Распространение электромагнитных волн в плазме

В. Л. Гинзбург

Распространение электромагнитных волн в плазме

В. Л. Гинзбург

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

538.56
Г49
УДК 533.9+621.371.1/6

Распространение электромагнитных волн в плазме, Гинзбург В. Л., монография, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1967.

В книге рассматривается распространение электромагнитных волн разной частоты как в изотропной, так и в магнитоактивной плазме. Обсуждается как случай однородной, так и случай неоднородной среды. Особое внимание уделено распространению радиоволн в ионосфере и космических условиях. Отдельная глава посвящена нелинейным явлениям в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. Значительное место уделено учету пространственной дисперсии при распространении волн в плазме. В результате оказывается возможным исследовать все важнейшие случаи, представляющие интерес при изучении ионосферы, магнитосферы и космического пространства.

Для удобства читателей в двух параграфах дается сводка формул и, кроме того, книга снабжена большим списком дополнительной литературы.

Табл. 15. Рис. 133. Библ. 1207.

2-3-2
107-67

Оглавление

Предисловие ко второму изданию 9

Предисловие к первому изданию 11

Принятые обозначения 13

Глава I

Основы теории распространения электромагнитных волн в плазме

§ 1. Общее введение. Параметры плазмы в различных случаях . . 17

Различные случаи распространения волн в плазме (17). Параметры плазмы (18). Особенности плазмы (20).

§ 2. Основные уравнения. Характер используемых приближений 21

Уравнение поля. Материальное уравнение в линейной электродинамике (21). Частотная и пространственная дисперсии. Их роль в случае плазмы (24). Уравнения поля при неучете пространственной дисперсии («холодная» плазма) (28). Одномерные задачи. Плоские волны (31). Плазменные колебания (33). О распространении волн разных типов (34).

Глава II

Распространение волн в однородной и изотропной плазме

§ 3. Комплексная диэлектрическая проницаемость «холодной» плазмы (элементарная теория) 37

Элементарный вывод выражений для ε и σ (37). Вопрос о действующем поле (40). Область применимости полученных формул (44). Магнитная проницаемость плазмы. Об учете пространственной дисперсии (47).

§ 4. Метод кинетического уравнения 48

Функция распределения и кинетическое уравнение (48). Плазма в сильном электрическом поле (49). Вид функции распределения и уравнение для нее в слабом поле (52). Транспортные сечения. Дебаевское экранирование (56). О пределах применимости формул кинетической теории (61).

§ 5. Несколько замечаний о микропроцессах в плазме 63

Микропроцессы в плазме и уравнения сохранения числа частиц разного сорта (63). Время замедления неравновесных электронов в плазме (68). Отклонение функции распределения от равновесной. Оценки для ионосферы (73).

§ 6. Диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы (кинетическая теория) 75

Общие соотношения (75). Соударения с молекулами (77). Соударения с ионами (78). Роль междуэлектронных соударений (80). Число соударений в ионосфере (81). Низкочастотный случай (84). Общий случай (любые частоты) (86). Соударения ионов с ионами и молекулами (89). Дисперсионные соотношения (92).

§ 7. Распространение электромагнитных (поперечных) волн в однородной плазме 92

Показатели преломления и поглощения (92). О затухании волн при отсутствии поглощения (95). Выражения для n и $\varkappa$ в предельных случаях (96). О вещественных и комплексных значениях частоты (97).

§ 8. Учет пространственной дисперсии. Плазменные и акустические волны 98

Плазменные (продольные) волны. Феноменологический учет пространственной дисперсии (98). Кинетическая теория (104). Черенковское излучение в плазме. Поглощение плазменных волн (109). О поглощении и квазилинейной теории плазменных волн (116). Учет влияния ионов. Акустические волны (125). Квазигидродинамический метод (127). Продольные волны в двухтемпературной плазме (128).

§ 9. Сводка основных формул 131

Поперечные волны (133). Продольные волны в плазме (136).

Глава III

Распространение волн в однородной магнитоактивной плазме

§ 10. Тензор комплексной диэлектрической проницаемости 139

О влиянии постоянного магнитного поля на свойства плазмы (139). Тензор комплексной диэлектрической проницаемости (элементарная теория) (141). Свойства тензора ε'_{ij} (143). Тензор ε'_{ij} в других системах координат (145). Кинетическая теория (147). Влияние движения ионов (150).

§ 11. Распространение в магнитоактивной плазме высокочастотных волн 154

Выражения для показателей преломления и поглощения $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ (154). Некоторые частные случаи (157). Распространение волн под произвольным углом α к магнитному полю (162). Распространение «свистящих атмосфериков» и «спиральных волн» в металлах (165). Поляризация волн (167). О нормальных волнах. Случай малых углов α (169). Учет поглощения (172). Квазипродольное и квазипоперечное распространение (175). Распространение двух когерентных нормальных волн. Вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея) (176). Критическое число соударений и существенный кратный корень дисперсионного уравнения (179). Графики функций $n_{1,2}(v)$ и $\varkappa_{1,2}(v)$ (181). Влияние ионов на распространение высокочастотных волн (183). О поглощении и излучении электромагнитных волн магнитоактивной плазмой (186).

§ 12. Пространственная дисперсия и плазменные волны при наличии магнитного поля (учет теплового движения) 189

Предельный переход к изотропной плазме (189). Об учете пространственной дисперсии в анизотропной среде (191). Квазигидродинамическое приближение (192). О плазменных волнах в магнитоактивной плазме (194). Кинетическая теория (196). Природа поглощения, не связанного с соударениями (197). О вычислении коэффициента поглощения с помощью закона Кирхгофа и методом коэффициентов Эйнштейна (203). Результаты кинетической теории для продольного распространения (угол $\alpha = 0$) (207). Резонансное поглощение при произвольном угле α (214). Область черенковского поглощения (район резонансной частоты ω_∞) (222). Случай обыкновенной волны при невысоких частотах (232). Резюме (233).

§ 13. Некоторые замечания о динамике плазмы 234

Магнитогидродинамическое приближение (234). Квазигидродинамическое приближение (237). О движении чисто электронно-ионной плазмы и слабо ионизированного газа (241). Стационарное движение слабо ионизированного газа в магнитном поле. Случай земной ионосферы (244).

§ 14. Распространение низкочастотных и магнитогидродинамических волн 247

Введение (247). Магнитогидродинамические волны (248). Низкочастотные волны (квазигидродинамическое рассмотрение). Продольное распространение (256). Об области применимости магнитогидродинамических формул (259). Углы α, близкие к $\pi/2$. «Гибридные» резонансы (260). Об области ионного гирорезонанса (262). Учет влияния молекул (264). Учет теплового движения. Некоторые результаты кинетической теории (изменение скорости, затухание при отсутствии соударений) (266).

§ 15. Сводка основных формул 272

Глава IV

Распространение волн в неоднородной изотропной среде (плазме)

§ 16. Введение. Приближение геометрической оптики 278

Волновые уравнения. Плоскослоистая среда (278). Строгие решения для плоскослоистой среды (279). О приближенных решениях (280). Приближение геометрической оптики (280). Более строгое рассмотрение того же вопроса (284). Случаи, когда приближение геометрической оптики неприменимо. Полное внутреннее отражение (287). Об отражении радиоволн от ионосферы (290). Совершенно неотражающий слой (291). Слабое отражение от слоя. Интерполяционная формула для $|R|$ в случае произвольного слоя (292). Отражение от скачка производной $\frac{dn}{dz}$ (295).

§ 17. Строгие решения волнового уравнения $\left(\text{линейный и параболический слои; слой } \varepsilon'=\frac{a}{(b+z)^2}\right)$ 297

Введение (297). Линейный слой без поглощения (298). Поглощающий линейный слой (300). Параболический слой без поглощения (304). Слой $\varepsilon' = \frac{a}{(b+z)^2}$ (306).

§ 18. Отражение и прохождение волн в случае «симметричного» и «переходного» слоев произвольной толщины 308

Плавный слой с четырьмя параметрами (308). «Симметричный» слой (309). «Переходный» слой. Предельный переход к резкой границе раздела (311).

§ 19. Наклонное падение волн на слой 312

Общие соотношения. Волна с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости падения (312). Приближение геометрической оптики (315). Лучевая трактовка (316). О волнах с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения (317). Уравнение для магнитного поля волны (320).

§ 20. Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной изотропной плазме. Взаимодействие электромагнитных и плазменных волн 321

Физическая картина явления (321). Решение волнового уравнения (323). Учет пространственной дисперсии и некоторых нелинейных эффектов (329). Учет образования плазменных волн. Взаимодействие между различными нормальными волнами (334). О взаимной трансформации и взаимодействии между продольными и поперечными волнами в плазме (340

§ 21. Распространение импульсов (сигналов) 344

Фурье-представление поля импульса (344). Распространение квазимонохроматического импульса без учета его расплывания (346). Фазовая и групповая скорости волн (347). Расплывание импульсов (349). Пределы применимости использованного приближения и более точные результаты (356).

§ 22. Плотность энергии в диспергирующей среде. Скорость сигналов в плазме при наличии поглощения 359

Введение (359). Плотность энергии в непоглощающей диспергирующей среде (360). Случай поглощающей среды (364). Плотность энергии для модели поглощающей плазмы (367). О плотности энергии в случае совокупности осцилляторов (368). Плотность энергии в плазменных волнах (368). Скорость сигналов в поглощающей среде. Применение к плазме (370).

Глава V

Распространение волн в неоднородной магнитоактивной плазме

§ 23. Введение. Приближение геометрической оптики 373

Волновые уравнения (373). Приближение геометрической оптики (374). Границы применимости приближения (377). Область начала слоя и взаимодействие нормальных волн в этом случае (380).

§ 24. Распространение импульсов 383

Вектор групповой скорости в анизотропной среде (383). Случай магнитоактивной плазмы (388). Вектор групповой скорости, направление луча и вектор потока энергии (391). Распространение импульсов в неоднородной среде (396). Распространение импульсов в поглощающей среде (398).

§ 25. Отражение волн от неоднородного слоя 402

Отражение волн от слоя. Углы $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ (402). Приближенное решение при произвольном угле α (404).

§ 26. Предельная поляризация волн, выходящих из слоя неоднородной магнитоактивной плазмы 410

Введение. Некоторые оценки (410). Приближенное решение (412). Результаты расчета (417).

§ 27. Поведение поля волны, коэффициенты отражения и прохождения при наличии особенности у показателя преломления . . 419

Введение. Особенности (полюса) у показателя преломления (419). Строгое решение для слоя $\varepsilon'_{\text{эфф}} = \frac{g}{(z+is)^2}$ (422). Строгое решение длн слоя $\varepsilon'_{\text{эфф}} = \frac{g^2}{z+is}$. Физическая интерпретация (423). Слой $\varepsilon'_{\text{зфф}} = g_1^2 + \frac{g_2^2}{z+is}$ (425). Полюс функции $(n-i\varkappa)^2_{1,2}$ в случае магнитоактивной плазмы (426). Механизм резонанса. Эффект «разбухания» поля в магнитоактивной плазме (430). Случай земной ионосферы (433). Учет пространственной дисперсии и нелинейных эффектов (434).

§ 28. Эффект «утраивания» отраженных сигналов (взаимодействие нормальных волн при малых углах α) 434

Область малых углов α между магнитным полем и волновой нормалью. Картина явления (434). Решение задачи методом возмущений (область очень малых углов α)(437). Вариационный метод (другой предельный случай) (444). Метод фазовых интегралов (452). Общие результаты при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} < 1$ (454). Формулы для δ_0. Учет соударений (457). Результаты при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} > 1$ (462).

§ 29. Наклонное падение волн на слой. Теорема взаимности . . . 466

Введение (466). Приближение геометрической оптики (467). Поле в первом приближении геометрической оптики (469). Графики функций $q_{1,2}(v)$ (472). Траектории волновых нормалей и лучей (475). Некоторые особые случаи (479). Просачивание волн и эффект «утраивания» сигналов при наклонном падении (482). Просачивание волн при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} > 1$ (485). Доказательство теоремы взаимности (486). Обобщение на случай магнитоактивной среды (488). Среды с несимметричным тензором μ'_{ij} и с пространственной дисперсией (489).

Глава VI

Отражение радиоволн от ионосферных слоев

§ 30. Введение. Отражение от произвольного плавного слоя . . . 491

О распространении радиоволн в ионосфере (491). Параметры ионосферы (492). Отражение волн от произвольного слоя (495). Действующая высота отражения $z_д$. Высотно-частотные характеристики (499). Параболический слой (502). Учет изменений слоя во времени. Эффект Доплера (505).

§ 31. Учет поглощения 508

Влияние поглощения на отражение волн (508). Коэффициент отражения в случае малости поглощения. Определение $\nu_{эфф}$ по измерению поглощения (511).

§ 32. Структура поля вблизи точки отражения 513

Структура поля (513). Геометрикооптическое приближение (515). Учет поглощения (517).

§ 33. Отражение и просачивание через слой волн с частотой, близкой к критической 518

Параболический слой (518). Произвольный слой (519). Учет поглощения (523). Действующая высота для параболического слоя (строгое решение) (524). О времени установления амплитуды сигнала (527).

§ 34. Отражение при наклонном падении 528

Точка отражения. Критическая частота (528). Лучевая трактовка (529). Теоремы, связывающие групповые пути при наклонном и нормальном падении (533). Отражение от сферического слоя (536). Напряженность поля отраженных от ионосферы сигналов (537).

§ 35. Отражение волн при учете влияния магнитного поля 541

Влияние магнитного поля. Критические частоты (541). Фаза волны и коэффициент отражения. Ход лучей (543). Квазипродольное и квазипоперечное распространение (548). Наклонное падение (549). Учет неоднородности земного магнитного поля (550).

Глава VII

Распространение радиоволн в космических условиях

§ 36. Распространение радиоволн в солнечной атмосфере 553

Введение (553). Солнечная корона (554). Распространение радиоволн в короне (556). Излучение радиоволн. Учет рефракции (561). Уравнение переноса. Эффективная температура радиоизлучения (565). Влияние магнитного поля (568). Трансформация плазменных волн в радиоволны (572). О поглощении, несвязанном с соударениями (573). Теорема Кирхгофа в магнитоактивной плазме (574).

§ 37. Распространение радиоволн в межзвездной среде 577

Поглощение радиоволн в межзвездном газе (замечания общего характера) (577). Вычисление коэффициента поглощения в сильно разреженной плазме (579). Вращение плоскости поляризации радиоволн в межзвездной среде (585).

Глава VIII

Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле

§ 38. Введение. Плазма в сильном однородном электрическом поле 588

О нелинейных эффектах в плазме со столкновениями и без столкновений (588). Условие слабости поля в плазме. Примеры (590). Постановка задачи в случае сильного поля (591). Элементарная теория (592). Точность результатов элементарной теории (599). Кинетическая теория (600). Сильно ионизированная плазма (604). Слабо ионизированная плазма (606). Изменение концентрации электронов в результате нагрева плазмы в неоднородном поле (608).

§ 39. Нелинейные эффекты при распространении радиоволн в плазме (ионосфере) 610

Введение (610). Основные соотношения (612). Эффект самовоздействия (613). Нелинейное взаимодействие волн. Кроссмодуляция (618). Нелинейное взаимодействие немодулированных волн. Комбинационные частоты (623). О воздействии радиоволн на ионосферу (625). *Нелинейность, связанная с изменением электронной концентрации (626).*

Цитированная литература 630

Дополнительная литература 646

Предметный указатель 681

Предисловие ко второму изданию

В последние годы масштаб исследований, посвященных плазме, продолжал увеличиваться. Всего за пять лет (1961—1965 гг.) физике плазмы было посвящено около 12 000 статей. Если же иметь в виду только проблему распространения различных волн в плазме и непосредственно примыкающие сюда вопросы, то число работ за указанный период составляет более 1500.

Особенно большое внимание при этом уделялось:

распространению волн в неравновесной плазме при наличии пучков и вообще при немаксвелловском распределении частиц по скоростям; этот круг вопросов, очевидно, тесно связан с изучением различных неустойчивостей в плазме;

распространению волн при учете пространственной дисперсии, что особенно существенно в случае высокотемпературной плазмы;

изучению различных нелинейных эффектов и вообще учету нелинейности в теории распространения волн в плазме;

распространению волн в турбулизованной плазме, рассеянию волн на флуктуациях концентрации и других неоднородностях;

распространению волн при наличии границ, например в заполненных плазмой волноводах, и т. п.

Большое внимание было обращено и на различные конкретные проблемы, в частности на распространение и генерацию волн в ионосфере и магнитосфере Земли, в межпланетной плазме и в лабораторных установках, а также на плазму в твердых телах.

Несомненно, все перечисленные вопросы связаны между собой, а также с задачами особенно подробно исследованными ранее (вычисление комплексной диэлектрической проницаемости, анализ распространения волн в равновесной и «холодной» плазме, переход к магнитной гидродинамике и т. д.). Поэтому представляется и возможным и, видимо, целесообразным написать книгу о распространении волн в плазме, которая охватывала бы всю совокупность возникающих проблем и освещала их с единой точки зрения. Такой путь, однако, связан и с большими трудностями как по существу дела, так и особенно с точки зрения доступности и полноты изложения. В конечном счете эти затруднения обусловлены исключительным разнообразием встречающихся случаев, отличающихся иногда огромным различием значений характерных параметров плазмы (например, концентрация плазмы в металлах и в межгалактическом пространстве различается примерно на 28 порядков, в то время как плотности всех жидкостей и кристаллов лежат в пределах одного-двух порядков). Другими словами, стремление к возможно большей широте охвата материала в физике плазмы особенно легко может привести к недостаточной конкретности и излишней громоздкости при изложении даже простых вопросов.

Исходя из этих соображений, автор не стремился при подготовке нового издания настоящей книги существенно расширить ее рамки. Как и ранее, мы имеем в виду по сути дела не проблему распространения волн в плазме самого общего типа, а более узкий круг вопросов, связанных в основном с распространением волн в равновесной и «холодной» плазме. Тем не менее учету пространственной дисперсии и тем самым рассмотрению «горячей» плазмы также уделено довольно значительное место. В результате оказывается возможным исследовать все важнейшие случаи, представляющие интерес при изучении ионосферы, магнитосферы и космического пространства. Существенным исключением в этом отношении является лишь распространение и рассеяние в статистически неоднородной плазме. Кроме того, в книге совсем не затронута проблема плазменных неустойчивостей, а также некоторые другие из числа указанных выше. Мы стремились, однако, сделать некоторые пояснения и в отношении вопросов, которые подробнее не обсуждаются. Той же цели служит дополнительная литература, которая в тексте использована не была. Собственно, также обстояло дело и в предыдущем издании, и сейчас эта тенденция получила лишь дальнейшее развитие.

После выхода в свет предыдущего издания настоящей книги (1960 г.), помимо большого числа оригинальных работ, появилось несколько обзоров и монографий, специально посвященных распространению волн в плазме. В большинстве случаев речь идет о ценных пособиях (ссылки на них будут даны в тексте), где ряд вопросов освещен, вероятно, и более компактно и более удачно, чем у нас. Автор не стремился тем не менее изменять характер изложения там, где не видел в этом настоятельной необходимости. Возможность же для читателей ознакомиться по другим книгам с иным подходом к материалу может сыграть лишь положительную роль.

Новый материал, включенный в книгу, касается учета пространственной дисперсии, некоторых нелинейных эффектов, распространения импульсов, энергетических вопросов, а также ряда других моментов. В тех случаях, когда казалось, что это может быть полезно или удобно читателям, автор допускал повторения, а также делал пояснения элементарного характера. При этом были приняты во внимание поправки и изменения, внесенные в английское издание книги (Пергамон Пресс, 1964). Автор использовал также материал, содержащийся в написанной им части совместной с В. М. Аграновичем монографии «Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов» («Наука», 1965).

При подготовке нового издания существенную роль сыграли советы и замечания, сделанные А. А. Андроновым, А. В. Гуревичем и В. В. Железняковым. Были учтены также замечания и советы, высказанные Е. А. Бенедиктовым, Ю. И. Гальпериным, Б. Н. Гершманом, Н. А. Митяковым, В. В. Писаревой, Л. П. Питаевским, А. А. Рухадзе, В. П. Силиным и В. Н. Цитовичем. На целый ряд неточностей указал мне также Дж. Б. Сайкс, переводивший книгу на английский язык. Всем им приношу искреннюю благодарность.

Москва, апрель 1966 г.

В. Л. Гинзбург

Предисловие к первому изданию

Плазма, ее динамика и различные происходящие в ней процессы в последние годы привлекают к себе все большее внимание. Одной из важнейших проблем в этой области является изучение распространения в плазме электромагнитных волн различных типов (радиоволн, плазменных волн, магнитогидродинамических волн и др.). Сюда же как частный случай относится поведение плазмы, т. е. ионизированного газа, в однородном в пространстве, но переменном во времени электромагнитном поле.

В настоящей монографии освещается именно этот круг вопросов, существенных для теории распространения радиоволн в земной ионосфере, для радиоастрономии и астрофизики, а также физики плазмы, получаемой в лабораторных условиях.

При исследовании распространения волн в плазме приходится сталкиваться с весьма большим числом различных задач, с разными постановками вопроса. Относящаяся сюда литература огромна, особенно, если иметь в виду также и родственные проблемы физики плазмы. В этой связи подчеркнем, что ниже не делается попытки дать обзор соответствующих работ. Автор стремился к другому — по возможности просто осветить ряд основных результатов и выводов, уделяя особое внимание вопросам, в исследовании которых он сам принимал участие. Таким образом, ни характер изложения материала, ни список литературы не претендуют на полноту. Вместе с тем, насколько нам известно, как в советской, так и в иностранной литературе отсутствуют книги, в которых распространение волн в плазме рассмотрено даже с той степенью детальности, с какой это сделано ниже. Поэтому, как можно надеяться, появление книги будет оправдано. При ее составлении, там, где это оказалось возможным, использован также материал, содержащийся в написанных автором ранее монографии «Теория распространения радиоволн в ионосфере» (Гостехиздат, 1949) и второй части совместной с Я. Л. Альпертом и Е. Л. Фейнбергом книги «Распространение радиоволн» (Гостехиздат, 1953).

Для того чтобы облегчить чтение, а также использование книги для справок, допускалось повторение некоторых формул в разных разделах, а два параграфа специально посвящены сопоставлению основных результатов. Кроме того, в список литературы включены некоторые оригинальные и обзорные работы по вопросам, которые в книге лишь затрагиваются или даже вообще не рассматриваются. Важнейшей такой проблемой, оставленной в стороне, является распространение волн при наличии статистических неоднородностей.

За полезные замечания и советы автор признателен Е. А. Бенедиктову, Б. Н. Гершману, А. В. Гуревичу, Н. Г. Денисову, В. В. Железнякову, Н. А. Митякову, М. С. Рабиновичу и В. П. Силину.

1960 г.

В. Л. Гинзбург

Принятые обозначения*)

N — концентрация электронов
$N_{\max}$ — концентрация электронов в максимуме слоя
N_m — концентрация нейтральных частиц
$N_i = N_+ + N_-$ — концентрация ионов, положительных и отрицательных
M — масса тяжелых частиц (ионов, атомов, молекул)
ρ_M — плотность среды
ρ_0 — плотность невозмущенной среды
p_e — электронное давление
p_i — ионное давление
T — температура плазмы, в случае неизотермической плазмы — температура ионов (температура везде приводится в градусах Кельвина)
T_e — электронная температура
T — длительность импульса (обозначение встречается преимущественно в § 21)
T_0 — период колебаний (обозначение встречается преимущественно в § 21)
ω — циклическая частота
$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{4\pi e^2 N}{m}}$ — плазменная частота
$\omega' = \omega + i\gamma$ — комплексная частота, $p = i\omega' = i\omega - \gamma$
$\omega_H = \dfrac{|e| H^0}{mc}$ — гирочастота для электронов
$\Omega_H = \dfrac{|e| H^{(0)}}{Mc}$ — гирочастота для ионов
$f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ — частота

---

*) Редко встречающиеся обозначения не приводятся. Во многих случаях опускаются также индексы (например, в тексте эффективные сечения обозначаются буквой q с соответствующими индексами m, i и т. д.; здесь же дается только одно обозначение q). Большинство величин, обозначенных одной и той же буквой, не встречается в одном и том же параграфе. Заряд и масса электрона, скорость света и квантовая постоянная обозначены, как обычно, через e, m, c и $\hbar$. Подчеркнем, что в книге используется фазовый множитель $e^{i\omega t}$, в литературе же часто употребляется также множитель $e^{-i\omega t}$.

$f_{к}$ — критическая частота

v — скорость, $\bar{v} = \sqrt{\frac{8\varkappa T}{\pi m}}$ — средняя арифметическая скорость

$v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$

$\beta_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{mc^2}}$

$u_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_M}\right)}$ — скорость звука

$v_{ф} = \frac{c}{n}$ — фазовая скорость

$v_{гр} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ — групповая скорость

$\boldsymbol{k}$ — волновой вектор; $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}(n - i\varkappa)\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}$ — волновой вектор в однородных плоских волнах

λ — длина волны

$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ — длина волны в вакууме

φ — фаза волны

$\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор

$\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля

$\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля, которая в пределах этой книги отождествляется с магнитной индукцией $\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{H}^{(0)}$ — напряженность внешнего (постоянного) магнитного поля

$\boldsymbol{P}$ — поляризация среды

$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ — электрическая индукция

Φ — потенциал электрического поля (для потенциального поля $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\Phi$)

$\boldsymbol{j}$ — плотность тока проводимости

$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$ — плотность полного тока, связанного с движением зарядов

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + 4\pi\boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + 4\pi\boldsymbol{j}'$$

$\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\boldsymbol{D}$ — плотность «свободных зарядов»; ρ также плотность микрозарядов

$\rho' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\boldsymbol{E}$ — средняя плотность микрозарядов

ε — диэлектрическая проницаемость, ε_{ij} — тензор диэлектрической проницаемости

σ — проводимость, σ_{ij} — тензор проводимости

$\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость,

$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}-i\,\dfrac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}$ — тензор комплексной диэлектрической проницаемости

$\varkappa=1\cdot 38\cdot 10^{-16}$ *эрг·град*$^{-1}$ — постоянная Больцмана (фигурирует обычно в комбинации $\varkappa T$)

$\varkappa$ — показатель поглощения (затухания)

γ — показатель затухания ($E=E_0e^{i\omega t}e^{-\gamma t}$)

n — показатель преломления

n_1, n_2, n_3 — показатели преломления необыкновенной, обыкновенной и плазменной волн

$\tilde{n}=(n-i\varkappa)$ — вводится при $\sigma=0$

$\mu=\dfrac{2\omega}{c}\varkappa$ — коэффициент поглощения

$\mu_0, \mu_\Omega, \mu_{2\Omega}$ — глубины модуляции и кроссмодуляции (обозначения встречаются только в § 39)

Ω — частота модуляции (обозначение встречается только в § 39)

$\tau=\int\mu\,ds$ — оптическая толщина

τ — времена релаксации, время свободного пробега

ν — число соударений (ν_m, ν_i, число соударений с молекулами или ионами)

$\nu_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений

q — эффективное сечение

D — дебаевский радиус $\left[D=\left(\dfrac{\varkappa T}{8\pi e^2N}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$ при $T_e=T$ и $\left.N_+=N\right]$

δ — средняя относительная доля энергии, передаваемой электроном тяжелой частице при одном соударении

$\delta_{\text{уп}}=\dfrac{2m}{M}$ — значение δ при упругих соударениях

$K=\dfrac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия электронов

$l=\tau\bar{v}=\dfrac{\bar{v}}{\nu_{\text{эфф}}}$ — средняя длина свободного пробега

S — интеграл столкновений (соударений)

$\mathbf{S}=\dfrac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]$ — поток электромагнитной энергии

$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функция распределения

$f_0(v)$, $\dfrac{\mathbf{v}f_1(v)}{v}$ — симметричная и несимметричная части функции распределения

$f_{00}(v)$ — максвелловская функция распределения

$\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ — отклонение функции распределения от равновесного значения

$\alpha = 16\pi D^3 N = \frac{2\varkappa T D}{e^2}$

α — угол между волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и внешним магнитным полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$

χ — угол между $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и осью z (обозначение встречается только в § 29)

θ — угол между волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$

θ — угол рассеяния

θ — угол между нормалью к фронту волны и осью z, θ_0 — угол θ в начале слоя (угол падения)

Ψ — угол поворота плоскости поляризации

Ψ — величина, фигурирующая в выражениях типа

$$E = E_0 e^{-i\frac{\omega}{c}\Psi}; \quad \Psi' = \frac{d\Psi}{dz} \text{ и т. д.}$$

R — амплитудный коэффициент отражения

D — амплитудный коэффициент пропускания

z_m — полутолщина параболического слоя

$K = \frac{E_{y,1,2}}{E_{x,1,2}}$ — коэффициенты поляризации, характеризующие поляризацию нормальных волн 1 и 2

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \\ v &= \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \\ s &= \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \end{aligned}\right\} \text{— безразмерные параметры}$$

Глава I

Основы теории распространения электромагнитных волн в плазме

§ 1. Общее введение. Параметры плазмы в различных случаях

Различные случаи распространения волн в плазме. С распространением электромагнитных волн в плазме, т. е. в частично или полностью ионизированном газе, приходится встречаться в целом ряде случаев. Важнейшие из них таковы:

Распространение радиоволн в высоких слоях земной атмосферы (в ионосфере).

Распространение в ионосфере, экзосфере и прилегающих к ней областях межпланетного пространства различных низкочастотных электромагнитных волн.

Распространение в солнечной атмосфере, в туманностях, а также в межзвездном и межпланетном пространствах радиоволн космического происхождения, исследуемых радиоастрономическими методами. Сюда же можно отнести распространение радиоволн при локации Солнца, Луны и планет, а также в случае связи с далекими искусственными спутниками Земли, космическими ракетами и т. п.

Распространение в космических условиях низкочастотных (магнитогидродинамических и акустических) волн.

Распространение в космических условиях (солнечная корона и т. д.), а также в земной ионосфере плазменных волн.

Распространение электромагнитных волн различных типов в плазме, созданной в лабораторных условиях (при изучении газового разряда, в установках для исследования контролируемых термоядерных реакций и др.).

Поскольку в космосе вещество почти во всех случаях находится в состоянии плазмы, с распространением электромагнитных волн в плазме оказывается связанной также вся оптическая астрономия. Однако в оптической части спектра при встречающихся в звездных атмосферах плотностях основные специфические особенности плазмы не проявляются. Поэтому, естественно, мы не будем рассматривать волн, лежащих в инфракрасной и еще более коротковолновых частях спектра.

Представление о плазме является закономерным и плодотворным не только для газа, но и при изучении некоторых свойств твердых тел (оптика металлов, дискретные потери энергии в твердых телах, циклотронный резонанс в полупроводниках при наличии большого числа носителей тока и некоторые другие явления). Тем не менее сколько-нибудь подробно останавливаться на этом круге вопросов, относящихся скорее к области физики твердого тела, мы также не будем.

Параметры плазмы. Плазма, с которой приходится сталкиваться в природных условиях или в лабораторных приборах, характеризуется параметрами, отличающимися в различных случаях на много порядков. Так, электронная концентрация в межгалактическом пространстве $N \leqslant 10^{-5}$ *электронов·см*$^{-3}$, в межзвездной среде электронная концентрация изменяется обычно в пределах $10^{-3} \leqslant N \leqslant 10$ (значение $N \sim 10$ относится к облакам межзвездного газа) *). В солнечной короне $10^4 \leqslant N \leqslant 3 \cdot 10^8$, в межпланетном пространстве $N \sim 1 \div 10^4$ (последнее значение относится к самым мощным корпускулярным потокам, выбрасываемым Солнцем). В земной ионосфере $10^3 \leqslant N \leqslant 3 \cdot 10^6$. В некоторых обсуждаемых, но еще не созданных установках для контролируемого использования термоядерных реакций $N \sim 10^{15}$, а для ряда газоразрядных приборов типично значение $N \sim 10^{12}$. Наконец, концентрация электронов проводимости в металлах $N \sim 3 \cdot 10^{22}$, и именно эта концентрация фигурирует, когда плазменные представления используются в применении к металлам (в полупроводниках значение N обычно на несколько порядков меньше, чем в металлах).

Вторым параметром, характеризующим плазму, является концентрация нейтральных частиц N_m, или степень ионизации $r = \frac{N}{N_m}$. В земной ионосфере: в нижнем D-слое $N_m \sim 10^{15}$ и $r \sim 10^{-11} \div 10^{-12}$; в E-слое $N_m \sim 10^{12}$ и $r \sim 10^{-7}$ и в F-слое $N_m \leqslant 10^{10}$ и $r \leqslant 10^{-4}$ (подробнее о строении ионосферы см. § 30). В солнечной короне практически $N_m = 0$, т. е. $r = \infty$; в других космических условиях иногда $N_m \ll N$, но часто (вдали от горячих звезд) $N \ll N_m$, т. е. газ слабо ионизирован.

Если в плазме присутствуют лишь положительные ионы, то в имеющих обычно место условиях квазинейтральности их концентрация $N_+ = N$. Если же могут присутствовать также отрицательные ионы, то $N_+ = N + N_-$ (все ионы считаем для простоты однократными) и появляется еще один параметр N_-/N_+, или N_-/N.

---

*) Все приводимые численные значения имеют лишь ориентировочный характер.

В соответствии с различием в концентрации в таких же примерно пределах меняется также и длина свободного пробега частиц.

Температура плазмы в различных условиях такова (все значения температуры здесь и в дальнейшем приводятся в градусах Кельвина):

Земная ионосфера	$T \sim 300 \div 3000$	
Солнечная корона	$T \sim 10^6$	
Межзвездный газ	$T \sim 100$	(слабо ионизированные области)
» »	$T \sim 10^4$	(сильно ионизированные области)
Межгалактический газ	$T \sim 10^5 \div 10^6$	

В экспериментальных установках для изучения контролируемых термоядерных реакций $T \sim 10^6 \div 10^7$. В соответствующих установках промышленного типа температура должна будет, вероятно, достигать $10^8 \div 10^9$ градусов (см. [1]).

Характеризуя состояние плазмы температурой, мы тем самым, строго говоря, уже считаем ее равновесной (точнее, предполагается, что частицы в плазме имеют максвелловское распределение по скоростям). Фактически, однако, ряд формул, которые будут получены ниже, в определенных пределах или совсем не зависят, или слабо зависят от формы распределения плазменных частиц по скоростям. В других случаях несущественно распределение по скоростям ионов и молекул. В § 8 будет, кроме того, рассмотрена двухтемпературная плазма, в которой электроны и ионы имеют максвелловское распределение скоростей, но с различными температурами.

В целом, тем не менее, можно сказать, что плазма везде в настоящей книге считается равновесной или квазиравновесной в пространстве скоростей. Это ограничение весьма существенно, так как при наличии в плазме различных потоков и пучков частиц (т. е. в случае достаточно резкой асимметрии функции распределения плазменных частиц по скоростям) распространение волн в плазме приобретает качественно новые особенности. Важнейшая такая особенность состоит в том, что при наличии пучков вóлны в плазме могут не только затухать по мере их распространения, но и усиливаться. Другими словами, при наличии пучков плазма оказывается, вообще говоря, неустойчивой: возникающие в ней по какой-либо причине возмущения (волны) в линейном приближении нарастают со временем. Все такого рода явления, как ясно из сказанного, ниже рассматриваться не будут. Более того, под самим термином «плазма» будем без дополнительных оговорок понимать не произвольную плазму, а только плазму, в которой при отсутствии электрического поля распределение по скоростям либо равновесно (плазма с температурой T), либо, в интересующем нас плане, несущественно отличается от равновесного или квазиравновесного состояния (двухтемпературная плазма и т. д.).

Рассмотрению более общей проблемы о волнах в неравновесной плазме (в частности, при наличии пучков) посвящена обширная литература. То же можно сказать и о многих других аспектах физики плазмы, имеющих отношение к тому кругу явлений, которому посвящена настоящая книга. Сейчас мы ограничимся указанием лишь на несколько монографий и обзоров [1—9], но ниже значительно расширим этот список.

Особенности плазмы. С указанной первой особенностью плазмы — большим разнообразием встречающихся значений параметров, связана и вторая ее особенность, существенная при изучении распространения волн. Именно, плазма часто является существенно неоднородной, так что речь идет о распространении волн в средах с изменяющимися в пространстве параметрами. Разумеется, с неоднородностью среды приходится сталкиваться и в других случаях. При этом обычно встречаются резкие границы раздела и значительно реже лишь сравнительно небольшие плавные изменения свойств среды. В случае же плазмы, наоборот, редко приходится сталкиваться с резкими границами, и типичным является наличие плавных, но весьма больших изменений свойств среды. Изменения эти часто настолько велики, что диэлектрическая проницаемость ε меняет знак.

Третьей характерной особенностью плазмы как раз и можно считать то обстоятельство, что ее использование позволяет без особого труда реализовать среду с близкой или равной нулю диэлектрической проницаемостью ε и слабым поглощением. С этим связаны возможность существования очень слабо затухающих плазменных волн и некоторые другие важные моменты.

Четвертая особенность плазмы — сильная частотная дисперсия, т. е. зависимость проницаемости ε от частоты ω.

Пятой особенностью плазмы можно считать сильное изменение ее свойств под действием постоянного магнитного поля. В результате даже весьма слабые, по обычным представлениям, магнитные поля (например, земное поле) существенно меняют характер распространения волн в земной ионосфере и других случаях.

Шестая особенность плазмы — появление нелинейности ее электромагнитных свойств уже в сравнительно легко достижимых полях. С этим связаны явления нелинейного взаимодействия (кроссмодуляции и др.) волн, распространяющихся в плазме. В других же средах (за исключением ферромагнетиков, сегнетоэлектриков и т. п.) нелинейные эффекты появляются лишь в очень сильных полях.

Разумеется, выделение шести, а не какого-то другого числа особенностей плазмы несколько условно. Но сам факт большой специфичности плазмы бесспорен. В связи с этим естественно, как это уже давно имеет место в практике, самостоятельное рассмотрение различных вопросов физики плазмы и, в частности, распространения в плазме электромагнитных волн.

§ 2. Основные уравнения. Характер используемых приближений

Уравнения поля. Материальное уравнение в линейной электродинамике. Стоящая перед нами задача заключается в количественном рассмотрении электромагнитных волн в плазме. При этом для описания электромагнитного поля мы будем пользоваться средними значениями напряженностей электрического и магнитного поля. Под усреднением, строго говоря, здесь нужно понимать усреднение в смысле, используемом в статистической физике (усреднение по ансамблю эквивалентных систем; такое усреднение связано с пренебрежением флуктуациями). Средние в статистическом смысле поля могут как угодно быстро изменяться в пространстве и времени и какое-либо дополнительное (помимо статистического) усреднение полей по «физически бесконечно малым» объемам и интервалам времени не только не необходимо, но и неосуществимо при достаточно общей постановке вопроса (среды с частотной и пространственной дисперсией) [3, 10]. Фактически, однако, мы обычно интересуемся полями в плазме, длина волны которых λ велика по сравнению со средним расстоянием между частицами $\bar{r} \sim N^{-1/3}$. Например, при распространении волн в ионосфере и солнечной короне рассматриваются в основном метровые и более длинные волны; в то же время в этих условиях $N \gg 10^3$ и $\bar{r} \sim N^{-1/3} \lesssim 0{,}1$ *см*. В силу этого обстоятельства (условия $\lambda \gg \bar{r} \sim N^{-1/3}$) статистическое усреднение эквивалентно усреднению по «физически бесконечно малому» объему, т. е. объему с таким характерным размером l, что $l \gg N^{-1/3}$ и в то же время $l \ll \lambda$. В результате традиционное изложение [11, 12] электродинамики сплошных сред (макроскопической электродинамики), с использованием представлений об усреднении по достаточно малому объему, в применении к многим вопросам не отличается по сути дела от более последовательного подхода (статистическое усреднение, разложение поля по Фурье).

Для статистически-средних величин уравнения поля в среде имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ext}},\\ \operatorname{div}\boldsymbol{D}' &= 4\pi\rho_{\text{ext}},\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \operatorname{div}\boldsymbol{B} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2,1)$$

Здесь $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля, $\boldsymbol{D}'$ и $\boldsymbol{B}$ — полная индукция электрического и индукция магнитного полей, $\boldsymbol{j}_{\text{ext}}$ и ρ_{ext} — плотности тока и заряда внешних источников (последнее означает, что величины $\boldsymbol{j}_{\text{ext}}$ и ρ_{ext} считаются заданными — не зависящими от $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}'$ и $\boldsymbol{B}$). Индукция $\boldsymbol{D}'$ определяется соотношением $\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + 4\pi\boldsymbol{j}'$, где $\boldsymbol{j}'$—плотность полного тока, индуцированного полями $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$; кроме того, иногда удобно вводить вектор поляризации $\boldsymbol{P}'$, причем $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}'$.

Мы используем здесь обозначения $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{P}'$ и $\boldsymbol{j}'$ вместо более естественных обозначений $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{j}$, так как последние употребляются для других величин.

Из сравнения уравнений (2,1) с уравнениями для микроскопического поля ясно, что поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ в (2,1) представляют собой соответственно статистические средние значения напряженностей электрического и магнитного микрополей $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{h}$ (см. также § 3). Сила микрополя, действующая на «пробный заряд», движущийся со скоростью $\boldsymbol{v}$, равна $\boldsymbol{f} = e\left\{\boldsymbol{e} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{h}]\right\}$. В силу сказанного, статистически-средняя сила на пробный заряд $\boldsymbol{F} = e\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\right\}$. Сила $\boldsymbol{F}$, вообще говоря, не равна силе, действующей на заряды в каких-то определенных точках среды (этого вопроса — проблемы действующего поля, мы коснемся в § 4).

Все свойства среды (в частности, плазмы) отражены в выражении для $\boldsymbol{D}'$ или $\boldsymbol{j}'$, а лучше сказать в связи между $\boldsymbol{D}'$ и векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$. Установление этой связи (материального уравнения) необходимо для того, чтобы система уравнений (2,1) могла считаться полной.

Вообще говоря, связь между $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ является нелинейной, но большую роль играют линейное приближение и отвечающая ему линейная электродинамика. Правда, как раз в плазме нелинейные явления возникают сравнительно легко и их изучение составляет важный раздел физики плазмы. Однако и в электродинамике плазмы линейное приближение сохраняет свое выдающееся значение. В настоящей книге, за исключением гл. VIII и всего лишь нескольких мест в других разделах, мы будем пользоваться линейной электродинамикой и только на таком линейном материальном уравнении остановимся сейчас несколько подробнее.

Общий вид линейного материального уравнения таков:

$$\boldsymbol{D}'_i(\boldsymbol{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\boldsymbol{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t, t', \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') E_j(\boldsymbol{r}', t'), \tag{2,2}$$

где i, j — тензорные индексы 1, 2, 3, отвечающие осям $x = x_1$, $y = x_2$ и $z = x_3$ (здесь и во всей книге по дважды встречающимся тензорным индексам подразумевается суммирование).

В (2,2) помимо линейности принят во внимание лишь принцип причинности, в силу которого индукция в момент t определяется только значениями поля в прошлом и настоящем, т. е. в моменты $t' \leqslant t$. Если свойства среды неизменны (однородны) во времени, то ядро $\hat{\varepsilon}_{ij}$ в (2,2) зависит лишь от $t - t'$. Наконец, если среда пространственно однородна, т. е. все ее точки равноправны (при пренебрежении флуктуациями), то $\hat{\varepsilon}_{ij}$ зависит только от разности $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$. В таких условиях

$$\boldsymbol{D}'_i(\boldsymbol{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\boldsymbol{r}' \hat{\varepsilon}_{ij}(t - t', \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') E_j(\boldsymbol{r}', t'). \tag{2,3}$$

Ядро $\hat{\varepsilon}_{ij}$ можно интерпретировать как индукцию, возникающую в качестве «отклика» на дельта-образное поле $\boldsymbol{E}$. Действительно, при $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}', t') = \boldsymbol{e}\delta(t')\delta(\boldsymbol{r}')$ с $e = 1$ и $t' < t$ индукция $D'_i(\boldsymbol{r}, t) = \hat{\varepsilon}_{ij}(t, \boldsymbol{r}) e_j$.

Перейдем в (2,3) к изображениям (компонентам) Фурье, полагая $E_i(\boldsymbol{r}, t) = \int E_i(\omega, \boldsymbol{k}) e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})} d\omega\, d\boldsymbol{k}$ (для изображений $E_i(\omega, \boldsymbol{k})$ и оригиналов $E_i(\boldsymbol{r}, t)$ используется одинаковое обозначение E_i, что не должно повести к путанице в связи с указанием аргументов; аналогично поступаем и в случае других величин) *). Впрочем, для получения $D'_i(\omega, \boldsymbol{k})$ даже нет нужды проводить Фурье-преобразование, а достаточно в (2,3) положить $E_j(\boldsymbol{r}', t') = E_j(\omega, \boldsymbol{k}) e^{i(\omega t' - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}')}$ и аналогично для D'_i.

В результате ($\tau = t - t'$, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$)

$$D'_i(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) E_j(\omega, \boldsymbol{k}), \tag{2,4}$$

---

*) В литературе широко используются также выражения, отличающиеся другим выбором знака перед мнимой единицей i, т. е. употребляется фазовый множитель в виде $e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}$. Мы везде используем множитель $e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$.

где

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \int_0^\infty d\tau \int d\boldsymbol{R} e^{-i(\omega\tau - \boldsymbol{kR})} \hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \boldsymbol{R}). \tag{2,5}$$

Тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ называется тензором комплексной диэлектрической проницаемости и может быть записан в виде

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) - i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}), \tag{2,6}$$

где тензоры ε_{ij} и σ_{ij} являются эрмитовыми (запись произвольного тензора ε'_{ij} в виде (2,6) однозначна в смысле определения эрмитовых тензоров ε_{ij} и σ_{ij}, и наоборот).

Отметим, что чаще употребляются (см., например, [3, 10, 12]) и, видимо, более последовательны другие обозначения, при которых тензор (2,5) обозначается как ε_{ij} и записывается в виде $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} \pm i\varepsilon''_{ij}$ (здесь тензоры ε'_{ij} и ε''_{ij} эрмитовы, а знак $\pm$ перед i отвечает выбору знака у фазового множителя $e^{\mp i(\omega t - \boldsymbol{kr})}$). Следуя известной традиции, мы сохраним обозначения типа (2,6), которые для приложений несколько более удобны.

В силу (2,4) и (2,6)

$$D'_i(\omega, \boldsymbol{k}) = E_i(\omega, \boldsymbol{k}) - i\frac{4\pi}{\omega}j'_i(\omega, \boldsymbol{k}) = \\ = D_i(\omega, \boldsymbol{k}) - i\frac{4\pi}{\omega}j_i(\omega, \boldsymbol{k}), \tag{2,7}$$

где

$$D_i(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) E_j(\omega, \boldsymbol{k}), \quad j_i(\omega, \boldsymbol{k}) = \sigma_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) E_j(\omega, \boldsymbol{k}). \tag{2,8}$$

Величины $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$ называются соответственно индукцией электрического поля и плотностью индуцированного тока. В отличие от полной индукции $\boldsymbol{D}'$ и плотности полного тока $\boldsymbol{j}'$ эти величины $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$ связаны с $\boldsymbol{E}$ с помощью эрмитовых тензоров ε_{ij} и σ_{ij} (тензор же ε'_{ij} эрмитовым, вообще говоря, не является).

Частотная и пространственная дисперсии. Их роль в случае плазмы. Зависимость тензора $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ от частоты ω соответствует частотной дисперсии, а его зависимость от волнового вектора $\boldsymbol{k}$ — пространственной дисперсии (иными словами, если диэлектрическая проницаемость зависит от ω, то имеется частотная дисперсия, а в случае зависимости ε'_{ij} от $\boldsymbol{k}$ присутствует пространственная дисперсия) *).

---

*) Частота ω и волновой вектор $\boldsymbol{k}$ являются независимыми аргументами функции $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$. Правда, при распространении волн в среде ω и $\boldsymbol{k}$ связаны между собой дисперсионным уравнением (см., например, § 7), но появление такой связи обусловлено однородностью используемых урав-

Физическая природа частотной дисперсии состоит в том, что в силу инерции носителей заряда, а также испытываемого ими трения, поляризация (и, следовательно, индукция) в среде в данный момент не определяется только значением поля в этот же момент времени. Естественно поэтому, что интервал значений $\tau = t - t'$, в котором ядро $\hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \boldsymbol{R})$ в (2,5) сколько-нибудь значительно, определяется характерными частотами среды ω_s (а также обратными временами релаксации $1/\tau_s$).

Частоты ω_s и времена τ_s обычно лежат в широких пределах. Для плазмы в простейшем случае, когда можно не учитывать влияния внешнего магнитного поля и соударений, роль собственной частоты среды ω_s играет плазменная частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N} \tag{2,9}$$

(частота ω_0 часто называется также лэнгмюровской частотой и обозначается через ω_L или ω_N).

Частоты ω распространяющихся в плазме волн во многих интересных случаях порядка ω_0 или, во всяком случае, сопоставимы с ω_0. Далее, отношение ω_0/ω входит в выражение для $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ весьма существенным образом (например, в простейшем случае $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon(\omega)\,\delta_{ij}$, $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_0^2/\omega^2$; см. § 3). В результате частотная дисперсия в плазме, вообще говоря, является сильной и мы даже отметили выше этот момент в качестве одной из характерных особенностей плазмы.

Пространственная дисперсия связана с тем, что поляризация (индукция) в данной точке определяется не только значением электрического поля в той же точке, но и полем в окрестности этой точки. Характерный размер a_s для той области значений R, в которой ядро $\hat{\varepsilon}_{ij}(\tau, \boldsymbol{R})$ в (2,5) еще существенно отлично от нуля, зависит от типа среды. Например, в конденсированной среде (твердое тело, жидкость) параметр или параметры a_s обычно порядка междуатомного расстояния или постоянных решетки, поскольку атомы не могут быстро перемещаться на значительное расстояние, а междумолекулярные силы являются короткодействующими (подробнее см. [10]). Вообще же, по самому смыслу, расстояние a_s есть «радиус молекулярного действия» или «радиус корреляции», т. е. то расстояние, на котором движение частиц взаимозависимо. В плазме роль параметров a_s могут играть такие расстояния, как длина свободного пробега l, радиус электронной

нений поля. В общем же случае, при наличии внешних источников (см. (2,1)), можно создать поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$ с любыми ω и $\boldsymbol{k}$, а затем найти создаваемую этим полем индукцию $\boldsymbol{D}'$ (подробнее см. [10]).

орбиты в магнитном поле $r_H = \frac{v}{\omega_H} = \frac{v \cdot mc}{|e| H^{(0)}}$ (v — скорость электрона, $H^{(0)}$ — напряженность магнитного поля) и, наконец, дебаевский радиус

$$D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}} = 4{,}9 \sqrt{\frac{T\,(^\circ\text{К})}{N\,(\textit{см}^{-3})}}\ \textit{см}, \tag{2,10}$$

где $\varkappa = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг·градус*$^{-1}$ — постоянная Больцмана. На физическом смысле дебаевского радиуса (2,10) мы еще подробно остановимся в § 4. Здесь достаточно сказать, что D есть характерное расстояние, на котором заряды в плазме собираются вокруг данного заряда и экранируют его поле. Одновременно дебаевский радиус D по порядку величины равен расстоянию, которое электрон с тепловой скоростью $v \sim v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$ проходит за один период $\frac{2\pi}{\omega_0}$, отвечающий частоте плазменных колебаний (2,9); в самом деле, расстояние $\frac{v_T}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\varkappa T}{4\pi e^2 N}} \sim D$.

При отсутствии магнитного поля и столкновений (бесстолкновительная изотропная плазма) пространственная дисперсия в плазме определяется именно параметром D или, точнее, расстоянием v_T/ω; мы будем пользоваться безразмерным параметром D/λ или $kD \sim \frac{kv_T}{\omega_0}$ (λ — длина волны в среде, при отсутствии поглощения волновой вектор $k = 2\pi/\lambda$). Для поперечных волн в плазме часто $k \sim \omega/c$ и $\omega \sim \omega_0$, откуда $kD \sim v_T/c$. В подобных условиях параметр kD в нерелятивистской плазме $\left(v_T \ll c,\ T \ll \frac{mc^2}{\varkappa} \sim 5 \cdot 10^{9}\,^\circ\text{К}\right)$ всегда мал.

Чем холоднее плазма, тем меньше дебаевский радиус D и тем легче при прочих равных условиях пренебречь пространственной дисперсией. Так возник термин «холодная» плазма, указывающий на возможность пренебречь тепловым движением, а тем самым и пространственной дисперсией.

Итак, если характерный параметр мал, т. е.

$$kD \ll 1, \tag{2,11}$$

то пространственная дисперсия в плазме может считаться слабой (в условиях, когда не играет роли пространственная дисперсия, связанная с соударениями и влиянием магнитного поля). Учет слабой пространственной дисперсии, если он приводит лишь к небольшим поправкам (например, поправкам порядка $(kD)^2$), обычно не представляет особого интереса. Существенно, однако, что даже слабая пространственная дисперсия может приводить к качественно новым явлениям и эффектам и тогда ее рассмотрение, конечно, необходимо. В качестве таких эффектов нужно в первую очередь указать на появление плазменных (продольных) волн с отличной от нуля групповой скоростью (при отсутствии пространственной дисперсии могут существовать лишь плазменные колебания или, если угодно, плазменные волны с равной нулю групповой скоростью распространения) *). Таким образом, приближение «холодной» плазмы несомненно ограничено даже при соблюдении условия (2,11). К этому можно добавить, что параметр kD во многих случаях не так уже мал, несмотря на то, что плазма является нерелятивистской и пространственная дисперсия, формально говоря, может считаться слабой (условие (2,11)). Например, в солнечной короне $T \sim 10^6$ °К и $N \leqslant 10^8$ *см*$^{-3}$; как ясно из (2,10), при этом $kD = \frac{2\pi D}{\lambda} \geqslant \frac{3}{\lambda}$ или $kD \geqslant 10^{-2}$ для волн $\lambda \leqslant 3$ *м*.

На первый взгляд может показаться, что в такой ситуации наиболее целесообразно рассматривать распространение волн в плазме, сразу же учитывая и частотную и пространственную дисперсию. В тех же случаях, когда роль пространственной дисперсии мала, это было бы ясно из результатов; в частности, формулы для «холодной» плазмы можно получить из общих выражений, полагая параметр kD равным нулю.

Реальное положение дела представляется нам, однако, совершенно иным.

Во-первых, многие формулы, полученные с учетом пространственной дисперсии, значительно сложнее простых и ясных результатов, получающихся для «холодной» плазмы. В этой связи в тех случаях, когда влияние пространственной дисперсии мало и, так сказать, носит лишь количественный характер, из методических и педагогических соображений удобнее начинать с приближения «холодной» плазмы и учитывать пространственную дисперсию по теории возмущений, вычисляя соответствующие поправки. Во-вторых, и это главное, пространственная дисперсия полностью отражается в зависимости тензора $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ от $\boldsymbol{k}$, вообще говоря, только для однородной среды. В самом деле, переход к (2,4)—(2,5) был сделан исходя из выражения (2,3), строго справедливого только для однородной среды. В случае же неоднородной среды (в частности, при наличии границ) ядро $\hat{\varepsilon}_{ij}$ в (2,2) зависит не только от разности $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$, но и в отдельности от $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$. Тем самым в неоднородной среде использование тензора $\hat{\varepsilon}_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$, во всяком случае, ограничено, и этот вопрос требует специального анализа [10, 14, 15]. Между тем неоднородность плазмы во многих случаях (особенно, в космических условиях) весьма существенна. Последовательный учет пространственной дисперсии для неоднородной плазмы и весьма громоздок и не всегда практически возможен, не говоря уже о том, что часто он совершенно излишен. Наконец, нужно подчеркнуть тот факт, что в большинстве геофизических и астрофизических приложений (ионосфера, магнитосфера, солнечная корона, межзвездный газ) плазма часто может считаться «холодной» и учитывать пространственную дисперсию нужно лишь сравнительно редко.

---

*) В кристаллооптике параметр a/λ, характеризующий влияние пространственной дисперсии, обычно очень мал (параметр a порядка постоянной решетки и $a/\lambda \sim 10^{-3} \div 10^{-4}$). Тем не менее и в кристаллооптике учет пространственной дисперсии важен и интересен, поскольку он приводит к гиротропии, оптической анизотропии кубических кристаллов, появлению «новых» волн и другим явлениям (см. [10, 13]).

По всем этим причинам в основу изложения в настоящей книге положено приближение «холодной» плазмы. Учет же пространственной дисперсии будет производиться преимущественно лишь тогда, когда он необходим по существу дела.

Уравнения поля при неучете пространственной дисперсии («холодная» плазма). При пренебрежении пространственной дисперсией можно положить $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon'_{ij}(\omega, 0) = \varepsilon'_{ij}(\omega)$. Здесь нужно сделать лишь ту оговорку, что тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ описывает не только электрические, но и магнитные свойства среды [3, 10]. Поэтому для магнитной среды, особенно при $\omega = 0$, нельзя считать, что $\varepsilon'_{ij}(\omega, 0) = \varepsilon'_{ij}(\omega)$, а нужно ввести помимо $\varepsilon'_{ij}(\omega)$ также и магнитную проницаемость $\mu_{ij}(\omega)$. Однако в равновесной плазме (в отличие, скажем, от ферромагнетиков) статическое значение $\mu_{ij}(0)$ очень близко к единице (см. § 3). Значение $\mu_{ij}(\omega)$ при $\omega \neq 0$ для плазмы также близко к единице, а в случае необходимости намагничение может быть учтено и, точнее сказать, при последовательном подходе автоматически учитывается как эффект пространственной дисперсии *).

Итак, мы всегда будем полагать $\mu_{ij} = \delta_{ij}$, а для «холодной» плазмы описывать среду тензором $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k} = 0) = \varepsilon'_{ij}(\omega)$, который запишем в виде

$$\varepsilon'_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij}(\omega) - i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{ij}(\omega), \qquad (2,12)$$

---

*) Магнитные свойства среды находят свое отражение в зависимости полной индукции $\boldsymbol{D}'$ от $\boldsymbol{B}$. Но в силу третьего из уравнений (2,1) $\boldsymbol{B}(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{c}{\omega}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{k})]$ и, следовательно, $\boldsymbol{B}$ выражается через $\boldsymbol{E}$. Поэтому, когда $\boldsymbol{D}'$ в общем виде связывается с $\boldsymbol{E}$ (см. (2,4)), при этом учитываются и магнитные свойства. Нетривиальным является лишь переход $\omega \to 0$, т. е. рассмотрение статического поля. По причинам, указанным в тексте (возможность пренебречь намагничением плазмы), мы на этом переходе останавливаться здесь не будем (см. [3], § 3).

где тензоры ε_{ij} и σ_{ij} по определению являются эрмитовыми (именно так мы делим тензор ε'_{ij} на две части).

В силу сказанного нет оснований различать между магнитной индукцией $\boldsymbol{B}$ и напряженностью магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Ниже будет использоваться только эта последняя величина.

При пренебрежении пространственной дисперсией переход к пространственным Фурье-компонентам не является необходимым и можно пользоваться величинами типа $\boldsymbol{E}(\omega, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\, e^{-i\omega t} dt$ или, что проще, рассматривать поля вида

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\, e^{i\omega t}. \tag{2,13}$$

Ниже мы, если не оговорено обратное, всегда будем иметь дело с полями типа (2,13), т. е. монохроматическими полями. Для таких полей с учетом сделанных замечаний уравнения поля (2,1) записываются в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{D}, \tag{2,14}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{2,15}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}, \tag{2,16}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{2,17}$$

причем

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j, \quad j_i = \sigma_{ij}(\omega) E_j. \tag{2,18}$$

Пренебрежение пространственной дисперсией означает, что связь $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$ с $\boldsymbol{E}$ является локальной, т. е. в (2,18) фигурируют величины для одной и той же точки $\boldsymbol{r}$. Это значит, что и $\varepsilon_{ij}(\omega)$ и $\sigma_{ij}(\omega)$ могут зависеть от $\boldsymbol{r}$, как это и имеет место для неоднородной среды. Другими словами, связи (2,18) подробнее нужно было бы записать в виде $D_i(\boldsymbol{r})\, e^{i\omega t} = \varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{r})\, E_j(\boldsymbol{r})\, e^{i\omega t}$ и аналогично для $\boldsymbol{j}$.

В уравнениях (2,14) и (2,15) внешние токи и заряды считаются отсутствующими (в противном случае в правых частях этих уравнений появляются соответственно члены $\boldsymbol{j}_{\text{ext}}$ и ρ_{ext}; см. (2,1)). Быть может, следует, кроме того, пояснить, что второе из уравнений (2,1), в силу (2,7), записывается в виде $\operatorname{div} \boldsymbol{D}' = \operatorname{div} \boldsymbol{D} - i\frac{4\pi}{\omega}\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 4\pi\rho_{\text{ext}}$. Обозначая $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = -i\omega\rho$ и полагая $\rho_{\text{ext}} = 0$, мы и приходим к (2,15). Разумеется, такая процедура эквивалентна обычной, при которой величина ρ вводится как плотность «свободных» зарядов (из (2,14) и (2.15) сразу же следует уравнение непрерывности $\operatorname{div} \boldsymbol{j} + i\omega\rho = 0$, которое и определяет смысл ρ).

Равновесная «холодная» плазма при отсутствии внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}_{\text{ext}} = \boldsymbol{H}^{(0)}$ является изотропной. При этом

$$\varepsilon'_{ij}(\omega) = \varepsilon'(\omega)\,\delta_{ij}, \qquad \varepsilon'(\omega) = \varepsilon(\omega) - i\frac{4\pi}{\omega}\sigma(\omega) \tag{2,19}$$

и

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon(\omega)\,\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{j} = \sigma(\omega)\,\boldsymbol{E}. \tag{2,20}$$

При наличии внешнего магнитного поля (т. е. при $\boldsymbol{H}^{(0)} \neq 0$) даже равновесная плазма анизотропна или, как говорят, магнитоактивна. Тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega)$ в этом случае зависит от $\boldsymbol{H}^{(0)}$, и более последовательно было бы записывать его в виде $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{H}^{(0)})$.

В уравнения поля (2,14)—(2,17) входят полные поля от всех источников, и, поскольку ε_{ij} и σ_{ij} в (2,18) зависят от внешнего магнитного поля, эти уравнения формально можно считать нелинейными. Однако в теории распространения электромагнитных волн внешнее магнитное поле обычно считается заданным и к тому же независимым от времени и, следовательно, уравнения поля относятся по сути дела лишь к полю самих волн; поэтому эти уравнения в случае (2,18) являются линейными. В некоторых случаях, однако, имеют место нелинейные явления в «истинном смысле», проявляющиеся во взаимодействии различных волн в плазме; при этом ε и σ (или ε_{ij} и σ_{ij}) являются сами функциями напряженности электрического поля в волнах. Нелинейные явления проявляются лишь в случае достаточно сильных полей и, как уже указывалось, будут специально рассмотрены в гл. VIII. Во всех других местах книги мы будем, если это специально не оговорено, считать уравнения линейными, т. е. ε и σ (или ε_{ij} и σ_{ij}), не зависящими от векторов поля. В подавляющем большинстве случаев при распространении волн в ионосфере и космических условиях такое линейное приближение отвечает действительности.

Применяя к (2,16) операцию rot и используя (2,14), получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \frac{\omega^2}{c^2}\left(\boldsymbol{D} - i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right) = 0. \tag{2,21}$$

В декартовых координатах, которые ниже будут использоваться за немногими исключениями, удобна запись $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = -\Delta + \operatorname{grad}\operatorname{div}$ и уравнение (2,21) принимает вид

$$\Delta\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\boldsymbol{D} - i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right) = 0. \tag{2,22}$$

В изотропном случае (2,20) уравнение (2,22) принимает вид

$$\Delta\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\boldsymbol{E} = 0. \tag{2,23}$$

В том же изотропном случае (2,20), исключая из уравнений (2,14) и (2,16) поле E, получаем уравнение

$$\Delta \boldsymbol{H} + \frac{1}{\varepsilon'} [\operatorname{grad} \varepsilon' \operatorname{rot} \boldsymbol{H}] + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' \boldsymbol{H} = 0. \qquad (2,24)$$

Здесь принято во внимание, что уравнение (2,14) при учете связей (2,20) записывается так:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{i\omega}{c} \varepsilon' \boldsymbol{E}. \qquad (2,25)$$

Если бы мы не считали в (2,14) и (2,15) отсутствующими внешние токи и заряды, то в правой части уравнения (2,21) стоял бы член $-i \frac{4\pi\omega}{c^2} \boldsymbol{j}_{\text{ext}} (\omega, \boldsymbol{r})$, а в правой части уравнения (2,22) такой же член, но с обратным знаком; в уравнении (2,24) при этом появляется член $-\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_{\text{ext}}$. Все эти члены мы опустили, поскольку будем интересоваться только полями вне источников (например, антенн).

Одномерные задачи. Плоские волны. В общем случае, когда ε' зависит от всех координат, упрощение весьма сложных уравнений (2.23) и (2.24) невозможно. Поэтому весьма существенно, что часто можно принимать во внимание зависимость ε' лишь от одной координаты. Например, в земной ионосфере наиболее ярко выражена зависимость ε' (или ε'_{ij}) от высоты над Землей. В пределах относительно небольшого участка земной поверхности, для которого зенитное расстояние Солнца можно считать одинаковым (т. е. пренебречь сферичностью Земли), изменение ε' в горизонтальном направлении обычно носит случайный характер (облака в ионосфере и т. п.) и накладывается на регулярную картину распределения, при которой ε' зависит лишь от высоты (координата z). Для Земли в целом регулярное распределение ε' зависит не только от расстояния от центра Земли, но также от места земной поверхности в силу различного зенитного расстояния Солнца в разных точках. Однако эта последняя зависимость значительно более медленная, чем зависимость от высоты, и может быть либо вообще не принята во внимание, либо учтена приближенно. Аналогичным образом проницаемость ε' в солнечной короне в известном приближении можно считать зависящей только от расстояния до фотосферы.

Итак, большую роль играют одномерные задачи и среди них в первую очередь распространение волн в плоскослоистой среде (в этом случае ε'_{ij} зависит только от одной декартовой координаты z). Впрочем, часто проницаемость плазмы можно вообще считать постоянной в пространстве и рассматривать, таким образом, распространение волн в однородной среде. Детальный анализ этого простейшего случая нужен также для решения ряда более сложных задач. В однородной среде основное значение имеет, естественно, распространение плоских монохроматических волн типа $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - kr)}$. Распространение импульсов, и в частности, квазимонохроматических импульсов, сводится к распространению монохроматических волн путем разложения поля в интегралы Фурье по частотам и по волновым векторам. В плоскослоистой среде наибольший интерес представляет распространение монохроматических плоских волн вида $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(z)\, e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$.

Поэтому ниже все изложение основывается на рассмотрении распространения плоских волн. Однако и здесь можно выделить очень важный как теоретически, так и практически частный случай, а именно, распространение плоских волн при нормальном их падении на слой. Для изотропного случая задача о накловном падении сводится к задаче о нормальном падении. При учете же анизотропии (влияния внешнего магнитного поля) весьма сложна уже задача о нормальном падении, а для случая наклонного падения строгих решений еще не получено. Вместе с тем на примере нормального падения можно выяснить ряд основных особенностей распространения волн в плоскослоистой магнитоактивной плазме. Практическое значение задачи о нормальном падении также велико. Этот случай в известном приближении реализуется, например, при вертикальном зондировании ионосферы, имеющем основное значение с точки зрения ее исследований радиометодами.

В изотропной среде *) при $\varepsilon' = \varepsilon'(z)$ уравнение (2,23) при нормальном падении плоской волны принимает вид:

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(\omega, z)\, E = 0, \qquad (2,26)$$

причем это уравнение относится как к компоненте E_x, так и к компоненте E_y (поэтому мы и пишем просто E). При переходе от (2,23) к (2.26) учтено, что поле E может зависеть только от z (нормальное падение плоской волны). В тех же условиях уравнение (2,24) переходит в такое:

$$\frac{d^2H_{x,y}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(\omega, z)\, H_{x,y} - \frac{1}{\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'(\omega, z)}{dz}\frac{dH_{x,y}}{dz} = 0 \qquad (2,24\text{a})$$

---

*) Изотропной средой (плазмой) мы везде называем среду, которую точнее было бы именовать локально изотропной средой. Это значит, что предполагаются справедливыми соотношения (2,20) или, более общо, что в однородной и изотропной среде считается отсутствующим какое-либо физически выделенное направление. Если среда изотропна, но неоднородна, то выделенное направление уже может существовать (например, при $\varepsilon' = \varepsilon'(z)$ выделенным является направление градиента — ось z). Термин «изотропная среда» в этом случае указывает на справедливость связей (2,20) и отсутствие выделенного направления, не связанного с неоднородностью среды.

(в силу (2,17) $dH_z/dz = 0$, т. е. $H_z = \text{const}$ и не представляет интереса).

Плазменные колебания. Третья компонента (компонента по оси z) уравнения (2,23), эквивалентна равенству (если $\omega \neq 0$)

$$\varepsilon'(\omega, z) E_z = 0. \qquad (2,27)$$

Если $\varepsilon'(\omega, z) \neq 0$, то из (2,27) следует, что $E_z = 0$, и мы имеем чисто поперечные волны. Случай, когда $\varepsilon'(\omega, z) = 0$, отвечает возможности существования в изотропной плазме продольных колебаний. При наличии этих колебаний $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z \neq 0$, и частота колебаний определяется как раз из условия $\varepsilon'(\omega, z) = 0$ или для однородной среды из условия

$$\varepsilon'(\omega) = 0. \qquad (2,28)$$

Частота ω, удовлетворяющая этому уравнению, является комплексной, т. е. колебания затухают (отсутствие в равновесном состоянии нарастающих колебаний следует из общих свойств функции $\varepsilon'(\omega)$, а физически совершенно очевидно из самого факта существования равновесия). Именно наличие затухания приводит к тому, что продольные колебания поля в среде обычно не рассматриваются. Плазма представляет здесь исключение как раз в связи с тем, что для нее затухание во многих случаях весьма слабо в силу малости мнимой части $\varepsilon'(\omega)$. В подобных условиях частота продольных колебаний, называемых обычно плазменными, с достаточной точностью определяется из уравнения

$$\varepsilon(\omega) = 0, \qquad (2,29)$$

имеющего вещественный корень — плазменную частоту ω_0 (см. § 8).

Для плоских плазменных колебаний $E_z = E_z(\omega, z)$, магнитное поле $\boldsymbol{H} = 0$, как это непосредственно следует из уравнения (2,16).

При более общем подходе к плазменным (продольным) колебаниям, т. е. без перехода к плоским волнам, можно исходить из условия $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$, откуда (см. (2,25))

$$\varepsilon'(\omega, \boldsymbol{r}) \boldsymbol{E} = 0; \qquad (2,30)$$

тот же результат получается, конечно, если исходить из условия $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$ (см. (2,21) и (2,23)). Поскольку для плазменных колебаний $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$, при предполагаемом отсутствии источников и внешнего магнитного поля, приходим к равенству $\boldsymbol{H} = 0$.

Рассматривая плазменные колебания типа $E_z = E_{z0} e^{i(\omega t - kr)}$, мы видим, что величины ω и $\boldsymbol{k}$ между собой совершенно не связаны, поскольку уравнение (2,29) определяет только частоту ω.

Поэтому выше и применялся термин плазменные колебания, а не плазменные волны (если ω не зависит от k, то групповая скорость волн равна нулю, т. е. они не переносят энергию; отсутствие потока энергии для плазменных колебаний (2,30) ясно также сразу в силу равенства нулю вектора Пойнтинга $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]$). В действительности, однако, связь между ω и k существует и в этом случае, так что имеются именно плазменные волны. Для нахождения соответствующей зависимости $\omega = \omega(\boldsymbol{k})$ нужно учитывать пространственную дисперсию. Сказанное лишь уточняет сделанное ранее утверждение о существенном влиянии пространственной дисперсии на распространение плазменных волн (см. § 8). Пространственная дисперсия особенно существенна также в магнитоактивной плазме вблизи резонанса, где при пренебрежении поглощением показатель преломления волны $n \to \infty$ и, следовательно, волновой вектор $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \to \infty$ (здесь $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ — длина волны в вакууме и $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ — длина волны в среде). Подробнее этот момент будет разъяснен в § 12.

О распространении волн разных типов. Плазменные волны будут рассмотрены ниже в § 8. В большинстве же других разделов мы сможем не принимать их во внимание. Объясняется это тем, что частота плазменных волн обычно отличается от частоты поперечных волн, распространяющихся в плазме. Далее, в принятом линейном приближении продольные волны в однородной плазме или в плоскослоистой плазме при нормальном падении совершенно не связаны с поперечными волнами, описываемыми уравнением (2,26) и условием

$$E_z = 0. \tag{2,31}$$

Плазменные и другие электромагнитные волны (например, радиоволны) не могут считаться независимыми между собой (если не говорить о нелинейных эффектах и рассеянии на флуктуациях электронной концентрации) только в неоднородной плазме и притом в области, где $\omega \approx \omega_0$, т. е. вблизи точки $\varepsilon(\omega, \boldsymbol{r}) = 0$ (здесь ω — частота радиоволн и ω_0 — плазменная частота). При этом, если речь идет о плоскослоистой среде, нужно также, чтобы падение не было нормальным. Вопрос о связи между радио- и плазменными волнами в подобных условиях будет разобран в § 20.

В анизотропной (магнитоактивной) плазме разделение волн на продольные и поперечные, вообще говоря, не имеет места. Например, даже в однородной среде, в волне, распространяющейся с определенной скоростью вдоль оси z, отличны от нуля все компоненты E_x, E_y и E_z. Картина упрощается только, если угол α

между направлением внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и осью z (т. е. направлением волнового вектора $\boldsymbol{k}$) равен нулю или $\frac{\pi}{2}$. Понятие о плазменных волнах в анизотропной среде также существенно иное, чем в изотропном случае, являющемся в известном смысле вырожденным. Вопрос о распространении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме будет подробно рассмотрен в гл. III. Здесь ограничимся замечанием, что при нормальном падении плоских волн на плоскослоистую анизотропную среду уравнения (2,18) и (2,22) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2E_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(D_x-i\frac{4\pi}{\omega}j_x\right)=0,\\ &\frac{d^2E_y}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(D_y-i\frac{4\pi}{\omega}j_y\right)=0,\\ &D_z-i\frac{4\pi}{\omega}j_z=0,\quad D_i-i\frac{4\pi}{\omega}j_i=\varepsilon'_{ij}(\omega,z)E_j. \end{aligned}\right\} \tag{2,32}$$

Изучение распространения электромагнитных волн в «холодной» плазме сводится к решению двух задач. Сначала нужно выразить проницаемости ε' или ε'_{ik} через параметры, характеризующие плазму, т. е. через концентрации электронов, ионов и нейтральных частиц N, N_i и N_m. При этом, конечно, учитывается также зависимость ε' от ω и ε'_{ij} от ω и $\boldsymbol{H}^{(0)}$. Вторая задача состоит в решении волновых уравнений при заданных функциях $\varepsilon'(\boldsymbol{r})$ или $\varepsilon'_{ij}(\boldsymbol{r})$. Например, в случае нормального падения нужно проинтегрировать уравнение (2,26) или в анизотропном случае систему (2,32). Впрочем, подобное разделение всей проблемы на две части имеет лишь ограниченное значение и при учете пространственной дисперсии часто оказывается уже нецелесообразным. Однако с точки зрения всего изложения в целом, а также большинства приложений, нам представляется наиболее правильным не стремиться с самого начала к возможно большей общности. Поэтому мы будем выделять различные частные случаи, характеризующиеся возможностью пренебречь пространственной дисперсией, считать высокой или низкой частоту волн и т. п. Именно так и построено дальнейшее изложение. Вместе с тем не следует забывать, что распространяющиеся в плазме волны различной частоты и разного типа (высокочастотные, плазменные, акустические, низкочастотные, магнитогидродинамические) могут быть рассмотрены единым методом и в некоторых случаях образуют единые ветви волн (последнее означает, что волны разных типов непрерывно переходят друг в друга при соответствующем изменении параметров). Так, в магнитоактивной плазме единую ветвь образуют высокочастотные и плазменные волны (см. § 12). Магнитогидродинамические волны, распространяющиеся вдоль направления внешнего магнитного поля, отличаются от поперечных высокочастотных волн лишь своей частотой; другими словами, на графике зависимости скорости распространения волн от их частоты магнитогидродинамические и высокочастотные (радио) волны лежат на одной кривой (ветви). В общем случае магнитогидродинамические волны также являются лишь частным видом электромагнитных волн низкой частоты (см. § 14). Итак, наряду с исследованием и учетом характерных особенностей волн разных типов не следует забывать и об общих чертах и связях между этими волнами.

В заключение заметим, что обычная постановка вопроса о распространении электромагнитных волн в плазме связана с предположением о том, что параметры плазмы известны. Но возможен и встречается на практике также другой подход, когда изучение распространения волн служит методом определения параметров плазмы, например способом измерения электронной концентрации и температуры плазмы и т. д.

Глава II

Распространение волн в однородной и изотропной плазме

§ 3. Комплексная диэлектрическая проницаемость «холодной» плазмы (элементарная теория)

Элементарный вывод выражений для ε и σ. Диэлектрическая проницаемость плазмы ε и ее проводимость σ в большинстве случаев полностью определяются движением электронов и ионов. Вклад в ε и σ, связанный с наличием нейтральных частиц (атомов, молекул), нужно учитывать, лишь если степень ионизации газа очень мала. В области радио- и более низких частот речь при этом идет практически только о небольшой постоянной добавке к ε. Ниже подобная возможность приниматься во внимание не будет.

Для вычисления $\varepsilon(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ достаточно рассмотреть плазму в однородном электрическом поле. Если же рассмотрением однородного поля ограничиться нельзя, т. е. существенна пространственная дисперсия, то вообще нельзя ограничиться использованием только локальных характеристик среды $\varepsilon(\omega)$ и $\sigma(\omega)$.

Вычисление ε и σ в общем случае нужно производить на основе кинетического уравнения, как это и будет сделано в § 6. Здесь же остановимся на элементарном выводе основных формул.

Обозначим радиус-вектор электронов через $\boldsymbol{r}_n$ и радиус-вектор ионов через $\boldsymbol{r}_n^{(i)}$. Тогда плотность полного тока, связанного с движением зарядов, равна $\boldsymbol{j}' = e\sum\limits_{n=1}^{N}(\dot{\boldsymbol{r}}_n - \dot{\boldsymbol{r}}_n^{(i)})$, где e — заряд электрона ($e < 0$) и точкой обозначено дифференцирование по времени; ионы для определенности считаются однократными, а возможность присутствия отрицательных ионов не учитывается, в силу чего при квазинейтральности среды $N = N_i = N_+$. Высокая проводимость плазмы приводит к тому, что условие квазинейтральности можно считать выполненным с большой степенью точности *). Далее, по определению

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j} + i\omega\boldsymbol{P} = \left(\sigma + i\,\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\,\omega\right)\boldsymbol{E} = i\,\frac{\omega}{4\pi}(\varepsilon' - 1)\,\boldsymbol{E} = e\sum_{n=1}^{N}(\dot{\boldsymbol{r}}_n - \dot{\boldsymbol{r}}_n^{(i)}), \tag{3,1}$$

---

*) Напомним, что термин «квазинейтральность», ставший уже общеупотребительным, означает, что среда нейтральна (т. е. средняя плотность заряда $e(N - N_i) = 0$), но состоит из свободных заряженных частиц.

где $\boldsymbol j$ — ток проводимости, $\boldsymbol P$ — поляризация и, строго говоря, все величины нужно считать усредненными по физически бесконечно малому объему и по времени $\left(\text{в интервалах времени } \Delta t \ll \frac{2\pi}{\omega}\right)$ *).

При наличии нескольких сортов ионов, разумеется, ничего не меняется и нужно лишь проводить суммирование по координатам всех ионов. Условие квазинейтральности принимает при этом вид: $N + \sum_l N_{-,l} = \sum_l N_{+,l}$, где $N_{\pm,l}$ — концентрация ± ионов сорта l (с массами M_l).

Если не учитывать постоянного магнитного поля и пренебрегать соударениями электронов между собой, с ионами и с молекулами, то уравнение движения любого из электронов имеет вид

$$m\ddot{\boldsymbol r}_n = e\boldsymbol E_0 e^{i\omega t} = e\boldsymbol E, \tag{3,2}$$

где $\boldsymbol E_0$ — постоянная в пространстве и во времени амплитуда электрического поля и m — масса электрона.

Решение уравнения (3,2) таково:

$$\boldsymbol r_n = -\frac{e\boldsymbol E}{m\omega^2} + \boldsymbol r_n^{(0)}(t), \tag{3,3}$$

где $\boldsymbol r_n^{(0)}$ — радиус-вектор электрона при отсутствии поля.

Для ионов с массой M_l уравнение движения и его решение такие же, как (3,2) и (3,3), но с заменой m на M_l. Используя (3,3)

---

*) Здесь мы следуем традиционному изложению макроскопической электродинамики при неучете пространственной дисперсии. В рамках такого подхода, например, уравнение поля (2.14) получается в результате усреднения по «физически бесконечно малым» объемам уравнения электронной теории

$$\operatorname{rot} \boldsymbol h = \frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol v + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol e}{\partial t},$$

где $\boldsymbol e$ и $\boldsymbol h$ — микроскопические значения электрического и магнитного полей, ρ и $\boldsymbol v$ — микрозначения плотности заряда и скорости частиц. Из сравнения этого уравнения с (2,14) ясно, что $\overline{\boldsymbol e} = \boldsymbol E$, $\overline{\boldsymbol h} = \boldsymbol H$ (напомним, что магнитная проницаемость $\mu = 1$) и введенный выше ток равен

$$\boldsymbol j' = \overline{\rho\boldsymbol v} = \boldsymbol j + \frac{\partial \boldsymbol P}{\partial t} = e\sum_n (\dot{\boldsymbol r}_n - \dot{\boldsymbol r}_n^{(i)}),$$

где $\boldsymbol P = \frac{\boldsymbol D - \boldsymbol E}{4\pi}$, а черта означает усреднение.

В интересующем нас случае переменных полей величины $\boldsymbol j$ и $\boldsymbol P$ можно вообще не вводить и пользоваться только «полным током» $\boldsymbol j'$ и комплексной проницаемостью $\varepsilon' \equiv \varepsilon_1 - i\varepsilon_2 \equiv \varepsilon - i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}$.

Нам представляется, однако, целесообразным возможно ближе следовать терминологии и обозначениям, принятым в курсах теории поля.

и аналогичное выражение для $\boldsymbol{r}_n^{(i)}$, из (3,1) ясно, что $\sigma = 0$ и

$$\boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\boldsymbol{E} = e\sum_n (\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{r}_n^{(i)}) = -\frac{e^2\boldsymbol{E}}{\omega^2}\left(\frac{N}{m} + \sum_l \frac{N_l}{M_l}\right),$$

так как $\sum\limits_n (\boldsymbol{r}_n^{(0)} - \boldsymbol{r}_n^{(i)(0)}) = 0$, поскольку без поля $\boldsymbol{P} = 0$.

Таким образом,

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2}{\omega^2}\left(\frac{N}{m} + \sum_l \frac{N_l}{M_l}\right), \tag{3,4}$$

где под N_l понимается концентрация ионов любого знака с массой M_l.

Из (3,4) ясно, что при отсутствии магнитного поля и поглощения ионы в смысле их влияния на ε эквивалентны электронам с концентрацией $N_{\text{эфф}} = \sum\limits_l \frac{mN_l}{M_l}$. Для ионов $O_2^\pm$ отношение $\frac{m}{M} = 1{,}7\cdot 10^{-5}$, а для ионов $O^\pm$ отношение $\frac{m}{M} = 3{,}4\cdot 10^{-5}$. Таким образом, влияние ионов обычно очень мало, и в силу условия квазинейтральности оно может оказаться существенным при вычислении ε только при наличии большого числа отрицательных ионов. Ниже в случае изотропной плазмы мы обычно не будем явно учитывать влияние ионов.

Для одних электронов, или понимая под N их эффективную концентрацию, имеем:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1 - 3{,}18\cdot 10^9\frac{N}{\omega^2} = 1 - 8{,}06\cdot 10^7\frac{N}{f^2}, \tag{3,5}$$

где $f = \frac{\omega}{2\pi}$ и использованы значения: $e = 4{,}80\cdot 10^{-10}$ CGSE и $m = 9{,}11\cdot 10^{-28}$ *г*.

Равенство нулю проводимости σ при сделанных предположениях вполне понятно: в силу отсутствия соударений электроны не отдают своей энергии молекулам и ионам, а лишь колеблются под влиянием поля. В рамках элементарной теории влияние соударений, приводящее к появлению отличной от нуля проводимости σ и к поглощению энергии, можно учесть введением в правую часть уравнения (3,2) силы трения $g\dot{\boldsymbol{r}}$, причем смысл коэффициента g становится ясным из следующих соображений. Выражение $g\dot{\boldsymbol{r}}$ есть среднее изменение импульса за секунду, связанное с соударениями; но это изменение равно вместе с тем $m\nu_{\text{эфф}}\dot{\boldsymbol{r}}$, где $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений в секунду (при каждом ударе электрон в среднем передает молекуле или иону импульс порядка $m\dot{\boldsymbol{r}}$, где $\dot{\mathbf{r}}$ — упорядоченная скорость, сообщаемая электрону полем). По сути дела мы таким образом определяем $\nu_{\text{эфф}}$ как $\frac{g}{m}$, но все же ясно, что $\nu = \pi a^2 N_m \bar{v}$, где a — некоторый эффективный радиус молекулы и $\bar{v}$ — некоторая средняя скорость электронов (соударений с ионами сейчас для простоты не рассматриваем; соударения электронов с электронами в силу закона сохранения импульса непосредственно к трению не приводят).

