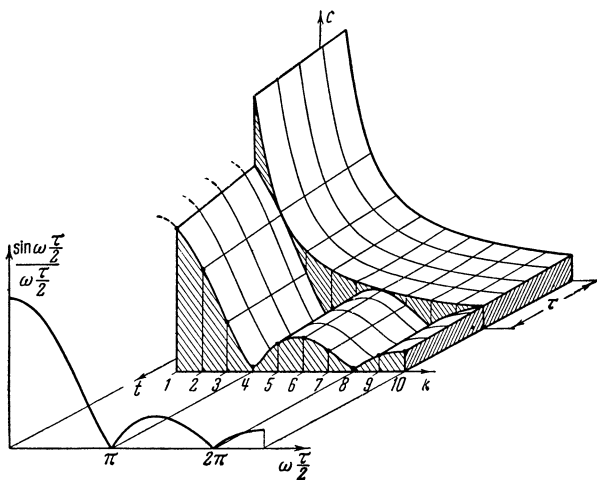


Рис. 44.

накопленной резонатором колебательной энергии; энергия пропорциональна квадрату амплитуды. Из этого вытекает возможность видоизменения способа отсчета по анализатору, а именно: можно замкнуть колеблющийся резонатор на

---

\*) К этому выводу приходит и Римский-Корсаков [12]. Надо заметить, что в своей работе он применяет интересный, так сказать, синтетический подход к проблеме, ставя сперва требования к идеальному анализатору и находя затем его физическую характеристику. Для рассматриваемого применения таким идеальным анализатором оказывается именно резонатор без затухания.

активное сопротивление, в котором выделится запасенная в резонаторе энергия, и тем или иным способом измерить эту энергию.

Но можно поступить и иначе — с самого начала измерять теряемую в резонаторе энергию. Оказывается, что по окончании процесса эта энергия с известным приближением пропорциональна квадрату спектральной плотности импульса на частоте резонатора. Докажем это.

Возьмем сразу резонатор с затуханием, для которого мгновенное значение наблюдаемой величины (см. выше) есть

$$\begin{aligned} x(t) &= a_k \omega_k \int_0^t e^{-\alpha_k'(t-u)} \sin \omega_k(t-u) f(u) du = \\ &= a_k \omega_k e^{-\alpha_k t} \left[ \sin \omega_k t \int_0^t e^{\alpha_k u} f(u) \cos \omega_k u du - \right. \\ &\quad \left. - \cos \omega_k t \int_0^t e^{\alpha_k u} f(u) \sin \omega_k u du \right]. \end{aligned}$$

Составим выражение для энергии, затраченной ко времени  $t$ :

$$E(t) = \int_0^t x^2 dt.$$

Полная энергия, выделившаяся в каждом резонаторе по окончании как импульса, так и процессов в резонаторе, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} E_k &= a_k^2 \omega_k^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha_k t} \left[ \sin \omega_k t \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha}(u) \cos \omega_k u du - \right. \\ &\quad \left. - \cos \omega_k t \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha}(u) \sin \omega_k u du \right]^2 dt. \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$f_{\alpha}(u) = e^{\alpha_k u} f(u).$$

Внутренние интегралы представляют собой спектральные компоненты  $A$  и  $B$  функции  $f_{\alpha}$ . Так как эти величины не

зависят от  $t$ , то имеем

$$E_k = a_k^2 \omega_k^2 \left[ a^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha_k t} \sin^2 \omega_k t dt + b^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha_k t} \cos^2 \omega_k t dt - \right. \\ \left. - ab \int_0^\infty e^{-2\alpha_k t} \sin 2\omega_k t dt \right] = \\ = \frac{a_k^2 \omega_k^2}{4\alpha_k} \left[ a^2 + b^2 + \frac{\frac{d^2}{4}}{1 + \frac{d^2}{4}} (b^2 - a^2) - \frac{d}{1 + \frac{d^2}{4}} ab \right].$$

При малом затухании, т. е. при

$$\alpha_k \ll \omega_k, \quad d \ll 1,$$

получаем приближенно (пренебрегая двумя последними членами в скобках)

$$E_k \approx \frac{a_k^2 \omega_k^2}{4\alpha_k} (a^2 + b^2) = b_k \Phi_a^2 \approx b_k \Phi^2,$$

так как  $\Phi_a$  при  $d \ll 1$  мало отличается от  $\Phi$ . Если теперь выбрать параметры резонаторов так, чтобы величина  $b_k$  не зависела от  $k$ , т. е. была бы для всех резонаторов одинакова, то получаем, что выделенная в каждом резонаторе энергия пропорциональна (с точностью, определяемой сделанными при выводе приближениями) квадрату спектральной плотности, соответствующей частоте данного резонатора. Это и требовалось доказать.

Можно придумать различные способы отсчета величины  $E_k$ . Можно, например, подключить к каждому резонатору квадратичный электродинамический баллистический прибор. Можно интегрировать не в механической части (т. е. пользуясь баллистическим отсчетом), а при помощи интегрирующей электрической цепочки. Можно интегрировать, пользуясь тепловой инерцией теплового прибора. Можно, наконец, представить себе индикатор следующего устройства: активное сопротивление каждого резонатора образует нагревательную обмотку, наложенную на шарик термометра (или введенную внутрь шарика). Отсчет производится



по высоте столбиков в наборе термометров, которые, будучи расположены в ряд, дают наглядную картину спектра. Постоянной времени такого термометрического индикатора очень легко управлять путем изменения теплоемкости термометров и их термоизоляции.

Описанный способ анализа сводится по сути дела к измерению энергии сложного колебания, приходящейся на полосу частот, вырезаемую данным резонатором. Очевидно, можно произвести более грубое усреднение, применив полосный анализ энергии, для чего резонаторы следует заменить соответственными полосовыми фильтрами.

---

## Г Л А В А III

### СПЕКТРЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### § 27. Спектральное представление случайных процессов

До сих пор мы применяли спектральное представление к тем или иным определенным функциям времени. Теперь необходимо распространить спектральные представления на объекты существенно иной природы — на *случайные процессы*, играющие в технике и математике большую и все возрастающую роль.

Случайным процессом мы называем функцию непрерывно изменяющегося аргумента  $t$ , значения которой представляют собою случайные величины.

Из этого определения сразу видно, что если вычислить спектральную плотность случайного процесса  $\xi(t)$  по обычной формуле

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (27.1)$$

то полученная функция  $S(\omega)$  будет *случайной* функцией. Мы получим то, что можно назвать спектром одной из возможных реализаций случайного процесса. В условиях же действительного наблюдения за течением некоторого случайного процесса мы можем получить лишь текущий спектр данной реализации, т. е. случайную функцию

$$S_T(\omega) = \int_0^T \xi(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (27.2)$$

Желательно ввести такое определение спектра случайного процесса, которое привело бы нас к неслучайной функции частоты.

Случайный процесс определяется распределением вероятностей значений величины  $\xi$  для любого момента  $t$ . Для последующей теории имеют большое значение не только самые функции распределения вероятностей, но и первые два момента

$$M(\xi) = \int x \varphi(x) dx = \xi_0, \quad (27.3)$$

$$M[\xi(t_1) \xi(t_2)] = \iint x_1 x_2 \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = B(t_1, t_2), \quad (27.4)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\varphi(x_1, x_2)$  — соответственно одно- и двумерные плотности вероятностей, в общем случае зависящие от времени. Однако в этом параграфе мы будем рассматривать только стационарные (в широком смысле) процессы, для которых обе величины (27.3) и (27.4) не зависят от времени; первая величина есть просто постоянная, называемая средним значением случайного процесса, вторая величина зависит только от разности  $|t_2 - t_1| = \tau$  и носит название *функции корреляции*.

Рассматриваемые здесь стационарные случайные процессы обладают *эргодическим* свойством, состоящим в том, что средние по множеству с вероятностью единица равны средним по времени, взятым для любой реализации. Обозначая средние по времени чертой сверху, можем записать условие эргодичности в виде

$$\xi_0 = M(\xi) = \overline{\xi(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt, \quad (27.5)$$

$$\begin{aligned} B(\tau) &= M[\xi(t) \xi(t - \tau)] = \overline{\xi(t) \xi(t - \tau)} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(t - \tau) dt. \end{aligned} \quad (27.6)$$

Заметим сразу, что

$$B(0) = M[\xi^2(t)] = \overline{\xi^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt. \quad (27.7)$$

Таким образом, дисперсия случайного процесса

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \overline{\xi^2(t)} - [\overline{\xi(t)}]^2 = B(0) - \xi_0^2.$$

По физическому смыслу  $\xi_0$  есть постоянная составляющая,  $B(0)$  — полная мощность процесса,  $\xi_0^2$  — мощность постоянной составляющей, дисперсия выражает мощность переменной составляющей. Впрочем, чаще всего мы имеем дело с процессами, для которых  $\xi_0 = 0$ , так что  $B(0)$  непосредственно выражает мощность процесса.

Дальнейшее основывается на теореме Хинчина, согласно которой функция корреляции  $B(\tau)$  может быть представлена в виде

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} dF(\omega), \quad (27.8)$$

где  $F(\omega)$  — неубывающая ограниченная функция. Если функция  $F(\omega)$  дифференцируема, то, обозначая

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{1}{2} G(\omega),$$

получим вместо (27.8)

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (27.9)$$

так что  $G(\omega)$  есть обычное преобразование Фурье для  $B(\tau)$

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (27.10)$$

Функция  $G(\omega)$  и есть то, что называется *статистическим спектром* случайного процесса, и формула (27.10) является основным определением этой функции. Следует заметить, что как  $B(\tau)$ , так и  $G(\omega)$  — четные функции своих аргументов. Поэтому (27.9) и (27.10) могут быть записаны в вещественной форме двух косинус-трансформаций Фурье

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (27.11)$$

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (27.12)$$

Физический смысл функции  $G(\omega)$  легко выяснить, положив в (27.11)  $\tau = 0$ . Мы получим

$$B(0) = P = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega, \quad (27.13)$$

где через  $P$  обозначена полная мощность процесса. Формула (27.13) показывает, что функция  $G(\omega)$  выражает мощность процесса  $\xi(t)$ , приходящуюся на полосу частот  $d\omega$ . Иначе говоря,  $G(\omega)$  представляет собою спектральную плотность мощности. На этом основании  $G(\omega)$  называют часто энергетическим спектром процесса  $\xi(t)$ . Мощность, заключенную в конечной полосе между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , можно определить интегрированием  $G(\omega)$  в соответствующих пределах

$$P_{12} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega.$$

Статистический спектр можно выразить через текущий спектр реализации

$$S_T(\omega) = \int_0^T \xi(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Составим выражение для энергии процесса  $\xi(t)$ , выделившейся за время  $T$

$$E_T = \int_0^T \xi^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S_T(\omega)|^2 d\omega.$$

Это соотношение выражает теорему Рэяли для конечного промежутка времени  $T$ . Среднюю за время  $T$  мощность получим, деля на  $T$

$$P_T = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{\pi T} \int_0^{\infty} |S_T(\omega)|^2 d\omega. \quad (27.14)$$

Эта величина зависит, вообще говоря, от  $T$ , но для стационарного процесса стремится с увеличением  $T$  к посто-

явному пределу, который и выражает мощность процесса

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |S_T(\omega)|^2 d\omega. \quad (27.15)$$

Сопоставляя (27.13) и (27.15), мы видим, что статистический спектр связан с текущим спектром соотношением

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(\omega)|^2}{T}. \quad (27.16)$$

Выведем еще некоторые формулы для вычисления  $G(\omega)$ . Возьмем формулу (27.10) и подставим в нее значение функции корреляции в соответствии с ее определением (см. (27.4)):

$$B(\tau) = M[\xi(t)\xi(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \varphi(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2.$$

В полученном выражении

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \varphi(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2$$

выполним сперва интегрирование по  $\tau$ . Обозначив

$$\psi(x_1, x_2, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

можем записать

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \psi(x_1, x_2, \omega) dx_1 dx_2. \quad (27.17)$$

Эта формула представляет  $G(\omega)$  как второй момент распределения некоторого случайного процесса; это распределение  $\psi(x_1, x_2, \omega)$  есть преобразование Фурье для распределения  $\varphi(x_1, x_2, \tau)$  исходного процесса.

Еще одно соотношение мы получим, исходя из определения текущего спектра случайного процесса

$$S_t(\omega) = \int_{-\infty}^t \xi(x) e^{-j\omega x} dx. \quad (27.18)$$

Введем случайную функцию  $\xi_t(x)$ , определяемую как

$$\xi_t(x) = \begin{cases} \xi(x) & \text{при } x < t, \\ 0 & \text{при } x > t. \end{cases}$$

С помощью этого определения можно переписать (27.18) в виде

$$S_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_t(x) e^{-j\omega x} dx. \quad (27.19)$$

Обратное преобразование для (27.19) будет

$$\xi_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_t(\omega) e^{j\omega x} d\omega. \quad (27.20)$$

Умножим обе части этого выражения на  $\xi_t(x - \tau) dx$  и проинтегрируем в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_t(x) \xi_t(x - \tau) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_t(x - \tau) dx \int_{-\infty}^{\infty} S_t(\omega) e^{j\omega x} d\omega. \quad (27.21)$$

Выполним в правой части сначала интегрирование по  $x$ . Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_t(x - \tau) e^{j\omega x} dx = e^{j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_t(x) e^{j\omega x} dx = e^{j\omega\tau} S_t^*(\omega)$$

выражается через комплексно-сопряженный текущий спектр. Если теперь вернуться к функции  $\xi(x)$  в левой части (27.21) на основе определения  $\xi_t(x)$ , т. е. заменить соответственно верхний предел интегрирования, то получим

$$\int_{-\infty}^t \xi(x) \xi(x - \tau) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_t(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Продифференцируем обе части по  $t$

$$\xi(t) \xi(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} |S_t(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Беря средние по множеству от обеих частей этого выражения, получаем

$$M[\xi(t), \xi(t - \tau)] = B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M\left(\frac{\partial}{\partial t} |S_t(\omega)|^2\right) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (27.22)$$

Сличая (27.22) с (27.9), мы видим, что

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} M\left(\frac{\partial}{\partial t} |S_t(\omega)|^2\right). \quad (27.23)$$

Таким образом оказывается, что спектр  $G(\omega)$  случайного процесса есть среднее по множеству от мгновенного спектра мощности в определении Пэйджа (см. (6.3)); аналогичное определение применяется Лемпердом [24].

Мы располагаем теперь целым рядом формул. Для того чтобы лучше в них ориентироваться, заметим, что  $B(\tau)$  и  $G(\omega)$  связаны между собой парой преобразований Фурье (27.9) и (27.10). Эти преобразования симметричны по своей структуре, из чего можно заключить, что всякой формуле для  $B(\tau)$  должна соответствовать парная ей формула для  $G(\omega)$ . Эта симметрия становится очевидной, если собрать все приведенные выше формулы и сгруппировать их в виде нижеследующей таблицы:

$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (27.9)$	$\pi G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (27.10)$
$= M[\xi(t) \xi(t - \tau)] \quad (27.4)$	$= M\left(\frac{\partial}{\partial t}  S_t(\omega) ^2\right) \quad (27.23)$
$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \varphi(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \quad (27.4)$	$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \psi(x_1, x_2, \omega) dx_1 dx_2 \quad (27.17)$
$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) \xi(t - \tau) dt \quad (27.6)$	$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T}  S_T(\omega) ^2 \quad (27.16)$

По поводу этих формул можно еще заметить следующее: последняя строка таблицы содержит соотношения (27.6)



и (27.16), получаемые на основании эргодичности стационарного процесса и представляющие собою средние по времени. Эти формулы могут послужить основой для построения аппаратуры для измерения  $B(\tau)$  и  $G(\omega)$  — коррелометров и анализаторов. Но эти формулы не могут непосредственно служить для вычисления  $B(\tau)$  и  $G(\omega)$ , так как они представляют средние по времени для некоторой реализации. Следовательно, для выполнения вычислений по этим формулам нужно располагать аналитическим выражением реализации в виде некоторой (неслучайной) функции, определенной на всем протяжении оси времен. В действительности случайный процесс задается математически не одной из своих реализаций, а тем или иным распределением; поэтому как функция корреляции  $B(\tau)$ , так и спектр  $G(\omega)$  вычисляются с неизбежным усреднением по множеству. Напротив, при эксперименте мы имеем чаще всего дело именно с одной реализацией случайного процесса. Техника вычисления спектров показана на примерах следующего параграфа.

Для спектров случайных процессов можно вывести ряд соотношений, аналогичных приведенным в § 4. Некоторые из этих соотношений собраны в нижеследующей таблице:

$\eta(t)$	$B_\eta(\tau)$	$G_\eta(\omega)$
$\xi_1(t) + \xi_2(t)$	$B_1(\tau) + B_2(\tau)$	$G_1(\omega) + G_2(\omega)$
$\xi(at)$	$B(a\tau)$	$G\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$\xi(t - t_0)$	$B(\tau)$	$G(\omega)$
$\xi(t)e^{-j\Omega t}$	$B(\tau)e^{j\Omega\tau}$	$G(\omega + \Omega)$
$\xi^{(n)}(t)$	$(-1)^n B^{(2n)}(\tau)$	$\omega^{2n} G(\omega)$
$\xi_1(t)\xi_2(t)$	$B_1(\tau)B_2(\tau)$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\nu)G_2(\omega - \nu)d\nu$

Предполагается, что  $M\xi = 0$ , что  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — независимы, и что условие дифференцируемости выполняется там, где это требуется,

Для спектров случайных процессов и их функций корреляции имеет силу общего характера связь между шириною спектра и величиною называемой интервалом корреляции, а именно

$$\Delta f \Delta \tau \geq \mu, \quad (27.24)$$

где  $\mu$  — постоянная порядка единицы. Интервал корреляции  $\Delta \tau$  выражает эффективную протяженность функции корреляции и может определяться по-разному. Общие соображения по поводу соотношения (27.24), справедливые для любых функций, связанных парой преобразований Фурье, были изложены в § 12. Мы укажем здесь на простые определения [25], приводящие (27.24) к тождеству

$$\Delta f \Delta \tau \equiv 1. \quad (27.25)$$

Запишем выражения для спектра и функции корреляции

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Положим в первом выражении  $\omega = 0$ , а во втором —  $\tau = 0$ ; получим

$$\left. \begin{aligned} G(0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau, \\ B(0) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (27.26)$$

Введем определения

$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega &= 2\pi \Delta f = \frac{1}{G(0)} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega, \\ \Delta \tau &= \frac{1}{B(0)} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (27.27)$$

Отсюда, на основании (27.26), сразу получаем (27.25). Смысл определений (27.27) состоит в том, что площади под кривыми  $G(\omega)$  и  $B(\tau)$  приравняются площадям прямоуголь-

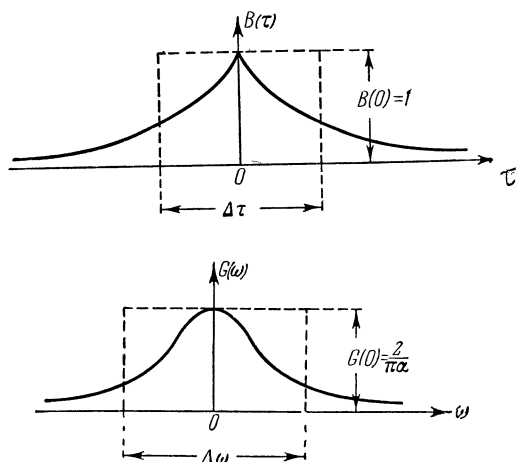


Рис. 45.

ников с основаниями  $\Delta\omega$  и  $\Delta\tau$  и высотами  $G(0)$  и  $B(0)$  соответственно.

Пусть, например,

$$B(\tau) = e^{-\alpha/|\tau|}, \quad G(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau = \frac{2}{\alpha}, \quad B(0) = 1, \quad \Delta\tau = \frac{\alpha}{2};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = 2, \quad G(0) = \frac{2}{\pi\alpha}, \quad \Delta\omega = \frac{1}{\pi\alpha}, \quad \Delta f = \frac{2}{\alpha}$$

(см. рис. 45).

Определения (27.27) имеют и недостатки. Первый из них состоит в том, что эти определения неприменимы непосредственно в случае  $G(0) = 0$  ( $B(0)$  никогда не равно нулю).

Между тем этот случай часто встречается. В частности, нас может интересовать процесс, спектр которого заключен в полосе частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . Можно, соответственно изменив определения, и в этом случае представить график спектра эквивалентным прямоугольником. Что касается функции корреляции, то она имеет в рассматриваемом случае колебательный характер, и здесь выясняется второй недостаток определений (27.27). Он заключается в том, что, в то время, как функция  $G(\tau)$  всегда неотрицательна, функция  $B(\tau)$  может менять знак, а потому интеграл от функции в этом случае дает плохой критерий для оценки интервала корреляции. Эти недостатки исключаются в определениях, содержащих те или иные моменты квадратов функций (см. § 12), или их абсолютных значений, и т. п. Но совершенствуя определения в этом направлении, мы теряем их простоту, и лишаемся возможности применять тождество (27.25).

## § 28. Спектры некоторых стационарных процессов

В качестве первого примера рассмотрим стационарный случайный процесс, представляемый случайной величиной, принимающей с равной вероятностью одно из двух значений  $\pm a$ , с переменой знака, происходящей в случайные

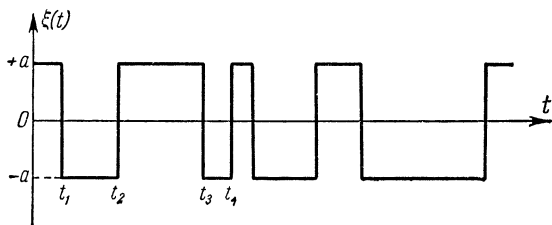


Рис. 46.

моменты. На рис. 46 изображена одна из реализаций такого процесса. Для полной характеристики процесса нужно задать еще распределение для точек перехода через нуль, или, как коротко говорят, распределение нулей. Пусть задано такое распределение в виде вероятности  $p(n, \tau)$  того, что на интервале  $\tau$  окажется ровно  $n$  нулей.

Найдем сначала функцию корреляции, пользуясь основным ее определением (27.4). Для этого нужно предварительно составить выражение для двумерной плотности вероятностей (т.е. плотности совместной вероятности случайным величинам  $\xi = \xi(t)$  и  $\xi_\tau = \xi(t + \tau)$  находиться соответственно в интервалах  $(x_1, x_1 + dx_1)$  и  $(x_2, x_2 + dx_2)$ ). Распределение в нашем случае дискретно и обладает следующими свойствами. Если на интервале  $\tau$  имеется четное число нулей, то  $\xi(t)$  и  $\xi(t + \tau)$  имеют одинаковый знак, т.е. равны с одинаковой вероятностью либо  $+a$ , либо  $-a$ .

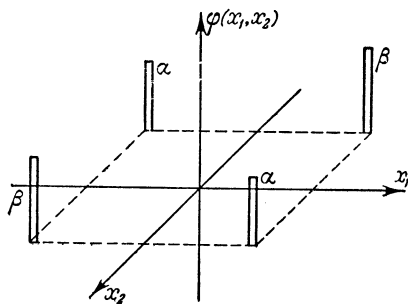


Рис. 47.

Если же на интервале  $\tau$  число нулей нечетно, то  $\xi(t)$  и  $\xi(t + \tau)$  имеют разные знаки и равны либо  $+a$ ,  $-a$ , либо  $-a$ ,  $+a$ . Все это можно записать аналитически при помощи дельта-функций следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \tau) = & \\ = & \frac{1}{2} [\delta(x_1 - a, x_2 - a) + \delta(x_1 + a, x_2 + a)] \sum_{k=0}^{\infty} p(2k, \tau) + \\ & + \frac{1}{2} [\delta(x_1 - a, x_2 + a) + \delta(x_1 + a, x_2 - a)] \sum_{k=0}^{\infty} p(2k + 1, \tau). \end{aligned}$$

В этом выражении

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(2k, \tau) = p_{\text{ч}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p(2k + 1, \tau) = p_{\text{н}}$$

— соответственно вероятности появления на интервале  $\tau$  четного и нечетного числа нулей.

Для наглядности распределение для рассматриваемого процесса изображено на рис. 47. Двумерные дельта-функции представлены условно столбиками конечной высоты (и объема  $\alpha = \frac{1}{2} p_{\text{ч}}$  или  $\beta = \frac{1}{2} p_{\text{н}}$ ).

Подставим найденное распределение в общее выражение для функции корреляции

$$\begin{aligned} B(\tau) = & \frac{1}{2} p_{\text{ч}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 [\delta(x_1 - a, x_2 - a) + \delta(x_1 + a, x_2 + a)] dx_1 dx_2 + \\ & + \frac{1}{2} p_{\text{н}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 [\delta(x_1 - a, x_2 + a) + \\ & + \delta(x_1 + a, x_2 - a)] dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

При вычислении интегралов с дельта-функциями следует иметь в виду, что по определению этой функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Учитывая это соотношение, после двукратного интегрирования получим

$$B(\tau) = a^2 (p_{\text{ч}} - p_{\text{н}}).$$

Рассмотрим частный случай пуассонова распределения

$$p(n, \tau) = \frac{(\mu\tau)^n}{n!} e^{-\mu\tau},$$

где  $\mu$  — средняя частота нулей. В этом частном случае

$$\begin{aligned} B(\tau) = a^2 e^{-\mu\tau} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu\tau)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \\ = a^2 e^{-\mu\tau} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mu\tau)^k}{k!} \end{aligned}$$

или

$$B(\tau) = a^2 e^{-2\mu\tau}. \quad (28.1)$$

Отсюда находим и спектр [по (27.12)]

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} a^2 \int_0^{\infty} e^{-2\mu\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{2}{\pi} a^2 \frac{2\mu}{4\mu^2 + \omega^2}. \quad (28.2)$$

Мы получили требуемый результат, опираясь на основные определения  $B(\tau)$  и  $G(\omega)$ . Однако этот же результат можно получить гораздо быстрее, минуя составление и интегрирование двумерного распределения — точнее говоря, заменяя соответствующую часть вычисления устным рассуждением. Вот, к примеру, рассуждение Райса ([30] стр. 118 перевода):

Рассмотрим произведение  $\xi\xi_\tau$ . Оно равно либо  $a^2$ , либо  $-a^2$  в зависимости от того, четно или нечетно число нулей на интервале  $\tau$ . Среднее значение произведения  $\xi\xi_\tau$  будет поэтому равно  $a^2 p_q$  плюс  $(-a^2) p_n$ , где  $p_q$  и  $p_n$  — вероятности появления четного и нечетного числа нулей на интервале  $\tau$ . Итак,

$$B(\tau) = a^2 (p_q - p_n)$$

(в подлиннике рассуждение лишь немного длиннее).

В качестве следующего примера возьмем стационарный случайный процесс, характеризующийся тем, что на интервале  $T_k$  между двумя случайно расположенными точками процесс имеет случайное, но неизменное значение  $\xi_k$  ([6], стр. 372—376). График возможной реализации такого процесса показан на рис. 48. Для нахождения функции корреляции потребуются рассуждение, отличающееся от предыдущего.

Произведение двух значений  $\xi(t)$  и  $\xi(t + \tau)$  будет различно в зависимости от того, лежат ли моменты  $t$  и  $t + \tau$  в одном и том же интервале  $T_k$  или в различных. В первом случае

$$\xi(t)\xi(t + \tau) = \xi_k^2.$$

Во втором случае

$$\xi(t)\xi(t + \tau) = \xi_i \xi_k$$

и для получения функции корреляции нужно сложить усредненные по множеству значения этих произведений, умноженные на соответствующие вероятности. Итак, мы должны прежде всего найти вероятность того, что отрезок длиной  $\tau$  укладывается полностью на интервале  $T_k$ . Эта вероятность равна вероятности того, что на протяжении отрезка длиной  $\tau$ , случайным образом брошенного на ось времен, не окажется ни одной границы между интервалами  $T_k$ , т. е. ни одного нуля. Эта вероятность сразу

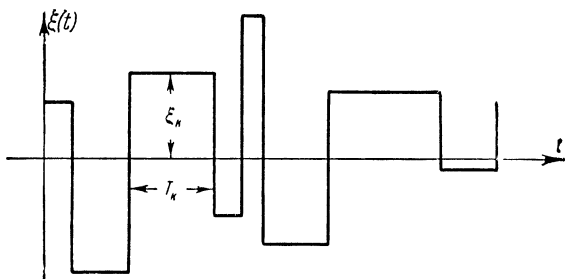


Рис 48.

определяется, если дано распределение  $p(n, \tau)$ : искомая вероятность есть  $p(0, \tau)$ . Так, в случае пуассонова распределения

$$p(0, \tau) = e^{-\mu\tau} = p(\tau).$$

Вероятность того, что отрезок  $\tau$  не вмещается в интервал  $T_k$  (т. е. что  $t$  и  $t + \tau$  находятся в разных интервалах, например,  $T_k$  и  $T_i$ ) равна, очевидно,  $1 - p(\tau)$ . Таким образом, для функции корреляции имеем

$$B(\tau) = M(\xi_k^2) p(\tau) + M(\xi_i \xi_k) [1 - p(\tau)].$$

Считая, что  $\xi_i$  и  $\xi_k$  независимы и одинаково распределены, что  $M(\xi) = 0$  и что, следовательно,  $M(\xi_i \xi_k) = 0$ , получим

$$B(\tau) = M(\xi^2) p(\tau),$$

а для случая пуассонова распределения

$$B(\tau) = M(\xi^2) e^{-\mu\tau}. \quad (28.3)$$



Отсюда сейчас же находится и спектр

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} M(\xi^2) \frac{\mu}{\mu^2 + \omega^2}. \quad (28.4)$$

Интересно отметить различие формул (28.1) и (28.3). Казалось бы, ранее рассмотренный процесс рис. 46 является частным случаем процесса рис. 48 и что можно получить выражение для функции корреляции для процесса рис. 46 из формулы (28.3), положив в ней

$$M(\xi^2) = a^2.$$

Как видим, это не так. Разница объясняется тем, что для процесса рис. 46, принимающего попеременно значения  $\pm a$ , нельзя просто положить

$$M(\xi_i \xi_k) = 0,$$

как это сделано для более общего процесса рис. 48. Произведение  $\xi_i \xi_k$  принимает попеременно значения  $\pm a^2$ , так что имеется зависимость от расстояния между интервалами (т. е. от разности  $k - i$ ), т. е. в конечном счете от  $\tau$ . Эту зависимость мы и учитываем, когда берем вероятности четных и нечетных чисел нулей, что и приводит к убыванию функции корреляции по закону  $e^{-2\mu\tau}$ , а не  $e^{-\mu\tau}$ .

В предыдущих примерах спектр вычислялся, как преобразование Фурье для функции корреляции. Покажем теперь ход вычисления, когда за основу берется формула

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_T(\omega)|^2.$$

В качестве примера возьмем процесс  $\pm a$  с переменной знака в случайные моменты (рис. 45) (см. [10] стр. 48—49, [18] стр. 194—196). Выражение для реализации можно записать в виде

$$\xi(t) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sigma(t - t_k).$$

Для текущего спектра будем иметь

$$S_T(\omega) = a \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sigma(t - t_k) \right] e^{-j\omega t} dt.$$

Поменяем порядок операций суммирования и интегрирования, и, заодно, заменим пределы, положив

$$T = nT_{\text{ср}},$$

где  $T_{\text{ср}} = \frac{1}{\mu}$  — средний интервал между соседними нулями.

Тогда получим

$$S_T(\omega) = a \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t - t_k) e^{-j\omega t} dt.$$

Интеграл выражает спектр запаздывающей единичной функции (см. § 11), так что

$$S_T(\omega) = \frac{a^2}{j\omega} \sum_{k=1}^n (-1)^k e^{-j\omega t_k}.$$

Для получения квадрата модуля умножим на сопряженную величину

$$|S_T(\omega)|^2 = S_T(\omega) S_T^*(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} e^{-j\omega(t_k - t_l)}.$$

Итак, выражение для спектра случайного процесса имеет вид

$$G(\omega) = \frac{a^2 \mu}{\pi \omega^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} e^{-j\omega(t_k - t_l)}.$$

Введем  $m = k - l$  и перепишем двойную сумму в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (-1)^{k+l} e^{-j\omega(t_k - t_l)} &= \\ &= \frac{1}{n} \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} (n - m) (-1)^m e^{-j\omega(t_{l+m} - t_l)}. \end{aligned}$$

(Дело в том, что всего имеется  $n^2$  слагаемых. Из них для  $n$  слагаемых  $m = 0$ ; для  $n - 1$  слагаемых  $m = 1$  и для такого же числа  $m = -1$ ; для  $n - 2$  слагаемых  $m = 2$  и для  $n - 2$  слагаемых  $m = -2$  и так далее.)

Рассмотрим отдельно экспоненциальный множитель. Его можно преобразовать следующим образом:

$$e^{-j\omega(t_{l+m}-t_l)} = e^{-j\omega(t_{l+m}-t_{l+m-1})} e^{-j\omega(t_{l+m-1}-t_{l+m-2})} \dots \\ \dots e^{-j\omega(t_{l+1}-t_l)} = e^{-j\omega T_1} e^{-j\omega T_2} \dots e^{-j\omega T_m} = \prod_{i=1}^m e^{-j\omega T_i},$$

где  $T_i$  — последовательность интервалов между нулями на промежутке  $t_k - t_l = t_{l+m} - t_l$ .