Таким образом, при учете соударений уравнение движения приобретает вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n + m\nu_{\text{эфф}}\dot{\mathbf{r}}_n = e\mathbf{E}_0 e^{i\omega t}. \tag{3,6}$$

Поступая теперь так же, как раньше, и используя (3,1), без труда получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega(\omega - i\nu_{\text{эфф}})}, \\ &\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}})}, \quad \sigma = \frac{1-\varepsilon}{4\pi}\nu_{\text{эфф}} = \frac{e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}})}. \end{aligned}\right\} \tag{3,7}$$

Если, как это часто бывает,

$$\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}, \tag{3,8}$$

то

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \sigma \approx \frac{e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m\omega^2} = 2{,}53\cdot 10^8 \frac{N\nu_{\text{эфф}}}{\omega^2}. \tag{3,9}$$

Если же

$$\omega^2 \ll \nu^2_{\text{эфф}}, \tag{3.10}$$

то

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\nu^2_{\text{эфф}}}, \quad \sigma \approx \frac{e^2 N}{m\nu_{\text{эфф}}}. \tag{3,11}$$

Как ясно из сказанного, точное значение $\nu_{\text{эфф}}$ остается при этом неизвестным; оно может быть определено лишь в результате кинетического рассмотрения (см. § 6). Более того, как следует из кинетической теории, точные формулы для ε и σ не сводятся к выражениям (3,7) с каким-то одним, не зависящим от частоты значением $\nu_{\text{эфф}}$. Таким образом, сами формулы элементарной теории являются приближенными. Такое приближение, однако, в большинстве случаев оказывается достаточно хорошим.

Вопрос о действующем поле. Остановимся теперь на вопросе о законности использования в (3,2) и (3,6) в качестве действующего на электрон поля среднего макроскопического поля $\mathbf{E}$. То обстоятельство, что мы фактически считали действующее (эффективное) поле $E_{\text{эфф}}$, фигурирующее в (3,2) и (3,6), средним макроскопическим, явствует из использования в дальнейшем соотношения (3,1), где поле E по определению есть среднее макроскопическое поле. Таким образом, было принято, что в плазме

$$E_{\text{эфф}} = E. \tag{3,12}$$

Между тем, вообще говоря, действующее поле $E_{\text{эфф}} \neq E$ и для изотропной среды, которой мы для простоты ограничимся, может быть представлено в виде:

$$E_{\text{эфф}} = E + 4\pi a P, \tag{3,13}$$

где P — поляризация и a — некоторый коэффициент, могущий зависеть от плотности и т. п.

В рамках линейной теории формула (3,13) для изотропной среды является наиболее общей из возможных. Значение коэффициента a может быть вычислено лишь при известных модельных представлениях. Так, если считать, что молекулы среды являются точечными диполями, расположенными совершенно хаотически, то $a = \frac{1}{3}$ и

$$E_{\text{эфф}} = E + \frac{4\pi}{3} P = \frac{\varepsilon + 2}{3} E, \tag{3,14}$$

где член $\frac{4\pi}{3} P$ часто называют поляризационной поправкой Лоренца (вывод соотношения (3,14) при указанных выше предположениях можно найти, например, в [11]).

К реальным телам формула (3,14), вообще говоря, неприменима. Это и понятно, так как в жидкостях и твердых телах междумолекулярные расстояния того же порядка, как и размеры самих молекул, которые поэтому нельзя уподобить точечным диполям. Однако если значение a и не является универсальным, то из опыта во всяком случае следует, что обычно $a \neq 0$. В этой связи и возникает вопрос о значении коэффициента a в случае плазмы. Вопрос этот довольно существен; так, например, если в (3,2), где по смыслу поле E есть действующее поле, использовать выражение (3,14), то вместо (3,5) получается формула

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2 \left(1 + \frac{4\pi e^2 N}{3m\omega^2}\right)}. \tag{3,15}$$

Разница между (3,5) и (3,15) может оказаться весьма значительной; например, согласно (3,5) $\varepsilon = 0$ при $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1$, а согласно (3,15) $\varepsilon = 0$ при $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = \frac{3}{2}$. Как будет показано ниже, отражение радиоволн от ионосферы происходит как раз в области вблизи точки $\varepsilon = 0$. Таким образом, электронные концентрации в области отражения, вычисляемые на основе формул (3,5) и (3,15), отличаются одна от другой в полтора раза. При учете влияния внешнего магнитного поля различие между формулами, получаемыми на основе соотношений (3,12) и (3,14), в ряде случаев еще гораздо более значительно. Ввиду сказанного понятно, почему проблема действующего поля в ионосфере привлекала к себе большое внимание, оправданное также известной сложностью вопроса и наличием противоречивых мнений (см. [16—21]); более ранняя литература указана в [17]. В результате этот вопрос дискутировался до сравнительно недавнего времени и нередко одновременно приводились формулы, полученные как без поправки (т. е. считая, что $a = 0$), так и с лоренцовой поправкой.

Поступать так, однако, нет оснований. Детальное рассмотрение вопроса, предпринятое в [17, 18, 21] и § 6 книги [19], приводит к заключению, что лоренцовой поправки вводить не нужно, и таким образом, в плазме $\boldsymbol{E}_{\text{эфф}} = \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ — среднее макроскопическое поле. Соответствующее доказательство является относительно сложным и громоздким. Многочисленные более простые доказательства того же утверждения являются, к сожалению, неубедительными и позволяют при желании «доказать» и прямо противоположное заключение о необходимости введения лоренцовой поправки. Поэтому мы не будем проводить этих доказательств, так же как и строгого анализа вопроса (см., в особенности [19], § 6 и [21]).

Отказываясь, таким образом, от подробного обсуждения проблемы действующего поля, сделаем тем не менее два относящихся сюда замечания. Тот факт, что в плазме при достаточно низкой частоте $\boldsymbol{E}_{\text{эфф}} = \boldsymbol{E}$, становится ясным из следующих простых, хотя и не строгих соображений. При $\omega \to 0$ электрическое поле можно считать потенциальным и среднее макроскопическое поле $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$, где Φ — потенциал. Далее, при прохождении электроном макроскопического пути L между точками A и B совершаемая над ним работа равна $e(\Phi_A - \Phi_B) = eLE$. Но по определению действующего поля сила, действующая на электрон, равна $e\boldsymbol{E}_{\text{эфф}}$, а ее работа на пути L равна $eL\boldsymbol{E}_{\text{эфф}}$. Таким образом, $eL\boldsymbol{E} = eL\boldsymbol{E}_{\text{эфф}}$, т. е. $\boldsymbol{E}_{\text{эфф}} = \boldsymbol{E}$ *).

---

*) В случае диэлектрика рассуждать таким же образом нельзя, так как пробный заряд (или диполь) считается локализованным в какой-то точке, в которой и вычисляется действующее поле.

Отличие действующего поля $\boldsymbol{E}_{\text{эфф}}$ от среднего макроскопического поля $\boldsymbol{E}$ как раз и связано с тем, что действующее поле вычисляется в определенных точках (например, в узлах решетки) и при этом без учета поля, создаваемого самим рассматриваемым зарядом (см., например, [11]). В плазме в силу движения зарядов они занимают различное взаимное положение и поэтому вполне естественно, что различие между $\boldsymbol{E}_{\text{эфф}}$ и $\boldsymbol{E}$ исчезает.

Второе замечание касается перехода от связанных электронов к свободным [20]. Допустим, что в случае связанных электронов справедлива формула (3,14), т. е. уравнение движение электрона таково:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + m\omega_j^2\boldsymbol{r} = e\boldsymbol{E}_{\text{эфф}} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}\right), \qquad (3,16)$$

где ω_j — собственная частота осциллятора, соответствующего рассматриваемому связанному электрону.

Учитывая, что $\boldsymbol{P} = eN\boldsymbol{r}$, из (3,16) следует, что для гармонической внешней силы $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ поляризация равна

$$\boldsymbol{P} = \frac{e^2N\boldsymbol{E}}{m\left(\omega_j^2 - \omega^2 - \dfrac{4\pi e^2N}{3m}\right)} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\boldsymbol{E},$$

откуда

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi e^2N}{m\left(\omega_j^2 - \omega^2 - \dfrac{4\pi e^2N}{3m}\right)}. \qquad (3,17)$$

Если положить здесь $\omega_j = 0$, то получается выражение (3,15), которое, как сказано, неверно. С другой стороны, казалось бы, переход от связанных электронов к свободным отвечает как раз устремлению частоты ω_j к нулю. В действительности, тем не менее это справедливо только лишь для крайне разреженной среды, когда $N \to 0$ и лоренцова поправка и без того стремится к нулю. Если же $N \neq 0$, то электрон, строго говоря, никогда нельзя считать совершенно свободным, так как самое большое расстояние r между электроном и ионом порядка $N^{-1/3}$. Сила, действующая на электрон на этом расстоянии, будет $\frac{e^2}{r^2} \sim e^2N^{2/3}$. Приравнивая эту силу некоторой квазиупругой силе $m\omega_j^2\bar{r} \sim \frac{m\omega_j^2}{N^{1/3}}$, мы получаем значение $\omega_j^2 \sim \frac{e^2N}{m}$. Тот факт, что плазма является средой, обладающей в известном смысле собственной частотой $\omega_j^2 \sim \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2N}{m}$, следует и из других соображений (см., например, § 8). Если же в (3,16) положить $\omega_j^2 = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2N}{m}$, то выражение (3,17) перейдет в (3,5), как это и должно быть. Приведенные наглядные соображения, конечно, недостаточны для строгого установления формулы (3,5), но они объясняют, почему в (3,17) нельзя для перехода к случаю плазмы полагать $\omega_j = 0$. Таким образом, никакого парадокса в вопросе о переходе от связанного электрона к свободному нет.

В плане сравнения теории с экспериментом можно отметить, что отличие среднего поля $\boldsymbol{E}$ от действующего поля $\boldsymbol{E}_{\text{эфф}}$ особенно сильно сказалось бы в условиях, имеющих место при распространении так называемых «свистящих атмосфериков» (whistlers). Поэтому из сравнения теории с наблюдениями удается подтвердить равенство $E_{\text{эфф}} = E$ для плазмы с весьма большой точностью (можно показать, что коэффициент a в (3.13) не превосходит величины порядка 10^{-5}; см. [26]). В силу всего сказанного мы везде ниже считаем, что $E_{\text{эфф}} = E$, т. е. справедливо соотношение (3,12) *).

Область применимости полученных формул. Помимо проблемы действующего поля возникает также вопрос о законности применения к движению электронов и ионов классической теории, как это было сделано выше. При отсутствии соударений, когда имеют место формулы (3,4) и (3,5), речь идет о применимости классической теории к взаимодействию свободных зарядов с переменным электромагнитным полем (полем излучения). В этом случае классическая теория применима, пока соблюдается неравенство

$$\hbar\omega \ll mc^2, \tag{3,18}$$

где $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек* и m — масса частицы, которую мы для определенности будем считать электроном (в случае ионов условия применимости во всяком случае не становятся жестче). Действительно, рассеяние света (электромагнитных волн) на свободных электронах при соблюдении условия (3,18) описывается как в квантовой, так и в классических теориях известной формулой Томсона, и квантовые поправки $\left(\text{при малом отношении } \dfrac{\hbar\omega}{mc^2}\right)$

---

*) Заметим, что приведенное в [19], § 6 доказательство справедливости соотношения (3,12) предполагает, что поле E является достаточно слабым. То же относится к результатам работы [21], где показано, что в слабом поле (функция распределения электронов и ионов в первом приближении считается максвелловской) эффективное поле равно среднему с точностью до величин порядка $\dfrac{1}{a} = (16\pi D^3 N)^{-1}$ (см. ниже § 4 и, в частности, формулу (4,24); в ионосфере и в короне $a \gg 1$, и обычно даже $a \gg 10^3$).

Как нам представляется, проблема действующего поля в применении к плазме еще нуждается в дополнительном анализе в рамках более общего подхода (связь в этом вопросе между общей теорией сред с пространственной дисперсией и подходом, в котором используется усреднение по малому объему; учет нелинейности). С другой стороны, нужно подчеркнуть, что сейчас нашли широкое развитие методы получения кинетического уравнения из динамических уравнений (при этом, конечно, делаются известные предположения и приближения). При таком подходе (см. [6, 7]), естественно, одновременно с выводом кинетического уравнения для плазмы доказывается, что $E_{\text{эфф}} = E$ (то обстоятельство, что сама проблема действующего поля часто даже не упоминается, не меняет дела; когда в кинетическом уравнении и уравнениях поля используется одно и то же поле E, как, например, это делается ниже в (8,21) и (8,24), это уже означает, что $E_{\text{эфф}} = E$).

оказываются порядка $\frac{\hbar\omega}{mc^2}$ (см. [22]); условие же (3,18) выполняется не только в радиодиапазоне, но и в области мягких рентгеновских лучей $\left(mc^2 = \hbar\omega_m = 0{,}51\cdot 10^6\ \text{эв} = 8{,}2\cdot 10^{-7}\ \text{эрг};\ \omega_m = 7{,}8\cdot 10^{20};\ \lambda_m = \frac{2\pi c}{\omega_m} = 2{,}4\cdot 10^{-10}\ \text{см}\right)$. Далее, как известно, рассеяние света полностью определяет значение показателя преломления, который при отсутствии поглощения равен $\sqrt{\varepsilon}$ (см. § 7). Таким образом, формулы (3,4) и (3,5) при пренебрежении соударениями являются точными, они получаются как при любом классическом выводе (см. выше и § 6), так и в квантовой теории дисперсии.

Поглощение, связанное с наличием соударений, с квантовой точки зрения обусловлено тем, что кванты излучения (фотоны) поглощаются электронами, которые при этом изменяют свое движение. Этот процесс поглощения в случае свободного электрона невозможен, так как противоречит законам сохранения энергии и импульса; поэтому в разреженной среде и при отсутствии внешних полей поглощение происходит только при учете влияния на движение электронов молекул и ионов (т. е. под влиянием соударений). В радиодиапазоне, где $\hbar\omega$ много меньше ионизационных потенциалов даже сильно возбужденных атомов и молекул, поглощение квантов излучения не сопровождается переходом электронов иэ связанных состояний в свободные и, таким образом, играют роль лишь переходы электронов из одних состояний непрерывного спектра в другие (свободно-свободные переходы по астрофизической терминологии; связанно-связанные переходы, отвечающие переходу электронов между уровнями дискретного спектра, мы здесь не рассматриваем). Процессом, обратным по отношению к поглощению при подобных переходах, является, очевидно, тормозное излучение электронов, при котором электрон испускает кванты излучения в результате ускорения при соударении с молекулой или ионом. Вероятности прямого и обратного процессов связаны универсальным соотношением Эйнштейна, в силу чего можно рассматривать любой из этих процессов (см. §§ 12, 37). К тормозному излучению нерелятивистских электронов классическая теория применима, если энергия квантов излучения много меньше кинетической энергии электрона, т. е. в нашем случае если

$$\hbar\omega \ll \varkappa T, \tag{3,19}$$

где $\varkappa = 1{,}38\cdot 10^{-16}$ *эрг/град* — постоянная Больцмана, и принято, что электроны имеют тепловое распределение скоростей с температурой T. Таким образом, классическая теория при вычислении проводимости, определяющей поглощение, пригодна при соблюдении неравенства (3,19), т. е. даже при $T \sim 300°$ К, если

$$\left.\begin{aligned} &\omega \ll 4\cdot 10^{13}, \\ &\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg 5\cdot 10^{-3}\ \text{см}. \end{aligned}\right\} \tag{3,20}$$

Поскольку энергия порядка $\varkappa T$ есть средняя энергия электронов, и встречаются электроны и с меньшей энергией, можно осторожности ради сказать, что классическая теория заведомо применима для волн длиннее 1 *см*. Таким образом, при вычислении части ε и σ, связанной с движением электронов и ионов, мы можем для нашей цели использовать классическую теорию излучения без всяких ограничений. Для неограниченного применения классических формул нужно также, чтобы классически можно было рассматривать и движение электронов в процессе соударений. В кулоновском поле это условие выполняется, если $T \ll 3\cdot 10^5$ °K (см. § 4); при соударениях же электронов с нейтральными частицами эффективное сечение для упругих и неупругих соударений всегда нужно вычислять квантовыми методами, хотя поглощение и излучение интересующих нас волн можно будет затем рассчитывать классически. Отмеченное обстоятельство не приведет ниже ни к каким осложнениям. Заметим также, что во всей книге используется лишь нерелятивистское приближение. Релятивистские поправки характеризуются параметром $\varkappa T/mc^2 = 1{,}7\cdot 10^{-10}\,T$ и становятся заметными, вообще говоря, лишь при температурах $T \gtrsim 10^8 \div 10^9$ °K (правда, в некоторых случаях, указанных в §§ 8 и 12, члены, зависящие от $\frac{\varkappa T}{mc^2}$, нужно учитывать; однако истинным параметром задачи является при этом не отношение $\frac{\varkappa T}{mc^2}$, а другая величина).

Для применения классической теории не только к отдельным электронам, но и к плазме в целом существенно также, чтобы плазму можно было считать невырожденным газом.

Температура вырождения определяется соотношением

$$T_0 \sim \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{m\varkappa}. \tag{3,21}$$

Физический смысл T_0 состоит в том, что при этой температуре энергия $\varkappa T_0$ порядка нулевой энергии $\frac{\hbar^2}{m\bar{r}^2} \sim \frac{\hbar^2}{m} N^{2/3}$, связанной с локализацией электронов в объеме порядка $\bar{r}^3 \sim \frac{1}{N}$. При $N \sim 10^6$ и $N \sim 10^{15}$ температура вырождения T_0 соответственно порядка 10^{-7} и 10^{-1} градуса, т. е. несравненно ниже температур, которые нас интересуют. Поэтому применение классической статистики вполне оправдано не только в ионосфере и солнечной короне, но и в разрядных трубках.

Положение, разумеется, изменяется при рассмотрении плазмы в твердых телах. Однако этого круга вопросов мы, как правило, касаться не будем (см. [3, 23—25]).

Магнитная проницаемость плазмы. Об учете пространственной дисперсии. В § 2 мы уже указывали, что в плазме статическая магнитная проницаемость μ практически равна единице. Сейчас можно полностью подкрепить это утверждение, указав, что для невырожденного электронного газа восприимчивость χ равна (см. [27])

$$\chi = \frac{\mu-1}{4\pi} = \frac{2}{3}\left(\frac{e\hbar}{2mc}\right)^2 \frac{N}{\varkappa T}. \tag{3,22}$$

Здесь уже учтено наличие у электрона спинового магнитного момента (без учета спина $\chi < 0$ и по абсолютной величине в два раза меньше, чем согласно (3,22)).

Поскольку $\frac{e\hbar}{2mc} = 9{,}3\cdot 10^{-21}$, мы видим, что даже при $N \sim 10^{15}$ и $T \sim 300°$ К значение $\chi \sim 10^{-12}$, т. е. отличие μ от единицы действительно исчезающе мало. Нужно, впрочем, подчеркнуть, что сказанное относится к случаю термодинамического равновесия (неравновесные состояния плазмы могут обладать заметной и даже большой диамагнитной восприимчивостью).

Выше мы пренебрегали пространственной дисперсией, что нашло свое отражение в рассмотрении однородного поля. Полезно выяснить, однако, каким образом пространственная дисперсия может быть учтена в рамках уже использованного подхода — исходя из уравнений движения для отдельных зарядов. Для этой цели нужно найти ток (поляризацию), возникающий под действием неоднородного поля и конкретно поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$. Однако если подставить такое поле, например, в уравнение (3,2), то влияние волны на частицы с учетом пространственной дисперсии будет принято во внимание еще не полностью. Дело в том, что при $\mathbf{k} \neq 0$ может быть существенно и влияние магнитного поля волны $\mathbf{H} = \frac{c}{\omega}[\mathbf{kE}]$.

В результате вместо (3,2) имеем

$$m\ddot{\mathbf{r}}_n = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}]\right\} = e\left\{\mathbf{E}_0 + \frac{1}{\omega}[\dot{\mathbf{r}}_n[\mathbf{kE}_0]]\right\} e^{i(\omega t - \mathbf{kr}_n(t))}, \tag{3,23}$$

ибо поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ нужно брать в точке $\mathbf{r}_n(t)$, занимаемой электроном в данный момент времени. Скорость электрона $\dot{\mathbf{r}}_n(t)$ складывается из вынужденной скорости, которая равна нулю при $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$, и скорости теплового движения $\dot{\mathbf{r}}_n^{(0)}(t)$. При пренебрежении соударениями и отсутствии постоянных внешних полей, очевидно, $\boldsymbol{r}_n^{(0)}(t) = \boldsymbol{v}_{n,0}\cdot t + \boldsymbol{r}_n^{(0)}(0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_n^{(0)} = \boldsymbol{v}_{n,0}$. Если мы ограничимся линейным приближением (т. е. в рамках линейной электродинамики), в правую часть уравнения (3,23) нужно, конечно, вместо $\boldsymbol{r}_n(t)$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_n(t)$ подставить значения $\boldsymbol{r}_n^{(0)}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_n^{(0)}(t)$. В результате, опуская несущественный фазовый множитель, вместо (3,23) имеем

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_n = e\left\{\boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{\omega}[\boldsymbol{v}_{n,0}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0]]\right\} e^{i(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{n,0})t}. \qquad (3,24)$$

Из этого уравнения ясно, что плотность полного тока $\boldsymbol{j}' = e\sum_{n=1}^{N}\dot{\boldsymbol{r}}_n$ зависит от $\boldsymbol{k}$ и скорости теплового движения $\boldsymbol{v}_{n,0}$, т. е. после усреднения, например, по максвелловскому распределению скоростей, от характерной скорости $v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$. Нужно при этом иметь в виду, что усреднение может привести к исчезновению или малости отдельных членов. Например, действием магнитного поля волны можно пренебречь, если в невозмущенной плазме все направления скорости электронов равновероятны (на языке функции распределения это означает, что невозмущенная функция распределения зависит только от $v = |\boldsymbol{v}|$; см. ниже формулу (4,17) и относящиеся к ней пояснения).

Приближение «холодной» плазмы формально соответствует значению $T = 0$, и в этом случае пространственная дисперсия отсутствует, ибо зависимость от $\boldsymbol{k}$ в (3,24) выпадает.

При отсутствии столкновений (т. е. для так называемой бесстолкновительной плазмы), когда в нерелятивистском приближении справедливо уравнение (3,24), это уравнение можно использовать для вычисления $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$. Однако как в этом случае, так и особенно при учете соударений, проще и удобнее, вообще говоря, использовать метод кинетического уравнения. Так мы и будем поступать; кроме того, в некоторых случаях будет использоваться метод коэффициентов Эйнштейна.

§ 4. Метод кинетического уравнения

Функция распределения и кинетическое уравнение. Диэлектрическая проницаемость ε и проводимость σ, вычисленные в § 3, содержат в качестве параметра эффективное число соударений $\nu_{\text{эфф}}$, значение которого было лишь оценено. Для нахождения $\nu_{\text{эфф}}$ или, точнее, для нахождения общих выражений для ε и σ как в слабых, так и в сильных полях нужно использовать метод кинетического уравнения. Этот метод позволяет также учесть пространственную дисперсию.

В методе кинетического уравнения состояние газа описывается функцией распределения $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$, определяемой таким образом, что среднее число частиц dN в объеме $d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v} = dx\, dy\, dz \times \times dv_x dv_y dv_z$ равно $dN = f\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{v}$ — скорость частиц и $\boldsymbol{r}$ — соответствующий им радиус-вектор. При этом по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v} = N, \tag{4,1}$$

где N — концентрация частиц в точке $\boldsymbol{r}$ в момент t.

Кинетическое уравнение, из которого должна быть определена функция f, имеет вид (см., например, ([3—8, 28—29], а также § 13):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla_r f + \frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)\nabla_v f + S = 0, \tag{4,2}$$

где e и m — заряд и масса рассматриваемых частиц, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей,

$$\nabla_r f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}, \quad \nabla_v f = \frac{\partial f}{\partial v_x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial v_y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial v_z}\boldsymbol{k}$$

и S — так называемый интеграл столкновений (соударений), определяющий изменение функции f, обусловленное соударениями рассматриваемых частиц (например, электронов) со всеми другими частицами (т. е. электронами, ионами и молекулами). В S можно также включить члены, учитывающие изменения f, связанные с различными процессами, такими, как ионизация, неупругое рассеяние и т. д.

При отсутствии полей, в равновесном состоянии функция распределения есть известная функция Максвелла:

$$f = f_{00}(v) = N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\varkappa T}}. \tag{4,3}$$

Максвелловское распределение (4.3), как легко видеть, удовлетворяет условию нормировки (4,1), так как $\int f_{00} d\boldsymbol{v} = = 4\pi \int f_{00} v^2 dv = N$.

Плазма в сильном электрическом поле. Если ионизированный газ (плазма) находится в некотором переменном поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$, то функция f, конечно, не является максвелловской и в достаточно сильном поле может сильно отличаться от последней. Этот вопрос подробно рассмотрен в § 38. Здесь же для выяснения характера отклонений электронной функции распределения от равновесной рассмотрим стационарный случай, когда средняя энергия электронов не изменяется со временем. Это имеет место, если энергия, сообщаемая электронам полем, равна энергии, передаваемой электронами тяжелым частицам (ионам и молекулам) в результате соударений. Энергия, передаваемая электрону от поля, в единицу времени равна $A = e\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}$; здесь $\dot{\boldsymbol{r}}$ — упорядоченная скорость электрона в направлении поля, определяемая уравнением (3,6). Как ясно из этого уравнения, $\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{e\boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}}{m(i\omega + \nu_{\text{эфф}})}$, или для вещественного выражения $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t$, которое удобнее использовать при вычислении A,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{e\boldsymbol{E}_0 (\nu_{\text{эфф}} \cos \omega t + \omega \sin \omega t)}{m(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}})}. \qquad (4,4)$$

Отсюда

$$A = e\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E} = \frac{e^2E_0^2(\nu_{\text{эфф}} \cos^2 \omega t + \omega \sin \omega t \cos \omega t)}{m(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}})}, \quad \overline{A} = \frac{e^2E_0^2\nu_{\text{эфф}}}{2m(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}})}, \qquad (4,4\text{a})$$

где черта над A означает усреднение по времени.

Энергия, передаваемая в единицу времени электронами ионам и молекулам, в среднем равна $\overline{U}$:

$$\overline{U} = W\nu_{\text{эфф}} = \delta\left(\overline{K} - \frac{3}{2}\varkappa T\right)\nu_{\text{эфф}}, \qquad (4,5)$$

где $W = \delta\left(\overline{K} - \frac{3}{2}\varkappa T\right)$ — средняя энергия, передаваемая при одном соударении, $\overline{K} = \frac{m\overline{v^2}}{2}$ — средняя кинетическая энергия и δ — средняя относительная доля энергии, передаваемая при одном эффективном соударении в случае, если $\overline{K} \gg \frac{3}{2}\varkappa T$.

При упругом соударении с тяжелой частицей электрон теряет лишь незначительную часть своей энергии, и как для соударений с ионами, так и с молекулами

$$\delta = \delta_{\text{уп}} = \frac{2m}{M}, \qquad (4,6)$$

где m — масса электрона и M — масса тяжелой частицы.

Тяжелая частица считается при этом неподвижной (соответствующее вычисление $\delta_{\text{уп}}$ приведено в § 5; учет движения тяжелых частиц при условии $\overline{K} \gg \frac{3}{2}\varkappa T$ несуществен) *). Для атомов, молекул и ионов O, $O^\pm$, O_2, $O_2^\pm$ согласно (4,6) имеем:

---

*) Выражение для $\overline{U}$ можно записать иначе, например в виде: $\overline{U} = \delta'\overline{K}\nu_{\text{эфф}}$. В этом случае δ' есть средняя относительная доля энергии, передаваемой при одном соударении и любых $\overline{K}$ и $\frac{3}{2}\varkappa T$. Но величина δ' должна зависеть от температуры даже при упругих соударениях, поскольку

$$\delta_{\text{уп, O}}=6{,}8\cdot10^{-5},\qquad \delta_{\text{уп, }O_2}=3{,}4\cdot10^{-5}. \tag{4.7}$$

При наличии неупругих соударений в силу их относительной редкости обычно по-прежнему в среднем $\delta\ll1$.

В указанных стационарных условиях, когда $\overline{A}=\overline{U}$, очевидно:

$$\overline{K}=\frac{m\overline{v^2}}{2}=\frac{e^2E_0^2}{2m\left(\omega^2+\nu^2_{\text{эфф}}\right)\delta}+\frac{3}{2}\varkappa T. \tag{4,8}$$

Если частота ω невелика, так что выполняется условие $\omega^2\ll\nu^2_{\text{эфф}}$, эффективное время ускорения электрона полем порядка времени свободного пробега $\tau=\frac{1}{\nu_{\text{эфф}}}=\frac{l}{\bar v}$, где l — средняя длина свободного пробега и $\bar v$ — средняя скорость. В этом случае, как ясно из (4,4), $\dot r\ll\dot r_{\max}\sim\frac{eE_0l}{m\bar v}$, и при $\overline{K}\gg\frac{3}{2}\varkappa T$, согласно (4,8)

$$\overline{K}=\frac{m\overline{v^2}}{2}\sim\frac{m(\bar v)^2}{2}\sim\frac{e^2E_0^2}{m\delta}\left(\frac{l}{\bar v}\right)^2\sim\frac{eE_0l\dot r_{\max}}{\delta\bar v},\quad \bar v\sim\frac{eE_0l}{m\sqrt{\delta}\,\bar v}$$

или

$$\dot r_{\max}\sim\sqrt{\delta}\,\bar v,\qquad \overline{K}\sim\frac{eE_0l}{\sqrt{\delta}},\qquad \overline{K}\gg\frac{3}{2}\varkappa T. \tag{4,9}$$

В другом предельном случае, когда $\omega^2\gg\nu^2_{\text{эфф}}$, эффективное время ускорения порядка $\frac{1}{\omega}$, и при $\overline{K}\gg\frac{3}{2}\varkappa T$:

$$\overline{K}=\frac{m\overline{v^2}}{2}\sim\frac{m(\bar v)^2}{2}\sim\frac{e^2E_0^2}{2m\omega^2\delta}\sim\left(\frac{eE_0l}{\sqrt{\delta}}\right)^2\left(\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\right)^2\frac{1}{\overline{K}}\sim\frac{eE_0l}{\sqrt{\delta}}\,\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega},$$

$$\bar v\sim\frac{eE_0}{m\omega\sqrt{\delta}},\qquad \dot r_{\max}\sim\frac{eE_0}{m\omega}\sim\sqrt{\delta}\,\bar v. \tag{4.10}$$

Из (4,9) и (4,10) ясно, что энергия $\overline{K}$ заметно превосходит $\frac{3}{2}\varkappa T$ соответственно в полях $E>\frac{\varkappa T}{el}\sqrt{\delta}$ и $E>\frac{\varkappa T}{el}\cdot\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\sqrt{\delta}$. Функция распределения f при этом сильно отличается от равновесной функции $f_{00}(v,\ T)$. Тем не менее скорость упорядоченного движения $\dot r$ мала по сравнению со средней скоростью $\bar v$ даже в сильном поле ввиду малости величины δ.

при $\overline{K}\gg\frac{3}{2}\varkappa T$, очевидно, $\delta'=\delta$, а при тепловом равновесии (при $\overline{K}=\frac{3}{2}\varkappa T$) значение $\delta'=0$. Поэтому удобнее пользоваться именно параметром δ, который в случае упругих ударов можно считать постоянным.

Вид функции распределения и уравнение для нее в слабом поле. Отсюда можно сделать существенный вывод о виде функции распределения f. Действительно, представим функцию f в виде

$$f = f_0(v) + \varphi(\boldsymbol{v}),$$

где f_0 зависит лишь от величины скорости v, т. е. представляет собой симметричную часть f. Далее, плотность тока $\boldsymbol{j}'$ равна

$$\boldsymbol{j}' = eN\dot{\boldsymbol{r}} = e\int \boldsymbol{v} f\, d\boldsymbol{v} = e\int \boldsymbol{v}\varphi(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{v}, \tag{4,11}$$

т. е. определяется только асимметричной частью функции f (так как $\int \boldsymbol{v} f_0 d\boldsymbol{v} = 0$). Напротив, средняя скорость $\overline{v} = \frac{1}{N}\int v f d\boldsymbol{v}$ определяется, вообще говоря, и симметричной частью f и ее асимметричной частью, т. е. функцией $\varphi(\boldsymbol{v})$. Но если выполнено условие $\dot{r} \ll \overline{v}$, как это имеет место в нашем случае, то это означает, что $\overline{v}$ определяется лишь симметричной частью функции f, которая значительно больше ее асимметричной части.

Итак, в силу малости средней относительной доли энергии, передаваемой электроном при соударении с тяжелыми частицами (т. е. в силу того, что $\delta \ll 1$), электронная функция распределения может быть представлена так:

$$\left.\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= f_0(v) + \varphi(\boldsymbol{v}) = f_0(v) + \frac{\boldsymbol{f}_1(v)\,\boldsymbol{v}}{v}, \\ |\varphi(\boldsymbol{v})| &\sim |\boldsymbol{f}_1(v)| \ll f_0(v), \end{aligned}\right\} \tag{4,12}$$

где возможность записи $\varphi(\boldsymbol{v})$ в форме $\frac{\boldsymbol{f}_1(v)\,\boldsymbol{v}}{v}$ еще нуждается в особом пояснении, сводящемся к следующему. Функцию $\varphi(\boldsymbol{v})$ можно записать в виде $\varphi(v.\ \alpha,\ \beta)$, где α и β — углы, определяющие направление вектора $\boldsymbol{v}$. Разлагая теперь φ в ряд по шаровым функциям $Y_{lm}(\alpha,\ \beta)$ и выбирая полярную ось в направлении тока $\boldsymbol{j}'$, можно убедиться в том, что основную роль в этом разложении играет функция $Y_{10} = \mathrm{const}\cos\alpha$, откуда и следует, что $\varphi(\boldsymbol{v})$ можно представить в виде $\varphi_1(v)\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{f}_1(v)\,\boldsymbol{v}}{v}$, где вектор $\boldsymbol{f}_1(v)$ направлен по $\boldsymbol{j}'$. Доказательство этого утверждения можно найти в § 38 (см. также, например, [28—31]). На условиях, когда справедливо выражение (4,12), мы еще остановимся в § 38. Здесь же заметим, что в однородной плазме эти условия в интересующих нас случаях сводятся к требованию $\delta \ll 1$. Существенно также подчеркнуть, что, в то время как выражение (4,12) для электронной функции распределения справедливо в поле любой силы, в случае тяжелых частиц функция распределения f имеет вид (4,12) только в слабых полях.

В неоднородной плазме для использования выражения (4.12) необходимо также соблюдение условия

$$\left|\frac{\partial f_0}{\partial z}\right| \gg \frac{\bar{v}}{\sqrt{\omega^2+\nu^2_{\text{эфф}}}}\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right|,$$

где z — направление, в котором изменяется функция распределения.

Зависимость f от координат нужно принимать во внимание, например, для рассмотрения таких вопросов, как теплопроводность и диффузия, которые обсуждаться ниже не будут. Поэтому нам придется столкнуться с зависящими от координат функциями распределения $f(\boldsymbol{r})$ только при учете пространственной дисперсии. Такой учет в методе кинетического уравнения производится самым непосредственным образом. Действительно, при вычислении тока $\boldsymbol{j}'$, индуцированного полем типа $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})}$, нужно найти добавок к функции распределения вида $\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \varphi_0(\boldsymbol{v}) e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})}$. При подстановке в кинетическое уравнение (4,2) такой функции $f = f_0(v) + \varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ первые два члена уравнения принимают вид $i(\omega - \boldsymbol{kv})\varphi$. Отсюда сразу же ясно, что и решение для φ зависит от $(\omega - \boldsymbol{kv})$ и пространственной дисперсией можно пренебречь лишь при $k \to 0$ или для «холодной» плазмы, когда несущественно тепловое движение (фактически в простейшем случае речь идет об одном параметре kD; сделанное замечание об учете пространственной дисперсии в методе кинетического уравнения будет подробнее разъяснено в §§ 8, 12).

Средняя кинетическая энергия электрона при использовании функции (4,12) равна

$$\overline{K} = \frac{1}{N}\int \frac{mv^2}{2} f\, d\boldsymbol{v} = \frac{1}{N}\int \frac{mv^2}{2} f_0\, d\boldsymbol{v}. \qquad (4.13)$$

Малость отношения $\frac{m}{M}$ приводит еще к одному важному следствию, а именно к тому, что интеграл соударений S, учитывающий соударения между электронами и тяжелыми частицами, может быть записан не в виде интегрального, а в виде некоторого дифференциального выражения. Это выражение особенно просто в случае слабых полей, когда $\overline{K} \approx \frac{3}{2}\varkappa T$, и симметричную часть функции распределения f можно считать максвелловской функцией f_{00}. В этом случае

$$S_{em} + S_{ei} = (\nu_{em} + \nu_{ei})\,\varphi(\boldsymbol{v}) = (\nu_{em} + \nu_{ei})\frac{\boldsymbol{f}_1(v)\boldsymbol{v}}{v}, \qquad (4.14)$$

где S_{em} и S_{ei} — интегралы соударений, отвечающие соударениям электронов с молекулами (m) и ионами (i), а числа соударений равны:

$$\left.\begin{aligned} \nu_{em} &\equiv \nu_m = \frac{v}{l_m} = q_m(v)\, vN_m, \\ \nu_{ei} &\equiv \nu_i = \frac{v}{l_i} = q_i(v)\, vN_i, \\ q_{m,\,i}(v) &= 2\pi \int_0^{\pi} q_{m,\,i}(v,\,\theta)\,(1-\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (4,15)$$

где $N_{m,\,i}$ — концентрация молекул или ионов и $q_{m,i}(v,\,\theta)$ — дифференциальное эффективное сечение для упругих соударений электрона с соответствующей частицей *).

К соотношению (4,14) нетрудно прийти в результате соответствующих расчетов (см. [28, 29, 31]), но смысл его ясен и непосредственно. Действительно, $S_{em}+S_{ei}$ есть число электронов, покидающих данный элемент фазового объема $d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{v}$ в единицу времени в результате соударений с тяжелыми частицами. Далее, равновесная функция распределения f_{00} обращает интеграл соударений S в нуль и, таким образом, S зависит лишь от $\varphi(\boldsymbol{v})$. Наконец, поскольку тяжелые частицы можно считать неподвижными, так как их скорости значительно (в отношении $\sqrt{\frac{m}{M}} \sim 100$ раз) меньше скорости электронов, $S_{em}+S_{ei}$ должно быть просто равно числу соударений той части электронов, которая имеет неравновесные скорости с тяжелыми частицами; это число соударений и равно $(\nu_{em}+\nu_{ei})\,\varphi(\boldsymbol{v}) = (q_m N_m + q_i N_i)\, v\varphi(\boldsymbol{v})$.

Единственный момент, нуждающийся при этом в более точном доказательстве, связан с вопросом, почему в качестве сечения q в (4,15) фигурирует не полное сечение $q^t = 2\pi \int q(v,\,\theta)\sin\theta\, d\theta$, а так называемое «транспортное сечение» $q^{tr} = 2\pi \int q(v,\,\theta) \times \times (1-\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$. Впрочем, в качественном отношении и этот пункт совершенно ясен. Дело в том, что рассеяние на разные углы неэквивалентно, поскольку передаваемый тяжелой частице импульс равен $v(1-\cos\theta)$, т. е. мал при малом угле рассеяния θ и велик при большом угле θ. Появление в выражении для S транспортного сечения вместо полного сечения как раз и является проявлением этого обстоятельства, поскольку в транспортном сечении большие углы рассеяния входят с бо́льшим весом, чем малые.

---

*) Напомним, что дифференциальное эффективное сечение $q(v,\,\theta)$ для упругого рассеяния есть, по определению, отношение числа частиц упруго рассеянных под углом θ в телесном угле $d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$ к числу рассеиваемых частиц, падающих за то же время на единичную площадку, нормальную к их скорости. Угол рассеяния θ есть угол между скоростями падающего и рассеянного электронов.

Как сказано, в однородных слабых полях

$$\left.\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= f_{00} + \frac{f_1(v)\,\boldsymbol{v}}{v}, \quad |\boldsymbol{f}_1| \ll f_{00}, \\ f_{00} &= N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2\varkappa T}}. \end{aligned}\right\} \tag{4,16}$$

Подставляя теперь это выражение в кинетическое уравнение (4,2) и учитывая (4,14), получаем *):

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial t} + \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\frac{\partial f_{00}}{\partial v} + \frac{e}{mc}[\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}_1] + (\nu_m + \nu_i)\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{S}_{1,\,ee} = 0. \tag{4,17}$$

При этом часть интеграла соударений S в (4,2), связанная с междуэлектронными соударениями, записана в виде $S_{ee} = \boldsymbol{S}_{1,\,ee}\frac{\boldsymbol{v}}{v}$. В (4,17) опущен член $\boldsymbol{v}\,\nabla_r f$, учтено, что $\nabla_v f_{00} = \frac{\partial f_{00}}{\partial v}\frac{\boldsymbol{v}}{v}$, и в члене, содержащем поле $\boldsymbol{E}$, асимметричная часть функции распределения не учитывается, так как она много меньше симметричной функции f_{00}. Из того факта, что магнитное поле $\boldsymbol{H}$ умножается в (4,17) лишь на асимметричную часть функции распределения, следует, что одно магнитное поле без электрического не нарушает равновесного распределения скоростей. В этой связи магнитное поле в (4,17) не обязательно считать слабым (это ясно из того, что поле множится на малую величину — функцию $\boldsymbol{f}_1$). Условие слабости электрического поля $\boldsymbol{E}$ получается в результате решения кинетического уравнения в следующем приближении (см., например, [32], § 64) или в поле с любой напряженностью (см. § 38). В рамках элементарных представлений критерий слабости поля ясен из соотношения (4,8) — он сводится к требованию: $\overline{K} - \frac{3}{2}\varkappa T \ll \ll \frac{3}{2}\varkappa T$, т. е. имеет вид:

$$E \ll E_p = \sqrt{3\frac{m\varkappa T}{e^2}\delta\left(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}}\right)}. \tag{4,8a}$$

Характерное поле E_p иногда называют «плазменным полем», о нем еще пойдет речь в гл. VIII.

В отношении поля $\boldsymbol{E}$, фигурирующего в уравнениях (4,2) и (4,17), нужно еще заметить, что в силу сказанного в § 3 под этим полем нужно понимать среднее макроскопическое поле феноменологической электродинамики.

---

*) Легко видеть, что $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\,\nabla_v\left[f_{00}(v) + \frac{\boldsymbol{f}_1(v)\boldsymbol{v}}{v}\right] = [\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}_1]\frac{\boldsymbol{v}}{v}$, так как, например, $\nabla_v f_{00}(v) = \frac{\partial f_{00}}{\partial v}\frac{\boldsymbol{v}}{v}$ и т. д.

Транспортные сечения. Дебаевское экранирование. Для того чтобы использовать уравнения (4,17) для решения конкретных задач, необходимо осветить еще только один момент, а именно указать выражения для транспортных сечений $q_m(v)$ и $q_i(v)$ для соударений электронов с молекулами и ионами. В случае соударения электрона с молекулой (под молекулой мы понимаем любую нейтральную частицу, т. е. атомы и молекулы в собственном смысле этого слова) строго вычислить сечение $q_m(v)$ не представляется возможным. На этом вопросе мы еще остановимся в § 6, сейчас же заметим, что в ряде случаев молекулу с интересующей нас точки зрения можно заменить твердым шариком с некоторым эффективным радиусом a. Для соударений электрона с покоящимся твердым шариком получим:

$$\left.\begin{aligned} q_m(v,\theta) &= \frac{a^2}{4}, \\ q_m(v) &= \pi a^2, \\ \nu_m = q_m v N_m &= \pi a^2 v N_m. \end{aligned}\right\} \qquad (4{,}18)$$

При соударении электрона с ионом сечение определяется известной формулой Резерфорда, и мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} q_i(v,\theta) &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}, \\ q_i(v) &= 2\pi\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \ln\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\theta_{\min}}{2}\right) = \\ &= 2\pi\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \ln\left(1+\frac{p_m^2 m^2 v^4}{e^4}\right), \\ \nu_i &= q_i(v)\, v N_i, \end{aligned}\right\} \qquad (4{,}19)$$

где $\theta_{\min}$ — минимальный угол отклонения и $p_m = \frac{e^2}{mv^2}\operatorname{ctg}\frac{\theta_{\min}}{2}$ — максимальный параметр удара, v — скорость электрона вдали от иона («на бесконечности») и ион предполагается однократным (если заряд иона равен eZ, то в (4,19) везде появляется еще множитель Z^2 перед e^4). Необходимость ввести некоторый максимальный параметр удара p_m связана с расходимостью сечения $q_i(v)$ при больших p в чисто кулоновском поле. Фактически же кулоновское поле данного иона на больших расстояниях всегда экранируется полями других ионов и электронов, окружающих рассматриваемый ион. Учет этого обстоятельства и приводит к конечному выражению для $q_i(v)$. Отметим, что логарифмическое выражение, фигурирующее в формулах типа (4,19), часто называют кулоновским логарифмом.

Рассмотрим экранировку поля положительного иона с зарядом $e > 0$, находящегося в начале координат. Потенциал поля иона и экранирующих его частиц в стационарном случае удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} = -4\pi\rho(r),$$

где учтена сферическая симметрия задачи, r — расстояние от центрального иона и ρ — плотность заряда, с учетом вклада центрального иона и экранирующих частиц. В состоянии теплового равновесия, согласно формуле Больцмана, средняя концентрация положительных частиц в точке с потенциалом Φ равна

$$N_+(\Phi) = Ne^{-\frac{e\Phi}{\varkappa T}},$$

где N — средняя концентрация положительных частиц во всем объеме (вдали от иона при $\Phi = 0$ должно, очевидно, выполняться равенство $N_+ = N$, так как для определенности считаем, что отрицательных ионов нет и плазма квазинейтральна). Для концентрации электронов имеем:

$$N_e(\Phi) = Ne^{\frac{e\Phi}{\varkappa T}};$$

отсюда ясно, что плотность заряда экранирующих частиц равна

$$\rho_{\text{экр}} = eN\left(e^{-\frac{e\Phi}{\varkappa T}} - e^{\frac{e\Phi}{\varkappa T}}\right) \approx -\frac{2e^2N\Phi}{\varkappa T},$$

где учтено, что в интересующем нас случае $e\Phi \ll \varkappa T$. Плотность заряда центрального иона можно записать в виде $\rho_0 = e\delta(\boldsymbol{r})$, где $\delta(\boldsymbol{r})$ — дельта-функция $\left(\int \delta(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r} = 1,\ \delta(\boldsymbol{r}) = 0 \text{ при } \boldsymbol{r} \neq 0\right)$.

В результате для Φ имеем уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\Phi}{dr} - \frac{8\pi e^2N}{\varkappa T}\Phi = -4\pi e\delta(\boldsymbol{r}). \qquad (4,20)$$

Решение этого уравнения таково:

$$\Phi = \frac{e}{r}\exp\left(-\frac{r}{D}\right), \qquad (4,20\text{a})$$

где D — так называемый дебаевский радиус:

$$D = \left(\frac{\varkappa T}{8\pi e^2N}\right)^{\frac{1}{2}} = 4{,}9\sqrt{\frac{T\,(^\circ\text{K})}{N}}\ \text{см}. \qquad (4,21)$$

Это выражение совпадает с (2,10), но для удобства оно здесь приведено еще раз. Выше мы считали температуру ионов и электронов одинаковой. Весь расчет можно, однако, провести и не делая этого предположения, причем, как легко видеть, для дебаевского радиуса получается выражение

$$D=\left(\frac{\varkappa T T_e}{4\pi e^2 (T+T_e) N}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4,22}$$

где T_e — электронная температура, а T — температура ионов. Если $T_e \gg T$, то выражение для D отличается от (4,21) заменой коэффициента $^1/_8$ на $^1/_4$. Если среда квазинейтральна, но $N_+ \neq \neq N$, то в (4,21) нужно заменить N на N_+.

Использование понятия о дебаевском радиусе предполагает, что среднее число частиц, имеющихся в сфере с дебаевским радиусом, велико, так как в противном случае приведенное выше статистическое усреднение теряет смысл *). Сформулированное условие эквивалентно неравенству

$$\frac{4\pi}{3} D^3 \gg \frac{1}{N}, \tag{4,23}$$

поскольку средний объем, приходящийся на заряженную частицу, равен $\frac{1}{N}$. Очевидно, что $\frac{4\pi}{3} D^3 N \sim \alpha$, где

$$\alpha = 16\pi D^3 N = \frac{2\varkappa T D}{e^2} = \left(0{,}54\frac{\varkappa T}{e^2 N^{1/3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(324\frac{T}{N^{1/3}}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{4,24}$$

и численный коэффициент, связывающий α и $\frac{4\pi}{3} D^3 N$, выбран для удобства в дальнейшем.

В условиях земной ионосферы всегда

$$\alpha \gg 1, \tag{4,25}$$

и неравенство (4,23) выполнено (при самых неблагоприятных условиях, когда $T = 200°$ К и $N_i = 10^9$, $\alpha \approx 1000$). В солнечной короне при $N \leqslant 10^9$ и $T \sim 10^6$ параметр α еще намного больше. В хромосфере условие (4,25) также выполняется.

Физический смысл условия (4,23) или (4,25) становится совершенно ясным, если, раскрыв выражения для α и D, переписать его в эквивалентном виде:

$$\frac{\varkappa T}{e^2 N^{1/3}} \gg 1. \tag{4.25a}$$

Таким образом, условие (4,25) выполняется, если средняя кинетическая энергия электронов $\frac{3}{2}\varkappa T$ значительно больше средней энергии их кулоновского взаимодействия, равной по порядку величины $\frac{e^2}{r} \sim e^2 N^{1/3}$. Отсюда ясно, что при нарушении условия (4,25) плазму нельзя считать газом, а следовательно, нельзя также пользоваться кинетическим уравнением.

---

*) Использованное при получении уравнения (4,20) неравенство $e\Phi/\varkappa T \ll 1$ не выполняется при $r \to 0$. В этой области, однако, учет экранирования несуществен и решение (4,20а) для Φ просто представляет собой кулоновский потенциал $\Phi = \frac{e}{r}$. В результате потенциал (4,20а) можно считать справедливым при вычислении среднего поля при всех значениях r.

При учете экранировки несколько точнее было бы рассматривать рассеяние электронов не в «обрезанном» кулоновском поле, а с самого начала в дебаевском поле с потенциалом $\frac{e}{r}\exp(-r/D)$. Однако в (4,19) максимальный параметр входит под знаком логарифма, вследствие чего это уточнение обычно несущественно, и при $T = T_e$ можно воспользоваться решением задачи для кулоновского поля, полагая вместе с тем

$$p_m = D = \left(\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N_+}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.26}$$

Если электронная температура $T_e \gg T$, то в (4,26) по-прежнему фигурирует температура T, и нужно заменить коэффициент $^1/_8$ на $^1/_4$; последняя замена производиться ниже не будет, так как выражение, стоящее под логарифмом, оказывается в силу (4,25) очень большим и появление множителя 2 совершенно несущественно.

Здесь нужно сделать еще одно замечание. В (4,18) и (4,19) для вычисления $q_{m,\,i}(v)$ использована классическая теория, между тем как для вычисления сечений, вообще говоря, нужно базироваться на квантовой механике. Например, в случае твердого шарика (т. е. когда потенциальная энергия взаимодействия электрона с частицей имеет вид $U(r) = 0$ при $r > a$ и $U(r) = \infty$ при $r \leqslant a$) по классической теории $q(v) = \pi a^2$ (см. (4,18)), а в квантовой теории для частиц с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv} \gg a$ сечение $q(v) = 4\pi a^2$ (см., например, [33], стр. 580). Поскольку, однако, величина a или $q_m(v)$ все равно не вычисляется, а должна быть определена из экспериментальных данных, мы будем пользоваться выражением (4,18). Вообще же для молекул значение $q_m(v)$ нужно определять либо из квантовомеханических расчетов (которые, по крайней мере в принципе, возможны, но практически в интересующем нас случае оказываются обычно ненадежными), либо лучше всего находить из соответствующих экспериментальных данных.

Что же касается соударений с ионами, то, как известно, формула Резерфорда строго справедлива и в квантовой теории и, таким образом, выражение (4,19) для $q_i(v, \theta)$ всегда справедливо. Этого нельзя сказать, однако, в отношении выражения (4,19) для $q_i(v)$, где использовано классическое соотношение

$p_m = \frac{e^2}{mv^2}\operatorname{ctg}\frac{\theta_{\min}}{2}$. При движении электрона в кулоновском поле классическая теория применима, если

$$\frac{e^2 Z}{\hbar v} \gg 1, \tag{4,27}$$

где eZ — заряд ядра и v — скорость электрона на бесконечности *). Это условие, как легко видеть, при $Z = 1$ эквивалентно требованию

$$v \ll 3\cdot 10^8\ см/сек,\quad T \sim \frac{mv^2}{3\varkappa} \ll 3\cdot 10^5\,{}^\circ\mathrm{K}. \tag{4,28}$$

При соблюдении неравенств (4,27) и (4,28) для $q_i(v)$ справедливо выражение (4,19). Если же эти неравенства не выполнены, то связь $\theta_{\min}$ с p_m может быть оценена из соотношения неопределенности. Действительно, отвечающее углу $\theta_{\min} \ll 1$ изменение скорости $\Delta v \approx v\theta_{\min} \gtrsim \frac{\hbar}{mp_m}$, откуда прицельный параметр $p_m \gtrsim \frac{\hbar}{mv\theta_{\min}}$. Поэтому в неклассическом случае

$$q_i(v) = 2\pi\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \ln\left(1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\theta_{\min}}{2}\right) = $$
$$= 2\pi\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \ln\left(1 + \gamma\frac{m^2v^2p_m^2}{\hbar^2}\right),$$

где γ — некоторый множитель порядка единицы, который практически оказывается совершенно несущественным (подробнее см. [34], где приведены значения кулоновского логарифма для различных случаев).

Если выполнено неравенство, обратное неравенству (4,27), то справедливо так называемое борновское приближение, и значение $q_i(v)$ нетрудно вычислить с большей точностью, чем это сделано выше, сразу для поля с потенциалом $\varphi = \frac{e\exp(-r/D)}{r}$. При этом

$$q_i(v) = 2\pi\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2\left[\ln\left(1 + \frac{4m^2v^2D^2}{\hbar}\right) - 1\right], \tag{4,19a}$$

где учтено, что $D \gg \frac{\hbar}{mv}$.

---

*) Условие (4,27) получается сразу же из требования, чтобы в классическом приближении длина волны $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}$ была много меньше наименьшего расстояния $r_{\min} = \frac{2e^2Z}{mv^2}$, на которое электрон может приблизиться к ядру.

В условиях земной ионосферы неравенство (4,28) всегда выполнено, и можно пользоваться выражением (4,19) с $p_m = D$. В солнечной короне, напротив, правильнее использовать формулу (4,19а). Однако, учитывая факт выполнения неравенства (4,25), легко видеть, что для ионосферы, короны и всех других сколько-нибудь близких случаев отличие между обеими формулами весьма мало. Поэтому ниже, если не оговорено противное, будем применять формулу (4,19).

О пределах применимости формул кинетической теории. Выше мы не сделали, однако, одной существенной оговорки, связанной с тем, что в случае кулоновского взаимодействия все обычное кинетическое рассмотрение, обсуждавшееся выше, оказывается пригодным лишь для полей с достаточно низкой частотой. Дело в том, что при выводе кинетического уравнения предполагается, что время соударения $\Delta\tau$ много меньше периода высокочастотного поля $\frac{2\pi}{\omega}$, т. е. что каждое соударение происходит в постоянном во времени внешнем поле. При соударениях электронов с нейтральными частицами это условие в радиодиапазоне всегда выполнено, так как $\Delta\tau \sim \frac{a}{\bar{v}} \lesssim 10^{-15}$ (радиус молекулы $a \sim 10^{-8}$ *см*, средняя скорость электрона $\bar{v} \gtrsim 10^7$ *см/сек*). При кулоновском взаимодействии ситуация совершенно другая, поскольку в этом случае радиусом рассеивающей частицы является дебаевский радиус D и

$$\Delta\tau \sim \frac{D}{\bar{v}} = \left(\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi m}{8\varkappa T}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{m}{4\pi e^2 N}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4,29)$$

где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8\varkappa T}{\pi m}}$ — средняя арифметическая скорость электрона.

Таким образом, условие строгой применимости обычного кинетического рассмотрения таково: $\frac{\omega}{2\pi} \ll \frac{1}{\Delta\tau}$ или

$$\left(\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \gg 1. \qquad (4,30)$$

Если $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$, то согласно (3,9) условие (4,30) выполняется только для частот, для которых $\varepsilon < 0$. Между тем наибольший интерес имеют случаи, когда $\varepsilon \gtrsim 0$, т. е. $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \lesssim 1$. Поэтому в наиболее важной области проводимое рассмотрение соударений с ионами не строго. Это обстоятельство может, конечно, оказаться существенным лишь в условиях, при которых соударения с ионами играют определяющую роль; если же речь идет о соударениях с нейтральными частицами, то кинетическое рассмотрение применимо вне всякой связи с соблюдением или несоблюдением условия (4,30). Но и в случае соударений с ионами почти всегда можно не учитывать ограничения, связанного с условием (4,30). Дело в том, что параметр p_m входит в формулу (4,19) и вытекающие из нее выражения для эффективного числа соударений и коэффициента поглощения только под знаком логарифма. Поэтому вопрос о точном значении p_m относительно мало существен, тем более, что при условии (4,25) логарифмический множитель много больше единицы *).

В дальнейшем мы будем полагать $p_m = D$ и пользоваться методом кинетического уравнения, имея в виду, что получающиеся формулы обладают, вообще говоря, только логарифмической точностью. В условиях ионосферы эта точность оказывается весьма высокой и практически заведомо достаточной (подробнее см. §§ 6, 37).

Ошибка, связанная с использованием равенства $p_m = D$ (см. (4,26)), оказывается, однако, существенной при рассмотрении поглощения радиоволн в очень разреженной среде, например межзвездном электронном газе, где выполняется неравенство, обратное неравенству (4,30). Для этого случая задача о поглощении радиоволн решается в § 37.

Выше мы не касались влияния магнитного поля. При наличии поля можно считать, что оно не влияет на характер соударений, если $r_H \gg D$ (здесь $r_H = \frac{v}{\omega_H} \sim \frac{\sqrt{\varkappa T/m}}{|e|\,H^{(0)}/mc}$ — радиус кривизны орбиты частицы в поле и $D \sim \frac{\sqrt{\varkappa T/m}}{\omega_0}$ — дебаевский радиус). Отсюда приходим к условию $\omega_0 \gg \omega_H$, при несоблюдении которого соударения в поле протекают несколько отличным образом по сравнению с соударениями без поля. Однако и это обстоятельство обычно сказывается только на логарифмическом множителе и может поэтому быть существенно лишь при $\omega_H \gg \omega_0$. Более детальный анализ соударений при условиях $\omega \gg \omega_0$ или $\omega_H \gg \omega_0$ см. в [35, 36].

---

*) Кинетический расчет, связанный с представлением о постоянстве поля во время соударения, заведомо непригоден уже в первом приближении, если нарушается условие $\frac{e^2}{\varkappa T v} \ll \frac{2\pi}{\omega}$, которое можно записать также в виде

$$\left(\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \gg \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{N^{\frac{1}{3}}}{324\,T}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

§ 5. Несколько замечаний о микропроцессах в плазме

Микропроцессы в плазме и уравнения сохранения числа частиц разного сорта. Выше в кинетическом уравнении мы учитывали лишь упругие соударения электронов с молекулами и ионами. Между тем в плазме может происходить также ряд других процессов: ионизация, рекомбинация, прилипание и отлипание (образование и разрушение отрицательных ионов), диссоциация и различные неупругие соударения.

В этой связи, с одной стороны, возникает вопрос о влиянии перечисленных микропроцессов на электронную функцию распределения и, с другой стороны, представляется необходимым установить уравнения, определяющие протекание самих этих микропроцессов.

Включение микропроцессов в общую схему кинетического уравнения не представляет труда, но мы не будем останавливаться здесь на этом вопросе, так как для дальнейшего достаточно установить уравнения сохранения числа частиц различного типа. Эти уравнения могут быть получены из кинетических уравнений для электронов, молекул и ионов в результате интегрирования их по скоростям. Однако те же выражения проще установить непосредственно на основе очевидных соображений о сохранении числа частиц. Таким образом, обозначая концентрации электронов, положительных и отрицательных ионов и молекул через N, $N_\pm$ и N_m, мы получаем:

$$\frac{dN}{dt}=J-\alpha_e NN_+-\beta NN_m+\gamma N_- N_m+IN_-, \qquad (5,1)$$

$$\frac{dN_+}{dt}=J-\alpha_i N_+N_- -\alpha_e N_+N, \qquad (5,2)$$

$$\frac{dN_-}{dt}=\beta NN_m-\alpha_i N_-N_+-\gamma N_-N_m-IN_-. \qquad (5,3)$$

Здесь J — число электронов (т. е. число актов ионизации), образующихся в 1 *см*^{3} газа в 1 *сек* под влиянием падающего излучения или по какой-либо другой причине, не учитываемой остальными членами уравнения. В случае фотоионизации, играющей в ионосфере определяющую роль, $J=\overline{q_ф S_ф} N_m$, где $q_ф$ — эффективное сечение для фотоэффекта и $S_ф$ — поток фотонов, равный потоку энергии S, деленному на энергию фотона $\hbar\omega$; черта сверху над $q_ф S_ф$ означает усреднение по спектру. Кроме того, в (5,1) — (5,3) для определенности считается, что имеются ионы и молекулы лишь одного сорта. Далее, α_e и α_i — коэффициенты рекомбинации положительных ионов с электронами и с отрицательными ионами, β — коэффициент прилипания электронов к молекулам,

γ — коэффициент отлипания электронов от отрицательных ионов при их соударении с молекулами (аналогичный процесс при соударении отрицательного иона с каким-либо другим ионом в уравнениях не учтен) и IN_- — число актов отлипания, производимого светом в 1 *см*³ в 1 *сек*. Величина I зависит от интенсивности и спектра излучения ($IN_- = \overline{q_{\text{отл}} S_{\text{ф}}} N_-$, где $q_{\text{отл}}$ — сечение для отлипания, т. е. процесса типа $O_2^- + \hbar\omega = O_2 + e$ или $O^- + \hbar\omega = O + e$, где e — электрон). Что касается коэффициентов α_e, α_i, β и γ, то для того, чтобы пояснить их смысл, рассмотрим несколько подробнее процесс электронной рекомбинации, т. е. процесс типа $O_2^+ + e = O_2 + \hbar\omega$, $N^+ + e = N + \hbar\omega$ и т. п. *). Среднее число актов рекомбинации между данным ионом и электронами, происходящее в единицу времени, равно $\overline{q_{\text{р}} v} N$, где $q_{\text{р}}$ — сечение рекомбинации, v — относительная скорость электрона и иона, практически равная скорости электрона, и черта сверху означает усреднение по распределению скоростей, что необходимо, так как $q_{\text{р}}$ зависит от v. Полное же число актов рекомбинации в 1 *см*³ в 1 *сек* равно $\overline{q_{\text{р}} v} N N_+$, откуда ясно, что $\alpha_e = \overline{q_{\text{р}} v}$. Если распределение скоростей является равновесным, то

$$\alpha = \overline{q_{\text{р}} v} = \int q_{\text{р}}(v)\, v 4\pi \left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2\varkappa T}} v^2\, dv. \qquad (5,4)$$

Величина β определяется совершенно аналогичным образом, т. е. $\beta = \overline{q_{\text{п}} v}$, где $q_{\text{п}}$ — сечение прилипания и v — скорость электрона. Что же касается коэффициентов α_i и γ, то здесь в соответствующем выражении типа $\overline{qv}$ под v нужно понимать относительную скорость ионов или иона и молекулы. Как ясно из сказанного и, в частности, из (5,4), коэффициенты α_e, α_i, β и γ не должны зависеть от давления и при равновесии (или, точнее, когда распределение скоростей всех частиц с достаточной точностью может считаться равновесным) являются функциями только температуры T. Подобное положение, однако, должно иметь место только при достаточно низком давлении, когда можно ограничиться рассмотрением только парных (т. е. двойных) соударений. В ионосфере это условие обычно выполняется; если же оно не соблюдается, то по-прежнему можно базироваться на уравнениях типа (5,1) — (5,3), но коэффициенты α_e, α_i и т. д. зависят от давления.

---

*) Нижеследующие рассуждения не изменяются и в том случае, когда речь идет о рекомбинационном процессе типа $O_2^+ + e = O' + O''$, где O' и O'' — возбужденные атомы O. Подобный механизм рекомбинации называется диссоциативным и, как выяснилось в последние годы, в ионосфере он играет большую роль [37, 38]. При этом, однако, речь обычно идет не только о процессе типа $O_2^+ + e = O' + O''$, а сразу о нескольких реакциях. Так, положительные атомные ионы при отсутствии отрицательных ионов рекомбинируют в основном в два этапа. Например, ион O^+ при наличии молекул O_2 и N_2 превращается в молекулярный ион в результате реакций $O^+ + O_2 \rightarrow O_2^+ + O$ и $O^+ + N_2 = NO^+ + N$. После этого уже происходит диссоциативная рекомбинация ионов O_2^+ и NO^+. Очевидно, в уравнениях (5,1) — (5,3) такая возможность не учтена, хотя это и легко сделать (см., например, [37]).

Не написав выше уравнения, определяющего изменение во времени концентрации молекул N_m, мы исходили из того, что величину N_m часто можно считать заданной. Если же это не так, то к системе (5,1) — (5,3) нужно добавить уравнение

$$\frac{dN_m}{dt} = -J - \beta N N_m + \alpha_e N N_+ + \alpha_i N_- N_+ + \gamma N_- N_m + I N_-. \qquad (5,5)$$

Далее, в (5,1) — (5,3) и (5,5) не учитываются возможное расширение среды и вообще движения в ней, а также диффузия. Наличие некоторой макроскопической скорости среды u учесть очень легко: для этого достаточно, например, в (5,1) заменить $\frac{dN}{dt}$ на $\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N u)$, где N и u зависят от координат и времени. Аналогичную замену нужно сделать и в других уравнениях. Что касается диффузии в ионосфере, то ее рассмотрение усложняется в связи с необходимостью учитывать при этом также электрическое поле, возникающее при диффузии в ионизованном газе, а также силу тяжести. Существен в ряде случаев и учет влияния земного магнитного поля. Задача поэтому довольно сложна, и мы здесь останавливаться на ней не будем (см. [2, 39, 40] и § 13).

Пренебрегая диффузией и учитывая высокую проводимость, плазму можно обычно считать квазинейтральной, в силу чего

$$N + N_- = N_+, \qquad (5,6)$$

где все ионы для определенности считаются однократными.

Из (5,1) — (5,3) следует, что $\frac{d(N + N_-)}{dt} = \frac{dN_+}{dt}$, т. е. что условие (5,6) сохраняется во времени. Используя связь (5,6) и вводя параметр $\lambda = \frac{N_-}{N}$, легко показать, что из (5,1) — (5,3) следует уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \frac{J}{1+\lambda} - (\alpha_e + \lambda \alpha_i) N^2 - \frac{N}{1+\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, \qquad (5,7)$$

или

$$\frac{dN}{dt} = \frac{J}{1+\lambda} - \alpha' N^2, \qquad (5,8)$$

$$N_+ = (1+\lambda) N, \quad N_- = \lambda N, \quad \alpha' = \alpha_e + \lambda \alpha_i + \frac{1}{N} \frac{d}{dt} \ln(1+\lambda).$$

Разумеется, введение эффективного коэффициента рекомбинации α' вносит упрощения лишь, если отношение концентраций отрицательных ионов и электронов, т. е. λ, постоянно или достаточно медленно меняется во времени. В этом случае

$$\alpha' = \alpha_e + \lambda\alpha_i, \tag{5,9}$$

и в первом приближении λ не зависит от N. В этих предположениях уравнение (5,8) сильно упрощается и эквивалентно уравнению, определяющему изменение N лишь в силу рекомбинации и фотоионизации без учета влияния отрицательных ионов. Действительно, это последнее уравнение, получающееся из (5,1) при $N_- = 0$, имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = J - \alpha_e N^2, \tag{5,10}$$

где учтено, что при $N_- = 0$, в силу (5,6), $N_+ = N$.

При $\lambda = \text{const}$ уравнение (5,10) по форме совпадает с уравнением (5,8). В стационарном состоянии, когда $\frac{dN}{dt} = 0$, получим:

$$\frac{J}{1+\lambda} = \alpha' N^2, \quad \alpha' = \alpha_e + \lambda\alpha_i. \tag{5,11}$$

При $J = 0$ решение уравнения (5,8) с $\lambda = \text{const}$ таково:

$$N(t) = \frac{N_0}{1+\alpha' N_0 t}, \tag{5,12}$$

где N_0 — концентрация в момент $t = 0$.

Нужно, однако, подчеркнуть, что полагать $\lambda = \text{const}$, вообще говоря, нельзя. Действительно, если положить $\lambda = \text{const}$ в уравнении (5,7), являющемся следствием уравнений (5,2) и (5,6), то это уравнение в общем случае несовместимо с уравнением (5,1). Поэтому использование соотношений (5,9), (5,11) и (5,12), основанных на предположении о постоянстве параметра λ, возможно лишь в ограниченных пределах.

В E-слое и выше роль отрицательных ионов не существенна и можно положить $\lambda = 0$. С другой стороны, в этой области заметную роль могут играть ионно-молекулярные реакции типа реакции $O^+ + O_2 \rightarrow O_2^+ + O$. В дальнейшем образующиеся таким образом молекулярные ионы рекомбинируют путем механизма типа $O_2^+ + e \rightarrow O' + O''$, т. е. в результате диссоциативной рекомбинации. Как уже указывалось, в подобных условиях приведенные уравнения (5,1) — (5,3) и (5,5) нуждаются в естественном обобщении, при котором учитывается наличие всех существенных реакций и сортов частиц. Одним из результатов рассмотрения такой полной системы уравнений является вывод, что скорость уменьшения электронной концентрации может оказаться равной не — $\alpha_e N^2$ (см. (5,10)), а равной — $\alpha^* N$.

Поясним это на примере реакций $O^+ + O_2 \to O_2^+ + O$ и $O_2^+ + e \to O' + O''$, в которых участвуют частицы O_2, O_2^+, O^+ и e с концентрациями N_{O_2}, $N_{O_2^+}$, N_{O^+} и N. Тогда, при отсутствии процессов излучения и поглощения света и некоторых других мыслимых реакций имеем

$$\frac{dN}{dt} = -\alpha N_{O_2^+} N, \qquad \frac{dN_{O^+}}{dt} = -\gamma N_{O_2} N_{O^+},$$

$$\frac{dN_{O_2^+}}{dt} = \gamma N_{O_2} N_{O^+} - \alpha N_{O_2^+} N, \qquad N = N_{O_2^+} + N_{O^+}. \tag{5,12а}$$

В определенных условиях производная $\frac{dN_{O_2^+}}{dt}$ может быть мала, и тогда из (5,12а) получаем:

$$\frac{dN}{dt} \approx -\alpha \frac{\gamma N_{O_2} N^2}{\gamma N_{O_2} + \alpha N}, \qquad N_{O_2^+} = N - N_{O^+} \approx \frac{\gamma N_{O_2} N}{\gamma N_{O_2} + \alpha N}. \tag{5,12б}$$

Отсюда при $\gamma N_{O_2} \gg \alpha N$ имеем $\frac{dN}{dt} \approx -\alpha N^2$, а при $\alpha N \gg \gamma N_{O_2}$

$$\frac{dN}{dt} \approx -\gamma N_{O_2} N \equiv -\alpha^* N, \qquad N_{O_2^+} \approx \frac{\gamma}{\alpha} N_{O_2} \ll N. \tag{5,12в}$$

Приведенные соотношения являются исходными при рассмотрении процессов, происходящих в плазме при наличии нейтральных частиц, излучения и т. д.

Анализ этих процессов в различных условиях и, в частности, в случае земной ионосферы не входит в нашу задачу (см. [37, 38, 41—47]). Поэтому мы ограничимся ниже лишь несколькими замечаниями и оценками, полезными с точки зрения целей дальнейшего изложения. Речь при этом будет идти только о применениях к земной ионосфере.

В ионосфере, как следует из экспериментальных данных при их обработке на основе уравнения (5,8) с $\lambda = \mathrm{const}$, имеем: для D-слоя $\alpha' \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$, для E-слоя $\alpha' \sim 1 \div 3 \cdot 10^{-8}$, для F_1-слоя $\alpha' \sim 10^{-8} \div 10^{-9}$ и для F_2-слоя $\alpha' \sim 10^{-10} \div 10^{-11}$. Принимая для ориентировки эти значения, можно сразу же оценить время жизни электрона, т. е. среднее время между процессом ионизации (или отлипания) и актом рекомбинации (или прилипания). Это время, как ясно, например, из (5,12), порядка

$$\tau_0 \sim \frac{1}{\alpha' N}, \tag{5,13}$$

так как за время $\frac{1}{\alpha' N}$ концентрация электронов при выключении ионизации убывает вдвое. Соотношение (5,13) следует также непосредственно из самого определения коэффициента α' (например, среднее число актов рекомбинации данного электрона в секунду есть $\alpha_e N = \overline{q_p v} N$ и среднее время жизни $\tau_0 = \frac{1}{\alpha_e N}$; если речь идет об эффективном коэффициенте рекомбинации α', то, очевидно, по порядку величины также $\tau_0 \sim \frac{1}{\alpha' N}$). На основании сказанного для E-, F_1- и F_2-слоев имеем:

$$\tau_{0E} \sim 10^3 \text{ сек}, \quad \tau_{0F_1} \sim 10^3 \div 10^4 \text{ сек}, \quad \tau_{0F_2} \sim 10^4 \div 10^5 \text{ сек}, \qquad (5,14)$$

где принято $N_E \sim N_{F_1} \sim 10^5$ и $N_{F_2} \sim 10^6$.

Время замедления неравновесных электронов в плазме. Теперь можно перейти к вопросу о влиянии процессов образования и исчезновения электронов в газе на электронную функцию распределения. Вопрос этот возникает потому, что образующиеся электроны заведомо не имеют максвелловского распределения скоростей и, вообще говоря, являются относительно быстрыми (в ионосфере они могут обладать энергией порядка от одного до сотни электронвольт). Рекомбинируют и прилипают, напротив, преимущественно самые медленные электроны с энергией $\leqslant \varkappa T$. Поэтому даже в отсутствие электрического поля, но при протекании процессов ионизации, рекомбинации и т. д. функция распределения может заметно отличаться от максвелловской. Для того чтобы оценить это отличие, нужно сравнить время жизни электрона в свободном состоянии (см. (5,14)) с временем замедления (релаксации), т. е. временем, за которое образовавшийся в газе быстрый электрон замедлится до тепловых скоростей.

При соударении электрона со скоростью $\boldsymbol{v}$ с тяжелой частицей импульс электрона изменяется на некоторую величину $m\Delta\boldsymbol{v} = m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}')$. Тяжелая частица получает при этом импульс $-m\Delta\boldsymbol{v}$, а ее энергия меняется на

$$\frac{(\boldsymbol{p} - m\Delta\boldsymbol{v})^2}{2M} - \frac{p^2}{2M} = -\frac{m}{M}\boldsymbol{p}\Delta\boldsymbol{v} + \frac{m^2}{2M}(\Delta\boldsymbol{v})^2,$$

где $\boldsymbol{p}$ — импульс тяжелой частицы до соударения. Если скорость электронов достаточно велика, так что их кинетическая энергия $K \gg \frac{3}{2}\varkappa T$ (T — температура газа тяжелых частиц), то тяжелые частицы можно считать неподвижными. Полагая, таким образом, $\boldsymbol{p} = 0$ (или усредняя по направлениям в предположении о независимости $\boldsymbol{p}$ и $\Delta\boldsymbol{v}$, как это имеет место при $K \gg \frac{3}{2}\varkappa T$), видим, что при одном ударе электрон передает энергию $\frac{m^2}{2M}(\Delta\boldsymbol{v})^2$.

Отсюда средняя энергия, передаваемая в единицу времени электронами со скоростью v, равна

$$\overline{U}(v)=\frac{m^2}{2M}\int(\Delta\boldsymbol{v})^2 q_{m,i}(v,\theta)\,vN_{m,i}\,d\Omega,$$

где $N_{m,i}$ — концентрация тяжелых частиц (молекул m или ионов i), $q_{m,i}(v,\theta)$ — дифференциальное эффективное сечение (4,15) и $d\Omega=2\pi\sin\theta\,d\theta$. Выбирая направление первоначальной скорости электрона $\boldsymbol{v}$ за ось z, имеем: $\Delta v_z=v(1-\cos\theta)$ и $(\Delta v_x)^2+(\Delta v_y)^2=v^2\sin^2\theta$.

Поэтому

$$\overline{U}(v)=\frac{m^2v^3N_{m,i}}{M}\int q_{m,i}(v,\theta)(1-\cos\theta)\,d\Omega=$$
$$=\frac{2m}{M}\left(\frac{mv^2}{2}\right)\nu_{m,i}=\frac{2m}{M}K\nu_{m,i},\qquad(5{,}15)$$

поскольку $\nu_{m,i}=q_{m,i}(v)\,vN_{m,i}$ и $q_{m,i}(v)=\int q_{m,i}(v,\theta)(1-\cos\theta)\,d\Omega$ (см. (4,15)).

Итак, при $K\gg\frac{3}{2}\varkappa T$ для упругих соударений между электронами и тяжелыми частицами $\overline{U}(v)=\delta_{\text{уп}}K\nu_{m,i}$, где $\delta_{\text{уп}}=\frac{2m}{M}$ (см. (4,6)). Если $\nu_{m,i}$ не зависит от скорости v, то получается формула (4,5) при $\overline{K}\gg\frac{3}{2}\varkappa T$. Этого и следовало ожидать, так как элементарная теория строго совпадает с кинетической именно при $\nu_{m,i}=\nu_{\text{эфф}}=\text{const}$.

Относительная доля передаваемой энергии $\delta(v)=\frac{\overline{U}(v)}{K\nu_{m,i}(v)}$ равна $\delta_{\text{уп}}$ только при отсутствии неупругих соударений. Если же такие соударения не запрещены из энергетических соображений, то обычно $\delta\gg\delta_{\text{уп}}$. Низшие возбужденные электронные уровни атомов и молекул отстоят от основного уровня на расстоянии порядка $1\div10$ *эв*. Для низкотемпературной плазмы возбуждение этих уровней особого интереса не представляет (энергии в 1 *эв* отвечает температура $T_e\approx10^4\,^\circ\text{K}$). Поэтому в атомных газах и при соударениях электронов с ионами для низкотемпературной плазмы $\delta=\delta_{\text{уп}}$ (это равенство имеет место при средней энергии электронов $\overline{K}$, существенно меньшей наинизшего потенциала ионизации). В молекулярных газах, напротив, даже при электронной температуре $T_e=\frac{2\overline{K}}{3\varkappa}\sim300^\circ$ имеем $\delta=\delta(T_e)\gg\delta_{\text{уп}}$, т. е. возможны неупругие удары, связанные с возбуждением главным образом ротационных уровней молекул.

Последнее связано с тем, что расстояния между ротационными уровнями весьма малы и, например, у молекул O_2 и N_2 составляют $\sim 10^{-3}$ *эв*, что отвечает температуре $T \sim 10°$. Поэтому при $T_e \gg 10°$ электроны могут терять энергию на возбуждение ротационных уровней, в то время как возбуждение колебательных уровней, например, в O_2 и N_2 еще почти не происходит и при $T_e \sim 300°$. Обработка ряда экспериментальных данных, сопоставленная в [48] (см. также [42, 49, 50]), приводит для H_2, O_2, N_2, воздуха и ионосферы на разных высотах к значениям δ, указанным в табл. 5,1.

Таблица 5.1

Значения $\delta \cdot 10^3$

T_e	H_2	O_2	N_2	Воздух	Ионосфера		
					100 *км*	200 *км*	300 *км*
500	2,3	—	—	—	—	—	—
1 000	2,5	3,7	0,47	0,89	0,86	0,08	0,06
2 000	2,2	6,7	0,36	1,2	1,2	0,12	0,06
3 000	2,2	8,6	0,33	1,6	1,5	0,16	0,06
4 000	2,5	9,05	0,32	1,7	1,6	0,18	0,06
5 000	3,0	8,7	0,34	1,7	1,6	0,22	0,06
6 000	3,4	8,2	0,38	1,7	1,6	0,26	0,07
7 000	3,9	7,7	0,45	1,7	1,6	0,32	0,07
8 000	4,4	7,2	0,60	1,7	1,6	0,43	0,08
9 000	4,85	6,8	0,82	1,8	1,7	0,60	0,09
10 000	5,3	6,6	1,15	2,0	2,0	0,85	0,11
12 000	6,1	7,7	2,40	3,2	3,1	1,8	0,23
15 000	7,2	21	9,8	11	10,6	7,7	1,13

Для смеси газов (воздуха, ионосферы и т. п.) значения δ получаются по формуле $\delta = \delta_1 \frac{\nu_{эфф1}}{\nu_{эфф1} + \nu_{эфф2}} + \delta_2 \frac{\nu_{эфф2}}{\nu_{эфф1} + \nu_{эфф2}}$, где $\delta_{1,2}$ — значения δ для газов 1 или 2, а $\nu_{эфф1,\,2}$ — эффективные числа соударений электронов с молекулами газа 1 или газа 2 (обобщение на число компонент, большее двух, очевидно). Изменение δ при переходе к ионосфере и на различных высотах в ионосфере связано с изменением ее состава (диссоциация и др.); использованных в [48] данных о составе ионосферы приводить здесь не будем, поскольку конкретные значения δ ниже фактически используются только для оценок. Кроме того, даже данные для газов с определенным составом не могут еще считаться твердо установленными в связи с имеющимися в литературе разногласиями. Заметим, наконец, что в табл. 5,1 средняя энергия электронов $\overline{K}$ выражена через электронную температуру $T_e = \frac{2}{3} \frac{\overline{K}}{\varkappa}$

в силу предположения о максвелловском распределении электронов по скоростям. Результаты, однако, в довольно широких пределах нечувствительны к виду функции распределения (это связано со слабой зависимостью δ от T_e). Поэтому для немаксвелловских распределений табл. 5,1 для ориентировки также можно пользоваться, полагая по определению $\overline{K} = \frac{3}{2}\varkappa T_e$.

Из приведенных данных ясно, что даже в воздухе, не говоря уже об ионосфере, $\delta \ll 1$ (в то же время в воздухе $\delta \gg \delta_{\text{уп}}$). Поэтому для замедления относительно быстрого электрона до тепловых скоростей $v \sim \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$ он должен испытать большое число соударений с молекулами и ионами. Считая в связи с этим число соударений s непрерывной величиной, можно написать:

$$\frac{d\,\Delta\overline{K}}{ds} = -\delta(\overline{K})\,\Delta\overline{K}, \qquad (5,16)$$

где $\Delta\overline{K} = \overline{K} - \frac{3}{2}\varkappa T$ (при одном ударе $d(\Delta\overline{K}) = -\delta\Delta\overline{K}$, откуда и получаем (5,16)).

Полагая $\delta(\overline{K}) = \text{const}$, видим, что число ударов, необходимое для снижения энергии от значения $\overline{K}_0 \gg \frac{3}{2}\varkappa T$ до $\overline{K} \sim \frac{3}{2}\varkappa T$, равно

$$s \approx \frac{\ln\frac{\overline{K}_0}{\varkappa T}}{\delta}. \qquad (5,17)$$

Время замедления электрона (время релаксации) τ' равно, очевидно, отношению необходимого для замедления числа соударений s к числу соударений в секунду $\nu_{\text{эфф}}$:

$$\tau' = \frac{s}{\nu_{\text{эфф}}} \approx \frac{\ln\frac{\overline{K}_0}{\varkappa T}}{\delta\nu_{\text{эфф}}}. \qquad (5,18)$$

При этом следует иметь в виду, что формулы (5,17) и (5,18) содержат известную неточность, связанную с зависимостью δ от $\overline{K}$. В случае полностью ионизированной плазмы под $\nu_{\text{эфф}}$ нужно, очевидно, понимать частоту $\nu_{\text{эфф},\,i}$ для соударений электронов с ионами. Как будет показано в § 6,

$$\nu_{\text{эфф},\,i} = \frac{\sqrt{8\pi}e^4N}{\sqrt{m}\,(\varkappa T)^{3/2}} \ln\left(0,37\frac{\varkappa T}{e^2N^{1/3}}\right).$$

Подставляя в (5,18) это значение $\nu_{\text{эфф},i}$, а также величину $\delta=\frac{2m}{M}$, получаем

$$\tau' \approx \frac{mM\left(\frac{\varkappa T}{m}\right)^{3/2}\ln\left(\frac{\overline{K}_0}{\varkappa T}\right)}{4\sqrt{2\pi}e^4N\ln\left(0{,}37\frac{\varkappa T}{e^2N^{1/3}}\right)}. \tag{5,18а}$$

Представляет интерес и довольно часто встречается и такая задача: найти время релаксации τ'', характеризующее выравнивание температур электронов и ионов в полностью ионизированной плазме (электронная температура T_e, ионная температура T_i). Как показывает расчет (см. [2, 34, 51] и § 38), это время релаксации

$$\tau''=\frac{mM\left(\frac{\varkappa T_e}{m}\right)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi}e^4N\ln\left(0{,}37\frac{\varkappa T_e}{e^2N^{1/3}}\right)}, \tag{5,18б}$$

где все ионы считаются одинаковыми и однократными, а учет множителя 0,37 под знаком логарифма является превышением точности расчета; этот множитель тем не менее сохранен, поскольку ниже часто используется величина $\ln\left(0{,}37\frac{\varkappa T_e}{e^2N^{1/3}}\right)=\ln\left(220\frac{T_e}{N^{1/3}}\right)$. Кроме того, при переходе к (5,18б) от более общего выражения принято, что $T_e\gg\frac{m}{M}T_i$. При произвольных T_e и T_i в (5,18б) нужно заменить $\left(\frac{\varkappa T_e}{m}\right)^{3/2}$ на $\left(\frac{\varkappa T_e}{m}+\frac{\varkappa T_i}{M}\right)^{3/2}$.

Точный смысл времени τ'' таков: если электроны не получают энергии извне, то

$$\frac{dT_e}{dt}=-\frac{T_e-T_i}{\tau''}. \tag{5,18в}$$

Кинетическая энергия электронов равна $\frac{3}{2}\varkappa T_eN$. Поэтому, если электроны нагреваются внешним источником, который сообщает им энергию Q *эрг·см*$^{-3}$·*сек*$^{-1}$, то в стационарном состоянии

$$Q=\frac{3\varkappa(T_e-T_i)N}{2\tau''}. \tag{5,18г}$$

Выражение (5,18б) родственно формуле (5,18а), что и естественно ввиду физической близости обсуждаемых процессов релаксации. В § 38 рассматривается случай, когда нагревание осуществляется электрическим полем. При этом к формулам (5,18б) — (5,18в) можно непосредственно перейти от формул (38,6) — (38,7), если считать, что нагревание отсутствует.