Внесем теперь множитель  $\frac{1}{n}$  под знак суммы, перейдем к пределу, и запишем отдельно суммы для положительных и отрицательных  $m$ . Получим

$$G(\omega) = \frac{a^2 \mu}{\pi \omega^2} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \prod_{i=1}^m e^{-j\omega T_i} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \prod_{i=1}^m e^{+j\omega T_i} \right].$$

Для завершения вычисления мы должны были бы знать последовательность  $T_i$ , определяющую данную реализацию. Эта последовательность нам не дана; дана плотность распределения  $\varphi(T)$  интервалов  $T_i$ . Поэтому на данном этапе мы прибегаем к усреднению по множеству.

Задача состоит в нахождении среднего значения суммы

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \prod_{i=1}^m e^{-j\omega T_i}.$$

Предположим, что интервалы  $T_i$  статистически независимы. Тогда независимы и величины  $e^{-j\omega T_i}$  и среднее произведение равно произведению средних. Мы можем записать

$$M \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \prod_{i=1}^m e^{-j\omega T_i} \right] = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \prod_{i=1}^m M(e^{-j\omega T_i}).$$

Предполагается, что все интервалы  $T_i$  имеют одинаковое распределение, выражаемое плотностью  $\varphi(T)$ . Тогда

$$M(e^{-j\omega T_i}) = \int_0^{\infty} \varphi(T) e^{-j\omega T} dT = \chi(\omega),$$

т. е. среднее значение  $e^{-j\omega T}$  есть преобразование Фурье для плотности вероятностей  $\varphi(T)$ . Функция  $\chi(\omega)$  называется характеристической функцией. Теперь мы можем записать

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \prod_{i=1}^m M(e^{-j\omega T_i}) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \chi^m(\omega) = -\frac{\chi(\omega)}{1 + \chi(\omega)}.$$

Вторая сумма дает сопряженную величину. Складывая комплексно-сопряженные величины, получаем удвоенную действительную часть, так что окончательно

$$G(\omega) = \frac{a^2 \mu}{\pi \omega^2} \left[ 1 - 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\chi(\omega)}{1 + \chi(\omega)} \right) \right].$$

Определим спектр для частного случая пуассонова распределения нулей

$$\varphi(T) = \mu e^{-\mu T}.$$

Найдем характеристическую функцию

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} \varphi(T) e^{-j\omega T} dT = \mu \int_0^{\infty} e^{-(\mu + j\omega)T} dT = \frac{\mu}{\mu + j\omega}.$$

Далее

$$\frac{\chi(\omega)}{1 + \chi(\omega)} = \frac{\mu}{2\mu + j\omega},$$

и в результате

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} a^2 \frac{2\mu}{4\mu^2 + \omega^2},$$

что совпадает с (28.2).

## § 29. Понятие спектра в применении к нестационарным процессам

В предыдущем мы занимались только эргодическими стационарными процессами. Но на практике приходится иметь дело и с процессами нестационарными, причем существенно, что такие процессы встречаются достаточно часто и имеют большое значение. К числу нестационарных процессов относятся многие виды сигналов связи. Так,

например, обычное модулированное колебание

$$\eta(t) = \xi(t) \cos \omega t,$$

где  $\xi(t)$  — стационарный случайный процесс, является процессом нестационарным, что сразу видно хотя бы из того, что одномерное распределение пропорционально  $\cos \omega t$ , т. е. зависит от времени. При таком положении необходимо поставить вопрос о применимости спектральных представлений к некоторому интересующему нас классу нестационарных процессов. Дело сводится, конечно, к некоторому пересмотру и расширению определений, которыми мы до сих пор пользовались.

Как мы видели (см. § 27), вычисление спектра случайного процесса непременно связано с операцией усреднения. Для эргодических стационарных процессов средние по множеству и по времени с вероятностью единица равны друг другу. Поэтому безразлично, каким способом усреднения мы воспользуемся. Выбор усреднения определяется тем, как нам задан случайный процесс. В условиях эксперимента мы имеем дело обычно с отдельной реализацией случайного процесса; в этих условиях мы прибегаем к усреднению по времени. При теоретическом же исследовании случайный процесс задается распределением вероятностей, и в этом случае мы пользуемся усреднением по множеству.

Представим случайный процесс как функцию  $\xi(\vartheta, t)$  двух переменных: случайного параметра  $\vartheta$  и непрерывно текущего времени  $t$ . Зафиксировав некоторый момент  $t = t_0$ , мы получим случайную величину  $\xi(\vartheta, t_0)$ , распределение которой в общем случае зависит от  $t_0$ . Закрепив же некоторое значение случайного параметра  $\vartheta$ , мы получаем одну из возможных реализаций случайного процесса, представляющую собой уже неслучайную функцию времени.

Операция усреднения есть в сущности операция интегрирования с тем или иным весом. Так, среднее по времени находится из выражения

$$\overline{\xi(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \xi(t) dt.$$

Среднее по множеству вычисляется, как

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) dx.$$

Но если мы имеем дело с функцией двух переменных, то, в общем случае, усреднение по одной переменной даст величину, зависящую от второй переменной, и наоборот. Применительно к случайным процессам это значит, что среднее по множеству, в общем случае, зависит от времени, а средние по времени образуют случайное множество. Эргодический стационарный процесс тем и замечателен, что для него средние по времени и по множеству равны друг другу, а из этого непосредственно следует, что они не зависят от второй переменной (так как функции разных аргументов могут быть равны друг другу только в том случае, когда эти функции представляют собой постоянные, т. е. величины, не зависящие от аргументов).

Таким образом, среднее для нестационарного процесса, рассматриваемого как функция двух переменных, может определяться как результат двукратного усреднения — по множеству и по времени. Порядок усреднения безразличен, так как дело сводится всего лишь к изменению порядка интегрирования. Так, произведя для нестационарного процесса усреднение по множеству, мы получим величину, зависящую от времени; для устранения этой зависимости следует произвести повторное усреднение, на этот раз по времени. Усредняя сперва по времени, получим случайное множество; требуется дополнительная операция усреднения по этому множеству.

Для полноты картины следовало бы разобрать вопрос о том, для какого класса нестационарных процессов среднее в указанном смысле, во-первых, существует, а во-вторых, не лишается того физического смысла, который мы обычно усредняемой величине приписываем. Не предпринимая здесь такого исследования, заметим лишь, что в качестве примеров в дальнейшем рассматриваются только такие нестационарные процессы, для которых функция корреляции и спектр, вычисленные путем двойного усреднения, сохраняют свой

обычный смысл\*). Во избежание недоразумений мы будем называть функцию корреляции и спектр нестационарных процессов, полученные двукратным усреднением, *средней* функцией корреляции и *средним* спектром.

Покажем теперь, что средние функция корреляции и спектр по-прежнему связаны между собой парой преобразования Фурье. В качестве исходных возьмем следующие два определения:

$$B(\tau, t) = M[\xi(t)\xi(t-\tau)], \quad G(\omega) = \frac{1}{\pi} M\left(\frac{\partial}{\partial t} |S_t(\omega)|^2\right).$$

Запишем выражение для текущего спектра

$$S_t(\omega) = \int_{-\infty}^t \xi(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1$$

и умножим на сопряженную величину

$$S_t(\omega) S_t^*(\omega) = |S_t(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \xi(t_1) \xi(t_2) e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2.$$

Введем

$$\tau = t_1 - t_2$$

и разобьем область интегрирования на две, как показано на рис. 49. Это даст

$$\begin{aligned} |S_t(\omega)|^2 = & \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^0 \xi(t_1) \xi(t_1 - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \\ & + \int_{-\infty}^t dt_2 \int_0^{\infty} \xi(t_2) \xi(t_2 + \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Усредним обе части этого равенства по множеству, замечая, что

$$\begin{aligned} M[\xi(t_1)\xi(t_1 - \tau)] &= B(t_1, t_1 - \tau) = B(\tau, t_1) = M[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \\ &= M[\xi(t_2)\xi(t_2 + \tau)]. \end{aligned}$$

---

\*) Бунимович [3] применяет двойное усреднение, имея в виду нестационарные процессы вида  $\eta(t) = \psi[\xi(t), f(t)]$ , где  $\psi$  — знак некоторой функции,  $\xi(t)$  — случайный процесс,  $f(t)$  — периодическая или почти-периодическая функция. Все примеры следующего параграфа принадлежат этому классу.

Мы получим

$$M |S_t(\omega)|^2 = 2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_0^{\infty} B(\tau, t_1) \cos \omega \tau d\tau.$$

Дифференцируя по  $t$  и подставляя результат в исходное определение спектра, находим

$$G(\omega, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau, t) \cos \omega \tau d\tau.$$

Отсюда усреднением по времени получаем связь между средним спектром и средней функцией корреляции

$$\overline{G(\omega, t)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{B(\tau, t)} \cos \omega \tau d\tau.$$

Справедливо и обратное преобразование

$$\overline{B(\tau, t)} = \int_0^{\infty} \overline{G(\omega, t)} \cos \omega \tau d\omega$$

(сравни с формулами (27.11) и (27.12)).

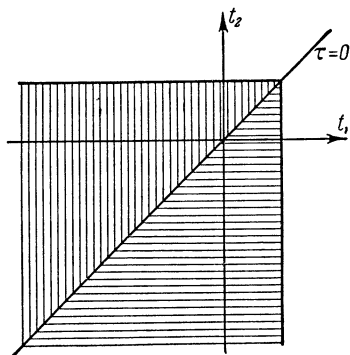


Рис. 49.

Вывод из всего сказанного состоит в том, что мы можем воспользоваться для вычисления функций корреляции и



спектров нестационарных процессов формулами, приведенными в § 27, добавив в них второе усреднение. С точки зрения вычислений существенно, что это второе усреднение может производиться на любом этапе вычисления, как показано на примерах следующего параграфа.

### § 30. Спектры некоторых нестационарных процессов

Отличительным признаком нестационарного (в широком смысле) процесса является то, что его одно- и двумерные распределения или соответственно первый и второй моменты зависят от времени. Иначе говоря, нестационарность выражается в том, что среднее значение, либо дисперсия, либо функция корреляции являются функциями времени. Мы будем применять этот критерий в рассматриваемых ниже примерах.

В качестве первого примера рассмотрим случайный процесс, характеризующийся тем, что случайная величина принимает одно из двух равновероятных значений  $\pm a$ ; переменна знака может происходить только в фиксированные моменты

$$t = t_k = kT_0.$$

К описанному случайному процессу сводится, например, телеграфный сигнал при передаче равномерным кодом. На рис. 50 изображена одна из реализаций.

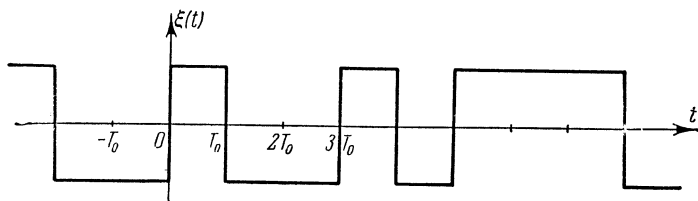


Рис. 50.

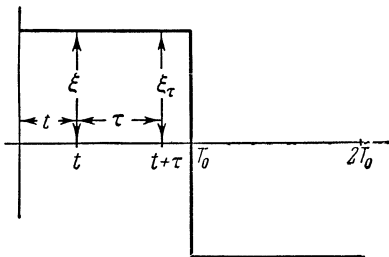
Составим выражение для распределения вероятностей. Одномерное распределение состоит из двух вероятностей

$$p(a) = p(-a) = \frac{1}{2}.$$

Выражение для одномерной плотности вероятностей можно записать с помощью дельта-функций

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} [\delta(x-a) + \delta(x+a)].$$

Одномерное распределение, как видим, от времени не зависит. Теперь рассмотрим распределение для двумерной величины  $\xi, \xi_\tau$ , представляющей собой совокупность двух значений случайного процесса, отстоящих друг от друга на  $\tau$ . Двумерное распределение, оказывается зависит, от времени. Именно, если



$$t + \tau < T_0,$$

Рис. 51.

то моменты  $t$  и  $t + \tau$  находятся внутри одного и того же интервала  $T_0$  и, следовательно,  $\xi$  и  $\xi_\tau$  имеют одинаковый знак (рис. 51). Таким образом,

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [\delta(x_1 - a, x_2 - a) + \delta(x_1 + a, x_2 + a)]$$

$$t + \tau < T_0.$$

Если же

$$t + \tau > T_0,$$

то  $\xi$  и  $\xi_\tau$  с равной вероятностью могут иметь любые знаки и, стало быть,

$$\varphi_2(x_1, x_2) = \frac{1}{4} [\delta(x_1 - a, x_2 - a) + \delta(x_1 + a, x_2 + a) + \delta(x_1 - a, x_2 + a) + \delta(x_1 + a, x_2 - a)] \quad t + \tau > T_0.$$

Таким образом, двумерная плотность вероятностей имеет на разных интервалах разные выражения, а это и значит, что она зависит не только от  $\tau$ , но и от  $t$ . Итак, рассматриваемый процесс нестационарен.

Как указывалось выше, усреднение может производиться на любом этапе вычисления. Воспользовавшись этим, усредним сразу по времени самое двумерное распределение.

Мы имеем

$$\varphi(x_1, x_2, \tau, t) = \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2) & \text{при } t + \tau \leq T_0, \\ \varphi_2(x_1, x_2) & \text{при } t + \tau > T_0. \end{cases}$$

Перепишем неравенство

$$t + \tau < T_0$$

в виде

$$0 < t < T_0 - \tau.$$

Усредняя распределение по интервалу  $T_0$ , получим

$$\overline{\varphi(x_1, x_2, \tau, t)} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0 - \tau} \varphi_1(x_1, x_2) dt = \left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right) \varphi_1(x_1, x_2)$$

для  $\tau$ , находящегося в интервале  $0, T_0$ . При

$$t + \tau > T_0,$$

то есть при

$$T_0 - \tau < t < \infty$$

получим, усредняя по интервалу  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\overline{\varphi(x_1, x_2, \tau, t)} = \varphi_2(x_1, x_2)$$

для  $\tau$  в интервале  $T_0, \infty$ . Итак, для усредненного распределения можем записать

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \tau) &= \overline{\varphi(x_1, x_2, \tau, t)} = \\ &= \frac{1}{2} [\delta(x_1 - a, x_2 - a) + \\ &+ \delta(x_1 + a, x_2 + a)] \left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right) \quad \text{при } 0 < \tau < T_0, \\ &= \frac{1}{4} [\delta(x_1 - a, x_2 - a) + \delta(x_1 + a, x_2 + a) + \\ &+ \delta(x_1 - a, x_2 + a) + \delta(x_1 + a, x_2 - a)] \\ &\quad \text{при } T_0 < \tau < \infty. \end{aligned}$$

Подставляя усредненное распределение в формулу

$$\overline{B(\tau, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \overline{\varphi(x_1, x_2, \tau, t)} dx_1 dx_2,$$

найдем среднюю функцию корреляции

$$\overline{B(\tau, t)} = \begin{cases} a^2 \left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right) & 0 < \tau < T_0, \\ 0 & T_0 < \tau < \infty, \end{cases}$$

а затем и средний спектр

$$\begin{aligned} \overline{G(\omega, t)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{B(\tau, t)} \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} a^2 \int_0^{T_0} \left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right) \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} a^2 T_0 \left( \frac{\sin \omega \frac{T_0}{2}}{\omega \frac{T_0}{2}} \right)^2. \end{aligned} \quad (30.1)$$

Для второго примера возьмем процесс несколько более общего вида: ось времени по-прежнему разбита на равные интервалы  $T_0$ ; в каждом интервале случайная величина

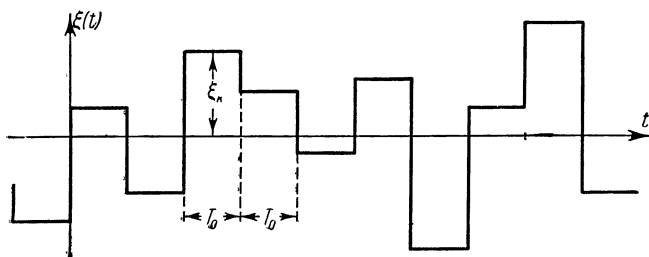


Рис. 52.

принимает независимые значения  $\xi_k$ , определяемые плотностью вероятностей  $\varphi(x)$  (рис. 52). Для двумерной плотности вероятностей имеем следующие выражения:

$$\varphi(x_1, x_2, \tau, t) = \begin{cases} \varphi(x_1) \delta(x_1 - x_2) & t + \tau < T_0, \\ \varphi(x_1) \varphi(x_2) & t + \tau > T_0. \end{cases}$$

Если  $M(\xi) = 0$ , то после усреднения находим для функции корреляции и спектра

$$\overline{B(\tau, t)} = \begin{cases} M(\xi^2) \left(1 - \frac{\tau}{T_0}\right) & 0 < \tau < T_0, \\ 0 & T_0 < \tau < \infty, \end{cases}$$

$$\overline{G(\omega, t)} = \frac{1}{\pi} T_0 M(\xi^2) \left( \frac{\sin \omega \frac{T_0}{2}}{\omega \frac{T_0}{2}} \right)^2. \quad (30.2)$$

Рассмотренный процесс можно представить, как последовательность прямоугольных импульсов со скважностью единица, модулированных по амплитуде. Нужно заметить, что спектры различных видов импульсной модуляции удобнее находить, исходя из текущего спектра, подобно тому, как это было показано в § 28.

Рассмотрим общий случай амплитудно-импульсной модуляции. Процесс представляет собой последовательность

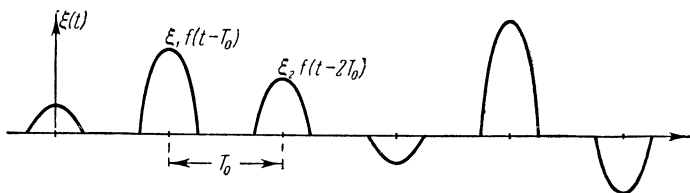


Рис. 53.

импульсов произвольной формы  $f(t)$ , модулированных по амплитуде, т. е. умноженных на случайный множитель  $\xi_k$  (рис. 53). Такой процесс может быть записан в виде

$$\eta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k f(t - kT_0).$$

Составим выражение для текущего спектра

$$S_T(\omega) = \int_0^T \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k f(t - kT_0) \right] e^{-j\omega t} dt.$$

Переменим порядок действий с одновременной заменой пределов

$$S_T(\omega) = \sum_{k=1}^n \xi_k \int_{-\infty}^{\infty} f(t - kT_0) e^{-j\omega t} dt = A(\omega) \sum_{k=1}^n \xi_k e^{-jk\omega T_0},$$

где

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

— спектр одиночного импульса, представляемого функцией  $f(t)$ . Умножим  $S_T(\omega)$  на сопряженную величину

$$S_T(\omega) S_T^*(\omega) = |S_T(\omega)|^2 = |A(\omega)|^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \xi_k \xi_l e^{-j(k-l)\omega T_0}.$$

Остается разделить на  $T = nT_0$ , перейти к пределу при  $T \rightarrow \infty$  и взять среднее по множеству

$$\overline{G(\omega, t)} = \frac{1}{\pi T_0} M \left\{ |A(\omega)|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \xi_k \xi_l e^{-j(k-l)\omega T_0} \right\}.$$

Мы будем иметь  $n$  членов, для которых  $k = l$ ; после суммирования и деления на  $n$  эти члены дадут в среднем  $M(\xi^2)$ . Среднее значение произведения  $\xi_k \xi_l$  (в предположении, что  $\xi_k$  и  $\xi_l$  независимы) равно произведению средних, т. е.  $(M\xi)^2$ ; эта величина выходит из-под знака суммы. Вводя  $m = k - l$ , после преобразований, аналогичных проделанным в § 28, получим

$$\overline{G(\omega, t)} = \frac{1}{\pi T_0} |A(\omega)|^2 \left\{ M(\xi^2) - (M\xi)^2 - (M\xi)^2 \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-jm\omega T_0} \right\}$$

(здесь слагаемое  $-(M\xi)^2$  добавлено для того, чтобы сумма включала это слагаемое, соответствующее значению  $m = 0$ ). Сумма в правой части представляет в виде ряда Фурье некоторую периодическую функцию частоты. Легко видеть, что эта функция есть не что иное, как последовательность дельта-функций вида

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{m=1}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0),$$

в чем можно убедиться, разложив функцию  $F(\omega)$  в ряд Фурье. Функция  $F(\omega)$  представляет собой линейчатый гармонический спектр;  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  — основная частота спектра, равная частоте следования импульсов. Таким образом  $G(\omega)$  содержит сплошную и дискретную части; последняя отсутствует при  $M\xi = 0$ . Окончательное выражение для спектра записывается в виде

$$\overline{G(\omega, t)} = \frac{1}{\pi T_0} |A(\omega)|^2 [M(\xi^2) - (M\xi)^2 + (M\xi)^2 F(\omega)]. \quad (30.3)$$

Применим эту формулу к процессу рис. 52, представляющему собой последовательность прямоугольных импульсов длительностью  $T_0$ . В этом случае мы имеем

$$A(\omega) = T_0 \frac{\sin \omega \frac{T_0}{2}}{\omega \frac{T_0}{2}}, \quad M(\xi) = 0$$

и, следовательно,

$$\overline{G(\omega, t)} = \frac{1}{\pi} T_0 M(\xi^2) \left( \frac{\sin \omega \frac{T_0}{2}}{\omega \frac{T_0}{2}} \right)^2$$

— результат, полученный ранее другим способом.

Разберем теперь случай импульсов, модулированных по фазе. Процесс представляет собой последовательность им-

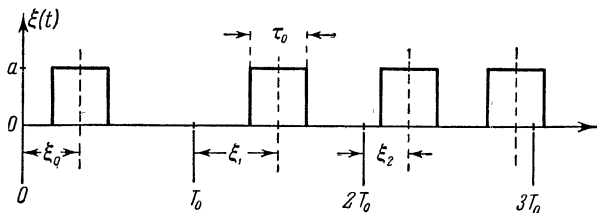


Рис. 54.

пульсов одинаковой формы и величины, имеющих случайные смещения  $\xi_k$  во времени относительно фиксированных равноотстоящих моментов  $kT_0$ ; иначе говоря, период сле-

дования импульсов  $T_0$  получает случайные приращения  $\varepsilon_k$ . Величины  $\varepsilon_k$  предполагаются независимыми; процесс задается одномерным распределением  $\varphi(\varepsilon)$ . На рис. 54 к примеру изображены прямоугольные импульсы. Мы не будем составлять выражения для двумерного распределения; заметим лишь, что произведение  $\xi\xi_\tau$  равно  $a^2$  при одновременном выполнении двух условий

$$\left. \begin{aligned} kT_0 + \varepsilon_k - \frac{1}{2} \tau_0 < t < kT_0 + \varepsilon_k + \frac{1}{2} \tau_0, \\ lT_0 + \varepsilon_l - \frac{1}{2} \tau_0 < t + \tau < lT_0 + \varepsilon_l + \frac{1}{2} \tau_0. \end{aligned} \right\}$$

Если хотя бы одно из этих неравенств не соблюдается, то  $\xi\xi_\tau = 0$ . Отсюда видно, что функция корреляции зависит не только от  $\tau$ , но и от  $t$ , так что рассматриваемый процесс нестационарен.

Мы будем вычислять спектр непосредственно для импульсов произвольной формы. Процесс можно записать в виде

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT_0 - \varepsilon_k),$$

где  $f(t)$  — по-прежнему функция, представляющая отдельный импульс. Текущий спектр выражается, как

$$S_T(\omega) = \int_0^T \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT_0 - \varepsilon_k) \right] e^{-j\omega t} dt$$

или, после перемены порядка действий и замены пределов,

$$S_T(\omega) = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t - kT_0 - \varepsilon_k) e^{-j\omega t} dt = A(\omega) \sum_{k=1}^n e^{-j\omega(kT_0 + \varepsilon_k)},$$

где  $A(\omega)$  — спектр одиночного импульса. Далее,

$$|S_T(\omega)|^2 = |A(\omega)|^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e^{-j\omega(k-l)T_0} e^{-j\omega\varepsilon_k} e^{j\omega\varepsilon_l}.$$

Усреднение по множеству дает

$$M |S_T(\omega)|^2 = |A(\omega)|^2 |\chi(\omega)|^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n e^{-j\omega(k-l)T_0},$$



где

$$\chi(\omega) = M(e^{-j\omega\varepsilon}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon) e^{-j\omega\varepsilon} d\varepsilon$$

— характеристическая функция распределения  $\varepsilon$ . Преобразуя двойную сумму точно так же, как это делалось раньше, получим

$$\overline{G(\omega, t)} = \frac{1}{\pi T_0} |A(\omega)|^2 \left( 1 - |\chi(\omega)|^2 + |\chi(\omega)|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega m T_0} \right)$$

или

$$\overline{G(\omega, t)} = \frac{1}{\pi T_0} |A(\omega)|^2 [1 - |\chi(\omega)|^2 + |\chi(\omega)|^2 F(\omega)], \quad (30.4)$$

где

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{m=1}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_0).$$

Перейдем теперь к исследованию синусоидальных колебаний, модулированных случайным процессом по амплитуде или по фазе.

Начнем с амплитудной модуляции, как более простой. Случайный процесс, спектр которого мы должны найти, записывается в виде

$$\eta(t) = \xi(t) \cos \omega_0 t,$$

где  $\xi(t)$  — стационарный процесс. Составим произведение

$$\eta(t) \eta(t + \tau) = \frac{1}{2} \xi(t) \xi(t + \tau) [\cos \omega_0 (2t + \tau) + \cos \omega_0 \tau].$$

Усреднив это произведение по множеству, получим

$$B_{\eta}(\tau, t) = \frac{1}{2} B_{\xi}(\tau) [\cos \omega_0 (2t + \tau) + \cos \omega_0 \tau].$$

Сделаем теперь усреднение по времени; первый член в квадратных скобках выпадет, и мы будем иметь

$$\overline{B_{\eta}(\tau, t)} = \frac{1}{2} B_{\xi}(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

Отсюда находим средний спектр

$$\begin{aligned}\overline{G_{\eta}(\omega, t)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \overline{B_{\eta}(\tau, t)} \cos \omega \tau d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) \cos(\omega_0 + \omega) \tau d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} B_{\xi}(\tau) \cos(\omega_0 - \omega) \tau d\tau.\end{aligned}$$

Итак,

$$\overline{G_{\eta}(\omega, t)} = \frac{1}{4} [G_{\xi}(\omega_0 + \omega) + G_{\xi}(\omega_0 - \omega)], \quad (30.5)$$

т. е. спектр модулированного колебания состоит из двух боковых полос, повторяющих спектр модулирующего процесса, и расположенных симметрично относительно несущей частоты  $\omega_0$ . Таким образом, обычное строение спектра амплитудно-модулированного колебания сохраняется и в том случае, когда модулирующая функция есть случайный процесс.

Обратимся к фазовой модуляции. Здесь дело обстоит значительно сложнее [5].

Задача состоит в нахождении спектра случайного процесса вида

$$\xi(t) = \cos \theta_1(t),$$

где  $\theta_1(t)$  — случайный процесс. Но так как по смыслу фаза (аргумент косинуса) должна в среднем расти пропорционально времени, то мы будем рассматривать частный вид фазовой модуляции, выражаемый соотношением

$$\xi(t) = \cos[\omega_0 t + \theta(t)]. \quad (30.6)$$

Здесь  $\theta(t)$  уже может быть стационарным процессом, что мы и будем предполагать.

Прежде всего нужно показать, что процесс (30.6) нестационарен. Для этого составим выражение для плотности вероятностей двумерной случайной величины  $\xi, \xi_{\tau}$ . Мы имеем

$$\left. \begin{aligned}\xi &= \xi(t) = \cos[\omega_0 t + \theta(t)], \\ \xi_{\tau} &= \xi(t + \tau) = \cos[\omega_0(t + \tau) + \theta(t + \tau)].\end{aligned} \right\} \quad (30.7)$$

Плотность вероятностей для двумерной величины  $\theta, \theta_{\tau}$  задана и равна  $\varphi_0(\theta_1, \theta_2, \tau)$ . Искомая плотность  $\varphi_{\xi}(x_1, x_2, \tau)$  должна

быть выражена через  $\varphi_0$ . Дело сводится к замене переменных по известной формуле

$$\varphi_{\xi}(x_1, x_2, \tau) = \varphi_0(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) \frac{1}{\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\vartheta_1, \vartheta_2)}},$$

где

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\vartheta_1, \vartheta_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta_2} \end{vmatrix}$$

— якобиан преобразования. В нашем случае  $x_1$  зависит только от  $\vartheta_1$ , а  $x_2$  — только от  $\vartheta_2$ . Поэтому

$$\varphi_{\xi} = \varphi_0 \frac{1}{\frac{dx_1}{d\vartheta_1} \frac{dx_2}{d\vartheta_2}}$$

и мы имеем:

$$\varphi_{\xi}(x_1, x_2, \tau, t) = \frac{\varphi_0(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau)}{\sin[\omega_0 t + \vartheta_1] \sin[\omega_0(t + \tau) + \vartheta_2]}.$$

Итак, плотность вероятностей  $\varphi_{\xi}$  зависит от времени, и процесс (30.6), следовательно, нестационарен.

Перейдем к вычислению спектра, для чего найдем предельно функцию корреляции. Мы имеем

$$B_{\xi}(\tau, t) = M(\xi \xi_{\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \varphi_{\xi}(x_1, x_2, \tau, t) dx_1 dx_2.$$

В нашем случае

$$\varphi_{\xi}(x_1, x_2, \tau, t) dx_1 dx_2 = \varphi_0(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) d\vartheta_1 d\vartheta_2.$$

Таким образом,

$$B_{\xi}(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \varphi_0(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) d\vartheta_1 d\vartheta_2$$

или, подставляя выражения  $x_1$  и  $x_2$  через  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  из (30.7),

$$\begin{aligned} B_{\xi}(\tau, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \vartheta_1) \cos[\omega_0(t + \tau) + \vartheta_2] \varphi_0(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) d\vartheta_1 d\vartheta_2. \end{aligned}$$

Преобразуя произведение косинусов, получим два члена, один из которых при усреднении по времени выпадает. Таким образом,

$$\begin{aligned}\overline{B_{\xi}(\tau, t)} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 \tau + \vartheta_2 - \vartheta_1) \varphi_{\theta}(\vartheta_1, \vartheta_2, \tau) d\vartheta_1 d\vartheta_2 = \\ &= \frac{1}{2} M[\cos(\omega_0 \tau + \theta_{\tau} - \theta)] = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau M[\cos(\theta - \theta_{\tau})] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \omega_0 \tau M[\sin(\theta - \theta_{\tau})].\end{aligned}$$

Мы ограничимся случаем симметричного распределения разности

$$\zeta(\tau, t) = \theta(t) - \theta(t + \tau).$$

В этом случае второй член выпадает, и мы получаем

$$\overline{B_{\xi}(\tau, t)} = \frac{1}{2} \cos \omega_0 \tau M[\cos \zeta(\tau, t)].$$

Отсюда находим спектр процесса  $\xi(t)$

$$\begin{aligned}\overline{G_{\xi}(\omega, t)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega_0 \tau \cos \omega \tau M(\cos \zeta) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} M(\cos \zeta) \cos(\omega_0 + \omega) \tau d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} M(\cos \zeta) \cos(\omega_0 - \omega) \tau d\tau\end{aligned}$$

или

$$\overline{G_{\xi}(\omega, t)} = \frac{1}{4} [G(\omega_0 + \omega) + G(\omega_0 - \omega)]. \quad (30.8)$$

Итак, и в случае фазовой модуляции спектр состоит, как и следовало ожидать, из двух боковых полос. Спектр каждой из них выражается формулой

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} M(\cos \zeta) \cos \omega \tau d\tau. \quad (30.9)$$

Найдем среднее значение  $\cos \zeta$ . Пусть  $\theta$  имеет нормальное распределение; в таком случае и разность

$$\zeta = \theta - \theta_\tau$$

также имеет нормальное распределение, полностью определяемое дисперсией

$$\begin{aligned} D(\zeta) &= \sigma^2 = M(\theta - \theta_\tau)^2 = M\theta^2 + M\theta_\tau^2 - 2M\theta\theta_\tau = \\ &= 2[D(\theta) - B_\theta(\tau)] = 2[B_\theta(0) - B_\theta(\tau)], \end{aligned}$$

и мы можем теперь найти

$$\begin{aligned} M(\cos \zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos z \varphi(z) dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} \cos z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz = \\ &= e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} = e^{-[B_\theta(0) - B_\theta(\tau)]} \end{aligned}$$

и выражение для спектра

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega \tau e^{-[B_\theta(0) - B_\theta(\tau)]} d\tau. \quad (30.10)$$

Эта формула выражает спектр фазово-модулированного колебания через функцию корреляции модулирующего процесса, распределение которого предполагается нормальным \*). Чтобы довести вычисления до конца, мы рассмотрим частный случай; будем иметь в виду частотную модуляцию с большим индексом.

В случае частотной модуляции задается не непосредственно процесс  $\theta(t)$ , а процесс

$$\nu(t) = \frac{d\theta}{dt},$$

выражающий мгновенное отклонение частоты от среднего значения  $\omega_0$ . Таким образом, мы можем записать для частотно-модулированного колебания

$$\xi(t) = \cos \left[ \omega_0 t + \int \nu(t) dt \right].$$

---

\*) Аналогичная формула иным путем получена Задэ [32].