Отклонение функции распределения от равновесной. Оценки для ионосферы. Отклонение функции распределения от равновесной определяется величиной отношения $\frac{\tau'}{\tau_0}$, где τ_0 — время жизни электронов (5,13) и (5,14) и τ' — время замедления (5,18). Как ясно из дальнейшего (см. § 6), для E-слоя $\nu_{эфф} \sim 10^4 \div 10^5$ и для F-слоя $\nu_{эфф} \sim 10^3 \div 10^4$, поэтому при $\overline{K}_0 \sim 10$ *эв*, $T \sim 300°$ K и $\delta \sim 10^{-3}$, согласно (5,14) и (5,18), грубо приближенно

$$\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right)_E \sim 10^{-4}. \tag{5,19}$$

Принимая для F-слоя значение $\delta = \delta_{уп} \sim 5 \cdot 10^{-5}$, при $\tau_0 \sim 10^4$ *сек* и $\nu_{эфф} \sim 3 \cdot 10^3$ имеем:

$$\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right)_F \sim 3 \cdot 10^{-3}. \tag{5,20}$$

Как ясно из сказанного, электрон обладает энергией порядка $\overline{K}_0$ в течение времени порядка τ', все же остальное время своего свободного существования до рекомбинации или прилипания *) его энергия близка к тепловой энергии $\frac{3}{2}\varkappa T$. Поэтому разность средней энергии электронов $\overline{K}$ и тепловой энергии $\frac{3}{2}\varkappa T$ порядка

$$\Delta\overline{K} = \varkappa\Delta T = \overline{K} - \frac{3}{2}\varkappa T \sim \frac{\tau'}{\tau_0}\overline{K}_0. \tag{5,21}$$

При $\overline{K}_0 \sim 10$ *эв* в E-слое, согласно (5,19), $\Delta T \sim \frac{\tau'}{\varkappa\tau_0} \sim 10°$ K, а в F-слое, согласно (5,20), $\Delta T \sim 300°$ K. Приведенные оценки носят грубо ориентировочный характер, но все же с несомненностью показывают, что влияние ионизации, рекомбинации и других процессов на функцию распределения электронов в ионосфере при сделанных предположениях может быть значительно (особенно в F-слое). В случае F-слоя можно к тому же утверждать, что электронная функция распределения с большой степенью точности является максвелловской, но с электронной температурой $T_e \neq T$ (другими словами, все отклонение от равновесия сводится в этом случае к неравенству температуры электронов и тяжелых частиц). Это вытекает из рассмотрения междуэлектронных соударений, которых мы выше не учитывали. Между тем эффективное сечение для междуэлектронных соударений, как это сразу ясно, порядка сечения (4,19) для соударений электронов с ионами (различие связано лишь с необходимостью учета равенства масс обоих сталкивающихся партнеров). Далее, при каждом достаточно близком соударении между электронами изменение их энергии в среднем порядка самой энергии. Поэтому, если имеется чисто электронная плазма (без молекул), то время релаксации для установления равновесия между электронами τ_e' в $\frac{m}{M}$ раз меньше времени установления их равновесия с ионами (это последнее время τ' по порядку величины определяется формулой (5,18)).

---

*) Мы исходим здесь из предположения, что рекомбинация и прилипание особенно эффективно происходят для медленных электронов. Можно, однако, указать условия, в которых это предположение несправедливо.

В F-слое, как это будет показано в § 6, значение $\nu_{эфф}$, связанное с одними соударениями электронов с ионами порядка экспериментально измеренной величины $\nu_{эфф}$. Условия, таким образом, близки к имеющим место в чистой электронно-ионной плазме и $\tau_e' \sim \frac{m}{M}\tau' \sim \frac{\ln(\overline{K}_0/\varkappa T)}{\nu_{эфф}}$, так как δ в (5,18) в случае соударений с ионами порядка $\frac{m}{M}$.

Если $\nu_{эфф} \sim 3\cdot 10^3$ и $\overline{K}_0 \sim 10$ *эв*, то $\tau_e' \sim 10^{-3}$ *сек*, $\frac{\tau_e'}{\tau'} \sim \frac{m}{M} \sim 3\cdot 10^{-5}$ и $\frac{\tau_e'}{\tau_0} \sim 10^{-7}$ (при $\tau_0 \sim 10^4$). Таким образом, в F-слое можно во всяком случае считать, что между электронами равновесие успевает установиться, а значит, и функция распределения есть максвелловская функция с некоторой температурой T_e.

Как следует из наблюдений и более детальных расчетов [52, 53], в ионосфере разность $\Delta T = T_e - T$ (здесь $T \approx T_i$ — температура молекул и ионов) на высоте около 200 *км* весьма велика и достигает величины порядка 1000° K. При этом $T_e/T \approx 2 \div 3$. Такой результат (значение $\Delta T \sim 10^3$) не противоречит приведенной очень грубой оценке $\Delta T \sim 300°$ (для F-слоя). На высотах же, меньших 120—130 *км*, значение ΔT мало, что также согласуется с приближенными оценками. Если $\Delta T \ll T$ то в первом приближении электронную функцию распределения можно, очевидно, считать максвелловской с $T_e = T$.

Резюмируя, можно сказать, что в отсутствие внешних полей предположение о максвелловском характере электронной функции распределения в ионосфере вполне разумно и должно явиться хорошим приближением к действительности.

То же можно сказать о солнечной короне. Таким образом, влияние электромагнитной волны на функцию распределения, которое нас интересует, мы будем исследовать на основе кинетического уравнения (4,17), не учитывающего происходящих в плазме микропроцессов. Так же будем поступать и в случае сильных полей (см. гл. VIII). Вместе с тем, вполне мыслимы случаи, когда подобное приближение недопустимо. Так, если образующиеся при ионизации электроны рекомбинируют или прилипают при энергиях, бóльших тепловой (средней кинетической) энергии молекул и ионов, то не всегда можно считать электронную функцию распределения максвелловской даже для чистой электронно-ионной плазмы. Заметим, кроме того, что и в условиях, когда в основной своей части функция распределения является максвелловской, сравнительно легко возникают (например, в электрическом поле) отклонения от максвелловского распределения в области больших скоростей $v \gg \sqrt{\frac{\varkappa T_e}{m}}$ (см. § 38 и [31]).

§ 6. Диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы (кинетическая теория)

Общие соотношения. Перейдем к вычислению диэлектрической проницаемости ε и проводимости σ изотропной плазмы на основе кинетического уравнения. Пространственную дисперсию пока учитывать не будем.

Пренебрегая пока также междуэлектронными соударениями, запишем исходные соотношения в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{eE}{m}\frac{\partial f_{00}}{\partial v}+\nu(v) f_1=0,\\ &f=f_{00}+\frac{f_1(v)\,v}{v},\quad f_{00}=N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2\varkappa T}}.\end{aligned}\right\} \qquad (6{,}1)$$

Здесь $\nu = \nu_m + \nu_i$ — число соударений, и в согласии со сказанным в § 5, а также предположением о слабости поля, симметричная часть функции распределения считается максвелловской, причем электронная температура T_e равна температуре тяжелых частиц T. Если электрическое поле E равно нулю, то, как следует из (6,1), $f_1(t, v)=f_1(0, v)\, e^{-\nu(v)t}$, т. е. асимметричная часть функции распределения затухает, и в стационарном состоянии $f=f_{00}$.

Для вычисления ε и σ в однородном, переменном во времени электрическом поле в (6,1) нужно положить $E=E_0 e^{i\omega t}$ и искать решение в виде $f_1=f_{10}e^{i\omega t}$. Поступая таким образом, сразу же находим:

$$f_1=-\frac{eE\frac{\partial f_{00}}{\partial v}}{m\,(i\omega+\nu(v))}. \qquad (6{,}2)$$

Плотность полного тока равна (см. также (4,11))

$$\mathbf{j}' = e\int \mathbf{v} f\, d\mathbf{v} = e\int \mathbf{v}\frac{(\mathbf{f}_1\mathbf{v})}{v}\, d\mathbf{v} = e\int \mathbf{v}\,(\mathbf{f}_1\mathbf{v})\, v\, dv\, d\Omega =$$

$$= \frac{4\pi e}{3}\int_0^\infty \mathbf{f}_1 v^3\, dv = \frac{8e^2N\mathbf{E}}{3\sqrt{\pi m}}\int_0^\infty \frac{u^4e^{-u^2}\,du}{i\omega+\nu(u)} =$$

$$= \frac{8e^2N\mathbf{E}}{3\sqrt{\pi m}}\left\{\int_0^\infty \frac{\nu(u)\,u^4e^{-u^2}\,du}{\omega^2+\nu^2(u)} - i\omega\int_0^\infty \frac{u^4e^{-u^2}\,du}{\omega^2+\nu^2(u)}\right\}, \qquad (6,3)$$

где при интегрировании введены сферические координаты в пространстве скоростей с полярной осью, направленной по $\mathbf{f}_1$ (поэтому $d\mathbf{v} = v^2\,dv\,d\Omega = 2\pi v^2 \sin\theta\, dv\, d\theta$, где θ угол между $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{v}$); кроме того, введена переменная

$$u = \sqrt{\frac{m}{2\varkappa T}}\,v \qquad (6,4)$$

и учтено, что $\frac{\partial f_{00}}{\partial v} = -\frac{mv}{\varkappa T} f_{00} = -\frac{N}{2\pi^{3/2}}\left(\frac{m}{\varkappa T}\right)^2 u e^{-u^2}$.

С другой стороны, по определению величин ε и σ

$$\mathbf{j}' = \left(\sigma + i\omega\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\right)\mathbf{E} = i\omega\frac{\varepsilon'-1}{4\pi}\,\mathbf{E}. \qquad (6,5)$$

Приравнивая выражения (6,3) и (6,5), мы и можем найти ε и σ.

Помимо ε и σ часто используют также эффективное число соударений $\nu_{\text{эфф}}$, которое определяют соотношением

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2N}{m\,(\omega^2+\nu^2_{\text{эфф}})}, \quad \sigma = \frac{e^2N\nu_{\text{эфф}}}{m\,(\omega^2+\nu^2_{\text{эфф}})}. \qquad (6.6)$$

Введение такой величины $\nu_{\text{эфф}}$ не всегда, однако, удобно и оправдано [54]. Если $\nu\,(v)$ не зависит от v, т. е. $\nu\,(v) = \nu_{\text{эфф}} = \text{const}$, то из (6,3), конечно, сразу же получаются выражения (3,7), тождественные (6,6). Такое приближение как раэ и отвечает «элементарной теории», использованной в § 3. При учете же зависимости ν от v в формулах (6,6) нужно было бы считать $\nu_{\text{эфф}}$ функцией частоты ω, причем эта функция неодинакова в выражениях для ε и σ (кроме того, эта функция $\nu_{\text{эфф}}(\omega)$ в выражении для σ оказывается двухзначной; см. [54]). Поэтому в кинетической теории целесообразно ввести величину $\nu_{\text{эфф}}$ только в предельных случаях высоких и низких частот ω.

Начнем с предельного случая

$$\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}, \qquad (6,7)$$

когда

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \sigma = \frac{e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m\omega^2}. \tag{6,8}$$

Величина $\nu_{\text{эфф}}$ при этом, как ясно из формул (6,3), (6,5), (6,7) и (6,8), равна

$$\nu_{\text{эфф}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \nu(u) u^4 e^{-u^2} du =$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m}{\varkappa T}\right)^{5/2} \int_0^\infty \nu(v) v^4 e^{-\frac{mv^2}{2\varkappa T}} dv, \tag{6,9}$$

где учитывается, что в существенной области интегрирования помимо (6,7) выполнено неравенство $\omega^2 \gg \nu^2(u)$, о чем еще будет речь ниже.

В качестве $\nu(u)$ в (6,9) нужно подставить выражение (4,15) с заменой v на $\sqrt{\frac{2\varkappa T}{m}}u$.

Соударения с молекулами. В случае соударений с молекулами сечение $q_m(v, \theta)$, вообще говоря, лишь весьма слабо зависит от v и θ. В частности, для воздуха при энергиях электронов, бóльших примерно 0,25 *эв*, эффект Рамзауера (зависимость сечения от скорости) выражен, по-видимому, весьма нерезко. При этом различные данные, относящиеся к O_2, N_2 и воздуху, в известной мере противоречат друг другу. Поэтому самым правильным является сейчас принять сечение не зависящим от скорости, тем более, что нас интересуют лишь тепловые скорости, в области которых ожидать ярко выраженного эффекта Рамзауера, вообще говоря, нет оснований (см. также ниже; отметим, что по данным [37] наблюдается все же падение сечения q_m с уменьшением скорости электронов и $q_m \sim \sqrt{T}$, откуда $\nu_{\text{эфф},m} \sim T$; нам неясны, однако, ни область применимости, ни степень надежности этих данных).

Считая молекулу твердым шариком радиуса a и принимая, таким образом, для ν_m выражение (4,18), для $\nu_{\text{эфф}}$, согласно (6,9), получаем:

$$\nu_{\text{эфф},m} = \frac{4\pi}{3} a^2 \bar{v} N_m = 8{,}3 \cdot 10^5 \pi a^2 \sqrt{T} N_m, \tag{6,10}$$

где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8\varkappa T}{\pi m}}$ — средняя арифметическая скорость электронов. При $T = 300°$ скорость $\bar{v} = 1{,}08 \cdot 10^7$ *см/сек*. По соображениям, указанным ниже, для πa^2 в случае воздуха примем значение $4{,}4 \cdot 10^{-16}$ *см*^{2} или для радиуса значение $a = 1{,}2 \cdot 10^{-8}$ *см*, что находится в примерном соответствии с газокинетическими данными. При таком значении a, согласно (6,10):

$$\nu_{\text{эфф},\,m} = 1,7\cdot 10^{11}\frac{N_m}{2,7\cdot 10^{19}}\sqrt{\frac{T}{300}}\,. \qquad (6,11)$$

При атмосферном давлении и $T = 300^\circ$ К, очевидно, $\nu_{\text{эфф}} = 1,7\cdot 10^{11}$.

В дальнейшем для различных оценок мы будем исходить из значения (6,11), хотя необходимо помнить, что в применении к ионосфере, даже если не учитывать изменение состава и температуры, при этом не исключена ошибка в десятки процентов (подробнее см. ниже).

Заметим также, что при получении (6,9) учтено, что в интегралах (6,3) существенна область интегрирования, где $u \sim 1$ (при $u \gg 1$ подынтегральная функция спадает экспоненциально, а при $u \ll 1$ она пропорциональна u^5). Поэтому использованное условие (6,7) фактически эквивалентно необходимому для перехода от (6,3) к (6,9) условию $\omega^2 \gg \nu^2(u)$. Это ясно также из того, что, согласно (6,10), $\nu_{\text{эфф},\,m} \sim \nu\,(u = 1)$.

Соударения с ионами. Аналогичная ситуация имеет место и при вычислении $\nu_{\text{эфф}}$ для соударений с ионами. В этом случае в (6,9) нужно подставить для ν выражение (4,19). В результате, учитывая также (4,26), имеем:

$$\nu_{\text{эфф},\,i} = \frac{2}{3}\pi\frac{e^4}{(\varkappa T)^2}\bar{v}N_i I,$$

$$I = \int_0^\infty \frac{\alpha^2 x e^{-x}\,dx}{1+\alpha^2x^2}, \quad \alpha = \frac{2\varkappa T p_m}{e^2} = \frac{2\varkappa T D}{e^2} = \left(0,54\frac{\varkappa T}{e^2 N_+^{1/3}}\right)^{3/2} = \left(324\frac{T}{N_+^{1/3}}\right)^{3/2};$$

$$N_i = N_+ + N_-, \quad N_+ = N_- + N, \qquad (6,12)$$

где $N_\pm$ — концентрация положительных и отрицательных ионов (см. [55]); аналогичные расчеты проводились также еще раньше в работе [56], где было положено $p_m \sim \frac{1}{N_i^{1/3}}\Big)$.

Интеграл

$$I = -\left\{\operatorname{Ci}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cos\frac{1}{\alpha} + \operatorname{Si}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\sin\frac{1}{\alpha} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{1}{\alpha}\right\},$$

где $\operatorname{Ci}x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ — интегральный косинус и $\operatorname{Si}x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ — интегральный синус. В силу условия (4,25), т. е. малости величины $\frac{1}{\alpha}$, $I \approx -\mathrm{Ci}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \approx \ln\alpha - 0{,}577 = \ln\frac{\alpha}{1{,}78}$. Таким образом,

$$\nu_{\text{эфф},\,i} = \pi\frac{e^4}{(\varkappa T)^2}\bar{v}N_i\ln\left(0{,}37\frac{\varkappa T}{e^2N_+^{1/3}}\right) = \frac{5{,}5N_i}{T^{3/2}}\ln\left(220\frac{T}{N_+^{1/3}}\right). \quad (6{,}13)$$

Ниже мы под знаком логарифма будем вместо N_+ писать $N_i = N_+ + N_-$, так как $N_+ \leqslant N_i \leqslant 2N_+$, и ошибка, вносимая в (6,13) в связи с заменой N_+ на N_i, ничтожна. Кроме того, в большинстве случаев можно считать, что $N_- = 0$, $N_i = N_+ = N$, и, таким образом, пользоваться формулой

$$\nu_{\text{эфф},\,i} = \pi\frac{e^4}{(\varkappa T)^2}\bar{v}N\ln\left(0{,}37\frac{\varkappa T}{e^2N^{1/3}}\right) = \frac{5{,}5N}{T^{3/2}}\ln\left(220\frac{T}{N^{1/3}}\right). \quad (6{,}14)$$

Если электронная температура T_e не равна температуре ионов T, то, проводя вычисления, аналогичные приведенным, легко установить формулу, заменяющую выражение (6,13). Например, если $T_e \gg T$ и $N_i = N_+ = N$, то

$$\nu_{\text{эфф},\,i} = \frac{5{,}5N}{T_e^{3/2}}\left\{\ln\frac{280T_e}{N^{1/3}} + \frac{1}{3}\ln\frac{T}{T_e}\right\}. \quad (6{,}15)$$

Различие между формулами (6,15) и (6,13), если не говорить о замене T на T_e, лежит, вообще говоря, за пределами точности самих этих формул. Действительно, как было указано в § 4, полагая $p_m = D$ (см. (4.26)), мы совершаем некоторую ошибку, сказывающуюся на выражении, стоящем в (6,13) под знаком логарифма.

Однако нужно подчеркнуть, что если $\left(\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}\right)^{1/2} \gg 1$, то в формуле (6,13) нельзя ручаться лишь за множитель порядка единицы под знаком логарифма, что обеспечивает очень высокую точность вычисляемого значения $\nu_{\text{эфф},\,i}$ $\Big($при $T = 300°$ и $N_i = 10^6$ значение $\ln\left(220\frac{T}{N_i^{1/3}}\right) = 6{,}5$ и, если даже вдвое изменить величину, стоящую под логарифмом, значение $\nu_{\text{эфф},\,i}$ изменится только на 10%$\Big)$. Точность формулы (6,13) становится уже недостаточной только в условиях, когда имеет место другой предельный случай, т. е. при $\left(\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}\right)^{1/2} \ll 1$. Вычисление коэффициента поглощения μ в подобных условиях, когда $\mu = \frac{1-n^2}{cn}\nu_{\text{эфф}} \approx \frac{4\pi e^2N}{mc\omega^2}\nu_{\text{эфф}}$ (см. § 7), проведено в § 37. Полученные в § 37 результаты позволяют оценить точность формулы (6,13) в ионосферных условиях. Эта точность оказывается обычно не меньшей 5 ÷ 10%.

Роль междуэлектронных соударений. Справедливость последнего заключения существенным образом связана с тем обстоятельством, что в случае (6,7), когда $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$, междуэлектронные соударения, которыми в (6,1) пренебрежено, действительно оказываются несущественными [57]. Этот результат не самоочевиден, так как сечение для соударений электронов с электронами того же порядка, как сечение для соударения электрона с однократным ионом. Поэтому, вообще говоря, междуэлектронные соударения существенны и, как оказывается, при низких частотах, когда $\omega^2 \ll \nu^2_{\text{эфф}}$ (в частности, в постоянном поле), учет междуэлектронных соударений при $N_i = N$ уменьшает проводимость в 1,73 раза (см. [58] и ниже).

В случае $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$ междуэлектронные соударения в изотропной плазме несущественны по следующим причинам. При неучете междуэлектронных соударений функция распределения подчиняется уравнению (6,1), из которого ясно, что число электронов, покидающих из-за соударений данный интервал скоростей, пропорционально ν и отклонению функции распределения f от равновесной функции f_{00}, т. е. пропорционально νf_1. Далее, при условии $\omega^2 \gg \nu^2$, согласно (6,2), $f_1 \approx \frac{eE\frac{\partial f_{00}}{\partial v}}{m\omega^2}(i\omega - \nu)$ и, таким образом, значение f_1 в основном определяется ускорением, сообщаемым внешним полем, и только в следующем приближении — соударениями с ионами и молекулами (часть, зависящая от соударений, пропорциональна числу соударений ν, которое мало по сравнению с ω).

Особенность междуэлектронных соударений состоит в том, что в силу закона сохранения импульса эти соударения сами по себе не могут изменить среднего электронного тока, пропорционального среднему импульсу электронов. Поэтому, если бы соударений электронов с ионами и молекулами не было, то междуэлектронные соударения никакого вклада в сопротивление не внесли бы. Отсюда следует, что с точки зрения эффекта междуэлектронных соударений существенно не все отклонение функции распределения от равновесной, а играет роль лишь часть этого отклонения, обусловленная соударениями с ионами и молекулами. Но эта часть в силу сказанного порядка $\frac{\nu}{\omega} f_1 \ll f_1$. Часть интеграла соударений $S_{1,ee}$, связанная с междуэлектронными соударениями, которую нужно добавить к (6,1) (см. (4,17)), по порядку величины равна числу междуэлектронных соударений *) $\nu_{ee} \sim \nu_{ei}$, умноженному на существенное с точки зрения роли междуэлектронных соударений отклонение функции распределения от равновесной. Как указано, эта существенная здесь часть отклонения функции распределения от равновесной порядка $\frac{\nu}{\omega} f_1$ и, следовательно, $S_{1,ee} \sim \frac{\nu_{ee}\nu}{\omega} f_1$, в то время как соударения с ионами и молекулами приводят к появлению в (6,1) члена $\nu f_1 = (\nu_{em} + \nu_{ei}) f_1$. Этот результат, который можно подтвердить более строгим расчетом [57], свидетельствует о том, что даже при отсутствии молекул (когда $\nu = \nu_{ei}$) вклад междуэлектронных соударений в сопротивление примерно в $\frac{\nu_{ei}}{\omega}$ раз меньше вклада соударений электронов с ионами. Поэтому в ионосферном F-слое, где $\nu \sim \nu_{ei}$ (см. ниже) и обычно $\frac{\nu}{\omega} \sim 10^{-4}$, междуэлектронными соударениями можно полностью пренебречь. То же относится, конечно, к солнечной короне. В более низких областях земной ионосферы это заключение также справедливо, так как здесь, помимо всего прочего, число междуэлектронных соударений $\nu_{ee} \sim \nu_{ei} \ll \nu_{\text{эфф}} \sim \nu_{\text{эфф}, m}$.

---

*) Напомним, что $\nu_{ei} \equiv \nu_i$ — число соударений электрона с ионами; $\nu_{ee} \sim \nu_{ei}$, лишь если $N \sim N_i$.

Прежде чем перейти к использованию формул (6,11), (6,13), которые в силу сказанного обладают высокой точностью, заметим, что выражение для среднего эффективного сечения для соударения электрона с ионом $\overline{q(v)} = \frac{\pi e^4}{(\varkappa T)^2} \ln \left(0{,}37 \frac{\varkappa T}{e^2 N^{1/3}}\right)$ (см. (6,13)) имеет ясный физический смысл. Действительно, рассмотрим сначала соударение, при котором импульс электрона существенно меняется, т. е. электрон отклоняется на угол θ порядка единицы. Подобное соударение имеет место, если при приближении электрона на некоторое прицельное расстояние p его потенциальная энергия порядка кинетической, т. е. $\frac{e^2}{p} \sim \varkappa T$; отсюда как раз $\pi p^2 \sim \pi \frac{e^4}{(\varkappa T)^2}$. Появление же в выражении для сечения еще и логарифмического множителя связано с учетом не только самых близких, но и более дальних соударений, вкладом которых нельзя пренебречь в связи с медленностью спадания кулоновского поля. Поскольку логарифм велик, более того, большинство соударений являются далекими, и с логарифмической точностью можно считать, что все индивидуальные соударения происходят с небольшим изменением импульса. Эффективное соударение, происходящее с частотой $\nu_{\text{эфф}}$, является поэтому результатом большого числа отдельных (индивидуальных) соударений.

Число соударений в ионосфере. Сечение для соударений с ионами при температурах порядка нескольких сотен градусов значительно, примерно в миллион раз больше сечения для соударений электрона с молекулами. Это ясно видно из табл. 6,1, где приведены несколько округленные значения $\nu_{\text{эфф}, m}$ и $\nu_{\text{эфф}, i}$ согласно формулам (6,11) и (6,13). Цифры, помещенные в первом столбце, в случае $\nu_{\text{эфф}, m}$ дают значение N_m, а в случае $\nu_{\text{эфф}, i}$ — значение N_i.

Таблица 6.1

Значения $\nu_{\text{эфф}, m}$ и $\nu_{\text{эфф}, i}$

N_m или N_i	$T=250^\circ$ K		$T=300^\circ$ K		$T=600^\circ$ K	
	$\nu_{\text{эфф}, m}$	$\nu_{\text{эфф}, i}$	$\nu_{\text{эфф}, m}$	$\nu_{\text{эфф}, i}$	$\nu_{\text{эфф}, m}$	$\nu_{\text{эфф}, i}$
10^4	—	111	—	85	—	33
10^5	—	982	—	768	—	297
10^6	—	$8{,}9\cdot 10^3$	—	$6{,}9\cdot 10^3$	—	$2{,}7\cdot 10^3$
10^9	5,5	$5{,}6\cdot 10^6$	6	$4{,}4\cdot 10^6$	8,5	$2{,}2\cdot 10^6$
10^{12}	$5{,}5\cdot 10^3$	—	$6\cdot 10^3$	—	$8{,}5\cdot 10^3$	—
10^{14}	$5{,}5\cdot 10^5$	—	$6\cdot 10^5$	—	$8{,}5\cdot 10^5$	—
10^{15}	$5{,}5\cdot 10^6$	—	$6\cdot 10^6$	—	$8{,}5\cdot 10^6$	—

В D-слое $N_m \sim 10^{15} \div 10^{16}$ и $\nu_{\text{эфф}, m} \sim 10^7 \div 10^8$. В E-слое $N_m \sim 10^{12} \div 10^{13}$ и $\nu_{\text{эфф}, m} \sim 10^4 \div 10^5$. Далее, концентрация электронов в максимуме E-слоя $N_{\max} \leqslant 2\cdot 10^5$, и если $N_i \approx N$, то $\nu_{\text{эфф}, i} \sim 3\cdot 10^3$. Если $N_i \gg N$, как это иногда предполагалось для E-слоя и, быть может, имеет место в D-слое, то $\nu_{\text{эфф}, i}$ может быть больше $\nu_{\text{эфф}, m}$ (если $N_m \sim 10^{13}$, то $\nu_{\text{эфф}, i} \sim \nu_{\text{эфф}, m}$ при $N_i \sim 2\cdot 10^7$). Но, по современным данным, в E-слое $N \approx N_i$ и, таким образом, определяющими являются соударения с молекулами. В этой связи заметим, что при наличии соударений и с ионами и с молекулами, как ясно из (6,9), получим:

$$\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф}, m} + \nu_{\text{эфф}, i}, \tag{6,16}$$

где значения $\nu_{\text{эфф}, m}$ и $\nu_{\text{эфф}, i}$ прежние, т. е. определяются, например, формулами (6,10) и (6,13). Для соблюдения равенства (6,16) существенно, что мы здесь рассматриваем пока только высокочастотный случай (см. (6,7)).

При экспериментальном определении $\nu_{\text{эфф}}$ в результате измерений поглощения радиоволн в ионосфере определяется, конечно, как раз суммарное значение $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф}, m} + \nu_{\text{эфф}, i}$. В D- и E-слоях, как сказано, по всей вероятности, $\nu_{\text{эфф}, i} \ll \nu_{\text{эфф}, m}$. В отношении же F-слоя, или точнее, его нижней части ситуация сложнее и интереснее. Дело в том, что даже если считать, что в F-слое $N_i = N_+ = N$, как это следует из ряда соображений, то при $N \leqslant 2\cdot 10^6$ значение $\nu_{\text{эфф}, i} \leqslant 10^4$; в то же время на опыте в F-слое (подробнее см. [32, 43, 46, 47]) $\nu_{\text{эфф}} \sim 10^3 \div 10^4$. Таким образом, в F-слое $\nu_{\text{эфф}} \sim \nu_{\text{эфф}, i}$, но отсутствие тщательных и соответствующим образом обработанных измерений не дает возможности сказать, какова разность $\nu_{эфф} - \nu_{эфф,\,i}$, которую следует приравнять $\nu_{эфф,\,m}$ (сказанное относится к нижней части F-слоя, так как в более высоких областях $\nu_{эфф} - \nu_{эфф,\,i} \ll \nu_{эфф}$ и надежное определение $\nu_{эфф,\,m}$ из радиоизмерений невозможно). Вместе с тем определение $\nu_{эфф,\,m}$ очень важно, поскольку концентрация молекул в F-слое недостаточно хорошо известна и меняется во времени. Измерение $\nu_{эфф,\,m}$ дает возможность определить эту существенную с точки зрения изучения F-слоя величину (точнее см. ниже). Для того чтобы открывающиеся на этом пути возможности были более ясны, запишем выражение (6,16) в явном виде, подставив в него значения $\nu_{эфф,\,m}$ и $\nu_{эфф,\,i}$ из (6,10) и (6,14):

$$\nu_{эфф} = 8{,}3\cdot 10^5 \pi a^2 \sqrt{T} N_m + \frac{5{,}5N}{T^{3/2}} \ln\left(220\frac{T}{N^{1/3}}\right). \qquad (6{,}17)$$

Здесь электронная концентрация N может считаться известной, так как легко определяется радиометодом. Поэтому, если бы была также известна электронная температура $T \equiv T_e$, то, измеряя $\nu_{эфф}$, можно было бы сразу определить $\pi a^2 N_m$ (разумеется, если $\nu_{эфф,\,m} \ll \nu_{эфф,\,i}$, то из измерений $\nu_{эфф}$ представляется возможным лишь указать верхнюю границу величины $\pi a^2 N_m$). Фактически, однако, температура T заранее неизвестна, и ее нужно определять из того же соотношения (6,17) или каким-либо независимым методом (см. [57]).

Если сечение πa^2 от T не зависит, то определение температуры T с помощью формулы (6,17) возможно в результате измерения $\nu_{эфф}$ при разных T, что может быть в принципе осуществлено при измерениях $\nu_{эфф}$ в разное время суток и на разных высотах.

Таким образом, если пренебречь температурной зависимостью величины πa^2, то радиометоды, по крайней мере в принципе, дают возможность определить значение величины $\pi a^2 N_m$, где πa^2 — сечение молекулы, рассматриваемой как твердый шарик, и N_m — концентрация молекул (точнее, вместо $\pi a^2 N_m$ нужно пользоваться выражением $\sum\limits_k \pi a_k^2 N_{mk}$, где индекс k указывает на сорт атомов или молекул, присутствующих в слое).

В случае молекул O_2 и N_2 различные определения πa^2 приводят к значениям, отличающимся почти вдвое. Такой большой разброс связан, по-видимому, с тем, что сечение πa^2 зависит от скорости электронов (в силу эффекта Рамзауера), а эта скорость в разных случаях неодинакова. Значение πa^2 для воздуха при $T \sim 300°$, по данным [50], известно с неплохой точностью и равно $\pi a^2 = 4{,}4\cdot 10^{-16}$ *см*^{2} (это значение и принято в (6,11)). Однако, если речь идет об F-слое, то нужно иметь в виду, что там, помимо N_2 и остатков O_2, присутствуют атомы O и возможно N.

Экспериментальные данные относительно сечения πa^2 в O и N, насколько нам известно, отсутствуют. Поэтому до выяснения вопроса о величине сечения в O и N перейти от измеряемых значений $\pi a^2 N_m$ к N_m не представляется возможным.

Не исключено, что, несмотря на большие успехи, достигнутые в результате измерений на спутниках и ракетах, а также путем наблюдения рассеяния радиоволн, определение на основе указанных соображений величины $\pi a^2 N_m$ в F-слое *) в разное время суток и года представляет известный интерес.

В заключение обсуждения вопроса о числе соударений в F-слое заметим, что в литературе (см., например, [41], гл. VI, § 6) встречаются утверждения, что в F-слое $\nu_{\text{эфф}} \approx \nu_{\text{эфф},\,m}$, так как соударения с ионами не могут быть существенны в силу малости концентрации ионов. Как ясно из вышеизложенного, подобное мнение ошибочно, так как основано на неверном предположении о том, что сечения для рассеяния электрона ионом и нейтральной частицей примерно равны. На самом же деле при $T \sim 300^\circ$ ионы рассеивают примерно в миллион раз сильнее, чем молекулы.

Низкочастотный случай. До сих пор рассматривался только высокочастотный случай (6,7), который обычно и встречается при радиоисследованиях ионосферы и в радиоастрономии. Вместе с тем на практике приходится, конечно, сталкиваться и с частотами меньшими числа соударений и, в частности, с постоянным полем. Для ориентировки укажем, например, что в земной атмосфере на высоте около 70 *км* $N_m \sim 2\cdot 10^{15}$ и $\nu_{\text{эфф},\,m} \sim 10^7$, а на уровне моря $\nu_{\text{эфф},\,m} \sim 2\cdot 10^{11}$. Ясно таким образом, что нельзя ограничиться исследованием только области высоких частот.

Помимо высокочастотного случая (6,7), получение формул для ε и σ особенно просто также в противоположном — низкочастотном случае:

$$\omega^2 \ll \nu^{(0)2}_{\text{эфф}}. \tag{6,18}$$

Соответствующие формулы пригодны, разумеется, и для постоянного поля.

Введенное в (6,18) эффективное число соударений $\nu^{(0)}_{\text{эфф}}$ определяем соотношением

$$\sigma = \frac{e^2 N}{m\nu^{(0)}_{\text{эфф}}}. \tag{6,19}$$

---

*) Точнее, речь может идти не обо всем F-слое, а только о его нижней части и переходной области к E-слою. Дело в том, что, используя формулу (6,17) и данные рис. 30,1—30,3 для высот, больших 200 ÷ 250 *км*, приходим к уже указанному неравенству $\nu_{\text{эфф}} - \nu_{\text{эфф},\,i} = \nu_{\text{эфф},\,m} \ll \nu_{\text{эфф}}$. В подобных условиях сколько-нибудь надежное определение $\nu_{\text{эфф},\,m}$ обсуждаемым здесь способом, конечно, осуществить нельзя.

Значения $\nu^{(0)}_{\text{эфф}}$ и использованное ранее эффективное число соударений $\nu_{\text{эфф}}$ в высокочастотном случае, совпадающие в элементарной теории (см. § 3), фактически равны между собой, только если число соударений $\nu\,(v)$ не зависит от скорости v.

Из формул (6,3) и (6,19), а также учитывая возможность замены неравенства $\omega^2 \ll \nu^2\,(u)$ на условие (6,18), получаем:

$$\frac{1}{\nu^{(0)}_{\text{эфф}}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{u^4 e^{-u^2}\,du}{\nu\,(u)}\,. \tag{6,20}$$

Подставляя в (6,20) выражение (4,18), имеем:

$$\nu^{(0)}_{\text{эфф},\,m} = \frac{3\pi}{8}\,\pi a^2 \bar{v} N_m. \tag{6,21}$$

Отличие этой формулы от (6,10) состоит в замене множителя $\frac{4}{3} = 1{,}33$ на $\frac{3\pi}{8} = 1{,}18$. Незначительность этого отличия, усугубляемая неточным знанием радиуса a, делает практически достаточным использование в случае соударений электронов с молекулами элементарной теории.

В обычных стационарных или квазистационарных газоразрядных экспериментах из значений проводимости можно определить как раз величину $\nu^{(0)}_{\text{эфф}}$. Согласно данным [50], в воздухе длина свободного пробега $l = \frac{\bar{v}}{\nu^{(0)}_{\text{эфф}}} = 5{,}4\cdot 10^{-2}$ *см* при $v = 1{,}08\cdot 10^7$ *см/сек* и давлении 1 *мм* Hg. Отсюда $\pi a^2 = 4{,}4\cdot 10^{-16}$ и

$$\nu^{(0)}_{\text{эфф},\,m} = 1{,}5\cdot 10^{11}\,\frac{N_m}{2{,}7\cdot 10^{19}}\,\sqrt{\frac{T}{300}}\,. \tag{6,22}$$

Именно, используя значение (6,22), которое рассматривается как экспериментальное, и учитывая (6,10) и (6,21), выше было получено значение $\nu_{\text{эфф},\,m}$ для другого предельного случая (см. (6,11)).

При соударениях с ионами, подставляя в (6,20) выражение (4,19), имеем:

$$\nu^{(0)}_{\text{эфф},\,i} = \frac{3\pi^2}{32}\left(\frac{e^2}{\varkappa T}\right)^2 \bar{v} N_i \ln\left(0{,}54\,\frac{\gamma\varkappa T}{e^2 N_+^{1/3}}\right) = \frac{1{,}6 N_i}{T^{3/2}} \ln\left(324\gamma\,\frac{T}{N_+^{1/3}}\right), \tag{6,23}$$

так как в силу условия (4,25) появляющийся при расчете интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}\,dx}{\ln\,(1+\alpha^2 x^2)} \approx \frac{3}{\ln \gamma\alpha}\,,$$

где $\gamma \sim 1$. Если не обращать внимания на несущественное различие в выражении, стоящем под знаком логарифма, формула (6.23) отличается от (6,13) множителем $\frac{3\pi}{32}$, т. е. $\nu^{(0)}_{\text{эфф}, i}$ меньше $\nu_{\text{эфф}, i}$ примерно в три раза. Однако непосредственное сравнение формул (6,13) и (6,23) не вполне корректно, так как формула (6,13) справедлива и при учете междуэлектронных соударений, а формула (6,23) определяет лишь соударения электронов с ионами и при учете междуэлектронных соударений неверна. Дело в том, как уже было упомянуто, что в низкочастотном случае (6,18) междуэлектронными соударениями пренебрегать нельзя, и если $N_i \approx N$, эти соударения заметно изменяют проводимость. Таким образом, формула (6,23) справедлива, лишь если $N_i \gg N$ (в этом случае роль междуэлектронных соударений несущественна) *). Если же, например, $N_i = N_+ = N$, то, как следует из результатов работы [58]:

$$\nu^{(0)}_{\text{эфф}, i} = 1{,}73 \frac{3\pi^2 e^4}{32 (\varkappa T)^2} \bar{v} N \cdot \ln\left(0{,}54 \gamma \frac{\varkappa T}{e^2 N^{1/3}}\right). \tag{6,24}$$

Как ясно из (6,23) и (6,24), влияние междуэлектронных соударений в рассматриваемом случае приводит к появлению множителя 1,73. Сравнение формул (6,13) и (6,24) показывает, что при прочих равных условиях $\nu_{\text{эфф}, i}$ в $\frac{5{,}5}{2{,}8} \approx 2$ раза больше, чем $\nu^{(0)}_{\text{эфф}, i}$ — число соударений в низкочастотном случае.

Кроме того, необходимо подчеркнуть, что в области низких частот, как ясно из (6,20), соотношение (6,16) несправедливо, т. е. $\nu^{(0)}_{\text{эфф}} \neq \nu^{(0)}_{\text{эфф}, m} + \nu^{(0)}_{\text{эфф}, i}$. Поэтому при сравнении формул (6,13) и (6,24) мы считали, что имеется чисто электронно-ионная плазма без молекул, в силу чего $\nu^{(0)}_{\text{эфф}} = \nu^{(0)}_{\text{эфф}, i}$.

Общий случай (любые частоты). Диэлектрическую проницаемость и проводимость плазмы при произвольном соотношении между частотой и числом соударений удобно представить в таком виде [30, 54]:

$$\varepsilon = 1 - K_\varepsilon\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right) \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}})}; \quad \sigma = K_\sigma\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right) \frac{e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}})}, \tag{6,25}$$

где $\nu_{\text{эфф}}$ — введенное выше число соударений (6,9) для высокочастотного случая и K — некоторые функции отношения $\omega/\nu_{\text{эфф}}$.

По определению, при $\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}} \to \infty$ коэффициенты $K_\varepsilon = K_\sigma = 1$. При промежуточных же значениях $\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}$ множители $K_{\varepsilon,\sigma}$ определяют отклонение выражений для ε и σ от формул, получающихся в элементарной теории. Для соударений с молекулами функции $K_{\varepsilon,\,m}$ и $K_{\sigma,\,m}$ представлены на рис. 6,1 и в табл. 6,2.

---

*) Междуэлектронные соударения несущественны также в случае, когда определяющую роль играют многозарядные ионы ($Z \gg 1$).

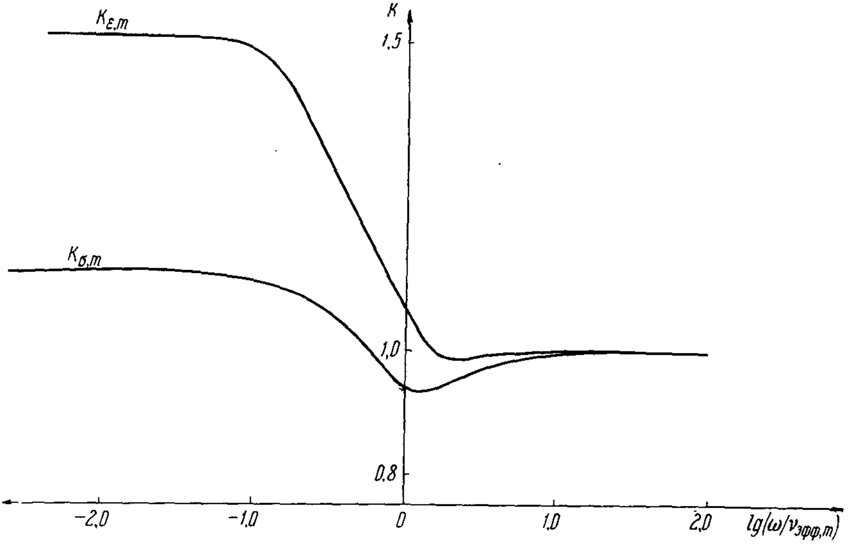


Рис. 6,1. Функции $K_{\varepsilon,\,m}\left(\frac{\omega}{\nu_{эфф,\,m}}\right)$ и $K_{\sigma,\,m}\left(\frac{\omega}{\nu_{эфф,\,m}}\right)$ (на оси абсцисс отложен десятичный логарифм отношения $\frac{\omega}{\nu_{эфф,\,m}}$).

Значение $K_{\sigma,\,m}(0) = 1{,}13$ находится, как это и должно быть, в согласии с формулами (6,10) и (6,21). Тот факт, что $K_{\varepsilon,\,m}(0) = 1{,}51 \neq K_{\sigma,\,m}(0)$ указывает на невозможность определить одно

Таблица 6.2

Соударения с молекулами

$\frac{\omega}{\nu_{эфф,\,m}}$	$K_{\varepsilon,\,m}$	$K_{\sigma,\,m}$	$\frac{\omega}{\nu_{эфф,\,m}}$	$K_{\varepsilon,\,m}$	$K_{\sigma,\,m}$
0	1,51	1,13	2,0	0,985	0,95
0,01	1,51	1,13	4,0	1,0	0,98
0,05	1,50	1,13	6,0	1,0	0,99
0,1	1,48	1,12	10,0	1,0	1,0
0,2	1,40	1,09	35,0	1,0	1,0
0,5	1,19	1,02	∞	1,0	1,0
1,0	1,07	0,94			

и то же значение $\nu^{(0)}_{\text{эфф}}$ из получающихся в элементарной теории выражений $\sigma = \frac{e^2N}{m\nu_{\text{эфф}}}$ и $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2N}{m\nu^2_{\text{эфф}}}$. Поэтому в низкочастотном случае (6,18) мы и пользовались только выражением (6,19) для

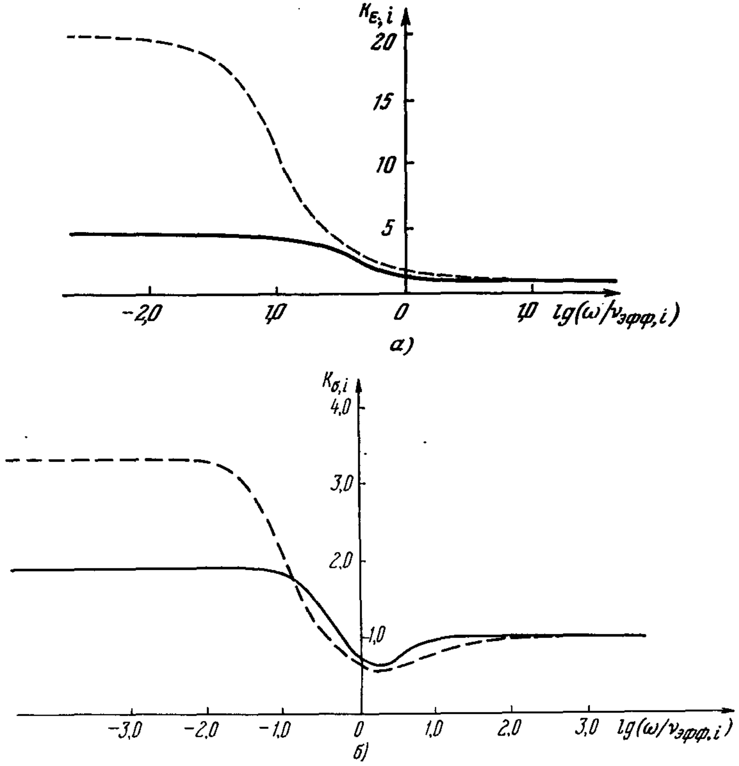


Рис. 6,2. Функции $K_{\varepsilon, i}\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}, i}}\right)$ и $K_{\sigma, i}\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}, i}}\right)$. Сплошные кривые — при учете междуэлектронных соударений, пунктирные линии — без учета междуэлектронных соударений.

проводимости σ. Функции $K_{\varepsilon, i}$ и $K_{\sigma, i}$ для соударений с ионами в случае $N_i = N_+ = N$ представлены на рис. 6,2, *а* и *б*, а также в табл. 6,3.

Для того чтобы выявить роль междуэлектронных соударений, данные приведены отдельно с их учетом и без него *). Для пре-

---

*) Приведенные в табл. 6,3 значения получены в приближении, использованном в первой из статей [58]; при этом учет междуэлектронных соударений приводит к появлению множителя 1,74. В то же время в формуле (6,24)

Таблица 6.3

Соударения с ионами

$\dfrac{\omega}{\nu_{\text{эфф}, i}}$	$K_{\varepsilon, i}$ с учетом междуэлектронных соударений	$K_{\varepsilon, i}$ без учета междуэлектронных соударений	$K_{\sigma, i}$ с учетом междуэлектронных соударений	$K_{\sigma, i}$ без учета междуэлектронных соударений
0	4,59	19,8	1,95	3,39
0,01	4,59	19,5	1,95	3,38
0,05	4,51	15,8	1,92	2,76
0,1	4,34	11,1	1,86	2,12
0,2	3,79	5,47	1,65	1,40
0,5	2,30	2,44	1,07	0,90
1,0	1,41	1,52	0,72	0,68
2,0	1,05	1,15	0,62	0,59
4,0	0,97	1,01	0,73	0,63
6,0	0,98	0,97	0,82	0,72
10,0	0,99	0,96	0,92	0,78
35,0	1,00	0,99	0,99	0,91
∞	1,0	1,0	1,0	1,0

дельных случаев эти результаты [30] находятся в соответствии с полученными в работах [57, 60]. При наличии одновременно соударений и с ионами и с молекулами, приведенные выражения могут, строго говоря, использоваться только в высокочастотном предельном случае.

Вычисления кинетических коэффициентов K_ε и K_σ в условиях, когда нужно одновременно учитывать соударения и с ионами и с молекулами, проведены в работе [59]. При сопоставлении этой работы [59] с (6,25) нужно иметь в виду, что функции $h_\sigma(\omega/\nu_{\text{эфф}})$ и $g_\sigma(\omega/\nu_{\text{эфф}})$ из [59] связаны с коэффициентами K_ε и K_σ в (6,25) соотношениями

$$K_\varepsilon\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)=\frac{\left[1+\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)^2\right]h_\sigma}{g_\sigma^2+\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)^2 h_\sigma^2},\quad K_\sigma\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)=\frac{\left[1+\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)^2\right]g_\sigma}{g_\sigma^2+\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)^2 h_\sigma^2}.$$

Здесь $\nu_{\text{эфф}}=\nu_{\text{эфф}, i}+\nu_{\text{эфф}, m}$, где $\nu_{\text{эфф}, i}$ и $\nu_{\text{эфф}, m}$ определены соответственно выражениями (6,14) и (6,9), (6,10).

Соударения ионов с ионами и молекулами. Остановимся теперь кратко на вычислении ε и σ в случае, когда основную роль играют

фигурирует множитель 1,73, получающийся при учете более высоких приближений [58]. Сказанным и объясняется небольшое различие между значениями σ согласно (6,19), (6,24) и согласно (6,25) и табл. 6,3 при $\dfrac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\to 0$. Отметим, что сходимость метода последовательных приближений, использованного в работе [58], доказана в [61].

соударения ионов с ионами и молекулами. Подобная ситуация (при отсутствии магнитного поля) может, конечно, иметь место только для плазмы, совсем не содержащей или содержащей весьма мало электронов.

Строгое рассмотрение соударений между тяжелыми частицами, вообще говоря, значительно сложнее, чем в случае соударений электронов с ионами или молекулами. Однако, если не обращать внимания на численный множитель порядка единицы, выражение для числа соударений иона с молекулами можно получить из формулы (6,10) для соударений электрона с молекулами, если в качестве величины a в (6,10) взять сумму радиусов обеих частиц и заменить среднюю скорость $\bar{v}$ на среднюю относительную скорость $\bar{v}_0 = \sqrt{\frac{8\varkappa T(M_i+M_m)}{\pi M_i M_m}}$, где M_i и M_m — соответственно массы иона и молекулы. Если $M_i = M_m$ и радиусы частиц одинаковы и равны a, то $\bar{v}_0 = \sqrt{2}\,\bar{v}_i$ и с точностью до множителя порядка единицы $\left(\bar{v}_i = \sqrt{\frac{8\varkappa T}{\pi M}}\right)$ получим

$$\nu^{(i)}_{\text{эфф},\,m} \approx \frac{16\sqrt{2}\pi a^2}{3}\bar{v}_i N_m. \tag{6,26}$$

Отсюда для ионов $O_2^{\pm}$ и $N_2^{\pm}$, принимая a такое же, как в (6,11), имеем:

$$\nu^{(i)}_{\text{эфф},\,m} \approx 4\cdot 10^9 \frac{N_m}{2,7\cdot 10^{19}}\sqrt{\frac{T}{300}}. \tag{6,27}$$

Кинетический расчет в случае упругих соударений твердых шариков с массой M_1 и радиусом a_1 с твердыми шариками с массой M_2, радиусом a_2 и концентрацией N_2 приводит к выражению [28]

$$\nu_{\text{эфф},\,12} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\pi(a_1+a_2)^2\left[\frac{\varkappa T M_2}{M_1(M_1+M_2)}\right]^{1/2} N_2. \tag{6,26а}$$

Если положить $a_1 = a_2 = a$, $M_1 = M_2 = M$ и $N_2 = N_m$, то частота (6,26) больше частоты (6,26а) на множитель, равный 2.

При соударениях ионов с ионами для $\nu^{(i)}_{\text{эфф},\,i}$ можно с той же оговоркой, как и выше, воспользоваться формулой (6,13) до перехода к численным коэффициентам (понимая под $\bar{v}$ среднюю скорость иона и умножив все выражение на множитель $\sqrt{2}$). Кроме того, нужно учесть, что к ионам одного знака относятся соображения, связанные с сохранением импульса, о которых упоминалось выше в связи с междуэлектронными соударениями. Поэтому в выражении для $\nu^{(i)}_{\text{эфф}, i}$ правильнее под N_i понимать концентрацию ионов одного знака, равную половине полной концентрации. В результате можно принять

$$\nu^{(i)}_{\text{эфф}, i} \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{e^4}{(\varkappa T)^2} \bar{v}_i N_+ \ln\left(0{,}37\gamma_i \frac{\varkappa T}{e^2 N_+^{1/3}}\right) = \\ = \frac{3{,}9N_+}{T^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{M}} \ln\left(220\gamma_i \frac{T}{N_+^{1/3}}\right), \quad (6{,}28)$$

где $\gamma_i \sim 1$ и множитель 0,37 под логарифмом сохранен лишь для удобства сопоставления с формулой (6,13).

При более строгом кинетическом подсчете [28] для соударений ионов с массой M_1 и зарядом e_1 с ионами с массой M_2, зарядом e_2 и концентрацией N_2 получаем:

$$\nu_{\text{эфф}, 12} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \frac{e_1^2 e_2^2 N_2}{(\varkappa T)^{3/2}} \left[\frac{M_2}{M_1 (M_1 + M_2)}\right]^{1/2} \ln\left(0{,}37\gamma_i \frac{\varkappa T}{e_1 e_2 N_2^{1/3}}\right), \quad (6{,}28\text{a})$$

где знаки e_1 и e_2 считаются различными и логарифмический член определен лишь по порядку величины; при $e_1^2 = e_2^2 = e^2$, $M_1 = M_2 = M$ и $N_2 = N_+$ выражение (6,28а) совпадает с (6,28).

Получающаяся таким образом формула для $\nu^{(i)}_{\text{эфф}, i}$, так же как формула (6,26) для $\nu^{(i)}_{\text{эфф}, m}$, непосредственно относится к высокочастотному случаю *). Однако, как мы видели, даже при соударениях заряженных частиц при переходе к низкой частоте в выражении для числа соударений появляется лишь множитель порядка единицы. Введение такого множителя в приближенные формулы типа (6,26) и (6,28) было бы превышением точности исходного расчета. При использовании выражений типа (6,26а) и (6,28а) нижеприводимые формулы (6,29) можно было бы уточнить путем введения множителей K_ε и K_σ, подобных использованным в (6,25). На основании результатов, имеющихся в [28], можно показать, однако, что и при столкновениях ионов с молекулами и при столкновениях ионов с ионами соответствующие коэффициенты K_ε и K_σ

---

*) В рамках элементарной теории независимо от частоты $\nu^{(i)}_{\text{эфф}} = \nu^{(i)}_{\text{эфф}, m} + \nu^{(i)}_{\text{эфф}, i} + \nu^{(i)}_{\text{эфф}, e}$, причем эффективное число соударений ионов с электронами $\nu^{(i)}_{\text{эфф}, e} = \frac{N}{N_i} \nu_{\text{эфф}, i}$. Здесь $\nu_{\text{эфф}, i}$ определяется выражением (6,13). Отсюда и из (6,28) ясно, что $\nu^{(i)}_{\text{эфф}, e} \ll \nu^{(i)}_{\text{эфф}, i}$ при условии $N \ll \sqrt{\frac{m}{M}} N_i$.

близки к единице. Поэтому элементарная теория ε и σ в применении к соударениям ионов с молекулами и ионами практически применима при всех ω (мы имеем, конечно, в виду точности, не превосходящие десятка процентов; на большее обычно не могут претендовать уже сами исходные выражения (6,26а) и (6,28а)).

В приближении, отвечающем элементарной теории, для плазмы с произвольным отношением концентраций электронов и ионов получим:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)} - \frac{4\pi e^2 N_i}{M(\omega^2 + (\nu_{\text{эфф}}^{(i)})^2)}, \\ \sigma &= \frac{e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)} + \frac{e^2 N_i \nu_{\text{эфф}}^{(i)}}{M(\omega^2 + (\nu_{\text{эфф}}^{(i)})^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{6,29}$$

Эти формулы часто можно упростить. Например, в ионосферном D-слое для некоторой области частот, по-видимому, $\omega^2 \gg (\nu_{\text{эфф}}^{(i)})^2$ и $\omega^2 \ll \nu_{\text{эфф}}^2$. При этом

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\nu_{\text{эфф}}^2} - \frac{4\pi e^2 N_i}{M\omega^2}, \qquad \sigma \approx \frac{e^2 N}{m\nu_{\text{эфф}}} + \frac{e^2 N_i \nu_{\text{эфф}}^{(i)}}{M\omega^2}. \tag{6,30}$$

Дисперсионные соотношения. Как ясно из всего изложенного, функции $\varepsilon(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ для плазмы в общем случае являются довольно сложными. Поэтому может оказаться полезным иметь в виду, что для произвольной среды ε и σ связаны между собой так называемыми дисперсионными соотношениями:

$$\varepsilon(\omega) - 1 = 8 \int_0^\infty \frac{\sigma(\omega')\,d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \qquad \frac{4\pi[\sigma(\omega) - \sigma(0)]}{\omega} = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2}\,d\omega', \tag{6,31}$$

где интегралы при $\omega = \omega'$ нужно понимать в смысле главного значения (подробнее см. [12], § 62 и [10], § 1).

§ 7. Распространение электромагнитных (поперечных) волн в однородной плазме

Показатели преломления и поглощения. При распространении электромагнитных волн (в отличие от квазистационарного случая) диэлектрическая проницаемость ε и проводимость σ играют, скорее, вспомогательную роль. Непосредственный же физический смысл имеют показатели преломления и поглощения, а также некоторые другие, связанные с ними величины.

Для введения всех этих величин рассмотрим распространение плоской электромагнитной (поперечной) волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \tag{7,1}$$

в неограниченной изотропной и однородной среде. Исходным при этом является уравнение (2,23) с $\varepsilon' = \mathrm{const}$. Для поперечной волны, когда $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, это уравнение имеет вид:

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'(\omega) \mathbf{E} = 0. \tag{7,2}$$

Подставляя сюда выражение (7,1), в качестве условия существования нетривиального решения получаем соотношение, которое часто называют дисперсионным уравнением:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'(\omega). \tag{7,3}$$

Связь между полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ получается из уравнений поля (2,16) и (2,25), которые для плоских волн (7,1) дают

$$\omega \varepsilon' \mathbf{E} = -c\,[\mathbf{k}\mathbf{H}], \qquad \omega \mathbf{H} = c\,[\mathbf{k}\mathbf{E}]. \tag{7,4}$$

Отсюда при скалярном умножении на $\mathbf{k}$ получаются условия поперечности $\mathbf{k}\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{k}\mathbf{H} = 0$ (первое из этих условий следует из (7,4) только при $\varepsilon' \neq 0$); если же $\varepsilon' = 0$, то возможно существование также продольных волн (см. §§ 2, 8). В общем случае при вещественной частоте ω волновой вектор $\mathbf{k}$ является комплексным и может быть представлен в виде $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 - i\mathbf{q}$, где $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{q}$ — вещественные векторы. Поле (7,1) принимает вид: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{q}\mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})}$, причем несовпадение направлений $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{q}$ отвечает несовпадению плоскостей равных фаз и амплитуд. Такие плоские волны называются неоднородными. В однородных плоских волнах плоскости равных фаз и амплитуд совпадают и вектор $\mathbf{k}$ удобно записать в виде:

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} (n - i\varkappa) \frac{\mathbf{k}}{k}. \tag{7,5}$$

Выбирая за ось z направление, параллельное вектору $\frac{\mathbf{k}}{k}$, запишем поле (7,1) в форме

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\mp \frac{\omega}{c} \varkappa z} e^{i\left(\omega t \mp \frac{\omega}{c} n z\right)}, \tag{7,6}$$

где в силу (7,3) и (7,5)

$$(n - i\varkappa)^2 = \varepsilon' \equiv \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{7,7}$$

Знаки ± в (7,6) отвечают волнам, распространяющимся в направлении положительной оси z (знак —) и в противоположном направлении (знак +). Величины n и $\varkappa$ — показатели преломления и поглощения. Длина волны в среде, как ясно из (7,6), равна (λ_0 — длина волны в вакууме)

$$\lambda=\frac{\lambda_0}{n}, \qquad \lambda_0=\frac{2\pi c}{\omega}, \tag{7,8}$$

а фазовая скорость равна

$$v_{\text{ф}}=\frac{c}{n}. \tag{7,9}$$

Формулы (7,8) и (7,9) являются, собственно, определением показателя преломления. Показатель поглощения $\varkappa$ имеет тот смысл, что на пути длиной в $\frac{\lambda_0}{2\pi\varkappa}$ амплитуда волны изменяется в e раз. Коэффициентом поглощения называют величину

$$\mu=\frac{2\omega}{c}\varkappa, \tag{7,10}$$

характеризующую изменение потока энергии излучения $\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]$. На пути $\frac{1}{\mu}$ поток изменяется в e раз.

Согласно (7,7)

$$\varepsilon=n^2-\varkappa^2, \qquad \frac{4\pi\sigma}{\omega}=2n\varkappa. \tag{7,11}$$

Отсюда, очевидно,

$$\varkappa=\frac{2\pi\sigma}{\omega n}, \quad n=\frac{2\pi\sigma}{\omega\varkappa}, \quad \mu=\frac{2\omega\varkappa}{c}=\frac{4\pi\sigma}{cn} \tag{7,11a}$$

и

$$n=\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}, \quad \varkappa=\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+\left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}. \tag{7,12}$$

Показатели n и $\varkappa$ по самому их определению являются вещественными. Поэтому нужно использовать не все решения уравнений (7,11) для n и $\varkappa$. Конкретно, чтобы обеспечить вещественность n и $\varkappa$, внутренний корень в (7,12) всегда считается положительным; например, если $\sigma=0$ и $\varepsilon<0$, то внутренний корень равен $\frac{|\varepsilon|}{2}=-\frac{\varepsilon}{2}$. Перед внешним корнем также всегда берется знак плюс, так как возможность другого знака уже учтена в (7,6).

Поскольку все приведенные выражения могут использоваться в применении к любой среде, заметим, что введение комплексной диэлектрической проницаемости ε' имеет смысл и тогда, когда трудно говорить о проводимости в обычном смысле этого слова (например, когда имеются диэлектрические потери и т. п.).

В этом случае мнимая часть ε' определяет поглощение энергии и в этом отношении эквивалентна члену $-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$. Очевидно, что, обозначая мнимую часть ε по-прежнему как $-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$, мы включаем в рассмотрение и явления, в которых нельзя говорить о проводимости; при этом σ просто играет роль некоторой эффективной проводимости.

В поглощающей среде $\sigma \geqslant 0$ и из (7,11) следует, что знаки n и $\varkappa$ одинаковы. По последней причине волна затухает в направлении ее распространения (другими словами, если волна «бежит» в направлении положительной оси z, то ее амплитуда при этом уменьшается; см. (7,6)). Подобная ситуация вполне естественна, но в самом общем случае не обязательна. Действительно, если групповая скорость *) направлена противоположно фазовой, то это как раз соответствует возрастанию амплитуды волны в направлении ее распространения, т. е. в направлении перемещения поверхности равных фаз. При введении ε и σ, т. е. при пренебрежении пространственной дисперсией в силу сказанного, направления фазовой и групповой скорости должны совпадать (другое доказательство этого факта см. [12], § 64 и [10], § 2).

При учете пространственной дисперсии групповая скорость может быть направлена противоположно фазовой. На этом вопросе мы еще остановимся в § 21 (см. также [10], § 3). Заметим, что неравновесная среда может, разумеется, быть не поглощающей, а усиливающей волны (в таких случаях иногда говорят об отрицательном поглощении). В определенных условиях усиливающую среду можно описывать параметрами ε и σ, но с $\sigma < 0$. На таких средах мы в этой книге останавливаться не будем.

О затухании волн при отсутствии поглощения. При $\sigma = 0$ поглощение электромагнитной энергии отсутствует, так как выделяемое в единице объема в единицу времени тепло равно $\mathbf{jE} = \sigma E^2$. Это не значит, однако, что волны не могут затухать. Действительно, если $\sigma = 0$ и $\varepsilon > 0$, то

$$n = \sqrt{\varepsilon}, \quad \varkappa = 0, \tag{7,13}$$

и решение (7,6) имеет вид чисто бегущих волн. Но если $\sigma = 0$ и $\varepsilon < 0$, то

$$n = 0, \quad \varkappa = \sqrt{-\varepsilon}, \tag{7,14}$$

---

*) Если поглощение является достаточно сильным, то понятие о групповой скорости ввести нельзя (см. § 21). С точки зрения существа обсуждаемого вопроса важно, однако, совпадают ли или не совпадают направления потока энергии и фазовой скорости. Говорить же о потоке энергии можно при любом поглощении.

и решение является затухающим (для волны, распространяющейся по положительной оси z, в (7,6) нужно брать знак минус).

Затухание волны в этом случае означает, что в среде бегущие волны распространяться не могут, поток энергии $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]$ в среднем по времени равен нулю, и волна от среды с $\varepsilon < 0$ полностью отражается (полное внутреннее отражение) *). При этом термин «показатель поглощения» не является уже удачным и удобным, вследствие чего часто вводится мнимый показатель преломления $\tilde{n} = -i\sqrt{-\varepsilon} = -i\varkappa$. Таким образом, при $\sigma = 0$ удобно ввести величину

$$\tilde{n}^2 = (n - i\varkappa)^2 = \varepsilon. \qquad (7,15)$$

Выражения для n и $\varkappa$ в предельных случаях. Если $\sigma \neq 0$, то нужно использовать формулу (7,12).

При соблюдении неравенства

$$|\varepsilon| \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega} \qquad (7,16)$$

получаем:

при $\varepsilon > 0$

$$\left.\begin{aligned} & n \approx \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)}}, \\ & \varkappa \approx \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon}} = \frac{2\pi e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m\omega(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)\sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)}}}, \quad \mu = \frac{2\omega\varkappa}{c} \approx \frac{4\pi\sigma}{c\sqrt{\varepsilon}} \end{aligned}\right\} \qquad (7,17)$$

и при $\varepsilon < 0$

$$\left.\begin{aligned} & n \approx \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{-\varepsilon}} = \frac{2\pi e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m\omega(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)\sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)} - 1}}, \\ & \varkappa \approx \sqrt{-\varepsilon} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)} - 1}. \end{aligned}\right\} \qquad (7,18)$$

Здесь в правых частях всех формул для ε и σ выбраны конкретные выражения, получающиеся в «элементарной теории» для плазмы простейшего типа (см. § 3).

В противоположном предельном случае, когда

$$|\varepsilon| \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \qquad (7,19)$$

---

*) Записывая вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S}$ или потери $\boldsymbol{jE}$ в обычном виде, подразумеваем, что берется лишь вещественная часть полей (см. также § 22).

получаем:

$$n \approx \varkappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}} = \sqrt{\frac{2\pi e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m\omega\left(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}}\right)}}, \tag{7,20}$$

$$\mu = \frac{2\omega\varkappa}{c} \approx \sqrt{\frac{8\pi\omega\sigma}{c^2}} = \frac{4\pi}{c}\sqrt{\sigma f} = 4\pi\sqrt{\frac{\sigma c}{\lambda_0}}. \tag{7,21}$$

В этом случае напряженность поля убывает в $e = 2{,}72$ раза на пути

$$\delta = \frac{c}{\omega\varkappa} \approx \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}}. \tag{7,22}$$

Величину δ часто называют толщиной или глубиной скин-слоя, так как в металлах, где обычно выполнено условие (7,19), именно длина $\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\sigma}}$ характеризует глубину проникновения переменного поля в толщу материала.

Выше в этом параграфе, если не считать правых частей в формулах (7,17), (7,18) и (7,20), значения ε и σ не конкретизировались. Это и понятно, поскольку сказанное относится к любой среде без заметной пространственной дисперсии. В случае изотропной плазмы в качестве ε и σ нужно использовать выражения, приведенные в §§ 3, 6.

О вещественных и комплексных значениях частоты. В заключение заметим, что мы везде до сих пор считали частоту ω вещественной; то же будет обычно приниматься и во всей книге. Нужно подчеркнуть, что речь при этом идет не о каком-то очевидном утверждении, а об определенной физической постановке вопроса. Действительно, мыслима и фактически встречается другая постановка задачи, когда задается вещественный волновой вектор $\boldsymbol{k}$, т. е. задается гармоническое в пространстве волновое поле (в применении к плазменным волнам см. об этом в § 8). Связь (7,3) между ω и $\boldsymbol{k}$ сохраняется, очевидно, вне зависимости от предположения о вещественности этих величин *). Отсюда (и, конечно, из самого существа задачи) ясно, что при вещественном $\boldsymbol{k}$ частота ω, вообще говоря, является комплексной (т. е. поле затухает или нарастает во времени).

Если $\boldsymbol{k}$ вещественно и частота равна $\omega' = \omega + i\gamma$, причем $\gamma \ll \omega$, то, учитывая связь $ck = (\omega + i\gamma)\,[n(\omega + i\gamma) - i\varkappa(\omega + i\gamma)]$, получаем:

$$\gamma = \frac{\omega\varkappa}{\frac{d(n\omega)}{d\omega}} = \frac{\omega\varkappa(\omega)\, v_{\text{гр}}}{c}, \tag{7,23}$$

---

*) При этом, конечно, предполагается, что функция $\varepsilon'(\omega)$ или в общем случае тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ существуют в соответствующих областях комплексных переменных ω и $\boldsymbol{k}$; подробнее см. [10], § 1.

где $v_{\text{гр}} = \dfrac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}}$ — групповая скорость волн (см. § 21). Связь (7,23) между показателем затухания волны во времени и определяющей пространственное затухание величиной $\frac{\omega\varkappa}{c}$ (см. (7,6)) вполне естественна, поскольку энергия в волне бежит именно с групповой скоростью $v_{\text{гр}}$ (использованное условие $\gamma \ll \omega$ обеспечивает малость затухания, позволяющую употреблять понятие о групповой скорости). Соотношение (7,23) получено выше, отправляясь от известного дисперсионного соотношения $c^2k^2 = (n - i\varkappa)^2\omega^2$ при вещественном ω. Совершенно ясно, однако, что тот же результат получается, если сначала была выяснена связь между k и ω для комплексного ω, но вещественного k; тогда из (7,23) по заданному γ мы находим $\varkappa$.

Если

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}, \quad \varkappa = \frac{2\pi\sigma}{\omega n} = \frac{\omega_0^2 \nu_{\text{эфф}}}{2\omega^3 n} = \frac{(1-n^2)\,\nu_{\text{эфф}}}{2\omega n}$$

$\left(\text{см. (7,17) при условии } \omega^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2,\ \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}\right)$, то $\dfrac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}} = cn$ и

$$\gamma = \frac{(1-n^2)\,\nu_{\text{эфф}}}{2} = \frac{2\pi e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m\omega^2} \equiv \frac{\omega_0^2 \nu_{\text{эфф}}}{2\omega^2}. \tag{7,24}$$

§ 8. Учет пространственной дисперсии. Плазменные и акустические волны

Плазменные (продольные) волны. Феноменологический учет пространственной дисперсии. Вопрос о существовании продольных (плазменных) электромагнитных волн в изотропной среде уже был затронут в § 2. При пренебрежении пространственной дисперсией частота этих волн ω_0 определяется из условия $\varepsilon'(\omega_0) = 0$ (см. (2.28)) или при достаточно малой проводимости из условия

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega_0^2} = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} = 5{,}64 \cdot 10^4 \sqrt{N}, \tag{8,1}$$

где уже имеется в виду конкретный случай плазмы и не учитывается движение ионов.

Магнитное поле в продольных волнах равно нулю, поэтому термин «электромагнитные волны» в этом случае носит несколько условный характер. Лучше говорить об электрических волнах или волнах заряда, но ниже будет употребляться еще более распространенный термин «плазменные волны»; впрочем, о волнах может с полным основанием идти речь лишь при учете пространственной дисперсии. Учесть пространственную дисперсию — это значит выйти за рамки локальной связи $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$, т. е. принять во внимание зависимость индукции $\boldsymbol{D}$ в данной точке от поля не только в той же точке, но и в ее окрестностях.

Иными словами, учет пространственной дисперсии связан с нахождением тензора $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$, связывающего полную индукцию $\boldsymbol{D}'$ с полем $\boldsymbol{E}$ (см. (2,4)).

Для произвольной изотропной среды структуру тензора $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ можно установить из общих соображений. Дело в том, что в изотропной среде можно указать только два тензора второго ранга *), а именно δ_{ij} ($\delta_{ij}=1$ при $i=j$; $\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$) и $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. На языке Фурье-компонент это соответствует тензорам δ_{ij} и $k_i k_j$ или $\frac{k_i k_j}{k^2}$, где $k^2=k_l k_l$. Поэтому общий вид тензора $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ в изотропной негиротропной среде таков:

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})=\varepsilon'_{\perp}(\omega, k^2)\left(\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{k^2}\right)+\varepsilon'_{\parallel}(\omega, k^2)\frac{k_i k_j}{k^2}. \qquad (8,2)$$

Смысл выделения члена пропорционального $\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{k^2}$, а не δ_{ij} будет ясен из дальнейшего. Функции $\varepsilon'_{\perp}(\omega, k^2)$ и $\varepsilon'_{\parallel}(\omega, k^2)$ в (8,2) в широких пределах независимы, и обе являются скалярными функциями ω и k, где $k^2=k_l k_l$.

Записывая один из аргументов функций $\varepsilon'_{\perp}$ и $\varepsilon'_{\parallel}$ в виде k^2, мы учитываем, что обычно эти функции действительно зависят только от k^2, но не от k. Вместе с тем здесь нет ограничения общности, поскольку $k=\sqrt{k^2}$. От отдельных компонент k_i функции $\varepsilon'_{\perp}$ и $\varepsilon'_{\parallel}$ не могут зависеть в силу предполагаемой изотропности среды.

При пренебрежении пространственной дисперсией для изотропной немагнитной среды $\varepsilon'_{ij}(\omega, k\to 0)=\varepsilon(\omega)\delta_{ij}$. Поэтому, очевидно,

$$\varepsilon'_{\perp}(\omega, 0)=\varepsilon'_{\parallel}(\omega, 0)=\varepsilon'(\omega). \qquad (8,3)$$

Часто приходится иметь дело со слабой пространственной дисперсией, когда достаточно положить

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon'_{\perp}(\omega, k^2)=\varepsilon'-\delta_1 k^2, \quad \varepsilon'_{\parallel}(\omega, k^2)=\varepsilon'-\delta_2 k^2,\\ &\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})=(\varepsilon'-\delta_1 k^2)\delta_{ij}+(\delta_1-\delta_2)k_i k_j,\end{aligned}\right\} \qquad (8,4)$$

---

*) Среда считается негиротропной и поэтому обладает центром симметрии. В то же время связь типа $D'_i=\gamma_{ijl}\frac{\partial E_j}{\partial x_l}$ не инвариантна относительно инверсии (замены x_i на $-x_i$). Иными словами, тензор вида $\gamma_{ijl}\frac{\partial}{\partial x_l}$ для изотропной негиротропной среды построить нельзя (подробнее см. [10, 12, 13]).

где δ_1 и δ_2 — некоторые коэффициенты, не зависящие от k^2, но могущие, как и ε', зависеть от ω.

При использовании не фурье-образов, а самих полей (т. е. оригиналов) связям (8,2), (8,4) отвечает материальное уравнение

$$\boldsymbol{D}'=\varepsilon'\boldsymbol{E}+\alpha_1\Delta\boldsymbol{E}+\alpha_2\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E},\tag{8,5}$$

где ε', α_1 и α_2 могут зависеть от ω, а векторы $\boldsymbol{D}'$ и $\boldsymbol{E}$ являются функциями $\boldsymbol{r}$ и ω. Легко видеть, что (8,5) приводит к (8,4), если $\alpha_1=\delta_1$ и $\alpha_2=\delta_2-\delta_1$. Поскольку $\Delta\boldsymbol{E}$ и $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ — единственные инвариантные выражения второго порядка, к (8,5) приходим из тех же соображений, что и к (8,2). Слабость пространственной дисперсии в (8,5) учтена в связи с ограничением вторыми производными от $\boldsymbol{E}$.

Полагая в первом уравнении поля (2,1) $\boldsymbol{j}_{\mathrm{ext}}=0$ и применяя к этому уравнению операцию rot, а затем учитывая третье из уравнений (2,1), имеем (см. также переход к уравнениям (2,21) — (2,22)):

$$\Delta\boldsymbol{E}-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{D}=0,\tag{8,6}$$

или для Фурье-компонент (используется также связь (2,4))

$$\left\{k^2\delta_{ij}-k_ik_j-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'_{ij}(\omega,\boldsymbol{k})\right\}E_j=0.\tag{8,7}$$

Условия существования нетривиального решения у этой системы однородных уравнений приводит к дисперсионному уравнению

$$\left|k^2\delta_{ij}-k_ik_j-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'_{ij}(\omega,\boldsymbol{k})\right|=0,\tag{8,8}$$

где через $|a_{ij}|$ обозначен определитель матрицы a_{ij}.

Анализ дисперсионного уравнения (8,8) составляет существенный раздел линейной электродинамики при учете пространственной дисперсии (разумеется, в случае замены $\varepsilon'_{ij}(\omega,\boldsymbol{k})$ на $\varepsilon'_{ij}(\omega)$ мы приходим к дисперсионному уравнению, широко используемому при неучете пространственной дисперсии, например, в классической кристаллооптике; см. [10]).

В изотропной среде, для поперечных волн с $\boldsymbol{kE}\equiv k_jE_j=0$ из (8,2) и (8,7) сразу же мы получаем дисперсионное уравнение

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'_{\perp}(\omega,k^2).\tag{8,9}$$

Для продольных волн (поле $\boldsymbol{E}$ направлено по $\boldsymbol{k}$), очевидно, $k_ik_jE_j=k^2E_i$. Поэтому из (8,7) получаем дисперсионное уравнение (при $\omega\neq 0$)

$$\varepsilon'_{\parallel}(\omega,k^2)=0.\tag{8,10}$$

Из (8,9) и (8,10) ясна причина выделения в (8,2) члена, пропорционального $k_i k_j$.

Остановимся теперь на простейшем случае однородных плоских волн $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} nz\right)}$, распространяющихся при пренебрежении поглощением в изотропной среде со слабой пространственной дисперсией. Тогда для поперечных волн, в силу (8,4) и (8,9), имеем:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon - \delta_1 k^2), \qquad \tilde{n}_\perp^2 \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{\omega^2}{c^2}\delta_1}. \qquad (8,11)$$

Для продольных волн (см. (8,4) и (8,10))

$$\varepsilon - \delta_2 k^2 = 0, \qquad \tilde{n}_\parallel^2 \equiv \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\frac{\omega^2}{c^2}\delta_2}. \qquad (8,12)$$

Неучет поглощения в (8,11) и (8,12) отражен в замене ε' на ε и предположении о вещественности δ_1 и δ_2. Величины ε, δ_1 и δ_2, вообще говоря, зависят от ω. Из (8,11) ясно, что в случае достаточной малости коэффициента δ_1 учет пространственной дисперсии для поперечных волн несуществен. Для продольных же волн, как следует из (8,12), этот учет существен при любых значениях δ_2. При $\delta_2 \to 0$ показатель преломления $\tilde{n}_\parallel^2$ может оставаться конечным лишь при $\varepsilon = 0$, что и является условием существования продольных волн при пренебрежении пространственной дисперсией (см. (8,1)) *).

В рамках феноменологического подхода определить коэффициенты δ_1 и δ_2, конечно, нельзя. Их можно тем не менее оценить, исходя из следующих соображений. Выражение (8,4) представляет собой первые члены разложения в ряд, причем параметром разложения является отношение некоторой характерной длины a к длине волны в среде $\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi c}{\omega n}$ (фактически роль λ играет ƛ $= \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega n}$). Длина волны здесь входит потому, что именно на этом расстоянии существенно изменяется поле волны. Если поле заметно изменяется также на длине a, т. е. при ƛ $\sim a$, неоднородность поля весьма существенна и индукция определяется, грубо говоря, в равной мере и полем и его пространственными производными. Таким образом, $|\delta_1 \Delta \mathbf{E}| \sim \delta_1 k^2 E = \frac{\delta_1 \omega^2 n^2}{c^2} E = \frac{\delta_1}{\lambda} E \sim E$ при $\lambda \sim a$. То же относится и к члену $\delta_2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}$. Отсюда

---

*) При учете пространственной дисперсии (как и без ее учета) общее условие для плазменных волн имеет вид: $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t} \equiv \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$, т. е. при отсутствии поглощения сводится к равенству $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$, причем $\boldsymbol{E} \neq 0$

$$\delta_1 \sim \delta_2 \sim a^2. \tag{8.13}$$

В плазме характерной длиной a является путь, проходимый электроном за период одного колебания, т. е. $a \sim \frac{v}{\omega_0}$, где v — средняя скорость электрона. Действительно, при $\lambda \gg a$ электрон колеблется в почти однородном поле; если же $\lambda \leqslant a$, то за период колебаний электрон побывает в областях с разным полем. По этой причине ясно, почему при учете теплового движения плотность тока в данной точке плазмы зависит не только от поля в той же точке, но и от его производных. Итак, в плазме

$$\delta_1 \sim \delta_2 \sim \frac{v^2}{\omega_0^2}. \tag{8,14}$$

В случае максвелловского распределения скоростей электронов

$$v \sim v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}} \quad \text{и} \quad \frac{v^2}{\omega_0^2} \sim \frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N} = D^2,$$

где D — дебаевский радиус (4,21). Таким образом, в максвелловской плазме

$$\delta_1 \sim \delta_2 \sim \frac{v_T^2}{\omega_0^2} \sim D^2 = \frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}. \tag{8.15}$$

Этот результат вполне понятен, поскольку именно дебаевский радиус играет в плазме роль радиуса междумолекулярного взаимодействия или радиуса экранировки (см. § 4).

Из выражений (8,12) и (8,15) ясно, что показатель преломления плазменной волны $\tilde{n}_3 \equiv n_\parallel$ имеет вид:

$$\tilde{n}_3^2 \equiv \tilde{n}_\parallel^2 = \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{\xi \frac{v_T^2}{c^2}}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}, \tag{8,16}$$

где ξ — некоторый численный множитель порядка единицы (обозначая показатель $n_\parallel$ для продольных волн в плазме через n_3, мы следуем обозначениям, используемым в гл. III и далее).

При переходе от (8,12) к (8,16) учтено, что в знаменателе частоту ω можно заменить на ω_0. Это связано с тем, что при заметной разнице между частотой волны ω и плазменной частотой ω_0 показатель n_3 становится очень большим и все использованное приближение незаконно. В самом деле, ограничиваясь в разложении (8,4) членами второго порядка по k, мы считаем по существу, что следующие члены малы, т. е. *)

$$\frac{a^2}{\lambda^2} \sim \frac{\delta_{1,2}}{\lambda^2} \ll 1. \tag{8,17}$$

Для плазмы, в силу (8,15), это условие (8,17) принимает вид $(kD)^2 \ll 1$, т. е. совпадает фактически с условием (2,11). Учитывая, что $\lambda = \frac{c}{\omega n} = \frac{\lambda_0}{n}$, неравенство (8,17) принимает вид

$$n^2 \ll \frac{c^2}{\omega^2 \delta_{1,2}} \sim \frac{\lambda_0^2}{a^2}. \tag{8,18}$$

В применении к плазменной волне (8,12) и (8,16) это означает, что

$$|\varepsilon| = \left| 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right| \ll 1, \tag{8,19}$$

т. е. частоты ω и ω_0 весьма близки.

В применении к поперечным волнам, условие (8,7) означает, что роль пространственной дисперсии незначительна (см. (8,11)). Действительно, для плазмы, учитывая (8,11), (8,15) и (8,17), можно записать:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{n}_\perp^2 \equiv \tilde{n}_{1,2}^2 = \varepsilon \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2} \delta_{1,2} \right) = \varepsilon + \Delta\varepsilon, \\ &\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad |\Delta\varepsilon| \sim \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} \frac{v_T^2}{\omega_0^2} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(\frac{v_T}{v_\text{ф}} \right)^2, \quad v_\text{ф} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

Даже при $T \sim 10^6$

$$v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}} \sim 3 \cdot 10^8 \textit{ см/сек} \quad \text{и} \quad |\Delta\varepsilon| \leqslant 10^{-4}.$$

Разложение (8.4) можно дополнить более высокими членами, получив, таким образом, и более общие результаты. Старшие члены существенны, очевидно, только при приближении длины волны λ к характерному расстоянию a. В подобных условиях (при $a/\lambda \sim 1$) ряды типа (8,4), вообще говоря, плохо сходятся и пользоваться ими неудобно (мы уже не говорим об области особых точек). Другими словами, если пространственную дисперсию

---

*) Члены третьего порядка в разложении типа (8.4) отсутствуют по соображениям симметрии; члены четвертого порядка меньше членов второго порядка как раз в отношении $\frac{a^2}{\lambda^2}$, ибо параметром разложения является величина $\frac{a}{\lambda}$.

нельзя считать слабой, то необходим более детальный анализ структуры функций $\varepsilon'_{\perp}(\omega, k^2)$ и $\varepsilon'_{\parallel}(\omega, k^2)$. Кроме того, важно отметить, что при $\lambda \to a$ (в нашем случае при $kD \to 1$ или, точнее, при нарушении условия $kD \ll 1$) нельзя пренебречь поглощением. В результате область применимости выражения (8,16) для показателя преломления плазменных волн действительно ограничена условием (8,19); при несоблюдении же этого условия незатухающие или, точнее, слабозатухающие плазменные волны вообще не существуют.