Спектр процесса  $\xi(t)$  нужно выразить через характеристики процесса  $\gamma(t)$ . Удобно воспользоваться преобразованием Фурье. Если

$$B_{\gamma}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{\gamma}(\omega) \cos \omega \tau d\omega,$$

то

$$B_{\theta}(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2} G_{\gamma}(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

и входящая в предыдущие формулы величина  $\sigma$  может быть выражена через спектр мгновенного частотного отклонения  $G_{\gamma}(\omega)$  следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 = B_{\theta}(0) - B_{\theta}(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2} G_{\gamma}(\omega) (1 - \cos \omega \tau) d\omega.$$

Пусть спектр  $G_{\gamma}$  равномерен и ограничен сверху частотой  $\Omega$ , т. е.

$$G_{\gamma}(\omega) = \begin{cases} g = \text{const} & 0 < \omega < \Omega, \\ 0 & \Omega < \omega < \infty. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \sigma^2 = g \int_0^{\Omega} \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega^2} d\omega.$$

Для наших целей удобно представить этот интеграл в следующем виде:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 = g \Omega \frac{1}{2} \tau^2 f(\Omega \tau),$$

где

$$f(\Omega \tau) = 1 - \frac{2}{3 \cdot 4!} (\Omega \tau)^2 + \frac{2}{5 \cdot 6!} (\Omega \tau)^4 - \dots$$

Произведение

$$g \Omega = \int_0^{\infty} G_{\gamma}(\omega) d\omega$$

есть средний квадрат процесса  $\nu(t)$ , т. е. средний квадрат отклонения частоты от среднего значения. Обозначим эту величину через  $\Delta\omega^2$ . Введя обозначение индекса модуляции

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Omega},$$

можем переписать выражение для  $\sigma^2$  в виде

$$\frac{1}{2} \sigma^2 = \frac{1}{2} \beta^2 (\Omega\tau)^2 f(\Omega\tau).$$

Теперь перейдем к приближению для случая [5] большого индекса, т. е. для  $\beta \gg 1$ .

Случай большого индекса характеризуется тем, что в выражении для искомого спектра

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega\tau e^{-\frac{1}{2} \beta^2 (\Omega\tau)^2 f(\Omega\tau)} d\tau$$

экспоненциальный множитель убывает тем быстрее, чем больше  $\beta$ . Это значит, что подынтегральное выражение становится пренебрежимо малым при тех меньших значениях  $\tau$ , чем больше  $\beta$ . Следовательно, при большом  $\beta$  можно ограничиться малыми значениями  $\tau$ . На этом и основано приближение. В частности, можно положить

$$f(\Omega\tau) \simeq 1$$

с погрешностью, не превосходящей 0,01, если  $\Omega\tau \leq 0,6$ . При этом условии будем иметь

$$e^{-\frac{1}{2} \beta^2 (\Omega\tau)^2 f(\Omega\tau)} \simeq e^{-\frac{1}{2} \beta^2 (\Omega\tau)^2} < \varepsilon,$$

если

$$\beta^2 > \frac{2 \ln \frac{1}{\varepsilon}}{(\Omega\tau)^2},$$

откуда, подставляя наибольшее значение  $\Omega\tau = 0,6$  и выбирая  $\varepsilon = 0,01$ , найдем

$$\beta > 5.$$

Соображения, приводящие к описанному приближению, легко обобщаются на случай произвольного спектра  $G$ ,

модулирующего процесса  $v(t)$  при условии, что ширина  $\Omega$  спектра  $G_v$  достаточно мала по сравнению со среднеквадратичным частотным отклонением  $\Delta\omega$ . Для получения этого более общего результата достаточно в выражении для  $\sigma^2$  разложить  $1 - \cos \omega\tau$  в ряд и сохранить первый член ряда. Это даст

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 &= \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2} G_v(\omega) (1 - \cos \omega\tau) d\tau \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2}\tau^2 \int_0^\Omega G_v(\omega) d\omega = \frac{1}{2}\tau^2 \Delta\omega^2 = \frac{1}{2}\beta^2 (\Omega\tau)^2, \end{aligned}$$

т. е. то же, что и раньше.

Итак, при большом индексе модуляции, или, что то же, при большом частотном отклонении, мы имеем для спектра приближенное выражение

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega\tau e^{-\frac{1}{2}\Delta\omega^2\tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Delta\omega} e^{-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\Delta\omega^2}}. \quad (30.11)$$

Здесь следует отметить, что при большом индексе спектр частотно-модулированного колебания не зависит от формы и ширины спектра модулирующего процесса; спектр определяется лишь частотным отклонением, причем ширина спектра частотно-модулированного колебания пропорциональна частотному отклонению.

### § 31. Замечания об анализе случайных процессов

В этом параграфе обсуждаются некоторые вопросы, относящиеся к технике спектрального анализа случайных процессов и к погрешностям, возникающим при анализе, т. е. при экспериментальном определении спектров. Для простоты будем иметь в виду только стационарные эргодические процессы.

Прежде всего заметим, что, как указывалось выше, в условиях эксперимента мы имеем дело обычно с одной из реализаций случайного процесса. Поэтому в основе действия



анализаторов спектра случайных процессов лежит определение спектра, содержащее усреднение по времени, например

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |S_T(\omega)|^2, \quad (31.1)$$

где

$$S_T(\omega) = \int_0^T \xi(t) e^{-j\omega t} dt$$

— текущий спектр реализации, а величина

$$\frac{1}{\pi} |S_T(\omega)|^2$$

выражает текущий спектр энергии, выделяемой процессом  $\xi(t)$  за время  $T$ . Величина же

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{T} |S_T(\omega)|^2 = G_T(\omega)$$

есть спектральная плотность средней за время  $T$  мощности процесса  $\xi(t)$ . Как  $|S_T(\omega)|$ , так и  $G_T(\omega)$  — случайные величины. Лишь в пределе  $G_T$  сходится к  $G$ , т. е.

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} G_T(\omega). \quad (31.2)$$

Совершенно ясно, что в условиях реального эксперимента мы располагаем только конечным временем  $T$ . Поэтому в результате однократного опыта мы получаем случайную величину  $G_T(\omega)$ , которая, вообще говоря, отличается от истинного значения  $G(\omega)$ . Если же опыт (одной и той же длительности  $T$ ) повторяется многократно, то получается множество значений  $G_T(\omega)$  и в пределе мы могли бы найти истинный спектр, как

$$G(\omega) = M G_T(\omega). \quad (31.3)$$

Перейдем теперь к определению погрешности измерения, т. е. уклонения измеренного спектра от истинного его значения. Сначала определим энергию, выделяемую процессом  $\xi(t)$

за время  $T$ . Эта энергия равна

$$E_T = \int_0^T \xi^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |S_T(\omega)|^2 d\omega$$

или

$$E_T = T \int_0^\infty G_T(\omega) d\omega.$$

Очевидно, что и  $E_T$  — случайная величина. Ее среднее значение есть

$$E = ME_T = TM \int_0^\infty G_T(\omega) d\omega = T \int_0^\infty G(\omega) d\omega.$$

Средний квадрат уклонения  $E_T$  от  $E$  — это и есть средний квадрат ошибки измерения. Таким образом, средний квадрат ошибки выражается непосредственно дисперсией величины  $E_T$

$$\sigma^2 = DE_T = M(E_T^2) - M^2(E_T) = M(E_T^2) - E^2. \quad (31.4)$$

Мы имеем

$$E_T^2 = \left( T \int_0^\infty G_T(\omega) d\omega \right)^2 = T^2 \int_0^\infty \int_0^\infty G_T(\nu_1) G_T(\nu_2) d\nu_1 d\nu_2.$$

Для среднего значения этой величины Райс [29] выводит следующее выражение:

$$M(E_T^2) = T^2 \int_0^\infty \int_0^\infty G(\nu_1) G(\nu_2) \left[ 1 + \left( \frac{\sin(\nu_1 + \nu_2) T/2}{(\nu_1 + \nu_2) T/2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\sin(\nu_1 - \nu_2) T/2}{(\nu_1 - \nu_2) T/2} \right)^2 \right] d\nu_1 d\nu_2, \quad (31.5)$$

откуда

$$\sigma^2 = T^2 \int_0^\infty \int_0^\infty G(\nu_1) G(\nu_2) \left[ \left( \frac{\sin(\nu_1 + \nu_2) T/2}{(\nu_1 + \nu_2) T/2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\sin(\nu_1 - \nu_2) T/2}{(\nu_1 - \nu_2) T/2} \right)^2 \right] d\nu_1 d\nu_2. \quad (31.6)$$

Удобнее нормировать ошибку, т. е. ввести среднеквадратичную относительную ошибку, определив ее как

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Теперь представим себе анализатор в виде идеального фильтра с коэффициентом передачи, равным единице в полосе частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  и равным нулю вне этого интервала. Процесс анализа состоит в измерении энергии, выделяемой на выходе фильтра за время  $T$ . Если анализатор имеет высокую разрешающую способность, то полоса

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1$$

узкая, и мы можем считать, что в пределах этой полосы истинная спектральная плотность постоянна и равна  $g_0$ . В таком случае

$$E = T g_0 \Omega,$$

а для среднего квадрата погрешности имеем

$$\sigma^2 = T^2 g_0^2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[ \left( \frac{\sin(\nu_1 + \nu_2) T/2}{(\nu_1 + \nu_2) T/2} \right)^2 + \left( \frac{\sin(\nu_1 - \nu_2) T/2}{(\nu_1 - \nu_2) T/2} \right)^2 \right] d\nu_1 d\nu_2.$$

Для очень малых  $T$  имеем (полагая  $\sin x/x \approx 1$ )

$$\sigma^2 \simeq 2T^2 g_0^2 \Omega^2$$

и

$$\frac{\sigma}{E} \simeq \sqrt{2};$$

для очень больших  $T$  получается асимптотическое выражение

$$\frac{\sigma}{E} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\Omega T}} = \frac{1}{\sqrt{FT}}.$$

Следует заметить, что асимптотическое выражение вида

$$\frac{\sigma}{E} \sim \frac{A}{\sqrt{\Omega T}}$$

имеет силу не только для идеального фильтра, который мы рассматриваем, но и для других типов фильтров; постоянная  $A$  зависит от свойства фильтра [21].

Для случая полосы, ширина которой мала по сравнению со средней частотой, т. е. при условии

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

подсчитаны [29] значения относительной погрешности как функции аргумента  $FT$  ( $F = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi} \Omega$ ) (выкладки Райса очень громоздки, и мы их не приводим); график этой зависимости представлен на рис. 55. Как видим, ошибка убывает с возрастанием  $T$  очень медленно. Ошибка тем больше,

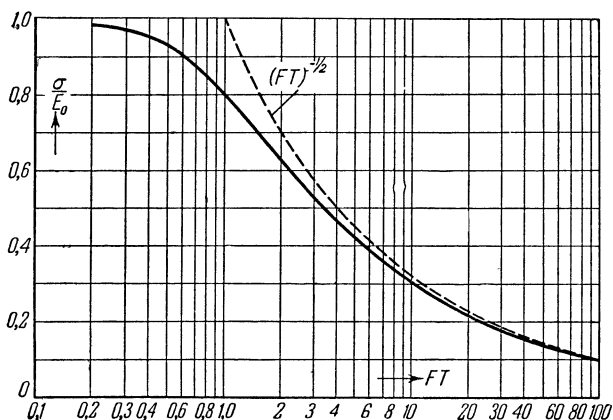


Рис. 55.

чем меньше  $F$ . Так, например, для того чтобы ошибка была меньше 10%, нужно взять  $FT = 100$ ; при разрешающей способности 100 гц измерение должно продолжаться не менее одной секунды.

Заметим, что формула (31.6) выражает погрешность через истинный спектр  $G(\omega)$ , который неизвестен, так как он-то и должен быть определен в результате измерений. Возникающая здесь принципиальная трудность обойдена путем предположения, что спектральная плотность постоянна в узкой полосе  $\Omega$ . Вычислить погрешность только на основании результатов измерения спектра нельзя принципиально.

Для вычисления погрешности нужно знать нечто большее, а именно корреляцию спектра, который является моментом второго порядка; нужно, следовательно, измерять моменты четвертого порядка. Подробности можно найти в специальных работах по этому вопросу [20, 21].

Обратимся теперь к вопросам методики и техники спектрального анализа случайных процессов. Прежде всего отметим, что из основного определения спектра случайного процесса

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

вытекает возможность косвенного измерения спектра, состоящая в том, что из опыта находится функция корреляции  $B(\tau)$ , а затем спектр получается путем преобразования Фурье (которое может выполняться либо путем численной обработки экспериментальных данных, либо при помощи того или иного прибора, выполняющего преобразование Фурье). При таком способе нахождения спектра в качестве основного измерительного прибора применяется не анализатор, а коррелометр. По вопросам измерения функций корреляции имеется обширная литература, обзор которой выходит за рамки нашей темы. Заметим лишь, что существует мнение [6], что определение спектра через функцию корреляции более экономно с точки зрения суммы требуемых измерительных и вычислительных операций, нежели прямое измерение спектра.

Что же касается методов непосредственного анализа, то простейший анализатор представляется в виде набора полосовых фильтров; в качестве выходных индикаторов должны применяться интегрирующие квадратичные приборы, измеряющие энергию. Это — наиболее чистый способ измерения, так как применение ваттметров сводится по существу к интегрированию с весом; весовая функция зависит от свойств как самого прибора, так и схемы его включения, что вносит элемент произвола в результат измерения. Точнее говоря, результат измерения представляет собой величину, определение которой вытекает из свойств измерительного устройства. Пример такого специализированного определения можно видеть в уже цитированной работе Фано [22].

Другой возможный способ анализа состоит в том, что измеряется энергия на выходе фильтра нижних частот с подвижной верхней границей, т. е. энергия в полосе от 0 до  $\omega$ . Эта энергия равна

$$E_T(\omega) = \int_0^{\omega} G_T(\nu) d(\nu).$$

Если найденную функцию продифференцировать по частоте, то получим

$$G_T(\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} E_T(\omega).$$

Возможно применение приема, вообще очень употребительного в технике анализа, а именно периодическое повторение образца анализируемого процесса. Практически это осуществляется путем записи, например, на магнитной ленте, с последующим склеиванием достаточно длинного отрезка записи в кольцо. В месте склейки образуется, разумеется, разрыв если не самой функции, то ее производных. Это обстоятельство оказывает на результат анализа специфическое влияние, с которым иногда приходится считаться [31].

## § 32. О возможностях сжатия спектра

Со времени зарождения техники электрической связи одна проблема не переставала волновать специалистов — проблема уменьшения ширины спектра сигнала, или, короче, проблема сжатия спектра. Многочисленные попытки не привели пока к радикальному решению проблемы в целом. Вместе с тем имеется уже ряд работ, представляющих определенные достижения в частных аспектах проблемы. Не принимая здесь анализа этих работ, ограничимся общей постановкой задачи, для чего нам потребуется привлечь основные понятия теории информации.

Совершенно очевидно, что сжатие спектра некоторого сигнала, рассматриваемого как случайный процесс  $\xi(t)$ , возможно только в результате некоторого преобразования, которому подвергается исходный процесс. Мы образуем новый процесс

$$\eta(t) = \Psi[\xi(t)], \quad (32.1)$$

где  $\Psi$  — символ некоторой функциональной операции, и нужно подобрать операцию  $\Psi$  так, чтобы процесс  $\eta(t)$  обладал более узким спектром, чем исходный процесс  $\xi(t)$ . Если преобразование обратимо, т. е. если существует однозначная обратная операция  $\Psi^{-1}$ , посредством которой исходный процесс может быть восстановлен, т. е.

$$\xi(t) = \Psi^{-1}[\eta(t)] = \Psi^{-1}\{\Psi[\xi(t)]\}, \quad (32.2)$$

то, очевидно, задача полностью решена. Нужно сразу указать, что требование обратимости выполняется далеко не для всех преобразований. Так, например, сокращающая спектр операция, выполняемая идеальным фильтром, и состоящая в полном устранении части спектра процесса — необратима.

Требование полной обратимости (32.2) является очень жестким, и может быть разумным образом смягчено, если опираться на информационное представление об исходном процессе. Именно, можно потребовать, чтобы операция  $\Psi$  была инвариантна по отношению к содержащейся в исходном процессе информации. Иными словами, при преобразовании информация не должна теряться (возрасти она, очевидно, не может, так как в преобразовании не участвует какой-либо источник информации). При такой постановке вопроса можно представить себе, что исходный процесс зависит от двух функций, одна из которых содержит всю информацию, а вторая не содержит информации вовсе. Функция, не несущая информации, может быть добавлена на приемной стороне системы связи; в передаче этой функции надобности нет. Итак, требования к операции  $\Psi$  сводятся теперь к следующим двум: 1) преобразованный процесс  $\eta(t)$  должен обладать более узким спектром и 2) преобразованный процесс должен сохранять информацию исходного процесса.

Напомним теперь некоторые определения, применяемые в теории информации. Мы будем иметь в виду в качестве исходных квантованные процессы, т. е. процессы с дискретным распределением вероятностей, так как в этом случае определения просты и недвусмысленны.