Поскольку при $kD \gtrsim 1$ плазменные волны сильно затухают, может возникнуть такой вопрос: в какой мере описание распространения волн в среде с помощью тензора $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ вообще допустимо при наличии сильного поглощения? По смыслу введения $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ никаких ограничений на величину поглощения не налагается. Предполагается лишь, что среда в среднем (в статистическом смысле) однородна и рассматриваются статистически средние значения полей. Вместе с тем очевидно, что при изменениях среднего поля на малых расстояниях (большие значения $\boldsymbol{k}$), в силу уменьшения длины волны или увеличения затухания, все бóльшую роль начинают играть флуктуации. В пределе, когда среднее поле сильно изменяется на расстояниях порядка расстояния между частицами (т. е. для плазмы на расстояниях порядка $\bar{r} \sim N^{-1/3}$), ограничиться рассмотрением среднего поля, вообще говоря, нельзя или недостаточно. С этим, собственно, и связана одна из причин, по которой нельзя ограничиться использованием только макроскопической электродинамики. Важно поэтому подчеркнуть, что в области сильного поглощения плазменных волн (в области $kD \gtrsim 1$) флуктуации в большинстве случаев еще малы. Дело в том, что в плазме обычно $D \gg N^{-1/3}$ (см. § 4) и условие $kN^{-1/3} \ll 1$ совместимо с условием $kD \gtrsim 1$.

Кинетическая теория. Вычисление коэффициента ξ в (8,16) и определение показателя поглощения требуют детализации картины и в случае неплотной плазмы достигаются в результате применения кинетического уравнения [3—8, 62—68]. При пренебрежении соударениями и отсутствии магнитного поля линеаризованное кинетическое уравнение (4,2) принимает вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla_r\varphi + \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\nabla_v f_0 = 0. \tag{8,21}$$

Здесь φ — отклонение функции распределения от невозмущенного распределения f_0; ниже будет для определенности предполагаться, что это невозмущенное распределение является равновесным, т. е. функция f_0 равна максвелловской функции f_{00}. При работе методом кинетического уравнения учет пространственной дисперсии производится автоматически. Формально это связано с тем, что в уравнении (8,21) имеется член $\boldsymbol{v}\nabla_r\varphi$, зависящий от пространственных производных.

Уравнение (8,21) нужно решать совместно с уравнениями поля, которые получаются в результате усреднения из уравнений электронной теории:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{h}=\frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{v}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{e}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{e}=4\pi\rho,\\ &\operatorname{rot}\boldsymbol{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{h}=0;\end{aligned}\right\} \tag{8,22}$$

$$\rho=\sum_n e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n)+\rho_i, \quad \rho\boldsymbol{v}=\sum_n e\boldsymbol{v}_n\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_n), \tag{8,23}$$

где $\boldsymbol{r}_n$ — радиус-вектор n-го электрона, e — заряд электрона и ρ_i — плотность зарядов ионов (считаем их неподвижными). При усреднении микрополей для плазмы получаем ($\overline{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{E}$, $\overline{\boldsymbol{h}}=\boldsymbol{H}$, черта означает усреднение) *):

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}'+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho',\\ &\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\\ &\boldsymbol{j}'=e\int\boldsymbol{v}\varphi\,d\boldsymbol{v}, \quad \rho'=e\int\varphi\,d\boldsymbol{v}.\end{aligned}\right\} \tag{8,24}$$

Здесь принято, что в равновесном состоянии с распределением f_{00} плотность тока $\boldsymbol{j}'$ и средняя плотность заряда ρ' равны нулю.

Из (8,24) обычным путем (см. § 2 и (8,6)) получаем волновое уравнение

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\boldsymbol{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c^2}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{j}'}{\partial t},\\ &\boldsymbol{j}'=e\int\boldsymbol{v}\varphi\,d\boldsymbol{v}.\end{aligned}\right\} \tag{8,25}$$

---

*) Мы пользуемся здесь языком макроскопической электродинамики, развиваемой без учета пространственной дисперсии. Если, однако, под усреднением микровеличин понимать их статистическое усреднение (так в данном случае и нужно поступать; ни о каком усреднении по «физически бесконечно малым» объемам и интервалам времени речи и не было), то уравнения (8,24) совпадают с (2,1). Нужно только понимать, что мы полагаем $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}$, т. е. пренебрегаем магнитными эффектами ввиду их малости в равновесной плазме, полагаем $\boldsymbol{j}_{\text{ext}}=0$ и $\rho_{\text{ext}}=0$ и используем обозначение $\frac{\partial\boldsymbol{D}'}{\partial t}=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+4\pi\boldsymbol{j}'$. Кроме того, введена величина $\rho'=\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\boldsymbol{E}$, которая таким образом фигурирует также в уравнении непрерывности $\operatorname{div}\boldsymbol{j}'+\frac{\partial\rho'}{\partial t}=0$.

Подставляя в (8,21) решение

$$\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \varphi_0(\boldsymbol{v})\, e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \tag{8,26}$$

получаем:

$$i(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\varphi = -\frac{e\boldsymbol{E}\nabla_v f_{00}}{m}. \tag{8,27}$$

Если не обращать пока внимания на возможность обращения величины $\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}$ в нуль, из (8,27) находим:

$$\varphi = \frac{ie\boldsymbol{E}\nabla_v f_{00}}{m(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})}. \tag{8,28}$$

Подставляя это выражение и решение вида $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$ в волновое уравнение (8,25), получаем:

$$\left.\begin{aligned} &k^2\boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0) - \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E}_0 = -i\frac{4\pi\omega}{c^2}\boldsymbol{j}_0', \\ &\boldsymbol{j}_0' = -\frac{ie^2}{m}\int \frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{E}_0\nabla_v f_{00})}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}}\, d\boldsymbol{v}. \end{aligned}\right\} \tag{8,29}$$

Как ясно из (2,4) и (2,7),

$$j_i'(\omega, \boldsymbol{k}) = i\frac{\omega}{4\pi}\{\varepsilon_{ij}'(\omega, \boldsymbol{k}) - \delta_{ij}\} E_j.$$

Поэтому, как и следовало ожидать, уравнения (8,29) вполне эквивалентны уравнениям (8,7), но с конкретизацией тензора $\varepsilon_{ij}'(\omega, \boldsymbol{k})$, отвечающей плазме без столкновений.

Условие существования нетривиального решения у системы однородных относительно поля $\boldsymbol{E}_0$ уравнений (8,29) приводит к дисперсионному уравнению, связывающему ω с $\boldsymbol{k}$ и являющимся частным случаем уравнения (8,8). Здесь, однако, нужно сделать существенную оговорку, а именно еще раз подчеркнуть ограниченность используемого подхода, при котором рассматриваются только монохроматические волны типа (8,26). Если среда ограничена в пространстве или процесс ограничен во времени, то приходится иметь дело с граничными и начальными условиями. При этом ограничиться использованием монохроматических волн уже нельзя. Дело в том, что вблизи границ или при малых временах после начала процесса уравнения задачи (в частности, уравнения (8,21) и (8,25)), вообще говоря, имеют и немонохроматические решения. Несколько подробнее этот момент в отношении задачи с начальными условиями будет разъяснен ниже. Сейчас же ограничимся монохроматическими решениями (8,26) и по-прежнему не будем обращать внимания на возможность обращения в нуль знаменателя $\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v}$ в (8,28) и (8,29). Интересно, что оба этих обстоятельства (рассмотрение монохроматических волн и пренебрежение возможностью обращения знаменателя $\omega - \mathbf{kv}$ в нуль) связаны между собой. Формально сказанное ясно уже из того, что при $\omega - \mathbf{kv} = 0$ монохроматические решения (8,26) — (8,29) не определены. Итак, будем считать, что $\omega - \mathbf{kv} \neq 0$ и, более того, что значение $\mathbf{j}'_0$ определяется областью, где $\omega \gg \mathbf{kv}$. Тогда из (8,29) получаем:

$$\mathbf{j}'_0 = \frac{ie^2}{m}\int \frac{\mathbf{v}\,(\mathbf{E}_0\nabla_v f_{00})}{\omega}\left(1+\frac{\mathbf{kv}}{\omega}+\frac{(\mathbf{kv})^2}{\omega^2}\right)d\mathbf{v} = \begin{cases} -\dfrac{ie^2N}{m\omega}\left(1+\dfrac{\varkappa T}{m}\dfrac{k^2}{\omega^2}\right)\mathbf{E}_0 \text{ (для поперечных волн)},\\ -\dfrac{ie^2N}{m\omega}\left(1+\dfrac{3\varkappa T}{m}\dfrac{k^2}{\omega^2}\right)\mathbf{E}_0 \text{ (для продольных волн)}.\end{cases} \qquad (8,30)$$

Здесь при проведении интегрирования функция f_{00} считается максвелловской функцией (см. (4,3) или (6,1)) и, следовательно,

$$\nabla_v f_{00} = \frac{\partial f_{00}}{\partial v}\frac{\mathbf{v}}{v} = -\frac{m\mathbf{v}}{\varkappa T} f_{00}.$$

В силу (8,29) и (8,30) дисперсионное уравнение для поперечных волн с $\mathbf{kE}_0 = 0$ принимает вид $k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\omega_0^2\left(1+\frac{\varkappa T}{m}\frac{k^2}{\omega^2}\right)$, откуда

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + c^2\left(1+\frac{\varkappa T}{mc^2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)k^2,\\ \tilde{n}^2_{1,2} &= \frac{c^2k^2}{\omega^2} = \frac{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}{1+\dfrac{\varkappa T}{mc^2}\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (8,31)$$

Полученный результат (8,31) находится в полном согласии со сказанным ранее (см. (8,11), (8,15) и (8,20); таким образом в (8,11) для плазмы $\delta_1 = \frac{\varkappa T}{m}\frac{\omega_0^2}{\omega^4}$). При этом нужно все же заметить, что поправочный член $\frac{\varkappa T}{mc^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ того же порядка, что и релятивистские эффекты. Поскольку последние во внимание не принимались, температурная поправка в (8,31) не может считаться точно установленной. Проводить соответствующий релятивистский расчет мы не будем, так как для поперечных волн при $T \leqslant 10^6$ температурная поправка ничтожно мала. Укажем лишь, что при $\frac{\varkappa T}{mc^2} \ll 1$ результат релятивистского расчета таков [69]:

$$\tilde{n}^2_{1,2} = \frac{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\left(1-\dfrac{5}{2}\dfrac{\varkappa T}{mc^2}\right)}{1+\dfrac{\varkappa T}{mc^2}\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}.$$

Для плазменной (продольной) волны из (8,29) и (8,30) получаем *):

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2\left(1+3\frac{\varkappa T}{m}\frac{k^2}{\omega^2}\right) \approx \omega_0^2 + 3\frac{\varkappa T}{m}k^2, \\ \tilde{n}_3^2 &= \frac{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}{3\dfrac{\varkappa T}{mc^2}\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}} \approx \frac{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}{3\dfrac{\varkappa T}{mc^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (8,32)$$

что совпадает с (8,16) при $\xi = 3$.

Заметим, что в (8,32) в отличие от (8,31) температурная поправка для не слишком длинных волн установлена корректно. Действительно, учет релятивистских эффектов, т. е. зависимости массы от скорости, приводит к тому, что ω_0^2 изменяется на величину порядка $\frac{\varkappa T}{mc^2}\omega_0^2$. В (8,31) это приводит к изменению самой температурной поправки, а в (8,32) только к появлению малого по сравнению с единицей добавочного члена типа $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{\varkappa T}{mc^2}$ в числителе. Все дело, другими словами, в том, что для продольных волн в дисперсионном уравнении нет большого члена c^2k^2 и содержащий температуру член не может, собственно, считаться поправкой, ибо он является единственным членом, зависящим от k^2.

Релятивистский расчет [67] приводит при $\frac{\varkappa T}{mc^2} \ll 1$ к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 + \frac{3\varkappa T}{m}k^2 - \frac{5\varkappa T}{2mc^2}\omega_0^2, \quad \tilde{n}_3^2 \approx \frac{1-\dfrac{\omega_0^2\left(1-\dfrac{5}{2}\dfrac{\varkappa T}{mc^2}\right)}{\omega^2}}{3\dfrac{\varkappa T}{mc^2}}, \qquad (8,33)$$

что подтверждает сказанное выше. Вместе с тем поправочный член $-\frac{5}{2}\frac{\varkappa T}{mc^2}\omega_0^2$, хотя и мал, но все же имеет значение в области относительно небольших значений $\tilde{n}_3^2$, т. е. достаточно длинных волн $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Например, согласно (8,32), $\tilde{n}_3^2 = 1$ при $\omega - \omega_0 \approx$

---

*) В продольной волне магнитное поле $H = 0$. Поэтому можно не переходить к волновому уравнению, используя вместо него уравнение поля $\operatorname{div} E = 4\pi e \int \varphi \, dv$, а также ввести электрический потенциал, положив $E = -\nabla\Phi$. Для тех вопросов, которые освещаются в тексте, учет этих возможностей не внес бы, однако, никакого упрощения.

$\approx \frac{3}{2}\frac{\varkappa T}{mc^2}\omega_0$, а согласно (8,33) при $\omega-\omega_0 \approx \frac{1}{4}\frac{\varkappa T}{mc^2}\omega_0$. Другими словами, формула (8,32) верна, если $|\omega-\omega_0| \gg \frac{\varkappa T}{mc^2}\omega_0$.

Для фазовой и групповой скоростей плазменных волн согласно (8,32) имеем:

$$\left.\begin{aligned} v_{\text{ф}} &= \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_3} = \frac{\sqrt{3\frac{\varkappa T}{m}}}{\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}\,; \\ v_{\text{гр}} &= \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{3\varkappa T}{m\omega_0}k \approx \sqrt{\frac{3\varkappa T}{m}}\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = v_{\text{ф}}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (8,34)$$

Здесь положено $\tilde{n}_3^2 = n^2$ (т. е. $\tilde{n}_3^2 > 0$) и учтено, что температурный член в дисперсионном уравнении считается поправочным, и с принятой точностью можно положить *)

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{2}\left(\frac{\varkappa T}{m}\right)\frac{k^2}{\omega_0} = \omega_0(1+3D^2k^2); \quad D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}}. \qquad (8,35)$$

Условие малости температурной поправки к частоте плазменных волн можно, очевидно, записать в следующем виде:

$$kD = \frac{D}{\bar{\lambda}} \ll 1. \qquad (8,36)$$

Это условие, совпадающее с (2,11), эквивалентно использованным ранее условиям (8,18) и (8,19) и позволяет везде при принятой точности переходить от (8,32) к (8,35) и заменять $1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ на $2\left(1-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$. Для простоты мы не будем тем не менее проводить такую замену во всех выражениях.

Черенковское излучение в плазме. Поглощение плазменных волн. Вопрос о плазменных волнах, длина волны которых мала и не удовлетворяет условию (8,36), тесно связан с возможностью соблюдения равенства

$$\omega = k\boldsymbol{v}. \qquad (8,37)$$

Если это условие может выполняться, то выражение (8,28) и последующие, строго говоря, не имеют смысла. Это и понятно, так как от (8,27) к (8,28) можно перейти только, если $\omega - k\boldsymbol{v} \neq 0$.

---

*) Заметим, что в литературе часто используется для дебаевского радиуса выражение $D=\sqrt{\frac{\varkappa T_e}{4\pi e^2 N}}$, получающееся для плазмы с электронной температурой T_e, значительно превосходящей температуру ионов (см. (4,22)).

Для поперечной волны в плазме условие (8,37) выполняться не может, так как $\frac{\omega}{k} = v_ф = \frac{c}{n_{1,2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} > c$, а $v < c$. Правда, при использовании нерелятивистского максвелловского распределения условие $v < c$ автоматически не учтено. Тем не менее справедливость сделанного утверждения не только может быть подтверждена релятивистским расчетом, но и совершенно ясна из физических соображений. По существу эти соображения уже приведены, но в дополнение заметим, что условие (8,37) тождественно с условием черенковского излучения, которое обычно записывают в форме

$$v \cos \theta = \frac{c}{n}, \tag{8,38}$$

где $\frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = v_ф$ — фазовая скорость и θ — угол между скоростью частицы $\boldsymbol{v}$ и волновым вектором $\boldsymbol{k}$. Черенковское излучение (эффект Вавилова — Черенкова) возможно, очевидно, только, если $v > \frac{c}{n}$. Для поперечных волн в плазме $n_{1,2} < 1$ и черенковское излучение невозможно.

В случае плазменных волн условие (8,37) — (8,38) может соблюдаться, что соответствует черенковскому излучению частицей (электроном) плазменных волн. Но если частица может излучать волну данного типа, то она может также ее поглощать — получать энергию от такой же распространяющейся волны. Таким образом, плазменные волны должны затухать даже при отсутствии соударений *).

Величина затухания определяется в первую очередь относительным числом частиц плазмы, для которых может выполняться условие (8,37) — (8,38). Для плазменной волны с фазовой скоростью $v_ф = \frac{\omega}{k}$, распространяющейся в максвелловской плазме, число поглощающих частиц велико при $v_ф \sim v_m$ и экспо-

---

*) При отсутствии соударений затухание плазменных волн приводит к повышению энергии электронов, для которых соблюдается условие $\omega = k v$. В дальнейшем, если учесть, что фактически соударения всегда происходят, полученная от волны энергия переходит в энергию хаотического теплового движения. Не связанное с соударениями затухание плазменных волн впервые было выявлено в работе [63]; физическая интерпретация этого затухания была дана в работе [68], где не было, однако, явных ссылок на черенковское излучение. Мы не можем указать на статью, в которой такие ссылки появились впервые, но уже давно о черенковском механизме поглощения речь идет как о хорошо известном эффекте (см., например, [70], [71]).

ненциально мало при

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_3} = \frac{\sqrt{\frac{3\varkappa T}{m}}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \gg v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}. \qquad (8{,}39)$$

Это условие (8,39) совпадает, очевидно, с условиями (8,19) и (8,36). Если исходная функция распределения f_0 не является максвелловской, а отличается от нее отсутствием очень быстрых частиц, то затухание вообще будет равно нулю. Впрочем, ясно, что достаточно малое затухание и затухание, равное нулю, физически эквивалентны. Таким образом, при условии (8,19), (8,36), или (8,39) приведенные выражения для частоты или показателя преломления плазменных волн справедливы и пренебрежение областью черенковского излучения, где $\omega = \boldsymbol{kv}$, вполне законно.

Сделанные выше вычисления недостаточны, однако, для нахождения коэффициента затухания, а также анализа распространения коротких плазменных волн, для которых $\lambda = \frac{1}{k} \leqslant D$. Для ответа на эти вопросы нужно решить совместно кинетическое уравнение (8.21) и волновое уравнение (8,25), например, в такой постановке задачи [63]: в начальный момент времени $t = 0$ задано некоторое отклонение функции распределения $\varphi(\theta, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ от равновесного распределения f_{00} и нужно найти функцию $\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ в последующие моменты времени. При этом без потери общности достаточно ограничиться рассмотрением функций

$$\varphi(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \varphi(t, \boldsymbol{v})\, e^{-i\boldsymbol{kr}}, \qquad (8.40)$$

где волновой вектор $\boldsymbol{k}$ считается вещественным и заданным. В моменты времени t, близкие к начальному моменту $t = 0$, функция $\varphi(t, \boldsymbol{v})$ не является, вообще говоря, гармонической и, следовательно, нельзя говорить о существовании какой-то связи между ω и $\boldsymbol{k}$. С течением времени начальное возмущение $\varphi(0, \boldsymbol{v})$ «рассасывается» и трансформируется, так что при достаточно больших t электрическое поле $\boldsymbol{E}$ зависит от времени по закону $e^{i\omega' t} = e^{i\omega t} e^{-\gamma t}$ ($\omega' = \omega + i\gamma$ — комплексная частота). Допустим, что начальное возмущение $\varphi(0, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ является гладкой функцией, а невозмущенное распределение скоростей f_0 также не имеет никаких особенностей (это, конечно, выполняется, если f_0 есть максвелловское распределение f_{00}). В подобных условиях решение $\boldsymbol{E} \sim e^{i\omega' t} = e^{i\omega t} e^{-\gamma t}$ устанавливается за время порядка $\frac{1}{\omega_0} \sim \frac{D}{v_T}$ (D — дебаевский радиус (4,21)).

Итак, связь между ω' и k устанавливается, так сказать, асимптотически, но практически достаточно быстро *).

Для того чтобы указать способ вычисления показателя затухания γ, не решая здесь задачи с начальными условиями (см. выше), поступим следующим образом. Если не обращать внимания на возможность появления полюса $\omega = kv$, для продольных колебаний из (8,29) получаем дисперсионное уравнение:

$$\frac{4\pi e^2}{m\omega}\int \frac{u\,\dfrac{df_{00}(u)}{du}}{\omega - ku}\,du = -1, \tag{8,41}$$

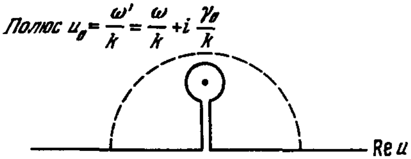

Полюс $u_0 = \frac{\omega'}{k} = \frac{\omega}{k} + i\,\frac{\gamma_0}{k}$
Re u

Рис. 8,1. Контур интегрирования C в дисперсионном уравнении (8.42).

где u — проекция скорости электронов на k, по перпендикулярным проекциям произведено интегрирование и $f_{00}(u) = N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mu^2}{2\varkappa T}}$. В условиях, когда возможно равенство $\omega = ku$, соотношение (8,41) просто не имеет точного смысла, поскольку результат зависит от способа вычисления интеграла. Это и означает, что в общем случае никакой связи между ω и k не существует. Такая связь существует, однако, если речь идет о волнах, слабее всего затухающих во времени при данном вещественном k. Решение сформулированной выше задачи с начальными условиями [63] показывает, что эта связь определяется уравнением (8,41) при интегрировании в плоскости комплексной переменной u и по контуру C, указанному на рис. 8,1, т. е. при условии обхода сверху полюса $u_0 = \frac{\omega'}{k} = \frac{\omega}{k} + i\,\frac{\gamma_0}{k}$:

$$-\frac{4\pi e^2}{m\omega'}\int \frac{u\,\dfrac{\partial f_{00}(u)}{du}\,du}{\omega' - ku} = \frac{\omega_0^2}{\omega'}\left(\frac{\varkappa T}{mN}\right)\int \frac{u^2 f_{00}\,du}{\omega' - ku} = 1. \tag{8,42}$$

Здесь ω заменено на $\omega' = \omega + i\gamma$, поскольку при вещественном k уравнение имеет решение лишь для комплексной частоты**).

---

*) О поведении поля при малых временах $t \lesssim \frac{2\pi}{\omega_0}$ см. [6].

**) К тому же условию (8,42) можно прийти [64], подыскивая такое начальное возмущение $\varphi(0, v)\, e^{-ikr}$, при котором для всех значений t поле равно $E = E_0 e^{i\omega' t}$.

Приводимая ниже формула (8,44) для γ_0 может быть получена не только с помощью кинетического уравнения, приводящего к выражению (8,42), но и другими способами. Здесь можно указать как на классические вычисления, связанные с рассмотрением движения частиц в электрическом поле

При малых k полюс u_0 лежит далеко в том смысле, что $\operatorname{Re} u_0 \gg \gg \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\Big)$, где функция $f_{00}(u)$ очень мала. Поэтому при пренебрежении затуханием можно ограничиться интегрированием вдоль вещественной оси u, что и приводит к формуле (8,32). Для вычисления затухания (в предположении, что k мало́ и $\gamma \ll \ll \omega_0$) интеграл в (8,42) сводится к интегралу по вещественной оси плюс интеграл по полуокружности, указанной пунктиром на рис. 8,1. Последний интеграл равен умножаемому на πi вычету относительно полюса. В результате из (8.42) имеем:

$$\frac{4\pi e^2 N}{m\omega'^2} + \frac{4\pi e^2 N}{m\omega'^2} \cdot 3 \frac{\varkappa T}{m} \frac{k^2}{\omega'^2} - i \frac{4\pi^2 e^2}{mk^2} \frac{df_{00}\left(\frac{\omega'}{k}\right)}{du} = 1. \tag{8,43}$$

Решая это уравнение приближенно, при учете условия $\gamma \ll \omega$, для ω получаем старое выражение (8,32), а для коэффициента $\gamma = \gamma_0$ находим:

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \omega_0 e^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{(kD)^3} e^{-\frac{1}{4(kD)^2}} = \\ &\quad = \sqrt{\frac{\pi}{8}} e^{-\frac{3}{2}} \frac{\omega_0^4}{k^3} \left(\frac{m}{\varkappa T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\omega_0^2}{2\varkappa T k^2}} \approx \frac{0{,}05\omega_0}{(kD)^3} 10^{-\frac{0{,}11}{(kD)^2}}, \\ &kD = \frac{D}{\lambda} \ll 1, \quad D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}}, \quad \gamma_0 \ll \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} \end{aligned}\right\} \tag{8,44}$$

Из (8,32) и (8,33) ясно, что при $(\omega - \omega_0) \leqslant \frac{\varkappa T}{mc^2} \omega_0$ показатель преломления $\tilde{n}_3$ невелик и может быть меньше единицы. При $n_3 < 1$ черенковское поглощение плазменных волн, конечно, невозможно (см. выше аналогичное замечание для поперечных волн). Таким образом, при $n_3 < 1$ затухание $\gamma_0 = 0$. В формуле (8,44) это обстоятельство не отражено в связи с нерелятивистским характером расчета. В релятивистской теории плазменных волн [67] при $n_3 < 1$ автоматически $\gamma_0 = 0$. Вместе с тем из (8,32), (8,33) и (8,44) легко видеть (см. также табл. 8,1), что при $\frac{\varkappa T}{mc^2} \leqslant 10^{-3}$ формула (8,44) перестает быть справедливой при

плазменной волны [5, 72], так и на использование закона Кирхгофа или метода коэффициентов Эйнштейна [70, 73—77]. Точнее, метод коэффициентов Эйнштейна нужен только в неравновесном случае (например, при наличии пучка). Если же плазма является равновесной (разумеется, в отсутствие рассматриваемой слабой плазменной волны), то достаточно применить закон Кирхгофа, связывающий излучательную способность среды с коэффициентом поглощения. Вычислению при этом подлежит излучательная способность — в данном случае речь идет о плазменном черенковском излучении (подробнее см. § 12).

таких ничтожных значениях γ_0, которые не представляют абсолютно никакого интереса.

При распространении волн встречается обычно постановка задачи, отличная от приведенной в том отношении, что волна считается затухающей не во времени, а в пространстве. Систему уравнений (8,21) и (8,25) нужно тогда решать, задавая функцию распределения φ в каждый момент t на некоторой плоскости $z = 0$ и отыскивая решение при любых z (ось z — направление нормали к волне). В условиях, когда существует связь между ω и k, перейти от временно́го затухания к пространственному можно и непосредственно. Дело в том, что при нахождении связи ω с k обе эти величины с самого начала можно, вообще говоря, считать комплексными. Поэтому выражения (8,35) и (8,41) справедливы и при комплексном k.

До сих пор мы имели

$$p \equiv i\omega - \gamma = i\left[\omega_0 + \frac{3}{2}\left(\frac{\varkappa T}{m}\right)\frac{k^2}{\omega_0}\right] - \gamma_0, \qquad (8,45)$$

где γ_0 определяется формулой (8,44).

Теперь положим $p = i\omega$ (ω вещественное) и $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 - i\boldsymbol{q}$, где $q \ll k_0 \approx k$ (соблюдение этого неравенства обеспечено, если $\gamma \ll \omega_0$). Тогда в качестве связи $k_0 \approx k$ с ω получаем опять выражение (8,35) и

$$q \equiv \frac{\omega}{c}\varkappa_3 = \frac{\gamma_0(k)}{\dfrac{3\varkappa T}{m}\,\dfrac{k}{\omega_0}} = \frac{\gamma_0(k)}{v_{\text{гр}}} \qquad (8,46)$$

(см. (8,34) и (8,44)); формула (8,46) по своему типу совпадает, как этого и следовало ожидать, с формулой (7,23) для поперечных волн. Подчеркнем, что в силу условия $q \ll k_0$ формула (8,46) справедлива лишь в области слабого поглощения.

Выше соударения в плазме не учитывались. При наличии соударений в области длинных плазменных волн, но при соблюдении условия $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$ зависимость ω от k определяется по-прежнему формулой (8,35) и появляется затухание с коэффициентом

$$\gamma_{\text{соуд}} = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{2}, \quad \gamma_{\text{соуд}} \ll \omega_0, \qquad (8,47)$$

где $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений (6,9).

К формуле (8,47) приходим из основного условия

$$\varepsilon'(\omega') = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega'(\omega' - i\nu_{\text{эфф}})} = 0, \qquad (8,48)$$

определяющего комплексную плазменную частоту $\omega' = \omega + i\gamma$ (учитывается также, что при $\gamma \ll \omega$ в хорошем приближении $\omega = \omega_0$).

При учете затухания (8,44) и затухания от соударений (8,47) имеем:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_{\text{соуд}}, \quad \frac{\omega}{c}\varkappa_3 = \frac{\gamma}{v_{\text{гр}}}, \quad \gamma \ll \omega, \quad \omega \gg \nu_{\text{эфф}}. \tag{8,49}$$

Как уже подчеркивалось в § 4, обычно в плазме выполнены условия (4,23), (4,25), (4,25а):

$$(D^3N)^{2/3} \sim \frac{\varkappa T}{e^2N^{1/3}} \gg 1. \tag{8,50}$$

Смысл этого условия — возможность считать плазму слабо неидеальным газом. Важно отметить, что для полностью ионизированной плазмы при условии (8,50) затухание плазменных волн с $\omega \sim \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2N}{m}}$ в результате соударений автоматически оказывается малым. В самом деле, согласно (6,14)

$$\nu_{\text{эфф}, i} \sim \frac{e^2N}{\sqrt{m}\,(\varkappa T)^{3/2}} \sim \left(\frac{e^2N^{1/3}}{\varkappa T}\right)^{3/2} \omega_0 \ll \omega_0. \tag{8,51}$$

Специфическое плазменное затухание мало́, лишь пока длина волны значительно превосходит дебаевский радиус. Если же $kD \sim 1$, то $\gamma_0 \sim \omega_0$. При $kD \gg 1$ уже $\gamma \gg \omega$. В подобных условиях никакие слабозатухающие плазменные волны существовать не могут. Экспоненциальный характер выражения (8,44) приводит к тому, что обрыв спектра слабозатухающих плазменных волн происходит весьма резко, примерно при $kD \approx 0{,}1$, т. е. при

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{k_{\text{кр}}} \approx 63D \approx 300\sqrt{\frac{T\,(^\circ\text{K})}{N}}\ \textit{см}. \tag{8.52}$$

В нижних частях солнечной короны, т. е. при $T \sim 10^6$ и $N \sim 10^8$, $\lambda_{\text{кр}} \sim 30$ *см*. При том же значении $N \sim 10^8$ частота $\omega_0 \sim 5 \cdot 10^8$ и поле в волне с длиной $\lambda_{\text{кр}}$ затухает за время $1/\gamma_0$ порядка секунды (см. табл. 8,1). Всего вдвое более короткая волна будет затухать уже за время $1/\gamma_0 \sim 10^{-7}$ *сек*.

При $kD < 0{,}1 \div 0{,}05$ затухание γ_0 весьма мало́ (оно может, однако, заметно возрасти, если невозмущенная функция распределения отличается от максвелловской в том отношении, что имеется большее число электронов со скоростями $v \gg v_T$). В этой области поэтому более существенно обычно затухание, обусловленное соударениями. Например, в нижних частях короны $\gamma_{\text{соуд}} = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{2} \sim 3 \div 10$ и больше затухания γ_0 уже при $kD = 0{,}1$. В земной ионосфере ниже максимума F-слоя $\nu_{\text{эфф}} \gtrsim 10^3$ и $\gamma_{\text{соуд}} \gtrsim 10^3 \sim 10^{-5}\,\omega_0$ (при $N \sim 10^6$ имеем $\omega_0 \sim 5 \cdot 10^7$). Таким образом, в ионосфере $\gamma_{\text{соуд}} \gg \gamma_0$ при $kD \leqslant 0{,}1$ и $\lambda_{\text{кр}} \sim 10$ *см*; вместе с тем уже при $\gamma \approx \gamma_{\text{соуд}} \sim 10^3$ и $v_{\text{гр}} \ll \sqrt{\frac{3\varkappa T}{m}}$ (см. (8,34)) плазменная волна заметно затухает на пути $\frac{v_{\text{гр}}}{\gamma} \ll 10^4$ *см.*

Таблица 8.1

Значения ω и γ_0 для плазменных волн

kD	$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\frac{\gamma_0}{\omega_0}$	Примечание
0,01	1,0003	10^{-1100}	
0,1	1,03	$0{,}5 \cdot 10^{-9}$	
0,15	1,07	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	
0,2	1,12	0,01	
0,3	1,27	$\sim 0{,}16$	Формулы (8,35) и (8,44) в этих случаях, строго говоря, неприменимы и могут использоваться только для оценок
1	4	$\sim 0{,}04$	

О поглощении и квазилинейной теории плазменных волн. Поглощение (затухание) плазменных волн, не связанное со столкновениями, как мы видели, представляет собой процесс, обратный черенковскому излучению плазменных волн. Величина коэффициента поглощения определяется теми частицами плазмы, которые удовлетворяют черенковскому условию (8,37), (8,38).

На первый взгляд может на этом основании показаться, что γ_0 будет просто пропорционально числу частиц с проекцией u скорости $\boldsymbol{v}$ на волновой вектор $\boldsymbol{k}$, равной ω/k, т. е. определяться значением функции распределения $f_0\left(u = \frac{\omega}{k}\right)$. Фактически, однако, существенно значение производной $\left(\frac{df_0}{du}\right)_{u=\frac{\omega}{k}}$. Формально это ясно из выражений (8,41), (8,42) или даже из исходных выражений (8,28), (8,29) и самого кинетического уравнения (8,21), где поле волны $\boldsymbol{E}$ фигурирует в комбинации $\boldsymbol{E}\nabla_{\boldsymbol{v}} f_0$. На классическом языке такой результат ясен, если вспомнить, что действие поля сводится просто к ускорению частиц; ускорение же частиц скажется на функции их распределения по скоростям только при $\nabla_{\boldsymbol{v}} f_0 \neq 0$, ибо в противном случае на смену частицам, покидающим данный интервал скоростей, приходит столько же частиц из соседнего интервала скоростей. На квантовом языке (см. [73—78]) появление производной функции распределения связано с необходимостью учитывать помимо процессов поглощения также процессы индуцированного испускания.

Кванты плазменных волн — плазмоны, имеющие энергию $\hbar\omega$ и импульс $\hbar k = \frac{\hbar\omega}{c} n_3 \frac{k}{k}$, поглощаются частицами, причем проекция импульса частицы на k становится равной $mu_2 = mu_1 + \frac{\hbar\omega}{c} n_3$, где u_1 — значение u до поглощения. Вместе с тем частицы с $u = u_2$ могут переходить «вниз» (в область с меньшей энергией) с испусканием плазмона. Соответствующий процесс индуцированного испускания под влиянием плазмона с импульсом $\frac{\hbar\omega}{c} n_3$ приводит к появлению двух таких плазмонов и переходу частицы в состояние с $u = u_1 = u_2 - \frac{\hbar\omega}{c} n_3$. Истинное (результирующее) поглощение, которое нас и интересует, определяется разностью числа частиц $N_1 - N_2 = N_1\left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right)$, где N_1 и N_2 — числа частиц с импульсами u_1 и u_2 (здесь учтено, что вероятности поглощения и индуцированного испускания равны; см. § 12). Очевидно,

$$1 - \frac{N_2}{N_1} = 1 - \frac{f_0(u_2)}{f_0(u_1)} = -\frac{df_0}{du} \cdot \frac{u_2 - u_1}{f_0} = -\frac{df_0/du}{f_0} \frac{\hbar\omega}{mc} n_3,$$

где значения f_0 и $\frac{df_0}{du}$ нужно брать при $u = \omega/k \approx u_2 \approx u_1$, что отвечает классическому черенковскому условию (8,37), (8,38); здесь, конечно, учтено, что в интересующей нас классической области импульс плазмона $\frac{\hbar\omega}{c} n_3 = \hbar k$ очень мал по сравнению с импульсом частицы $mu = m\frac{\omega}{k}$ (в самом деле, $\frac{\hbar\omega}{c} n_3 = \hbar\omega \frac{k}{\omega} \ll mu = m\frac{\omega}{k}$, поскольку условие классичности имеет вид $\hbar\omega \ll mu^2$ или даже $\hbar\omega \ll \varkappa T \ll mu^2$; см. (8,39)).

Итак, коэффициент затухания плазменных волн

$$\gamma \backsim -\left(\frac{df_0}{du}\right)_{u=\omega/k}. \tag{8,53}$$

Более детальный расчет $\left(\text{для этой цели достаточно использовать уравнение (8,43) с заменой функции } f_{00} \text{ на } f_0, \text{ где } \int f_0\,du = N\right)$ приводит к выражению

$$\gamma = -\frac{2\pi^2 e^2 \omega_0}{mk^2}\left(\frac{df_0}{du}\right)_{u=\omega/k} = -\frac{\pi\omega_0^3}{2k^2 N}\left(\frac{df_0}{du}\right)_{u=\omega/k}. \tag{8,54}$$

Для максвелловской плазмы, когда $f_0 = f_{00} = N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mu^2}{2\varkappa T}}$, из (8,54) сразу же получаем, разумеется, формулу (8,44). Таким образом, экспоненциальный множитель в (8,44) отражает экспоненциальный характер функции f_{00} или, другими словами, быстрое падение затухания γ_0 с ростом k является непосредственным следствием быстрого падения функции $\left(\frac{df_{00}}{dk}\right)$ в «хвосте» максвелловского распределения (рассматривается случай слабого поглощения, когда $\frac{\omega}{k} \gg \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$; область скоростей $u \gg \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$ и называют «хвостом»). Но в этом «хвосте» мало частиц и поэтому сравнительно слабые поля или другие воздействия могут сильно менять бесстолкновительное поглощение в плазме. Достаточно, чтобы в области $u = \omega/k$ производная $\frac{df_0}{du}$ стала равной нулю, и поглощение вообще исчезает. При $\frac{df_0}{du} > 0$ поглощение сменяется усилением волн — плазма в этом случае неустойчива (легко видеть, что при наличии в плазме пучка частиц со скоростью $v_0 \gg \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$ всегда имеется область неустойчивости [3—9, 68, 73—77]).

При распространении плазменной волны и неучете соударений поглощение волны будет с течением времени уменьшаться, поскольку поглощение энергии (поглощение плазмонов) приводит к сглаживанию функции распределения $f_0(u)$ в области вблизи точки $u = \omega/k$, т. е. к образованию «плато». Тот факт, что происходит именно сглаживание функции распределения, особенно наглядно следует из квантовой картины: истинное поглощение плазмонов приводит к уравниванию «населенностей» (концентраций) частиц в рассмотренных выше состояниях 1 и 2. Но если $N_1 = N_2$, это значит, что $\frac{df_0}{du} = 0$ и образовалось «плато». Соударения, напротив, приближают функцию f_0 к максвелловскому распределению f_{00}. Поскольку речь, таким образом, идет о влиянии поля волны на саму «невозмущенную» функцию распределения $f_0(u)$, мы имеем дело с нелинейным процессом (в линейном приближении функция f_0, фигурирующая в кинетическом уравнении (8,21), не зависит от поля волны $\boldsymbol{E}$).

В общей постановке нелинейная теория плазмы и, в частности, волн в плазме весьма сложна. Как в этой связи, так и по самому характеру часто встречающихся задач, большое значение приобрело квазилинейное приближение или, как иногда говорят, квазилинейная теория плазменных волн [79—86].

В квазилинейной теории учитывается влияние плазменных волн на функцию распределения частиц в резонансной области — вблизи точки $u = \omega/k$. Принимается также во внимание затухание (или нарастание) энергии самих плазменных волн за счет обмена энергией с частицами. В следующем приближении можно также принять во внимание взаимодействие волн между собой (это, очевидно, еще один нелинейный процесс). Существенно, однако, что в исходном приближении распространяющиеся в плазме волны считаются такими же, какими они были бы для максвелловской плазмы. Иными словами, дисперсионное уравнение для волн при неучете затухания выбирается таким же, как это делалось выше в рамках линейной теории (для плазменных волн, например, принимается связь (8,35)). Разумеется, поступать так можно, вообще говоря, только в том случае, когда плотность энергии в волнах W (т. е. энергия, сосредоточенная в коллективных степенях свободы плазмы) гораздо меньше кинетической энергии теплового движения $\frac{3}{2}\varkappa TN$. Таким образом, в квазилинейной теории имеется малый параметр

$$\frac{W}{\varkappa TN} \ll 1. \tag{8,55}$$

Кроме того, как всегда для газовой плазмы, считается соблюдающимся неравенство (8,50).

Методами квазилинейной теории анализируется, в частности, состояние плазмы, которое принято называть слабо турбулентным. В этом состоянии в плазме распространяется довольно много различных волн, причем плотность энергии всех этих волн W значительно превышает плотность энергии волн W_T, отвечающую термодинамическому равновесию, но еще удовлетворяет условию (8,55). Взаимодействие волн между собой при этом может обычно считаться слабым и учитываться по теории возмущений. Такая картина аналогична имеющей место в твердом теле, где различные волны (фононы), вообще говоря, сравнительно слабо взаимодействуют между собой за счет ангармонических членов в выражении для энергии колебаний кристаллической решетки.

Квазилинейной теории плазмы и ее применениям, особенно к слабо турбулентной плазме, посвящено большое число работ (см., например, [79—86]). Здесь мы кратко остановимся только на одном вопросе, а именно границах применимости линейной теории плазменных волн, изложенной в предшествующей части настоящего параграфа. Для этой цели нужно раньше всего оценить время $\tau_{\text{плато}} = \frac{1}{\nu_{\text{плато}}}$ для образования «плато» на функции распределения под действием волны, но при отсутствии соударений.

На образование плато идет энергия, которую теряет волна. Эта энергия передается не всем частицам, а только «резонансным частицам», т. е. движущимся вдоль волнового вектора волны $\boldsymbol{k}$

со скоростью u, близкой к фазовой скорости волны $v_ф = \frac{\omega}{k}$. Весьма важно оценить интервал Δu значений u, в котором лежат частицы, получающие энергию от волны; вместе с тем $\Delta u \sim \Delta u_{плато}$ есть ширина «плато», образующегося на функции распределения под влиянием поля волны. Ниже будет показано, что

$$\Delta u_{плато} \sim \sqrt{\frac{e\Phi_0}{m}} = \sqrt{\frac{eE_0}{mk}}, \tag{8,56}$$

где

$$E = -\frac{d\Phi}{dz} \quad \text{и} \quad \Phi = \Phi_0 \cos(\omega t - kz) = \frac{E_0}{k} \cos(\omega t - kz)$$

— потенциал поля волны.

Время, необходимое для того, чтобы волна существенно исказила функцию распределения электронов в резонансной области, порядка отношения длины волны λ к скорости $\Delta u_{плато}$ (это ясно, в частности из того факта, что $\tau_{плато} \sim \tau_{осц}$; см. (8,61)). Таким образом,

$$\tau_{плато} \sim \frac{\lambda}{\Delta u_{плато}} \sim \frac{1}{k\Delta u_{плато}} \sim \frac{1}{k\sqrt{e\Phi_0/m}},$$

$$\nu_{плато} = \frac{1}{\tau_{плато}} \sim k\sqrt{e\Phi_0/m} = \sqrt{\frac{eE_0}{m}k}.$$

Заметим, что это время $\tau_{плато}$ значительно меньше времени $\tau'_{плато}$, которое можно оценить из энергетических соображений. Именно, определим время $\tau'_{плато}$ как отношение кинетической энергии частиц (электронов) в резонансной области к энергии волны, поглощаемой в единицу времени. Как мы увидим в § 22, средняя по времени (средняя «по высокой частоте») плотность энергии в плазменных волнах $\overline{W}_E = \frac{E_0^2}{8\pi}$, где поле волны имеет вид $E_0 \sin(\omega t - kz)$. В результате бесстолкновительного затухания амплитуда E_0 меняется по закону $E_0 = E_{00}e^{-\gamma t}$, где γ определяется выражением (8,54). Таким образом, плотность энергии в плазменных волнах меняется по закону

$$\frac{d\overline{W}_E}{dt} = -2\gamma\overline{W}_E,$$

а частицы плазмы в единицу времени получают энергию

$$2\gamma\overline{W}_E = \frac{\gamma E_0^2}{4\pi}.$$

Плотность кинетической энергии, заключенной в резонансных частицах, порядка

$$K_{рез} \sim \frac{mv_ф^2}{2} f_0(v_ф)\,\Delta u_{плато} \sim \frac{m\omega_0^2}{k^2} f_0\left(\frac{\omega_0}{k}\right)\sqrt{\frac{eE_0}{mk}}.$$

Отсюда

$$\tau'_{\text{плато}} = \frac{1}{\nu'_{\text{плато}}} \sim \frac{K_{\text{рез}}}{2\gamma\overline{W}_E} \sim \frac{\varkappa Tmk}{e^2E_0^2}\sqrt{\frac{eE_0}{mk}} = \frac{\varkappa T}{mk\left(\frac{e\Phi_0}{m}\right)^{3/2}}. \qquad (8{,}57)$$

Очевидно,

$$\tau_{\text{плато}} \sim \tau'_{\text{плато}}\frac{e\Phi_0}{\varkappa T} \ll \tau'_{\text{плато}},$$

ибо, как мы увидим ниже, в обсуждаемых условиях всегда $e\Phi_0 \ll \ll \varkappa T$ (см. (8,63)).

Условие того, что «плато» не образуется в силу восстановления максвелловского распределения за счет соударений, имеет, очевидно, вид

$$\nu \gg \nu_{\text{плато}} = \frac{1}{\tau_{\text{плато}}} = k\sqrt{\frac{e\Phi_0}{m}} = \sqrt{\frac{eE_0}{m}k}. \qquad (8{,}58)$$

Здесь от оценки (8,57) мы перешли к равенству, определив тем самым некоторое выражение для $\nu_{\text{плато}}$, используемое в дальнейшем. Что касается фигурирующей в (8,58) частоты соударений ν, то по смыслу это есть число соударений, приводящих к поступлению частиц в область «плато» $\left(u \approx \frac{\omega_0}{k},\ \Delta u \sim \sqrt{\frac{e\Phi_0}{m}}\right)$ из соседних областей пространства скоростей. Для оценки ν определим раньше всего эффективное число соударений $\nu'_{\text{эфф},\,i}$ между электронами и ионами, аналогичное эффективному числу (6,13) и (6,14). Вся разница здесь заключается в том, что сейчас речь идет об электронах, скорость которых $v \sim v_{\text{ф}} \approx \frac{\omega_0}{k}$. В то же время в (6,13) рассматривались электроны со скоростями $v \sim v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$. Отсюда легко видеть, что в обсуждаемом случае (столкновения электронов со скоростью $v \sim v_{\text{ф}}$ с ионами)

$$\nu'_{\text{эфф},\,i} = \frac{12\pi e^4N}{m^2v_{\text{ф}}^3}\ln\frac{mv_{\text{ф}}^2}{e^2N^{1/3}}, \qquad (8{,}59)$$

где численный коэффициент выбран для определенности и установления соответствия с работой [81].

Эффективное число соударений (8,59) определяет число столкновений, при которых проекция скорости электрона изменяется на величину порядка самого значения u (см. § 6). Между тем при кулоновских соударениях в результате одного столкновения скорость u изменяется в основном лишь незначительно, т. е. соударений с малым изменением u значительно больше, чем согласно (8,59). В то же время число соударений ν в (8,58) есть как раз число соударений, при которых скорость $u \approx v_{\text{ф}} \approx \frac{\omega_0}{k}$ изменяется лишь на $\Delta u_{\text{плато}} \ll u$. Отсюда приходим к значению

$$\nu = \nu'_{\text{эфф},\, i}\left(\frac{v_T}{\Delta u_{\text{плато}}}\right)^2 = \nu'_{\text{эфф},\, i}\left(\frac{\varkappa T}{e\Phi_0}\right), \tag{8,59a}$$

где замена знака $\sim$ на знак равенства связана, конечно, лишь с желанием использовать в дальнейшем (см. (8,60)) вполне определенное выражение для ν.

Появление множителя $(v_T/\Delta u_{\text{плато}})$ в (8,59а) можно понять из более детального рассмотрения кулоновских столкновений $\Big($отметим лишь, что сечение для рассеяния на угол $\theta \sim \frac{\Delta u_{\text{плато}}}{v_T} \ll 1$ больше полного транспортного сечения для рассеяния как раз на множитель порядка $\frac{1}{\theta^2} \sim \left(\frac{v_T}{\Delta u_{\text{плато}}}\right)\Big)^2$.

В силу (8,59) и (8,59а) неравенство (8,58) можно записать в виде

$$\frac{eE_0}{k} \sim eE_0\lambda \ll \left(\frac{12\pi e^4 N\varkappa T}{km^{3/2}v_{\text{ф}}^3}\right)^{2/3} \ll \left(\frac{12\pi e^4 N}{k(\varkappa T)^{1/2}}\right)^{2/3}, \tag{8,58a}$$

поскольку $v_{\text{ф}} \approx \frac{\omega_0}{k} \gg \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$ (на логарифмический множитель в (8,59) для простоты не обращаем внимания).

Как следует из более детальных расчетов [79], затухание плазменных волн

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + A\frac{\nu_{\text{плато}}}{\nu}} = \frac{\gamma_0}{1 + A\frac{k\,(e\Phi_0)^{3/2}}{\sqrt{m}\,\nu'_{\text{эфф},\, i}\,\varkappa T}}, \tag{8,60}$$

где A — безразмерный множитель, который в [79] считается близким к единице, а γ_0 — затухание (8,44) для максвелловского распределения скоростей. Из (8,57), (8,57а), (8,59) и (8,59а) ясно, что $\frac{\nu_{\text{плато}}}{\nu} \sim \frac{\nu'_{\text{плато}}}{\nu'_{\text{эфф},\, i}}$, в связи с чем критерий (8,58а) и выражение (8,60) остаются неизменными при замене $\nu_{\text{плато}}$ на $\nu'_{\text{плато}}$ и ν на $\nu'_{\text{эфф},\, i}$.

В предельном случае $\nu_{\text{плато}} \gg \nu$ согласно [81]

$$\gamma = \frac{3\,(7\pi + 6)}{4\sqrt{\pi}}\,\nu'_{\text{эфф},\, i}\left(\frac{v_{\text{ф}}}{v_T}\right)^4 e^{-\frac{v_{\text{ф}}^2}{2v_T^2}}\left(\frac{e\Phi_0}{\varkappa T}\right)^{-3/2}. \tag{8,60a}$$

Формула (8,60) согласуется с этим результатом при

$$A=\frac{\sqrt{2}\pi}{3(7\pi+6)}\approx 0{,}053.$$

Итак, линейной теорией слабого бесстолкновительного затухания (такое затухание часто называют затуханием Ландау) можно пользоваться при условии (8,58а), налагающим ограничения на силу поля волны E_0. Здесь, однако, имеется в виду стационарная картина. Если же плазменная волна начала распространяться в максвелловской плазме в какой-то момент времени $t=0$, то в течение некоторого времени t выражение (8,44) для γ_0 также справедливо и при полном пренебрежении соударениями. По смыслу сделанных выше оценок время t должно удовлетворять неравенству

$$t\ll\tau_{\text{плато}}\sim\frac{\lambda}{\Delta u_{\text{плато}}}\sim\frac{1}{k\sqrt{\frac{e\Phi_0}{m}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{eE_0}{m}k}}.\tag{8,58б}$$

Выше не была обоснована оценка (8,56) для $\Delta u_{\text{плато}}$. Для получения этой оценки, а также нахождения критерия линейности задачи в случае сильного поглощения плазменных волн, поступим следующим образом. Перейдем в систему отсчета («систему волны»), в которой волна покоится. В этой системе, движущейся относительно лабораторной системы с фазовой скоростью волны $v_ф=\frac{\omega}{k}$, поле волны при пренебрежении затуханием является статическим и имеет вид $E=-\frac{d\Phi}{dz}=E_0\sin kz$ (на постоянную часть фазы волны не обращаем внимания), $\Phi=\frac{E_0\cos kz}{k}=\Phi_0\cos kz$. Частица со скоростью $u=\frac{\omega}{k}+\Delta u$ в лабораторной системе отсчета — в «системе волны» движется со скоростью Δu и имеет кинетическую энергию $\frac{m(\Delta u)^2}{2}$. Такая частица будет «захвачена» волной только, если $\frac{m(\Delta u)^2}{2}\leqslant e\Phi_0$; действительно, при этом условии частица не достигнет вершины Φ_0 потенциального «горба» функции $\Phi=\Phi_0\cos kz$ и отразится обратно. В лабораторной системе отсчета, которая является для нас основной, отражающаяся от потенциального горба частица получает или отдает энергию. Дело в том, что в лабораторной системе «горб» движется и происходит по сути дела отражение частицы от движущегося зеркала. В результате отражения частицы, которая без поля имела скорость $u_0=\frac{\omega}{k}+\Delta u$,

$\Delta u \lesssim \sqrt{\frac{2e\Phi_0}{m}}$, ее энергия меняется на $\Delta\frac{mu^2}{2} = 2m\frac{\omega}{k}\Delta u$. Так мы и приходим к оценке (8,56).

Кроме того, полезно выяснить, что будет, если волна совсем не затухает. Тогда после отражения от одного горба частица достигает второго горба, который движется к ней навстречу. Но при отражении знак Δu, очевидно, изменяется. Поэтому если при первом отражении частица получила энергию от волны $\left(\text{это имеет место при } \Delta u < 0, \text{ т. е. при } u = \frac{\omega}{k} + \Delta u < \frac{\omega}{k}\right)$, то при втором отражении она уже будет отдавать энергию волне. Отсюда мы приходим к такому выводу: существенное поглощение волн может происходить только, если время затухания волны $1/\gamma$ заметно меньше времени колебаний $\tau_{\text{осц}}$ частицы в потенциальной яме $\Phi = \Phi_0 \cos kz$.

Если приближенно записать потенциал в виде $\Phi = \frac{\Phi_0 k^2 z^2}{2}$, то частица движется подобно осциллятору (уравнение движения $m\ddot{z} + e\Phi_0 k^2 z = 0$) и частота колебаний $\omega_{\text{осц}} = \frac{2\pi}{\tau_{\text{осц}}} \sim \sqrt{\frac{e\Phi_0}{m}}\,k$. Таким образом,

$$\tau_{\text{осц}} \sim \left(\frac{m}{e\Phi_0}\right)^{1/2}\frac{1}{k} = \sqrt{\frac{m}{eE_0k}} \tag{8,61}$$

и условие сильного затухания имеет вид

$$\gamma \gg \sqrt{\frac{eE_0k}{m}}. \tag{8,62}$$

С другой стороны, мы ранее видели, что сильное бесстолкновительное затухание, когда $\gamma \sim \omega_0$, имеет место при $kv_T \sim \omega_0$ (т. е. при $kD \sim 1$). Отсюда и из (8,62) получаем такой необходимый критерий для сильного затухания

$$\frac{eE_0}{k} \sim eE_0\lambda \sim e\Phi_0 \ll \frac{mv_T^2}{2} \sim \varkappa T. \tag{8,63}$$

Смысл этого условия очень прост: энергия, приобретенная электроном в поле волны на длине волны λ, должна быть мала по сравнению с энергией его теплового движения. В противном случае линейное приближение не может быть справедливо, все распределение электронов по скоростям изменяется и, по крайней мере, нет оснований ожидать сильного затухания волны. Критерий (8,63) не является, однако, достаточным для того, чтобы при сравнительно слабом затухании ($\gamma \ll \omega_0$) не происходило образование «плато» и тем самым не проявлялась нелинейность — наблюдалось воздействие волны на ее же поглощение.

Таким условием линейности как раз и служит полученное ранее неравенство (8,58), (8,58а) или для нестационарного случая неравенство (8,58б).

Учет влияния ионов. Акустические волны. Влияние ионов выше совершенно не принималось во внимание, если не говорить о компенсации заряда электронов в равновесном состоянии. Поэтому формулы этого параграфа сохраняются и для плазмы, в которой электронная температура T_e не равна температуре ионов T *). При этом в формулах нужно, конечно, заменить T на T_e.

Для рассмотренных плазменных волн пренебрежение ролью ионов законно потому, что ионы вносят (при $N_i \sim N_+ \sim N$) лишь малый вклад порядка $\frac{m}{M}$ в выражение для показателя преломления (см. § 3). Влияние ионов вместе с тем может оказаться существенным для другой ветви волн в плазме. В случае достаточно длинных волн в плазме, как и во всякой квазинейтральной среде, должны распространяться продольные акустические (звуковые) волны. В этих волнах в первом приближении электроны и ионы движутся вместе, так что некомпенсированный заряд не появляется **). Упругость среды, обеспечивающая распространение обычной акустической волны, связана, как известно, с давлением. Для передачи давления частицы должны достаточно часто сталкиваться между собой. Поэтому акустические волны в газе слабо затухают только, если средняя длина свободного пробега $l \sim \frac{v_T}{\nu_{эфф}}$ значительно меньше длины волны

$$l \sim \frac{v_T}{\nu_{эфф}} \ll \lambda = \frac{v_ф}{\omega}, \quad \nu_{эфф} \gg \frac{v_T}{v_ф}\,\omega. \tag{8,64}$$

При этом условии применимо обычное гидродинамическое приближение, т. е. уравнения для скорости $\boldsymbol{v}$ и плотности плазмы $MN_i + mN \approx MN$ в линейном приближении таковы:

$$MN\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla p, \quad \frac{\partial N'}{\partial t} + N \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{8,65}$$

где N' — отклонение концентрации от равновесного значения

$$N_0 \equiv N = N_i = N_+.$$

---

*) Мы отвлекаемся от того факта, что в неравновесной плазме электронная функция распределения может оказаться заметно отличающейся от максвелловской.

**) Акустические волны в плазме, как сказано, аналогичны акустическим волнам в газах, жидкостях и твердых телах. Высокочастотные же продольные (плазменные) волны в плазме аналогичны борновским (оптическим) волнам или колебаниям в твердом теле.

Принимая, что давление p совпадает с давлением идеального газа электронов и ионов, $p = 2\varkappa NT$, и для простоты считая колебания изотермическими, из (8,65) для волн $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}$, $N' = N'_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}$ получаем:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\varkappa T}{M}}\,k, \quad v_\text{ф} = \sqrt{\frac{2\varkappa T}{M}}. \tag{8,66}$$

Здесь, как в любом газе, скорость звука $v_\text{ф}$ порядка тепловой скорости тяжелых частиц. Если в плазме присутствуют помимо электронов и ионов также молекулы с концентрацией N_m, то при $N_m \gg N = N_i$ для скорости звука получается обычное для газа выражение (например, в изотермическом приближении, могущем служить лишь для оценок, $v_\text{ф} = \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}}$; формула (8,66) также носит, вообще говоря, лишь оценочный характер).

При нарушении условия (8,64) акустические волны в газе начинают сильно затухать и для волн с длиной $\lambda \lesssim l$ затухание происходит уже на расстоянии порядка λ. Таким образом, для звука в газе длина пробега l играет роль, аналогичную роли дебаевского радиуса для плазменных волн.

Сказанное о распространении акустических волн в газах относится также и к плазме лишь при пренебрежении ролью некомпенсированного пространственного заряда. Другими словами, предполагается, что в акустической волне квазинейтральность плазмы почти не нарушается и упругость среды обусловливается только соударениями, а не кулоновским взаимодействием макроскопических зарядов, возникающих при распространении волны. В действительности же в плазме квазинейтральность в какой-то мере нарушается и в акустических волнах. Поэтому условие (8,64) является в случае плазмы достаточным, но не необходимым для существования относительно слабо затухающих волн акустического типа.

Если условие (8.64) не выполнено, то количественный анализ характера распространения акустических волн в плазме может производиться только на основе использования кинетических уравнений для электронов, ионов и молекул в сочетании с уравнениями поля. Соответствующие результаты, о которых еще пойдет речь ниже (см. также [87]), свидетельствуют о том, что при отсутствии соударений и равенстве (или близости) электронной и ионной температур акустические волны в плазме все же сильно затухают $\left(\gamma \sim \omega, \frac{\omega}{k} \sim \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}}\right)$*).

---

*) При $\gamma \sim \omega$ от волны, очевидно, что-то еще «остается», и в этом смысле учет пространственного заряда существен. В газе же из нейтральных частиц при отсутствии соударений вообще не приходится говорить о распространении волн или формально $\gamma \gg \omega$.

Такой вывод физически довольно естествен, так как в акустических волнах (в отличие от плазменных) пространственный заряд должен быть невелик, и поэтому электрическое взаимодействие не может обеспечить распространения волны без ее затухания. Положение изменяется только в плазме, в которой электронная температура T_e значительно выше ионной температуры $T \equiv T_i$ (см. ниже). При $T_e \sim T_i$ слабозатухающие акустические волны в плазме должны быть очень длинными, чтобы удовлетворялось условие (8,64), т. е. была применима обычная гидродинамика (для примера укажем, что в солнечной короне длина свободного пробега $l \gtrsim 10^7$ *см*). Поэтому в области радиодиапазона для изотермической плазмы приходится обычно сталкиваться только с поперечными и плазменными волнами. Именно по этой причине выше в ряде случаев продольные волны в плазме без дополнительных оговорок отождествлялись с плазменными волнами.

Подчеркнем здесь еще раз, что продольные волны плазменного типа, не говоря уже об акустических волнах, могут существовать не только в газовой плазме, но и в жидких и твердых телах — металлах, полупроводниках и диэлектриках. С возбуждением плазменных волн связаны, в частности, дискретные потери энергии, испытываемые быстрыми частицами при их прохождении через тонкие пленки различных веществ. Рассмотрение этих интересных вопросов выходит за рамки настоящей книги (см. [3, 10, 13, 23—25, 88—90], где имеются также ссылки на ряд других статей).

Квазигидродинамический метод. Для решения задачи о распространении волн в двухтемпературной плазме, а также имея в виду цели дальнейшего изложения (см. §§ 12, 14), остановимся на вопросе о квазигидродинамическом подходе к исследованию волн в плазме.

Мы видели, что простой феноменологический учет пространственной дисперсии позволяет в качественном отношении правильно выяснить влияние теплового движения на распространение достаточно длинных волн в плазме. В то же время метод кинетического уравнения, являющийся количественным, связан со значительно более сложными вычислениями, особенно при учете влияния ионов и постоянного магнитного поля.

Поэтому для описания процессов в плазме широко применяется так называемое квазигидродинамическое приближение, которое при большой простоте сочетает, хотя и не всегда последовательным образом, некоторые положительные стороны феноменологического и кинетического методов. Конкретно, в случае изотропной плазмы используются уравнения (предполагается, что молекулы отсутствуют; соударениями между частицами пренебрегаем):

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t} = e\boldsymbol{E} - \frac{\nabla p_e}{N}, \quad M\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} = -e\boldsymbol{E} - \frac{\nabla p_i}{N}, \\ \frac{\partial N'}{\partial t} + N_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_e = 0, \quad \frac{\partial N_i'}{\partial t} + N_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v}_i = 0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi e (N' - N_i'). \end{aligned}\right\} \tag{8,67}$$

Здесь сразу же используется линейное приближение, N' и N_i' — отклонения от равновесных значений концентрации электронов и ионов $N_{e0} = N_{i0} \equiv N_0$, $\boldsymbol{v}_e$ и $\boldsymbol{v}_i$ — средние скорости электронов и ионов, а p_e и p_i — давление электронов и ионов.

При пренебрежении давлением уравнения (8,67) являются, конечно, точными, но локальными соотношениями. Члены, пропорциональные ∇p_e и ∇p_i, содержат пространственные производные и тем самым учитывают пространственную дисперсию — зависимость движения частиц от распределения скоростей и поля в пространстве.

Суммируя два первых уравнения (8,67), получаем гидродинамическое уравнение (8,65) с $p = p_e + p_i$. Отсюда естественно предположить, что $p_e = \varkappa N T_e$ и $p_i = \varkappa N_i T$. Для большей общности положим

$$\left.\begin{aligned} p_e = \xi_e \varkappa N T_e = \xi_e \varkappa (N_0 + N') T_e, \\ p_i = \xi_i \varkappa N_i T_i = \xi_i \varkappa (N_0 + N_i') T_i, \end{aligned}\right\} \tag{8,68}$$

где ξ_e и ξ_i — некоторые постоянные.

Уравнения (8,67) не учитывают затухания и с этим в первую очередь и связана их ограниченность. Если затухание волн является сильным, т. е. $\gamma = \operatorname{Im} \omega' \gtrsim \omega = \operatorname{Re} \omega'$, то даже для ω из (8,67) нельзя получить правильных в количественном отношении результатов. Таким образом, уравнения (8,67) могут использоваться только для вычисления $\omega(k)$ для слабозатухающих волн с $\gamma \ll \omega$.

Продольные волны в двухтемпературной плазме. Решая систему (8,67) для продольных плоских волн, в которых все величины пропорциональны $e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}$, получаем дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} \omega^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_0^2\left(1+\frac{m}{M}\right) + \left(\frac{\xi_e \varkappa T_e}{m} + \frac{\xi_i \varkappa T_i}{M}\right)k^2\right] \pm \\ \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\omega_0^2\left(1+\frac{m}{M}\right) + \left(\frac{\xi_e \varkappa T_e}{m} + \frac{\xi_i \varkappa T_i}{M}\right)k^2\right]^2 - \frac{\omega_0^2}{M}(\xi_e \varkappa T_e + \xi_i \varkappa T_i)k^2 - \frac{\xi_e \xi_i \varkappa^2 T_e T_i}{mM}k^4}, \end{aligned} \tag{8,69}$$

где температуры электронов и ионов T_e и T_i считаются постоянными, но могут сильно отличаться одна от другой.

В случае, если

$$\omega_0^2 \gg \frac{\xi_e \varkappa T_e}{m} k^2, \quad \frac{\xi_e T_e}{m} \gg \frac{\xi_i T_i}{M}, \tag{8,70}$$

получаем:

$$\omega_1^2 \approx \omega_0^2 + \frac{\xi_e \varkappa T_e}{m} k^2, \tag{8,71}$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\varkappa}{M} (\xi_e T_e + \xi_i T_i) k^2; \tag{8,72}$$

здесь, как и ниже, опускаются также поправки, содержащие множитель $\frac{m}{M} \leqslant \frac{1}{2000}$; условия (8,70) при $T_i \leqslant T_e$ означают, что частота акустической волны $\omega_2 \ll \sqrt{\frac{m}{M}}\,\omega_0 = \omega_{0i}$ (физический смысл частоты ω_{0i} указан ниже).

Решение (8,71) совпадает с кинетическим дисперсионным уравнением (8,32) для плазменных волн, если положить $\xi_e = 3$. Очевидна также связь формулы (8,71) с феноменологическим результатом (8,16), где также нужно, таким образом, положить $\xi_e = 3$. Для выбора значения $\xi_e = 3$ можно, кроме того, привести известные основания независимого характера (см. [2]).

Решение (8,72) при $\xi_e = \xi_i = 1$ и $T_e = T_i$ переходит в выражение (8,66) для акустической волны.

В другом предельном случае, когда

$$\omega_0^2 \ll \frac{\xi_e \varkappa T_e}{m} k^2, \quad \frac{\xi_e T_e}{m} \gg \frac{\xi_i T_i}{M}, \tag{8,73}$$

имеем:

$$\omega_2^2 \approx \omega_0^2 \frac{m}{M} + \omega_0^2 \frac{\xi_i T_i}{\xi_e T_e} \frac{m}{M} + \frac{\xi_i \varkappa T_i}{M} k^2, \tag{8,74}$$

а для ω_1^2 сохраняется выражение (8,71).

Если вместо (8,73) соблюдаются более сильные неравенства

$$\frac{\xi_i \varkappa T_i}{m} k^2 \ll \omega_0^2 \ll \frac{\xi_e \varkappa T_e}{m} k^2, \quad T_e \gg T_i, \tag{8,75}$$

то

$$\omega_2^2 \approx \omega_0^2 \frac{m}{M} + \frac{\xi_i \varkappa T_i}{M} k^2 = \omega_{0i}^2 + \frac{\xi_i \varkappa T_i}{M} k^2, \tag{8,76}$$

причем второй член в правой части является поправочным.

Частота $\omega_{0i} = \omega_0 \sqrt{\frac{m}{M}} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{M}}$ есть, очевидно, «плазменная частота» для ионных колебаний. Для ионной плазмы, состоящей из положительных и отрицательных ионов без электронов, именно частота такого типа появлялась бы вместо электронной плазменной частоты ω_0. В электронно-ионной плазме появление частоты ω_{0i} при условии достаточно высокой электронной температуры тоже вполне естественно. В самом деле, в этом случае электроны быстро и свободно движутся, создавая неизменный отрицательный фон, компенсирующий средний заряд ионной составляющей. Ионы при этом как раз и должны колебаться с частотой ω_{0i}, подобно тому как электроны колеблются с частотой ω_0 в условиях, когда роль ионов сводится только к компенсации среднего заряда электронной компоненты плазмы.

Акустические волны (8,72) и ионные плазменные волны (8,76) лежат на одной непрерывной ветви низкочастотных колебаний, т. е. на одной кривой $n_4^2 \equiv \frac{c^2k^2}{\omega^2} = n_4^2\left(\frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2}\right)$; здесь $\omega_{0i}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{M}$ и $\omega^2 = \omega_2^2$ — решение (8,69), отвечающее выбору знака минус перед корнем (см. [91]).

Мы видим, что квазигидродинамический метод анализа движений в изотропной плазме прост и эффективен (о связи этого метода с кинетической теорией см. в § 13). Основной недостаток квазигидродинамического приближения уже был отмечен — он состоит в невозможности автоматически получить затухание, не связанное с соударениями.

Приведенные ранее результаты свидетельствуют о том, что плазменная волна (8,71) слабо затухает в случае (8,70) и очень сильно затухает в случае (8,73); волна (8,72) при $T_e \sim T_i$ также довольно сильно затухает.

Так, при $\omega_2 \ll \omega_{0i}$ и $\gamma_2 \ll \omega_2$ имеем:

$$\frac{\gamma_2}{\omega_2} \approx \sqrt{\frac{\pi}{8}}\left\{\sqrt{\frac{m}{M}} + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{T_e}{2T_i}\right]\right\}. \qquad (8,77)$$

Для ориентировки эта формула верна и при $\gamma_2 \sim \omega_2$; поэтому ясно, что при $T_e \sim T_i$, действительно, $\gamma_2 \sim \omega_2$ и затухание велико.

Пусть теперь, помимо условий (8,70), выполнено более сильное условие

$$T_e \gg T_i. \qquad (8,78)$$

Тогда кинетический расчет, предполагающий максвелловские распределения электронов и ионов с температурами T_e и T_i, дает [3—5, 8, 91—95]:

$$\omega_2^2 \approx \frac{\varkappa T_e}{M}\left(1 + \frac{3T_i}{T_e}\right)k^2, \quad \frac{\gamma_2}{\omega_2} \approx \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{m}{M}}; \qquad (8,79)$$

в отношении $\frac{\gamma_2}{\omega_2}$ этот результат при условии (8,78) прямо следует также из (8,77).

Для протонов $\frac{\gamma_2}{\omega_2}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{m}{M}}=1{,}46\cdot10^{-2}$, т. е. затухание за период еще не так велико, чтобы не было возможности говорить о распространении волн. Вместе с тем затухание волны в несколько раз на расстоянии в сотню длин волн при обычно встречающейся постановке задачи может считаться сильным (мы видели, что для достаточно длинных плазменных волн при отсутствии соударений затухание несравненно слабее).

В условиях (8,75) кинетический результат таков *):

$$\left.\begin{aligned}\omega_2^2 &\approx \omega_{0i}^2+\frac{3\varkappa T_i}{M}k^2,\\ \frac{\gamma_2}{\omega_2} &\approx \sqrt{\pi}\frac{M}{m}\left(\frac{m}{2\varkappa T_e}\frac{\omega_2^2}{k^2}\right)^{3/2}\approx\sqrt{\frac{\pi m}{M}}\left(\frac{m}{2\varkappa T_e}\frac{\omega_0^2}{k^2}\right)^{3/2}\end{aligned}\right\}. \tag{8,80}$$

Выражение (8,80) для ω_2^2 совпадает с (8,76) при $\xi_i=3$. Затухание (8,80) в этом случае (8,75) значительно меньше, чем согласно (8,79), поскольку отношение $\frac{m\omega_0^2}{2\varkappa T_e k^2}$ много меньше единицы (см. (8,75)).

§ 9. Сводка основных формул

Для удобства приведем здесь вместе важнейшие формулы, относящиеся к случаю распространения волн в однородной и изотропной плазме. При этом большинство сделанных в тексте замечаний и оговорок будет опущено, а формулы приводятся иногда с некоторыми второстепенными изменениями по сравнению с указанными в тексте.

Волновое уравнение, применимое для любой среды, таково:

$$\Delta\boldsymbol{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right)=0, \tag{8,6}$$

где рассматривается область вне источников поля.

---

*) Более общее выражение имеет вид [91]

$$\frac{\gamma_2}{\omega_2}=\sqrt{\frac{\pi}{8}}\left\{\frac{M}{m}\left(\frac{m}{\varkappa T_e}\frac{\omega_{0i}^2}{k^2}\right)^{3/2}+\frac{1}{\beta_i^3 n_2^3}\exp\left[-\frac{1}{2\beta_i^2 n_2^2}\right]\right\}, \tag{8,80a}$$

$$\beta_i^2=\frac{\varkappa T_i}{Mc^2},\quad n_2^2=\frac{c^2k^2}{\omega_2^2}\approx\frac{c^2k^2}{\omega_{0i}^2}.$$

Формула (8,80а) справедлива при $\omega_{0i}^2 \gg \frac{\varkappa T_i}{M}k^2$ и $T_e \gg T_i$; в таких условиях $\omega_2\approx\omega_{0i}$ и $\gamma_2\sim\omega_2$, как это ясно из (8,80) и (8,80а).

Используя формулу (8,80а) для ориентировки и при сильном затухании, приходим к заключению, что $\gamma_2\sim\omega_2$ при $\omega_{0i}^2\sim\frac{\varkappa T_i}{M}k^2$, когда $\beta_i n_2\sim1$.

В линейной среде

$$\left.\begin{aligned} D'_i(\omega,\ \boldsymbol{k}) &= D_i(\omega,\ \boldsymbol{k}) - i\frac{4\pi}{\omega}j_i(\omega,\ \boldsymbol{k}) \equiv \\ &\equiv E_i(\omega,\ \boldsymbol{k}) - i\frac{4\pi}{\omega}j'_i(\omega,\ \boldsymbol{k}) = \\ &= \varepsilon'_{ij}(\omega,\ \boldsymbol{k})E_j(\omega,\ \boldsymbol{k}), \end{aligned}\right\} \quad (2,4)\ \text{и}\ (2,7)$$

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j, \quad j_i = \sigma_{ij}E_j, \tag{2,8}$$

$$\varepsilon'_{ij}(\omega,\ \boldsymbol{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega,\ \boldsymbol{k}) - i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_i(\omega,\ \boldsymbol{k}). \tag{2,6}$$

Тензоры ε_{ij} и σ_{ij} являются эрмитовыми, т. е.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^*_{ji}, \quad \sigma_{ij} = \sigma^*_{ji}.$$

В изотропной среде при пренебрежении пространственной дисперсией

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{D} - i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j} = \varepsilon'\boldsymbol{E}, \tag{2,20}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}, \tag{2,19}$$

$$\Delta\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\boldsymbol{E} = 0, \tag{2,23}$$

где ε', ε и σ зависят в общем случае от частоты ω и координат.

Для поперечных волн

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 0, \\ \Delta\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\boldsymbol{E} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7,2}$$

Для продольных волн

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\Delta\boldsymbol{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0, \\ \boldsymbol{D} - \frac{4\pi i}{\omega}\boldsymbol{j} = \varepsilon'\boldsymbol{E} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2,30}$$

В однородной среде комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon' = \varepsilon'(\omega)$ не зависит от координат. Ниже будет идти речь о волнах в однородной среде, причем только о плоских и монохроматических (гармонических) волнах:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}. \tag{7,1}$$

Для таких волн уравнения поля (2,14) и (2,16) дают:

$$\omega\varepsilon'\boldsymbol{E} = -c[\boldsymbol{kH}], \quad \omega\boldsymbol{H} = c[\boldsymbol{kE}]. \tag{7,4}$$

Отметим, что условие поперечности волн $\boldsymbol{kE} = 0$ следует из уравнений (7,4) только при $\varepsilon' \neq 0$, что находится в согласии с соотношением (2,30) для продольных волн. В продольных волнах $\boldsymbol{H} = 0$.

Поперечные волны. Из (7,1) и (7,2) получается дисперсионное уравнение, связывающее ω и k в поперечных волнах:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon - i\frac{4\pi}{\omega}\sigma\right) = \frac{\omega^2}{c^2}(n - i\varkappa)^2. \qquad (7,3) \text{ и } (7,7)$$

Это уравнение применимо для комплексных $\boldsymbol{k}$ и ω, причем в общем случае $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0 - i\boldsymbol{q}$. Здесь приведем формулы для случая, когда частота ω вещественна, а плоские волны (7,1) являются однородными, т. е. векторы $\boldsymbol{k}_0$ и $\boldsymbol{q}$ параллельны и

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}(n - i\varkappa)\frac{\boldsymbol{k}}{k}, \qquad (7,5)$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{\mp\frac{\omega}{c}\varkappa z} e^{i\left(\omega t \mp \frac{\omega}{c} n z\right)}, \quad E_z = 0. \qquad (7,6)$$

Длина волны в среде λ и фазовая скорость волны $v_ф$ равны

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad v_ф = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}. \qquad (7,8) \text{ и } (7,9)$$

Коэффициент поглощения μ определяет изменение с рассеянием потока энергии $S = S_0 e^{-\mu z}$ и равен

$$\mu = \frac{2\omega}{c}\varkappa. \qquad (7,10)$$

Из (7,3), (7,7) следует:

$$\varepsilon = n^2 - \varkappa^2, \quad \frac{4\pi\sigma}{\omega} = 2n\varkappa, \qquad (7,11)$$

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}, \quad \varkappa = \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}, \qquad (7,12)$$

где оба корня всегда считаются положительными (см. § 7). При отсутствии поглощения, когда $\sigma = 0$,

$$\varepsilon > 0: \quad n = \sqrt{\varepsilon}, \quad \varkappa = 0, \qquad (7,13)$$

$$\varepsilon < 0: \quad n = 0, \quad \varkappa = \sqrt{-\varepsilon} = \sqrt{|\varepsilon|}. \qquad (7,14)$$

В этом случае часто вводится одна величина

$$\tilde{n}^2 = (n - i\varkappa)^2 = \varepsilon. \qquad (7,15)$$

При условии

$$\varepsilon| \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega} \qquad (7,16)$$

имеем

$$\varepsilon>0:\quad n\approx\sqrt{\varepsilon},\qquad \varkappa\approx\frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon}};\quad \mu\approx\frac{4\pi\sigma}{c\sqrt{\varepsilon}},\tag{7,17}$$

$$\varepsilon<0:\quad n\approx\frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{-\varepsilon}},\quad \varkappa\approx\sqrt{-\varepsilon},\quad \mu\approx\frac{2\omega}{c}\sqrt{-\varepsilon}.\tag{7,18}$$

В другом предельном случае, когда

$$|\varepsilon|\ll\frac{4\pi\sigma}{\omega},\tag{7,19}$$

получаем:

$$n\approx\varkappa\approx\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}},\qquad \mu\approx\sqrt{\frac{8\pi\omega\sigma}{c^2}}=4\pi\sqrt{\frac{\sigma}{c\lambda_0}}.\quad (7,20)\text{ и }(7,21)$$

Формулы, приведенные до сих пор, относятся к любой среде.

Для изотропной плазмы (т. е. при отсутствии в плазме внешнего магнитного поля) в рамках элементарной теории имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon'=1-\frac{4\pi e^2N}{m\omega(\omega-i\nu_{\text{эфф}})},\\ &\varepsilon=1-\frac{4\pi e^2N}{m(\omega^2+\nu^2_{\text{эфф}})},\qquad \sigma=\frac{1-\varepsilon}{4\pi}\nu_{\text{эфф}}=\frac{e^2N\nu_{\text{эфф}}}{m(\omega^2+\nu^2_{\text{эфф}})}.\end{aligned}\right\}\tag{3,7}$$

Пользуясь обозначениями $v=\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ и $s=\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$, которые будут применяться в гл. III, можно написать:

$$\varepsilon'=1-\frac{v}{1-is},\quad \varepsilon=1-\frac{v}{1+s^2},\quad \frac{\sigma}{\omega}=\frac{vs}{4\pi(1+s^2)}.$$

Формулы элементарной теории строго соответствуют случаю, когда число соударений электрона не зависит от его скорости. Вклад, связанный с ионами, в (3,7) опущен. В случае поперечных волн в нерелятивистской плазме роль пространственной дисперсии пренебрежимо мала. Дело в том, что в плазме учет влияния пространственной дисперсии автоматически достигается, если не пренебрегать тепловым движением. Получающиеся таким образом поправки — порядка $\frac{\varkappa T}{mc^2}$ (по сравнению с единицей), т. е. того же порядка, как и релятивистские эффекты.

При условии (высокочастотный случай)

$$\omega^2\gg\nu^2_{\text{эфф}}\qquad (3,8)\text{ и }(6,7)$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon = 1-\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2} = 1-3{,}18\cdot 10^9\,\frac{N}{\omega^2} = 1-8{,}06\cdot 10^7\frac{N}{f^2}\,,\\
&\sigma \approx \frac{e^2N\nu_{\text{эфф}}}{m\omega^2} = 2{,}53\cdot 10^8\frac{N\nu_{\text{эфф}}}{\omega^2} = 6{,}42\cdot 10^6\,\frac{N\nu_{\text{эфф}}}{f^2}\,,\quad f=\frac{\omega}{2\pi}\,.
\end{aligned}\right\}\ (3{,}5)\ \text{и}\ (3{,}9)$$

В важном частном случае, когда $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$ и $\varepsilon \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ (здесь $\varepsilon > 0$), имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&n \approx \sqrt{1-\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}}\,,\qquad \varkappa \approx \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1-n^2}{2\omega n}\,\nu_{\text{эфф}},\\
&\mu = \frac{2\omega\varkappa}{c} \approx \frac{1-n^2}{cn}\,\nu_{\text{эфф}} =\\
&\qquad = \frac{4\pi e^2N\nu_{\text{эфф}}}{mc\omega^2\sqrt{1-\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}}} = \frac{0{,}106N\nu_{\text{эфф}}}{\omega^2\sqrt{1-3{,}18\cdot 10^9\,\frac{N}{\omega^2}}}\,.
\end{aligned}\right\}\quad (7{,}17)$$

Приведем теперь формулы кинетической теории.

В высокочастотном случае (3,8), (6,7), в формулах (3,5) и (3,9) для σ

$$\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф},\,m} + \nu_{\text{эфф},\,i} \qquad (6{,}16)$$

(значения $\nu_{\text{эфф},\,m}$ и $\nu_{\text{эфф},\,i}$ относятся соответственно к соударениям с молекулами и ионами),

$$\begin{aligned}
\nu_{\text{эфф},\,m} &= \frac{4\pi a^2}{3}\,\bar{v}N_m = 8{,}3\cdot 10^5\pi a^2 N_m\sqrt{T} =\\
&= 1{,}7\cdot 10^{11}\,\frac{N_m}{2{,}7\cdot 10^{19}}\sqrt{\frac{T}{300}}\qquad (6{,}10)\ \text{и}\ (6{,}11)
\end{aligned}$$

(последнее выражение относится к воздуху);

$$\nu_{\text{эфф},\,i} = \frac{5{,}5N_i}{T^{3/2}}\,\ln\left(220\,\frac{T}{N_+^{1/3}}\right) \qquad (6{,}13)$$

(при отсутствии отрицательных ионов в равновесном состоянии $N_i = N_+ = N$).

В низкочастотном случае

$$\omega^2 \ll \nu^{(0)2}_{\text{эфф}},\qquad \sigma = \frac{e^2N}{m\nu^{(0)}_{\text{эфф}}}\qquad (3{,}10),\ (6{,}18)\ \text{и}\ (6{,}19)$$

имеем:

$$\nu^{(0)}_{\text{эфф},\,m} = \frac{3\pi}{8}\,\pi a^2\bar{v}N_m = \frac{9\pi}{32}\,\nu_{\text{эфф},\,m} = 1{,}5\cdot 10^{11}\,\frac{N_m}{2{,}7\cdot 10^{19}}\sqrt{\frac{T}{300}}$$

(см. (6,21) и (6,10), (6,11); последнее выражение относится к воздуху);

$$\nu^{(0)}_{\text{эфф},\, i} = \frac{2{,}8N}{T^{3/2}} \ln\left(324\gamma\, \frac{T}{N^{1/3}}\right),\quad \gamma \sim 1 \qquad (6{,}24)$$

($N_i = N_+ = N$; учтены междуэлектронные соударения).

Соотношение (6,16) в низкочастотном случае несправедливо. При произвольном соотношении между частотой ω и эффективным числом соударений $\nu_{\text{эфф}}$ нужно пользоваться формулой (6,25) с функциями $K_\varepsilon\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)$ и $K_\sigma\left(\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)$, определенными в табл. 6,2 и 6,3.

Вклад в проницаемость и проводимость, обусловленный ионами, таков:

$$\Delta_i\varepsilon = -\frac{4\pi e^2 N_i}{M\left(\omega^2 + \nu^{(i)2}_{\text{эфф}}\right)},\quad \Delta_i\sigma = \frac{e^2 N_i \nu^{(i)}_{\text{эфф}}}{M\left(\omega^2 + \nu^{(i)2}_{\text{эфф}}\right)}, \qquad (6{,}29)$$

где используется элементарная теория и $\nu^{(i)}_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений ионов со всеми другими частицами. Масса и заряд всех ионов считаются одинаковыми. Приближенно имеем (см. (6,26), (6,26а) и (6,27))

$$\nu^{(i)}_{\text{эфф},\, m} \approx \frac{8\sqrt{2}\pi a^2}{3}\,\bar{v}_i N_m \approx 2\cdot 10^9\, \frac{N_m}{2{,}7\cdot 10^{19}} \sqrt{\frac{T}{300}}$$

$\left(\text{здесь } \bar{v}_i = \sqrt{\frac{8\varkappa T}{\pi M}} \text{ и последнее значение относится к воздуху}\right)$;

$$\nu^{(i)}_{\text{эфф},\, i} \approx \frac{\pi e^4}{\sqrt{2}\,(\varkappa T)^2}\,\bar{v}_i N_+ \ln\left(0{,}37\gamma_i\, \frac{\varkappa T}{e^2 N_+^{1/3}}\right) =$$

$$= \frac{3{,}9N_+}{T^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{M}} \ln\left(220\gamma_i\, \frac{T}{N_+^{1/3}}\right),\quad \gamma_i \sim 1. \qquad (6{,}28)$$

Кроме того, $\nu^{i}_{\text{эфф},\, e} \approx \nu_{\text{эфф},\, i}\frac{N}{N_i}$, а $\nu_{\text{эфф},\, i}$ дается выражением (6,13).