Пусть исходный процесс представляет собой случайную функцию с ограниченным спектром, простирающимся от 0

до  $F^*$ ). По теореме Котельникова такой процесс может быть заменен последовательностью мгновенных значений, отсчитанных через интервалы

$$\Delta t = \frac{1}{2F}.$$

На промежутке  $T$  таких отсчетов будет

$$n = \frac{T}{\Delta t} = 2FT.$$

Пусть, далее, мгновенное значение может принимать одно из  $m$  равновероятных значений. Всего возможно

$$N = m^n \quad (32.3)$$

реализаций. В таком случае информация, содержащаяся в процессе  $\xi(t)$ , определяется, как

$$I = \log_2 N = n \log_2 m, \quad (32.4)$$

или

$$I = 2FT \log m. \quad (32.5)$$

Из этой формулы сразу видно, что при неизменной информации  $I$  для сокращения ширины спектра  $F$  существуют только две возможности: либо за счет увеличения  $T$ , либо за счет увеличения  $m$ . Такого рода преобразования можно осуществить по-разному; ниже приведены два простейших примера.

*Пример 1.* Пусть сигнал  $\xi(t)$  записан, а затем воспроизведен с пониженной скоростью движения носителя. При этом спектр сожмется во столько же раз, во сколько увеличится длительность. Восстановление исходного сигнала производится путем повторной записи с последующим воспроизведением с повышенной скоростью. Происходящие преобразования могут быть записаны в следующем виде

$$\eta(t) = \Psi[\xi(t)] = \xi(at),$$

$$\xi(t) = \Psi^{-1}[\eta(t)] = \eta\left(\frac{1}{a}t\right).$$

---

\*) Мы опускаем здесь тонкости, относящиеся к информационной трактовке теоремы Котельникова (см. сноску на стр. 91).



*Пример 2.* Группа из  $M$  знаков исходной последовательности может быть представлена  $M$ -значным числом, записанным по системе счисления с основанием  $m$ . Но та же группа может быть записана однозначным числом по системе с основанием  $l > m$ , причем, очевидно, должно быть

$$l \geq m^M.$$

При таком преобразовании за одно и то же время нужно передать один знак вместо  $M$  знаков. Это значит, что ширина спектра сокращается в

$$M = \frac{\log l}{\log m}$$

раз.

Возможности сокращения ширины спектра в рамках формулы (32.5), как видим, очень ограничены. Гораздо больший интерес представляют преобразования, затрагивающие статистику сигнала.

Выражение для информации, содержащейся в последовательности из  $n$  символов, может быть в общем случае записано в виде

$$I = nI',$$

где  $I'$  — информация на один символ (энтропия). В уже рассмотренном случае  $m$  равновероятных значений

$$I' = \log m = I'_0. \quad (32.6)$$

Если значения, которые может принимать процесс, неравновероятны, и вероятность  $i$ -го значения обозначена через  $p_i$ , то информация на символ определяется как

$$I' = - \sum_{i=1}^m p_i \log p_i = I'_1. \quad (32.7)$$

Легко видеть, что при

$$p_i = \frac{1}{m}$$

(32.7) переходит в (32.6). Формула (32.7) предполагает, что символы неравновероятны, но статистически независимы. В наиболее же общем случае, когда между символами существуют статистические связи, можно характеризовать

статистическую структуру сигнала многомерной вероятностью данной реализации

$$p_k = p_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

и в этом случае

$$I' = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N=m^n} p_k \log p_k = I'_2. \quad (32.8)$$

Все дальнейшее основано на том, что

$$I'_0 > I'_1 > I'_2.$$

Поэтому, если записать выражение для информации в общем виде

$$I = nI' = 2FTI',$$

то станет ясным, что, не изменяя длительности  $T$  и числа уровней  $m$ , можно сократить ширину спектра  $F$  за счет преобразования статистики процесса, т. е. за счет изменения величины  $I'$ . Это преобразование должно заключаться в разрушении статистических взаимосвязей (переход от  $I'_2$  к  $I'_1$ ) с последующим выравниванием вероятностей независимых символов (переход от  $I'_1$  к  $I'_0$ ). Информация, содержащаяся в последовательности равновероятных и независимых символов, т. е.

$$I_0 = nI'_0 = 2FTI'_0$$

является наибольшей; иначе говоря, сжатие спектра на статистической основе при  $I' = I'_0$  — невозможно.

Величина

$$R = 1 - \frac{I'}{I'_0} \quad (32.9)$$

носит название избыточности. Таким образом сказанное выше может быть сформулировано следующим образом: статистическое сжатие спектра возможно за счет устранения избыточности. Для неизменного числа уровней выражение для избыточности можно записать еще в виде

$$R = 1 - \frac{F_0 T_0}{FT}, \quad (32.10)$$

где  $F$  и  $T$  — фактические ширина спектра и длительность сигнала, а  $F_0$  и  $T_0$  — наименьшие значения тех же величин для идеально-преобразованного сигнала (т. е. для сигнала, для которого  $I' = I'_0$ ). Из (32.10) следует, что при неизменной длительности сигнала ширина спектра может быть уменьшена в

$$\frac{F}{F_0} = \frac{1}{1-R}$$

раз.

Итак, для выяснения возможности статистического сжатия спектра нужно уметь оценить величину избыточности, а для осуществления этой возможности нужно найти преобразование, устраняющее, или, по крайней мере, уменьшающее избыточность. Эта обширная проблема с точки зрения теории информации есть не что иное, как проблема статистически-оптимального кодирования. Обсуждение этой проблемы и путей к ее решению завело бы нас слишком далеко. Мы ограничимся лишь одним замечанием, поясняющим принципиальную сторону дела.

Воспользуемся данными, относящимися к модулированным колебаниям (§ 30). Известно, что ширина спектра амплитудно-модулированного колебания ровно в два раза больше ширины спектра модулирующего процесса. Так как в результате модуляции количество информации не меняется, то модулированное колебание имеет избыточность

$$R = 1 - \frac{F}{2F} = 0,5$$

(предполагается, что модулирующий процесс лишен избыточности). Путем детектирования восстанавливается исходный (модулирующий) процесс. Таким образом, можно рассматривать модуляцию как преобразование, увеличивающее избыточность (и расширяющее спектр), а детектирование — как операцию, устраняющую избыточность (и сжимающую спектр). Следовательно, если статистика исходного процесса подобна статистике амплитудно-модулированного колебания, то операция типа детектирования даст желаемое сокращение спектра. Другая возможность устранения избыточности, приводящая также к сокращению спектра вдвое, состоит в устранении одной из боковых полос модуляционного спектра.

Те же соображения относятся и к колебанию, модулированному по фазе (или по частоте). Дело несколько усложняется в данном случае тем, что строение боковых полос не повторяет строения модулирующего спектра, как при АМ. Поэтому ширину спектра ЧМ-колебания нужно предварительно определить. Возьмем случай большого индекса и нормально распределенного модулирующего процесса, когда спектр боковой полосы записывается в виде (формула (30.11))

$$G(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\Delta\omega} e^{-\frac{\omega^2}{2\Delta\omega^2}}.$$

Для определения ширины спектра воспользуемся моментным критерием (§ 12), т. е. положим

$$\Omega_0^2 = \frac{I}{A} - \frac{M^2}{A^2},$$

где

$$A = \int_0^\infty G d\omega, \quad M = \int_0^\infty \omega G d\omega, \quad I = \int_0^\infty \omega^2 G d\omega.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$A = 1, \quad M = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Delta\omega, \quad I = \Delta\omega^2,$$

откуда

$$\Omega_0 = \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \Delta\omega \simeq 0,8 \Delta\omega,$$

а полная ширина спектра

$$2\Omega \simeq 1,6 \Delta\omega \simeq 2 \Delta\omega.$$

Таким образом, можно считать, что по порядку величины ширина спектра ЧМ-колебания определяется удвоенным частотным отклонением (т. е. полосой качания). Если принять

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} \Delta\omega = 75 \text{ кГц},$$

то ширина спектра составит

$$F \simeq 2\Delta f = 150 \text{ кГц}.$$

При ширине спектра модулирующего процесса 5 кГц

$$\frac{F}{F_0} = 30,$$

а избыточность

$$R = 1 - \frac{F}{F_0} \simeq 0,97.$$

Итак, для процесса, статистика которого близка к статистике ЧМ — колебания с большим индексом, операция типа частотного детектирования может привести к существенному сокращению спектра.

---

## ДОБАВЛЕНИЯ

### I. О ширине спектра произведения функций

В § 4 доказана теорема о спектре произведения двух функций времени: если даны две функции времени  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  и их спектры  $S_1(\omega)$  и  $S_2(\omega)$ , то спектр произведения функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  выражается формулой

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\nu) S_2(\omega - \nu) d\nu.$$

Аналогичное соотношение имеется и для спектров мощности (см. § 27)

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\nu) G_2(\omega - \nu) d\nu. \quad (1.1)$$

В качестве одного из применений этой формулы рассмотрим вопрос о ширине спектра произведения двух функций.

Вопрос ставится так: даны две функции, относительно которых известно, что спектры их ограничены, т. е. имеют ширину  $\Omega_1 = \omega_2 - \omega_1$  для первой функции и  $\Omega_2 = \omega_4 - \omega_3$  для второй. Это свойство заданных нам спектров может быть записано в виде

$$G_1(\omega) \neq 0 \text{ при } \omega_1 < \omega < \omega_2,$$

$$G_2(\omega) \neq 0 \text{ при } \omega_3 < \omega < \omega_4.$$

Нам нужно определить ширину спектра произведения функций. Спектр произведения не равен нулю, если не равна нулю подынтегральная функция в выражении (1.1). Это условие выполняется, когда спектры  $G_1(\nu)$  и  $G_2(\omega - \nu)$  перекрываются, т. е. в той области значений  $\omega$ , для которой

на некотором интервале значений  $\nu$  оба спектра  $G_1(\nu)$  и  $G_2(\omega - \nu)$  — не равны нулю. Из этих соображений можно вывести систему неравенств, которая даст нам ответ на поставленный вопрос. Составление этой системы сильно облегчается при помощи графиков рис. 56.

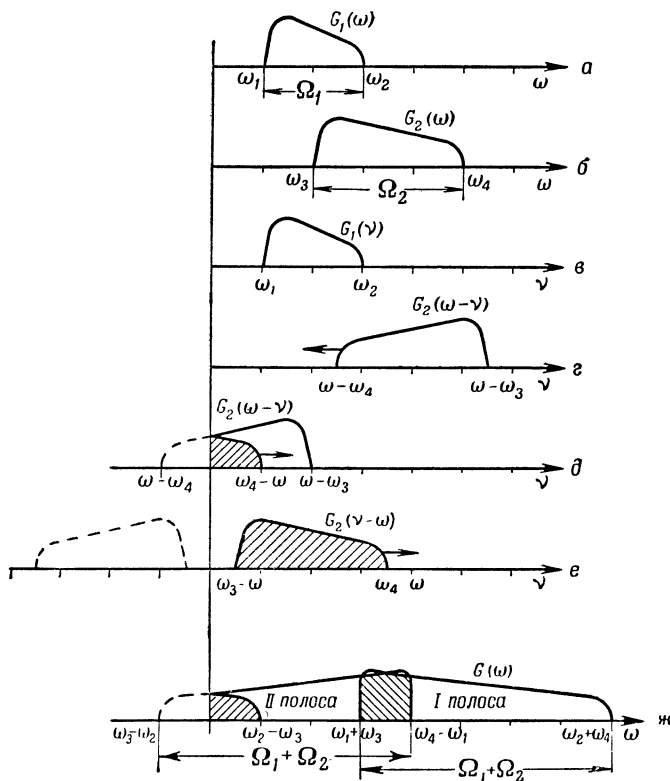


Рис. 56.

На рис. 56, а и б изображены заданные спектры  $G_1(\omega)$  и  $G_2(\omega)$ . На рис. 56, в представлен спектр  $G_1(\nu)$ ; этот график ничем не отличается от рис. 56, а. На рис. 56, г построен спектр  $G_2(\omega - \nu)$ . Он отличается от рис. 56, б

тем, что начало отсчета перенесено в точку  $\nu = \omega$  и спектр повернут справа налево.  $\omega$  — это текущая частота результирующего спектра. При ее изменении в сторону уменьшения спектр передвигается влево, как показано стрелкой. Условие перекрытия спектров рис. 56, в и 56, г может быть записано в виде

$$\omega_2 > \omega - \omega_4$$

или

$$\omega < \omega_2 + \omega_4. \quad (1.2)$$

Перекрытие продолжается, пока соблюдено условие

$$\omega - \omega_3 > \omega_1$$

или

$$\omega > \omega_1 + \omega_3. \quad (1.3)$$

Объединяя неравенства (1.2) и (1.3), можем записать для первой полосы перекрытия

$$\omega_1 + \omega_3 < \omega < \omega_2 + \omega_4, \quad (1.4)$$

откуда ширина первой полосы

$$\omega_2 + \omega_4 - (\omega_1 + \omega_3) = \Omega_1 + \Omega_2.$$

При дальнейшем уменьшении  $\omega$  спектр  $G_2(\omega - \nu)$  заходит в область отрицательных частот, как показано пунктиром на рис. 56, д. Действительный же спектр располагается в области положительных значений частоты; его можно построить путем перегибания спектра по оси ординат. Перегнутая часть спектра отмечена штриховкой на рис. 56, д. При дальнейшем уменьшении частоты  $\omega$  полностью перевернутый спектр движется вдоль оси  $\nu$  вправо, как показано на рис. 56, е. Последние два рисунка показывают, что спектры вступают во вторую полосу перекрытия, границы которой определяются неравенствами

$$\omega_1 < \omega_4 - \omega, \quad \omega_2 > \omega_3 - \omega,$$

т. е.

$$\omega_3 - \omega_2 < \omega < \omega_4 - \omega_1. \quad (1.5)$$

Ширина второй полосы

$$\omega_4 - \omega_1 - (\omega_3 - \omega_2) = \Omega_1 + \Omega_2.$$



Таким образом, мы получили следующее правило:

спектр произведения двух функций состоит из двух полос, ширина каждой из которых равна сумме ширин спектров обоих сомножителей. Границы полос определяются неравенствами (1.4) и (1.5).

Это еще не означает, что общая ширина спектра произведения равна просто удвоенной сумме ширин спектров сомножителей. Дело в том, что одна из полос может захватывать область отрицательных частот; при этом она перегибается, как описано выше, и ее действительная ширина сокращается. Кроме того, обе полосы могут частично перекрываться между собой.

И то и другое показано на рис. 56, ж. Все графики рис. 56 относятся к следующим численным значениям:

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = 3, \omega_3 = 2, \omega_4 = 5, \Omega_1 = 2, \Omega_2 = 3,$$

$$\omega_2 + \omega_4 = 8, \omega_1 + \omega_3 = 3, \omega_4 - \omega_1 = 4, \omega_3 - \omega_2 = -1.$$

Спектр произведения в этом примере занимает непрерывную полосу

$$0 < \omega < 8.$$

Таким образом, ширину спектра произведения можно определить с помощью следующего правила:

общая ширина спектра произведения двух функций не менее суммы, но не более удвоенной суммы ширин спектров обоих сомножителей.

Вышеприведенные правила имеют достаточно общий характер. Их можно, например, применить и к дискретным (линейчатым) спектрам. Можно привести еще два правила, относящиеся только к дискретным спектрам:

число линий в каждой из двух полос спектра произведения двух периодических функций равно произведению чисел линий в спектрах сомножителей.

Но отдельные линии могут сливаться. Поэтому

общее число линий в спектре произведения двух периодических функций не меньше произведения, но не больше удвоенного произведения чисел линий в спектрах сомножителей.

Для применения этих правил следует иметь в виду, что наличие постоянной составляющей выражается спектральной линией с частотой  $\omega = 0$ .

В качестве примера рассмотрим спектр сложно-модулированного колебания. Пусть несущая частота  $\omega_0$  промодулирована по частоте частотой  $\omega_1$ , а затем по амплитуде частотой  $\omega_2$ . Аналитически такое колебание выражается формулой

$$x = c_0 (1 + m \sin \omega_2 t) \sin (\omega_0 t + \beta \sin \omega_1 t),$$

где  $c_0$  — амплитуда несущей,  $m$  — глубина АМ,  $\beta$  — индекс ЧМ.

Если обозначить

$$\sin (\omega_0 t + \beta \sin \omega_1 t) = f_1(t),$$

$$1 + m \sin \omega_2 t = f_2(t),$$

то вопрос о спектре сложно-модулированного колебания сводится к вопросу о спектре произведения. Спектр  $G_1(\omega)$  функции  $f_1(t)$  при малом индексе состоит из трех линий с частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_0 \pm \omega_1$ . Спектр  $G_2(\omega)$  функции  $f_2(t)$  состоит из двух линий с частотами 0 и  $\omega_2$ . Для получения результирующего спектра надо передвигать спектр  $G_2(\omega - \nu)$ , имеющий две линии с частотами  $\omega$  и  $\omega - \omega_2$ , вдоль оси  $\nu$ . В результирующем спектре линии будут возникать всякий раз, когда совпадают любые две линии спектров  $G_1(\nu)$  и  $G_2(\omega - \nu)$ . Отметив все возможные совпадения, мы найдем, что спектр рассматриваемого сложно-модулированного колебания будет состоять из девяти линий с частотами

$$\omega_0, \omega_0 \pm \omega_1, \omega_0 \pm \omega_2, \omega_0 \pm \omega_1 \pm \omega_2.$$

Крайние частоты спектра равны  $\omega_0 \pm (\omega_1 + \omega_2)$ .

## II. Спектры некоторых частотно-модулированных колебаний

В § 7 вычислен спектр для простейшего случая синусоидальной ЧМ

$$\omega = \omega_0 \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cos \Omega t \right).$$

Общий случай ЧМ может быть записан в виде

$$\omega = \omega_0 [1 + mf(t)],$$

откуда

$$\vartheta = \omega_0 t + mF(t),$$

где

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Так как модулированное колебание имеет вид

$$x = \sin \vartheta = \sin [\omega_0 t + mF(t)],$$

то очевидно, что представление функции  $F(t)$  каким бы то ни было (например, степенным или тригонометрическим) рядом ни к чему хорошему ни приведет. Необходимо стараться представить  $F(t)$  в конечной форме, и притом таким

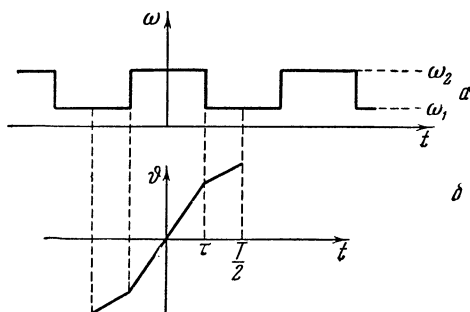


Рис. 57.

образом, чтобы интеграл, которым выражается спектр, мог быть вычислен. Мы приведем здесь два примера такого рода вычислений.

**а. Спектр колебания с частотой, модулированной по закону прямоугольной ломаной линии.** Закон изменения частоты следующий (рис. 57, а);

$$\omega = \omega_2 \quad \text{при} \quad -\tau < t < \tau,$$

$$\omega = \omega_1 \quad \text{при} \quad -\frac{T}{2} < t < -\tau, \quad \tau < t < \frac{T}{2}$$

и т. д. На рис. 57, б дан график  $\vartheta$ , имеющей следующее

аналитическое выражение на промежутке  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ :

$$\vartheta = \omega_2 t \quad \text{при} \quad -\tau < t < \tau,$$

$$\vartheta = \omega_1 t + b\tau \quad \text{при} \quad \tau < t < \frac{T}{2},$$

$$\vartheta = \omega_1 t - b\tau \quad \text{при} \quad -\frac{T}{2} < t < -\tau,$$

где  $b = \omega_2 - \omega_1$ . Так как  $\vartheta$  — нечетная функция, то спектр функции  $x = \sin \vartheta$  выразится через синусные коэффициенты:

$$c_k = b_k = \frac{1}{T} \left[ \int_{-\tau}^{\tau} \sin \omega_2 t \sin k\Omega t \, dt + \int_{\frac{T}{2}}^{-\tau} \sin(\omega_1 t - b\tau) \sin k\Omega t \, dt + \right. \\ \left. + \int_{\tau}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_1 t + b\tau) \sin k\Omega t \, dt \right].$$

Выполняя простые преобразования и интегрируя, находим

$$c_k = \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{\omega_2 - k\Omega} \sin(\omega_2 - k\Omega)\tau - \frac{1}{\omega_2 + k\Omega} \sin(\omega_2 + k\Omega)\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega_1 - k\Omega} \left[ \sin\left(\omega_1 \frac{T}{2} + b\tau - k\pi\right) - \sin(\omega_2 - k\Omega)\tau \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega_1 + k\Omega} \left[ \sin\left(\omega_1 \frac{T}{2} + b\tau + k\pi\right) - \sin(\omega_2 + k\Omega)\tau \right] \right\}.$$

В частном случае  $\tau = \frac{T}{4}$ , т. е. когда зубцы и впадины ломаной (рис. 57, а) имеют одинаковую ширину, получаем

$$c_k = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sin \frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega_2}{\Omega} - k \right)}{\frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega_2}{\Omega} - k \right)} - \frac{\sin \frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega_2}{\Omega} + k \right)}{\frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega_2}{\Omega} + k \right)} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \frac{\pi}{4} \left( \frac{\omega_1}{\Omega} - k \right)}{\frac{\pi}{4} \left( \frac{\omega_1}{\Omega} - k \right)} \cos \frac{\pi}{4} \left( \frac{\omega_1}{\Omega} + 2 \frac{\omega_2}{\Omega} - 3k \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sin \frac{\pi}{4} \left( \frac{\omega_1}{\Omega} + k \right)}{\frac{\pi}{4} \left( \frac{\omega_1}{\Omega} + k \right)} \cos \frac{\pi}{4} \left( \frac{\omega_1}{\Omega} + 2 \frac{\omega_2}{\Omega} + 3k \right) \right\}.$$

На рис. 58 представлен спектр, вычисленный по этой формуле. Спектр этот имеет максимумы при  $k\Omega = \omega_1$  и  $k\Omega = \omega_2$ , что и следовало ожидать.

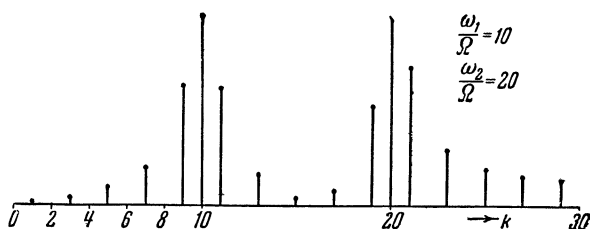


Рис. 58.

Спектр рассматриваемого ЧМ-колебания может быть вычислен на основе других соображений. На рис. 59, а представлен тот же закон изменения частоты, что и на рис. 57, а, а на рис. 59, б — соответствующее ЧМ-колебание. Это

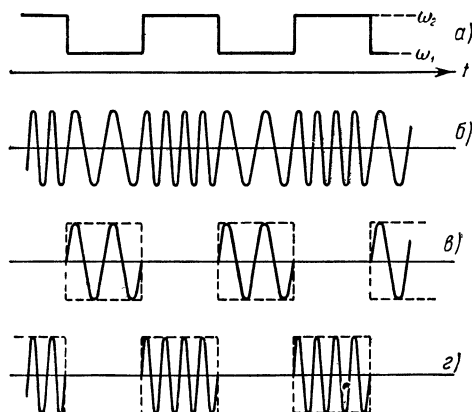


Рис. 59.

колебание может быть разложено на два, показанных на рис. 59, в и 59, г. Но каждая из этих составляющих представляет собою не что иное, как колебание соответствующей

несущей частоты, модулированное по амплитуде прямоугольными импульсами. Спектр такого рода колебания находится без всяких затруднений, после чего спектр ЧМ-колебания находится как сумма спектров обоих АМ-колебаний. Этот прием может быть применен и в том случае, когда частота принимает не два, а любое число фиксированных значений. Таким способом можно, следовательно,

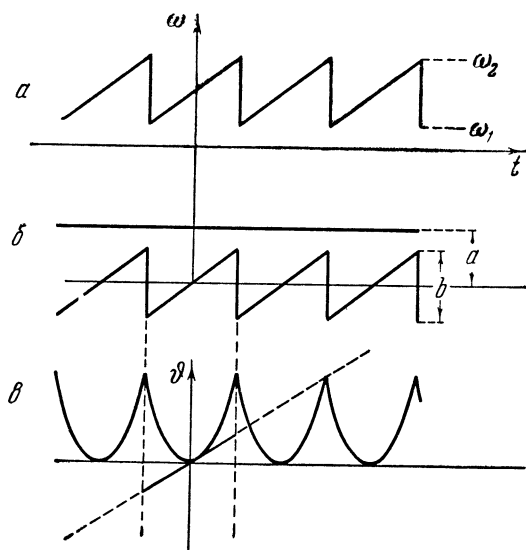


Рис. 60.

вычислять спектры сигналов не только обычного частотного телеграфа, но и спектры ДЧТ — двухканального частотного телеграфа, работающего на четырех фиксированных частотах. Техника вычисления не меняется, если имеется скачок фазы при переходе с частоты на частоту; в этом случае несколько усложняются, конечно, выкладки.

**б.** Спектр частотно-модулированного колебания с частотой, изменяющейся по пилообразному закону. Этот случай, — так называемый «свип-сигнал» — несколько сложнее предыдущего.

Пусть

$$\omega = a + \frac{b}{T}t \quad \text{при} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

(рис. 60, а), где  $a = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ,  $b = \omega_2 - \omega_1$ . На рис. 60, б обе составляющие частоты изображены раздельно.

Для аргумента  $\vartheta$  получаем

$$\vartheta = at + \frac{b}{2T}t^2 \quad \text{при} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

(рис. 60, в), и модулированное колебание записывается в виде

$$x = \sin\left(at + \frac{b}{2T}t^2\right).$$

Вычислим компоненты спектра:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(at + \frac{b}{2T}t^2\right) \cos k\Omega t \, dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(at + \frac{b}{2T}t^2\right) \sin k\Omega t \, dt.$$

Для вычисления этих интегралов надо сначала сделать тригонометрические преобразования.

Например, для  $a_k$  получим

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\sin(\alpha t + \gamma^2 t^2) + \sin(\beta t + \gamma^2 t^2)] \, dt,$$

где обозначено для сокращения

$$\alpha = a + k\Omega, \quad \beta = a - k\Omega, \quad \gamma^2 = \frac{b}{2T}.$$

В этой форме нужно дополнить аргумент до полного квадрата, прибавляя и вычитая соответственно  $\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}$  и  $\frac{\beta^2}{4\gamma^2}$ . Затем, разлагая снова синусы разности, найдем

$$a_k = \frac{1}{T\gamma} \left( \cos \frac{\beta^2}{4\gamma^2} C + \sin \frac{\beta^2}{4\gamma^2} S_y - \cos \frac{\alpha^2}{4\gamma^2} C_x - \sin \frac{\alpha^2}{4\gamma^2} S_x \right).$$

Здесь применены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_x &= \int_{x_1}^{x_2} \cos x^2 dx, & C_y &= \int_{y_1}^{y_2} \cos y^2 dy, \\ S_x &= \int_{x_1}^{x_2} \sin x^2 dx, & S_y &= \int_{y_1}^{y_2} \sin y^2 dy, \\ x_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\gamma} - \gamma T \right), & y_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{\gamma} - \gamma T \right), \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\gamma} + \gamma T \right), & y_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{\gamma} + \gamma T \right). \end{aligned}$$

Аналогичная формула получается и для  $b_k$ :

$$b_k = \frac{1}{T\gamma} \left( \cos \frac{\beta^2}{4\gamma^2} S_y - \sin \frac{\beta^2}{4\gamma^2} C_y + \cos \frac{\alpha^2}{4\gamma^2} S_x - \sin \frac{\alpha^2}{4\gamma^2} C_x \right).$$

Нас интересует амплитудный спектр. Амплитуда  $k$ -й гармоники равна

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

Проделав, вычисления, получим

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T\gamma} \left[ C_y^2 + S_y^2 + C_x^2 + S_x^2 - 2 \cos \frac{\beta^2 + \alpha^2}{4\gamma^2} (C_y C_x - S_y S_x) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \frac{\beta^2 + \alpha^2}{4\gamma^2} (C_y S_x + S_y C_x) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В заключение заметим, что (в отличие от АМ) спектр ЧМ-колебания в общем случае несимметричен относительно центральной частоты, как бы мы ее не определили; характер асимметрии спектра зависит от закона изменения частоты. Симметричный спектр получается только в случае симметрич-



ного (относительно некоторого центрального значения) закона изменения частоты. Примером может служить рассмотренный в § 7 случай синусоидального изменения частоты.

### III. Активная полоса спектра

Представления, связанные с мгновенным спектром, развивает предложенное Д. В. Агеевым понятие активной полосы спектра [1].

Будем исходить из определения мгновенного спектра мощности по Пэйджу (см. § 6):

$$\rho(\omega, t) = \frac{\partial}{\partial t} |S_t(\omega)|^2,$$

где

$$S_t(\omega) = \int_{-\infty}^t f(u) e^{-j\omega u} du$$

— текущий спектр. По определению мгновенная мощность

$$f^2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \rho(\omega, t) d\omega.$$

Но можно определить некоторый интервал частот, в пределах которого сосредоточена подавляющая доля мощности. Это условие может быть записано в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho(\omega, t) d\omega = \eta f^2(t),$$

где  $\eta$  — правильная дробь, немного меньшая единицы. Интервал  $(\omega_1, \omega_2)$  может быть назван активной полосой. Аналогичным критерием мы пользовались в § 12, но теперь речь идет о мгновенных спектрах, а следовательно,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  являются функциями времени. Поэтому, не только ширина интервала  $(\omega_1, \omega_2)$ , но и положение его на шкале частот зависит от времени.

К определению активной полосы можно подойти и по другому. По определению текущего спектра

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_t(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A_t \cos \omega t - B_t \sin \omega t) d\omega,$$

где

$$A_t + jB_t = S_t(\omega).$$

Введем теперь функцию  $f_1(t)$ , выражаемую аналогичным интегралом, но в конечных пределах:

$$f_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} (A_t \cos \omega t + B_t \sin \omega t) d\omega$$

и потребуем, чтобы разность

$$\Delta f = f(t) - f_1(t),$$

была (с точки зрения некоторого определенного критерия) достаточно мала, т. е. чтобы функция  $f_1(t)$  могла служить удовлетворительным приближением к  $f(t)$ . Интервал  $(\omega_1, \omega_2)$  будет при этом определен, как активная полоса спектра.

В цитированной работе [1] рассмотрена в качестве примера функция вида

$$f(t) = \sin \frac{1}{2} \lambda t^2,$$

т. е. ЧМ-колебание, частота которого меняется по линейному закону

$$\omega = \lambda t.$$

Показано, что ширина активной полосы выражается соотношением

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = b \sqrt{\frac{d\omega}{dt}} = b \sqrt{\lambda},$$

где  $b$  — коэффициент тем больший, чем лучшее требуется приближение. Показано также, что центральная частота активной полосы совпадает с мгновенной частотой, так что в рассматриваемом случае активная полоса, сохраняя постоянную

ширину, скользит по шкале частот, следуя за изменениями мгновенной частоты  $\omega$ ; этот результат вполне согласуется с нашими интуитивными представлениями.

#### IV. Разложение спектров по спектрам составляющих функций

Линейность преобразования Фурье, выражаемая соотношением (4.1), позволяет применить общий прием приближенного вычисления спектра, основанный на следующих соображениях.

Пусть данная функция  $f(t)$  аппроксимирована конечной суммой некоторых произвольно выбранных функций  $f_k$ , т. е.

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^N f_k(t).$$

Если спектры функций  $f_k$  известны, то, обозначая их через  $S_k$ , имеем

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \left( \sum_{k=1}^N f_k(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} f_k e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=1}^N S_k. \end{aligned}$$

Это соотношение может служить основой для многочисленных вариантов формул и таблиц для вычисления спектров заданных функций.

Мы ограничимся здесь двумя примерами, относящимися к непериодическим функциям импульсивного характера, в частности к функции, не равной нулю на протяжении времени  $\tau$ .

Пусть, например, функция существует на промежутке

$$-\frac{\tau}{2} \leq t < \frac{\tau}{2}.$$

Выберем разложение по тригонометрическим функциям, т. е. разложим  $f(t)$  в ряд Фурье на указанном промежутке. Мы получим

$$f(t) \approx \sum_{-N}^N C_k e^{j2\pi k \frac{t}{\tau}},$$

где

$$C_k = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) e^{-j2\pi k \frac{t}{\tau}} dt.$$

Таким образом, в этом примере элементарная функция есть

$$f_k = C_k e^{j2\pi k \frac{t}{\tau}}.$$

Спектр этой функции имеет вид

$$S_k = C_k \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j(\omega - 2\pi \frac{k}{\tau})t} dt = \frac{(-1)^k 2C_k}{\omega - 2\pi \frac{k}{\tau}} \sin \omega \frac{\tau}{2},$$

и следовательно, искомый спектр есть

$$S \approx 2 \sin \omega \frac{\tau}{2} \sum_{-N}^N \frac{(-1)^k C_k}{\omega - 2\pi \frac{k}{\tau}}.$$

Приближение будет, очевидно, тем лучшим, чем больше число слагаемых суммы.

В качестве второго примера применим аппроксимацию заданной функции ступенчатой ломаной линией, разбив интервал  $0 < t < \tau$  на  $n$  частей  $\Delta t$ , т. е. положив

$$\tau = n \Delta t,$$

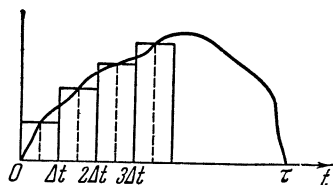


Рис. 61.