Продольные волны в плазме. Слабозатухающие высокочастотные продольные (плазменные) волны могут существовать в области, где

$$\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}. \qquad (3{,}8) \text{ и } (6{,}7)$$

При пренебрежении затуханием и тепловым движением частота плазменных волн равна ω_0, причем

$$\varepsilon(\omega_0) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega_0^2} = 0,\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} = 5{,}64\cdot 10^4 \sqrt{N}. \qquad (8{,}1)$$

В присутствии соударений для колебаний вида

$$e^{pt} = e^{i\omega' t} = e^{-\gamma t} e^{i\omega t}$$

при условиях (3,8) и (6,7), получаем (см. (8,47) и (8,48)):

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega'(\omega' - i\nu_{\text{эфф}})} = 1 + \frac{\omega_0^2}{p(p+\nu_{\text{эфф}})} = 0, \quad p = i\omega - \gamma, \\ &\omega' = \omega + i\gamma, \quad \omega \approx \omega_0, \quad \gamma_{\text{соуд}} \approx \frac{\nu_{\text{эфф}}}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Учет теплового движения, эквивалентный в случае плазмы учету пространственной дисперсии, приводит к формулам (***k*** — волновой вектор):

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 3\frac{\varkappa T}{m}k^2, \quad \omega \approx \omega_0 + \frac{3}{2}\frac{\varkappa T}{m}\frac{k^2}{\omega_0} = \omega_0(1 + 3D^2k^2), \tag{8,35}$$

где

$$kD \ll 1, \quad D = \sqrt{\frac{\varkappa T}{8\pi e^2 N}} \tag{8,36}$$

или, что то же,

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega_0. \tag{8,19}$$

Согласно (8,35)

$$\tilde{n}_3^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{3\frac{\varkappa T}{mc^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \approx \frac{1 - \frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{3}{2}\frac{\varkappa T}{mc^2}}, \tag{8,32}$$

$$\left.\begin{aligned} &v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_3} = \frac{\sqrt{\frac{3\varkappa T}{m}}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}, \\ &v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} \approx \frac{3\varkappa T}{m\omega_0}k \approx \sqrt{\frac{3\varkappa T}{m}}\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8,34}$$

Здесь, конечно, тоже можно заменить $1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ на $2\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$.

При условиях (8,19), (8,36) и отсутствии соударений для плазменной волны $\gamma = \gamma_0$, причем

$$\gamma_0 = \omega_0 \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-3/2}}{8(kD)^3} e^{-\frac{1}{4(kD)^2}} \approx \frac{0{,}05\omega_0}{(kD)^3} 10^{-\frac{0{,}11}{(kD)^2}}. \tag{8,44}$$

Специфическое затухание γ_0 становится обычно существенным для волн с длиной $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$, причем

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{k_{\text{кр}}} \approx 300\sqrt{\frac{T(^\circ\text{K})}{N}}\ \textit{см}, \quad k_{\text{кр}} D \approx 0{,}1 \tag{8,52}$$

(см. в этой связи табл. 8,1). Вопрос о роли релятивистских поправок освещен в § 8.

Для плазменной волны типа

$$e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa_3 z}e^{i(\omega t-kz)}$$

при вещественном ω, между ω и k справедлива связь (8,35) и

$$\frac{\omega}{c}\varkappa_3=\frac{\gamma_0(k)}{v_{\text{гр}}}=\frac{\gamma_0(k)}{\frac{3\varkappa T}{m}\frac{k}{\omega_0}}. \tag{8,46}$$

Соотношение $\frac{\omega}{c}\varkappa_3=\frac{\gamma(k)}{v_{\text{гр}}}$ является при этом общим, т. е. относится и к поперечным волнам (см. (7,23)). Если имеются и соударения и затухание (8,44), то в области слабого затухания

$$\gamma=\gamma_{\text{соуд}}+\gamma_0. \tag{8,49}$$

Если функция распределения электронов $f_0(u)$, где u — проекция скорости электрона на волновой вектор $\boldsymbol{k}$, не совпадает с максвелловской функцией $f_{00}(u)=N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{1/2}e^{-\frac{mu^2}{2\varkappa T}}$, то при отсутствии соударений

$$\gamma=-\frac{2\pi^2e^2\omega_0}{mk^2}\left(\frac{df_0}{du}\right)_{u=\omega/k}=-\frac{\pi}{2}\frac{\omega_0^3}{k^2N}\left(\frac{df_0}{du}\right)_{u=\omega/k}. \tag{8,54}$$

Формула (8,44), отвечающая линейному приближению, справедлива лишь при условии

$$\frac{eE_0}{k}\sim eE_0\lambda\ll\left(\frac{e^4N\varkappa T}{km^{3/2}v_{\text{ф}}^3}\right)^{2/3}\ll\left(\frac{e^4N}{k(\varkappa T)^{1/2}}\right)^{2/3}, \tag{8,59б}$$

где E_0 — амплитуда поля в плазменной волне и $v_{\text{ф}}=\frac{\omega}{k}\approx\frac{\omega_0}{k}$; при несоблюдении условия (8,59б) значение γ в стационарных условиях можно приближенно вычислить по формуле (8,60).

При условии

$$\nu_{\text{эфф}}^2\gg\omega^2 \tag{8,42}$$

(см. (8,64) и (8,66)) в плазме могут распространяться слабозатухающие акустические волны, для которых

$$\omega=\sqrt{\frac{2\varkappa T}{M}}\,k. \tag{8,66}$$

При несоблюдении условия (8,64) акустические волны в плазме сильно затухают. То же относится к плазменным волнам при соблюдении условия (8,64). Здесь имеем в виду изотермическую плазму. Вопрос о распространении волн в двухтемпературной плазме, когда $T_e\neq T\equiv T_i$, рассмотрен в конце § 8.

Глава III

Распространение волн в однородной магнитоактивной плазме

§ 10. Тензор комплексной диэлектрической проницаемости

О влиянии постоянного магнитного поля на свойства плазмы. Постоянное магнитное поле оказывает сильное влияние на свойства плазмы. Это относится, в частности, и к распространению в плазме волн различного типа.

Влияние магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ характеризуется в первую очередь отношением частоты поля волны ω к гироскопической частоте электронов

$$\omega_H = \frac{|e|\,H^{(0)}}{mc} = 1{,}76\cdot 10^7 H^{(0)}, \quad \lambda_H = \frac{2\pi c}{\omega_H} = \frac{2\pi m c^2}{|e|\,H^{(0)}} = \frac{1{,}07\cdot 10^4}{H^{(0)}}\,\text{см} \qquad (10{,}1)$$

и гирочастоте ионов

$$\Omega_H = \frac{|e|\,H^{(0)}}{Mc} = 1{,}76\cdot 10^7\,\frac{m}{M}\,H^{(0)}. \qquad (10{,}2)$$

Частоты ω_H и Ω_H суть частоты, с которыми свободный электрон или ион (заряд e, масса M) вращаются вокруг силовых линий поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$. Помимо ω_H и Ω_H будут использоваться также безразмерные параметры:

$$u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}, \qquad \sqrt{u} = \frac{\omega_H}{\omega}, \qquad u_M = \frac{\Omega_H^2}{\omega^2} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 u. \qquad (10{,}3)$$

Если скорость электрона сравнима со скоростью света, частота ω_H определяется уже релятивистской формулой

$$\omega_H^* = \frac{|e|\,H^{(0)}}{mc}\,\frac{mc^2}{E} = \frac{|e|\,H^{(0)}}{mc}\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (10{,}4)$$

где $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ — полная энергия, $\beta = \dfrac{v}{c}$ и v — скорость электрона.

При $T \sim 10^6$ (солнечная корона) скорость основной массы электронов $v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}} \sim 3 \cdot 10^8$ и $\beta_T^2 = \frac{\varkappa T}{mc^2} \sim 10^{-4}$. Несмотря на малость β_T^2, учет эффектов, пропорциональных β_T^2, в условиях короны и даже ионосферы в некоторых случаях существен (см. § 12). Тем не менее условие $\beta_T^2 \ll 1$ дает возможность в целом пользоваться нерелятивистским приближением. По последней причине магнитное поле самой волны, вообще говоря, учитывать не нужно, как это уже принималось в гл. II. В самом деле, в электромагнитной волне магнитное поле H обычно не превосходит электрическое поле E $\left(\text{для плоской волны } [\boldsymbol{kE}] = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{H},\ k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n - i\varkappa)^2\right)$. Поэтому магнитная сила $\frac{e}{c}[\boldsymbol{vH}]$ меньше электрической силы $e\boldsymbol{E}$ на множитель порядка $\frac{v}{c}$, если только $n \sim 1$. Поэтому, даже если понимать под v тепловую скорость, магнитная сила меньше электрической примерно в 100 раз при $T \sim 10^6$ и примерно в 3000 раз при $T \sim 300°$. Фактически же сила определяется упорядоченной скоростью электронов, которая значительно меньше тепловой *).

В земной ионосфере магнитное поле $H^{(0)} \sim 0{,}2 \div 0{,}5$ *эрст* и, таким образом, $\omega_H \sim 3 \div 9 \cdot 10^6$ ($\lambda_H \sim 200 \div 500$ *м*); например, для ионов $O^{\pm}$ частота $\Omega_H \sim 100 \div 300$. В короне для максимальных встречающихся полей $H^{(0)} \sim 5000$, $\omega_H \sim 10^{11}$ и $\Omega_H = \frac{\omega_H}{1836} \sim 10^8$.

Влияние ионов обычно (но не всегда; см. § 14) несущественно при условии

$$\omega \gg \Omega_H, \tag{10,5}$$

а влияние магнитного поля на движение электронов несущественно, если

$$\omega \gg \omega_H. \tag{10,6}$$

Приведенные значения гирочастот таковы, что сразу же ясна возможность сильного влияния магнитного поля на распространение электромагнитных волн в ионосфере и короне. К этому нужно добавить, что даже при выполнении условия (10,6) влиянием поля пренебречь можно далеко не всегда. Например, в межзвездной среде $H^{(0)} \sim 10^{-6}$—10^{-5} *эрст* и $\omega_H \sim 10 \div 100$. Однако даже для распространения волн метрового диапазона ($\omega \sim 10^9$)

---

*) При использовании кинетического уравнения (4,17) возможность пренебрежения магнитным полем волны в линейном приближении очевидна, так как поле H умножается на малую величину f_1.

влияние поля существенно, когда речь идет о вращении плоскости поляризации космического радиоизлучения, которое проходит огромные расстояния (см. § 37).

Тензор комплексной диэлектрической проницаемости (элементарная теория). Находящаяся в магнитном поле плазма становится анизотропной, и ее электромагнитные свойства при пренебрежении пространственной дисперсией характеризуются зависящим от частоты тензором комплексной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}-i\frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}, \quad j_i=\sigma_{ij}E_j, \quad D_i=\varepsilon_{ij}E_j. \tag{10,7}$$

Мы начнем с того, что найдем тензор ε'_{ij} в рамках элементарной теории (см. § 3) и при условии (10,5), т. е. пренебрегая ролью ионов. Влияние ионов будет учтено в конце настоящего параграфа и особенно в § 14.

Использование «элементарной теории» по существу означает, что число соударений электрона с другими частицами считается не зависящим от скорости электронов и равным некоторому значению $\nu_{\text{эфф}}$. В этом случае можно воспользоваться уравнением

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}+m\nu_{\text{эфф}}\dot{\boldsymbol{r}}=e\boldsymbol{E}_0e^{i\omega t}+\frac{e}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{H}^{(0)}], \tag{10,8}$$

которое отличается от (3,6) учетом действия магнитного поля.

При наличии магнитного поля, так же как и при его отсутствии, плотность полного тока равна

$$\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}+i\omega\boldsymbol{P}=eN\dot{\boldsymbol{r}},$$

где $\dot{\boldsymbol{r}}$ — вынужденное решение уравнения (10,8), пропорциональное $\boldsymbol{E}_0e^{i\omega t}$. Поэтому если принять направление поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ за ось z и ввести комбинации $j'_x\pm ij'_y$, то, как легко видеть,

$$j'_x\pm ij'_y=\frac{e^2N(E_x\pm iE_y)}{m(i\omega+\nu_{\text{эфф}}\mp i\omega_H)}, \quad j'_z=\frac{e^2NE_z}{m(i\omega+\nu_{\text{эфф}})}; \tag{10,9}$$

здесь нужно в обеих частях равенства брать либо верхний, либо нижний знаки и учитывать, что для электронов $e<0$, и поэтому

$$\omega_H=\frac{|e|H^{(0)}}{mc}=-\frac{eH^{(0)}}{mc}.$$

Поскольку в основные уравнения (2,21), (2,22) и (2,32) входит вектор $\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{E}+\frac{4\pi}{i\omega}\boldsymbol{j}'$, мы приведем соответствующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}\left(D_x - i\frac{4\pi}{\omega}j_x\right) \pm i\left(D_y - i\frac{4\pi}{\omega}j_y\right) &=\\ = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \mp \omega\omega_H - i\omega\nu_{\text{эфф}}}\right)&(E_x \pm iE_y),\\ D_z - i\frac{4\pi}{\omega}j_z = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - i\omega\nu_{\text{эфф}}}\right)&E_z,\end{aligned}\right\} \quad (10{,}10)$$

где, как и везде ранее, $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$.

Далее, по определению (не путать нижний индекс i и мнимую единицу i, фигурирующую в качестве множителя!):

$$\left.\begin{aligned}j_i' = -i\omega P_i + j_i = \left(i\omega\frac{\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}}{4\pi} + \sigma_{ij}\right)E_j = \frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon_{ij}' - \delta_{ij})E_j,\\ D_i - i\frac{4\pi}{\omega}j_i = \left(\varepsilon_{ij} - i\frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}\right)E_j = \varepsilon_{ij}'E_j,\end{aligned}\right\} \quad (10{,}11)$$

где по дважды встречающимся индексам производится суммирование от 1 до 3 и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Из (10,10) и (10,11) получаем:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}' = \varepsilon_{yy}' = 1 - \frac{\omega_0^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2 - \omega\omega_H - i\omega\nu_{\text{эфф}}} + \frac{1}{\omega^2 + \omega\omega_H - i\omega\nu_{\text{эфф}}}\right) &=\\ = 1 - \frac{\omega_0^2(\omega - i\nu_{\text{эфф}})}{\omega[(\omega - i\nu_{\text{эфф}})^2 - \omega_H^2]}&,\\ \varepsilon_{xy}' = -\varepsilon_{yx}' = -i\frac{\omega_0^2\omega_H}{\omega(\omega + \omega_H - i\nu_{\text{эфф}})(\omega - \omega_H - i\nu_{\text{эфф}})}&,\\ \varepsilon_{xx}' \mp i\varepsilon_{xy}' = \varepsilon_{yy}' \pm i\varepsilon_{yx}' = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \mp \omega\omega_H - i\omega\nu_{\text{эфф}}}&,\\ \varepsilon_{zz}' = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - i\omega\nu_{\text{эфф}}}&,\\ \varepsilon_{xz}' = \varepsilon_{zx}' = \varepsilon_{yz}' = \varepsilon_{zy}' = 0&,\\ \varepsilon_{xx}' \equiv \varepsilon_{11}',\ \varepsilon_{yy}' \equiv \varepsilon_{22}',\ \varepsilon_{zz}' \equiv \varepsilon_{33}',\ \varepsilon_{xy}' \equiv \varepsilon_{12}',\ \varepsilon_{xz}' \equiv \varepsilon_{13}',\ \varepsilon_{yz}' \equiv \varepsilon_{23}'&.\end{aligned}\right\} \quad (10{,}12)$$

Помимо тензоров ε_{ij}', ε_{ij} и σ_{ij} бывает иногда удобно использовать обратные тензоры $(\varepsilon_{ij}')^{-1}$, ε_{ij}^{-1} и σ_{ij}^{-1}. Очевидно, например,

$$E_i = \varepsilon_{ij}^{-1}D_j, \quad \varepsilon_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{|\varepsilon_{ij}|}, \quad \varepsilon_{ie}\varepsilon_{ej}^{-1} = \delta_{ij},$$

где $|\varepsilon_{ij}|$ — определитель тензора (матрицы) ε_{ij}, а $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ и Δ_{ij} — соответственно алгебраическое дополнение и минор, отвечающие элементу ε_{ij} в определителе $|\varepsilon_{ij}|$ (напомним, что $A_{ie}\varepsilon_{je} = A_{ei}\varepsilon_{ej} = |\varepsilon_{em}|\,\delta_{ij}$). В тех случаях, когда $|\varepsilon_{ij}| \neq 0$ и тензор ε^{-1}_{ij} существует, использование обоих тензоров ε_{ij} и ε^{-1}_{ij} совершенно равноправно. Аналогичные замечания относятся к тензорам ε'_{ij}, σ_{ij} и обратным им тензорам. Ниже мы обратными тензорами в явном виде пользоваться не будем.

Свойства тензора ε'_{ij}. Разумеется, при $\omega_H = 0$, как это и должно быть, $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'\delta_{ij} = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - i\nu_{\text{эфф}})}\right)\delta_{ij}$. Тензор ε'_{ij}, как ясно из (10.12), удовлетворяет условию $\varepsilon'_{ij}(\omega, \omega_H) = \varepsilon'_{ji}(\omega, -\omega_H)$ или, что то же, условию

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{H}^{(0)}) = \varepsilon'_{ji}(\omega, -\mathbf{H}^{(0)}). \tag{10,13}$$

Это соотношение является общим для любой среды, находящейся в магнитном поле (см., например, [12], § 82 и [10], § 1). Весьма важно, что в этом случае и при отсутствии поглощения, когда $\nu_{\text{эфф}} = 0$ и $\sigma_{ij} = 0$, тензор $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}$ не является вещественным, а удовлетворяет лишь условию эрмитовости

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^*_{ji} \tag{10,14}$$

(звездочка — знак комплексного сопряжения).

Для плазмы соблюдение условия (10,14) ясно сразу, так как при $\nu_{\text{эфф}} = 0$ из (10,12) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega(\omega - \omega_H)} - \frac{\omega_0^2}{2\omega(\omega + \omega_H)} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2},\\
&\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = \varepsilon^*_{yx} = -\frac{i\omega_0^2}{2\omega(\omega - \omega_H)} + \frac{i\omega_0^2}{2\omega(\omega + \omega_H)} =\\
&\quad = -i\,\frac{\omega_0^2\omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)},\\
&\varepsilon_{xx} \mp i\varepsilon_{xy} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega \mp \omega_H)}, \quad \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2},\\
&\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{10,15}$$

Заметим, что в общем случае разделение тензора $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - i\frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}$ на ε_{ij} и σ_{ij} может быть однозначно произведено в результате требования, чтобы ε_{ij} и σ_{ij} $\left(\text{но не } -i\frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}\right)$ были эрмитовыми тензорами. При этом поглощение энергии (джоулево тепло) в среднем по времени в единице объема равно (см. [12], §§ 61, 77 и [10], § 3)

$$-\frac{i\omega}{16\pi}(\varepsilon'^*_{ij} - \varepsilon'_{ji})E_iE^*_j = \frac{\sigma^*_{ij} + \sigma_{ji}}{4}E_iE^*_j = \frac{\sigma_{ij}}{2}E^*_iE_j,$$

т. е. зависит лишь от σ_{ij}, как это и должно быть.

Приводить здесь отдельно формулы для ε_{ij} и σ_{ij} мы не будем, так как обычно удобнее сразу пользоваться тензором ε'_{ij} (см., однако, формулы (10,31) и (10,32)).

Находящаяся в магнитном поле среда называется магнитоактивной, причем термин «активная» (или «гиротропная») среда указывает на то, что и при отсутствии поглощения тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ij}(\omega)$ не является вещественным. При отсутствии магнитного поля и пренебрежении пространственной дисперсией все среды неактивны.

Однако для кристаллов без центра симметрии или для растворов молекул, не обладающих центром симметрии (например, растворов сахара), учет пространственной дисперсии приводит к появлению членов первого порядка относительно $\frac{a}{\lambda}$ (см. §§ 2, 8), влияние которых обычно можно учесть, вводя комплексный тензор ε'_{ij} (подробнее см. [12], § 83 и [10]). Соответствующие среды называют естественноактивными или просто гиротропными. В естественнонеактивной, но магнитоактивной среде тензор ε_{ij} комплексен только при наличии внешнего магнитного поля.

Итак, находящаяся в магнитном поле плазма является магнитоактивной средой, причем ее активность может быть сильно выражена даже в магнитных полях, которые обычно считаются весьма слабыми.

В негиротропной (неактивной) анизотропной среде тензор ε'_{ij} симметричен и при отсутствии поглощения веществен. Поэтому существуют три главных направления, в которых вектор $\boldsymbol{D}$ параллелен вектору $\boldsymbol{E}$. В магнитоактивной среде это не так; в направлении магнитного поля $D_z = \varepsilon_{zz}E_z$, но $D_x \pm iD_y = (\varepsilon_{xx} \mp i\varepsilon_{xy})(E_x \pm iE_y)$ (см. (10,10); поглощение считается отсутствующим). Поскольку величина $\varepsilon_{xx} \mp i\varepsilon_{xy}$ вещественна (см. (10,15)), отсюда следует, что в плоскости xy вектор $\boldsymbol{D}$ пропорционален $\boldsymbol{E}$ для постоянного по величине поля $\boldsymbol{E}$, вращающегося по или против часовой стрелки (для такого поля

$$E_x = E_0 e^{i\omega t}, \qquad E_y = \mp iE_0 e^{i\omega t},$$

$$\operatorname{Re} E_x = E_0 \cos\omega t, \qquad \operatorname{Re} E_y = \pm E_0 \sin\omega t).$$

Именно подобная связь между $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ и является характерным физическим отличием гиротропной среды от негиротропной. Тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{H}^{(0)})$ и другие аналогичные тензоры (например, $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{H}^{(0)})$) обладают рядом свойств общего характера. Например,

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{H}^{(0)}) = \varepsilon'_{ji}(\omega, -\boldsymbol{k}, -\boldsymbol{H}^{(0)}). \qquad (10,13а)$$

При отсутствии пространственной дисперсии это условие переходит в (10,13).

Подобные общие свойства тензора ε'_{ij} довольно подробно обсуждаются, например, в § 1.2 книги [10]. В условиях, когда вид тензора ε'_{ij} не известен, использование его общих свойств может представить существенный интерес. Однако в плазме, особенно при отсутствии пространственной дисперсии, вид тензора ε'_{ij} обычно известен и различные свойства симметрии или дисперсионные соотношения выполняются автоматически (примером может служить соблюдение условия (10,13) в случае тензора (10,12)). По этой причине подробнее останавливаться на общих свойствах тензора $\varepsilon'_{ij}(\omega,\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{H}^{(0)})$ мы здесь не будем.

Тензор ε'_{ij} в других системах координат. В использованной координатной системе с осью z, параллельной полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$, тензор ε'_{ij} принимает простейший вид. Бывает, однако, удобно пользоваться и другими прямоугольными координатными системами. Тензоры в разных таких системах связаны соотношением

$$\varepsilon'_{ij}(x_l) = \gamma_{im}\gamma_{jn}\varepsilon'_{mn}(x'_l), \qquad (10,16)$$

где $\varepsilon'_{ij}(x_l)$ — компоненты тензора в системе координат x_l и γ_{im} — косинусы углов между осями x'_i и x'_m (x_m — старые координаты).

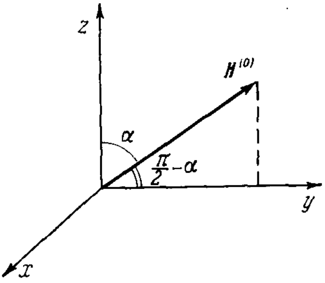


Рис. 10,1. Координатная система, в которой тензор ε'_{ij} имеет вид (10,17).

Особенно существен частный случай, когда вектор $\boldsymbol{H}^0$ образует угол α с осью z, угол $\frac{\pi}{2}-\alpha$ с осью y и перпендикулярен к оси x (рис. 10,1) *). Именно такой случай имеет место при нормальном падении волны на слой плазмы (распространение по оси z при любом z) при произвольной ориентации магнитного поля (ось x всегда можно выбрать перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{H}^{(0)}$). При этом

$$\gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{21} = \gamma_{31} = 0, \quad \gamma_{33} = \gamma_{22} = \cos\alpha,$$
$$\gamma_{23} = -\gamma_{32} = \sin\alpha.$$

В новой системе координат $x,\ y,\ z$, изображенной на рис. 10,1, компоненты тензора (10,12) равны:

---

*) В случае земного магнитного поля, если ось z совпадает с вертикалью, угол $I = \frac{\pi}{2} - a$ называется магнитным наклонением.

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon'_{xx}=1-\frac{v(1-is)}{(1-is)^2-u}, \qquad \varepsilon'_{yy}=1-\frac{v\{(1-is)^2-u\sin^2\alpha\}}{(1-is)\{(1-is)^2-u\}},\\
&\varepsilon'_{zz}=1-\frac{v\{(1-is)^2-u\cos^2\alpha\}}{(1-is)\{(1-is)^2-u\}}, \quad \varepsilon'_{xz}=-\varepsilon'_{zx}=\frac{i\sqrt{u}\,v\sin\alpha}{(1-is)^2-u},\\
&\varepsilon'_{xy}=-\varepsilon'_{yx}=-\frac{iv\sqrt{u}\cos\alpha}{(1-is)^2-u}, \quad \varepsilon'_{yz}=\varepsilon'_{zy}=\frac{uv\cos\alpha\sin\alpha}{(1-is)\{(1-is)^2-u\}},
\end{aligned}\right\} \tag{10,17}$$

где

$$u=\frac{\omega_H^2}{\omega^2}, \qquad \sqrt{u}=\frac{\omega_H}{\omega}, \qquad v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}=\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}, \qquad s=\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}. \tag{10,18}$$

При распространении плоской волны вдоль оси z, согласно уравнениям поля (2,18):

$$D_z-i\frac{4\pi}{\omega}j_z=\varepsilon'_{3j}E_j=0, \tag{10,19}$$

откуда

$$E_x=-\frac{\varepsilon'_{zx}E_x+\varepsilon'_{zy}E_y}{\varepsilon'_{zz}}=-\frac{i\sqrt{u}\,(1-is)\,v\sin\alpha}{(1-is)\,u-(1-is)^2\,(1-is-v)-uv\cos^2\alpha}E_x+$$
$$+\frac{uv\cos\alpha\sin\alpha}{(1-is)\,u-(1-is)^2\,(1-is-v)-uv\cos^2\alpha}E_y. \tag{10.20}$$

Отметим, что вместо обозначений v, $\sqrt{u}$ и s часто используются соответственно обозначения X, Y и Z. При соблюдении равенства (10,19)

$$\left.\begin{aligned}
&D_x-i\frac{4\pi}{\omega}j_x=\varepsilon'_{1j}E_j=AE_x+iCE_y,\\
&D_y-i\frac{4\pi}{\omega}j_y=\varepsilon'_{2j}E_j=-iCE_x+BE_y,
\end{aligned}\right\} \tag{10,21}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&A=\frac{(1-is)\,u-(1-is)\,(1-is-v)^2-uv\cos^2\alpha}{(1-is)\,u-(1-is)^2\,(1-is-v)-uv\cos^2\alpha},\\
&B=\frac{u\,(1-is-v)-(1-is)\,(1-is-v)^2}{(1-is)\,u-(1-is)^2\,(1-is-v)-uv\cos^2\alpha},\\
&C=\frac{\sqrt{u}\,v\,(1-is-v)\cos\alpha}{(1-is)\,u-(1-is)^2\,(1-is-v)-uv\cos^2\alpha}.
\end{aligned}\right\} \tag{10,22}$$

В важных частных случаях $\left(\text{при } \alpha=0 \text{ и } \alpha=\frac{\pi}{2}\right)$ имеем

$\alpha=0$:

$$\left.\begin{aligned}
&A=B=\frac{(1-is)^2-u-v(1-is)}{(1-is)^2-u}=1-\frac{v(1-is)}{(1-is)^2-u},\\
&C=-\frac{\sqrt{u}\,v}{(1-is)^2-u};
\end{aligned}\right\} \tag{10,23}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}:$$

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{u-(1-is-v)^2}{u-(1-is)(1-is-v)}=1-\frac{v(1-is-v)}{(1-is)^2-u-(1-is)v},\\
B&=1-\frac{v}{1-is},\\
C&=0.
\end{aligned}\right\}\tag{10.24}$$

При условии (10,19) и отсутствии поглощения, когда $s=0$ (т. е. $j=0$):

$$\left.\begin{aligned}
A&=\frac{u-(1-v)^2-uv\cos^2\alpha}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha},\\
B&=\frac{u(1-v)-(1-v)^2}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha},\\
C&=\frac{\sqrt{u}\,v(1-v)\cos\alpha}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha}
\end{aligned}\right\}\tag{10,25}$$

и

$$E_z=-\frac{i\sqrt{u}\,v\sin\alpha}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha}E_x+\frac{uv\cos\alpha\sin\alpha}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha}E_y.\tag{10.26}$$

Кинетическая теория. При получении выражений для компонент тензора ε'_{ij} на основе метода кинетического уравнения нужно исходить из уравнений (см. (4,16), (4,11); скорости v и $u=\sqrt{\frac{m}{2\varkappa T}}\,v$, фигурирующие в формулах (10,27) — (10,29), не имеют, конечно, ничего общего с использованными выше параметрами v и u):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{e\boldsymbol{E}}{m}\frac{\partial f_{00}}{\partial v}+\frac{e}{mc}[\boldsymbol{H}^{(0)}\boldsymbol{f}_1]+\nu(v)\boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{S}_{1,\,ee}=0,\\
&j'_i=-e\int v_i\frac{(\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{v})}{v}\,d\boldsymbol{v}=\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon'_{ij}-\delta_{ij})E_j,\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i\omega t}.
\end{aligned}\right\}\tag{10,27}$$

В пренебрежении междуэлектронными соударениями, т. е. опуская в (10,27) член $\boldsymbol{S}_{1,\,ee}$, находим в системе координат с осью z, направленной по полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$:

$$\left.\begin{aligned}
&f_{1z}=-\frac{eE_z\dfrac{\partial f_{00}}{\partial v}}{m(i\omega+\nu)},\qquad f_{1x}\pm if_{1y}=-\frac{e(E_x\pm iE_y)\dfrac{\partial f_{00}}{\partial v}}{m[i(\omega\mp\omega_H)+\nu]},\\
&j'_z=\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon'_{zz}-1)E_z=\frac{8e^2NE_z}{3\sqrt{\pi}\,m}\int_0^\infty\frac{u^4e^{-u^2}\,du}{i\omega+\nu(u)},\\
&j'_x\pm ij'_y=\frac{i\omega}{4\pi}\{(\varepsilon'_{xx}-1)\mp i\varepsilon'_{xy}\}(E_x\pm iE_y)=\\
&\qquad=\frac{8e^2N(E_x\pm iE_y)}{3\sqrt{\pi}\,m}\int_0^\infty\frac{u^4e^{-u^2}\,du}{[i(\omega\mp\omega_H)+\nu(u)]};
\end{aligned}\right\}\tag{10,28}$$

здесь $u=\sqrt{\frac{m}{2\varkappa T}}\,v$ и все выкладки аналогичны проводившимся в § 6 для изотропной плазмы.

Из сопоставления выражений (6,3) и (10,28) ясно, что для магнитоактивной плазмы можно использовать результаты вычислений для изотропной плазмы, заменяя в некоторых случаях ω на $\omega\pm\omega_H$. Конкретно компонента ε'_{zz} совпадает с ε' в изотропной плазме, и таким образом, все формулы § 6 применяются непосредственно. В случае других компонент тензора ε'_{ij} характер необходимой замены ясен из выражений:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon'_{xx}\mp i\varepsilon'_{xy}=\varepsilon'_{yy}\pm i\varepsilon'_{yx}=1-i\,\frac{32\sqrt{\pi}\,e^2N}{3m\omega}\int\limits_0^\infty\frac{u^4e^{-u^2}\,du}{i\,(\omega\mp\omega_H)+\nu\,(u)},\\
&\varepsilon'_{zz}=\varepsilon'=1-i\,\frac{32\sqrt{\pi}\,e^2N}{3m\omega}\int\limits_0^\infty\frac{u^4e^{-u^2}\,du}{i\omega+\nu\,(u)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(10,29)$$

Если $\nu\,(v)=\mathrm{const}$, т. е. число соударений не зависит от скорости, получаем приведенные раньше формулы «элементарной теории» $\left(\text{напомним, что}\int\limits_0^\infty u^4e^{-u^2}\,du=\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\right)$.

В предельном случае высоких частот и вне области резонанса, т. е. при условии

$$(\omega-\omega_H)^2\gg\nu^2_{\text{эфф}},\qquad(10,30)$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon'_{xx}=\varepsilon'_{yy}=\varepsilon_{xx}-i\,\frac{4\pi\sigma_{xx}}{\omega}=\varepsilon_{yy}-i\,\frac{4\pi\sigma_{yy}}{\omega}=\\
&\qquad=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_H^2}-\frac{i}{2}\left[\frac{\omega_0^2}{(\omega-\omega_H)^2}+\frac{\omega_0^2}{(\omega+\omega_H)^2}\right]\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega},\\
&\varepsilon'_{zz}=\varepsilon_{zz}-i\,\frac{4\pi\sigma_{zz}}{\omega}=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-\frac{i\omega_0^2}{\omega^2}\,\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega},\\
&\varepsilon'_{xy}=-\varepsilon'_{yx}=\varepsilon_{xy}-i\,\frac{4\pi}{\omega}\,\sigma_{xy},\qquad\varepsilon_{xy}=-i\,\frac{\omega_0^2\omega_H}{\omega\,(\omega^2-\omega_H^2)},\\
&\sigma_{xy}=i\,\frac{\omega_0^2\omega_H\omega\nu_{\text{эфф}}}{2\pi\,(\omega^2-\omega_H^2)^2},
\end{aligned}\right\}\qquad(10,31)$$

где $\nu_{\text{эфф}}$ совпадает с эффективным числом соударений, введенным в § 6 для высокочастотного случая (см. (6,9)).

Для произвольных частот удобно воспользоваться выражениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\\
&=1-\frac{\omega_0^2}{2\omega}\left[\frac{(\omega-\omega_H)K_\varepsilon\left(\dfrac{|\omega-\omega_H|}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{(\omega-\omega_H)^2+\nu_{\text{эфф}}^2}+\frac{(\omega+\omega_H)K_\varepsilon\left(\dfrac{\omega+\omega_H}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{(\omega+\omega_H)^2+\nu_{\text{эфф}}^2}\right],\\
&\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\frac{\omega_0^2}{8\pi}\left[\frac{K_\sigma\left(\dfrac{|\omega-\omega_H|}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{(\omega-\omega_H)^2+\nu_{\text{эфф}}^2}+\frac{K_\sigma\left(\dfrac{\omega+\omega_H}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{(\omega+\omega_H)^2+\nu_{\text{эфф}}^2}\right]\nu_{\text{эфф}},\\
&\varepsilon_{xy}=-i\frac{\omega_0^2}{2}\left\{\frac{(\omega-\omega_H)K_\varepsilon\left(\dfrac{|\omega-\omega_H|}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{\omega\left[(\omega-\omega_H)^2+\nu_{\text{эфф}}^2\right]}-\frac{(\omega+\omega_H)K_\varepsilon\left(\dfrac{\omega+\omega_H}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{\omega\left[(\omega+\omega_H)^2+\nu_{\text{эфф}}^2\right]}\right\},\\
&\sigma_{xy}=i\frac{\omega_0^2}{8\pi}\left\{\frac{K_\sigma\left(\dfrac{|\omega-\omega_H|}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{(\omega-\omega_H)^2+\nu_{\text{эфф}}^2}-\frac{K_\sigma\left(\dfrac{\omega+\omega_H}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{(\omega+\omega_H)^2+\nu_{\text{эфф}}^2}\right\}\nu_{\text{эфф}},\\
&\varepsilon_{zz}=1-\frac{\omega_0^2K_\varepsilon\left(\dfrac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{\omega^2+\nu_{\text{эфф}}^2},\qquad \sigma_{zz}=\frac{\omega_0^2\nu_{\text{эфф}}K_\sigma\left(\dfrac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}\right)}{4\pi\left(\omega^2+\nu_{\text{эфф}}^2\right)}.
\end{aligned}\right\}\quad (10{,}32)$$

Здесь функции $K_\varepsilon(x)$ и $K_\sigma(x)$ как при учете, так и без учета междуэлектронных соударений совпадают с соответствующими функциями, введенными в изотропном случае (см. (6,25)). Напомним, что при $x\to\infty$ функции $K_\varepsilon(x)=K_\sigma(x)=1$. Поэтому при условии (10,30) формулы (10,32) переходят в (10,31), как это и должно быть. Заметим, что вблизи резонанса, когда

$$(\omega-\omega_H)^2\ll\nu_{\text{эфф}}^2,\qquad (10{,}33)$$

поведение магнитоактивной плазмы в некотором отношении близко к поведению изотропной плазмы в низкочастотной области (т. е. в области, где $\omega^2\ll\nu_{\text{эфф}}^2$). Например, при $\omega=\omega_H$ и $\omega^2\gg\nu_{\text{эфф}}^2$ имеем:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\frac{\omega_0^2K_\sigma(0)}{8\pi\nu_{\text{эфф}}};$$

в изотропной же плазме значение $K_{\varepsilon,\sigma}(0)$ фигурирует лишь при $\omega\to0$. Кроме того, в области (10,33), как и в низкочастотном случае для изотропной электронно-ионной плазмы, существенны междуэлектронные соударения (в (10,32) вклад этих соударений при любых частотах учитывается при использовании соответствующих значений K_ε и K_σ, приведенных в табл. 6,2 и 6,3). В рамках «элементарной теории», когда $\nu(v) = \text{const}$, конечно, $K_\varepsilon = K_\sigma = 1$. Представляющая наибольший интерес функция $K_\sigma(x)$ в случае соударений с молекулами — твердыми шариками — изменяется максимум на 13%; при соударениях с ионами и учете междуэлектронных соударений функция $K_\sigma(x)$ меняется не более чем в два раза (см. табл. 6,2 и 6,3). Поэтому в большинстве случаев применение результатов элементарной теории вполне оправдано, тем более, что частота соударений $\nu_{\text{эфф}}$ обычно известна лишь приближенно (последнее может быть связано, например, с недостаточно точным знанием температуры или состава рассматриваемой плазмы). Возможность такого упрощения весьма существенна, так как формулы (10,32) значительно сложнее формул элементарной теории (10,12). При переходе же к другим координатным системам это усложнение еще более значительно.

Выше не учитывалось тепловое движение электронов (если, конечно, не говорить об учете соударений). Другими словами, не принималась во внимание возможная роль пространственной дисперсии. Такой учет был бы связан с отказом от использования локальных характеристик среды — компонент тензора ε'_{ij}, зависящих только от частоты. Однако, вводить тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{H}^{(0)})$ мы, как правило, не будем, а учет пространственной дисперсии в случае магнитоактивной плазмы будет проведен в §§ 12, 14 непосредственно для распространяющихся волн.

Следует также еще раз подчеркнуть, что все наше рассмотрение ограничено случаем нерелятивистской плазмы. Движущийся в магнитном поле релятивистский электрон излучает не только волны с частотой $\omega_H^* = \frac{|e|H^{(0)}}{mc}\frac{mc^2}{E}$, но и обертоны этой частоты. Поэтому релятивистская плазма будет резонансным образом поглощать на частотах $s\omega_H^*$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$, в то время как приведенные выше выражения для ε'_{ij} имеют резонанс лишь на частоте ω_H. Релятивистская плазма в этой книге рассматриваться не будет, но в § 12 будет учтена роль теплового движения (при $\beta_T^2 = \frac{\varkappa T}{mc^2} \ll 1$) и, в частности, рассмотрено резонансное поглощение на частотах ω_H *), $2\omega_H$ и $3\omega_H$.

Влияние движения ионов. Перейдем к рассмотрению влияния ионов, определив тензор ε'_{ij} при учете их движения.

Ограничиваясь элементарной теорией, будем исходить из таких уравнений движения для электронов, ионов и молекул (этим частицам соответствуют индексы e, i и m):

---

*) При пренебрежении тепловым движением резонансное поглощение волн на частоте ω_H имеет место лишь для необыкновенной волны при $\alpha = 0$ (см. § 11). При учете теплового движения резонансное поглощение на частоте ω_H имеет место уже при всех углах α и для волн обоих типов.

$$m\dot{\boldsymbol v}_e = e\boldsymbol E + \frac{e}{c}[\boldsymbol v_e \boldsymbol H^{(0)}] + m\nu_{ei}(\boldsymbol v_i - \boldsymbol v_e) + m\nu_{em}(\boldsymbol v_m - \boldsymbol v_e), \qquad (10{,}34)$$

$$M\dot{\boldsymbol v}_i = -e\boldsymbol E - \frac{e}{c}[\boldsymbol v_i \boldsymbol H^{(0)}] + m\nu_{ei}(\boldsymbol v_e - \boldsymbol v_i) + M\nu_{im}(\boldsymbol v_m - \boldsymbol v_i), \qquad (10{,}35)$$

$$M\dot{\boldsymbol v}_m = -m\nu_{em}\frac{N}{N_m}(\boldsymbol v_m - \boldsymbol v_e) - M\nu_{im}\frac{N}{N_m}(\boldsymbol v_m - \boldsymbol v_i). \qquad (10{,}36)$$

Здесь для простоты принято, что все ионы однозарядные, $N_i = N_+ = N$, а масса ионов и молекул одинакова и равна M (напомним также, что заряд электрона обозначен через e и поэтому $e < 0$).

При отсутствии соударений характер написанных уравнений ясен без дополнительных пояснений. Заметим лишь, что под $\boldsymbol v_e$, $\boldsymbol v_i$ и $\boldsymbol v_m$ понимаются средние значения скоростей, взятые по большому числу частиц. Члены, описывающие соударения, пропорциональны относительным средним скоростям сталкивающихся частиц, так как, например, при равенстве средних скоростей электронов и ионов эти средние скорости уже не могут изменяться в результате соударений. В использованном же раньше уравнении (10,8) скорость $\boldsymbol v_i$ отсутствует просто потому, что ионы считаются неподвижными. Сила трения, действующая со стороны электронов на ионы, равна $m\nu_{ei}(\dot{\boldsymbol r}_e - \dot{\boldsymbol r}_i) = m\nu_{ei}(\boldsymbol v_e - \boldsymbol v_i)$, поскольку она должна равняться взятой с обратным знаком силе трения, с которой ионы действуют на электроны. Аналогичное соображение определяет вид членов в правой части уравнения (10,36). При этом нужно только учесть, что, например, число соударений электрона с молекулами равно $\nu_{em} = \overline{q_{em}v}N_m$, а число соударений молекулы с электронами будет $\nu_{me} = \overline{q_{em}v}N = \nu_{em}\frac{N}{N_m}$. Числа соударений ν_{ei}, ν_{em} и ν_{im} в уравнениях (10,34) — (10,36) представляют собой некоторые эффективные значения и могут зависеть только от концентрации и температуры.

Плотность тока, которую нужно подставить в уравнения поля, равна

$$\boldsymbol j' = eN(\boldsymbol v_e - \boldsymbol v_i) = eN\boldsymbol w, \quad j'_i = \frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon'_{ij} - \delta_{ij})E_j. \qquad (10{,}37)$$

Считая все величины пропорциональными $e^{i\omega t}$ и направляя внешнее поле $\boldsymbol H^{(0)}$ по оси z, из (10,34) и (10,35) при пренебрежении соударениями получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&v_{ez}=\frac{eE_z}{im\omega}, \quad v_{iz}=-\frac{eE_z}{iM\omega}, \quad v_{ex}\pm iv_{ey}=\frac{e(E_x\pm iE_y)}{im(\omega\mp\omega_H)},\\
&v_{ix}\pm iv_{iy}=-\frac{e(E_x\pm iE_y)}{iM(\omega\pm\Omega_H)}, \quad \mathbf{v}_m=0, \quad \mathbf{w}=\mathbf{v}_e-\mathbf{v}_i,\\
&\omega_H=\frac{|e|H^{(0)}}{mc}=-\frac{eH^{(0)}}{mc}, \quad \Omega_H=\frac{|e|H^{(0)}}{Mc},
\end{aligned}\right\} \qquad (10{,}38)$$

$$\left.\begin{aligned}
&j'_z=eNw_z=\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon'_{zz}-1)E_z=-i\left(\frac{e^2N}{m}+\frac{e^2N}{M}\right)\frac{E_z}{\omega}\approx\frac{ie^2NE_z}{m\omega},\\
&j'_x\pm ij'_y=\frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon'_{xx}-1\mp i\varepsilon'_{xy})(E_x\pm iE_y)=eN(w_x\pm iw_y)=\\
&\quad=-ie^2N\left(\frac{1}{m(\omega\mp\omega_H)}+\frac{1}{M(\omega\pm\Omega_H)}\right)(E_x\pm iE_y)=\\
&\quad=\frac{ie^2N\omega(E_x\pm iE_y)}{\frac{Mm}{m+M}(\omega\mp\omega_H)(\omega\pm\Omega_H)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10{,}39)$$

На параллельные полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$ компоненты скоростей и тока поле не влияет, и поэтому, как и в изотропном случае, вклад ионов (при $N_i=N$) в $\frac{m}{M}$ раз меньше вклада электронов.

Что касается перпендикулярных к полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$ компонент скоростей и тока, то ролью ионов обычно можно пренебречь при условии, что $\omega\gg\Omega_H$ (см. (10,5)). Если же

$$\omega\ll\Omega_H, \qquad (10{,}40)$$

перпендикулярные к полю скорости электронов и ионов примерно равны, в силу чего ток очень мал. Действительно, при $\omega=0$

$$v_{ex}=v_{ix}=\frac{cE_y}{H^{(0)}}, \quad v_{ey}=v_{iy}=-\frac{cE_x}{H^{(0)}}, \quad j'_x=j'_y=0, \qquad (10{,}41)$$

так как $m\omega_H=M\Omega_H=\frac{|e|H^{(0)}}{c}$. Результат (10,41) сразу ясен, конечно, уже из исходных уравнений (10,34) и (10,35).

Итак, в низкочастотном случае (10,40) роль ионов весьма существенна. В изотропной плазме $\Omega_H=0$ и вся такая низкочастотная область вообще исчезает.

При учете соударений удобно записать систему уравнений (10,34) — (10,36) для пропорциональных $e^{i\omega t}$ величин в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&(i\omega+\nu_{ei}+\nu_{em})\,\boldsymbol{w}=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}+\frac{e}{mc}[\boldsymbol{w}\boldsymbol{H}^{(0)}]+\\
&\qquad\qquad+\frac{e}{mc}[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{H}^{(0)}]+\nu_{em}(\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{v}_i),\\
&i\omega\boldsymbol{r}_i=-\frac{e}{M}\boldsymbol{E}-\frac{e}{Mc}[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{H}^{(0)}]+\frac{m}{M}\nu_{ei}\boldsymbol{w}+\nu_{im}(\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{v}_i),\\
&\boldsymbol{v}_m=\frac{\nu_{im}\frac{N}{N_m}\boldsymbol{v}_i+\frac{m}{M}\nu_{em}\frac{N}{N_m}\boldsymbol{w}}{i\omega+\nu_{im}\frac{N}{N_m}},\quad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}_e-\boldsymbol{v}_i,
\end{aligned}\right\}\tag{10,42}$$

где в коэффициентах перед переменными пренебрежено величинами порядка $\frac{m}{M}$ и $\sqrt{\frac{m}{M}}$ по сравнению с единицей $\left(\text{при этом учтено, что } \nu_{im}\sim\sqrt{\frac{m}{M}}\nu_{em}\right)$. Так же будем поступать ниже без дополнительных оговорок.

Из (10,42) легко получить общее выражение для тензора ε'_{ij}. Для компоненты ε'_{zz} в принятом приближении получается старое выражение $\varepsilon'_{zz}=1-\frac{\omega_0^2}{\omega[\omega-i(\nu_{ei}+\nu_{em})]}$. Кроме того, по-прежнему $\varepsilon'_{xz}=\varepsilon'_{zx}=\varepsilon'_{yz}=\varepsilon'_{zy}=0$ и $\varepsilon'_{xx}=\varepsilon'_{yy}$, $\varepsilon'_{xy}=-\varepsilon'_{yx}$, причем

$$\varepsilon'_{xx}\mp i\varepsilon'_{xy}=1-\frac{\omega_0^2\left(1+\dfrac{\nu_{im}}{i\omega+\nu_{im}\frac{N}{N_m}}\right)}{A-iB};\tag{10,43}$$

где

$$A=[\omega\mp\omega_H-i(\nu_{ei}+\nu_{em})]\left(\omega\pm\Omega_H+\frac{\omega\nu_{im}}{i\omega+\nu_{im}\frac{N}{N_m}}\right),$$

$$B=\left(\frac{\omega\nu_{em}\frac{m}{M}}{i\omega+\nu_{im}\frac{N}{N_m}}\mp\Omega_H\right)\left(\nu_{ei}+\frac{\nu_{em}\nu_{im}\frac{N}{N_m}}{i\omega+\nu_{im}\frac{N}{N_m}}\right).$$

При отсутствии молекул, когда $\nu_{im}=\nu_{em}=0$, получим:

$$\varepsilon'_{xx}\mp i\varepsilon'_{xy}=1-\frac{\omega_0^2}{(\omega\mp\omega_H)(\omega\pm\Omega_H)-i\omega\nu_{ei}}.\tag{10,44}$$

В высокочастотном случае (10,5) выражения для ε'_{ij}, разумеется, переходят в (10.12).

Характерно, что при резонансе для электронов (при $\omega = \omega_H$) $\varepsilon'_{xx} - i\varepsilon'_{xy} = 1 - \frac{i\omega_0^2}{\omega_H \nu_{ei}}$, а при резонансе для ионов (при $\omega = \Omega_H$) $\varepsilon'_{xx} + i\varepsilon'_{xy} = 1 - \frac{i\omega_0^2}{\Omega_H \nu_{ei}}$, т. е. ионный резонанс в $\frac{M}{m}$ раз «выше» $\left(\text{точнее, соответствующие компоненты тензора проводимости } \sigma_{ij} \text{ в } \frac{M}{m} \text{ раз больше}\right)$.

Точность выражений (10,43) и (10,44) ниже аналогичных формул, полученных в рамках элементарной теории без учета движения тяжелых частиц. В этом последнем случае элементарная теория строго соответствует предположению о независимости числа соударений от скорости и пренебрежению междуэлектронными соударениями. Для столкновений между тяжелыми частицами использованное приближение является менее определенным, поскольку в этих условиях незаконно учитывать соударения в кинетическом уравнении членом типа νf_1 (см. (6,1)).

Формулы элементарной теории тем не менее удобны и полезны для оценок поглощения и, главное, при пренебрежении пространственной дисперсией совершенно справедливы для вычисления тензора ε_{ij} при слабом поглощении *). Между тем именно с последним случаем приходится часто сталкиваться на практике. Заметим, наконец, что при учете движения ионов тензор ε'_{ij} можно было бы также определить иначе, а именно в системе отсчета, где средняя скорость движения всех частиц равна нулю. Подобное определение приводит, вообще говоря, к существенно другим выражениям для ε'_{ij}, хотя физические результаты, конечно, от выбора системы отсчета не зависят **).

§ 11. Распространение в магнитоактивной плазме высокочастотных волн

Выражения для показателей преломления и поглощения $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$. Рассмотрим вопрос о распространении в магнитоактивной однородной плазме монохроматических волн с частотой ω, значительно большей гирочастоты ионов Ω_H (см. условие (10,5)). Для таких волн, которые будем называть высокочастотными, влиянием ионов можно пренебречь (речь идет о случае, когда $N_i \sim N$). Поэтому для ε'_{ij} будут использоваться выражения (10,12), что связано также с пренебрежением зависимостью числа соударений от скорости.

---

*) Имеется в виду предельное значение $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}$, получающееся при полном пренебрежении соударениями.

**) Если забыть об этом обстоятельстве, то можно прийти к кажущимся противоречиям. Так, например, из формулы (10,44) следует, что при $\omega_H \neq 0$ и $\omega = 0$ электропроводность среды равна нулю, $\varepsilon'_{xx} = \varepsilon_{xx} = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_H \Omega_H}$ и плотность тока $j' = 0$. Этот результат правилен, но нужно помнить, что в рассматриваемой системе отсчета вся плазма движется со скоростью (10,41). Поэтому в системе отсчета, связанной с плазмой, электрическое поле равно нулю и равенство нулю тока j' вполне понятно (см. также (10,39)).

Исходное волновое уравнение таково (см. (2,21), (2,22), (2,18)):

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\frac{\omega^2}{c^2}\left(\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right)=\\ &\qquad=\Delta\boldsymbol{E}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right)=0,\\ &\qquad\qquad D_i-i\frac{4\pi}{\omega}j_i=\varepsilon'_{ij}E_j. \end{aligned}\right\} \tag{11,1}$$

Отсюда для плоских волн вида $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$ имеем:

$$[\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}]]+\frac{\omega^2}{c^2}\left(\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right)=0. \tag{11,2}$$

В случае однородных плоских волн, которыми ограничимся, плоскости равных фаз и амплитуд совпадают и $k=\frac{\omega}{c}(n-i\varkappa)$.

Вектор $\boldsymbol{k}$ при этом можно записать в виде $\boldsymbol{k}=(n-i\varkappa)\boldsymbol{s}$, где $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{k}/k$ — единичный вещественный вектор. В этом случае уравнение (11,2) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}=\\ &\quad=(n-i\varkappa)^2\{\boldsymbol{E}-\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{E})\}\equiv(n-i\varkappa)^2\left\{\boldsymbol{E}-\frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E})}{k^2}\right\},\\ &\quad D_i-i\frac{4\pi}{\omega}j_i=\varepsilon'_{ij}E_j,\quad \boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{k}}{k},\quad s=1,\quad k=\frac{\omega}{c}(n-i\varkappa). \end{aligned}\right\} \tag{11,2a}$$

Величина $(n-i\varkappa)^2$ находится при этом из системы уравнений (11,2а) как условие существования у этой системы нетривиального решения. Поскольку система (11,2) — (11,2а) состоит из трех уравнений для трех величин E_x, E_y и E_z, можно было бы ожидать, что уравнение для $(n-i\varkappa)^2$ будет 3-й степени (т. е. 6-й степени относительно $(n-i\varkappa)$). Это, однако, не так, поскольку проекция вектора $\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}$ на направление $\boldsymbol{k}$ равна нулю (это сразу ясно, если умножить выражения (11,2) — (11,2а) скалярно на $\boldsymbol{k}$). В то же время выражение $\frac{\boldsymbol{k}}{k}\left(\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right)$ от k не зависит, так как тензор ε'_{ij} при пренебрежении пространственной дисперсией зависит только от ω, но не от $k=\frac{\omega}{c}(n-i\varkappa)$.

Таким образом, в волне между компонентами E_x, E_y и E_z существует линейная связь, не зависящая от $(n - i\varkappa)^2$, и, следовательно, условие существования решения у системы (11,2) — (11,2а) приводит лишь к уравнению 2-й степени относительно $(n - i\varkappa)^2$. Этот результат получается, разумеется, автоматически при проведении вычислений. Вместе с тем, имея в виду цели дальнейшего изложения, удобно сразу же выбрать направление $\boldsymbol{k}$ за ось z и воспользоваться условием $D_z - i\frac{4\pi}{\omega}j_z = 0$. Тогда E_z выражается через E_x и E_y с помощью формулы (10,20), а компоненты $D_{x,y} - i\frac{4\pi}{\omega}j_{x,y}$ определяются выражениями (10,21) и (10,22). Что же касается системы (11,2а), то она принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} [A-(n-i\varkappa)^2]\,E_x+iCE_y&=0,\\ -iCE_x+[B-(n-i\varkappa)^2]\,E_y&=0. \end{aligned}\right\}\qquad(11{,}2б)$$

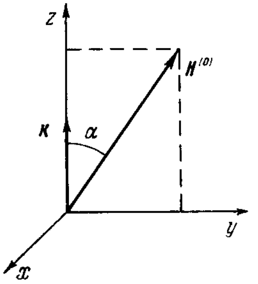


Рис. 11,1. Координатная система, используемая в § 11.

К тому же результату проще прийти непосредственно из (11,1), поскольку для плоской волны, в которой поле зависит лишь от координаты z, это векторное уравнение приводит к системе (2,18) или, согласно (10,21) и (10,22), к системе

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2E_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(AE_x+iCE_y)=0,\\ &\frac{d^2E_y}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(-iCE_x+BE_y)=0,\\ &A=\frac{(1-is)\,u-(1-is)\,(1-is-v)^2-uv\cos^2\alpha}{(1-is)\,u-(1-is)^2\,(1-is-v)-uv\cos^2\alpha},\\ &B=\frac{u\,(1-is-v)-(1-is)\,(1-is-v)^2}{(1-is)\,u-(1-is)^2\,(1-is-v)-uv\cos^2\alpha},\\ &C=\frac{\sqrt{u}\,v\,(1-is-v)\cos\alpha}{(1-is)\,u-(1-is)^2\,(1-is-v)-uv\cos^2\alpha},\\ &\sqrt{u}=\frac{\omega_H}{\omega}=\frac{|e|\,H^{(0)}}{mc\omega},\quad v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}=\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2},\quad s=\frac{\nu_{эфф}}{\omega}. \end{aligned}\right\}\qquad(11{,}3)$$

Используемая здесь система координат ясна из рис. 11,1. Подставляя в (11,3) решение в виде плоской гармонической волны $E_{xy} = E_{0xy}\, e^{\pm i\frac{\omega}{c}(n-i\varkappa)z}$, приходим к (11,2б).

Условие существования у системы (11,2б) нетривиального решения приводит к дисперсионному уравнению, определяющему

$n - i\varkappa$. В нераскрытом виде дисперсионное уравнение, очевидно, таково:

$$\begin{vmatrix} A-(n-i\varkappa)^2 & iC \\ -iC & B-(n-i\varkappa)^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (11,4)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$(n-i\varkappa)^2_{1,2} = n^2_{1,2} - \varkappa^2_{1,2} - 2in_{1,2}\varkappa_{1,2} = \\ = 1 - \frac{2v(1-is-v)}{2(1-is)(1-is-v) - u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u(1-is-v)^2\cos^2\alpha}}. \qquad (11,5)$$

Выбирая здесь у корня верхний знак, получаем величину $(n-i\varkappa)^2_2 \equiv (n_2 - i\varkappa_2)^2$, отвечающую «обыкновенной» волне; выбор нижнего знака соответствует «необыкновенной» волне (ее показатели преломления и поглощения суть n_1 и $\varkappa_1$ *). При отсутствии поглощения

$$n^2_{1,2} = 1 - \frac{2v(1-v)}{2(1-v) - u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u(1-v)^2\cos^2\alpha}} = \\ = 1 - \frac{2\omega_0^2(\omega^2-\omega_0^2)}{2(\omega^2-\omega_0^2)\omega^2 - \omega_H^2\omega^2\sin^2\alpha \pm \sqrt{\omega^4\omega_H^4\sin^4\alpha + 4\omega_H^2\omega^2(\omega^2-\omega_0^2)^2\cos^2\alpha}}; \qquad (11,6)$$

здесь предполагается, что $n^2_{1,2} > 0$, так как при отсутствии поглощения только в этом случае $\varkappa = 0$. Если правая часть выражения (11,6) меньше нуля, то, как ясно из (11,5), ее нужно считать равной $-\varkappa^2_{1,2}$. Однако удобнее при отсутствии поглощения не вводить «показателя поглощения» $\varkappa$ и употреблять формулу (11,6) и при $n^2_{1,2} < 0$; в этом случае просто $n^2_{1,2} = -\varkappa^2_{1,2}$. Именно так мы будем поступать в дальнейшем, обозначая во избежание недоразумений $n^2_{1,2}$ через $\tilde{n}^2_{1,2}$ (см. § 7). Другими словами, при отсутствии поглощения $(n - i\varkappa)^2 = \tilde{n}^2$, причем $\tilde{n}^2$ вещественно. Показатель преломления принимаем равным $n_{1,2} = +\sqrt{\tilde{n}^2_{1,2}}$, решение $n_{1,2} = -\sqrt{\tilde{n}^2_{1,2}}$ соответствует волне, бегущей в противоположном направлении, что будет ниже учитываться непосредственно в выражении для фазы волны.

Некоторые частные случаи. Если магнитное поле $H^{(0)} = 0$, т. е. $u = 0$, то

$$(n-i\varkappa)^2_{1,2} = (n-i\varkappa)^2_0 = 1 - \frac{v}{1-is} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - i\nu_{\text{эфф}})}, \qquad (11,7)$$

как это и должно быть (см. (3,7)).

---

*) Иногда применяются противоположные обозначения, при которых обыкновенной волне отвечает индекс 1, а необыкновенной — индекс 2. Кроме того, часто вместо индекса 1 употребляются индексы *x* или *e* и вместо 2 индекс *o*.

В важном частном случае «продольного распространения», когда волна бежит по полю, т. е. угол $\alpha = 0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} (n - i\varkappa)_1^2 &\equiv (n - i\varkappa)_+^2 = 1 - \frac{v}{1 - is - \sqrt{u}}, \\ (n - i\varkappa)_2^2 &\equiv (n - i\varkappa)_-^2 = 1 - \frac{v}{1 - is + \sqrt{u}} \end{aligned}\right\} \tag{11,8}$$

или при отсутствии поглощения

$$\left.\begin{aligned} \tilde{n}_1^2 &\equiv \tilde{n}_+^2 = 1 - \frac{v}{1 - \sqrt{u}} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - \omega_H)}, \\ \tilde{n}_2^2 &= \tilde{n}_-^2 = 1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u}} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega + \omega_H)}. \end{aligned}\right\} \tag{11,9}$$

Смысл обозначений $\tilde{n}_{1,2}^2 \equiv \tilde{n}_{\mp}^2$ становится ясным при выяснении характера поляризации волн при продольном распространении.

В общем случае поляризацию, т. е. соотношение между компонентами E_x и E_y, находим сразу же из одного из уравнений (11,2б), куда в качестве $(n - i\varkappa)^2$ представляется решение (11,5). В случае продольного распространения удобнее с самого начала ввести выражения

$$F_{\pm} = E_x \pm iE_y, \tag{11,10}$$

для которых из (11,3) получаем:

$$\frac{d^2F_{\pm}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{v}{1 - is \mp \sqrt{u}}\right)F_{\pm} = 0. \tag{11,11}$$

Гармоническое решение этого уравнения в согласии с (11,8) таково:

$$\left.\begin{aligned} F_{\pm} &= F_{0,\pm}\, e^{\pm i\frac{\omega}{c}(n - i\varkappa)_{\pm} z}, \\ (n - i\varkappa)_{\pm}^2 &= 1 - \frac{v}{1 - is \mp \sqrt{u}}. \end{aligned}\right\} \tag{11,12}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае продольного распространения имеются две «нормальные волны», характеризуемые определенной фазовой скоростью $v_{\pm} = \frac{c}{n_{\pm}}$, затуханием $\left(\text{коэффициент поглощения } \mu_{\pm} = \frac{2\omega}{c}\varkappa_{\pm}\right)$ и поляризацией. Так, если имеется волна $(+)$, то для нее $F_- = 0$ и, следовательно, $E_x = iE_y$; в волне $(-)$ соответственно $F_+ = 0$ и $E_x = -iE_y$. Записывая выражение для поля волны с учетом временного фактора, т. е. в виде

$$F_{\pm} = F_{0,\pm}\, e^{i\left(\omega t - \frac{(n - i\varkappa)_{\pm} z}{c}\right)},$$

и переходя к вещественным величинам, легко видеть, что волны ($\pm$) поляризованы по кругу, причем в волне ($+$) вектор $\boldsymbol{E}$ вращается, если смотреть по полю (т. е. по оси z), по часовой стрелке, а в волне ($-$) — против часовой стрелки. Другими словами в волнах ($\pm$) при $z=0$

$$E_x = \mp E_0 \sin \omega t, \quad E_y = E_0 \cos \omega t.$$

Направление вращения вектора $\boldsymbol{E}$ в волне ($+$) совпадает с направлением вращения электрона в магнитном поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$. Естественно поэтому, что, когда частота волны ($+$) приближается к гиромагнитной частоте ω_H, наступает резонанс (для волны ($+$) в (11,12), в знаменателе формулы для $(n-i\varkappa)_+^2$ фигурирует разность $\omega-\omega_H$). Волна ($+$) называется также необыкновенной или волной 1, а волна ($-$) — обыкновенной или волной 2 (см. выше).

К сожалению, принятые нами обозначения не лишены недостатков. Так, в (11,5) и аналогичных выражениях первому индексу 1 отвечает нижний знак $-$, а второму индексу 2 соответствует верхний знак $+$. В то же время, записывая в (11,8), (11,9) и далее n и $\tilde{n}$ в виде $n_\pm$ и $\tilde{n}_\pm$, мы сопоставляем индексу 1 знак $+$ и индексу 2 знак $-$. Поступить иначе было бы, однако, неудобно, ибо тогда не было бы соответствия между обозначениями $F_\pm$ и $n_\pm$. После сделанного предупреждения мы надеемся, что недоразумений не возникнет (к тому же обозначения типа $n_\pm$ встречаются ниже весьма редко).

Наличие двух нормальных волн, т. е. волн с определенной скоростью, поглощением и поляризацией, характерно для любой анизотропной среды; в изотропной же среде имеет место вырождение, заключающееся в том, что поперечные волны любой поляризации имеют одинаковые скорость и поглощение. В интересующем нас случае магнитоактивной среды нормальные волны, вообще говоря, поляризованы эллиптически. В частном случае продольного распространения (т. е. при $\alpha=0$), как выше было показано, поляризация является круговой.

При «поперечном распространении», когда $\alpha=\frac{\pi}{2}$, имеет место другой предельный случай и эллипсы, описываемые вектором $\boldsymbol{E}$ или его проекцией на плоскость xy, вырождаются в прямые линии. Этот вывод сразу ясен из выражений (11,3), из которых следует, что уравнения распространения при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ разделяются, т. е. имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2E_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left[1-\frac{v(1-is-v)}{(1-is)^2-u-(1-is)v}\right]E_x=0,\\ &\frac{d^2E_y}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{v}{1-is}\right)E_y=0. \end{aligned}\right\} \qquad (11,13)$$

Из (11,13) явствует, что нормальными являются волны, у которых вектор $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\frac{\omega}{c}(n-i\varkappa)_{1,2}z}$ имеет равные нулю проекции или по оси x или по оси y. Волна с $E_x = 0$ и вектором $\boldsymbol{E}$, направленным по оси y, т. е. по направлению поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ $\left(\text{см. рис. 11,1, где в рассматриваемом случае } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, называется обыкновенной, так как скорость ее распространения не зависит от силы поля $H^{(0)}$. Это вполне понятно, поскольку магнитное поле не оказывает влияния на движение зарядов в направлении этого поля. Во второй нормальной волне, называемой необыкновенной волной, $E_y = 0$ и вектор $\boldsymbol{E}$ лежит в плоскости xz *).

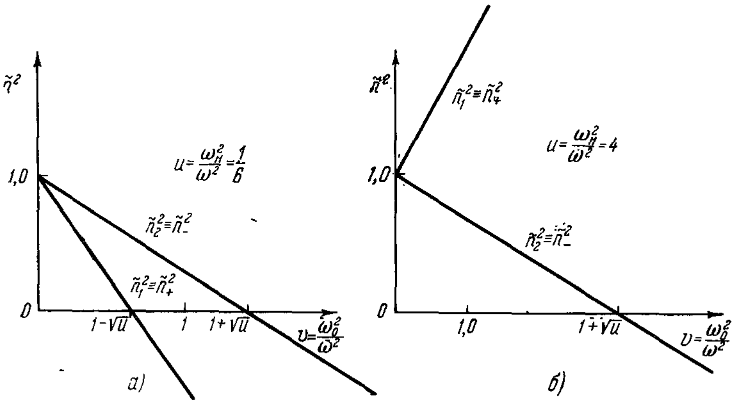


Рис. 11,2. Функции $\tilde{n}^2_{1,2}(v) \equiv \tilde{n}^2_{\pm}(v)$ при $u = \text{const}$ в случае продольного распространения (т. е. при $\alpha = 0$): *а*) $u < 1$; *б*) $u > 1$.

Согласно (11,13) в этих волнах

$$\left.\begin{aligned} (n-i\varkappa)_1^2 &= 1 - \frac{v(1-is-v)}{(1-is)^2 - u - (1-is)v} = \\ &= 1 - \frac{\omega_0^2\left(1 - i\,\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}{(\omega - i\nu_{\text{эфф}})^2 - \omega_H^2 - \left(1 - i\,\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\right)\omega_0^2}, \\ (n-i\varkappa)_2^2 = (n-i\varkappa)_0^2 &= 1 - \frac{v}{1-is} = 1 - \frac{\omega_0^2}{m\omega(\omega - i\nu_{\text{эфф}})}. \end{aligned}\right\} \qquad (11,14)$$

---

*) В необыкновенной волне даже при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ вектор $\boldsymbol{E}$ является эллиптически поляризованным и имеет слагающую не только по оси x, но и по оси z. Напротив, вектор $\boldsymbol{D}$ в этом случае направлен только по оси x (см. ниже).

Тот же результат, конечно, сразу следует и из общего выражения (11,5) при $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Зависимость показателей n и $\varkappa$ от параметров v, u, s и α удобно представлять графически. При отсутствии поглощения такие графики для величины $\tilde{n}^2=(n-i\varkappa)^2$ для углов $\alpha=0$ и $\alpha=\frac{\pi}{2}$, а также для изотропной плазмы представлены на рис. 11,2—11,4. При этом на оси абсцисс отложен параметр $v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, а параметр $u=\frac{\omega_H^2}{\omega^2}$ фиксируется дополнительно. Иногда бывает полезно те же функции $\tilde{n}^2_{1,2}$ изображать в зависимости от других координат, например от $\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{v}}$, при фиксированном u или фиксированной частоте ω_H. Примеры таких графиков приведены на рис. 11,5. При исследовании распространения волн в среде, в которой

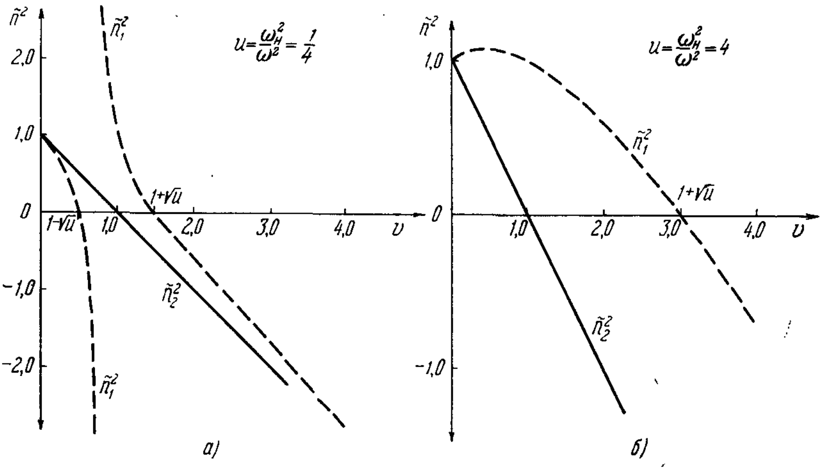


Рис. 11,3. Функции $\tilde{n}^2_{1,2}(v)$ при $u=\mathrm{const}$ в случае поперечного распространения (т. е. при $\alpha=90°$): *а*) $u<1$; *б*) $u>1$.

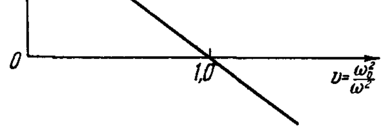


Рис. 11,4. Функция $\tilde{n}^2_{1,2}(v)\equiv\tilde{n}^2_0(v)$ для изотропной плазмы с расстоянием изменяются и концентрация и поле, т. е. меняются оба параметра v и u, используются графики третьего типа; они будут приведены в §§ 35, 36.

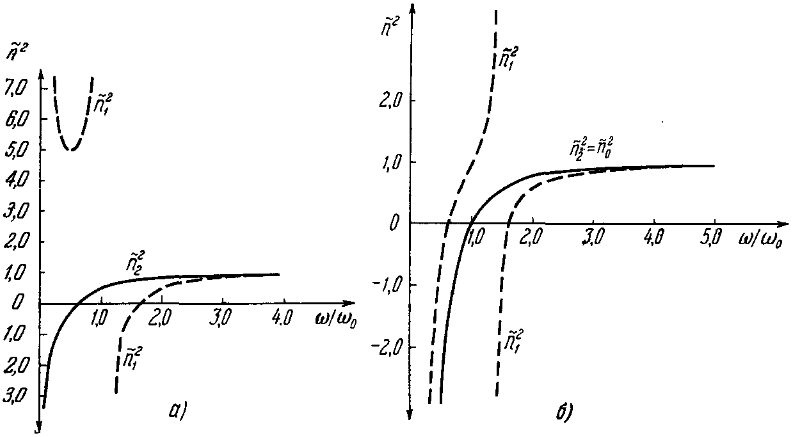


Рис. 11,5. Функции $\tilde n^2_{1,2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0} \pm \frac{\omega_H}{\omega_0}\right)}$, отвечающие углу $\alpha = 0$ при $\frac{\omega_H}{\omega_0} = 1$ (*а*); функции $\tilde n_1^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1 - \frac{1 - \omega_0^2/\omega^2}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2} - 1}$ и $\tilde n_2^2 \equiv n_0^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, отвечающие углу $\alpha = 90°$ при $\frac{\omega_H}{\omega_0} = 1$; выражение $\tilde n_0^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ не зависит от ω_H и относится также к изотропной плазме (*б*).

Распространение волн под произвольным углом α к магнитному полю. Перейдем к исследованию характера распространения волн под произвольным углом α к магнитному полю.

Считая поглощение отсутствующим, начнем со случая, когда

$$u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} < 1. \tag{11,15}$$

При $H^{(0)} = 0{,}5$ *эрст* гирочастота $\omega_H = 8{,}82 \cdot 10^6$ и $\lambda_H = 214$ *м*; таким образом, в земной ионосфере случай (11,15) отвечает диапазону коротких радиоволн.

При условии (11,15) показатель преломления обыкновенной волны $\tilde n_2^2$ обращается в нуль в точке

$$v_{20} \equiv \frac{\omega_0^2}{\omega_{20}^2} = 1, \quad \omega_{20}^2 = \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \tag{11,16}$$

так же как это имеет место при отсутствии магнитного поля (см. (11,8) с $s=0$). В бесконечность функция $\tilde{n}_2^2(v)$ не обращается.

Показатель преломления необыкновенной волны $\tilde{n}_1^2$ обращается в нуль в двух точках:

$$v_{10}^{(\pm)} \equiv \frac{\omega_0^2}{(\omega_{10}^{\pm})^2} = 1 \pm \sqrt{u} = 1 \pm \frac{\omega_H}{\omega_{10}^{\pm}}. \qquad (11,17)$$

Показатель $\tilde{n}_1^2$ обращается в бесконечность в точке

$$v_{1\infty} \equiv \frac{\omega_0^2}{\omega_{1\infty}^2} = \frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha} \equiv \frac{1-u}{1-u_L} = \frac{\omega_{1\infty}^2-\omega_H^2}{\omega_{1\infty}^2-\omega_H^2\cos^2\alpha}. \qquad (11,18)$$

Очевидно, что $v_{1\infty} \leqslant 1$; заметим, что при $v=1$ для любых значений u и α значение $\tilde{n}_1^2=1$. Далее, значения v_{20} и $v_{10}^{(\pm)}$ не зависят от угла α. Вместе с тем угол $\alpha=0$ (продольное распространение) является исключительным, о чем речь будет идти несколько ниже. Зависимость $\tilde{n}_{1,2}^2$ от v при $u=\frac{1}{4}$ $(\omega=2\omega_H)$ и $u=0{,}01$ для $\alpha=45^\circ$ показана на рис. 11,6; на рис. 11,7 приведен график функций $\tilde{n}_{1,2}^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ при $\frac{\omega_H}{\omega_0}=1$ и $\alpha=45^\circ$.

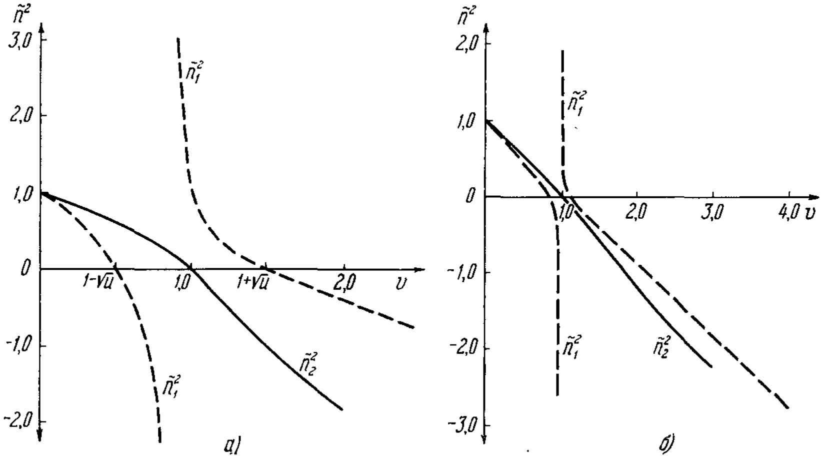


Рис. 11,6. Функции $\tilde{n}_{1,2}^2(v)$ при $\alpha=45^\circ$: *а*) $u=\frac{1}{4}$; *б*) $u=0{,}01$.

Если

$$u=\frac{\omega_H^2}{\omega^2}>1, \qquad (11,19)$$

показатели $\tilde{n}_2^2$ и $\tilde{n}_1^2$ обращаются в нуль соответственно в точках v_{20} и $v_{10}^{(+)}$. Корень $v_{10}^{(-)} = 1 - \sqrt{u}$ в этом случае при интересующих нас

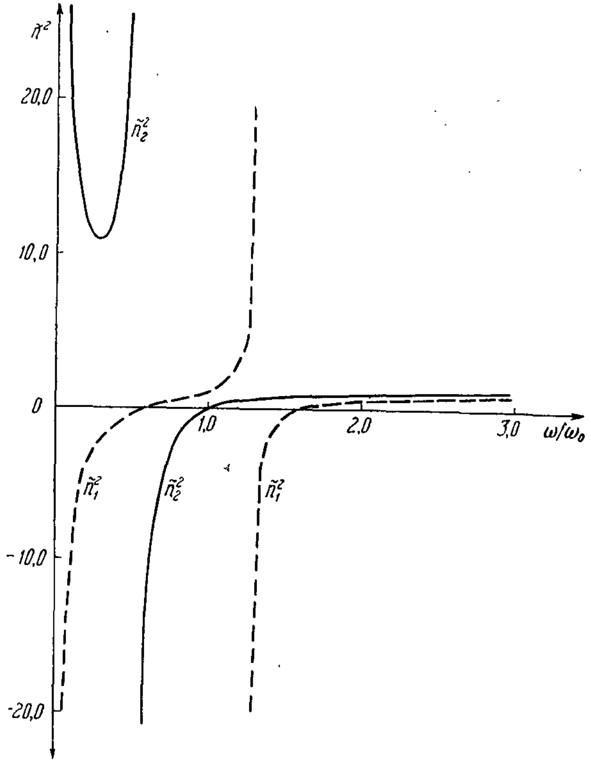


Рис. 11,7. Функции $\tilde{n}^2_{1,2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ при $\frac{\omega_H}{\omega_0} = 1$, $\alpha = 45°$.

вещественных значениях ω фиктивен, так как $v_{10}^{(-)} < 0$. Далее, если

$$u_L = u\cos^2\alpha \equiv \frac{\omega_H^2}{\omega^2}\cos^2\alpha \equiv \frac{\omega_L^2}{\omega^2} < 1, \tag{11,20}$$

то при $u > 1$ (см. (11,19)) ни $\tilde{n}_1^2$, ни $\tilde{n}_2^2$ в бесконечность не обращаются (речь идет об обращении в бесконечность при конечных значениях v). Если же

$$u_L = u\cos^2\alpha > 1, \tag{11,21}$$

то в точке

$$v_{2\infty} = \frac{u-1}{u\cos^2\alpha - 1} \tag{11,22}$$

обращается в бесконечность показатель $\tilde{n}_2^2$. Из (11,22) ясно, что $v_{2\infty} \geqslant \frac{1}{\cos^2\alpha}$, причем равенство имеет место при $u \to \infty$.

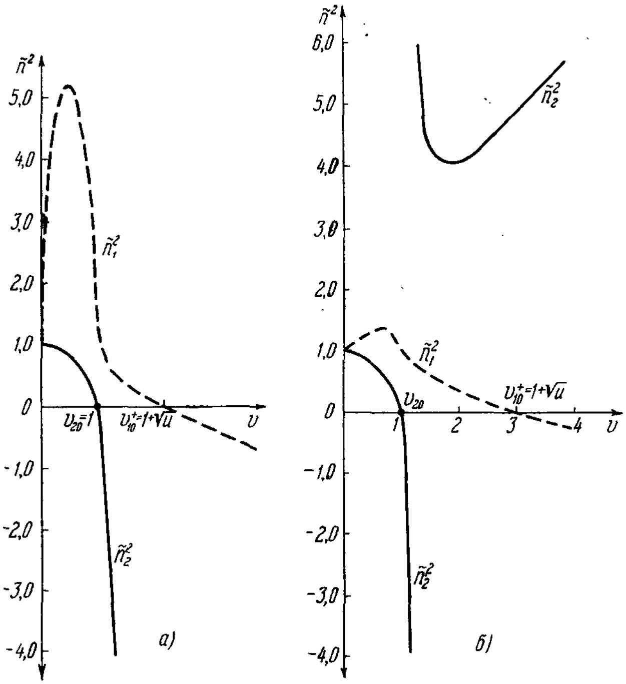


Рис. 11,8. Функции $\tilde{n}_{1,2}^2(v)$ при $\alpha = 20°$: *а*) $u = 1{,}08$; *б*) $u = 4$.

Кривые $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$ в случае (11,19) для $u = 1{,}08$ и $u = 4$ при $\alpha = 20°$ показаны на рис. 11,8.

В связи с громоздкостью общих выражений (11,5), (11,6) для $(n - i\varkappa)_{1,2}^2$ и $\tilde{n}_{1,2}^2$ представляют интерес и широко используются приближенные выражения, отвечающие различным предельным случаям.

Распространение «свистящих атмосфериков» и «спиральных волн» в металлах. Допустим, что соблюдаются неравенства

$$u\cos^2\alpha = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}\cos^2\alpha \gg 1, \quad v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \gg 1, \quad \omega_0 \gg \omega_H \quad (\text{т.е. } v \gg u). \quad (11{,}23)$$

В условиях (11,23), часто осуществляющихся при распространении в ионосфере свистящих атмосфериков [26, 96, 97], имеем:

$$\tilde{n}_2^2 \approx \frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha}, \quad \tilde{n}_1^2 \approx -\frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha}, \tag{11,24}$$

т. е. волна 1 (необыкновенная) распространяться не может, в то время как для волны 2 значение $\tilde{n}_2^2 = n_2^2 > 0$ и часто $n_2^2 \gg 1$. Разумеется, формулой (11,24) можно пользоваться только, если одновременно с условиями (11,23) выполнено условие высокочастотности $\omega \gg \Omega_H$, позволяющее пренебречь влиянием ионов.

Кроме того, в применении к свистящим атмосферикам не всегда можно ограничиться использованием приближения (11,23) — (11,24). Несколько более общий результат получаем при соблюдении условий

$$v^2 \gg \frac{u\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha}, \quad \frac{u}{2v}\sin^2\alpha \ll 1, \quad v \gg 1, \quad s^2 \ll 1. \tag{11,23а}$$

При этом

$$(n - i\varkappa)_2^2 \approx \frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha - 1 + is}. \tag{11,24а}$$

Осуществляя переход к этой формуле от выражения (11,5) при условиях (11,23а), нужно помнить, что обыкновенной волне 2 отвечает положительное значение корня в (11,5); в данном случае это значит, что $\sqrt{u^2\sin^2\alpha + 4u(1 - is - v)^2\cos^2\alpha} \approx 2\sqrt{u}(v - 1 + is)\cos\alpha$. Кроме того ясно, что во всех формулах этого раздела фактически фигурирует не $\cos\alpha$, а $|\cos\alpha|$; как и во многих аналогичных случаях, знак модуля будет тем не менее опущен. Очевидно, формула (11,24а) переходит в выражение (11,24) для n_2^2, если $\sqrt{u}\cos\alpha \gg 1$ и пренебрегается поглощением. Перепишем это выражение (11,24) в другой форме:

$$\tilde{n}_2^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega\omega_H\cos\alpha} = \frac{4\pi c|e|N}{\omega H^{(0)}\cos\alpha} \tag{11,24б}$$

или

$$\omega = \frac{c^2k^2\omega_H\cos\alpha}{\omega_0^2} = \frac{cH^{(0)}k^2\cos\alpha}{4\pi|e|N}. \tag{11,24в}$$

Именно в таком виде (11,24в) записывается обычно дисперсионное уравнение для так называемых «спиральных волн», которые могут распространяться в твердотельной плазме и конкретно в металлах (см., например, обзор [25]). Уже отсюда совершенно ясно, что «спиральные волны» представляют собой не что иное, как «обыкновенную» высокочастотную волну, распространяющуюся в плазме при условиях (11,23) и достаточно слабом затухании. Для металла в достаточно сильном поле подобные условия фактически и реализуются.

Поляризация волн. Поляризация необыкновенной и обыкновенной волн находится из уравнений (11,2) — (11,4), причем в силу (11,4) только одно из уравнений (11,2б) является независимым. Отношение компонент E_y и E_x в волнах каждого типа следующее:

$$\frac{E_{y1,2}}{E_{x1,2}}=K_{1,2}=-i\,\frac{2\sqrt{u}\,(1-is-v)\cos\alpha}{u\sin^2\alpha\mp\sqrt{u^2\sin^4\alpha+4u\,(1-is-v)^2\cos^2\alpha}}\,, \qquad (11,25)$$

где, как и раньше, верхний знак перед корнем относится к обыкновенной волне — волне типа 2 (n_2, $\varkappa_2$, E_{x2}, E_{y2}) и нижний знак к необыкновенной волне — волне типа 1 (n_1, $\varkappa_1$, $E_{x,1}$, $E_{y,1}$). Коэффициенты $K_{1,2}$ иногда называют коэффициентами поляризации.