и выбрав элементарную функцию в форме прямоугольного импульса. Тогда можем записать (рис. 61)

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \{\sigma_0[t - k\Delta t] - \sigma_0[t - (k+1)\Delta t]\} f\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right].$$

Элементарный импульс равен

$$f_k(t) = f\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right] \{\sigma_0[t - k\Delta t] - \sigma_0[t - (k+1)\Delta t]\}.$$

Его спектр имеет вид

$$S_k = f\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right] \int_k^{(k+1)\Delta t} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{\omega} e^{-j\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta t} \sin \omega \frac{\Delta t}{2};$$

следовательно, искомый спектр имеет форму

$$S = \Delta t \frac{\sin \omega \frac{\Delta t}{2}}{\omega \frac{\Delta t}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} f\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right] e^{-j\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)\Delta t}.$$

Приближение улучшается с возрастанием  $n$ . В пределе при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. при  $\Delta t \rightarrow 0$ , множитель  $\frac{\sin \omega \frac{\Delta t}{2}}{\omega \frac{\Delta t}{2}}$  обращается

в единицу, а сумма переходит в интеграл Фурье, дающий точное значение спектра функции  $f(t)$ , т. е.

$$S = \int_0^{\tau} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

## V. Спектр короткого знакопеременного импульса

Высказанное в § 11 положение о спектре короткого импульса, состоящее в том, что спектр такого импульса однороден вплоть до частот, период которых сравним с длительностью импульса, требует уточнения. Дело в том, что это положение справедливо, если на протяжении длительности импульса функция, которой он выражается, не меняет знака, т. е., например, если на промежутке  $\left(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)$  импульс определен четной функцией. Если же это условие не выполняется, т. е. если, например, на указанном промежутке импульс определен нечетной функцией, то положение радикально меняется.

Мы имеем для спектра импульса

$$S = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Разобьем интеграл на два, и пусть функция  $f(t)$  нечетна. Тогда

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(t) (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) dt = \\ &= 2j \int_0^{\frac{\tau}{2}} f(t) \sin \omega t dt \approx 2j\omega \int_0^{\frac{\tau}{2}} t f(t) dt = j\omega M, \end{aligned}$$

где  $M$  — момент первого порядка функции  $f(t)$  относительно начала. Приближение законно, если  $\omega \frac{\tau}{2} \ll 1$ . Итак, до частот, определяемых сравнимостью периода с длительностью, спектр знакопеременного импульса выражается линейной функцией частоты.

В качестве примера сравним спектры отрезков косинусоиды и синусоиды. Для косинусоидального импульса имеем

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \cos \Omega t \cos \omega t dt = \\ &= \frac{\sin (\Omega + \omega) \frac{\tau}{2}}{\Omega + \omega} + \frac{\sin (\Omega - \omega) \frac{\tau}{2}}{\Omega - \omega} \approx \tau. \end{aligned}$$

Для синусоидального импульса

$$\begin{aligned} S &= -2j \int_0^{\frac{\tau}{2}} \sin \Omega t \sin \omega t dt = \\ &= 2j \left( \frac{\sin (\Omega + \omega) \frac{\tau}{2}}{\Omega + \omega} - \frac{\sin (\Omega - \omega) \frac{\tau}{2}}{\Omega - \omega} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы должны для перехода к пределу при убывающем  $\tau$

воспользоваться уже двумя членами разложения синуса в степенной ряд. Это дает

$$2j \left( \frac{\sin(\Omega + \omega) \frac{\tau}{2}}{\Omega + \omega} - \frac{\sin(\Omega - \omega) \frac{\tau}{2}}{\Omega - \omega} \right) \approx \\ \approx j \frac{\tau^3}{4 \cdot 3!} [(\Omega + \omega)^2 - (\Omega - \omega)^2] = j\omega \frac{\tau^3}{3!} \Omega.$$

Для пояснения полученных соотношений можно еще сослаться на то, что всякая нечетная функция может рассматриваться как производная некоторой четной функции. Но спектр производной получается путем умножения спектра функции на  $j\omega$  [см.(4.2)]. Следовательно, если спектр короткого четного импульса однороден, т. е. выражается постоянной величиной, то спектр нечетного импульса должен содержать множитель  $j\omega$ .

Наконец, следует указать еще на спектры разрывных функций (§ 11). Спектр единичного импульса  $\delta(t)$ , являющегося четной функцией, равен единице. Спектр же импульса второго порядка  $\frac{d}{dt} \delta(t)$ , являющегося нечетной функцией и характеризующегося двумя последовательными скачками в  $+\infty$  и  $-\infty$  около  $t=0$ , равен  $j\omega$ .

Если короткий импульс совершает несколько перемен знака, то его спектр может выражаться и более высокими степенями частоты.

## VI. Подробности вычисления $\Delta f$ и $\Delta t$

Для читателя, который пожелал бы проверить выкладки § 12 или проделать аналогичные, ниже приведены некоторые детали этих выкладок.

**а. Прямоугольный импульс.**  $\Delta t = 0,9\tau$  — это очевидно. Далее,

$$\Phi = \tau \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} ;$$

$$\int_0^{\Delta \omega} \Phi^2 d\omega = \tau^2 \int_0^{\Delta \omega} \frac{\sin^2 \omega \frac{\tau}{2}}{\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)^2} d\omega = 2\tau \int_0^{\Delta \omega \frac{\tau}{2}} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz.$$

Здесь и ниже встречаются интегралы вида

$$\int \frac{\sin z}{z^n} dz,$$

которые вычисляются по частям, пока не закончатся на слагаемом  $\text{Si}(z)$  или  $\text{Ci}(z)$ . В результате мы получаем для  $\Delta\omega\tau$  уравнение

$$\frac{2}{\pi} \left[ \text{Si}(\Delta\omega\tau) - \frac{\sin^2 \Delta\omega \frac{\tau}{2}}{\Delta\omega \frac{\tau}{2}} \right] = \eta = 0,9,$$

решение которого, легко получаемое методом ложных корней, есть

$$\Delta\omega\tau = 5,1.$$

**б. Треугольный импульс.** Для треугольного импульса из условия

$$2 \int_0^{\frac{\Delta t}{2}} \left(1 - 2 \frac{t}{\tau}\right)^2 dt = \eta \frac{\tau}{3}$$

получаем уравнение

$$\left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)^3 + 3 \left(\frac{\Delta t}{\tau}\right)^2 - 3 \frac{\Delta t}{\tau} = \eta = 0,9,$$

решая которое, находим

$$\frac{\Delta t}{\tau} = 0,541.$$

Спектр треугольного импульса есть

$$\Phi = \tau \frac{1 - \cos \omega \frac{\tau}{2}}{\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)^2}.$$

Составляя выражение

$$\tau^2 \int_0^{\Delta\omega} \frac{\left(1 - \cos \omega \frac{\tau}{2}\right)^2}{\left(\omega \frac{\tau}{2}\right)^4} d\omega = \eta \frac{2}{\pi} \tau$$



и выполняя интегрирование, получим уравнение

$$\frac{4}{\pi} \left\{ \text{Si}(x) - \frac{1}{2} \text{Si}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{2}{x^3} \left[ 3 + \left( \cos x - 4 \cos \frac{x}{2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x}{2} \left( \sin x - 2 \sin \frac{x}{2} \right) - \frac{x^2}{2} \left( \cos x - \cos \frac{x}{2} \right) \right] \right\} = 0,9,$$

решение которого есть

$$x = \Delta\omega\tau = 5,3.$$

**в. Косинусоидальный импульс.** Для определения  $\Delta t$  имеем соотношение

$$\frac{\frac{\Delta t}{2}}{2} \int_0^{\frac{\Delta t}{2}} \cos^2 \pi \frac{t}{\tau} dt = \eta \frac{\tau}{2},$$

что приводит к уравнению

$$\frac{\Delta t}{\tau} + \frac{1}{\pi} \sin \pi \frac{\Delta t}{\tau} = 0,9.$$

Отсюда находим

$$\frac{\Delta t}{\tau} = 0,596.$$

Спектр косинусоидального импульса есть

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \tau \frac{\cos \omega \frac{\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\omega \frac{\tau}{2}\right)^2},$$

и выражение для определения  $\Delta\omega$  принимает вид

$$\frac{\pi^2}{4} \tau^2 \int_0^{\Delta\omega} \frac{\cos^2 \omega \frac{\tau}{2}}{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\omega \frac{\tau}{2}\right)^2\right]^2} d\omega = \eta \frac{\pi}{2} \tau.$$

Входящий сюда интеграл вычисляется путем разложения подынтегрального выражения на простые дроби. В результате интегрирования получаем уравнение

$$\frac{1}{\pi} \left[ -\frac{1 - \cos x}{x} + \text{Si}(x) + \frac{1}{\pi} \ln x - \frac{1}{\pi} \text{Ci}(x) \right] \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} = 0,9,$$

где

$$x_1 = \pi - \Delta\omega\tau, \quad x_2 = \pi + \Delta\omega\tau.$$

Здесь возникает затруднение:  $x_1$ , несомненно, отрицательно, и мы не можем подставлять его в качестве аргу-

мента ни под знак  $\ln$ , ни под знак  $\text{Ci}$ . Это затруднение, однако, очень легко преодолеть. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \ln x - \text{Ci}(x).$$

Вспоминая известное разложение  $\text{Ci}(x)$  в степенной ряд, получим

$$\varphi(x) = -E + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \frac{x^6}{6 \cdot 6!} - \dots,$$

где  $E$  — эйлерова постоянная. Таким образом, оказывается, что  $\varphi(x)$  — четная функция, и следовательно, мы имеем право при выполнении вычислений подставлять под знаки  $\ln$  и  $\text{Ci}$  вместо отрицательных аргументов положительные. Принимая, кроме того, во внимание, что  $\text{Si}(x)$  есть функция нечетная, и прodelывая все вычисления, находим  $\Delta\omega\tau = 4,57$ .

## VII. По поводу общего критерия для оценки $\Delta f$ и $\Delta t$

Использованный в § 12 общий критерий для оценки  $\Delta f$  и  $\Delta t$ , основанный на понятии о радиусе инерции плоской фигуры, оказывается очень острым, и применение его не всегда возможно.

Вычислим на основе этого критерия произведение  $\Delta f \Delta t$  для треугольного импульса, для которого

$$f(t) = 1 - 2 \frac{|t|}{\tau},$$

$$\Phi(\omega) = \frac{\tau}{2} \frac{1 - \cos \omega \frac{\tau}{2}}{\frac{1}{2} \left( \omega \frac{\tau}{2} \right)^2}.$$

Находим

$$A_t = 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \left( 1 - 2 \frac{t}{\tau} \right)^2 dt = \frac{13}{12} \tau, \quad \Delta t^2 = \frac{I_t}{A_t} = 9,43 \cdot 10^{-2} \tau^2,$$

$$M_t = 0,$$

$$\Delta_i = 0,307 \tau.$$

$$I_t = 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} t^2 \left( 1 - 2 \frac{t}{\tau} \right)^2 dt = \frac{49}{480} \tau^3,$$

Теперь найдем ширину спектра:

$$A_{\omega} = \pi A_t = 3,4\tau,$$

$$M_{\omega} = \frac{\tau^2}{4} \int_0^{\infty} \omega \frac{\left(1 - \cos \omega \frac{\tau}{2}\right)^2}{\frac{1}{4} \left(\omega \frac{\tau}{2}\right)^4} d\omega = 4 \int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx = \frac{8}{3},$$

$$I_{\omega} = \frac{\tau^2}{4} \int_0^{\infty} \omega^2 \frac{\left(1 - \cos \omega \frac{\tau}{2}\right)^2}{\frac{1}{4} \left(\omega \frac{\tau}{2}\right)^4} d\omega = \frac{16}{\tau} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{8\pi}{\tau}.$$

Таким образом,

$$\Delta\omega^2 = \frac{I_{\omega}}{A_{\omega}} - \left(\frac{M_{\omega}}{A_{\omega}}\right)^2 = \frac{6,8}{\tau^2}, \quad \Delta\omega = \frac{2,6}{\tau}, \quad \Delta f = \frac{0,415}{\tau}$$

и, наконец,

$$\Delta f \Delta t = 0,415 \cdot 0,307 = 0,127,$$

т. е. результат примерно втрое больше теоретического минимума.

Если мы теперь попробуем проделать аналогичные вычисления для прямоугольного импульса, то для  $\Delta t$  мы легко найдем значение, равное  $\frac{\tau}{\sqrt{12}} = 0,288 \tau$ . Что же касается

$\Delta f$ , то интегралы для  $M_{\omega}$  и  $I_{\omega}$  оказываются расходящимися.

Это объясняется, вообще говоря, тем, что прямоугольный импульс характеризуется разрывом самой функции, и его спектр убывает лишь как  $\frac{1}{\omega}$ . Рассмотренный же в начале треугольный импульс характеризуется разрывом первой производной, и следовательно, его спектр убывает как  $\frac{1}{\omega^2}$ , благодаря чему интегралы оказываются сходящимися.

---

## Литература

1. Агеев Д. В., Активная полоса частотного спектра функции времени, Труды Горьковского политехнического института 11, № 1, 5—10, 1955.
2. Андреев Н. Н., Электрические колебания и их спектры, Москва, 1917.
3. Бунимович В. И., Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Изд-во «Сов. радио», 1951.
4. Быкова Н. О., Воздействие напряжения меняющейся частоты на резонансные системы, Труды МАП СССР, № 28, 1948.
5. Гоноровский И. С., Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях, Связьиздат, 1954.
6. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., Теория следящих систем, ИЛ, 1953.
7. Кац А. К., Вынужденные колебания при прохождении через резонанс, Инженерный сборник Института Механики АН СССР 3, № 2, 100—125, 1947.
8. Котельников В. А., О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи, Материалы к 1-у Всесоюзному съезду, ВЭК, 1933.
9. Лев А. Ю., Яхинсон Б. И., О смещении спектра сигналов, ЭС, № 4, 68—74, 1956.
10. Лоусон Дж., Уленбек Дж., Пороговые сигналы, Изд-во «Сов. радио», 1952.
11. Майер А. Г., Леонтович Е. А., Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье, ДАН 4, № 7, 353—360, 1934.
12. Римский-Корсаков А. В., Об анализе колебаний, Труды комиссии по акустике АН СССР, № 6, 66—81, 1951.
13. Римский-Корсаков А. В., Шумова Н. Д., Об одном методе снятия частотных характеристик, ЖТФ 8, 1478—1485, 1938.
14. Серебренников М. Г., Гармонический анализ, ГТТИ, 1948.
15. Турбович И. Т., О погрешности измерения частотных характеристик методом частотной модуляции, Радиотехника 9, № 2, 31—35, 1954.
16. Турбович И. Т., Динамические частотные характеристики избирательных систем, Радиотехника, 12 № 11, 39—49, 1957.
17. Штейн Б. Б., Варганов Г. Г., Выделение одной боковой полосы с помощью многофазной модуляции, НТ сб. МЭИС, 13—24, 1950.
18. Цянь-Сю э-С энь, Техническая кибернетика, ИЛ, 1956.

19. Barber N. F., Ursell F., The response of a resonant system to a gliding tone, *Phil. Mag.* **39**, 345—361, 1948.
  20. Blassel P., Erreur due a une durée d'intégration finie dans la détermination des fonctions d'autocorrélation, *Ann. d. Télécom.* **8**, № 12, 406—414, 1953.
  21. Davenport W. B., Johnson R. A., Middleton D., Statistical errors in measurements on random time functions, *J. Appl. phys.* **23**, № 4, 377—388, 1952.
  22. Fano R. M., Short time autocorrelation functions and power spectra, *JASA* **22**, № 5, 546—550, 1950.
  23. Hok G., Response of linear resonant systems to excitation of a frequency varying linearly with time, *J. Appl. phys.* **19**, № 3, 242—250, 1948.
  24. Lampard D. G., Generalisation of the Wiener-Khinchine theorem to nonstationary processes, *J. Appl. phys.* **25**, № 6, 802—803, 1954.
  25. Lampard D. G., Definitions of «bandwidth» and «time duration» of signals which are connected by an identity, *Trans. IRE, CT-3* **4**, 286—288, 1956.
  26. Lewis E. M., Vibration during acceleration through a critical speed, *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.* **54**, 24, 253—261, 1932.
  27. Page C. H., Instantaneous power spectra, *J. Appl. phys.* **23**, 1, 103—106, 1952.
  28. Potter R. K., Kopp G. A., Green H. C., *Visible speech*, Van Nostrand, 1947 (N. Y.).
  29. Rice S. O., Filtered thermal noise-fluctuation of energy as a function of interval length, *JASA* **14**, № 4, 216—227, 1943.
  30. Rice S. O., Mathematical analysis of random noise, *BSTJ* **23**, № 3, 282—332, 1944; **24**, № 1, 46—156, 1945. Русский перевод см. в сборнике «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», ИЛ, 1953.
  31. Spetner L. M., Errors in power spectra due to finite sample, *J. Appl. phys.* **25**, № 5, 653—659, 1954.
  32. Zadeh L. A., Correlation functions and spectra of phase — and delay — modulated signals, *PIRE* **39**, № 4, 425—427, 1951.
-