При отсутствии поглощения

$$\frac{E_{y1,2}}{E_{x1,2}}=K_{1,2}=\frac{iC}{B-\tilde{n}^2_{1,2}}=-\frac{A-\tilde{n}^2_{1,2}}{iC}=$$

$$=-i\,\frac{2\sqrt{u}\,(1-v)\cos\alpha}{u\sin^2\alpha\mp\sqrt{u^2\sin^4\alpha+4u\,(1-v)^2\cos^2\alpha}}\,. \qquad (11,26)$$

Как ясно из (11,25) и (11,26), в общем случае волны обоих типов эллиптически поляризованы, причем при отсутствии поглощения оси эллипсов, описываемых концом проекции вектора $\boldsymbol{E}$ на плоскость xy, параллельны осям x и y (напомним, что оси выбраны так, что магнитное поле лежит в плоскости yz). Далее легко видеть, что

$$K_1K_2=1, \qquad (11,27)$$

причем $|K_{1,2}|$ есть отношение полуосей эллипса.

При $\alpha=0$ имеем $K_1=-i$, $K_2=+i$, т. е. обе волны поляризованы по кругу. При $\alpha=\frac{\pi}{2}$ значения $K_2=-i\infty$ и $K_1=0$, т. е. $E_{x2}=0$ и $E_{y1}=0$, что соответствует линейной поляризации проекции вектора $\boldsymbol{E}$ на плоскость xy. Сказанное находится, конечно, в соответствии с результатом, полученным ранее при непосредственном рассмотрении продольного и поперечного распространения.

Поле E_z в волнах определяется формулой (10,20) или при отсутствии поглощения формулой (10,26):

$$E_z=-i\,\frac{\sqrt{u}\,v\sin\alpha}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha}\,E_x+\frac{uv\cos\alpha\sin\alpha}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha}\,E_y. \qquad (11,28)$$

Отсюда ясно, что при отсутствии поглощения компонента E_z находится в фазе с E_y и сдвинута по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно E_x.

Таким образом, вектор $\boldsymbol{E}$ описывает эллипс в плоскости, параллельной оси x (напомним еще раз, что вектор $\boldsymbol{k}$ направлен по оси z, а поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ лежит в плоскости yz; см. рис. 11,1). Вектор $\boldsymbol{D}$ лежит при этом в плоскости xy, поскольку $D_z = 0$. Поэтому вектор $\boldsymbol{D}$ и в непоглощающей магнитоактивной плазме является поперечным, но о векторе $\boldsymbol{E}$ этого, вообще говоря, сказать нельзя. (При наличии поглощения поперечным является вектор $\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D} - i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}$.)

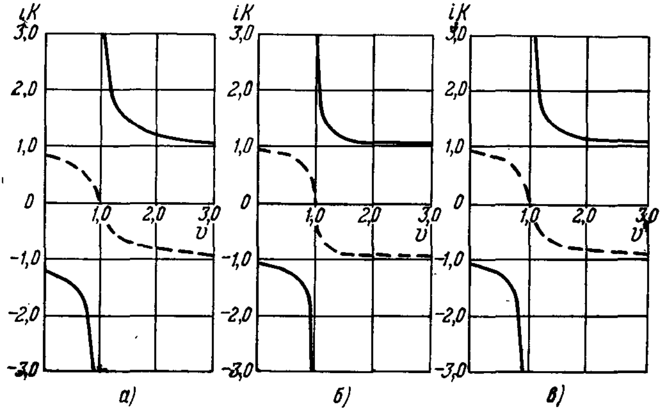


Рис. 11,9. Отношение полуосей эллипса поляризации iK_1 (пунктир) и iK_2 (сплошные линии): *а*) $u = \frac{1}{4}$, $\alpha = 45°$; *б*) $u = 1{,}08$, $\alpha = 20°$; *в*) $u = 4$, $\alpha = 20°$.

Что касается зависимости поляризации волн обоих типов от параметра v, то в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ такой зависимости нет, если речь идет о компонентах $E_{x,y}$. Компонента E_z при $\alpha = 0$ и для волны 2 при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ равна нулю при всех v; компонента E_z для волны 1 при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ зависит от v (в этом случае вектор $\boldsymbol{E}$ описывает эллипс в плоскости xz, причем отношение полуосей зависит от v). При других значениях α поляризация зависит от v, причем волна типа 2 при $v = 1$ всегда линейно поляризована (при $v = 1$ имеем $|K_2| \to \infty$, $E_{x2} = 0$, вектор $\boldsymbol{E}$ линейно поляризован в плоскости yz). В волне 1 при $v = 1$ вектор $\boldsymbol{E}$, вообще говоря, эллиптически поляризован в плоскости xz (при $v = 1$ $|K_1| \to \infty$, $E_{y1} = 0$). Зависимость величины $iK_{1,2}$, т. е. отношения полуосей эллипсов в плоскости xy, от v при некоторых значениях u и α ясна из рис. 11,9. Помимо точки $v = 1$ поляризация весьма специфичным образом ведет себя также в точке

$v_{1,\,2\infty}$, где показатели преломления волн 1 или 2 обращаются в бесконечность (см. (11,18) и (11,22)). Из формулы (11,28) ясно, что при $v \to v_{1,2\infty}$ значение $|E_z| \to \infty$ при конечных значениях E_x и E_y. Другими словами, при $v \to v_{1,\,2\infty}$ волны линейно поляризованы в направлении вектора распространения $\boldsymbol{k}$, т. е. являются продольными.

О нормальных волнах. Случай малых углов α. Формулы (11,5), (11,25) и (10,20) или при отсутствии поглощения формулы (11,6), (11,26) и (11,28) полностью определяют характер волн, распространяющихся при неучете пространственной дисперсии в однородном ионизированном газе, находящемся в постоянном магнитном поле. В этом случае, как и в других анизотропных, двоякопреломляющих средах, в каждом направлении, характеризуемом углом α между $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и волновым вектором $\boldsymbol{k}$, могут распространяться плоские волны двух типов. Эти, как иногда говорят, «нормальные волны», в нашем случае «обыкновенная» волна 2 и «необыкновенная» волна 1, отличаются скоростью распространения $\left(\text{фазовая скорость } v_{\text{ф}} = \frac{c}{n_{1,2}}\right)$, показателем поглощения и поляризацией.

В изотропной же среде, как мы видели, существуют три высокочастотные волны, одна из которых является продольной плазменной волной. Возникает поэтому вопрос о возможности существования плазменных волн при наличии магнитного поля и о характере предельного перехода от магнитоактивной плазмы к изотропной. Эти вопросы будут рассмотрены в следующем § 12 в связи с обсуждением роли пространственной дисперсии. Сейчас же остановимся на несколько другом вопросе о предельном переходе от распространения под углом $\alpha \neq 0$ к продольному распространению, когда $\alpha = 0$ (в § 12 мы увидим, что этот вопрос фактически оказывается тесно связанным с предыдущим). Проблема предельного перехода к углу $\alpha = 0$ возникает потому, что при $\alpha = 0$ для обыкновенной волны $\tilde{n}_2^2 \equiv \tilde{n}_-^2 = 0$ при $v = v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$, а для необыкновенной волны $\tilde{n}_1^2 \equiv \tilde{n}_+^2 = 0$ при $v = v_{10}^{(-)} = 1 - \sqrt{u}$ (см. (11,9)). Между тем при $\alpha \neq 0$, как указано, $\tilde{n}_2^2 = 0$ в точке $v_{20} = 1$ и $\tilde{n}_1^2 = 0$ при $v_{10}^{(\pm)} = 1 \pm \sqrt{u}$. Характер особенности, имеющей место при $\alpha \to 0$, становится ясным, если рассмотреть кривые $\tilde{n}_{1,2}^2\,(v)$ при малых углах α. Из рис. 11,10, на котором представлен случай $\alpha = 10^\circ$, $u = \frac{1}{4}$ и $u = 4$, а также из более детального анализа явствует. что при $\alpha \to 0$ кривые $\tilde{n}_{1,2}^2\,(v)$ переходят в прямые (11,9) и прямую $v = 1$ (см. также рис. 11,11). Этим объясняется и тот факт, что при $\alpha = 0$ выражения (11,9) для $\tilde{n}_{1,2}^2$ в бесконечность не обращаются, в то время

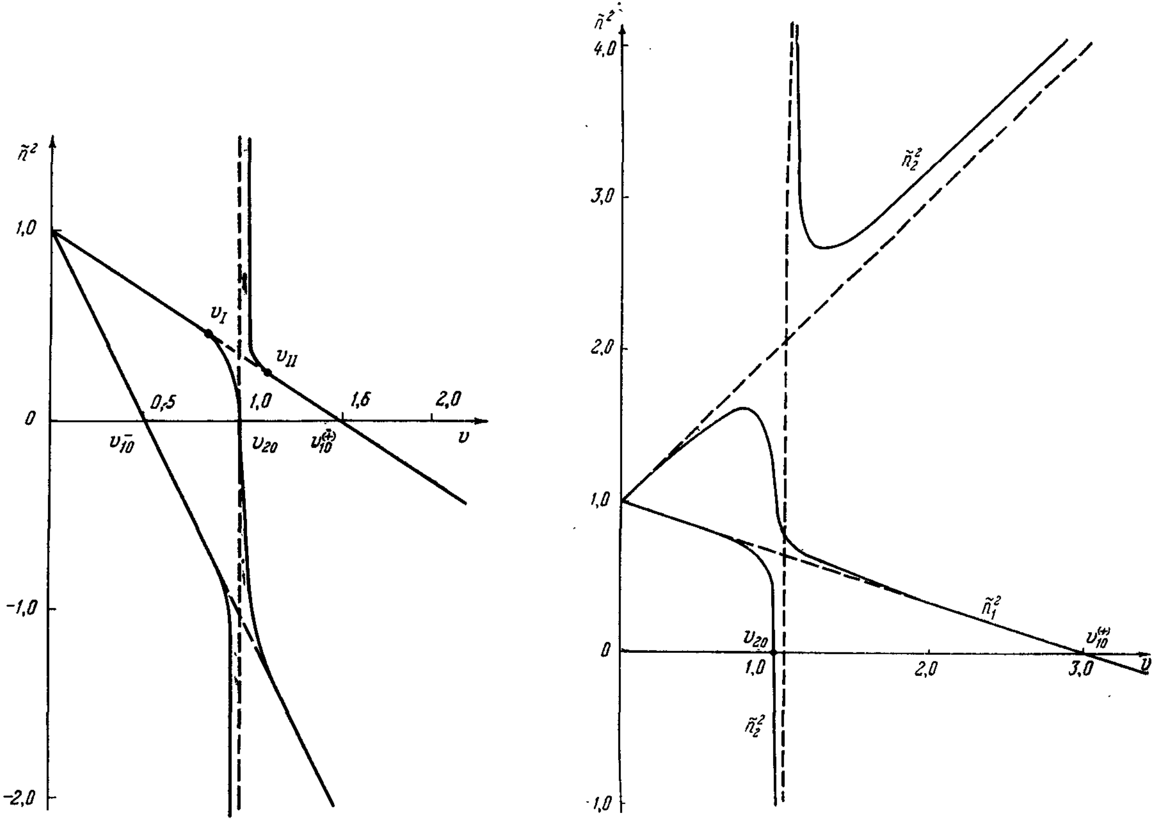


Рис. 11,10. Квадрат показателя преломления (функции $\tilde{n}^2_{1,2}(v)$) для $\alpha = 10^\circ$ (сплошные линии), $\alpha = 0^\circ$ (пунктир) при $u = \frac{1}{4}$ (слева) и $u = 4$ (справа).

как согласно общей формуле (11,18) при $\alpha = 0$ параметр $v_{1\infty} = 1$ (т. е. имеется точка, где величина $\tilde{n}_1^2$ при отсутствии поглощения равна бесконечности). Дело, очевидно, в том, что формула (11,18) получена из формулы (11,6), переходящей при $\alpha \to 0$ в (11,9)

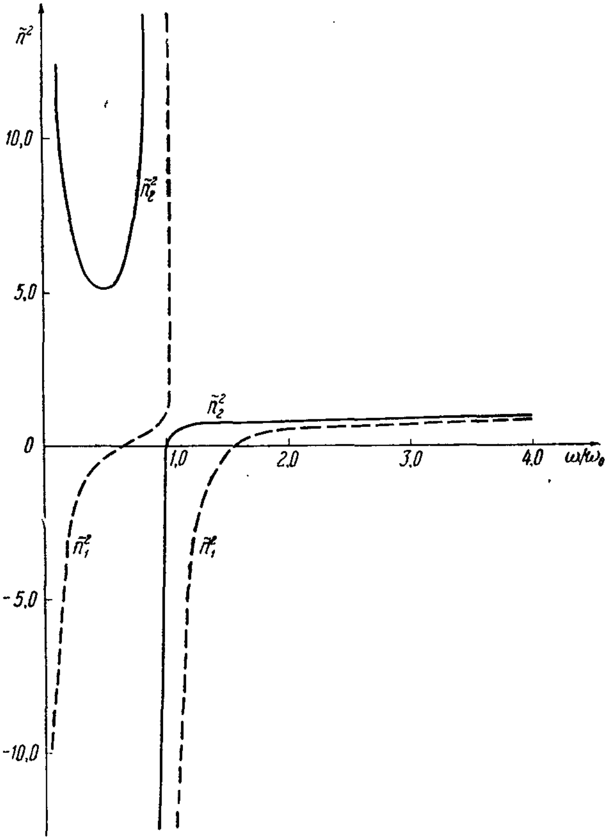


Рис. 11,11. Функции $\tilde{n}^2_{1,2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ при $\frac{\omega_H}{\omega_0} = 1$ и $\alpha = 10°$.

и прямую $v = 1$, на которой $\tilde{n}_1^2$ принимает, в частности, бесконечные значения. В случае неоднородной среды такой нетривиальный характер предельного перехода к продольному распространению приводит к интересным следствиям (см. § 28).

Предельный переход $\alpha \to 0$ специфичен также с точки зрения зависимости поляризации от параметра v. При малых α

поляризация волн близка к круговой, причем при переходе через точку $v=1$ знак вращения изменяется на обратный (рис. 11,12). Поэтому при $v \approx 1$ волна типа 2 из области $v > 1$ может «перейти» в волну типа 1 из области $v < 1$, как это и должно быть согласно рис. 11,10 (другими словами, при $\alpha \to 0$, $v \to 1$ поляризация волны 2 при $v < 1$ и поляризация волны 1 при $v > 1$ совпадают) *).

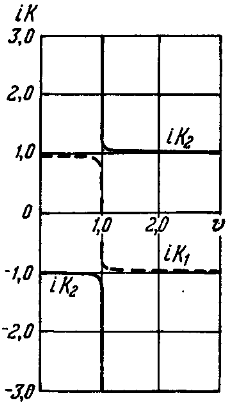


Рис. 11,12. Отношение полуосей $iK_{1,2}$ при $\alpha=10^\circ$ и $u=\frac{1}{4}$.

Заметим также, что обе волны эллиптически поляризованы и в пределе при $v \to 0$:

$$K_{1,2}(v=0) = -i\frac{2\sqrt{u}\cos\alpha}{u\sin^2\alpha \mp \sqrt{u^2\sin^4\alpha+4u\cos^2\alpha}}. \qquad (11,29)$$

Вместе с тем ясно, что при $v=\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}=0$, т. е. при отсутствии электронов (другими словами, в вакууме или практически в воздухе), никакого двойного лучепреломления быть не может; в согласии с этим по формуле (11,6) при $v=0$ значение $\tilde{n}^2_{1,2}=1$. Разумеется, здесь нет противоречия, так как в вакууме в качестве «нормальных волн» можно выбрать волны любой поляризации, и в частности эллиптической. Однако в случае неоднородной среды в начале слоя (при $v \to 0$) возникает вопрос о характере изменения с расстоянием поляризации падающей из вакуума волны, которая может иметь произвольную поляризацию; на этом вопросе мы остановимся в § 26.

Учет поглощения. Особенности кривых $\tilde{n}^2_{1,2}(v, u, \alpha)$ и $K_{1,2}(v, u, \alpha)$ продискутированы выше лишь при отсутствии поглощения. Учет поглощения сильно усложняет картину, и разбирать этот вопрос во всей полноте мы не будем (см. [98—106], а также [5, 19, 32, 43, 72, 77, 97]) **), ограничившись рассмотрением важнейших частных случаев, а также конкретными примерами.

---

*) Прослеживая предельный переход $\alpha \to 0$, мы называем волны волнами типа 1 или 2 в соответствии со случаем $\alpha \neq 0$. Кривые $\tilde{n}^2$ для волн 1 и 2 (или $\pm$) при $\alpha=0$ составлены, как ясно из рис. 11,10, из частей кривых $\tilde{n}^2_{1,2}$ для этих волн при $\alpha \neq 0$. Таким образом, при $\alpha \to 0$ происходит также известное переименование волн.

**) В ряде работ исследование кривых $n_{1,2}(v, u, s, \alpha)$, $\varkappa_{1,2}(v, u, s, \alpha)$ и $K_{1,2}(v, u, s, \alpha)$ приводилось с учетом лоренцовой поляризационной поправки, т. е. принимая для действующего поля выражение (3,14). Как указано в § 3, в плазме учитывать эту «поправку» не нужно. Поэтому в настоящей главе, как и во всей книге, принято соотношение (3,12): $E_{\text{эфф}}=E$. Кривые n, $\varkappa$ и K с учетом лоренцовой поправки в ряде случаев (главным образом при $u > 1$) довольно сильно отличаются от получающихся без ее учета.

При продольном распространении ($\alpha = 0$) формулы для $(n - i\varkappa)^2_{1,2}$ уже были приведены и при наличии поглощения (см. (11,8), (11,12)). Приведем здесь отдельно вещественную и мнимую части:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{1,2} \equiv n^2_{1,2} - \varkappa^2_{1,2} \equiv n^2_{\mp} - \varkappa^2_{\mp} &= 1 - \frac{v(1 \pm \sqrt{u})}{(1 \pm \sqrt{u})^2 + s^2} = \\
&= 1 - \frac{\omega_0^2 \dfrac{\omega \pm \omega_H}{\omega}}{(\omega \pm \omega_H)^2 + \nu^2_{\text{эфф}}}, \\
\frac{4\pi\sigma_{1,2}}{\omega} \equiv 2n_{1,2}\varkappa_{1,2} \equiv 2n_{\mp}\varkappa_{\mp} &= \frac{sv}{(1 \pm \sqrt{u})^2 + s^2} = \\
&= \frac{\dfrac{\omega_0^2 \nu_{\text{эфф}}}{\omega}}{(\omega \pm \omega_H)^2 + \nu^2_{\text{эфф}}},
\end{aligned}\right\} \qquad (11,30)$$

где волне 2 или (—) отвечает верхний знак плюс, а волне 1 или (+) отвечает нижний знак минус перед ω_H.

Величины $\varepsilon_{1,2}$ и $\sigma_{1,2}$ введены здесь по аналогии с формулами (7,11) для изотропного случая, где ε и σ суть диэлектрическая проницаемость и проводимость. В анизотропной среде роль ε и σ играют тензоры ε_{ij} и σ_{ij} или $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - i\dfrac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega}$, а величины $\varepsilon_{1,2}$ и $\sigma_{1,2}$ являются лишь обозначениями соответственно для $n^2_{1,2} - \varkappa^2_{1,2}$ или $2n_{1,2}\varkappa_{1,2}$. Введение этих обозначений удобно потому, что $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ выражаются через $\varepsilon_{1,2}$ и $\sigma_{1,2}$, так же как n и $\varkappa$ через ε и σ, т. е. по формулам (7,12).

При поперечном распространении $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$ для «обыкновенной» волны 2 имеем:

$$\left.\begin{aligned}
(n - i\varkappa)^2_2 &= 1 - \frac{v}{1 - is}, \\
\varepsilon_2 \equiv n^2_2 - \varkappa^2_2 &= 1 - \frac{v}{1 + s^2} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}}}, \\
\frac{4\pi\sigma_2}{\omega} \equiv 2n_2\varkappa_2 &= \frac{sv}{1 + s^2} = \frac{\omega_0^2 \nu_{\text{эфф}}}{\omega(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф}})}.
\end{aligned}\right\} \qquad (11,31)$$

В этом случае, как и при отсутствии поглощения, обыкновенная волна (волна 2) ведет себя совершенно так же, как при $H^{(0)} = 0$ (см. (3,7)).

Для необыкновенной волны 1 получаем:

$$\left.\begin{aligned} (n-i\varkappa)_1^2 &= 1-\frac{v(1-is-v)}{(1-is)(1-is-v)-u}, \\ \varepsilon_1 \equiv n_1^2-\varkappa_1^2 &= 1-\frac{v\left[(1-v)^2-u(1-v)+s^2\right]}{(1-v-u-s^2)^2+s^2(2-v)^2}, \\ \frac{4\pi\sigma_1}{\omega} \equiv 2n_1\varkappa_1 &= \frac{sv\left[(1-v)^2+u+s^2\right]}{(1-v-u-s^2)^2+s^2(2-v)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (11{,}32)$$

Громоздкость этой формулы (11,32) для простого частного случая $\alpha=\frac{\pi}{2}$ позволяет составить представление о сложности соответствующих выражений при произвольном угле α (получение выражений для $\varepsilon_{1,2}$ и $\sigma_{1,2}$ в общем случае из формулы (11,5), конечно, не составляет труда). Заметим, кроме того, что при учете поглощения (формула (11,5)) использована только элементарная теория. Если же исходить из точных выражений (10,32) для ε_{ij} и σ_{ij}, формулы существенно усложняются. К счастью, использование кинетической теории (формулы (10,32)) в большинстве случаев не нужно, так как обычно приходится рассматривать различные предельные случаи. Так, дело сводится к формулам элементарной теории с соответствующим выбором величины $\nu_{\text{эфф}}$, если

$$(\omega \pm \omega_H)^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2, \qquad (11{,}33)$$

или

$$(\omega \pm \omega_H)^2 \ll \nu_{\text{эфф}}^2, \qquad (11{,}34)$$

где неравенства должны выполняться при обоих знаках перед ω_H (разумеется, если $(\omega-\omega_H)^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2$, то и $(\omega+\omega_H)^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2$). В радиодиапазоне случай (11,33) имеет наибольшее значение, так как он обычно осуществляется и в ионосферном F-слое, и в солнечной короне.

При условии (11,33) формулы для $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$, вообще говоря, существенно упрощаются. Так, в (11,31) можно при этом зачеркнуть $\nu_{\text{эфф}}^2$ в знаменателе; формулы (11,32) при условии (11,33) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 \equiv n_1^2-\varkappa_1^2 &= 1-\frac{v(1-v)}{1-v-u} = 1-\frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}(\omega^2-\omega_0^2)}{\omega^2-\omega_0^2-\omega_H^2}, \\ \frac{4\pi\sigma_1}{\omega} \equiv 2n_1\varkappa_1 &= \frac{sv\left[(1-v)^2+u\right]}{(1-v-u)^2} = \frac{\nu_{\text{эфф}}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega_H^2\omega^2\right]}{\omega(\omega^2-\omega_0^2-\omega_H^2)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (11{,}35)$$

Нужно иметь в виду, что для применимости формул (11,35) одного условия (11,33) недостаточно, так как при отсутствии поглощения знаменатель в (11,35) обращается в бесконечность при $v_{1\infty} = 1 - u$ $\left(\text{см. (11,18) для } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому ясно, что в окрестности точки $v_{1\infty}$ поглощение всегда существенно и пренебрегать величиной s^2 в знаменателе формул (11,32) нельзя, даже если условие (11,33) выполнено. Вдали от точки $v_{1\infty}$ для перехода от (11,32) к (11,35) достаточно соблюдения неравенства (11,33).

Квазипродольное и квазипоперечное распространение. Сложность выражений для $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ при произвольном угле α делает практически важной возможность приближенной замены точных значений $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ формулами типа (11,30) и (11,35). Так, если

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_T^2}{4u_L} \equiv \frac{u\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha} = \frac{\omega_H^2\sin^4\alpha}{4\omega^2\cos^2\alpha} \ll (1-v)^2+s^2, \\ \left|1-\sqrt{u}\,|\cos\alpha|\right| \gg \frac{(1+v)\,u\sin^2\alpha}{2[(1-v)^2+s^2]}, \\ u_T = u\sin^2\alpha, \quad u_L = u\cos^2\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (11,36)$$

то, как можно показать, исходя из (11,5) (см. также [107]), приближенно получим:

$$\left.\begin{aligned} (n-i\varkappa)^2_{1,2} = 1 - \frac{v}{1\pm\sqrt{u}\,|\cos\alpha| - is}, \\ \varepsilon_{1,2} \equiv n^2_{1,2} - \varkappa^2_{1,2} = 1 - \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega}(\omega\pm\omega_L)}{(\omega\pm\omega_L)^2+\nu^2_{\text{эфф}}}, \\ \frac{4\pi\sigma_{1,2}}{\omega} = 2n_{1,2}\varkappa_{1,2} = \frac{\frac{\omega_0^2\nu_{\text{эфф}}}{\omega}}{(\omega\pm\omega_L)^2+\nu^2_{\text{эфф}}}, \end{aligned}\right\} \qquad (11,37)$$

где

$$\omega_L = \omega_H\cos\alpha = \sqrt{u}\,\omega\cos\alpha = \sqrt{u_L}\,\omega. \qquad (11,38а)$$

Формулы (11,37) отличаются от формул (11,30) для продольного распространения лишь заменой ω_H на ω_L. Поэтому случай (11,36), (11,37) называется «квазипродольным».

При соблюдении неравенств

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_T^2}{4u_L} = \frac{u\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha} \gg (1-v)^2+s^2, \\ \operatorname{tg}^2\alpha \gg 1+v, \\ u\sin^2\alpha \gg [(1-v)^2+s^2]\operatorname{ctg}^2\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (11,39)$$

имеет место «квазипоперечное» распространение: в этом случае приближенно справедливы формулы (11,31) и (11,32) или (11,35) для поперечного распространения, но с заменой u на u_T или ω_H

на ω_T, где

$$u_T = u\sin^2\alpha, \quad \omega_T = \omega_H \sin\alpha = \sqrt{u_T}\,\omega. \tag{11,38б}$$

Второе из условий (11,39) относится только к обыкновенной волне, а третье условие только к необыкновенной волне. Следует подчеркнуть, что условия «квазипродольности» или «квазипоперечности» (11,36) и (11,39) накладывают известное ограничение не только на угол α, но и на параметры v, u и s. Неравенства (11,36) и (11,39) являются при этом достаточными, но не необходимыми условиями для справедливости квазипродольного и квазипоперечного приближений. Необходимые условия применимости этих приближений громоздки, и при несоблюдении указанных достаточных условий лучше обращаться непосредственно к формуле (11,5).

Остановимся еще на одном предельном случае [108, 109], а именно распространении обыкновенной волны при отсутствии поглощения, но соблюдении неравенств

$$u\sin^4\alpha \gg 4(1-v)^2\cos^2\alpha, \tag{11,39а}$$

$$v\cos^2\alpha \gg 1. \tag{11,39б}$$

При условии (11,39а), согласно (11,6), $\tilde{n}_2^2 = \frac{1-v}{1-v\cos^2\alpha}$, а при соблюдении обеих неравенств (11,39а), (11,39б)

$$\tilde{n}_2^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{11,39в}$$

Легко видеть, что из (11,39а), (11,39б) следует неравенство $\omega_H^2 \gg \gg \omega_0^2 \gg \omega^2$, имеющее особенно ясный смысл.

Предельный случай (11,39а) — (11,39в) интересен потому, что при этом n_2 не зависит от частоты; фазовая скорость этих волн $v_{\text{ф},2} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_2} = c\cos\alpha$ и групповая скорость $\mathbf{v}_{\text{гр},2} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = c\frac{\mathbf{H}^{(0)}}{H^{(0)}}$ (использованное выражение $\mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ получено в § 24; конкретный результат для $\mathbf{v}_{\text{гр},2}$ сразу же получается из формулы (24,14) при подстановке значения $n_2 = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\gamma}$). Такое выражение для $\mathbf{v}_{\text{гр},2}$ аналогично формуле (14,9), определяющей групповую скорость магнитогидродинамических волн (аналогия касается направления $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ и постоянства величины $v_{\text{гр}}$; в обсуждаемом случае $v_{\text{гр},2} = c$, в то время как для магнитогидродинамических волн (14,9) $v_{\text{гр},2} = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$).

Распространение двух когерентных нормальных волн. Вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея). При распространении волн в плазме довольно часто приходится сталкиваться с присутствием не одной нормальной волны, а сразу двух волн. Именно так обстоит дело, когда на плазменный слой падает волна с произвольной поляризацией — в плазме при этом распространяются и обыкновенная и необыкновенная волны, амплитуда и фаза которых определяются параметрами падающей волны и свойствами среды. В обсуждаемом линейном приближении нормальные волны распространяются совершенно независимо друг от друга, поскольку под нормальными волнами мы в данном случае понимаем строгие решения волнового уравнения (в неоднородной среде иногда удобно говорить о взаимодействии нормальных волн, но при этом в качестве этих нормальных волн рассматриваются некоторые приближенные решения волнового уравнения; см., например, конец § 20). Таким образом, в обсуждаемом случае поле в среде имеет вид $\mathbf{E}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2$, где $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — соответственно поля в необыкновенной и обыкновенной волнах. Будем считать, далее, что речь идет о распространении плоских волн вдоль оси z при отсутствии поглощения, и рассмотрим лишь проекцию поля $\mathbf{E}$ на плоскость xy (магнитное поле $\mathbf{H}^{(0)}$ лежит в плоскости yz).

Тогда в некоторой точке z можно положить (см. (11,26) с переходом к вещественным полям; ниже следуем [77])

$$\left.\begin{aligned} E_{1x} &= a\sin\omega t, & E_{1y} &= ap\cos\omega t,\\ E_{2x} &= bp\sin(\omega t-\varphi), & E_{2y} &= -b\cos(\omega t-\varphi), \end{aligned}\right\} \qquad (11,40а)$$

где a и b — амплитуды волн 1 и 2 (необыкновенной и обыкновенной), $p\equiv -iK_1$, $-1\leqslant p\leqslant 0$ и учтено, что $K_2=-\frac{1}{K_1}$ (см. (11,27)). Для поля $\mathbf{E}$ имеем:

$$E_x=E_{1x}+E_{2x}=A\sin(\omega t-\Phi_x),\qquad E_y=E_{1y}+E_{2y}=B\sin(\omega t-\Phi_y),$$

$$A^2=a^2+b^2p^2+2abp\cos\varphi,\qquad B^2=a^2p^2+b^2-2abp\cos\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\Phi_x=\frac{bp\sin\varphi}{a+bp\cos\varphi},\qquad \operatorname{tg}\Phi_y=\frac{ap-b\cos\varphi}{b\sin\varphi}.$$

Поле $\mathbf{E}$ эллиптически поляризовано, причем большая ось эллипса составляет угол Ψ с осью x и имеет отношение полуосей $\operatorname{tg}\sigma$:

$$\operatorname{tg}(2\Psi)=\pm 2\frac{1+p^2}{p}\cdot\frac{\sin\varphi}{\left(\frac{1}{p}-p\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)+4\cos\varphi}, \qquad (11,40б)$$

$$\sin(2\sigma)=\pm 2\,\frac{b^2-a^2+ab\left(\frac{1}{p}-p\right)\cos\varphi}{(a^2+b^2)\left(\frac{1}{p}+p\right)}.$$

При прохождении волной пути L разность фаз φ изменяется от значения φ_0 до $\varphi_0+\Delta\varphi$, причем

$$\Delta\varphi=\frac{\omega}{c}(n_2-n_1)L. \qquad (11{,}40\text{в})$$

Если положение эллипса в начале пути (при $L=0$) определяется углом Ψ_0, то по прохождении пути L угол $\Psi=\Psi_0+\Delta\Psi$. Нахождение угла $\Delta\Psi$ обычно и представляет интерес. Отсчитывая при этом угол Ψ от Ψ_0, будем ниже полагать $\Delta\Psi=\Psi$.

При продольном распространении $K_1=-i$, $p=-1$, и, согласно (11,40б), степень эллиптичности (отношение полуосей $\operatorname{tg}\sigma$) неизменна, а $\operatorname{tg}2\Psi=\operatorname{tg}\varphi$, т. е.

$$\Psi=\frac{\Delta\varphi}{2}=\frac{\omega}{2c}(n_2-n_1)L. \qquad (11{,}40\text{г})$$

Разумеется, такой результат для продольного распространения легче всего получить непосредственно (см. (11,10), (11,12)). При квазипродольном распространении, когда $p\approx-1$, приближенно справедливо сказанное в отношении продольного распространения и, согласно (11,37) с $\nu_{\text{эфф}}=0$ и (11,40г),

$$\Psi\approx\frac{\omega}{2c}(n_2-n_1)L\approx\frac{1}{n_2+n_1}\frac{\omega_L^2\omega_H\cos\alpha}{c\omega^2}L=\frac{4{,}7\cdot10^4}{f^2}\cdot\frac{NH^{(0)}\cos\alpha}{n_2+n_1}L. \qquad (11{,}40\text{д})$$

Эта формула будет использована в § 37. Если $a=b$, т. е. амплитуды необыкновенной и обыкновенной волн равны, то результирующее поле $\boldsymbol{E}$ при квазипродольном распространении линейно поляризовано, причем вектор $\boldsymbol{E}$ при прохождении пути L поворачивается на угол (11,40д). При $a\neq b$ этот угол определяет поворот осей эллипса поляризации. Вращение плоскости поляризации при распространении волн в магнитном поле называют эффектом Фарадея.

При неквазипродольном распространении $p\neq-1$ нормальные волны 1 и 2 поляризованы эллиптически и угол Ψ нужно определять по формуле (11,40б). Ее анализ показывает, что при $p\equiv-iK_1\neq-1$ и

$$\left|\frac{1}{p}-p\right|\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right|<4 \qquad (11{,}40\text{е})$$

фарадеевское вращение, хотя и неравномерно, но при изменении $\Delta\varphi$ на угол, много больший 2π, среднее изменение $\Psi=\frac{\Delta\varphi}{2}$. Однако при соблюдении неравенства, обратного неравенству (11,40е), эллипс поляризации по мере распространения волны лишь колеблется, но систематически не поворачивается. При

$\left|\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right| \gg 2\frac{1+p^2}{1-p^2}$ колебания эллипса поляризации малы и угол Ψ практически постоянен и равен $\Psi = -\frac{1+p^2}{1-p^2}\frac{\sin\varphi}{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}$ или отличается от этого значения на угол, кратный $\pi/2$.

Критическое число соударений и существенный кратный корень дисперсионного уравнения. Анализ выражения (11,5) при произвольных v, u, s и α достигается построением соответствующих графиков. Единственное замечание общего характера, которое мы здесь сделаем, относится к введению «критического числа соударений» $\nu_{\text{эфф, к}}$, или критического параметра:

$$s_{\text{к}} = \frac{\nu_{\text{эфф, к}}}{\omega} = \frac{\omega_T^2}{2\omega_L\omega} = \frac{\omega_H \sin^2\alpha}{2\omega\cos\alpha} = \frac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{u_T}{2\sqrt{u_L}} \qquad (11,41)$$

(если допустить выбор углов, для которых $\cos\alpha < 0$, то в (11,41) нужно заменить $\cos\alpha$ на $|\cos\alpha|$). Смысл критического параметра $s_{\text{к}}$ состоит в том, что при $s = s_{\text{к}}$ и $v = 1$ подкоренное выражение в (11,5) и (11,25) обращается в нуль, в результате чего

$$(n - i\varkappa)_1 = (n - i\varkappa)_2 = -\frac{is_{\text{к}}(1+\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha - is_{\text{к}}(1+\cos^2\alpha)}$$

и

$$K_1 = K_2 = -1.$$

Иными словами, при

$$v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1, \quad s \equiv \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} = s_{\text{к}} \equiv \frac{\nu_{\text{эфф, к}}}{\omega} = \frac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2|\cos\alpha|} = \frac{\omega_H\sin^2\alpha}{2\omega|\cos\alpha|} \qquad (11,41\text{a})$$

дисперсионное уравнение (11,4) имеет кратный корень.

На первый взгляд это обстоятельство представляется довольно обычным ибо, например, при переходе от анизотропной среды к изотропной (в результате соответствующего изменения параметров) всегда появляется кратный корень $(n - i\varkappa)_1 = (n - i\varkappa)_2 = n - i\varkappa$. Фактически, однако, кратный корень типа (11,41а) и кратный корень, отвечающий вырождению при переходе к изотропной среде, имеют совершенно различный характер. Действительно, при вырождении дисперсионное уравнение (в данном случае уравнение (11,4)) имеет кратный корень, но исходная система уравнений, как и при отсутствии вырождения, обладает двумя линейно независимыми решениями типа $\boldsymbol{E}_{1,2} = \boldsymbol{E}_{0,1,2}e^{i(\omega t - kr)}$. Эти два разных решения отличаются своей поляризацией, и, например, их можно выбрать так: $E_{0,1,x} = 1$, $E_{0,1,y} = 0$; $E_{0,2,x} = 0$, $E_{0,2,y} = 1$. Напротив, в случае кратного корня (11,41а) система (11,2а) имеет только одно решение рассмотренного типа $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - kr)}$.

Последнее утверждение сразу ясно уже из того факта, что в случае (11,41а) поляризация $K_1 = K_2 = -1$, т. е. решения сливаются. Такой кратный корень будем называть существенным. При отсутствии пространственной дисперсии возможность появления существенных кратных корней помимо магнитоактивной плазмы имеется (см. [10], § 2.3) для поглощающих кристаллов низших сингоний (ромбической, моноклинной и триклинной).

Как из физических, так и из математических соображений ясно, что появление существенного кратного корня не может приводить к уменьшению числа линейно независимых решений. Дело, однако, в том, что второе решение имеет вид $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{0,2}\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\boldsymbol{r}\right)e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})}$, в то время как $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{0,1}e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})}$. В существовании второго решения легко убедиться как непосредственно, так и совершая предельный переход к существенному кратному корню, исходя из решения

$$\boldsymbol{E} = \frac{e^{i\omega t}}{(n-i\varkappa)_2-(n-i\varkappa)_1}\{\boldsymbol{E}_{0,2}e^{-i\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{E}_{0,1}e^{-i\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r}}\}, \quad k_{1,2} = \frac{\omega}{c}(n-i\varkappa)_{1,2};$$

вблизи существенного кратного корня

$$E_{0,1,2} = E_0 + \delta E_{1,2}, \quad (n-i\varkappa)_{1,2} = (n-i\varkappa) + \delta(n-i\varkappa)_{1,2},$$

где $\delta E_{1,2}$ и $\delta(n-i\varkappa)_{1,2}$ — малые величины, равные нулю для самого корня. В пределе (при стремлении к значениям параметров, отвечающих корню) получаем решение, содержащее член типа $\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k}\boldsymbol{r}\right)e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})}$.

Итак, существенному кратному корню отвечает появление решений нового типа и ограничиться рассмотрением обычных решений вида $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})}$ в этом случае нельзя. Отметим, что при отсутствии пространственной дисперсии существенный кратный корень может появиться лишь в поглощающей среде *).

Поэтому появление множителя z перед $e^{-i\boldsymbol{kr}} = e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa z}e^{-i\frac{\omega}{c}nz}$ (распространение волны по оси z) не приводит к нарастающим реше-

---

*) Со своеобразным типом кратного корня приходится столкнуться и для непоглощающей среды. Так, при $\varepsilon' = \varepsilon = 0$ волновое уравнение (2,25) имеет кратный корень $n^2 = 0$. Общее решение уравнения (2,25) при этом таково:

$$E_{x,y} = E_{0,x,y}^{(1)} + E_{0,x,y}^{(2)}z.$$

Здесь, однако, сливаются (при $n^2 = \varepsilon \to 0$) корни $n_{1,2} = \pm\sqrt{\varepsilon}$ для волн, распространяющихся в различных направлениях; кроме того, при учете поглощения уже $\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{4\pi}{\omega}\sigma = (n-i\varkappa)^2 \neq 0$.

ниям (подробнее см. [10], § 2.3). Возможность появления существенного кратного корня (11,41а) играет большую роль при распространении волн в неоднородной магнитоактивной плазме (см. § 28). При соответствующем анализе, а также при получении дисперсионных соотношений [110] приходится рассматривать не только вещественные, но и комплексные значения частоты ω'. Как ясно из (11,5), кратный корень дисперсионного уравнения появляется, если $u\sin^4\alpha + 4(1 - is - v)^2\cos^2\alpha = 0$, откуда соответствующие частоты равны

$$\left.\begin{aligned} \omega'_{\text{к},1,2} &= i\,\frac{(\nu_{\text{эфф}} - \nu_{\text{эфф,к}})}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{(\nu_{\text{эфф}} - \nu_{\text{эфф,к}})^2}{4}},\\ \omega'_{\text{к},3,4} &= i\,\frac{(\nu_{\text{эфф}} + \nu_{\text{эфф,к}})}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{(\nu_{\text{эфф}} + \nu_{\text{эфф,к}})^2}{4}},\\ \nu_{\text{эфф,к}} &= \frac{\omega_H \sin^2\alpha}{2|\cos\alpha|}. \end{aligned}\right\} \qquad (11{,}41б)$$

Разумеется, при $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф,к}}$ некоторые из корней $\omega'_{\text{к}}$ вещественны, а именно $\omega'_{\text{к},1,2} = \omega_{k,1,2} = \pm\omega_0$, что и отвечает значению $v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2_{\text{к},1,2}} = 1$ (см. (11,41а)).

Графики функций $n_{1,2}(v)$ и $\varkappa_{1,2}(v)$. При $\nu_{\text{эфф}} \ll \nu_{\text{эфф,к}}$ характер кривых $n_{1,2}(v)$ и $\varkappa_{1,2}(v)$ близок к имеющему место при отсутствии поглощения. Если же $\nu_{\text{эфф}} \gg \nu_{\text{эфф,к}}$, то изменение вида функций $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ весьма существенно. В условиях земной ионосферы случай $\nu_{\text{эфф}} \gg \nu_{\text{эфф,к}}$ может иметь значение, если не говорить о высоких широтах, лишь в области нижних ионосферных слоев D и E.

Для иллюстрации поведения кривых $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ приведем несколько графиков, рассчитанных в [100] для ряда конкретных случаев (см. рис. 11,13—11,15). Во всех примерах $H^{(0)}\cos\alpha = -0{,}447$ и $H^{(0)}\sin\alpha = 0{,}218$, т. е. $H^{(0)} = 0{,}497$ *эрст*, $\omega_H = 8{,}8\cdot 10^6$ и $\alpha = 25°50'$. Значение $\nu_{\text{эфф,ф,к}}$ при этом равно $9{,}5\cdot 10^5$.

На рис. 11,13—11,15, *а* и *б* приведены значения $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ при $\nu_{\text{эфф}} = 0$ для волн с длиной $\lambda_0 = 80$ *м* ($\omega = 2{,}36\cdot 10^7$), $\lambda_0 = 225$ *м* ($\omega = 0{,}838\cdot 10^7$) и $\lambda_0 = 490$ *м* ($\omega = 0{,}386\cdot 10^7$). Отличие этих графиков от приведенных, например, на рис. 11,6, помимо другого значения $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$, состоит в том, что указаны величины $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$, а не $\tilde{n}^2_{1,2}$ и в согласии с формулой (11,5) всегда $n_{1,2} > 0$, $\varkappa_{1,2} > 0$. Таким образом, значения $\varkappa^2_{1,2}$ на рис. 11,13—11,15 отвечают величине $-\tilde{n}^2_{1,2}$ на рис. 11,6 и аналогичных рисунках. На рис. 11,13—11,15, *в* и *г* приведены значения $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ для тех же волн, что и на рис. 11,13—11,15, *а* и *б*, но при $\nu_{\text{эфф}} = 4{,}7\cdot 10^5$ ($\nu_{\text{эфф}} = 0{,}50\nu_{\text{эфф, к}}$) для $\lambda_0 = 80$ *м*; при $\nu_{\text{эфф}} = 4{,}2\cdot 10^5$ ($\nu_{\text{эфф}} = 0{,}44\nu_{\text{эфф, к}}$) для $\lambda_0 = 225$ *м* и при $\nu_{\text{эфф}} = 3{,}9\cdot 10^5$ ($\nu_{\text{эфф}} = 0{,}41\nu_{\text{эфф, к}}$) для $\lambda_0 = 490$ *м*.

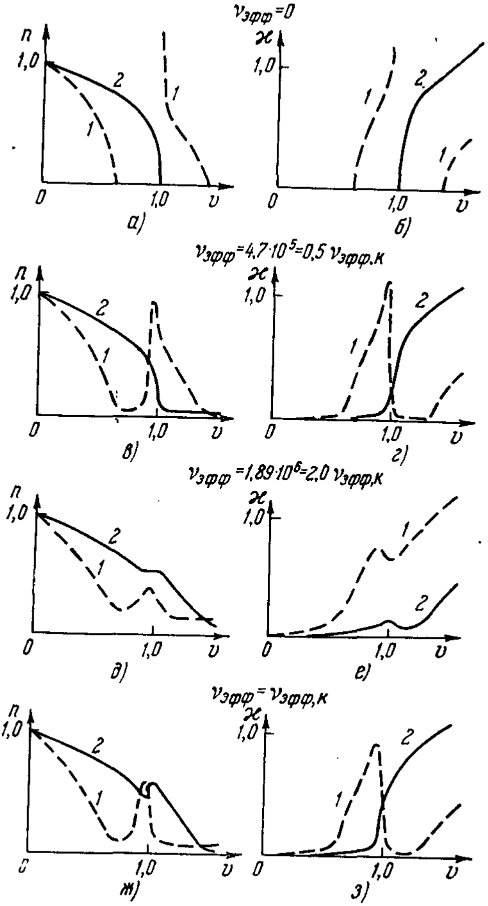


Рис. 11,13. Показатели преломления и поглощения для $\lambda_0 = 80$ *м* и различных значений $\nu_{\text{эфф}}$ (значения α и ω_H указаны в тексте; пунктир относится к волнам типа 1, сплошные линии—к волнам типа 2).

На рис. 11,13—11,15, *д* и *е* приведены аналогичные кривые при $\nu_{\text{эфф}} = 2{,}0\nu_{\text{эфф, к}}$ для $\lambda_0 = 80$ и 490 *м* и при $\nu_{\text{эфф}} = 1{,}8\nu_{\text{эфф, к}}$ для $\lambda_0 = 225$ *м*. Кроме того, на рис. 11,13 *ж* и *з* приведены кривые $n_{1,2}(v)$ и $\varkappa_{1,2}(v)$ для $\lambda_0 = 80$ *м* и $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф, к}}$.

Отметим, что даже при $\nu_{\text{эфф}} \approx 0{,}5\,\nu_{\text{эфф, к}}$, не говоря уже о бóльших значениях $\nu_{\text{эфф}}$, поглощение волн велико. Действительно, в однородной среде амплитуда поля затухает по закону $e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa_{1,2}z} = e^{-\frac{2\pi}{\lambda_0}\varkappa_{1,2}z}$ и при $\varkappa_{1,2} = 0{,}1$ на расстоянии в $10\lambda_0$ поле ослабляется в $e^{2\pi} = 540$ раз. Вместе с тем на рис. 11,13—11,15 встречаются значения $\varkappa_{1,2} \sim 0{,}1$ (важно, что показатель $\varkappa_{1,2}$ велик в области, где при отсутствии поглощения $\varkappa_{1,2} = 0$).

В ионосферном *F*-слое, где $\nu_{\text{эфф}} \sim 10^3 \div 10^4$, для разобранного выше примера (речь идет о значениях $H^{(0)}$ и α) $\nu_{\text{эфф}} \sim (10^{-2} \div 10^{-3})\nu_{\text{эфф, к}}$. Ясно, что в этом случае кривые $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ весьма близки к изображенным на рис. 11,13, *а* и *б*. Поглощение влияет также на поляризацию обеих волн, и, в частности, при учете поглощения оси эллипсов, описываемых проекцией вектора $\boldsymbol{E}$ на плоскость *xy*, не совпадают с осями *x* и *y*. При малых поглощениях поляризация, разумеется, близка к имеющей место при отсутствии поглощения; наибольшие отклонения наблюдаются вблизи точки $v = v_{20} = 1$, где поляризация сильно изменяется с изменением v (см. рис. 11,9 и 11,12 и формулу (11,25)).

Громоздкость общих выражений (11,5) для $(n - i\varkappa)^2_{1,2}$ и (11,25) для $K_{1,2} = \frac{E_{y1,2}}{E_{x1,2}}$ делает иногда целесообразным использование для определения $n, \varkappa$ и K номограмм, которые можно найти в [101].

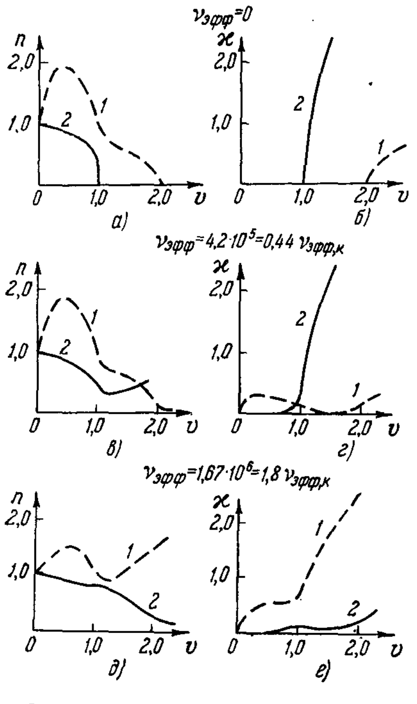


Рис. 11,14. Показатели преломления и поглощения для $\lambda_0 = 225$ *м* и различных значений $\nu_{эфф}$ (значения α и ω_H указаны в тексте).

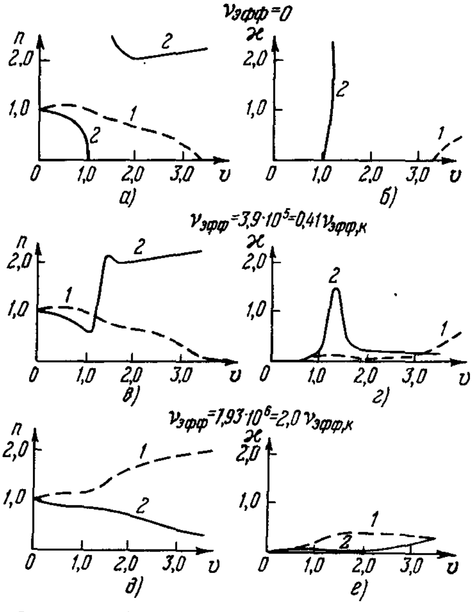


Рис. 11,15. Показатели преломления и поглощения для $\lambda_0 = 490$ *м* и различных значений $\nu_{эфф}$ (значения α и ω_H указаны в тексте).

Влияние ионов на распространение высокочастотных волн. В нижних ионосферных слоях, в особенности в D-слое, на распространение радиоволн могут оказывать влияние не только электроны, но и ионы. При отсутствии земного магнитного поля влияние ионов учтено в § 3, где показано, что при пренебрежении поглощением ионы с концентрацией N_i, массой M и единичным зарядом вносят в выражение для ε такой же вклад, как электроны с концентрацией $N_{эфф} = \frac{m}{M} N_i$ (см. (3,4)). При учете поглощения положение несколько усложняется, так как эффективные числа соударений для электронов и ионов различны. Электроны и ионы неэквивалентны также при учете влияния земного магнитного поля, так как влияние магнитного поля на электроны и ионы определяется соответственно значениями гироскопических частот $\omega_H = \frac{|e|H^{(0)}}{mc}$ и $\Omega_H = \frac{eH^{(0)}}{Mc} = \frac{m}{M}\omega_H$ $\left(\text{для ионов } O_2^{\pm} \text{ при } H^{(0)} \sim 0{,}5\,\text{эрст}\ \Omega_H \sim 150 \text{ и } \lambda_H = \frac{2\pi c}{\Omega_H} \sim 10\,000\,\text{км}\right)$. Поэтому в высокочастотном случае, когда циклическая частота радиоволн $\omega \gg \Omega_H$ (см. (10,5)), влиянием магнитного поля на ионы можно обычно пренебречь (подробнее см. § 14). Это обстоятельство, на которое уже не раз указывалось, обеспечивает возможность вообще пренебречь ролью ионов только, если их концентрация N_i сравнима с концентрацией электронов. Обычно именно такой случай и предполагался имеющим место, что не всегда вновь оговаривалось. Если же $N_i \gg N$, то ионы могут оказывать заметное влияние и в случае высокочастотных волн. При этом выражение для тензора ε'_{jl} имеет вид:

$$\varepsilon'_{jl} = \varepsilon'^{(e)}_{jl} + (\varepsilon'_{(i)} - 1)\,\delta_{jl}, \tag{11,42}$$

где $\varepsilon'^{(e)}_{ij}$ — тензор ε'_{ij} при отсутствии ионов (см., например, выражение (10,12)) и в рамках «элементарной теории»:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon'_{(i)} = \varepsilon_{(i)} - i\frac{4\pi\sigma_{(i)}}{\omega} = 1 - \frac{4\pi e^2 N_i}{M\omega\,(\omega - i\nu^{(i)}_{\text{эфф}})} = 1 - \frac{v_i}{1 - is_i}, \\ &v_i = \frac{4\pi e^2 N_i}{M\omega^2}, \qquad s_i = \frac{\nu^{(i)}_{\text{эфф}}}{\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{11,43}$$

где $\nu^{(i)}_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений ионов с массой M (для простоты считаем, что все ионы однократные и масса их одинакова) со всеми частицами, присутствующими в среде (электронами, ионами, молекулами). Выражение (11,43) есть, очевидно, просто комплексная диэлектрическая постоянная изотропной плазмы при учете движения одних только ионов.

Исходя из (11,43), можно так же, как это сделано при пренебрежении движением ионов, найти значение величины $(n - i\varkappa)^2_{1,2}$. При этом вместо (11,5) получаем:

$$(n - i\varkappa)^2_{1,2} = \\ = \varepsilon'_{(i)}\left\{1 - \frac{2\frac{v}{\varepsilon'_{(i)}}\left(1 - \frac{v}{\varepsilon'_{(i)}} - is\right)}{2(1 - is)\left(1 - \frac{v}{\varepsilon'_{(i)}} - is\right) - u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u\left(1 - \frac{v}{\varepsilon'_{(i)}} - is\right)^2\cos^2\alpha}}\right\}, \tag{11,44}$$

где v, u и s имеют такой же смысл, как и при отсутствии ионов.

При сравнении (11,44) с (11,5) ясно, что учет ионов сводится к замене в (11,5) величины $v=\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ на $\frac{v}{\varepsilon'_{(i)}}$ и к умножению всего выражения на $\varepsilon'_{(i)}$.

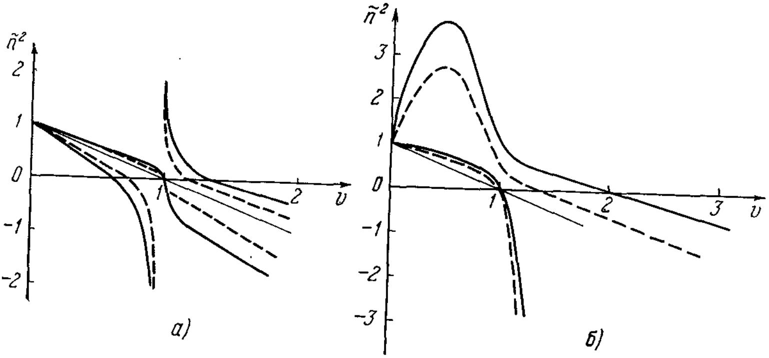


Рис. 11,16. Квадрат показателя преломления в случае смеси электронов и ионов. Параметр $\xi=\frac{N_i m}{NM}$, где N и N_i — концентрации электронов и ионов, а m и M — их массы: *а*) $\lambda_0=80$ *м*; *б*) $\lambda_0=225$ *м*. Жирная линия: $\xi=0$, тонкая линия: $\xi=\infty$, пунктир: $\xi=1$.

В частных случаях: при $H^{(0)}=0$, при продольном и при поперечном распространении — имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{H}^{(0)}=0: && (n-i\varkappa)^2_{1,2}=(n-i\varkappa)^2_0=\varepsilon'_{(i)}-\frac{v}{1-is}=\\
& && \qquad =1-\frac{v}{1-is}-\frac{v_i}{1-is_i},\\
&\alpha=0: && (n-i\varkappa)^2_{1,2}=\varepsilon'_{(i)}-\frac{v}{1\pm\sqrt{u}-is},\\
&\alpha=\frac{\pi}{2}: && (n-i\varkappa)^2_1=\varepsilon'_{(i)}-\frac{v\left(1-\frac{v}{\varepsilon'_{(i)}}-is\right)}{(1-is)\left(1-\frac{v}{\varepsilon'_{(i)}}-is\right)-u},\\
& && (n-i\varkappa)^2_2=(n-i\varkappa)^2_0.
\end{aligned}\right\}\quad(11,45)$$

Подробный анализ формулы (11,44) проведен в [100]. Ограничимся здесь тем, что приведем на рис. 11,16 кривые $\tilde{n}^2_{1,2}=(n-i\varkappa)^2_{1,2}$ при отсутствии поглощения для того же случая, что и на рис. 11,13—11,14 ($\lambda_0 = 80$ и 225 *м*, $\omega_H = 8{,}8\cdot 10^6$, $\alpha = 25°50'$) при $\xi = \frac{v_i}{v} = \frac{N_i m}{NM} = 0$, 1 и ∞ ($\xi = 0$ — одни электроны, $\xi = \infty$ — одни ионы, $\xi = 1$ — вклад электронов и ионов в значение ε при отсутствии магнитного поля одинаков).

О поглощении и излучении электромагнитных волн магнитоактивной плазмой. В заключение остановимся на одном моменте, существенном для понимания вопроса о поглощении и излучении электромагнитных волн магнитоактивной плазмой. Из общего выражения (11,5) для $(n - i\varkappa)^2_{1,2}$ можно видеть, что при $s^2 = \frac{\nu^2_{\text{эфф}}}{\omega^2} \ll 1$ поглощение является наибольшим вблизи резонанса, т. е. в области, где при отсутствии поглощения $\tilde{n}^2_{1,2}$ неограниченно возрастает (это особенно ясно из относящихся к частным случаям формул (11,30) и (11,32)). Другими словами, при достаточно малом $s^2 = \frac{\nu^2_{\text{эфф}}}{\omega^2}$ «холодная» плазма заметно поглощает лишь вблизи точек $v_{1,2\,\infty}$ (см. (11,18) и (11,22)).

При $\alpha = 0$ точке $v_{1\infty} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2_{1,\infty}}$ отвечает частота $\omega_{1,\infty} = \omega_\infty = \omega_H$. Однако при всех других значениях α и $v \neq 0$ имеем $\omega_\infty \neq \omega_H$ и, например, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получим $\omega_\infty = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$ (см. также ниже формулу (12,3)). Как известно, если система поглощает волны на какой-то частоте, то она и излучает волны той же частоты; в частном случае термодинамического равновесия этот вывод непосредственно следует из теоремы Кирхгофа. Таким образом, магнитоактивная плазма должна излучать волны преимущественно вблизи частоты ω_∞. С другой стороны, нерелятивистский электрон в магнитном поле вращается с частотой $\omega_H = \frac{|e|H^{(0)}}{mc}$ и в вакууме излучает волны только этой частоты. При переходе к разреженной плазме, когда $\omega_H \gg \nu_{\text{эфф}}$, электроны бо́льшую часть времени, так же как в вакууме, вращаются с частотой ω_H и должны, казалось бы, по-прежнему излучать только частоту ω_H и весьма близкие к ней.

Получающийся парадокс разрешается [111], если учесть, что среда влияет на излучение движущейся в ней частицы, причем в некоторых случаях это влияние меняет весь характер излучения. Простейшим таким примером является гармонический осциллятор частоты ω, помещенный в изотропную плазму с $\varepsilon = \tilde{n}^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 0$. Поскольку поле в таких условиях затухает, излучение при $\omega < \omega_0$ вообще невозможно. В случае электрона, вращающегося в магнитоактивной плазме, положение не так просто. Однако из относящихся сюда общих формул (см. [112]) можно показать, что в нерелятивистском пределе электрон в рассматриваемых условиях при отсутствии соударений вообще не излучает. При учете соударений электрон излучает, конечно, и в магнитном поле, но это излучение является тормозным. Именно такое тормозное излучение и испускается нерелятивистской плазмой; оно особенно сильно вблизи частоты ω_∞, так как интенсивность тормозного излучения (как и дипольного излучения вообще) увеличивается с ростом показателя преломления *).

Может возникнуть также такой вопрос. Из уравнений движения (10,8) и их решения (10,9) как будто следует, что резонанс в плазме имеет место на частоте ω_H, фактически же он смещается к частоте ω_∞. За счет чего же происходит это смещение? Ответ, разумеется, дается всем проведенным в §§ 10, 11 рассмотрением, но кратко можно сказать, что сдвиг резонансной частоты связан с учетом коллективного движения электронов в плазме, приводящим к изменению поляризации нормальных волн в среде по сравнению с их поляризацией в вакууме. В качестве пояснения рассмотрим поведение одного из электронов плазмы под действием необыкновенной волны в случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (поле $H^{(0)}$ направлено по оси y, соударений не учитываем). Компоненты скорости вынужденных колебаний электрона при этом равны (подробнее см. [111]):

$$\left.\begin{aligned} v_y = 0, \quad v_x &= \frac{ie}{m\omega}\frac{E_x - i\sqrt{u}E_z}{u-1} = \frac{ie(v-1)E_x}{m\omega(1-v-u)}, \\ v_z &= \frac{ie}{m\omega}\frac{E_z + i\sqrt{u}E_x}{u-1} = -\frac{ieE_z}{m\omega v}, \end{aligned}\right\} \qquad (11,46)$$

где учтено, что для необыкновенной волны при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ имеем: $E_y = 0$ и $E_x v\sqrt{u} = iE_z(u+v-1)$.

Резонансный знаменатель $u-1 = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} - 1$ заменяется здесь на $1-v-u = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$ потому, что в волне, распространяющейся

---

*) Нужно заметить, что при учете пространственной дисперсии и конкретно членов порядка $\left(\frac{v_T}{c}\right)^2$ и более высоких ($v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$ — скорость электрона) появляется, разумеется, излучение и на частоте ω_H и на ее обертонах (см. § 12, а также [74, 77, 113—115]). Этот эффект приводит к заметному поглощению уже при $T \sim 10^6$ °K $\left(\frac{v_T^2}{c^2} = \frac{\varkappa T}{mc^2} \sim 10^{-4}\text{, солнечная корона}\right)$. Учету влияния теплового движения на распространение волн в магнитоактивной плазме посвящен следующий § 12.

в магнитоактивной плазме по оси z, компонента $E_z \neq 0$, а роль действующего поля играет выражение $E_x - i\sqrt{u}\,E_z$ (в изотропной среде, если действующее поле не равно среднему, собственная частота поглощения осциллятора также смещается).

Отмеченное обстоятельство — смещение резонанса, связанное с изменением поляризации нормальных волн для среды (по сравнению с вакуумом), полезно проиллюстрировать также несколько иным способом (см. [72], стр. 34).

Как ясно из (10,10), в системе координат с осью z', направленной по полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$,

$$D_{x'} \pm iD_{y'} = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega \mp \omega_H)}\right)(E_{x'} \pm iE_{y'}), \qquad (11,47)$$

где для простоты пренебрегается поглощением, а оси x' и y' перпендикулярны к оси z' (обозначения x, y, z сохраняем для системы координат, в которой поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ направлено под углом α к оси z). Далее, согласно (11,2а) в тех же условиях

$$\boldsymbol{D} = n^2\{\boldsymbol{E} - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{E})\}, \qquad \boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}, \qquad s = 1, \qquad k = \frac{\omega}{c}n. \qquad (11,48)$$

Если угол α между $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}$ и полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ не равен нулю, то при $\omega = \omega_H$ показатель n конечен (см. выше). Отсюда и из (11,48) очевидно, что при $\omega = \omega_H$ и $\alpha \neq 0$, при конечном поле E индукция D также конечна. В силу (11,47) это означает вместе с тем, что при $\alpha \neq 0$, $\omega = \omega_H$

$$E_{x'} = -iE_{y'}, \qquad \alpha \neq 0, \qquad \omega = \omega_H. \qquad (11,49)$$

С другой стороны, как мы видели выше (см. (11,10) — (11,12) и последующее рассмотрение), при строго продольном распространении (при $\alpha = 0$) в волне (+), для которой $n_+^2(\omega \to \omega_H) \equiv n_1^2(\omega \to \omega_H) \to \infty$:

$$E_{x'} = iE_{y'}, \qquad \alpha = 0. \qquad (11,50)$$

Легко видеть, что в этой волне (+) поле вращается в том же направлении, в каком вращается электрон; этим и объясняется появление резонанса при $\omega = \omega_H$ и $\alpha = 0$. Но из сопоставления (11,50) с (11,49) ясно, что при $\omega = \omega_H$ и $\alpha \neq 0$ поле в необыкновенной нормальной волне вращается уже в сторону, противоположную направлению вращения электрона. В обыкновенной волне проекция поля $\boldsymbol{E}$ на плоскость, перпендикулярную к внешнему магнитному полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$, меняется по величине (эллиптическая поляризация) и резонансное влияние поля на движение электрона при $\omega = \omega_H$ также не имеет места.

§ 12. Пространственная дисперсия и плазменные волны при наличии магнитного поля (учет теплового движения)

Предельный переход к изотропной плазме. При переходе от магнитоактивной к изотропной плазме (т. е. при стремлении к нулю внешнего магнитного поля $H^{(0)}$) в высокочастотном случае должны быть получены три нормальные волны: две поперечные и одна продольная (плазменная). Между тем в магнитоактивной плазме существуют только две волны: обыкновенная и необыкновенная. Ответить на вопрос о характере предельного перехода к изотропной плазме наиболее просто, рассмотрев кривые $\tilde{n}^2_{1,2}$ при малых значениях $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$ и при $u \to 0$ (рис. 12,1) *). Мы видим, что при $u \to 0$ кривые $\tilde{n}^2_{1,2}$ переходят не просто в прямую $\tilde{n}^2_0 = 1 - v$, но также в вертикальную прямую $v = 1$. При неучете пространственной дисперсии прямая $v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1$ на рис. 12,1, *б* как раз и отвечает плазменной волне в изотропном случае (см. (8,1)). Характер того же предельного перехода легко

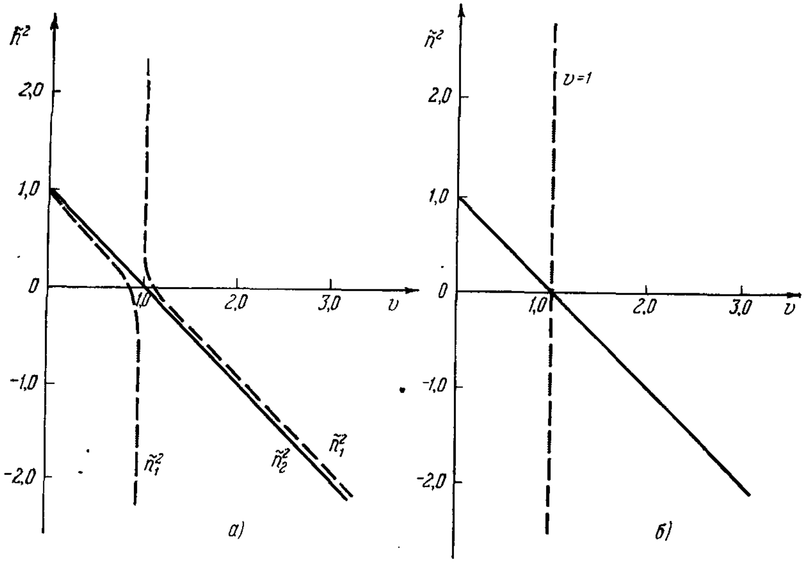


Рис. 12,1. Функции $\tilde{n}^2_{1,2}(v)$: *а*) $\alpha = 45°$, $u = 0{,}01$; *б*) $u \to 0$ (переход к изотропной плазме).

---

*) Ниже, если не оговорено противное, поглощения не учитываем.

проследить и на графиках функции $\tilde{n}^2_{1,2}$ в зависимости от аргумента ω/ω_0.

Впрочем, указанная особенность хода кривых $\tilde{n}^2_{1,2}$ ясна и без построения графиков, если учесть, что при $u \to 0$ получаем $v_{1,2\infty} = \frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha} \to 1$ и всегда при $\alpha \neq 0$ будет $v_{20} = 1$ и $v_{10} = 1 \pm \sqrt{u} \to 1$. Если иметь в виду не только ход кривых $\tilde{n}^2_{1,2}(v)$, но также и поляризацию нормальных волн, то требования, связанные с предельным переходом, тоже соблюдаются (напомним, что при $v \to v_{1,2\infty}$ волны 1 или 2 линейно поляризованы в направлении распространения; см. § 11).

Точно с таким же в качественном отношении предельным переходом мы имели дело в § 11 при любом u и угле $\alpha \to 0$ (см. рис. 11,10). Это совпадение не случайно, так как при $\alpha = 0$ обыкновенная и необыкновенная волны являются чисто поперечными ($E_z = 0$, $E_x = \pm iE_y$) и при пренебрежении тепловым движением (т. е. без учета пространственной дисперсии) магнитное поле заведомо не влияет на упорядоченное движение частиц по полю. По последней причине в любом поле при $\alpha = 0$ должна существовать продольная волна, бегущая вдоль поля, т. е. должна существовать плазменная волна $v = 1$. Это обстоятельство видно не только на рис. 11,10, но и из исходных уравнений (при $\alpha = 0$ условие $D_z = 0$ имеет вид $D_z = \varepsilon_{zz}E_z = \varepsilon E_z = 0$, что и приводит к «дисперсионному уравнению» для плазменной волны $v = \omega_0^2/\omega^2 = 1$; см. § 8).

Заметим также, что отмеченные особенности предельных переходов при $u \to 0$ (или $\omega_H^2 \to 0$) и $\alpha \to 0$ отнюдь не являются типичными только для магнитоактивной плазмы. Напротив, они характерны для любой анизотропной среды (переход $u \to 0$ соответствует исчезновению анизотропии, а переход $\alpha \to 0$ отвечает приближению к одной из главных осей; см. [10]).

Может возникнуть все же некоторое недоумение, связанное с тем, что в изотропном случае при пренебрежении пространственной дисперсией в точке $v = 1$ существуют три волны, а в анизотропной среде в любой точке (при любом v) только две волны. Поскольку предельный переход, как показано, осуществляется нужным образом, здесь вряд ли есть основания для беспокойства. Ситуация становится, однако, значительно более прозрачной, если вспомнить, что при пренебрежении пространственной дисперсией о плазменных волнах можно говорить лишь в довольно условном смысле. При учете же пространственной дисперсии кривая $\tilde{n}_3(v)$ для плазмы имеет вид (см. (8,32)):

$$\tilde{n}^2_3(v) = \frac{1-v}{3\beta_T^2 v} \approx \frac{1-v}{3\beta_T^2}, \quad \beta_T^2 = \frac{\varkappa T}{mc^2}. \qquad (12,1)$$

Поэтому три волны (три значения $\tilde{n}^2$) имеются не только в точке $v = 1$, но в целой области в окрестности этой точки (границы этой области определяются условием малости затухания; см. (8,19), (8,39)) *).

Об учете пространственной дисперсии в анизотропной среде. Учет пространственной дисперсии в анизотропной среде и, в частности, в магнитоактивной плазме приводит к такому же результату. Этот вывод можно понять без всяких расчетов (см. [13,32]). Действительно, в начале § 11 указывалось, что дисперсионное уравнение для $\tilde{n}^2$ должно было бы быть уравнением 3-й степени для $\tilde{n}^2$, но фактически является уравнением 2-й степени. Таким образом, имеет место некоторое вырождение: коэффициент при $\tilde{n}^6$ равен нулю, и третий корень $\tilde{n}_3^2$ уходит на бесконечность. Естественно, что при учете нового эффекта — пространственной дисперсии — вырождение снимается и появляется конечный третий корень $\tilde{n}_3^2$. В изотропной плазме этот третий корень определяется выражением (12,1). При $T \rightarrow 0$ корень $\tilde{n}_3^2(v) \rightarrow \infty$, за исключением одной точки $v = 1$. Появление этой точки связано с другим вырождением — изотропией, причем и в изотропной среде при $T = 0$ уравнение для $\tilde{n}^2$ 2-й степени и условие существования продольного поля $\varepsilon(v) = 1 - v = 0$ не определяет какого-то значения $\tilde{n}_3^2$.

Приведенные соображения позволяют также заключить, что третья волна (третий корень) $\tilde{n}_3^2$ должна быть существенна в районе, где $\tilde{n}_1^2$ или $\tilde{n}_2^2$ стремится к бесконечности. В самом деле, если в уравнении $a\tilde{n}^6 + b\tilde{n}^4 + c\tilde{n}^2 + d = 0$ коэффициент a очень мал, то корень $\tilde{n}_3^2$ очень велик (т. е. $\tilde{n}_3^2 \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 0$); при этом корень $\tilde{n}_3^2$ минимален, если при данном a стремится к нулю коэффициент b, т. е. уходит на бесконечность еще один корень уравнения. Таким образом, в плазме можно ожидать, что значения $\tilde{n}_3^2$ будут не слишком велики только вблизи точки $v_{1,2\infty}$, т. е. при условии **)

$$1 - u - v + uv\cos^2\alpha = 1 - \frac{\omega_H^2}{\omega^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_0^2\omega_H^2}{\omega^4}\cos^2\alpha = 0, \qquad (12,2)$$

---

*) Как было указано в §8, в силу требования малости затухания плазменных волн в выражении для $\tilde{n}_3^2$ можно заменить $1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ на $2\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$. Здесь и в дальнейшем удобнее, тем не менее, не всегда пользоваться упрощениями такого типа.

**) Уравнение (11,4) при отсутствии поглощения имеет вид:

$$(1 - u - v + uv\cos^2\alpha)\,\tilde{n}^4 + [u(2 - v - v\cos^2\alpha) - 2(1 - v)^2]\,\tilde{n}^2 + (1 - v)[(1 - v)^2 - u] = 0. \qquad (12,3)$$

Корни этого уравнения определяются выражением (11,6) и обращаются в бесконечность в точке $v_{1,2\infty} = \frac{1 - u}{1 - u\cos^2\alpha}$ (см. (11,18) и (11,22)). Это выражение для $v_{1,2\infty}$ получается проще всего из условия равенства нулю коэффициента при $\tilde{n}^4$ в уравнении (12,3), т. е. из условия (12,2).

или $\omega^4 - \omega^2(\omega_H^2 + \omega_0^2) + \omega_0^2\omega_H^2\cos^2\alpha = 0$. Частоты ω_∞^2, удовлетворяющие этому условию, таковы:

$$\omega_\infty^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega_H^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2 + \omega_H^2)^2}{4} - \omega_0^2\omega_H^2\cos^2\alpha}. \qquad (12,2а)$$

Учет пространственной дисперсии в анизотропной среде можно осуществить в общем виде феноменологически [10,13], подобно тому как это было сделано в начале § 8 в отношении продольных волн в изотропной среде. Имея в виду только случай магнитоактивной плазмы, поступим иначе, сразу же рассматривая пространственную дисперсию, обусловленную тепловым движением электронов. При строгом анализе проблемы распространения электромагнитных волн в плазме с учетом теплового движения (пространственной дисперсии) нужно использовать метод кинетического уравнения или метод коэффициентов Эйнштейна (в случае равновесной плазмы этот последний метод сводится к использованию закона Кирхгофа). При наличии магнитного поля соответствующие расчеты довольно громоздки, особенно в случае применения кинетического уравнения [3—8, 62—68, 91—95, 116—122]. Поэтому, прежде чем остановиться на некоторых результатах кинетической теории, рассмотрим задачу в квазигидродинамическом приближении, уже использованном в конце § 8 (см. также [2—4, 77, 121—124] и § 13).

Квазигидродинамическое приближение. В квазигидродинамическом приближении исходим из уравнений (здесь учитывается только движение электронов):

$$\left.\begin{aligned} &m\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_e\boldsymbol{H}^{(0)}]\right) - \frac{\nabla p_e}{N} - m\nu_{\text{эфф}}\boldsymbol{v}_e,\\ &\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} N\boldsymbol{v}_e = 0, \qquad p_e = \xi_e \varkappa T_e N,\\ &\Delta\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{j}'}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{j}' = eN\boldsymbol{v}_e. \end{aligned}\right\} \qquad (12,4)$$

Если пренебречь членом с давлением, из этих уравнений получаются, конечно, результаты § 11.

Учитывая давление, производя линеаризацию (скорость $\boldsymbol{v}_e$ мала, изменение концентрации $N' \ll N$) и пренебрегая затуханием, для плоских монохроматических волн из (12,4) получаем дисперсионное уравнение для $\tilde{n}^2 = \dfrac{c^2k^2}{\omega^2}$:

$$\beta^2(1 - u\cos^2\alpha)\tilde{n}^6 - [1 - u - v + uv\cos^2\alpha + 2\beta^2(1 - v - u\cos^2\alpha)]\tilde{n}^4 + \\ + [2(1 - v)^2 - u(2 - v - v\cos^2\alpha) + \beta^2(1 - 2v + v^2 - u\cos^2\alpha)]\tilde{n}^2 + \\ + (1 - v)[u - (1 - v)^2] = 0, \qquad (12,5)$$

где $\beta = \sqrt{\xi_e \frac{\varkappa T_e}{mc^2}} = \sqrt{\xi_e}\,\beta_T$ — величина порядка отношения средней тепловой скорости электрона к скорости света. В отсутствие теплового движения (при $\beta \to 0$) уравнение (12,5) переходит в (12,3). В интересующей нас нерелятивистской плазме

$$\beta^2 = \xi_e \frac{\varkappa T_e}{mc^2} \ll 1. \tag{12,6}$$

Например, в солнечной короне (при $T_e \sim 10^6\,{}^\circ\mathrm{K}$)

$$\beta_T^2 = \frac{\varkappa T_e}{mc^2} \sim 10^{-4}.$$

В силу условия (12,6) ясно, что во всей той области значений параметра v, где корни $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$, вычисленные при $\beta^2 = 0$, не слишком велики, тепловые поправки малы. Третий корень уравнения (12,5) при этом велик, т. е. определяется первыми двумя членами и поэтому равен

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{n}_3^2 \approx \frac{1-u-v+uv\cos^2\alpha}{(1-u\cos^2\alpha)\,\beta^2}, \\ &|\tilde{n}_1^2| \ll |\tilde{n}_3^2|, \quad |\tilde{n}_2^2| \ll |\tilde{n}_3^2|. \end{aligned}\right\} \tag{12,7}$$

Корень (12,7) может быть не очень велик только вблизи точки v_∞, определяемой условием (12,2).

Таким образом, принятая квазигидродинамическая модель, как этого и следовало ожидать, приводит к следствиям, находящимся в соответствии с изложенными ранее соображениями общего характера. При $\alpha = 0$ (продольное распространение) уравнение (12,5) приводит для поперечных волн к выражениям (11,9) для $\tilde{n}_{1,2}^2 \equiv \tilde{n}_\pm^2$, а для продольной волны к выражению (12,1) для $\tilde{n}_3^2$. Уже здесь подчеркнем, что полная независимость выражений $\tilde{n}_\pm^2$ от β^2 является лишь следствием использованного приближения и не имеет места при кинетическом расчете (см. ниже).

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (поперечное распространение) получаем старое решение $\tilde{n}_2^2 = 1 - v$ для обыкновенной волны и уравнение

$$\beta^2\tilde{n}^4 + [(v-1)(1+\beta^2)+u]\,\tilde{n}^2 + [(v-1)^2 - u] = 0, \tag{12,8}$$

которому отвечают решения $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_3^2$.

В соответствии со сказанным ранее корень $\tilde{n}_3^2$ очень велик везде, кроме окрестности точки

$$v_{1\infty} = \frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha} = 1-u;$$

корень $\tilde{n}_1^2$ вне окрестности этой точки практически определяется старым выражением (см. (11,14) с $s = 0$).

Вблизи точки $v_{1\infty}$ ход кривых $\tilde{n}_{1,3}^2(v)$ при $u < 1$ ясен из рис. 12,2 и 12,3, где пунктир относится к решению $\tilde{n}_3^2$. Напомним, что в области отрицательных значений $\tilde{n}^2$ соответствующие волны сильно затухают (затухание происходит по закону $e^{-\frac{\omega}{c}|\tilde{n}|z}$, поскольку $\tilde{n}^2 = -\varkappa^2$ при $\tilde{n}^2 < 0$).

Особенно важно подчеркнуть, что решение $\tilde{n}_3^2$ не образует какой-то независимой ветви функции $\tilde{n}^2$. Появление третьего решения связано с другим — с исчезновением разрыва функции $\tilde{n}_1^2$ и такой деформацией кривых, что данному значению v отвечают уже два значения $\tilde{n}^2$ (об обыкновенной волне речь сейчас не идет). Если при $\beta \to 0$ полюс имеет обыкновенная волна, т. е. $\tilde{n}_2^2(v_{2\infty}) \to \infty$ (это имеет место в области $u > 1$, $u_L = u\cos^2\alpha > 1$), то плазменная волна является продолжением ветви $\tilde{n}_2^2(v)$; сказанное ясно из рис. 12,4.

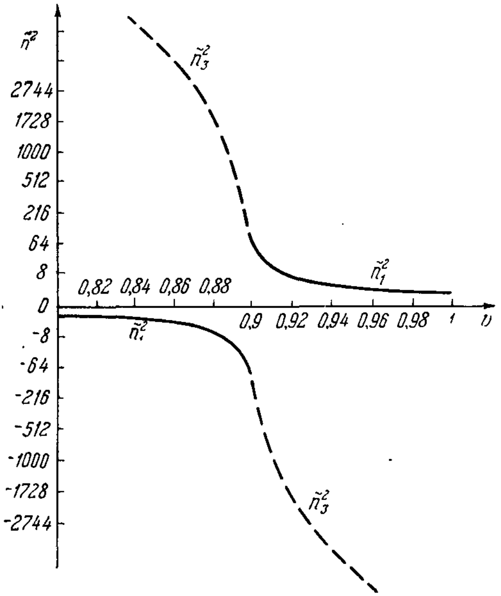


Рис. 12,2. Функции $\tilde{n}_1^2$ (сплошная линия) и $\tilde{n}_3^2$ (пунктир) при $u = 0{,}1$, $\alpha = 90°$ и $\beta^2 = 10^{-5}$ (квазигидродинамическое приближение).

О плазменных волнах в магнитоактивной плазме. В силу такого хода кривых ясно, что деление волн на необыкновенную и плазменную (при $u < 1$) или обыкновенную и плазменную (при $u > 1$, $u\cos^2\alpha > 1$) является весьма условным. Собственно, в магнитоактивной плазме никаких особых плазменных волн нет и лишь по соображениям удобства и с точки зрения характера предельного перехода к изотропной плазме соответствующая часть кривых $\tilde{n}_1^2$ или $\tilde{n}_2^2$ будет называться кривой для плазменных волн. Принятое определение соответствует, очевидно, тому, что плазменными волнами называются волны, для которых при $\beta^2 \to 0$ не существует конечных значений $\tilde{n}_3^2$ (см. рис. 12,2—12,4).

При квазигидродинамическом подходе в пренебрежении соударениями волны не затухают, даже если их фазовая скорость сравнима со скоростью теплового движения электронов. Между тем кинетическое рассмотрение приводит (как и в случае продольных волн в изотропной плазме) к возможности появления затухания, не связанного с соударениями. Кроме того, нужно подчеркнуть, что и для вычисления $\tilde{n}^2$ в области, где затухание мало, квазигидродинамический подход в случае магнитоактивной плазмы значительно более ограничен, чем в изотропном случае. Дело в том, что для продольной волны в изотропной среде просто по соображениям симметрии в дисперсионное уравнение может входить лишь один неизвестный коэффициент (см. § 8). Именно поэтому, выбирая в (8,16) значение ξ_e равным 3, мы могли

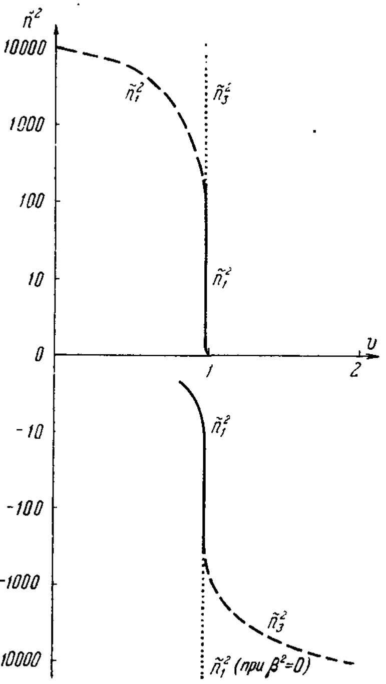


Рис. 12,3. Функции $\tilde{n}_1^2$ (сплошная линия) и $\tilde{n}_3^2$ (пунктир) при $u=0{,}5$, $\alpha=10°$ и $\beta^2=10^{-4}$ (квазигидродинамическое приближение). Пунктиром из точек показаны кривые $\tilde{n}_1^2$ при тех же значениях u и α, но $\beta^2=0$.

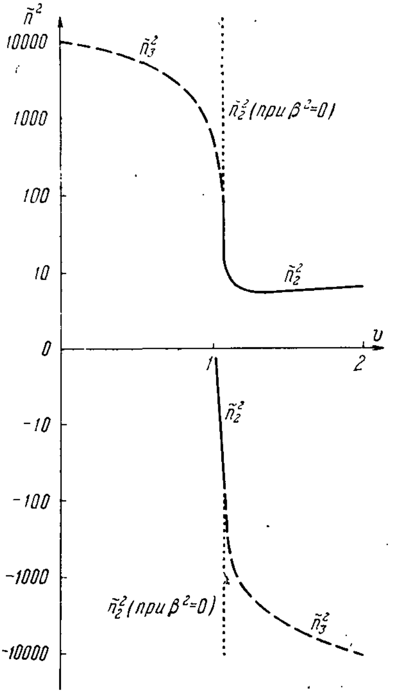


Рис. 12,4. Функции $\tilde{n}_2^2$ и $\tilde{n}_3^2$ при $u=2$, $\alpha=10°$ и $\beta^2=10^{-4}$ (квазигидродинамическое приближение).

получить полное совпадение квазигидродинамического и кинетического результатов. В случае же анизотропной среды учет пространственной дисперсии приводит к появлению более сложных выражений с несколькими коэффициентами. Между тем в уравнениях (12,4) мы считали тензор напряжений сводящимся к давлению, т. е. по-прежнему вводили только одну неизвестную постоянную ξ_e. Сказанное приводит к тому, что ни при каких значениях ξ_e дисперсионное уравнение (12,5) не совпадает с приводимым ниже уравнением (12,52), получаемым в кинетической теории. Практически отличие сводится к разнице в коэффициентах у $\tilde{n}^6$, которые в обоих случаях порядка β_T^2, но по-разному зависят от u, v и α. В частности, при квазигидродинамическом подходе как при $u < 1$, так и при $u \cos^2\alpha > 1$ (и всегда используемом условии $\beta^2 \ll 1$) все три корня $\tilde{n}^2_{1,2,3}$ уравнения (12,5) всегда вещественны. В кинетической же теории, как мы увидим ниже, это не так.

Для однородной среды, поскольку кинетическое рассмотрение проведено, квазигидродинамический расчет в силу сказанного, по меньшей мере, излишен. Ценность такого расчета состоит в его наглядности, а также возможности провести его без особого труда и в тех случаях, когда кинетическая теория сталкивается с большими математическими трудностями (многокомпонентная плазма, содержащая ионы разных сортов или молекулы; неоднородная плазма и т. д.).

Кинетическая теория. Перейдем к кинетической теории высокочастотных волн в однородной магнитоактивной плазме.

Исходными являются уравнения (см. (4,2) и (8,25)):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla_r\varphi + \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\nabla_v f_0 + \frac{e}{mc}\left[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}^{(0)}\right]\nabla_v\varphi = 0,\\ &\Delta\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{j}'}{\partial t}, \quad \boldsymbol{j}' = e\int\boldsymbol{v}\varphi\,d\boldsymbol{v}; \end{aligned}\right\} \qquad (12,9)$$

здесь соударениями пренебрегается и кинетическое уравнение уже линеаризировано (функция распределения $f = f_0 + \varphi$, $|\varphi| \ll |f_0|$; магнитное поле волны $|H| \ll H^{(0)}$; если невозмущенное распределение является максвелловским, как это будет ниже предполагаться, то $f_0 = f_{00} = N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\varkappa T}}$).

Система (12,9) отличается от использованной в § 8 только членом, содержащим внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$. Этот член приводит к очень сильному усложнению всех вычислений даже при решении задачи методом Фурье, т. е. путем подстановки $\varphi = \varphi_0(\boldsymbol{v})\,e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$. Вместе с тем, в принципиальном отношении расчет ведется так же, как в изотропном случае (см. § 8). В результате получается дисперсионное уравнение, определяющее связь между ω и $\boldsymbol{k}$, причем в знаменателях подынтегральных выражений типа (8,41) вместо $\omega - \boldsymbol{kv}$ фигурируют величины

$$\omega - s\omega_H - kv_z \cos\alpha; \qquad s = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots,$$

где v_z — проекция скорости электрона плазмы на направление магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$, выбранного за ось z, и α — угол между $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и $\boldsymbol{k}$.

Если эти знаменатели обращаются в нуль, т. е.

$$\omega = s\omega_H + kv_z \cos\alpha, \tag{12,10}$$

то решение уравнений методом Фурье незаконно, и нужно, например, решать задачу с начальными условиями. В результате для нахождения комплексной частоты $\omega' = \omega + i\gamma$ в зависимости от $\boldsymbol{k}$ оказывается пригодным дисперсионное уравнение, получаемое методом Фурье, но с интегрированием по v_z по контуру, обходящему сверху резонансные точки $v_z = \frac{\omega - s\omega_H}{k\cos a}$.

Природа поглощения, не связанного с соударениями. Прежде чем привести получающиеся таким образом выражения для $\omega(\boldsymbol{k})$ и $\gamma(\boldsymbol{k})$, остановимся на физическом смысле условия (12,10) и тем самым на природе поглощения, не связанного с соударениями.

В магнитном поле электрон вращается вокруг линий поля с частотой $\omega_H^* = \frac{|e|H^{(0)}}{mc}\frac{mc^2}{E}$, равной в нерелятивистском пределе частоте $\omega_H = \frac{|e|H^{(0)}}{mc}$; кроме того, электрон может иметь произвольную скорость $v_z < c$ вдоль линий поля. Движущийся таким образом электрон (или другая заряженная частица) излучает электромагнитные волны как вследствие наличия ускорения (магнитотормозное или синхротронное излучение), так и при выполнении соответствующего условия в силу эффекта Вавилова — Черенкова *).

При вычислении спектра и интенсивности излучения в произвольной среде наиболее простым и эффективным методом является использование разложения поля на нормальные плоские волны, могущие распространяться в данной среде [125—129]. Векторный потенциал поля представляется при этом в виде

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\lambda j} \frac{\sqrt{4\pi c}}{n_{\lambda j}} \boldsymbol{a}_{\lambda j} q_{\lambda j}(t)\, e^{i\boldsymbol{k}_\lambda \boldsymbol{r}} + \text{комплексно сопряженный},$$

---

*) При наличии соударений к магнитотормозному и черенковскому излучению прибавляется тормозное излучение, возникающее в результате ускорения электрона во время соударения.

где $\boldsymbol{a}_{\lambda j}$ — комплексные векторы поляризации, отвечающие нормальным волнам $j=1$ и $j=2$ (разумеется, в негиротропной среде векторы $\boldsymbol{a}_{\lambda j}$ вещественны, если не говорить о случае вакуума, когда их можно выбрать и вещественными и комплексными). Подставляя $\boldsymbol{A}$ (в виде ряда) в уравнение поля для $\boldsymbol{A}$, после умножения на $\frac{\sqrt{4\pi}c}{n_{\lambda j}}\boldsymbol{a}_{\lambda j}^{*}e^{-i\boldsymbol{k}_{\lambda}\boldsymbol{r}}$ и интегрирования по пространству получаем уравнения для $q_{\lambda j}$:

$$\ddot{q}_{\lambda j}+\omega_{\lambda j}^{2}q_{\lambda j}=\sqrt{4\pi}\,\frac{e}{n_{\lambda j}}(\boldsymbol{v}_{e}\boldsymbol{a}_{\lambda j}^{*})\,e^{-i\boldsymbol{k}_{\lambda}\boldsymbol{r}_{e}}=f(t), \qquad (12,11)$$

где $\omega_{\lambda j}^{2}=\frac{c^{2}k_{\lambda}^{2}}{n_{\lambda j}^{2}}$, $\boldsymbol{r}_{e}$ и $\boldsymbol{v}_{e}=\frac{d\boldsymbol{r}_{e}}{dt}$ — радиус-вектор и скорость излучающего электрона.

Если не говорить о численном множителе, то вид «силы» $f(t)$ в (12,11) ясен сразу же — достаточно вспомнить, что плотность тока, связанного с движущимся электроном, равна

$$\boldsymbol{j}_{e}=e\boldsymbol{v}_{e}(t)\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{e}), \qquad \int e\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{e})\,d\boldsymbol{r}=e,$$

а в уравнениях поля в правой части стоит выражение $\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{e}$; следовательно,

$$\int \boldsymbol{j}_{e}\boldsymbol{a}_{\lambda j}^{*}e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{r}=e(\boldsymbol{v}_{e}\boldsymbol{a}_{\lambda j}^{*})\,e^{-i\boldsymbol{k}_{\lambda}\boldsymbol{r}},$$

что и отвечает правой части в (12,11).

Частоты, излучаемые движущейся частицей, могут быть сразу же определены, если учесть, что излучению отвечают нарастающие во времени решения для $q_{\lambda j}$ (при излучении энергия поля все время возрастает, что возможно лишь в случае возрастания $q_{\lambda j}$). В свою очередь нарастание $q_{\lambda j}$ во времени может иметь место только при резонансе, когда в спектре «силы» $f(t)$ в (12,11) присутствуют частоты, равные каким-либо возможным значениям частоты $\omega_{\lambda j}=\frac{k_{\lambda}c}{n_{\lambda j}}$. Рассмотрим, например, равномерное движение электрона, когда $\boldsymbol{r}_{e}=\boldsymbol{v}t$. Тогда в спектре силы $f(t)$ присутствует лишь частота $\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}$, и условие излучения $\omega_{\lambda j}\equiv\omega=\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}$ есть как раз условие появления черенковских волн (подобный способ [130] получения условия черенковского излучения представляется нам одним из простейших). Для электрона в магнитном поле получаем:

$$\boldsymbol{r}_{e}=\{r_{0}\cos\omega_{H}^{*}t,\ r_{0}\sin\omega_{H}^{*}t,\ v_{z}t\},$$
$$\boldsymbol{v}_{e}=\{-v_{\perp}\sin\omega_{H}^{*}t,\ v_{\perp}\cos\omega_{H}^{*}t,\ v_{z}\},\quad v_{\perp}=r_{0}\omega_{H}^{*},$$
$$f(t)=\mathrm{const}\,(-a_{x}^{*}v_{\perp}\sin\omega_{H}^{*}t+a_{y}^{*}v_{\perp}\cos\omega_{H}^{*}t+a_{z}^{*}v_{z})\times$$
$$\times e^{-i\{kr_{0}\sin\alpha\sin\omega_{H}^{*}t+k\cos\alpha\cdot v_{z}t\}},$$

где оси координат для простоты выбраны так, что $k_x = 0$. Используя разложение плоской волны по бесселевым функциям

$$\exp\{-ik_\lambda r_0 \sin\alpha \sin\omega_H^* t\} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(k_\lambda r_0 \sin\alpha)\, e^{-is\omega_H^* t},$$

без труда убеждаемся в том, что условие резонанса имеет вид:

$$\omega = s\omega_H^* + kv_z \cos\alpha; \quad s = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \tag{12,10а}$$

и в нерелятивистском случае переходит в (12,10).

Условие (12,10а) при $s = 0$ есть условие черенковского излучения для частицы, движущейся со скоростью v_z. При $s \neq 0$ вместо (12,10а) можно написать $\left(k = \frac{\omega}{c} n(\omega, \cos\alpha)\right)$:

$$s > 0: \quad \omega = \frac{s\omega_H^*}{1 - \frac{v_z}{c} n \cos\alpha}; \quad s < 0: \quad \omega = \frac{s\omega_H^*}{\frac{v_z}{c} n \cos\alpha - 1}, \tag{12,10б}$$

причем частота ω, как и в формулах (12,10), (12,10а) и всех других, всегда положительна *).

Если скорость $v_\perp \ll v_z$, то электрон в магнитном поле излучает подобно двум соответствующим образом выбранным диполям, движущимся вдоль поля со скоростью $v_z \approx v$; этому случаю отвечают значения $s = \pm 1$ (точнее, более высокие обертоны не играют роли, если $kr_0 \sin\alpha = \frac{\omega}{c} n \frac{v_T}{\omega_H} \sin\alpha \ll 1$). В подобных условиях формулы (12,10б) являются частным случаем формулы для эффекта Доплера в среде [131, 132]

$$\omega = \frac{\omega_j \sqrt{1-\beta^2}}{|1 - \beta n \cos\alpha|} = \frac{\omega_j'}{|1 - \beta n \cos\alpha|}, \tag{12,12}$$

---

*) Излучение, отвечающее значению $s = 0$, называют обычно черенковским, а излучение при $s \neq 0$ — магнитотормозным или синхротронным; нужно, однако, иметь в виду, что такое разделение носит несколько условный характер (см. [74]). Например, при $v_z = 0$ (движение по окружности) излучение при $s = 0$ отсутствует. В то же время из физических соображений очевидно, что при достаточно большом радиусе кривизны излучение при $v_z = 0$ и $\beta n > 1$ будет по своему характеру весьма близко к черенковскому. В случае же использования упомянутой терминологии излучение при $v_z = 0$ является чисто магнитотормозным, и формально такое название оправдано, поскольку спектр при неучете эффекта Доплера или при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ дискретен ($\omega = s\omega_H$), а интенсивность излучения не стремится к нулю при переходе к вакууму. Таким образом, пользуясь термином «магнитотормозное излучение», не нужно забывать, что при движении заряда в среде такое излучение по своему характеру может радикально отличаться от излучения в вакууме.

где ω_j — собственная частота излучателя в системе отсчета, в которой он покоится, а ω_j' — его частота в лабораторной системе (в случае движения в магнитном поле $\omega_j' = \omega_H^*$); далее, в (12,12) $\beta = \frac{v}{c}$, α — угол между волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}$ и в общем случае $n = n\left(\omega, \frac{\boldsymbol{k}}{k}\right)$.

Область углов внутри черенковского конуса (область, где $\beta n \cos\alpha > 1$), на котором $\beta n \cos\alpha = 1$, отвечает аномальному эффекту Доплера, а область $\beta n \cos\alpha < 1$ отвечает нормальному эффекту. Появление аномального эффекта Доплера, как и черенковского излучения, возможно, разумеется, только при сверхсветовой скорости, т. е. когда $\beta n = \frac{v}{c} n > 1$. В случае движения в магнитном поле аномальному эффекту отвечают значения $s < 0$ в (12,10) и (12,10а, б).

Если частица испускает излучение с какой-то частотой ω, то и поглощать она будет излучение такой же частоты, как это хорошо известно и из классической, и из квантовой теории.

Таким образом, становится совершенно ясной природа не связанного с соударениями поглощения волн в магнитоактивной плазме на частотах, удовлетворяющих условию (12,10). К тому же результату можно прийти, рассматривая при движении электрона в магнитном поле частотный спектр силы, действующей на этот электрон в поле волны (частота силы не равна частоте поля $\boldsymbol{E}$, так как электрон перемещается и в разные моменты находится в поле разной напряженности; см. § 1 и [133]). Поскольку появление частот $s\omega_H^*$, кроме частоты ω_H^*, связано с присутствием множителя $e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$, ясно, что мы имеем дело с учетом пространственной дисперсии, т. е. зависимости поля от координат. В нерелятивистском случае и при пренебрежении множителем $\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}$ по сравнению с единицей условие излучения имеет вид $\omega = \omega_H$, что соответствует теории, рассмотренной в предыдущих разделах.

При отсутствии соударений задача о поглощении и рефракции (вычислении показателя преломления) в магнитоактивной плазме в силу изложенного может быть тесно связана с задачей об излучении; производя необходимое усреднение по скоростям на таком пути, можно получить многие результаты и без использования кинетического уравнения (см. следующий раздел настоящего параграфа и § 37). В тех случаях, когда пригоден подобный метод, связанный с использованием закона (теоремы) Кирхгофа для теплового излучения [70, 75, 77, 134] или коэффициентов Эйнштейна [73, 76, 77, 113, 135—138], его безусловно желательно использовать в связи с большой прозрачностью и относительной простотой вычислений (см. ниже). Метод кинетического уравнения является, однако, более общим, ибо не только удобен для проведения усреднения по скоростям, но и, главное, позволяет без дополнительных затруднений учесть и влияние теплового движения на показатель преломления, и влияние соударений.

В этом последнем случае в получающемся из (12,9) дисперсионном уравнении в знаменателе вместо $\omega - s\omega_H - kv_z \cos\alpha$ стоит выражение

$$\omega - s\omega_H - kv_z \cos\alpha - i\nu(v), \tag{12,13}$$

как это сразу же ясно из (12,9) при добавлении к уравнению для φ члена $\nu(v)\varphi$.

Пренебрежение влиянием теплового движения отвечает в (12,10) и (12,13) пренебрежению членом с v_z, а также использованию только значений $s = \pm 1$. Последнее ясно из того, что при $v \to 0$ в спектре силы $f(t)$ в (12,11) остается лишь частота ω_H, которая и может излучаться и поглощаться *); при этом для волны с электрическим полем, вращающимся в направлении, противоположном направлению вращения электрона, поглощение при отсутствии соударений невозможно, но наличие магнитного поля влияет на показатель преломления; этому случаю и соответствует значение $s = -1$ в (12,13). Сказанное, разумеется, автоматически получается при расчетах. Итак, при пренебрежении тепловым движением вместо (12,13) в дисперсионном уравнении фигурируют знаменатели вида $\omega \pm \omega_H - i\nu(v)$ и получаются результаты, приведенные в §§ 10, 11.

Вдали от частот $\omega = s\omega_H$ $(s > 0)$ влияние теплового движения мало, если $\omega^2 \gg (kv_z)^2 \cos^2\alpha$, т. е.

$$\frac{v_z^2 n^2}{c^2} \cos^2\alpha \ll 1, \tag{12,14}$$

причем в качестве v_z можно обычно подставить среднее значение $v_z \sim \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$; таким образом, условие (12,14) будет выглядеть так:

$$\beta_T^2 n^2 \cos^2\alpha \ll 1, \quad \beta_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{mc^2}}, \quad n = n_{1,2}(\omega, \cos\alpha). \tag{12,14a}$$

При $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ это условие всегда выполнено и тепловое движение приводит лишь к появлению резонансного поглощения на частотах $s\omega_H$, $s > 0$. Физически это вполне понятно, поскольку при

---

*) Здесь мы отвлекаемся от моментов, обсуждавшихся в конце § 11 и связанных с влиянием на излучение данного электрона окружающей его среды. Вместе с тем, конечно, учет такого влияния является важным моментом.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ и конечных значениях n черенковское условие $\beta n \cos \alpha = 1$ никогда не может выполняться *). Нужно также заметить, что неравенство (12,14а) является необходимым, но не достаточным условием слабости затухания при отсутствии соударений и вдали от резонансов (см. ниже).

Даже в солнечной короне (при $T \sim 10^6$) $\beta_T \sim 10^{-2}$ и тепловое движение сильно сказывается на распространении волн только вблизи частот ω_∞ (см. (12,2а)), где возрастает показатель преломления, а также вблизи частот $s\omega_H$. При более высоких температурах (во внутренних областях некоторых звезд, в соответствующих лабораторных установках) положение, разумеется, изменяется и картина, имеющая место при $\beta_T \to 0$, не может служить даже для ориентировки. Здесь эта интересная область очень высоких температур не рассматривается **), и поэтому при

---

*) В особом рассмотрении нуждается случай достаточно слабого магнитного поля, когда осуществляется переход к изотропной плазме. В то же время результат предельного перехода $\omega_H \to 0$ известен: в изотропной плазме при отсутствии соударений существует только черенковское поглощение плазменных волн.

**) Излучение и распространение волн в плазме при $\beta_T \sim 0{,}1 \div 1$ (т. е. в релятивистской плазме) рассмотрено в ряде работ (см., например, [3, 70, 71, 115, 136—148]). Используя нерелятивистское кинетическое уравнение, как это здесь делается, разумеется, нельзя учитывать членов порядка β_T^2 и более высоких в тех случаях, когда эти члены действительно являются поправками (т. е., например, когда β_T^2 меньше аналогичных членов, присутствующих в тех же условиях). Вместе с тем подобное нерелятивистское рассмотрение при $\beta_T^2 \ll 1$ достаточно для вычисления не связанного с соударениями затухания или значений $\tilde{n}_3^2$, которые ни в коей мере не являются «поправками» к каким-то величинам, определяемым уже при $\beta_T^2 = 0$. Известная оговорка в этом отношении нужна в случае значений $\tilde{n}_{1,2,3}^2$, близких к нулю (длинные волны). При отсутствии магнитного поля об этом уже была речь в § 8, где приведены формулы для $\tilde{n}_{1,2,3}^2$ с точностью до членов порядка $\beta_T^2 = \frac{\varkappa T}{mc^2} \ll 1$. При наличии магнитного поля и продольном распространении ($\alpha = 0$) формула (8,33) для $\tilde{n}_3^2$, конечно, сохраняется. Для поперечных же волн 1 и 2 имеем (предполагается, что $|1 - \sqrt{u}| \gg \beta_T^2$; см. [69]):

$$\tilde{n}_1^2 = \frac{1 - \frac{v}{1-\sqrt{u}}\left(1 - \frac{5}{2}\cdot\beta_T^2\,\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}\right)}{1 + \frac{\beta_T^2 v}{(1-\sqrt{u})^3}},$$

$$\tilde{n}_2^2 = \frac{1 - \frac{v}{1+\sqrt{u}}\left(1 - \frac{5}{2}\cdot\beta_T^2\,\frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}\right)}{1 + \frac{\beta_T^2 v}{(1+\sqrt{u})^3}}.$$

произвольном α ограничимся условиями, в которых

$$n^2 \gg 1, \tag{12,15}$$

а также областью частот $\omega \approx \omega_H$, $\omega \approx 2\omega_H$ и $\omega \approx 3\omega_H$ (в этих областях требование (12,15) не используется).

О вычислении коэффициента поглощения с помощью закона Кирхгофа и методом коэффициентов Эйнштейна. В среде, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, излучательная способность a_l и коэффициент поглощения μ_l для нормальной волны типа l связаны между собой соотношением

$$a_l = \mu_l I_l^{(0)}, \qquad I_l^{(0)} = \frac{n_l^2 \omega^2 \varkappa T}{8\pi^3 c^2 |\cos\theta_l|}. \tag{12,16}$$

Здесь, по определению, излучательная способность a_l есть энергия, излучаемая в виде волн типа l единичным объемом среды и отнесенная к единичным интервалам времени, частоты и телесного угла. Далее, μ_l есть коэффициент поглощения волны типа l (например, обыкновенной волны 2 или необыкновенной волны 1) в рассматриваемом направлении (напомним, что для однородных плоских волн $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}(n - i\varkappa)\boldsymbol{s}$, $s = 1$, $\mu = \frac{2\omega}{c}\varkappa$ и поле в волне типа l меняется по закону $e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa_l \boldsymbol{s}\boldsymbol{r}}\, e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} n_l \boldsymbol{s}\boldsymbol{r}\right)}$). Весьма важно, что все величины a_l, μ_l и $I_l^{(0)}$ нужно брать для одного и того же направления, ибо в анизотропной среде a_l, n_l, μ_l и фигурирующий в (12,16) угол θ_l между волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и групповой скоростью $\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ зависят от направления распространения волн (см. § 24). Наконец, $I_l^{(0)}$ в (12,16) представляет собой интенсивность теплового (равновесного) излучения в классической области $\hbar\omega \ll \varkappa T$ (по определению $I d\omega\, d\Omega$ есть поток энергии в интервале частоты $d\omega$ и интервале телесного угла $d\Omega$; часто I называют удельной интенсивностью). Отметим, что формула (12,16), которая называется законом, уравнением или теоремой Кирхгофа, относится только к слабопоглощающей среде, когда интенсивность $I_l^{(0)}$ можно считать зависящей лишь от n_l (но не от $\mu_l = \frac{2\omega}{c}\varkappa_l$) и имеет смысл понятие о лучах и групповой скорости.

Закон Кирхгофа непосредственно применим в случае полного термодинамического равновесия, когда равновесными являются и вещество и излучение. Соотношение (12,16) применимо, однако, в довольно широких пределах и в условиях, когда среда является равновесной, но излучение неравновесно. Объясняется это тем, что излучение и вещество связаны, вообще говоря, довольно слабо (имеется малый параметр — постоянная тонкой структуры

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$). В силу такой слабой связи значения a_l и μ_l определяются обычно только состоянием среды (конкретно они зависят от распределения частиц плазмы по скоростям), но не от интенсивности излучения, которое может, таким образом, быть неравновесным. Разумеется, при больших интенсивностях (сильные поля) нужно учитывать нелинейность и тогда уже μ_l зависит от интенсивности I.

Итак, в равновесной плазме (при максвелловском распределении частиц по скоростям) в линейном приближении коэффициент поглощения

$$\mu_l = \frac{8\pi^3 c^2 \,|\cos\theta_l|\, a_l}{n_l^2 \omega^2 \varkappa T}, \tag{12,16а}$$

где a_l, μ_l, n_l и θ_l зависят от ω_0, ω_H и α, а в более сложных случаях (например, когда существенна роль ионов) и от других величин. Для равновесной слабопоглощающей нерелятивистской плазмы показатель преломления n_l и угол θ_l между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ можно обычно считать такими же, как для «холодной» плазмы; далее, излучательная способность a_l равна в этом случае сумме излучательной способности отдельных частиц плазмы, движущихся в среде с известными свойствами (с известной функцией n_l $(\omega_0, \omega_H, \alpha)$). Таким образом, в определенных случаях, которые как раз представляют большой интерес, вычисление коэффициента μ_l сводится к нахождению спектральной мощности излучения одной частицы, движущейся в «холодной» плазме, и последующему усреднению по скоростям.

Связь между поглощением и излучением, которая нашла свое отражение в законе Кирхгофа (12,16) — (12,16а), имеет место и на более элементарном уровне — в отношении самих актов поглощения и излучения. Этот факт очевиден и общеизвестен в рамках квантовой теории излучения (речь идет о равенстве модулей матричных элементов энергии взаимодействия излучения с веществом для переходов с поглощением и испусканием фотонов; см., например, [22]). Для интересующих нас задач, однако, нет необходимости использовать квантовомеханический аппарат, поскольку проще и вполне достаточно опираться на метод коэффициентов Эйнштейна [142].

Рассмотрим связанные с излучением или поглощением переходы для «системы» (например, электрона в магнитном поле или в атоме) с уровнями m и n (энергии E_m и E_n). Тогда вероятность перехода (в единицу времени) системы с уровня m на уровень n с испусканием фотона в интервале частот $d\omega$ в телесном угле $d\Omega$ равна $A_m^n \, d\omega \, d\Omega$, где A_m^n — один из коэффициентов Эйнштейна, определяющий вероятность рассматриваемого спонтанного излучения. Разумеется, $A_m^n \neq 0$ только, если переход возможен. Далее, вероятность индуцированного испускания фотона под действием таких же падающих фотонов и с переходом системы с уровня m на уровень n равна $B_m^n\,\rho\,d\omega\,d\Omega$, где ρ — спектральная плотность энергии излучения для частоты перехода. Вероятность поглощения (переход $n \to m$) равна $B_n^m\,\rho\,d\omega\,d\Omega$. В состоянии равновесия все эти три процесса (спонтанное и индуцированное излучение, поглощение) не должны изменять ни числа фотонов в различных состояниях, ни числа частиц N_m и N_n на уровнях m и n. Кроме того, в равновесии плотность излучения ρ известна. Отсюда, в случае излучения в вакууме, получаются установленные Эйнштейном [142] связи между коэффициентами A_m^n, B_m^n и B_n^m.

Обобщение этих связей для излучения в слабопоглощающей среде не составляет труда [73, 77], поскольку нужно лишь учесть изменение выражения для плотности энергии равновесного излучения.

Именно, в среде (в классической области $\hbar\omega \ll \varkappa T$) равновесная плотность энергии в волнах типа l равна

$$\rho_l^{(0)}\,d\omega\,d\Omega = \frac{n_l^2\omega^2\varkappa T}{(2\pi c)^3}\left|\frac{\partial(\omega n_l)}{\partial\omega}\right| d\omega\,d\Omega. \qquad (12,17)$$

Отметим, что существует такая связь между удельной плотностью энергии ρ_l и интенсивностью излучения I_l:

$$I_l = \rho_l v_{\text{гр},\,l} = \rho_l\left|\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}_l}\right| = \rho_l\,\frac{c}{|\cos\theta_l|\left|\frac{\partial(\omega n_l)}{\partial\omega}\right|}. \qquad (12,18)$$

Здесь $\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}_l}$ — групповая скорость, θ_l угол между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ в волне типа l и учтено соотношение $v_{\text{гр}} = \left|\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}\right| = \frac{c}{|\cos\theta|\left|\frac{\partial(\omega n_l)}{\partial\omega}\right|}$ (см. (24,15)). Поскольку $I_l\,d\omega\,d\Omega$ есть поток энергии, $\rho_l\,d\omega\,d\Omega$ — плотность энергии и $v_{\text{гр}}$ — скорость распространения импульсов, соотношение (12,18) довольно очевидно; оно, кроме того, будет доказано в § 24. В состоянии равновесия $N_m(A_m^n + B_m^n\rho_l^{(0)}) = N_n B_n^m \rho_l^{(0)}$, $\frac{N_m}{N_n} = e^{-\hbar\omega/\varkappa T} \approx 1 - \frac{\hbar\omega}{\varkappa T}$, $\hbar\omega = E_m - E_n$. Поскольку баланс должен иметь место при любом сколь угодно большом $\rho_l^{(0)}$ (формально при $T \to \infty$), получаем соотношения

$$B_n^m = B_m^n, \qquad \frac{A_m^n}{B_m^n} = \frac{n_l^2\hbar\omega^3}{(2\pi c)^3}\left|\frac{\partial(\omega n_l)}{\partial\omega}\right|. \qquad (12,19)$$

В вакууме (при $n_l=1$) отсюда, конечно, следуют обычные соотношения Эйнштейна

$$B_n^m=B_m^n, \quad \frac{A_m^n}{B_m^n}=\frac{\hbar\omega^3}{(2\pi c)^3}. \tag{12,19a}$$

Подчеркнем, что статистические веса состояний m и n выше считались равными единице, а коэффициент A_m^n есть вероятность излучения в единицу телесного угла и только для волн с одной поляризацией.

Соотношения (12,19) получены с использованием равновесных значений $\rho_l=\rho_l^{(0)}$ и N_m/N_n. Совершенно очевидно, однако, что сами эти соотношения ни в какой мере не ограничены условиями равновесия (поэтому, естественно, температура T (в 12,19) не входит).

Коэффициент поглощения системы μ_l определяется разностью процессов индуцированного испускания и «истинного» поглощения. Отсюда, в силу (12,19),

$$\mu_l=\frac{\Delta I_l}{I_l}=\frac{\hbar\omega\,(N_nB_n^m\rho_l-N_mB_m^n\rho_l)}{\rho_l\left|\dfrac{d\omega}{dk_l}\right|}=A_m^nN_m\left(\frac{N_n}{N_m}-1\right)\frac{8\pi^3c^2\,|\cos\theta_l|}{\omega^2n_l^2}=$$

$$=a_l\frac{8\pi^3c^2\,|\cos\theta_l|}{\hbar\omega^3n_l^2}\left(\frac{N_n}{N_m}-1\right), \tag{12,20}$$

где ΔI_l — изменение интенсивности на единице длины, а $\hbar\omega=(E_m-E_n)$ — энергия «фотона в среде» (импульс «фотона в среде» равен $\hbar\boldsymbol{k}_l=\frac{\hbar\omega}{c}n_l\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{k}}{k}$ (см. [74])). При переходе к последнему выражению (12,20) учтено, что излучательная способность a_l в направлении $\boldsymbol{k}_l$, по определению, равна $a_l=A_m^nN_m\hbar\omega$.

В состоянии равновесия для частиц $\frac{N_n}{N_m}=e^{\frac{\hbar\omega}{\varkappa T}}\approx 1+\frac{\hbar\omega}{\varkappa T}$ и выражение (12,20) переходит в закон Кирхгофа (12,16а).

В общем случае произвольной функции распределения частиц по уровням и любого числа уровней в (12,20) нужно заменить $A_m^nN_m\left(\frac{N_n}{N_m}-1\right)$ на $\sum\limits_{m\rightleftarrows n}A_m^nN_m\left(\frac{N_n}{N_m}-1\right)$, где суммирование производится по всем переходам $m\rightleftarrows n$, приводящим к излучению рассматриваемой частоты ω. Существенно при этом, что величина $\sum A_m^nN_m\left(\frac{N_n}{N_m}-1\right)$ может быть не только положительной (это отвечает поглощению), но и отрицательной. В последнем случае система неустойчива (происходит усиление волн). Нужно подчеркнуть, что для неустойчивой и вообще неравновесной системы метод коэффициентов Эйнштейна можно применять лишь с дополнительными ограничениями по сравнению с теми, которые уже упоминались выше (имеем в виду слабое поглощение или усиление волн; кроме того, практическое использование метода ограничено условиями, в которых выражения для n_l и θ_l достаточно просты и, например, относятся к «холодной» плазме). Конкретно, метод коэффициентов Эйнштейна пригоден только для некогерентного начального состояния, когда излучательная способность системы равна сумме излучательной способности отдельных частиц.

Несмотря на отмеченные ограничения, использование закона Кирхгофа и метода коэффициентов Эйнштейна для вычисления коэффициента поглощения или усиления волн в плазме оказалось, как уже подчеркивалось, весьма плодотворным и удобным в силу своей относительной простоты и наглядности (см. [70, 73—77, 113, 134—138]). Тем не менее вычисление μ (или γ), например, в области резонансов $\omega \approx \omega_H$ (при $\alpha \neq 0$), $\omega \approx 2\omega_H$ и $\omega \approx 3\omega_H$ для не очень горячей магнитоактивной плазмы даже на основе использования закона Кирхгофа связано с довольно громоздкими выкладками. Приводить такие расчеты в настоящей книге представляется нам неуместным. Поэтому ниже в отношении значений μ и γ, вычисленных при учете теплового движения (пространственной дисперсии), мы ограничимся указанием результатов, а также их обсуждением. С примером детального расчета коэффициента поглощения с использованием коэффициентов Эйнштейна мы еще столкнемся в § 37 в применении к плазме с очень низкой плотностью (точнее, речь идет о вычислении коэффициента поглощения μ в области частот $\omega \gg \omega_0$).

Результаты кинетической теории для продольного распространения (угол $\alpha = 0$). Важным частным случаем распространения волн в плазме является распространение строго вдоль поля (угол $\alpha = 0$). В таких условиях, казалось бы, распространение волн и при учете теплового движения должно отличаться особой простотой. Но это не так, если речь идет об области резонанса $\omega \approx \approx \omega_H$ (как мы сейчас увидим, только такой резонанс и существует при $\alpha = 0$). Дело в том, что при $\alpha = 0$ и $\omega \to \omega_H$ уже в «холодной» плазме для необыкновенной волны $\tilde{n}_1^2 \equiv \tilde{n}_+^2 = 1 - \frac{v}{1-\sqrt{u}} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega-\omega_H)} \to \infty$. Поэтому влияние теплового движения весьма существенно и вычисление коэффициента поглощения μ с помощью закона Кирхгофа (с использованием выражения $\tilde{n}_1^2$ для «холодной» плазмы) оказывается невозможным (см. [134]; случай $\omega \approx \omega_H$, $\alpha \approx 0$ является в этом отношении исключительным). Метод же кинетического уравнения вполне пригоден и при

$\alpha = 0$, $\omega \approx \omega_H$. В этом случае дисперсионное уравнение распадается на уравнение (8,42) для продольной плазменной волны и следующее уравнение для поперечных волн:

$$-\frac{\omega_0^2\omega'}{c^2k^2-(\omega')^2}\frac{1}{N}\int\frac{f_{00}(u)\,du}{\omega' \pm \omega_H - ku} = 1, \tag{12,21}$$

где знак — отвечает необыкновенной волне, знак + соответствует обыкновенной волне, $f_{00}(v_z) = N\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T}}\,e^{-\frac{mv_z^2}{2\varkappa T}}$, $u = v_z$ и интегрирование ведется по контуру C, обходящему сверху полюсы знаменателя.

Подчеркнем, что уравнение (12,21) является точным в том смысле, что следует из уравнений (12,9) без пренебрежений. Таким образом, при $\alpha = 0$ в дисперсионном уравнении фактически отсутствуют все значения s, кроме $s = \pm 1$. Это вполне понятно, поскольку при $\alpha = 0$ в спектре «силы» $f = \mathrm{const}\,(\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}_{\lambda j}^*)\,e^{-ikv_z t}$ присутствуют лишь частоты $\omega_H \pm kv_z$. Отсутствие черенковского излучения формально связано с тем, что при $\alpha = 0$ имеем $a_z^* = 0$ и, следовательно, $a_z^* v_z = 0$; физически же этот результат связан с тем, что условие $\omega = kv_z$ или $\cos\alpha = 1$ отвечает порогу эффекта, когда интенсивность излучения равна нулю.

При пренебрежении тепловым движением (формально положив в (12,21) в знаменателе $ku = 0$) получаем *):

$$-\frac{\omega_0^2\omega'}{(c^2k^2-\omega'^2)(\omega' \pm \omega_H)} = 1, \quad \omega' = \omega, \quad n_{1,2}^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega \mp \omega_H)}, \tag{12,21а}$$

что совпадает с формулами (11,9).

Для обыкновенной волны 2 в нерелятивистской теории тепловыми поправками можно пренебречь (и в известном отношении даже нужно пренебречь, чтобы не превысить точности самого расчета). Для необыкновенной волны 1, которой отвечает знак минус в (12,21а), достаточно далеко от резонанса, когда

$$\left(\frac{\omega-\omega_H}{\omega}\right)^2 \gg \frac{\varkappa T}{mc^2}n_1^2 \approx \beta_T^2\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega-\omega_H)}\right), \tag{12,22}$$

---

*) В этом случае при $\omega \neq \omega_H$ интегрирование ведется по вещественной оси в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{00}(u)\,du = N$, так как $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$.

получаем [117, 120]:

$$n_1^2 = \frac{1 - \dfrac{v}{1-\sqrt{u}}}{1 + \beta_T^2 \dfrac{v}{(1-\sqrt{u})^3}} = \frac{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega(\omega-\omega_H)}}{1 + \dfrac{\left(\dfrac{\varkappa T}{mc^2}\right)\omega_0^2\omega}{(\omega-\omega_H)^3}}. \qquad (12{,}21б)$$

Очевидно, тепловые поправки малы при условии (сразу полагаем также $\omega \sim \omega_H$)

$$\frac{|\omega-\omega_H|^3}{\omega_H^3} \gg \frac{\varkappa T}{mc^2}\frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} = \beta_T^2 \frac{v}{u}, \qquad (12{,}22а)$$

которое при $|n_1^2| \gg 1$ эквивалентно условию (12,22):

$$\frac{(\omega-\omega_H)^2}{\omega_H^2} \gg \beta_T^2 n_1^2, \quad n_1^2 \gg 1. \qquad (12{,}22б)$$

При $\frac{\omega_0^2}{\omega_H^2} \sim 1$ для земной ионосферы это условие дает $\frac{|\omega-\omega_H|}{\omega_H} \gg 5\cdot 10^{-3}$ и для солнечной короны $\frac{|\omega-\omega_H|}{\omega_H} \gg 5\cdot 10^{-2}$ (соответствующие значения $n_1^2 \ll 200$ и $n_1^2 \ll 20$, но в то же время $n_1^2 \gg 1$).

При учете соударений роль их невелика, если

$$(\omega-\omega_H)^2 \gg \nu_{эфф}^2. \qquad (12{,}23)$$

Для ионосферного F-слоя ($\nu_{эфф} \sim 10^3$, $\omega_H \sim 10^7$) это значит, что $\frac{|\omega-\omega_H|}{\omega_H} \gg 10^{-4}$; для короны условие (12,23) принимает вид $\frac{|\omega-\omega_H|}{\omega_H} \gg 10^{-6}$ уже при $\nu_{эфф} \sim 10$ и $\omega_H \sim 10^7$. Таким образом, даже в земной ионосфере влияние теплового движения на ход $n_1^2(\omega)$ может быть сильнее влияния соударений *).

В той же области (12,22а) для показателя затухания $\gamma_1 = \operatorname{Im}\omega'$ имеем [143]:

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\beta_T n_1}\frac{(\omega_H-\omega)^2}{\omega}\exp\left\{-\frac{(\omega-\omega_H)^2}{2\beta_T^2 n_1^2\omega^2}\right\}. \qquad (12{,}24)$$

---

*) Во избежание недоразумений необходимо указать, что в F-слое с распространением волн с частотой $\omega \approx \omega_H$ практически почти не приходится иметь дело (в нижних же ионосферных слоях $\nu \sim 10^5 \div 10^6$ и условие (12,23) дает $\frac{|\omega-\omega_H|}{\omega_H} \gg 10^{-1} \div 10^{-2}$); кроме того, даже в F-слое при $\omega \approx \omega_H$ тепловое движение существенно лишь в относительно весьма узкой полосе частот $|\omega - \omega_H| \sim 10^{-2}\,\omega_H \sim 10^5$.

Сравним затухание γ_1, связанное в данном случае с магнитотормозным излучением на частоте $\omega_H + kv_z$, с затуханием из-за соударений $\gamma_{\text{соуд}}$. Для этого напомним формулу (11,8) для $(n-i\varkappa)_1^2$:

$$(n-i\varkappa)_1^2 = \frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega-\omega_H-i\nu_{\text{эфф}})}, \tag{12,25}$$

и заметим, что она пригодна и при вещественном k, но комплексном $\omega' = \omega + i\gamma$ (см. § 7). Тогда при условии (12,23) и $\gamma \ll \omega$ получаем $\left(\text{учтено, что в этом приближении } \frac{c^2k^2}{\omega^2} = n_1^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega-\omega_H)}\right)$:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{1,\text{соуд}} &= \frac{\omega_0^2\omega\nu_{\text{эфф}}}{2\omega(\omega-\omega_H)^2+\omega_0^2\omega_H} = \frac{\omega\varkappa_1}{c}v_{\text{гр}},\\
\varkappa_1 &= \frac{\omega_0^2\nu_{\text{эфф}}}{2\omega(\omega-\omega_H)^2 n_1},\\
v_{\text{гр}} &= \frac{c}{\frac{d(n_1\omega)}{d\omega}} = \frac{2c\omega(\omega-\omega_H)^2 n_1}{2\omega(\omega-\omega_H)^2+\omega_0^2\omega_H}.
\end{aligned}\right\} \tag{12,26}$$

Отметим, что связь

$$\mu = \frac{2\omega\varkappa}{c} = \frac{2\gamma}{v_{\text{гр}}\cos\theta} = \frac{2\gamma}{c}\cdot\frac{d(\omega n_{1,2})}{d\omega} \tag{12,27}$$

является, независимо от природы затухания, общей для всех волн и с учетом анизотропии (в силу анизотропии вектор групповой скорости $\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ в общем случае направлен иначе, чем волновой вектор $\boldsymbol{k}$). К выражению (12,27) приходим так же, как к (7,23), поскольку учет анизотропии на этом выводе не сказывается $\Big($анизотропия приводит к тому, что n и $\varkappa$ зависят помимо ω также от $\frac{\boldsymbol{k}}{k}\Big)$; кроме того, в (12,27) учтено, что $\frac{c}{\frac{d(n_{1,2}\omega)}{d\omega}} = v_{\text{гр}}\cos\theta$, где $v_{\text{гр}} = \left|\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}\right|$ и θ — угол между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ (см. § 24). Связь (12,27) ясна также непосредственно, поскольку пакет волн, затухающих во времени по закону $e^{-\gamma t}$, будет двигаться в пространстве в направлении z' вдоль $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$, затухая по закону $e^{-\frac{\gamma}{v_{\text{гр}}}z'}$ (рис. 12,5); в направлении z вдоль $\boldsymbol{k}$ это отвечает затуханию вида $e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa z} = e^{-\frac{\gamma z}{v_{\text{гр}}\cos\theta}}$, так как $z = z' \cos\theta$. При $\alpha = 0$, разумеется, $\cos\theta = 1$, и из (12,27) получаем связь $\gamma = \frac{\omega\varkappa}{c} v_{\text{гр}}$ (см. (12,26))*). Из (12,26) при

$$(\omega - \omega_H)^2 \ll \omega_0^2 \text{ и } \omega_0^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$$

получаем:

$$\gamma_{1,\,\text{соуд}} \approx \nu_{\text{эфф}}. \qquad (12,28)$$

В то же время магнитотормозное затухание γ_1 при

$$\frac{|\omega - \omega_H|}{\omega_H} \sim \beta_T n_1 \ll 1,$$

когда формулой (12,24) можно еще пользоваться для грубой ориентировки, составляет:

$$\gamma_1 \sim \beta_T n_1 \omega_H \sim \left(\frac{\omega_0}{\omega_H}\beta_T\right)^{2/3}\omega_H, \quad n_1 \sim \left(\frac{\omega_0}{\omega_H}\right)^{2/3}\beta_T^{-1/3}.$$

В солнечной короне, полагая $\omega_0 \sim \omega_H \sim 10^5 \div 10^7$ и $\beta_T \sim 10^{-2}$, имеем: $\gamma_1 \sim 5\cdot10^{-2}\,\omega_H \gg \gamma_{1,\,\text{соуд}} \sim 10$. При $\frac{|\omega-\omega_H|}{\omega_H} = \frac{1}{10}$, $\beta_T = 10^{-2}$ и $\omega_H^2 = \omega_0^2$ в области $\omega < \omega_H$ получаем $n_1^2 = 10$ и $\gamma_1 = 3\cdot10^{-3}\,\omega_H$; для $\frac{|\omega-\omega_H|}{\omega_H} = 0{,}2$ в тех же условиях уже $n_1^2 \approx 5$ и $\gamma_1 \sim 10^{-17}\,\omega_H \ll \gamma_{1,\,\text{соуд}}$. Таким образом, в рассматриваемом примере при $\frac{|\omega-\omega_H|}{\omega_H} > 0{,}15$ нужно учитывать только поглощение, связанное с соударениями, а в области $\frac{|\omega-\omega_H|}{\omega_H} < 0{,}15$ — только магнитотормозное поглощение, которое при дальнейшем приближении к ω_H становится очень большим.

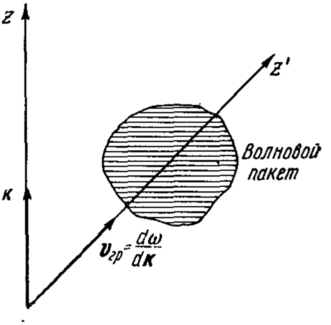


Рис. 12,5. Движение волнового пакета.

Для того чтобы картина распространения волн при $\alpha = 0$, $\omega \approx \omega_H$ стала более ясной, остановимся на зависимости $n_1(\omega)$ и $\varkappa_1(\omega)$ от частоты в широкой области частот. Для этой цели напомним раньше всего, что при пренебрежении соударениями и тепловым движением для рассматриваемой необыкновенной волны $\tilde{n}_1^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega-\omega_H)}$ и, следовательно, $\tilde{n}_1^2 = n_1^2 \geqslant 0$ при $\omega < \omega_H$ и при $\omega \geqslant \omega_{10} = \frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\frac{\omega_H^2}{4} + \omega_0^2}$. В интервале $\omega_H < \omega < \omega_{10}$, напротив, $\tilde{n}_1^2 = -\varkappa^2 < 0$ (см. также рис. 11,5, *а* или 12,6, *а*). Область, где $\tilde{n}_1^2 < 0$, обычно не представляет интереса с точки зрения учета влияния теплового движения, ибо в этой области затухание волны имеет место уже и без такого учета. Далее, при $\omega \geqslant \omega_{10} = \frac{\omega_H}{2} + \sqrt{\frac{\omega_H^2}{4} + \omega_0^2}$ показатель $n_1 \leqslant 1$ (в этом легко убедиться из выражения для n_1^2; см. также рис. 11,5, *а* и 12,6, *а*). Естественно, что в таких условиях бесстолкновительное поглощение весьма мало, что и подтверждается расчетом [70]. Таким образом, учет теплового движения важен в основном только при $\omega < \omega_H$.

---

*) Для применимости выражения (12,27) нужно, чтобы имело смысл понятие групповой скорости и соблюдались неравенства $\gamma \ll \omega$ и $q \equiv \frac{\omega\varkappa}{c} = \frac{\mu}{2} \ll k$. Конкретно в случае магнитоактивной плазмы формула (12,27) непригодна в области резонансов ($\omega \approx \omega_H$, $\omega \approx 2\omega_H$), когда нарушается условие $\frac{\gamma}{\omega} \ll \beta_T n \cos\alpha = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\frac{k}{\omega}\cos\alpha$ (см. [144]).

В этой области $\omega < \omega_H$, пока поглощение мало ($\gamma_1 \ll \omega \approx \omega_H$) и в то же время $n_1^2 \gg 1$, справедлива формула (12,24) для γ_1. Воспользовавшись соотношением $\frac{\omega}{c}\varkappa = \frac{\gamma}{v_{\text{гр}}}$ и выражением (12,26) для $v_{\text{гр}}$, из (12,24) получаем:

$$\varkappa_1 = \frac{c}{2\omega}\mu_1 \approx \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_0^2}{\beta_T \omega^2 n_1^2}\, e^{-\frac{(\omega-\omega_H)^2}{2\beta_T^2 n_1^2 \omega^2}}, \tag{12,24а}$$

где уже учтено, что $(\omega-\omega_H)^2 \ll \omega_0^2$ в силу условия $n_1^2 \approx \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega_H-\omega)} \gg 1$; формула (12,24а) совпадает с выражением, приведенным для этого же случая в [70]. Применяя формулу (12,24а) для оценок при $|\omega-\omega_H| \sim \beta_T n_1 \omega_H$, получаем $\varkappa_1 \sim \frac{\omega_0^2}{\beta_T \omega_H^2 n_1^2} \sim \frac{\omega_0^2 \beta_T}{(\omega_H-\omega)^2}$.

Более общий анализ формул для n_1 и $\varkappa_1$ в области резонанса может быть произведен на основе численного решения дисперсионного уравнения (12,21). Соответствующие графики функций n_1 и $\varkappa_1$, любезно предоставленные нам А. А. Андроновым и В. Ю. Трахтенгерцем, приведены на рис. 12,6. В первом случае (рис. 12,6, *а*) решение имеет две ветви, причем для одной из них $n_1^{(2)} = 0$, $\varkappa_1^{(2)} \neq 0$ и для другой ветви $n_1^{(1)} \neq 0$, $\varkappa_1^{(1)} \neq 0$. Во втором случае (рис. 12,6, *б*), когда плотность плазмы мала, характер функций $n_1(\omega)$ и $\varkappa_1(\omega)$ типичен для области вблизи резонанса (области линий поглощения) в газообразной среде при учете доплеровского уширения линии. При учете и доплеровского уширения и уширения из-за соударений (или из-за естественного затухания) в центре линии основную роль играет доплеровское уширение,

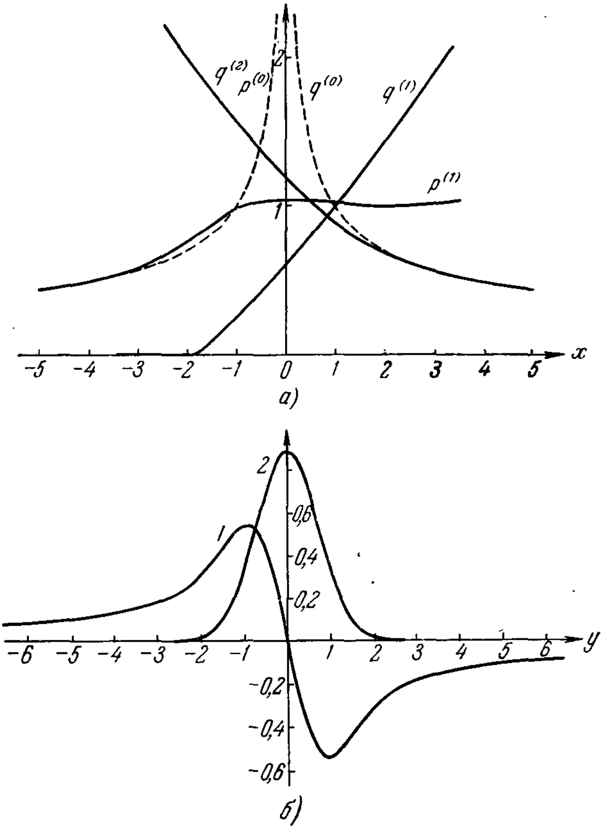


Рис. 12,6. Распространение необыкновенной волны вдоль магнитного поля ($\alpha = 0$) в области резонанса $\left(u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \sim 1\right)$ при отсутствии столкновений $\left(s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} = 0\right)$. Характер решения определяется значением параметра

$$B = \frac{A}{\sqrt{2}\,\beta_T} = \left(\frac{v}{\sqrt{2}\,u\,\beta_T}\right)^{1/3}, \quad A^3 = \frac{8\pi N\varkappa T}{[H^{(0)}]^2}, \quad \beta_T^2 = \frac{\varkappa T}{mc^2}.$$

а) Случай $B \gg 1$ (плотная плазма). По оси абсцисс отложена величина $x = \frac{1-\sqrt{u}}{A}$. На оси ординат указаны значения $p = \frac{n_1}{B}$ и $q = \frac{\varkappa_1}{B}$ (здесь $\tilde{n}_1 = n_1 - i\varkappa_1$, причем индекс 1 отвечает необыкновенной волне). Пунктир отвечает плазме без учета теплового движения (соответствующие значения обозначены через $p^{(0)}$ и $q^{(0)}$). При $T \neq 0$ имеются две ветви: ветвь $p^{(1)}$, $q^{(1)}$ и ветвь $p^{(2)} = 0$, $q^{(2)}$.

б) Случай $B \ll 1$ (разреженная плазма). На оси абсцисс отложено значение $y = \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{2}\,\beta_T}$. На оси ординат приведены: кривая 1 — функция $\frac{1}{2B^3}(n_1 - 1) = \frac{1}{2B^3}\mathrm{Re}\,(\tilde{n}_1 - 1)$; кривая 2 — функция $\frac{1}{2B^3}\varkappa_1 = -\frac{1}{2B^3}\mathrm{Im}\,\tilde{n}_1$.

экспоненциально спадающее на «крыльях» линии. Уширение из-за соударений спадает с удалением от центра линии значительно медленнее (по степенному закону) и поэтому играет основную роль в «крыльях» линии — в области частот, достаточно далеких от резонансной.

Если магнитоактивная плазма является плотной, особенно при $\omega_0^2 \gg \omega_H^2\beta_T$ (см. рис. 12,6, *а*), зависимость n_1 и $\varkappa_1$ от частоты ω отличается от типичного «газового» поведения (рис. 12,6, *б*). Объясняется это сильным ростом n_1 и $\varkappa_1$, в то время как в разреженных газах $n_1 \sim 1$. Иными словами, достаточно плотная плазма не является «газом» в том смысле, который обычно имеется в виду в оптике, где влияние газа на распространение света часто является сравнительно небольшим.

Резонансное поглощение при произвольном угле α. Вблизи первого резонанса $\omega = \omega_H$, но при любом угле α имеем [138, 143]:

$$\gamma_{1,2} = \frac{A + BC}{D}, \tag{12,29}$$

где

$$A = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{2}\left[2(v-1)n_{1,2}^4 + 2(v^2 - 4v + 2)n_{1,2}^2 - 3v^2 + 6v - 2\right],$$

$$B = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega(1-\sqrt{u})^2}{\beta_T n_{1,2}\cos\alpha}\exp\left[-\frac{(1-\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2 n_{1,2}^2\cos^2\alpha}\right],$$

$$C = (v\cos 2\alpha - 1)n_{1,2}^4 + \left(2 - 2v\cos^2\alpha - v^2\sin^2\alpha - \frac{v^2}{4}\operatorname{tg}^2\alpha\right)n_{1,2}^2 + \\ + (v-1)\left(1 - \frac{v^2}{4}\right) + \frac{v^2}{4}(2-v)\operatorname{tg}^2\alpha,$$

$$D = \{(v-1)n_{1,2}^4 + [2(1-v)^2 + v(\cos^2\alpha - 3)]n_{1,2}^2 + \\ + (v-2)^2 v + (1-v)(2v-1)\};$$

здесь $v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$ и для волн 1 и 2 нужно взять соответствующие значения n_1 и n_2. Для волны 3 вблизи первого резонанса при больших значениях n_3, как показано ниже (см. (12,56)), $\tilde{n}_3^2 < 0$. Разумеется, при $\tilde{n}^2 < 0$ учитывать затухание γ бессмысленно.

Вблизи второго резонанса $\omega = 2\omega_H$ получаем:

$$\gamma = 4\omega\beta_T n\frac{\sin^2\alpha}{|\cos\alpha|}B\left(u = \frac{1}{4}\right)\exp\left\{-\frac{(1-2\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2 n^2\cos^2\alpha}\right\} \tag{12,30}$$

и вблизи третьего резонанса $\omega = 3\omega_H$

$$\gamma = \frac{243}{8}\omega\beta_T^3 n^3\frac{\sin^4\alpha}{|\cos\alpha|}B\left(u = \frac{1}{9}\right)\exp\left\{-\frac{(1-3\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2 n^2\cos^2\alpha}\right\}, \tag{12,31}$$

где

$$B(u)=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,v(u-1)}{\{\ \ \}}\left\{\frac{n^4\sin^2\alpha}{2}+\left[v\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{1+\sqrt{u}}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{\sin^2\alpha}{2}+1\right)\right]n^2+(v-1)\left(\frac{v}{1+\sqrt{u}}-1\right)\right\}, \qquad (12{,}32)$$

причем

$$\{\ \ \}=\{(v+u-2)\,n^4+[2\,(1-v)^2+$$
$$+uv\,(1+\cos^2\alpha)-4u+4\,(1-v)]\,n^2+$$
$$+(v-2)\,[(1-v)^2-u]+(1-v)\,(u+2v-2)\}.$$

В (12,30) — (12,32) соударения не учтены и в зависимости от типа волны нужно подставить значение n_1 или n_2. При $\alpha\to 0$ формула (12,29) переходит в сумму выражений (12,24) и (12,28), как это и должно быть (см. также ниже условие (12,34) при $s=1$).

Из (12,29) — (12,31) можно видеть, что при $\nu_{эфф}=0$

$$\gamma(s)\sim\frac{(\beta_T n)^{2s-3}\sin^{2s-2}\alpha}{u^{s-1}}\exp\left\{-\frac{(1-s\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2 n^2\cos^2\alpha}\right\},\quad \omega\approx s\omega_H. \qquad (12{,}33)$$

Эта оценка, если не говорить о численном множителе, справедлива и при $s>3$; при $s=1$ нужно также иметь в виду, что появляется также малый множитель $(1-\sqrt{u})^2$ (см. (12,29)).

Формула (12,31) пригодна и вблизи резонанса (в «крыльях» линии) и в области самого резонанса. Формулы же (12,29) и (12,30) пригодны лишь вблизи резонансов, но не в самом резонансе. Точнее, предполагаются выполненными неравенства ($s=1,\ 2$)

$$\frac{|\omega-s\omega_H|}{k}\gg\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\cos\alpha\quad\text{или}\quad\frac{(1-s\sqrt{u})^2}{\beta_T^2 n^2\cos^2\alpha}\gg 1, \qquad (12{,}34)$$

а также условия

$$\left.\begin{array}{c}\delta=\dfrac{\varkappa T}{m}\dfrac{k^2}{\omega_H^2}\sin^2\alpha=\dfrac{\beta_T^2 n^2\sin^2\alpha}{u}\ll 1,\\ \dfrac{\varkappa T}{m}k^2\cos^2\alpha\gg\nu_{эфф}^2,\quad \omega^2\gg\dfrac{\varkappa T}{m}k^2\cos^2\alpha,\quad \omega_0^2\gg\nu_{эфф}^2.\end{array}\right\} \qquad (12{,}35)$$

Первые два условия (12,35) нужны и для применимости формулы (12,31); формулы (12,29) — (12,31) непригодны также при $\alpha\to\pi/2$.

При распространении волн в плазме обычно нужно знать не γ, а $\mu=\frac{2\omega}{c}\varkappa$ при вещественной частоте ω (при этом поле волны изменяется по закону $e^{-\frac{\mu}{2}z}\,e^{i(\omega t-k_0 z)}$). В случае слабого поглощения γ и μ связаны соотношением (12,27), но при сильном поглощении и, одновременно, заметной дисперсии неприменимо понятие о групповой скорости, а следовательно, и соотношение (12,27). Поэтому при сильном поглощении нужно решать задачу непосредственно с граничным условием (см. § 8); при слабом затухании это хотя и не обязательно, но также бывает более целесообразным, чем вычислять сначала γ и затем переходить к μ.

В «крыльях» линии поглощения $\omega \approx \omega_H$, при условиях (12,34)—(12,35), имеем (здесь $k \equiv k_0$):

$$\frac{\mu}{2k}=\frac{\varkappa}{n}=\frac{\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\{2(v-1)n^4+2(v^2-4v+2)n^2-3v^2+6v-2\}}{2vn^2\left[2+\sin^2\alpha-2v-2n^2\sin^2\alpha+\frac{4(1-\sqrt{n})}{v}(1-v)n^2\right]}+$$

$$+\frac{(1-\sqrt{u})^2}{vn^2}\frac{W}{\left[2+\sin^2\alpha-2v-2n^2\sin^2\alpha+\frac{4(1-\sqrt{u})}{v}(1-v)n^2\right]}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\beta_T\,n\cos\alpha}\exp\left\{-\frac{(1-\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2 n^2\cos^2\alpha}\right\}, \quad (12,36)$$

где

$$W=\left\{(v\cos 2\alpha-1)n^4+\left(2-2v\cos^2\alpha-v^2\sin^2\alpha-\frac{v^2}{4}\operatorname{tg}^2\alpha\right)n^2+\right.$$

$$\left.+(v-1)\left(1-\frac{v^2}{4}\right)+\frac{v^2}{4}(2-v)\operatorname{tg}^2\alpha\right)\right\}.$$

Затухание при этом считается слабым, т. е. $\frac{\mu}{k} \ll 1$.

При $\alpha=0$ из (12,36) получаем:

$$\frac{\mu}{2k}=\frac{\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}}{2(\sqrt{u}-1)}+\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\sqrt{u}-1}{\beta_T n_1}\exp\left[-\frac{(1-\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2 n_1^2}\right], \quad (12,37)$$

причем предполагается выполненным неравенство

$$n_1^2=1-\frac{v}{1-\sqrt{u}}\approx\frac{v}{\sqrt{u}-1}\gg 1.$$

Волна 2 при $\alpha=0$ затухает только в силу соударений.

Как мы видели в § 11 (см. рис. 11,2, *б* и 11,10 *б*), при $u>1$, малых углах $\alpha \neq 0$ и $n^2 \gg 1$ место необыкновенной волны (при $\alpha=0$) занимает обыкновенная волна. В соответствии с этим при

$|1-v| \gg \frac{v}{|1-\sqrt{u}|}\sin^2\alpha$, $\frac{v}{\sqrt{u}-1} \gg 1$ формула (12,37) при достаточно малых углах $\alpha \neq 0$ относится уже к обыкновенной волне в области $n_2^2 \gg 1$.

Для оценок формулы (12,36) и (12,37) годятся и при

$$\frac{|1-\sqrt{u}|}{\beta n\cos\alpha} = \frac{|\omega-\omega_H|}{\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\,k\cos\alpha} \sim 1;$$

при $\alpha=0$ в этой области $n_1^2 \gg 1$ и $\frac{\mu_1}{k} \sim 1$, но при $\alpha \gg |\sqrt{u}-1|$ и $n_{1,2}^2 \sim 1$ уже, грубо говоря, $\frac{\mu_{1,2}}{k} \sim \beta_T \ll 1$. Для рассматриваемого первого резонанса $\omega=\omega_H$ углы $\alpha \to 0$ выделены в том отношении, что здесь имеется резонанс уже при отсутствии теплового движения — при $\beta_T=0$ (см. [111] и конец § 11).

Если

$$\frac{|\omega-\omega_H|}{k} \ll \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\cos\alpha,\quad \omega \gg \nu_{\text{эфф}},\quad \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\,k\cos\alpha \gg \nu_{\text{эфф}},\quad \mu \ll k, \tag{12,38}$$

то в центральной части линии $\omega \approx \omega_H$ получаем:

$$\frac{\mu}{2k} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\beta_T\cos\alpha}{nv}\left\{\left[1-\left(1-\frac{7}{4}\sin^2\alpha\right)v\right]n^4-\left[2+v\left(-\frac{5}{2}+\frac{7}{4}\sin^2\alpha\right)+\right.\right.}{(2v-2-\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha\, n^2)} \to$$

$$\to \frac{\left.\left.+\frac{v^2}{4}\left(2\cos 2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha\right)\right]n^2+\left[1-\frac{3}{2}v+\frac{v^2}{2}(1-\operatorname{tg}^2\alpha)+\frac{v^3}{4}\operatorname{tg}^2\alpha\right]\right\}}{(2v-2-\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha n^2)}. \tag{12,39}$$

При $n_{1,2} \sim 1$ отсюда $\frac{\mu}{k} \sim \beta_T$ в согласии со сделанной выше оценкой для области $\frac{|\omega-\omega_H|}{\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\,k\cdot\cos\alpha} \sim 1$. Для угла $\alpha=0$ формула (12,39) непригодна, так как здесь $\mu \sim k$ и одно из условий (12,38) не выполнено. Случай $\alpha=0$ для центра линии рассмотрен в [70] (см. также рис. 12,6). Следует указать, что в центре линий $\omega \approx s\omega_H$ $(s=1, 2, 3, \ldots)$, не говоря уже об их «крыльях», при условии $\nu_{\text{эфф}} \gg \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\,k\cos\alpha$ поглощение определяется соударениями и можно пользоваться формулами, приведенными в § 11.

Для второго и третьего резонансов (линий поглощения) для волн 1 и 2 имеем:

$$\frac{\mu}{2k}=\frac{\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\{(u-3+2v)\,n^4+(2v^2-8v-2u+6)\,n^2+(-3v^2+6v+u-3)\}}{2n^2\,\{2\,(1-u-v+uv\cos^2\alpha)\,n^2-[2\,(1-v)^2+(1+\cos^2\alpha)\,uv-2u]\}}+$$

$$+\frac{\frac{(u-1)}{n^2}\,v\,\frac{\beta_T n\sin^2\alpha}{u}}{2\cos\alpha\,\{2\,(1-u-v+uv\cos^2\alpha)\,n^2-[2\,(1-v)^2+(1+\cos^2\alpha)\,uv-2u]\}}\times$$

$$\times\left\{\frac{\sin^2\alpha}{2}n^4+\left[v\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{1+\sqrt{u}}\right)-\frac{\sin^2\alpha}{2}-1\right]n^2+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{v^2}{1+\sqrt{u}}-v\left(\frac{1}{1+\sqrt{u}}+1\right)+1\right]\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\exp\left\{-\frac{(1-2\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2n^2\cos^2\alpha}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{3\beta_T^2n^2}{8u}\sin^2\alpha\exp\left\{-\frac{(1-3\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2n^2\cos^2\alpha}\right\}\right];\qquad(12{,}40)$$

здесь при $\omega\approx 2\omega_H$ нужно подставить значение $u=\frac{1}{4}$ и можно отбросить член с $\exp\left\{-\frac{(1-3\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2n^2\cos^2\alpha}\right\}$, а при $\omega\approx 3\omega_H$ нужно подставить $u=\frac{1}{9}$ и можно отбросить первый экспоненциальный член $\Big($в экспонентах, разумеется, величина $1-s\sqrt{u}$ сохраняется без замены на $u=\frac{1}{4}$ или $u=\frac{1}{9}\Big)$. Формула (12,40) пригодна для обеих волн и на краях и в центре линии $\Big($условия $\delta\ll 1$, $\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\,k\cos\alpha\gg\nu_{\text{эфф}}$ и $\omega\gg\nu_{\text{эфф}}$ предполагаются выполненными; см. (12,35)*)$\Big)$. Кроме того, исключается область углов $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ *).

При $n\sim 1$ в центре линии (при $\nu_{\text{эфф}}=0$)

$$\left(\frac{\mu^{(0)}}{k}\right)_{\omega=\omega_H}\sim v\beta_T,\quad\left(\frac{\mu^{(0)}}{k}\right)_{\omega=2\omega_H}\sim v\beta_T,\quad\left(\frac{\mu^{(0)}}{k}\right)_{\omega=3\omega_H}\sim v\beta_T^3,$$
$$n\sim 1,\quad \alpha\neq 0,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2},\quad k=\frac{\omega}{c}n.\qquad(12{,}41)$$

Область углов $\alpha\to 0$ для первого резонанса $\omega=\omega_H$ здесь исключена по уже указанной причине — в силу появления поглощения и при $\beta_T \to 0$ (см. [111] и конец § 11). Для резонансов $\omega = s\omega_H$ $(s > 1)$ область углов $\alpha \to 0$ исключается, поскольку при $\alpha = 0$ резонансное поглощение имеется только для первого резонанса $\omega = \omega_H$. Наконец, для угла $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{и углов } \alpha, \text{ очень близких к } \frac{\pi}{2}\right)$*) в резонансе нельзя считать, что $n \sim 1$. Дело в том, что при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ доплеровское уширение резонансных линий и черенковское поглощение отсутствуют $\left(\text{см., например, выражение (12,10), которое при } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ имеет вид } \omega = s\omega_H\right)$ **). Поэтому эти линии поглощения уширены только за счет соударений и при отсутствии или достаточной малости последних являются весьма резкими. В подобных условиях резко изменяется и показатель преломления n аналогично тому, как это имеет место (и хорошо известно) в области аномальной дисперсии в оптике. В частности, вблизи резонансов $\omega = s\omega_H$ появляются «щели»— области с $\tilde{n}^2 < 0$, где волны затухают (подробнее см. [68, 93, 119, 143]).

---

*) Нужно иметь в виду, что для волны, распространяющейся под углом $\pi-\alpha$ к полю, значения n и γ (или μ) такие же, как для волн с углом $\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Поэтому, например, в (12,40) под $\cos\alpha$ следует подразумевать $|\cos\alpha|$.

Если же угол α не слишком близок к $\frac{\pi}{2}$, доплеровское уширение линий их сильно размывает, так что $n \sim 1$. Точнее, при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ и в области резонанса (но при $s\omega_H \neq \omega_\infty$) можно с точностью до членов порядка β_T^2 пользоваться обычными формулами (11,6) для $\tilde{n}_{1,2}^2$. Поглощение при этом нужно вычислять по формулам (12,36) — (12,40). Эти формулы и приводят к оценке

---

*) Формула (12,40) при $\omega \approx 2\omega_H$ непригодна, грубо говоря, при условии $\cos\alpha \lesssim \beta$, а при $\omega \approx 3\omega_H$ она непригодна, если $\cos\alpha \lesssim \beta^3$.

**) Под доплеровским уширением здесь понимается уширение из-за эффекта Доплера первого порядка. При учете членов порядка β^2 уширение будет иметь, конечно, место и при $\alpha = \pi/2$ за счет эффекта Доплера второго порядка. Последний автоматически учитывается при использовании релятивистского выражения для частоты $\omega_H^* = \frac{|e|H}{mc}\frac{mc^2}{E} \equiv \omega_H \frac{mc^2}{E} = \omega_H\sqrt{1-\beta^2}$. Очевидно, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta^2 \ll 1$ излучаются частоты $s\omega_H^* = s\omega_H - \frac{s\beta^2}{2}\omega_H$ и ширина линий определяется параметром $s\beta_T^2\omega_H = s\left(\frac{\varkappa T}{mc^2}\right)\omega_H$. В результате для волн 1 и 2 уже при $s = 3$ (но не при $s = 1,2$) область углов $\alpha \to \pi/2$ фактически ничем особенно не выделяется. Для обыкновенной волны существенных особенностей не возникает и при $\omega = 2\omega_H$ (для $\omega = \omega_H$ особенность при $\alpha \to \pi/2$ имеется); для необыкновенной волны и $\alpha \to \pi/2$ имеется особенность при $\omega = 2\omega_H$, но ее нет при $\omega = \omega_H$. В случае плазменной волны 3 специфических особенностей не возникает и при $\alpha \to \pi/2$, если $s \gg 4$ (см. [113, 145]).

(12,41), где множитель v оставлен потому, что при $v \to 0$ поглощение должно исчезать.

Поскольку $k \equiv k_0 = \frac{\omega}{c} n$, $\mu = \frac{2\omega}{c} \varkappa$, согласно (12,41) получим:

$$\mu^{(0)}_{\omega=\omega_H} \sim \mu^{(0)}_{\omega=2\omega_H} \sim \frac{\omega}{c} v\beta_T, \quad \mu^{(0)}_{\omega=3\omega_H} \sim \frac{\omega}{c} v\beta_T^3, \; n \sim 1, \; \alpha \neq 0, \; \alpha \neq \frac{\pi}{2}. \tag{12,42}$$

Вообще же [134]

$$\mu^{(0)}_{\omega=s\omega_H} \sim \frac{s^{2s}}{2^s \cdot s!} \frac{\omega}{c} v\beta_T^{2s-3}, \quad s \geqslant 2, \quad \alpha \sim 1, \quad n \sim 1. \tag{12,43}$$

Эти формулы, дающие лишь порядок величины, формально говоря, относятся и к волне 1 и к волне 2. Фактически, однако, при учете численных множителей оказывается, что формулы (12,41) —(12,43) справедливы для необыкновенной волны, а для обыкновенной волны дают значения, завышенные на один-два порядка (см. ниже).

При учете одних лишь соударений (т. е. при $\beta_T \to 0$)

$$\mu_{\text{соуд}} = \frac{2\omega}{c} \varkappa \sim v \frac{\nu_{\text{эфф}}}{c}, \quad n \sim 1, \quad \alpha \sim 1 \tag{12,44}$$

(см. (11,5) при условии $\omega^2 \gg \nu_{\text{эфф}}$). Сравнивая (12,42) и (12,44), видим, что для центра линий

$$\frac{\mu_{\text{соуд}}}{\mu^{(0)}_{\omega=\omega_H,\, \omega=2\omega_H}} \sim \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega\beta_T}, \quad \frac{\mu_{\text{соуд}}}{\mu^{(0)}_{\omega=3\omega_H}} \sim \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega\beta_T^3}. \tag{12,45}$$

Для ионосферного F-слоя (при $\beta_T \sim 3 \cdot 10^{-4}$, $\nu_{\text{эфф}} \sim 10^3$, $\omega_H \sim 8 \cdot 10^6$)

$$\frac{\mu_{\text{соуд}}}{\mu^{(0)}_{\omega=\omega_H,\, \omega=2\omega_H}} \sim 0{,}3; \quad \frac{\mu_{\text{соуд}}}{\mu^{(0)}_{\omega=3\omega_H}} \sim 10^6, \tag{12,46}$$

т. е. резонансное поглощение на частотах ω_H и $2\omega_H$ больше поглощения из-за соударений, но при $\omega = 3\omega_H$ резонансное поглощение ничтожно. По ряду причин, однако, ионосферное поглощение в F-слое при $\omega = \omega_H$ и $\omega = 2\omega_H$ трудно наблюдать (с распространением таких волн в F-слое при радиосвязи иметь дело вообще не приходится). В солнечной короне (при $\nu_{\text{эфф}} \sim 10$, $\beta_T \sim 10^{-2}$, $\omega \sim 6 \cdot 10^8$) уже

$$\frac{\mu_{\text{соуд}}}{\mu^{(0)}_{\omega=\omega_H,\, \omega=2\omega_H}} \sim 10^{-6}; \quad \frac{\mu_{\text{соуд}}}{\mu^{(0)}_{\omega=3\omega_H}} \sim 10^{-2} \quad \text{и} \quad \frac{\mu_{\text{соуд}}}{\mu^{(0)}_{\omega=4\omega_H}} \sim 10^2.$$

Таким образом, в короне при $\omega = s\omega_H$ ($s = 1, 2, 3$) резонансное поглощение, вообще говоря, должно учитываться (см. § 36). Приведенные формулы (12,41) — (12,46) позволяют, конечно, только выяснить, является ли более точное вычисление не связанного с соударениями поглощения необходимым или же этим поглощением заведомо можно пренебречь. Для самого же определения величины μ_1, а тем более величины μ_2 формулы (12,41) —

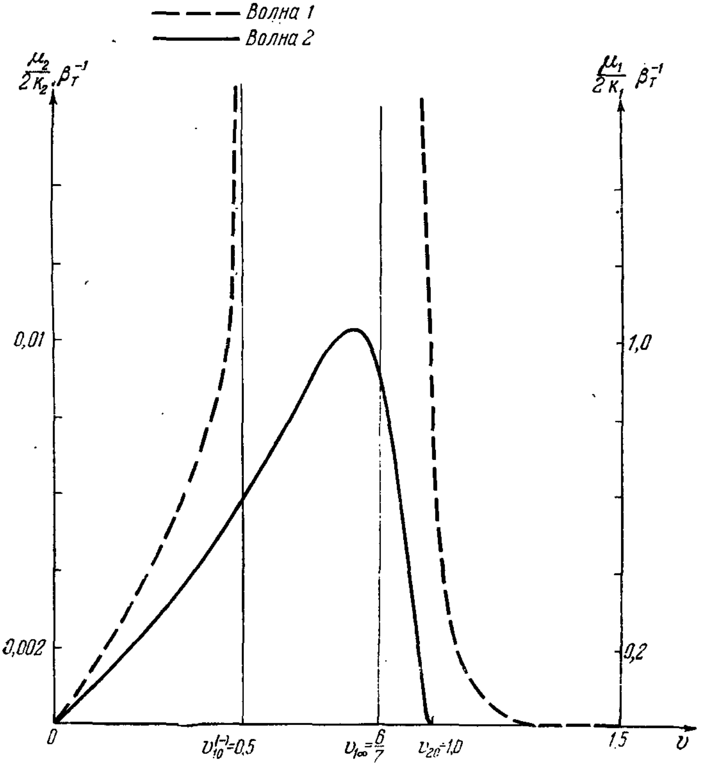


Рис. 12,7. Величины $\frac{\mu_{1,2}}{2k_{1,2}}\beta_T^{-1}$ в зависимости от $v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ при $u=\frac{\omega_H^2}{\omega^2}=\frac{1}{4}$ (т. е. $\omega=2\omega_H$), $\alpha=45°$ и $\nu_{эфф}=0$

(12,46) непригодны, и, например, при $\omega \approx 2\omega_H$ и $\omega \approx 3\omega_H$ нужно пользоваться громоздким выражением (12,40). Значения

$$\frac{\mu_{1,2}}{k_{1,2}}\beta_T^{-1}\ (\text{при}\ \omega=2\omega_H)\ \text{и}\ \frac{\mu_{1,2}}{k_{1,2}}\beta_T^{-3}\ (\text{при}\ \omega=3\omega_H),$$

вычисленные [146] по формуле (12,40) для угла $\alpha = 45°$, приведены на рис. 12,7 и 12,8. При этом $\nu_{эфф} = 0$, а отложенный на оси абсцисс параметр $v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ определяет зависимость поглощения только от $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$, поскольку частота ω фиксирована (напомним также, что для волны 1 в области $v_{10}^{(-)} < v < v_{1\infty}$ значение $n_1^2 < 0$ и вычислять здесь поглощение имело бы смысл только в задаче с граничными условиями). Для нахождения величин

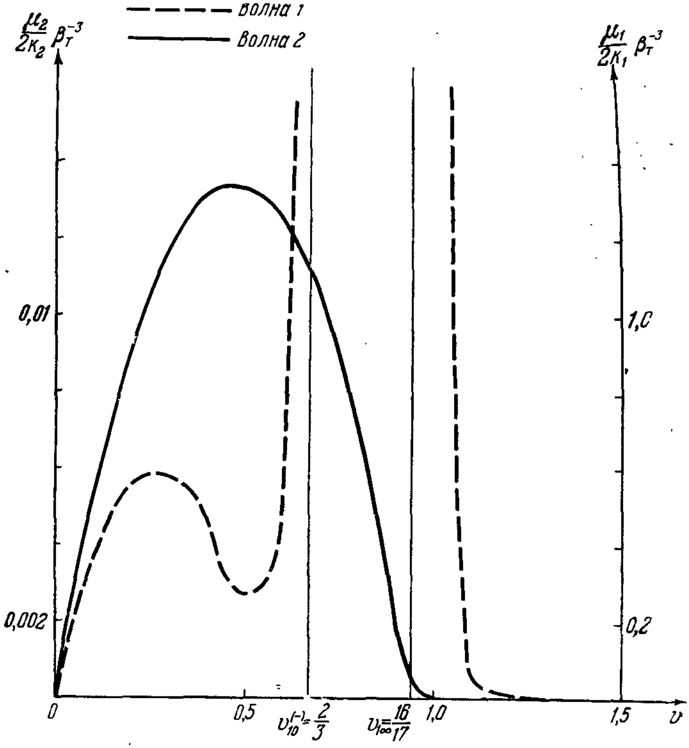


Рис. 12,8. Величины $\frac{\mu_{1,2}}{2k_{1,2}}\beta_T^{-3}$ в зависимости от $v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{1}{9}$ (т. е. $\omega = 3\omega_H$), $\alpha = 45°$ и $\nu_{\text{эфф}} = 0$.

$\mu_{1,\,2} = \frac{2\omega}{c}\, \varkappa_{1,\,2}$ приведенные на рис. 12,7 и 12,8 значения нужно умножить соответственно на $2k_{1,\,2}\beta_T = 2\frac{\omega}{c}\, n_{1,\,2}\beta_T$ и $2k_{1,\,2}\beta_T^3 = 2\frac{\omega}{c}\, n_{1,\,2}\beta_T^3$. Из графиков ясно, что в рассматриваемых условиях, вообще говоря, μ_2 на два порядка меньше μ_1.

Область черенковского поглощения (район резонансной частоты ω_∞). Перейдем к результатам вычислений для области частот, примыкающих к резонансной частоте ω_∞, когда основным (при

$\nu_{\text{эфф}} \to 0$) является черенковское поглощение. Если это поглощение является сильным, его вычисление представляет уже обычно небольшой интерес; практически важно определить поглощение, лишь пока оно невелико, а также оценить значения параметров, при которых поглощение начинает резко возрастать. Имея это в виду, примем условие (12,14а). Физический смысл этого условия уже был, по существу, выяснен раньше: он состоит в том, что черенковское поглощение (и излучение) возможно только для относительно небольшого числа электронов, находящихся в «хвосте» максвелловского распределения по скоростям. Тем не менее, ввиду большой важности этого вопроса поясним здесь условия малости поглощения также на другом языке, с помощью других представлений (см. [147]).

Возникающее в плазме возмущение, отвечающее одной из нормальных волн, затухнет за время $t \leqslant \frac{1}{\omega}$, если при этом электроны плазмы в силу их теплового движения сместятся по нормали к волне (вдоль $\boldsymbol{k}$) на расстояние порядка $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi}$. Действительно, при таком перемещении электроны за период колебаний «переносят» также свою упорядоченную скорость, приобретенную под действием поля волны, в область пространства, где фаза волны отличается на величину $\Delta\varphi \gtrsim 1$ от ее фазы в начальный момент. Ясно, что в таких условиях нельзя уже говорить о существовании слабо затухающего упорядоченного движения в волне. Итак, сильное затухание имеет место, если

$$\frac{v_k}{\omega} \gtrsim \lambda\!\!\!^{-} = \frac{1}{k}, \qquad (12,47)$$

где v_k — средняя скорость, с которой плазменные электроны движутся в направлении $\boldsymbol{k}$. Другими словами, если за время t, меньшее периода колебаний $\frac{1}{\omega}$, электрон в силу своего теплового движения пройдет вдоль $\boldsymbol{k}$ путь порядка или больший $\lambda\!\!\!^{-}$, то он не сможет приобрести заметную упорядоченную скорость (причина состоит в резком ослаблении среднего действующего на электрон поля в связи с усреднением его вдоль траектории). Невозможность создания упорядоченной скорости и означает как раз, что соответствующие волны, в которых эта скорость отлична от нуля, сильно затухают.

В изотропной плазме $v_k \sim v_T \sim \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}$, и условие (12,47) принимает вид (индекс $i = 1,2,3$ указывает на тип волны):

$$\frac{\omega}{k} = v_{\text{ф}} \leqslant v_T, \quad \text{или} \quad \beta_T^2 n_i^2 \gtrsim 1.$$

Если же говорить об условии слабого затухания, то оно таково *):

$$\beta_T^2 n_i^2 \ll 1. \qquad (12{,}48)$$

Это условие в нерелятивистской изотропной плазме может нарушаться только для плазменной волны; критерий (12,48) совпадает при этом с полученным в § 8 условием (8,39) слабого затухания плазменной волны.

В магнитоактивной плазме условие (12,48) также сохраняется, если только магнитное поле не препятствует перемещению электронов на расстояние порядка λ вдоль $\boldsymbol{k}$. Последнее имеет место (поле не препятствует перемещению), если проекция радиуса вращения электрона на $\boldsymbol{k}$ будет $r_H \sin\alpha \approx \frac{v_T \sin\alpha}{\omega_H} \gg \lambda$ (α — угол между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)}$), т. е.

$$\delta = \frac{(\beta_T^2 n_i^2 \sin^2\alpha)}{u} = \left(\frac{v_T k}{\omega_H}\sin\alpha\right)^2 \gg 1. \qquad (12{,}49)$$

В условиях (12,48) и (12,49) поглощение волн в магнитоактивной плазме мало. Напротив, если

$$\delta = \frac{(\beta_T^2 n_i^2 \sin^2\alpha)}{u} = \left(\frac{v_T k}{\omega_H}\sin\alpha\right)^2 \ll 1, \qquad (12{,}50)$$

электрон может сместиться на λ по нормали к волне только за счет движения вдоль поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$, когда $v_k \sim v_T \cos\alpha$. Отсюда следует, что при $\delta \ll 1$ критерий сильного поглощения (12,47) имеет вид:

$$\beta_T^2 n_i^2 \cos^2\alpha \gg 1, \qquad (12{,}51)$$

т. е. в качестве условия слабого поглощения приходим к неравенству (12,14а), которое слабее неравенства (12,48). Таким образом, условие (12,14а) является не только необходимым, но и достаточным условием слабости затухания только в области (12,50). В не слишком слабых магнитных полях условия (12,14а) и (12,50) обычно соблюдаются одновременно. На этом важнейшем случае сейчас и остановимся **).

---

*) Здесь, как и в ряде аналогичных случаев, неравенство типа $x \ll 1$ мы записываем также в виде $x^2 \ll 1$ (в данном случае сделан переход от неравенства $\frac{v_T}{v_ф} = \beta_T n_i \ll 1$ к неравенству $\beta_T^2 n_i^2 \ll 1$). Такая замена связана с тем, что при количественных расчетах оказывается достаточным соблюдение условия $x^2 \ll 1$, которому легче удовлетворить.

**) Если поле $H^{(0)} \to 0$, то распространение волн мало отличается от имеющего место при изотропии. Заметим, что условие (12,50) можно записать также в виде $\frac{r_H^2 \sin^2\alpha}{\lambda^2} \ll 1$, где $r_H \sim \frac{v_T}{\omega_H}$ — радиус кривизны траектории частицы в магнитном поле (точнее, речь идет о проекции этой траектории на плоскость, перпендикулярную к $\boldsymbol{H}^{(0)}$).

При пренебрежении затуханием для $\tilde{n}^2$ имеем уравнение

$$\left.\begin{aligned} &\beta_T^2 vR\tilde{n}^6-[1-u-v+uv\cos^2\alpha]\,\tilde{n}^4+[2(1-v)^2+\\ &\qquad +uv\cos^2\alpha-u(2-v)]\,\tilde{n}^2+(1-v)\,[u-(1-v)^2]=0,\\ &R=\frac{3\sin^4\alpha}{1-4u}+\left(1+\frac{5-u}{(1-u)^2}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha+3(1-u)\cos^4\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (12,52)$$

где в коэффициентах при $\tilde{n}^4$ и $\tilde{n}^2$ опущены выражения $O_1(\beta_T^2)$ и $O_2(\beta_T^2)$, пропорциональные β_T^2 и содержащие члены, в знаменателе которых стоят величины $(1-u)^3$ и $(1-4u)$. Выражения O_1 и O_2 заведомо незначительны, если

$$\left.\begin{aligned} &(1-u)^3=\left(1-\frac{\omega_H^2}{\omega^2}\right)^3 \gg \beta_T^2=\frac{\varkappa T}{mc^2},\\ &(1-4u)=1-\frac{(2\omega_H)^2}{\omega^2} \gg \beta_T^2. \end{aligned}\right\} \quad (12,53)$$

Условия (12,53), которые будут считаться выполненными, означают, что рассматриваются области частот, достаточно удаленные от резонансов $\omega=\omega_H$ и $\omega=2\omega_H$. Более высокие резонансы ($\omega=3\omega_H$ и т. д.) не появляются здесь только потому, что их рассмотрение отвечало бы учету членов порядка β_T^4, β_T^6 и т. д., что в (12,52) не сделано. Разумеется, при достаточно малых значениях β_T^2 это законно.

В области, где $n_{1,2}^2 \sim 1$, поправки к $n_{1,2}^2$ порядка β_T^2 считаются пренебрежимо малыми, поскольку используется нерелятивистская теория. Поэтому тепловые поправки имеют реальное значение только при $\tilde{n}^2 \gg 1$. Ниже об этой области и пойдет речь.

Если не говорить о малых в обсуждаемых условиях членах $O_1(\beta_T^2)$ и $O_2(\beta_T^2)$, то уравнение (12,52) отличается от получающегося в квазигидродинамическом приближении дисперсионного уравнения (12,5) функциональной зависимостью коэффициента при $\tilde{n}^6$ от u, v и α. Например, для уравнения (12,52) этот коэффициент при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ равен $\frac{3\beta_T^2 v}{1-4u}$ и имеет разный знак при $u>\frac{1}{4}$ и $u<\frac{1}{4}$; в то же время в (12,5) упомянутый коэффициент равен $\beta_T^2(1-u\cos^2\alpha)$; при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ он не зависит от u и всегда положителен при $u<1$.

В области, где третий корень уравнения (12,52) велик по сравнению с корнями $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$, значение этого корня $\tilde{n}_3^2$ определяется двумя первыми членами уравнения (12,52) и равно

$$\tilde{n}_3^2 \approx \frac{1-u-v+uv\cos^2\alpha}{\beta_T^2 v\left[\frac{3\sin^4\alpha}{1-4u}+\left(1+\frac{5-u}{(1-u)^2}\right)\cos^2\alpha\sin^2\alpha+3(1-u)\cos^1\alpha\right]}. \quad (12,54)$$

Если не обращать для простоты внимания на множители типа u, v, $\cos^2\alpha$ и т. п., то решение (12,54) справедливо при условии *)

$$1-u-v+uv\cos^2\alpha \gg \beta_T. \tag{12,55}$$

При $\alpha=0$, согласно (12,54), $\tilde{n}_3^2 \approx \frac{1-v}{3\beta_T^2 v}$, т. е. получается выражение (12,1) для плазменной волны в изотропной плазме. Так это и должно быть, поскольку при $\alpha=0$ волны 1 и 2 являются поперечными, а продольная волна не должна отличаться от плазменной волны в изотропной среде.

При $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и приближении к резонансам $u\to 1$ или $u\to\frac{1}{4}$ (насколько это позволяют условия (12,53) и (12,55)) из (12,54) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{n}_3^2(u\to 1) &\approx -\frac{(1-u)^2}{4\beta_T^2\cos^2\alpha}, \\ \tilde{n}_3^2\left(u\to\frac{1}{4}\right) &\approx \frac{[3-v(4-\cos^2\alpha)](1-4u)}{12\beta_T^2 v\sin^4\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{12,56}$$

Отсюда ясно, что в области первого гирорезонанса $u\approx 1$ (т. е. при $\omega=\omega_H$) плазменная волна распространяться не может ($\tilde{n}_3^2<0$).

Для частного случая $\alpha=\pi/2$ дисперсионное уравнение с самого начала расщепляется на два сомножителя. Условие обращения в нуль одного из них определяет $\tilde{n}^2$ для обыкновенной волны. При $\delta=\frac{\beta_T^2 n_2^2}{u}\ll 1$ получаем:

$$\tilde{n}_2^2=\frac{1-v}{1+\frac{\beta_T^2 v}{1-u}}. \tag{12,57}$$

Вдалеке от резонанса $u=1$ тепловые поправки малы и не имеют реального значения, но с приближением к резонансу они представляют интерес.

Дисперсионное уравнение для других волн при $\alpha=\pi/2$ и $\delta\ll 1$ таково:

$$\frac{3\beta_T^2 v}{1-4u}\tilde{n}^4-\left[1-u-v+\frac{4\beta_T^2 v}{(1-4u)}(1+2u-v)\right]\tilde{n}^2+(1-v)^2-u=0. \tag{12,58}$$

---

*) Это условие получается из требования, чтобы при подстановке (12,54) в (12,52) в этом последнем уравнении члены с $\tilde{n}^2$ и $\tilde{n}^0$ были малы по сравнению с членами $\tilde{n}^6$ и $\tilde{n}^4$. Упрощающее предположение, сделанное при выводе, состоит в том, что коэффициенты у $\tilde{n}^2$ и $\tilde{n}^0$ считаются по порядку величины равными единице.

Вдали от резонанса $u = 1/4$ (т. е. резонанса $\omega = 2\omega_H$), и при условии

$$(1-u-v) \gg \beta_T \tag{12,59}$$

корни уравнения (12,58) приближенно равны:

$$\tilde{n}_1^2 \approx 1 - \frac{v(1-v)}{1-u-v}, \quad \tilde{n}_3^2 \approx \frac{(1-u-v)(1-4u)}{3\beta_T^2 v}. \tag{12,60}$$

Этот результат для n_1^2 совпадает с имеющим место при отсутствии поглощения, а для n_3^2 получается также из (12,54) при $\alpha = \pi/2$. Уравнение (12,58) и условие (12,59) также следуют из (12,52) и (12,55) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (при этом в (12,58) сохранен отброшенный в (12,52) член порядка $O(\beta_T^2)$ в коэффициенте при $\tilde{n}^2$). При несоблюдении условия (12,59) для $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_3^2$ получаются более сложные выражения; для примера укажем, что при $1-u-v=0$ (т. е. при $v = v_{1\infty}$ или $\omega = \omega_\infty = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$) корни уравнения (12,58) таковы:

$$\tilde{n}^2 \approx \pm \sqrt{\frac{(1-4u)u}{3\beta^2}} \tag{12,61}$$

(индексы 1 и 3 в данном случае не ставим, поскольку в точке $v_{1\infty}$ деление на волны типов 1 и 3 совсем уже не имеет смысла; см. выше).

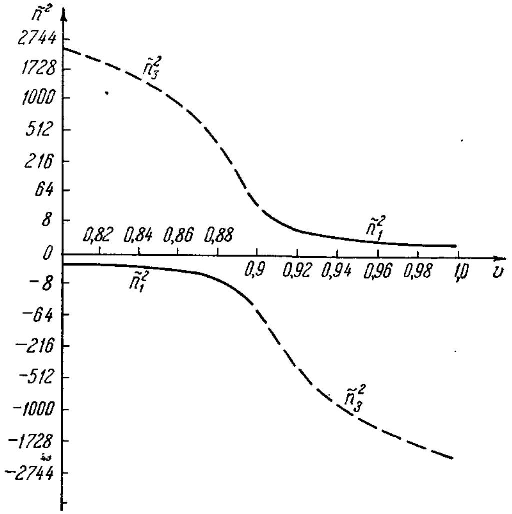


Рис. 12,9. Функции $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_3^2$ при $u=0,1$, $\alpha=90°$ и $\beta_T^2=10^{-5}$. По оси ординат на рис. 12,9—12,13 используется логарифмический масштаб.

Ход кривых $\tilde{n}^2$, согласно формулам (12,58) и (12,52), ясен из рис. 12,9—12,13. На всех этих графиках показана (в логарифмическом масштабе по оси ординат) лишь область вблизи точек $v_{1,2\infty}$. Кривая $\tilde{n}_2^2$ при $u<1$ или $\tilde{n}_1^2$ при $u\cos^2\alpha>1$ на графиках не приведена. Поглощение не учитывается. Из сравнения рис. 12,9 с 12,2, рис. 12,12 с 12,3 и рис. 12,13 с 12,4 можно видеть разницу между результатами квазигидродинамического и кинетического расчетов. Для этих примеров различие носит количественный характер. Но иногда оно является уже качественным. Например, в квазигидродинамическом приближении, как уже отмечалось, кривые всегда имеют вид, изображенный на рис. 12,2 и 12,3. В кинетической же теории в зависимости от значений u и α ход кривых $\tilde{n}_3^2$ может выглядеть или так, как на рис. 12,9, 12,11, *а* и 12,12, или так, как на рис. 12,10 и 12,11, *б*. Оба эти типа кривых отвечают разному знаку знаменателя в формуле (12,54). Для случаев, изображенных на рис. 12,10 и 12,11, *б*, имеется область значений v (т. е. область частот или область концентраций), где нет вещественных значений $\tilde{n}^2$ (эта область на рис. 12,10 заштрихована). В этих областях решения для $\tilde{n}^2$ комплексны, т. е. волны затухают уже при предполагаемом отсутствии поглощения. То же имеет место при вещественных, но отрицательных значениях $\tilde{n}^2$. Разница состоит, однако, в том, что при $\tilde{n}^2 < 0$ волна при углублении в среду затухает монотонно $\left(E \sim e^{-\frac{\omega}{c} \cdot |\tilde{n}| z}\right)$, а при $\tilde{n}^2$ комплексном она затухает, осциллируя. Указанное свойство — появление комплексных $\tilde{n}^2$ даже при отсутствии поглощения — имеет место вблизи резонансов в любой среде при учете пространственной дисперсии и отрицательном знаке коэффициента при старшей степени $\tilde{n}$ в дисперсионном уравнении (см. [10, 13]).

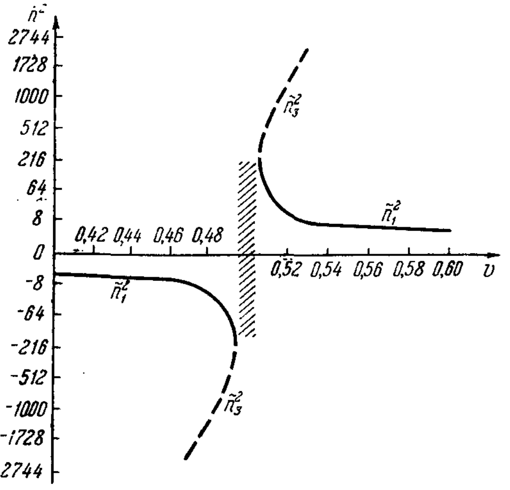


Рис. 12,10. Функции $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_3^2$ при $u = 0{,}5$, $\alpha = 90°$ и $\beta_T^2 = 10^{-5}$.

Необходимо подчеркнуть, что все обсуждаемые графики физически отвечают распространению волн с заданной частотой в среде с переменной концентрацией, находящейся в однородном поле $\left(u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \text{const}, \quad v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \text{ изменяется}\right)$. Возможны, конечно, и другие постановки задачи, когда u и v изменяются при $\omega = \text{const}$ (см. § 36 и [77, 147, 148]) или ω изменяется при $\omega_H = \text{const}$ и $\omega_0 = \text{const}$. На соответствующих кривых $\tilde{n}^2$ также могут появляться «щели», отвечающие отсутствию вещественных значений $\tilde{n}^2$. Например, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\omega_0^2 = \text{const}$ и $\omega_H^2 = \text{const}$ для частоты $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$ значения $\tilde{n}_{1,3}^2$ комплексны, если $\omega < 2\omega_H$ (см. (12,61)).

Вычисление групповой скорости плазменных волн по формуле $\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ приводит к заключению [149], что эта скорость может составлять как острый, так и тупой угол с $\boldsymbol{k}$. Направления $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и $\boldsymbol{k}$ совпадают при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \to 0$, а также при $v \to 0$, $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \frac{\pi}{2}$.

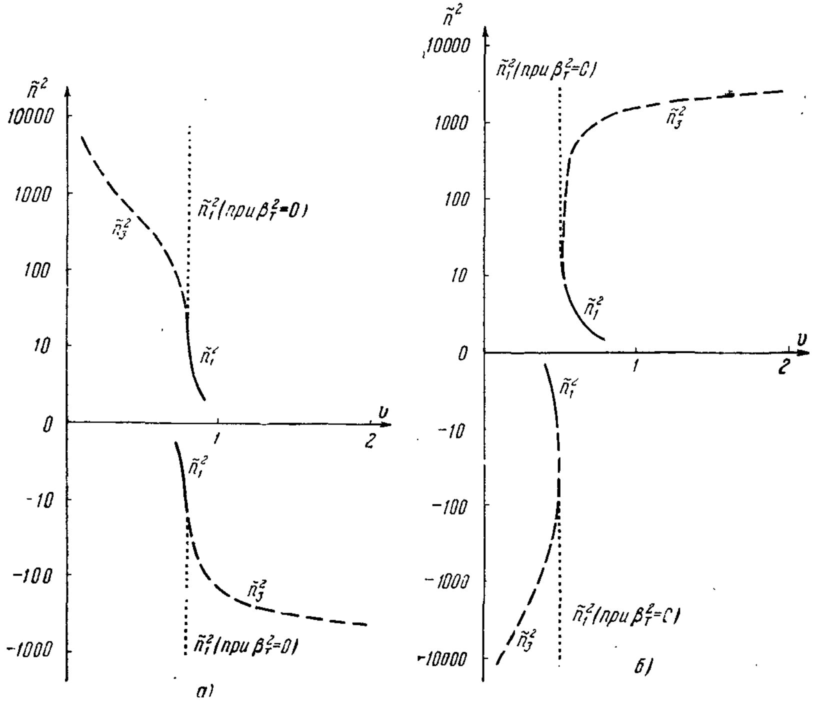


Рис. 12,11. Функции $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_3^2$ при $\alpha = 90°$ и $\beta_T^2 = 10^{-4}$: *а*) $u = 0,2$; *б*) $u = 0,5$.

При других значениях α и не слишком малой величине параметра u вектор $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ составляет с $\boldsymbol{k}$ угол, близкий к $\pi/2$. Этот результат является частным случаем общей теоремы, о которой еще пойдет речь в § 24 (см. также [10], § 3.3).

Перейдем к вопросу о поглощении плазменных волн.

Как уже указывалось, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ черенковское поглощение отсутствует и, таким образом, затухание волн в районе точки $v_{1\infty} = 1 - u$ обусловлено только соударениями (предполагается, что резонанс $u = 1$ лежит достаточно далеко от $v_{1\infty}$, т. е. параметр $v_{1\infty} = \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}$ не слишком мал; кроме того, мы не касаемся сейчас предельного перехода $u \to 0$). При углах $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ черенковское затухание существует, но вблизи точки v_∞ будет заметно только при больших значениях n_1^2, в частности для плазменной волны 3.

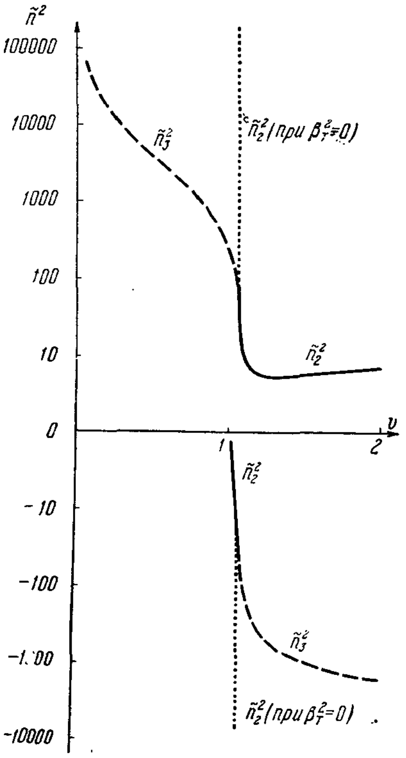


Рис. 12,12. Функции $\widetilde{n}_1^2$ и $\widetilde{n}_3^2$ при $u=0,5$, $\alpha=10°$ и $\beta_T^2=10^{-4}$.

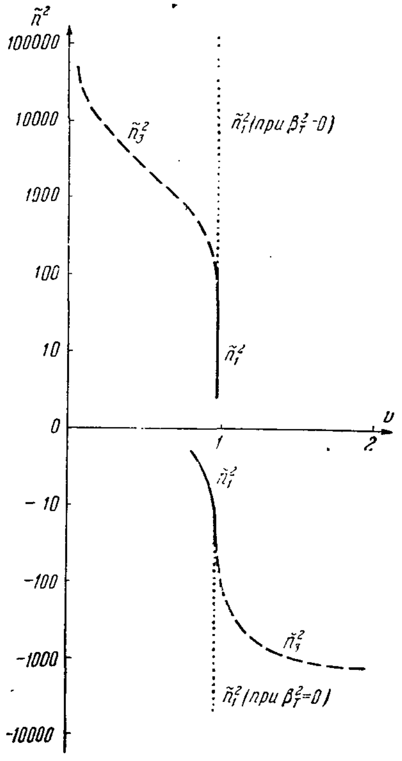


Рис. 12,13. Функции $\widetilde{n}_2^2$ и $\widetilde{n}_3^2$ при $u=2$, $\alpha=10°$ и $\beta_T^2=10^{-4}$.

Интересуясь, кроме того, только относительно слабым затуханием $\gamma \ll \omega$, примем также условия (12,14а) и (12,50) *). Тогда при учете также затухания из-за соударений (здесь и ниже предполагается, что $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$) [119, 143] получим:

---

*) Помимо условий (12,14а), (12,50) и $n_1^2 \gg 1$ удаленность от резонансов $u=1$ и $u=\frac{1}{4}$ отражается в использовании неравенств $\beta_T^2 n^2 \frac{\cos^2\alpha}{(1-\sqrt{u})^2} \ll 1$ и $\beta_T^2 n^2 \frac{\cos^2\alpha}{(1-2\sqrt{u})^2} \ll 1$. При $u<1$ плазменная волна 3 примыкает (является продолжением) к ветви необыкновенных волн, а при $u\cos^2\alpha > 1$ примыкает к ветви обыкновенных волн (в области $u>1$, $u\cos^2\alpha<1$ слабозатухающая плазменная волна не существует). Отметим также, что в (12,62) нельзя переходить в область $v \gg 1$ (см. ниже).

$$\gamma_3 = \left(1 + \frac{uv\sin^2\alpha}{(1-u)^2}\right)^{-1} \left\{ \frac{\nu_{\text{эфф}}}{2}\left[1 + \frac{2uv\sin^2\alpha}{(1-u)^2}\right] + \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\omega v \left[\frac{1}{\beta_T^3 n_3^3\cos\alpha}\exp\left(-\frac{1}{2\beta_T^2 n_3^2\cos^2\alpha}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sin^2\alpha}{2u\beta_T n_3\cos\alpha}\left[\exp\left(-\frac{(1-\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2 n_3^2\cos^2\alpha}\right) + \exp\left(-\frac{(1+\sqrt{u})^2}{2\beta_T^2 n_3^2\cos^2\alpha}\right)\right]\right]\right\}. \quad (12,62)$$

Показатель преломления плазменной волны, затухание которой здесь приведено, определяется выражением (12,54). При предполагаемой малой роли соударений и слабом затухании использование уравнения (12,52) и формулы (12,54), конечно, оправдано. Если же затухание сильное ($\gamma \gtrsim \omega$), то выражения (12,52) и (12,54) уже несправедливы. Учет соударений также изменяет ход кривых $(n - i\varkappa)^2$, причем такое изменение особенно существенно вблизи резонанса. Легко видеть, что влияние теплового движения на показатель преломления значительно больше влияния соударений, если

$$\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega\beta_T} \ll 1 \quad (12,63)$$

(подробнее см. [150]).

В силу сказанного результаты, получаемые на основе использования уравнения (12,52), должны контролироваться с помощью критериев $\gamma \ll \omega$, $\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega\beta_T} \ll 1$.

При $\alpha = 0$ из (12,62) получаем:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_{\text{соуд}},$$

$$\gamma_{\text{соуд}} = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{2},$$

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\omega v}{\beta_T^3 n_3^3}\exp\left\{-\frac{1}{2\beta_T^2 n_3^2}\right\} \approx \sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{-\frac{3}{2}}\frac{\omega_0^4}{k^3}\left(\frac{m}{\varkappa T}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{m\omega^2}{2\varkappa T k^2}\right\}, \quad (12,64)$$

что совпадает с выражением (8,44), определяющим γ_0 для плазменной волны в изотропной плазме (в (8,44) уже учтено, что $\omega^2 = \omega_0^2 + 3\left(\frac{\varkappa T}{m}\right)k^2$; то же сделано и при переходе к последнему выражению (12,64)). Этого, конечно, и следовало ожидать, поскольку $v_\infty(\alpha = 0) = 1$ и происходит уже обсуждавшийся переход волны 3 в плазменную волну для изотропной среды. Такой же результат (переход к изотропной плазме) должен, очевидно, иметь место и при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \to 0$. Из (12,62) это не следует просто потому, что сама формула (12,62) пригодна только при условии $\delta = \frac{\beta_T^2 n_3^2 \sin^2\alpha}{u} \ll 1$, которое не позволяет совершить переход $u \to 0$.

При условии $\beta_T^2 n_3^2 \cos^2\alpha \ll 1$ (см. (12,14а)) затухание слабо в том смысле, что $\gamma \ll \omega$. Последнее и предполагалось при выводе формулы (12,62). Однако для грубых оценок эта формула пригодна и при $\beta_T n_3 \cos\alpha \sim 1$, когда затухание уже может быть сильным. Тем самым с помощью формулы (12,62) удается не только вычислить слабое затухание плазменных волн, но и указать условия, при которых это затухание становится сильным. В области применимости формулы (12,62) для γ с помощью соотношения (12,27) можно найти μ для плазменной волны:

$$\mu_3 = \frac{2\omega}{c}\varkappa_3 = \frac{2\gamma n_3(2-v-u)}{c(1-u-v+uv\cos^2\alpha)} \approx \frac{2\gamma n_3}{c}\,\frac{(1-u)\left[1+\frac{uv\sin^2\alpha}{(1-u)^2}\right]}{(1-u-v+uv\cos^2\alpha)}, \tag{12,65}$$

так как $v \approx \frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha}$.

Заметим, что при некоторых значениях параметров $\mu_3 = \frac{2\omega}{c}\varkappa_3 < 0$, т. е. поле волны с вектором $\boldsymbol{k}$, направленным по оси z, пропорционально выражению $e^{-i\frac{\omega}{c}(n_3+i|\varkappa_3|)z}$; в таких случаях проекция групповой скорости на волновой вектор $\boldsymbol{k}$ отрицательна и поле волны, затухающей вдоль оси z, пропорционально $e^{i\frac{\omega}{c}(n_3-i|\varkappa_3|)z}$.

Случай обыкновенной волны при невысоких частотах. Показатель преломления может быть очень велик помимо области резонансов $\omega \approx s\omega_H$ и окрестности точки v_∞ также для обыкновенной волны при малых частотах. Именно при условиях

$$v \gg 1, \quad u\cos^2\alpha \gg 1, \quad v \gg u, \quad \omega \gg \Omega_H = \frac{|e|H^{(0)}}{Mc} \tag{12,66}$$

для обыкновенной волны

$$n_2^2 \approx \frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha}, \tag{12,67}$$

в то время как $\tilde{n}_1^2 < 0$ (см. (11,24); распространение является при этом квазипродольным).

Формула (12,62) к этому случаю неприменима, поскольку при ее выводе не предполагалось, что $v \gg 1$ (см. соответствующее примечание). Вместе с тем, согласно (12,66) и (12,67), $n_2^2 \gg 1$ и учет теплового движения может оказаться существенным. Расчеты показывают [143, 146], что в области (12,66) тепловые поправки к значению n_2^2 невелики, а для γ_2 и μ_2 получаются выражения:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\sqrt{u}\cos\alpha} + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\omega\frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{u}\beta_T^3 n_2^3\cos^4\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2\beta_T^2 n_2^2\cos^2\alpha}\right\}, \\ \mu_2 &= \frac{2\omega}{c}\,\varkappa_2 = \frac{2\gamma_2}{c}\,\frac{d(n_2\omega)}{d\omega} = \frac{n_2}{c}\gamma_2, \quad n_2^2 = \frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (12,68)$$

Определяемое второй частью этой формулы для γ_2 черенковское затухание при некоторых условиях может играть роль, например при распространении свистящих атмосфериков в верхних слоях ионосферы.

Резюме. Резюмируем приведенные результаты, касающиеся влияния теплового движения на распространение высокочастотных волн в нерелятивистской магнитоактивной плазме.

Тепловое движение дает пренебрежимо малые поправки порядка $\beta_T^2 = \frac{\varkappa T}{mc^2} \ll 1$ везде, кроме областей «плазменного резонанса» $\left(\text{здесь } v_{1,\,2\infty} \approx \frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha}\right.$ и $\tilde{n}_1^2$ или $\tilde{n}_2^2$ стремятся к бесконечности при $\left.\beta_T \to 0 \text{ и } \nu_{\text{эфф}} \to 0\right)$ и областей гирорезонансов $\omega \approx s\omega_H$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ Вблизи плазменного резонанса учет теплового движения приводит к появлению третьего корня квадрата показателя преломления $\tilde{n}_3^2$ (волны с $n = \tilde{n}_3$ условно называем плазменными). Ход кривых $\tilde{n}_{1,\,2,\,3}(v)$ и их взаимосвязь (например, то, что $\tilde{n}_1$ и $\tilde{n}_3$ или $\tilde{n}_2$ и $\tilde{n}_3$ отвечают тем же ветвям дисперсионных кривых) ясны из приведенных графиков. Тепловые поправки для $\tilde{n}_1^2$ или $\tilde{n}_2^2$ в области резонанса существенны при $\Delta v = |v_{1,\,2\infty} - v| \leqslant \beta_T$; в то же время соударения изменяют ход кривых $\tilde{n}^2$ в области $\Delta v \sim \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$. Не связанное с соударениями поглощение плазменных волн заведомо слабо, пока $\beta_T n_3 \cos\alpha \ll 1$.

При $\alpha \neq 0$ коэффициенты поглощения в области гирорезонансов $\omega = \omega_H$ и $\omega = 2\omega_H$ порядка $\frac{\omega}{c}\,v\beta_T$, а в области $\omega = 3\omega_H$ — порядка $\frac{\omega}{c}\,v\beta_T^3$ (см. (12,42)). При $\alpha \to 0$ поглощение на частотах, кратных ω_H, исчезает, а на частоте ω_H сильно возрастает $\left(\mu = \frac{2\omega}{c}\varkappa \sim \frac{\omega}{c}v\right)$. Вне окрестности точки $v_{1,\,2\infty}$ показатели преломления при $\omega = \omega_H$, $\omega = 2\omega_H$, $\omega = 3\omega_H$ и т. д. особенностей не имеют и могут вычисляться по формулам (11,6), т. е. без учета теплового движения (исключение составляют углы $\alpha \to 0$

для резонанса $\omega = \omega_H$ и углы $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ для одного-двух первых резонансов). При $\alpha = 0$ и $\omega \approx \omega_H$ в области частот $\omega < \omega_H$ показатель n_1 сильно возрастает и достигает значения $n_1 \sim \sim \left(\frac{\omega_0^2}{\beta_T \omega_H^2}\right)^{1/3}$.

§ 13. Некоторые замечания о динамике плазмы

Магнитогидродинамическое приближение. Прежде чем перейти к исследованию распространения в плазме низкочастотных волн, когда нужно учитывать движение ионов, сделаем несколько замечаний о динамике плазмы.

При строгом анализе произвольных движений в плазме исходными являются, помимо уравнений поля, кинетические уравнения для электронов, ионов и молекул. Подобная полная система уравнений чрезвычайно сложна; кинетическое уравнение, как известно, далеко не всегда может быть практически использовано даже в значительно более простом случае газа частиц одного сорта (например, одноатомного газа). Поэтому большое значение имеют различные приближенные методы решения динамических задач в плазме.

Одним из важнейших таких приближений является описание газа с помощью уравнений гидродинамики или, если речь идет о плазме, магнитной гидродинамики. Это приближение справедливо, если длина свободного пробега частиц l мала по сравнению с характерной длиной L, встречающейся в задаче (длиной волны, размерами твердых тел или сосудов). Кроме того, время свободного пробега $\tau_{\text{эфф}} = \frac{1}{\nu_{\text{эфф}}} = \frac{l}{v_T}$ и период обращения ионов в магнитном поле $\frac{2\pi}{\Omega_H} = \frac{2\pi Mc}{|e| H}$ должны быть малы по сравнению с характерным временем $t \sim \frac{2\pi}{\omega}$, в течение которого заметно изменяется гидродинамическое движение (роль этого времени играет, например, период колебаний). Последние условия при использовании употреблявшихся ранее обозначений сводятся к требованию, чтобы выполнялись неравенства *) $\omega \ll \nu_{\text{эфф}}$, $\omega \ll \Omega_H$. Выполнение условия $\omega \ll \nu_{\text{эфф}}$ заведомо обеспечивает соблюдение неравенства $l \ll L$, если скорость макроскопического движения v существенно не превосходит тепловую скорость $v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}}$. Далее, для того чтобы среду в системе отсчета, где ее скорость равна нулю, можно было считать изотропной и при наличии магнитного поля $\boldsymbol{H}$, нужно считать выполненным также условие $\omega_H = \frac{|e|H}{mc} \ll \nu_{\text{эфф}}$ (см. ниже уравнение (13.24)). Наконец, для рассматриваемого низкочастотного случая можно обычно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости $\left(\text{условие } \frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \varepsilon\right)$, а также считать проводимость не зависящей от частоты, что будет предполагаться ниже (см., однако, замечания, сделанные в конце настоящего раздела).

---

*) Если $\omega \ll \nu_{\text{эфф}}$ и $\omega_H \ll \nu_{\text{эфф}}$, то условие $\omega \ll \Omega_H$ становится излишним, так как среда оказывается практически изотропной и магнитное поле не играет роли. Таким образом, с точки зрения возможности гидродинамического описания условие $\omega \ll \Omega_H$ достаточно, но не необходимо (необходимым является требование $\omega \ll \sqrt{\Omega_H^2 + \nu_{\text{эфф}}^2}$).

Не имея в виду излагать здесь основы магнитной гидродинамики подробнее (см. [12], гл. VIII и [151—159]), приведем исходную систему уравнений:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{13,1}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right\}, \tag{13,2}$$

$$\rho_M \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}[\boldsymbol{jH}] = -\nabla p - \frac{1}{4\pi}[\boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}], \tag{13,3}$$

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_M \boldsymbol{v} = 0, \tag{13,4}$$

где ρ_M — плотность среды, вязкостью пренебрегается *) и учтено, что при принятых предположениях для рассматриваемого нерелятивистского случая плотность свободных зарядов и плотность конвективного тока могут считаться равными нулю (см. [152]).

Для получения полной системы уравнений к (13,1) — (13,4) нужно добавить уравнение состояния $p = p(\rho_M, T)$ и уравнение переноса тепла. Если ограничиться для простоты изотермическим случаем ($T = \text{const}$), то последнее уравнение писать не нужно. Выражение (13,2) представляет собой закон Ома для движущейся среды $\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right.$ — электрическое поле в системе отсчета, движущейся вместе со средой$\left.\right)$.

Из (13,1) и (13,2) для однородной среды ($\sigma = \text{const}$) получаем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{vH}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\boldsymbol{H}. \tag{13,5}$$

---

*) При учете вязкости в правой части уравнения (13,3) нужно добавить члены $\eta\Delta\boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v}$, где η и ζ — первый и второй коэффициенты вязкости.

В изотермическом случае уравнения (13,3) — (13,5) и уравнение состояния образуют полную систему.

Если проводимость достаточно велика (формально при $\sigma \to \infty$), из условия конечности плотности тока j и закона Ома (13,2) вытекает соотношение

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]. \qquad (13,6)$$

Вопрос о распространении волн в магнитогидродинамическом приближении будет рассмотрен в § 14.

Во избежание недоразумений необходимо отметить, что речь выше шла о магнитогидродинамическом приближении, так сказать, в подлинном смысле этого слова, когда среду можно считать сплошной. Если же говорить об уравнениях магнитной гидродинамики, то, как и уравнения обычной гидродинамики, они иногда применимы и к несплошной (разреженной) среде, например даже к бесстолкновительной плазме. Ниже мы еще остановимся на этом важном вопросе. Сейчас достаточно заметить, что успешное применение магнитогидродинамических уравнений (точнее, обычно речь идет только об уравнениях магнитной гидродинамики для идеально проводящей среды) для описания процессов, не являющихся гидродинамическими в точном смысле этого понятия, не может вызвать особого удивления. Достаточно сказать, что в основе уравнений магнитной гидродинамики лежат уравнения поля и уравнения классической механики, применимость которых, конечно, не ограничена упомянутыми выше неравенствами. Довольно естественно поэтому, что решения таких общих уравнений могут в определенных условиях аппроксимироваться решениями магнитогидродинамических уравнений и при отсутствии или малой частоте соударений. Особенно это относится к движениям поперек магнитного поля, которое препятствует перемещению отдельных частиц в том же направлении (т. е. тоже поперек поля).

Иными словами, магнитное поле в отношении некоторых деформаций делает среду как бы сплошной, причем роль длины свободного пробега $l = v_T/\nu_{\text{эфф}}$ играет радиус ионной орбиты $r_{H,i} \sim \frac{v_{T,i}Mc}{eH^{(0)}} = \frac{\sqrt{\varkappa TMc^2}}{eH^{(0)}}$, где $v_{T,i} = \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}}$, $T = T_i$. Точнее, такая среда подобна сплошной среде для движений поперек поля с характерной длиной волны λ (характерным расстоянием, на котором изменяется макроскопическая скорость движения), удовлетворяющей неравенству $\lambda \gg r_{H,i}$. Сказанное будет еще проиллюстрировано в § 14. Однако в целом магнитогидродинамический подход непригоден или, во всяком случае, совершенно недостаточен для анализа движений в плазме при нарушении уже упомянутых условий

$$\omega \ll \nu_{\text{эфф}}, \qquad \omega_H \ll \nu_{\text{эфф}}. \tag{13,7}$$

Вместе с тем большинство актуальных проблем физики плазмы относится именно к области, где неравенства (13,7) не выполнены. В частности, представляют большой интерес задачи, в которых соударениями вообще можно пренебречь (бесстолкновительная плазма).

Квазигидродинамическое приближение. Основной приближенный метод, применяемый в динамике плазмы вне пределов применимости магнитной гидродинамики, можно назвать квазигидродинамическим*). Речь идет при этом об использовании уравнений для средних величин (уравнений переноса), которые по своей форме весьма близки к гидродинамическим уравнениям. Такой подход уже использовался выше (см. §§ 10, 12, а также [2, 3, 160, 161]). Однако для удобства и внесения несколько большей ясности в этот вопрос остановимся здесь на выводе соответствующих соотношений.

Если мы имеем газ, состоящий из частиц n сортов, то нужно в качестве исходных написать n кинетических уравнений для функций распределения $f^{(n)}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ частиц каждого сорта:

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla_r f^{(n)} + \nabla_v\left(\frac{\boldsymbol{F}^{(n)}}{m^{(n)}} f^{(n)}\right) + S^{(n)} = 0, \tag{13,8}$$

где $\boldsymbol{F}^{(n)}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ — сила, действующая на частицы сорта n и $S^{(n)}$ — интеграл столкновений.

Кинетическое уравнение представляет собой не что иное, как уравнение непрерывности (сохранения числа частиц) в фазовом пространстве (пространстве переменных $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$). С этой точки зрения сразу ясно, почему градиентные члены в (13,8) имеют вид $\nabla_r(\boldsymbol{v}f^{(n)})$ и $\nabla_v\left(\frac{\boldsymbol{F}^{(n)}}{m^{(n)}} f^{(n)}\right)$. Поскольку $\boldsymbol{v}$ не зависит от $\boldsymbol{r}$, первый из этих членов принимает вид $\boldsymbol{v}\nabla_r f^{(n)}$, но второй член имеет форму $\frac{\boldsymbol{F}^{(n)}}{m^{(n)}}\nabla_v f^{(n)}$, использованную в (4,2), только при условии $\frac{\partial F_k^{(n)}}{\partial v_k} = 0$. Сила Лоренца $\boldsymbol{F} = e\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right\}$ удовлетворяет этому условию, в силу чего обычное выражение (4,2) для кинетического уравнения в этом случае совершенно правильно.

Среднее по скоростям от произвольной скалярной или векторной функции $G^{(n)}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ имеет вид ($N^{(n)}$ — концентрация частиц сорта n)

---

*) Этот метод иногда называют односкоростным приближением.

$$\left.\begin{aligned} \overline{G^{(n)}}(t,\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{N^{(n)}(t,\boldsymbol{r})}\int G^{(n)}(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\,f^{(n)}(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{v},\\ N^{(n)}(t,\boldsymbol{r}) &= \int f^{(n)}(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{v}. \end{aligned}\right\} \qquad (13,9)$$

Умножая кинетическое уравнение (13,8) на зависящую лишь от $\boldsymbol{v}$ функцию $G^{(n)}(\boldsymbol{v})$ и интегрируя по $d\boldsymbol{v}$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N^{(n)}\overline{G^{(n)}}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{N^{(n)}\left(\overline{G^{(n)}v_k}\right)\right\}-\\ -\frac{N^{(n)}}{m^{(n)}}\overline{\left(F_k^{(n)}\frac{\partial}{\partial v_k}G^{(n)}\right)}+\int S^{(n)}G^{(n)}\,d\boldsymbol{v}=0, \qquad (13,10)$$

где подразумевается суммирование по k ($k=1, 2, 3$) и при получении третьего члена произведено интегрирование по частям с учетом того обстоятельства, что $f^{(n)}\longrightarrow 0$ при $v_k\longrightarrow\pm\infty$. Полагая $G_n=1$, получаем уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial N^{(n)}}{\partial t}+\operatorname{div}\left(N^{(n)}\boldsymbol{v}^{(n)}\right)=0. \qquad (13,11)$$

Здесь учтено, что $\int S^{(n)}\,d\boldsymbol{v}=0$, поскольку соударения не могут изменить числа частиц (процессы ионизации, рекомбинации и т. п. не рассматриваются). В (13,11), очевидно,

$$\boldsymbol{v}^{(n)}\equiv\overline{\boldsymbol{v}^{(n)}}=\frac{1}{N^{(n)}}\int\boldsymbol{v}f^{(n)}\,d\boldsymbol{v}$$

(указывающая на усреднение черта будет, когда это возможно, ниже опускаться).

Полагая теперь $G^{(n)}=m^{(n)}\boldsymbol{v}$, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m^{(n)}N^{(n)}\overline{\boldsymbol{v}^{(n)}}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{m^{(n)}N^{(n)}\overline{v_k\boldsymbol{v}}\right\}-N^{(n)}\overline{\boldsymbol{F}^{(n)}}+\int m^{(n)}\boldsymbol{v}S^{(n)}\,d\boldsymbol{v}=0. \qquad (13,12)$$

Вводя скорость беспорядочного движения $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}-\overline{\boldsymbol{v}^{(n)}}\equiv\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^{(n)}$, можем записать:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{m^{(n)}N^{(n)}\overline{v_k\boldsymbol{v}}\right\}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{m^{(n)}N^{(n)}\overline{w_k\boldsymbol{w}}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{m^{(n)}N^{(n)}\overline{v_k^{(n)}\boldsymbol{v}^{(n)}}\right\}=\\ =\frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_k^{(n)}+m^{(n)}N^{(n)}\boldsymbol{v}^{(n)}\operatorname{div}\boldsymbol{v}^{(n)}+v_k^{(n)}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{m^{(n)}N^{(n)}\boldsymbol{v}^{(n)}\right\},$$

где тензор напряжений равен

$$\Pi_{ik}^{(n)} = m^{(n)} N^{(n)} \overline{w_i w_k} = m^{(n)} \int w_i w_k f^{(n)}\, d\boldsymbol{v},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_k^{(n)} = m^{(n)} N^{(n)} \overline{w_k \boldsymbol{w}}. \qquad (13,13)$$

Учитывая далее, что в силу (13,11)

$$\frac{\partial}{\partial t}\{m^{(n)} N^{(n)} \boldsymbol{v}^{(n)}\} = m^{(n)} N^{(n)} \frac{\partial \boldsymbol{v}^{(n)}}{\partial t} + \boldsymbol{v}^{(n)} \frac{\partial (m^{(n)} N^{(n)})}{\partial t} =$$

$$= m^{(n)} N^{(n)} \frac{\partial \boldsymbol{v}^{(n)}}{\partial t} - \boldsymbol{v}^{(n)} \operatorname{div} (m^{(n)} N^{(n)} \boldsymbol{v}^{(n)}),$$

можем переписать уравнение (13,12) в виде:

$$m^{(n)} N^{(n)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(n)}}{\partial t} + \boldsymbol{v}^{(n)} \nabla \boldsymbol{v}^{(n)}\right) =$$

$$= e^{(n)} N^{(n)} \left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}^{(n)} \boldsymbol{H}]\right\} - \frac{\partial}{\partial x_k} \boldsymbol{\Pi}_k^{(n)} + \boldsymbol{R}^{(n)}, \qquad (13,14)$$

где сила $\boldsymbol{F}$ в (13,12) считается лоренцовой силой и «сила трения» равна

$$\boldsymbol{R}^{(n)} = -\int m^{(n)} \boldsymbol{v} S^{(n)}\, d\boldsymbol{v} = -\int m^{(n)} \boldsymbol{w} S^{(n)}\, d\boldsymbol{v}.$$

Уравнение (13,14) является, очевидно, законом сохранения импульса (и аналогом уравнения движения в гидродинамике). Выбирая в качестве функции $G^{(n)}$ выражение $\frac{m^{(n)} v^2}{2}$, можно получить уравнение, аналогичное гидродинамическому закону сохранения энергии.

Все подобные уравнения становятся содержательными только после конкретизации выражений для Π_k и $\boldsymbol{R}$, что при последовательном подходе требует использования тех же кинетических уравнений. Вместе с тем, если исходить из уравнений (13,14), представляется более ясным характер тех или иных используемых приближений, являющихся часто недостаточно обоснованными и точными. Простейшим таким приближением является предположение, что тензор напряжений Π_{ik} сводится к давлению, т. е. $\Pi_{ik}^{(n)} = p^{(n)} \delta_{ik}$. Несколько более общая аппроксимация получается, если считать тензор Π_{ik} диагональным, но «давления» Π_{xx}, Π_{yy} и Π_{zz} не равными друг другу. Наконец, можно дополнить Π_{ik} вязкими членами. Ниже мы положим $\Pi_{ik}^{(n)} = p^{(n)} \delta_{ik}$, $p^{(n)} = \varkappa N^{(n)} T^{(n)}$. Что касается «силы трения» $\boldsymbol{R}^{(n)}$, то она связана с соударениями частиц разного сорта и обращается в нуль, если средние скорости всех частиц одинаковы. Поэтому для $\boldsymbol{R}^{(n)}$ используем аппроксимацию, уже применявшуюся в § 10.

В результате для плазмы, содержащей электроны, однократные положительные ионы и молекулы с концентрациями N, N_i и N_m, имеем:

$$mN\left(\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t}+(\mathbf{v}_e\nabla)\mathbf{v}_e\right)=eN\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}]\right\}-\\-\nabla(\varkappa T_eN)+mN\nu_{ei}(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_e)+mN\nu_{em}(\mathbf{v}_m-\mathbf{v}_e), \qquad (13,15)$$

$$MN_i\left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}+(\mathbf{v}_i\nabla)\mathbf{v}_i\right)=-eN_i\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_i\mathbf{H}]\right\}-\\-\nabla(\varkappa T_iN_i)+mN_i\nu_{ei}(\mathbf{v}_e-\mathbf{v}_i)+MN_i\nu_{im}(\mathbf{v}_m-\mathbf{v}_i), \qquad (13,16)$$

$$MN_m\left(\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t}+(\mathbf{v}_m\nabla)\mathbf{v}_m\right)=\\=-\nabla(\varkappa T_mN_m)-m\nu_{em}N(\mathbf{v}_m-\mathbf{v}_e)-M\nu_{im}N_i(\mathbf{v}_m-\mathbf{v}_i), \qquad (13,17)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\operatorname{div}(N\mathbf{v}_e)=0, \quad \frac{\partial N_i}{\partial t}+\operatorname{div}(N_i\mathbf{v}_i)=0, \quad \frac{\partial N_m}{\partial t}+\operatorname{div}(N_m\mathbf{v}_m)=0; \qquad (13,18)$$

здесь заряды и массы электронов (e), ионов (i) и молекул (m) соответственно равны $e<0$, $-e$, 0 и m, M и M. Силы трения можно было бы записать также несколько в другом виде, например, вводя приведенные массы. Мы не будем этого делать, так как для соударений электронов с тяжелыми частицами $\frac{mM}{m+M}\approx m$, а для соударений между тяжелыми частицами при использовании уравнений (13,15) — (13,18) речь идет лишь об аппроксимации, носящей экстраполяционный характер.

Уравнения типа (13,15) — (13,18) уже неоднократно использовались (см., например, [2, 123, 124, 155, 160, 162]); в ряде работ развиты также более строгие методы в динамике плазмы (см., например, [3, 161, 163, 164]).

Уравнения (13,15) — (13,18) нужно, разумеется, дополнить уравнениями поля (см. (8,24)),

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}'+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho',\\&\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0,\\&\mathbf{j}'=e(N\mathbf{v}_e-N_i\mathbf{v}_i), \quad \rho'=e(N-N_i).\end{aligned}\right\} \qquad (13,19)$$

Кроме того, для получения полной системы уравнений нужно использовать уравнения сохранения энергии или переноса тепла, которые зависят от температуры электронов, ионов и молекул T_e, T_i и T_m. Ниже для простоты будем обычно ограничиваться изотермическим случаем, причем положим $T_e=T_i=T_m=T$.

Распространение волн в плазме на основе уравнений (13,15) — (13,19) будет рассмотрено в § 14. Здесь же приведем еще лишь некоторые результаты общего характера, а также соотношения, справедливые при стационарном движении плазмы.

О движении чисто электронно-ионной плазмы и слабо ионизированного газа. Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_e = mN,\quad \rho_i = MN_i,\quad \rho_m = MN_m,\quad \rho_M = \rho_e + \rho_i + \rho_m,\\ &\rho_p = \rho_e + \rho_i,\quad \mathbf{v}_p = \frac{\rho_e\mathbf{v}_e + \rho_i\mathbf{v}_i}{\rho_e + \rho_i},\quad \mathbf{v} = \frac{\rho_e\mathbf{v}_e + \rho_i\mathbf{v}_i + \rho_m\mathbf{v}_m}{\rho_e + \rho_i + \rho_m},\\ &p_p = p_e + p_i,\quad p = p_e + p_i + p_m = \varkappa T(N + N_i + N_m). \end{aligned}\right\}\qquad (13,20)$$

Складывая уравнения (13,15), (13,16) и (13,17), получаем:

$$\rho_e\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \rho_i\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \rho_m\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} = -\nabla p + \rho'\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}'\mathbf{H}],\qquad (13,21)$$

где введено также обозначение $\frac{d\mathbf{v}^{(n)}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}^{(n)}}{\partial t} + (\mathbf{v}^{(n)}\nabla)\,\mathbf{v}^{(n)}$ (см., кроме того, (13,19)).

Если скорости всех частиц приближенно равны, т. е. $\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_m$, то уравнение (13,21) переходит в основное уравнение магнитной гидродинамики (13,3) (в (13,3) принято, что $\mathbf{j}' = \mathbf{j}$ и плотность заряда $\rho' = 0$, как это и имеет место в соответствующем приближении с достаточной степенью точности); разумеется, в выражении для $\mathbf{j}'$ нельзя полагать $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i$.

Такой результат (переход к уравнению магнитной гидродинамики) физически вполне понятен, поскольку в условиях, когда соударения между частицами происходят очень часто (см. условия (13,7)), средние скорости различных компонент газа как раз и должны быть практически одинаковы. Формально это также ясно из уравнений (13,15) — (13,17), где при достаточно больших значениях ν_{ei}, ν_{em} и ν_{im} силы трения могут быть уравновешены другими членами только в случае малости разностей скоростей $(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$, $(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_e)$ и $(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_i)$.

При использовании обсуждаемых уравнений учтем, что

$$m \ll M,\quad |N - N_i| \ll N,\quad \nu_{em} \sim \sqrt{\frac{M}{m}}\,\nu_{im} \gg \nu_{im},\quad M\nu_{im} \gg m\nu_{em}.$$

Кроме того, пренебрежем всеми членами, содержащими производные по координатам, и ограничимся предельными случаями или чисто электронно-ионной плазмы ($N_m = 0$, $\rho_m = 0$) или слабо ионизированного газа, когда

$$N \approx N_i \ll N_m.\qquad (13,22)$$

При $N_m = 0$ и принятых упрощениях из (13,15) и (13,16) в результате умножения уравнений соответственно на $\frac{e}{m}$ и $-\frac{e}{M}$

и их сложения, получаем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}'}{\partial t}=\frac{e^2N}{m}\boldsymbol{E}+\frac{e}{mc}[\boldsymbol{j}'\boldsymbol{H}]-\nu_{ei}\boldsymbol{j}'+\frac{e^2N}{mc}[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{H}]. \qquad (13,23)$$

Из (13,20) ясно, что в данном случае $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_p=\frac{\rho_e\boldsymbol{v}_e+\rho_i\boldsymbol{v}_i}{\rho_e+\rho_i}\approx\frac{\rho_e}{\rho_i}\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_i\approx\boldsymbol{v}_i$, если только $v_i\gg\frac{m}{M}v_e$. Для достаточно низких частот это последнее условие, как можно видеть, выполнено. В этом случае $\left(\text{осуществляющемся, например, при } \omega\ll\Omega_H=\frac{|e|H}{Mc},\ [\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{H}]|\sim v_iH\right)$ выражение (13,23) принимает вид:

$$\frac{1}{\nu_{ei}}\frac{\partial \boldsymbol{j}'}{\partial t}+\boldsymbol{j}'+\frac{\omega_H}{\nu_{ei}}\left[\boldsymbol{j}'\frac{\boldsymbol{H}}{H}\right]=\frac{e^2N}{m\nu_{ei}}\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right\}. \qquad (13,24)$$

При условиях (13,7) это выражение переходит в основное соотношение магнитной гидродинамики (13,2) с $\sigma=\frac{e^2N}{m\nu_{ei}}$. Если же членом $\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$ можно пренебречь, то (13,24) для гармонического движения эквивалентно выражениям (10,9), где поле $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^{(0)}$ направлено по оси z.

При наличии также молекул аналогичным образом получаем ($\nu_e=\nu_{ei}+\nu_{em}$):

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}'}{\partial t}-\frac{e}{mc}[\boldsymbol{j}'\boldsymbol{H}]+\nu_e\boldsymbol{j}'=\frac{e^2N}{m}\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{H}]\right\}+eN\nu_{em}(\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{v}_i). \qquad (13,25)$$

В то же время суммирование уравнений (13,15) и (13,16) в используемом приближении дает:

$$\rho_p\frac{\partial \boldsymbol{v}_p}{\partial t}=\frac{1}{c}[\boldsymbol{j}'\boldsymbol{H}]-\frac{m\nu_{em}}{e}\boldsymbol{j}'+\rho_p\nu_{im}(\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{v}_i). \qquad (13,26)$$

Для слабо ионизированного газа можно считать, что $\boldsymbol{v}_m\approx\boldsymbol{v}$ (это справедливо при условиях (13,22) и $mNv_e+MN_iv_i\ll MN_mv_m$); кроме того, при $v_i\gg\frac{m}{M}v_e$ можно положить $\boldsymbol{v}_i\approx\boldsymbol{v}_p$. Уравнения (13,25) и (13,26) для стационарного случая приводят в таких условиях к соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}\nu_e\boldsymbol{j}'-\frac{e}{mc}[\boldsymbol{j}'\boldsymbol{H}]+\frac{e^2}{mMc^2\nu_{im}}[\boldsymbol{H}[\boldsymbol{j}'\boldsymbol{H}]]=(\nu_e+\nu_H)\boldsymbol{j}'-{}&\\ -\frac{e}{mc}[\boldsymbol{j}'\boldsymbol{H}]-\frac{\nu_H}{H^2}(\boldsymbol{j}'\boldsymbol{H})\boldsymbol{H}=\frac{e^2N}{m}\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right\},&\\ \nu_e=\nu_{ei}+\nu_{em},\quad \nu_H=\frac{\omega_H\Omega_H}{\nu_{im}},\quad \omega_H=\frac{|e|H}{mc},\quad \Omega_H=\frac{|e|H}{Mc},&\end{aligned}\right\} \qquad (13,27)$$

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_p=-\frac{1}{MNc\nu_{im}}[\boldsymbol{j}'\boldsymbol{H}]+\frac{m\nu_{em}}{eMN\nu_{im}}\boldsymbol{j}'. \qquad (13,28)$$

Выражение (13,27) бывает удобно записать также в виде:

$$\boldsymbol{j}' = \sigma_{||}\boldsymbol{E}'_{||} + \sigma_{\perp}\boldsymbol{E}'_{\perp} + \frac{\sigma_H}{H}[\boldsymbol{H}\boldsymbol{E}'], \quad \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}], \tag{13,29}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{||} = \frac{e^2N}{m\nu_e}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{e^2N(\nu_e\nu_{im}^2 + \omega_H\Omega_H\nu_{im})}{m\{\nu_e^2\nu_{im}^2 + \omega_H^2\Omega_H^2 + \omega_H^2\nu_{im}^2\}}, \\ &\sigma_H = \frac{e^2N\nu_{im}^2\omega_H}{m\{\nu_e^2\nu_{im}^2 + \omega_H^2\Omega_H^2 + \omega_H^2\nu_{im}^2\}}, \end{aligned}\right\} \tag{13,30}$$

где $\boldsymbol{E}'_{||}$ и $\boldsymbol{E}'_{\perp}$ — параллельная и перпендикулярная к $\boldsymbol{H}$ составляющие $\boldsymbol{E}'$.

Если не пренебрегать малыми членами, содержащими множители порядка $\sqrt{\frac{m}{M}}$ и еще меньшие, то получается выражение (13,29), где

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{||} = e^2N\left(\frac{1}{m\nu_e} + \frac{1}{M\nu_{im}}\right), \\ &\sigma_{\perp} = e^2N\left\{\frac{\nu_e}{m(\omega_H^2 + \nu_e^2)} + \frac{\nu_{im}}{M(\Omega_H^2 + \nu_{im}^2)}\right\}, \\ &\sigma_H = e^2N\left\{\frac{\omega_H}{m(\omega_H^2 + \nu_e^2)} - \frac{\Omega_H}{M(\Omega_H^2 + \nu_{im}^2)}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{13,31}$$

Выражения (13,31) ввиду их компактности не менее удобны, чем приближенные выражения (13,30), с которыми они совпадают при пренебрежении членами порядка $\sqrt{\frac{m}{M}} \leqslant \frac{1}{40}$.

Формулы (13,30), (13,31) для слабо ионизированного газа были получены выше на основе упрощения более общих выражений. Однако как эти формулы, так и несколько более точные проще получить непосредственно, считая вначале, что молекулы в среднем покоятся ($v_m \approx v = 0$). Тогда уравнения движения в рассматриваемом стационарном случае имеют вид (см. (13,15) — (13,19))

$$\left.\begin{aligned} &m\nu_{em}\boldsymbol{v}_e + m\nu_{ei}(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i) = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}_e\boldsymbol{H}^{(0)}], \\ &M\nu_{im}\boldsymbol{v}_i + m\nu_{ei}(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_e) = -e\boldsymbol{E} - \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{H}^{(0)}], \\ &\boldsymbol{j}' = eN(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i), \qquad N = N_i. \end{aligned}\right\} \tag{13,31a}$$

Отсюда, пренебрегая членами порядка $\frac{m\nu_{em}}{M\nu_{im}} \sim \sqrt{\frac{m}{M}}$, получаем такие связи:

$$\left.\begin{aligned} v_{i,x} &= \frac{\left[\Omega_H^2 - \frac{m}{M}\nu_{im}\nu_{em}\right] v_{e,x} - \Omega_H \nu_{im} v_{e,y}}{\Omega_H^2 + \nu_{im}^2}, \\ v_{i,y} &= \frac{\Omega_H \nu_{im} v_{e,x} + \left[\Omega_H^2 - \frac{m}{M}\nu_{im}\nu_{em}\right] v_{e,y}}{\Omega_H^2 + \nu_{im}^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (13{,}31б)$$

Далее, в том же приближении коэффициенты $\sigma_{\parallel}$, $\sigma_{\perp}$ и σ_H в выражении для j' в форме (13,29) оказываются равными (см. также [165, 173]) *)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\parallel} &= \frac{e^2N}{m(\nu_{em}+\nu_{ei})}, \\ \sigma_{\perp} &= \frac{e^2N}{m\nu_{im}} \frac{(\nu_{im}\nu_{em} + \nu_{ei}\nu_{im} + \omega_H\Omega_H)}{\left\{(\nu_{em}+\nu_{ei})^2 + \omega_H^2\left(1 + \frac{2m\nu_{ei}}{M\nu_{im}} + \frac{\Omega_H^2}{\nu_{im}^2}\right)\right\}}, \\ \sigma_H &= \frac{e^2N\omega_H}{m} \cdot \frac{1}{\left\{(\nu_{em}+\nu_{ei})^2 + \omega_H^2\left(1 + \frac{2m\nu_{ei}}{M\nu_{im}} + \frac{\Omega_H^2}{\nu_{im}^2}\right)\right\}}. \end{aligned}\right\} \qquad (13{,}31в)$$

Эти формулы переходят в (13,30) при условии

$$\frac{2m\nu_{ei}}{M\nu_{im}} \ll 1 + \frac{\Omega_H^2}{\nu_{im}^2}. \qquad (13{,}31г)$$

Фактически, как это ясно уже из полученного результата, условие (13,31г) было в неявном виде использовано при получении формулы (13,27). В ионосферных условиях неравенство (13,31г) обычно выполняется.

Стационарное движение слабо ионизированного газа в магнитном поле. Случай земной ионосферы. Рассмотрим теперь стационарное движение слабо ионизированной плазмы во внешнем поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$, с чем приходится встречаться при исследовании движений в земной ионосфере при учете влияния земного магнитного поля (см., например, [166—168]). Из выражения (13,28) ясно, что средняя макроскопическая скорость газа $\boldsymbol{v}$ (для рассматриваемого случая практически совпадающая со средней скоростью молекул $\boldsymbol{v}_m$) равна скорости движения ионизированной компоненты $\boldsymbol{v}_p = \frac{mN\boldsymbol{v}_e + MN\boldsymbol{v}_i}{(m+M)N} \approx \boldsymbol{v}_i$ только при отсутствии тока $\boldsymbol{j}'$. В свою очередь, согласно (13,29), ток равен нулю, только если

---

*) Выше мы положили $\boldsymbol{v} = 0$ и поэтому получили выражение (13,29) с $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$. Однако переход к случаю $\boldsymbol{v} \neq 0$ достигается без вычислений, если учесть, что электрическое поле в системе координат, в которой газ покоится, равно $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$, где $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — поля в рассматриваемой системе отсчета (в этой системе скорость газа равна $\boldsymbol{v}$; см. [11, 12]).

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}^{(0)}] = 0. \qquad (13,32)$$

Остановимся на связи между $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_p$ и $\boldsymbol{E}$ несколько подробнее [166] в предположении, что

$$\omega_H \Omega_H \gg \nu_{im}\nu_e, \qquad (13,33)$$

которое автоматически приводит к условию $\omega_H^2 \gg \nu_e^2$ $\Big($в рассматриваемом случае $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{em} \approx \nu_{em}$, $\nu_{im} \sim \sqrt{\frac{m}{M}}\,\nu_{em}$, $\Omega_H = \frac{m}{M}\omega_H\Big)$.

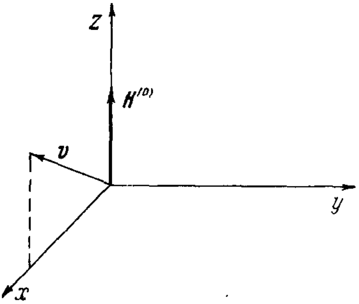


Рис. 13,1. Координатная система, используемая при записи соотношений (13,34), (13,37) и (13,38).

Направляя поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ по оси z и выбирая ось y в направлении, перпендикулярном к $\boldsymbol{v}$ (рис. 13,1), из (13,28) и (13,27) или (13,29) после отбрасывания малых членов получаем:

$$\left.\begin{aligned}
v_{p,z} &= -\frac{eE_z'}{M\nu_{im}}\frac{\nu_{em}}{\nu_e} + v_z,\\
v_{p,x} &= -\frac{e}{M}\frac{\nu_{im}}{(\Omega_H^2 + \nu_{im}^2)}E_x' - \frac{e\Omega_H}{M(\Omega_H^2 + \nu_{im}^2)}E_y' + v_x,\\
v_{p,y} &= \frac{e\Omega_H}{M(\Omega_H^2 + \nu_{im}^2)}E_x' - \frac{e}{M}\frac{\nu_{im}}{(\Omega_H^2 + \nu_{im}^2)}E_y',\\
E_x' &= E_x,\quad E_y' = E_y - \frac{1}{c}v_x H^{(0)},\quad E_z' = E_z,\quad v_y = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (13,34)$$

(здесь e — заряд электрона, $-e$ — заряд положительного иона).

В земной ионосфере условие (13,33) удовлетворяется для высот, больших 90 ÷ 100 *км*. На меньшей высоте среду можно считать изотропной*). В области, где могут применяться формулы (13,34), характер движения сильно изменяется в зависимости от соотношения между $\Omega_H = \frac{|e|H^{(0)}}{Mc}$ и ν_{im} (в земной ионосфере

---

*) Ясное из (13,29) и (13,30) условие изотропности сводится к требованию практического равенства проводимостей $\sigma_{\parallel}$ и $\sigma_{\perp}$, а также малости проводимости σ_H; это достигается, если

$$\omega_H^2 \ll \nu_e^2; \qquad (13,35)$$

следствием неравенства (13,35) является также неравенство $\omega_H \Omega_H \ll \nu_e \nu_{im}$.

для ионов $O^{\pm}$ и $N^{\pm}$ частота $\Omega_H \sim 300$ и $\nu_{im} \sim 10^{-10} N_m \sqrt{\frac{T}{300}}$ (см. (6,27)). Если $\nu_{im} \gg \Omega_H$, то при отсутствии поля $\boldsymbol{E}$, $v_{p,x} \approx v_x$ и $v_{p,y} \approx \frac{\Omega_H}{\nu_{im}} v_x \ll v_x$. Другими словами, в этом случае (при $\boldsymbol{E} = 0$) ионизированная компонента увлекается нейтральной компонентой.

Если же

$$\Omega_H \gg \nu_{im}, \tag{13,36}$$

что в земной ионосфере имеет место в F-слое, то при $\boldsymbol{E} = 0$ ионизированная компонента увлекается вдоль поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$, но практически неподвижна в перпендикулярном направлении $\left(v_{p,x} \approx \frac{\nu_{im}^2}{\Omega_H^2} v_x;\ v_{p,y} \approx -\frac{\nu_{im}}{\Omega_H} v_x\right)$. Поэтому «ионосферный ветер» в F-слое, т. е. появление там скорости $\boldsymbol{v}_p$*) возможно только при наличии электрического поля. При этом в условиях (13,36), независимо от значений v_x, приближенно получим:

$$v_{p,x} = \frac{cE_y}{H^{(0)}}, \quad v_{p,y} = -\frac{cE_x}{H^{(0)}}. \tag{13,37}$$

Более точные выражения, вытекающие из (13,34), для случая (13,36) таковы:

$$\left.\begin{aligned} v_{p,z} &= -\frac{eE_z}{M\nu_{im}} \frac{\nu_{em}}{\nu_e} + v_z; \\ v_{p,x} &= -\frac{e}{M} \frac{\nu_{im}}{\Omega_H^2} E_x + \frac{cE_y}{H^{(0)}} + \frac{\nu_{im}^2}{\Omega_H^2} v_x; \\ v_{p,y} &= -\frac{cE_x}{H^{(0)}} - \frac{e\nu_{im}}{M\Omega_H^2} E_y - \frac{\nu_{im}}{\Omega_H} v_x. \end{aligned}\right\} \tag{13,38}$$

Зная $\boldsymbol{v}_p$, т. е. измеряя скорость перемещения ионизации, согласно (13,37), можно определить $\boldsymbol{E}$. Величина же $\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{v}_m$, т. е. скорость всего газа, приближенно совпадающая со скоростью молекул, остается при этом неизвестной. Для того чтобы ее определить, нужно знать также ток $\boldsymbol{j}'$ (см. (13,28)). При этом, если $\boldsymbol{j}' = 0$, то имеет место связь (13,32) и при пренебрежении малыми членами $\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}$ (полное увлечение), поскольку выражения (13,37) можно записать в виде $\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_p \boldsymbol{H}^{(0)}] = 0$. С другой стороны, если помимо $\boldsymbol{v}_p$ как-то определить независимым образом скорость $\boldsymbol{v}$, то можно вычислить ток $\boldsymbol{j}'$.

---

*) При наблюдении радиометодами фиксируется именно перемещение ионизации (например, движение ионосферных «облаков»), т. е. определяется скорость v_p.

Следует подчеркнуть, что выше речь шла лишь о движениях в однородной ионосфере. Если магнитоактивная плазма неоднородна, то характер движения в ней может измениться. Скорость движения неоднородных образований может сильно отличаться от гидродинамических скоростей в однородной плазме, рассматривавшихся выше. Объясняется это влиянием макроскопических неоднородных электрических и магнитных полей, возникающих в неоднородной плазме. Действительно, скорости дрейфа электронов и ионов обычно существенно различаются. Поэтому электронная и ионная компоненты в области неоднородности стремятся разделиться, всилу чего образуется нескомпенсированный электрический заряд, создающий электрическое поле, препятствующее разделению. В результате неоднородность («облако») движется и расплывается таким образом, что концентрации электронов и ионов в ней почти одинаковы. При этом электрическое поле оказывает сильное воздействие на движение неоднородности в целом. Кроме того, в плазме появляются электрические токи, создающие неоднородное магнитное поле, учет влияния которого в свою очередь может оказаться существенным. В конечном итоге именно неоднородные макроскопические поля в значительной мере определяют скорость движения неоднородности, быстроту и характер ее расплывания [169—173].

Более детальное обсуждение затронутого круга вопросов, важных для физики ионосферы и теории вариаций земного магнитного поля, выходит за рамки настоящей книги.

§ 14. Распространение низкочастотных и магнитогидродинамических волн

Введение. Влиянием ионов на распространение волн, как уже неоднократно указывалось, можно обычно пренебречь при условии $\left(\text{см. (10,5); предполагается, что } N \gg \frac{m}{M} \cdot N_i\right)$:

$$\omega \gg \Omega_H = \frac{|e| H^{(0)}}{Mc}. \tag{14,1}$$

Это неравенство не является, однако, достаточным — иногда влияние ионов значительно и при частотах, существенно превосходящих ионную гирочастоту Ω_H. Так, например, при $\alpha = \pi/2$ (поперечное распространение) в отсутствие соударений и при условии $\omega_0^2 \gg \omega_H^2$ влияние ионов несущественно только, если $\omega \gg \sqrt{\omega_H \Omega_H} = \sqrt{\frac{M}{m}}\, \Omega_H$ (см. ниже условие (14,38г)). Волны, которые можно рассматривать при пренебрежении влиянием ионов, называются высокочастотными. О них только и шла речь в §§ 11, 12. Низкочастотными будем называть волны, частота которых удовлетворяет неравенству

$$\omega \ll \Omega_H. \tag{14,2}$$

Ниже рассматриваются низкочастотные волны, а также волны «промежуточной» частоты. В последнем случае не удовлетворяется ни одно из неравенств (14,1) или (14,2) и, следовательно, движением ионов пренебречь нельзя, хотя их влияние и может быть не столь радикально, как для низкочастотных волн.

Магнитогидродинамические волны. К числу низкочастотных волн относятся, в частности, магнитогидродинамические волны, частота которых удовлетворяет условиям (13,7), что позволяет рассматривать их на основе уравнений магнитной гидродинамики [12, 123, 151, 152, 155—159]. С этого случая мы и начнем, ограничившись сначала незатухающими волнами (т. е. пренебрегаем вязкостью и теплопроводностью и полагаем $\sigma \to \infty$). Здесь же заметим, что некоторые из получающихся таким образом результатов имеют более широкое значение и справедливы даже при отсутствии соударений, когда условия (13,7) заведомо не выполнены.

Исходная система уравнений при принятых предположениях такова (см. (13,1) — (13,5)):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}], \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \\ &\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho_M} - \frac{1}{4\pi\rho_M}[\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}], \quad \frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_M\boldsymbol{v} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14,3}$$

Электрическое поле выражается через $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{H}$ с помощью (13,6). Для однородной невозмущенной среды уравнение переноса тепла при отсутствии диссипации сводится к требованию постоянства энтропии S (адиабатическое приближение).

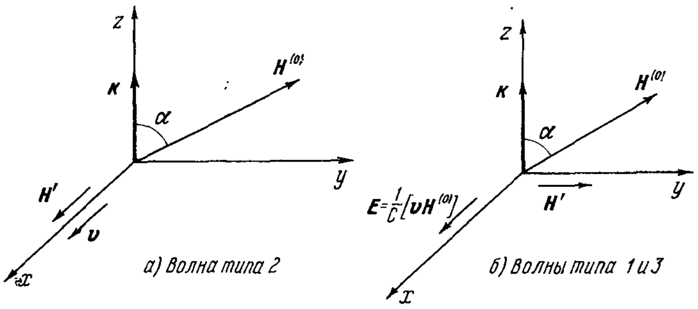
При рассмотрении волн малой амплитуды, аналогичных звуку в обычной гидродинамике, положим $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{(0)} + \boldsymbol{H}'$, $\rho_M = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{E} \equiv \boldsymbol{E}'$, где величины со штрихами малы. Тогда после линеаризации получаем уравнения ($\boldsymbol{H}^{(0)} = \text{const}$):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t} = \operatorname{rot}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}^{(0)}], \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}' = 0, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}^{(0)}], \\ &\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{u_0^2}{\rho_0}\nabla\rho' - \frac{1}{4\pi\rho_0}[\boldsymbol{H}^{(0)}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}'], \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{14,4}$$

где $u_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_M}\right)_S$ — квадрат скорости обычного звука в данной среде.

В условиях, когда распространение волн можно считать не адиабатическим, а изотермическим, но также явно не вводятся диссипативные члены, имеет место та же система уравнений с $u_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_M}\right)_T$.

Будем искать решения системы (14,4), пропорциональные $e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$, причем выберем $\boldsymbol{k}$ за ось z, а ось x направим перпендикулярно к $\boldsymbol{k}$ и полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$ (таким образом, $\boldsymbol{H}^{(0)}$ лежит в плоскости yz, составляя угол α с $\boldsymbol{k}$; рис. 11,1 и 14,1). После подстановки искомого решения в (14,4) и исключения ρ' получаем ($v_ф = \frac{\omega}{k}$, $H_y^{(0)} = H^{(0)} \sin\alpha$, $H_z^{(0)} = H^{(0)} \cos\alpha$):



а) Волна типа 2

б) Волны типа 1 и 3

Рис. 14,1. Волны типа 1, 2 и 3 в магнитной гидродинамике.

$$v_ф H'_x = -v_x H_z^{(0)}, \quad v_ф v_x = -\frac{H_z^{(0)}}{4\pi\rho_0} H'_x, \quad H'_z = 0, \quad H'_y = 0; \tag{14,5}$$

$$\left.\begin{aligned} v_ф H'_y &= -v_y H_z^{(0)} + v_z H_y^{(0)}, \quad v_ф v_y = -\frac{H_z^{(0)}}{4\pi\rho_0} H'_y, \\ \left(v_ф - \frac{u_0^2}{v_ф}\right) v_z &= \frac{H_y^{(0)}}{4\pi\rho_0} H'_y, \qquad \rho' = \frac{\rho_0 v_z}{v_ф}. \end{aligned}\right\} \tag{14,6}$$

Из (14,5) и (14,6) ясно, что могут существовать независимо распространяющиеся возмущения (волны) двух типов: в волнах одного типа отличны от нуля величины H'_x и v_x, в волнах другого типа это относится к H'_y, v_y, v_z и ρ'. Из (14,5) следует, что для волн соответствующего типа, которые можно назвать собственно магнитогидродинамическими (часто эти волны называют альфеновскими), фазовая скорость равна

$$v_{ф2} = \left(\frac{\omega}{k}\right)_2 = \frac{H_z^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = \frac{H^{(0)} \cos\alpha}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \tag{14,7}$$

Эти волны отмечаются индексом 2, так как они относятся к обыкновенным нормальным волнам (см. ниже). В этом случае в волнах (см. (14,5) и рис. 14,1, *а*)

$$\left.\begin{aligned} &v_{x2} = -\frac{v_ф}{H_z^0} H'_{x2} = -\frac{H'_{x2}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \ H'_{x2}\neq 0, \ H'_{z2} = 0, \ H'_{y2} = 0, \\ &v_{y2} = 0, \ v_{z2} = 0, \ \rho'_2 = 0, \ p'_2 = 0, \\ &E_{y2} = \frac{v_{x2}}{c} H_z^{(0)}, \ E_{z2} = -\frac{v_{x2}}{c} H_y^{(0)}, \ E_{x2} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (14,8)$$

Очевидно, скорость движения среды $\boldsymbol{v}$ в этой волне направлена перпендикулярно к $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)}$. Согласно (14,7) связь между ω и $\boldsymbol{k}$ в этой волне можно записать в виде $\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \boldsymbol{H}^{(0)}\boldsymbol{k}$, откуда для групповой скорости имеем (см. § 24):

$$\boldsymbol{v}_{гр2} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{H}^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (14,9)$$

Таким образом, групповая скорость в волне 2 всегда направлена по внешнему полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$. При $\alpha = 0$ (продольное распространение) $v_{ф2} = v_{гр2} = H^{(0)}/\sqrt{4\pi\rho_0}$; при $\alpha = \pi/2$ (поперечное распространение) $v_{ф2} = 0$, а групповая скорость перпендикулярна к $\boldsymbol{k}$ и, как и при всех других углах, равна (в рамках магнитогидродинамического приближения) тому же значению $\frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$.

Магнитогидродинамические волны, отвечающие соотношениям (14,6), часто называют магнитозвуковыми. Дисперсионное уравнение для этих волн, очевидно, таково $\left(v_ф^2 = \frac{\omega^2}{k^2}\right)$:

$$(v_ф^2 - u_0^2)\left(v_ф^2 - \frac{H_z^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\right) = \frac{v_ф^2 H_y^{(0)2}}{4\pi\rho_0},$$

откуда

$$v_{ф1,3}^2 = \frac{1}{2}\left(u_0^2 + \frac{H^{(0)^2}}{4\pi\rho_0}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{u_0^4 + \frac{H^{(0)^4}}{(4\pi\rho_0)^2} - 2\frac{u_0^2}{4\pi\rho_0}\left(H_z^{(0)2} - H_y^{(0)2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_0^2 + \frac{H^{(0)^2}}{4\pi\rho_0}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{u_0^4 + \frac{H^{(0)^4}}{(4\pi\rho_0)^2} - 2\frac{u_0^2 H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\sqrt{u_0^2 + \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0} + \frac{2H_z^{(0)}u_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}} \pm \sqrt{u_0^2 + \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0} - \frac{2H_z^{(0)}u_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}}\right\}^2. \quad (14,10)$$

Для этих волн (см. рис. 14,1, *б*)

$$\left.\begin{aligned}
&v_x = 0,\ v_y = -\frac{H_z^{(0)}}{4\pi\rho_0 v_\text{ф}} H'_y,\ v_z = \frac{v_\text{ф} H_y^{(0)}}{4\pi\rho_0 (v_\text{ф}^2 - u_0^2)} H'_y,\\
&H'_x = 0,\ H'_y \neq 0,\ H'_z = 0,\ p' = u_0^2 \rho',\ \rho' = \frac{\rho_0 v_z}{v_\text{ф}},\\
&E_x = -\frac{1}{c}\left(v_y H_z^{(0)} - v_z H_y^{(0)}\right),\ E_y = 0,\ E_z = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (14{,}11)$$

где в качестве $v_\text{ф}$ нужно выбрать одно из значений $v_{\text{ф}1}$ или $v_{\text{ф}3}$ согласно (14,10).

Волной 1 или (+) будем называть волну, которой отвечает знак плюс в (14,10), причем сам корень всегда считается положительным; волне 3 или (—) отвечает в (14,10) знак минус. Подчеркнем, что для высокочастотных волн 1 и 2, например в (11,5) и далее, волне 1 отвечал знак — и волне 2 — знак +; поскольку сейчас речь идет о совсем других волнах, отмеченное обстоятельство не должно повести к путанице (см. также ниже). Зависимость скоростей $v_{\text{ф}1,2,3}$ от угла α между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)}$ показана на полярной диаграмме (рис. 14,2), где длина радиуса-вектора из начала координат до кривой равна $v'_\text{ф} = \frac{v_\text{ф}}{\frac{H^0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}}$ (направление магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ совпадает с направлением оси абсцисс; кривые приведены для значений $\zeta = \frac{u_0}{\frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}}$, равных 0,2; 0,8; 1,0; 1,2 и 2,0).

При $\zeta = \frac{u_0}{\frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}} < 1$ и $\alpha = 0$ из (14,10) получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&v_{\text{ф}1} = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = v_{\text{ф}2}\,(\alpha = 0), \qquad v_{\text{ф}3} = u_0,\\
&v_{z1} = 0,\ v_{z3} = \frac{\rho'_3 v_{\text{ф}3}}{\rho_0},\ v_{y1} = -\frac{H'_{y1}}{\sqrt{4\pi\rho_0}},\ v_{y3} = 0,\\
&\rho'_1 = 0, \qquad H'_{y3} = 0, \qquad E'_{x3} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (14{,}12)$$

причем значения переменных для волны 3 находятся проще всего непосредственно из (14,6) с $v_{\text{ф}3} = u_0$. При $\zeta = \frac{u_0}{\frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}} > 1$ и $\alpha = 0$, наоборот, $v_{\text{ф}1} = u_0$ и $v_{\text{ф}3} = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$. Целесообразность именно такого

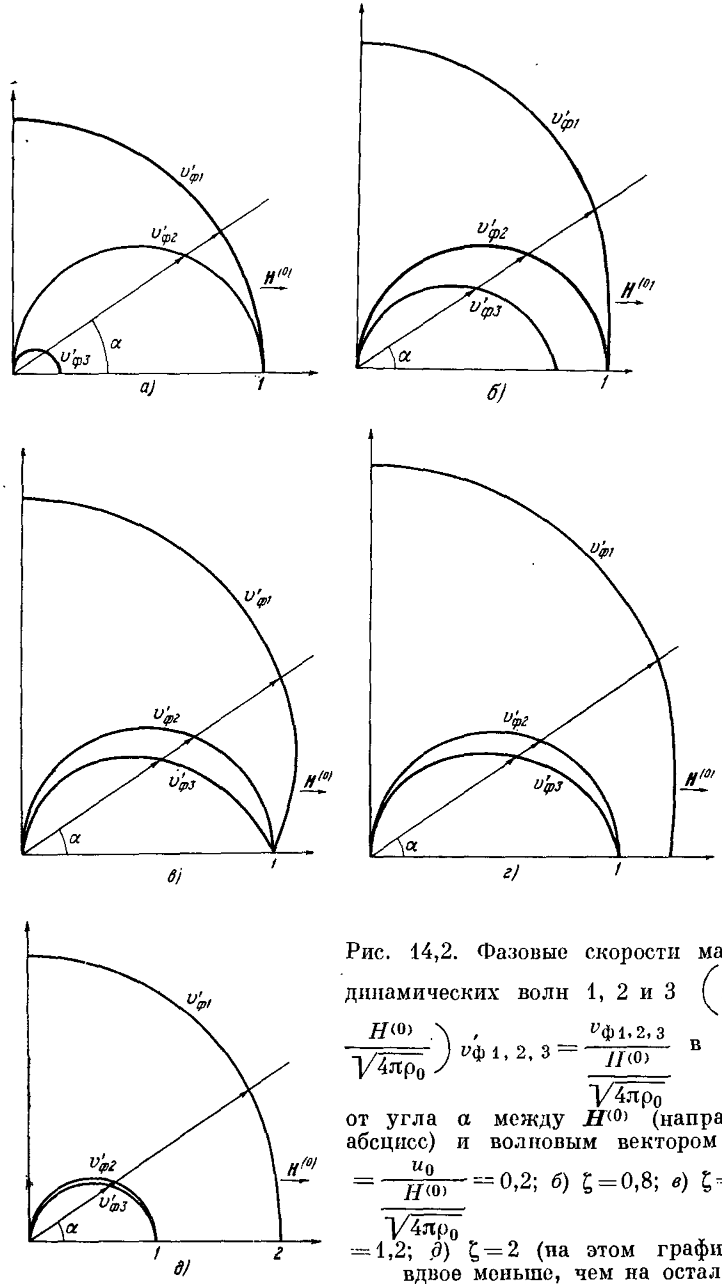


Рис. 14,2. Фазовые скорости магнитогидродинамических волн 1, 2 и 3 $\left(\text{в единицах } \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right)$ $v'_{ф\,1,2,3} = \frac{v_{ф\,1,2,3}}{\frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}}$ в зависимости от угла α между $\boldsymbol{H}^{(0)}$ (направление оси абсцисс) и волновым вектором $\boldsymbol{k}$: *а*) $\zeta = \frac{u_0}{\frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}} = 0{,}2$; *б*) $\zeta = 0{,}8$; *в*) $\zeta = 1{,}0$; *г*) $\zeta = 1{,}2$; *д*) $\zeta = 2$ (на этом графике масштаб вдвое меньше, чем на остальных) выбора названий волн 1 и 3 ясна из рис. 14,2; заметим также, что при $\zeta \to 0$ (т. е. $u_0 \to 0$ или $H_0 \to \infty$) волна 1 непосредственно примыкает к необыкновенным нормальным волнам (см. ниже), что и оправдывает выбор для нее индекса 1. Волна, скорость которой при $\alpha \to 0$ равна u_0, представляет собой обычную звуковую волну, распространяющуюся вдоль поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$, не оказывающего на нее поэтому никакого влияния.

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$, когда $H_z^{(0)} = 0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&v_{\text{ф}1} = \sqrt{u_0^2 + \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}}, \quad v_{\text{ф}3} = v_{\text{ф}2}\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = 0,\\
&v_{y1} = 0, \quad v_{z1} = \frac{\sqrt{u_0^2 + \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}}}{H^{(0)}}\, H'_{y1} = \frac{v_{\text{ф}1} H'_{y1}}{H^{(0)}},\\
&\rho'_1 = \frac{\rho_0 v_{z1}}{v_{\text{ф}1}}, \quad E_{x1} = \frac{v_{z1} H^{(0)}}{c}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14,13)$$

Для слабого поля, т. е. при условии

$$\zeta^2 = \frac{u_0^2}{\frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}} \gg 1, \qquad (14,14)$$

для волн 1 получаем:

$$H'_{y1} \approx \frac{H_y^{(0)}}{u_0} v_{z1}, v_{\text{ф}1} \approx u_0, \qquad v_{y1} \approx -\frac{H_z^{(0)}}{4\pi\rho_0 u_0} H'_{y1}; \ |v_{y1}| \ll |v_{z1}|. \qquad (14,15)$$

При $H^{(0)} \to 0$ эти волны совпадают со звуковыми.

Для волны 3 при условии (14,14) находим:

$$\left.\begin{aligned}
&v_{\text{ф}3} \approx \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \cos\alpha = \frac{H_z^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = v_{\text{ф}2}, \quad v_{y3} \approx -\frac{H'_{y3}}{\sqrt{4\pi\rho_0}},\\
&v_{z3} \approx -\frac{H_y^{(0)} H_z^{(0)}}{(4\pi\rho_0)^{\frac{3}{2}} u_0^2} H'_{y3} \ll v_{y3}, \quad E'_{x3} \approx -\frac{v_{y3} H_z^{(0)}}{c}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14,16)$$

Эта волна близка, таким образом, к собственно магнитогидродинамической волне 2, с которой она, если не говорить о поляризации, совпадает для несжимаемой жидкости (при $u_0^2 \to \infty$) или при $H^{(0)} \to 0$ (в обоих случаях $\zeta^2 \to \infty$)*). Итак, в пределе

---

*) Переход к полю $H^{(0)} \to 0$ нужно здесь понимать несколько условно, поскольку в случае плазмы в области магнитогидродинамических волн должно также соблюдаться условие (14,2). Заметим также, что иногда несжимаемой называют жидкость не при $u_0 \to \infty$, а при пренебрежении членом с давлением, т. е. при $u_0 \to 0$. Принятая в тексте терминология, конечно, правильнее.

$\zeta^2 \to \infty$ (или лучше при $u_0^2 \to \infty$) имеются две собственно магнитогидродинамические волны с фазовой скоростью $v_{ф} = \frac{H_z^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = \frac{H^{(0)}\cos\alpha}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ и двумя независимыми направлениями поляризации, причем

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{H}'}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad \boldsymbol{kv} = 0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}^{(0)}].$$

В сильных полях, когда

$$\zeta^2 = \frac{u_0^2}{\frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}} \ll 1, \tag{14,17}$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned} &v_{ф1} \approx \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad v_{ф3} \approx u_0\cos\alpha, \\ &v_{z1} \approx \frac{\sin\alpha}{\sqrt{4\pi\rho_0}} H'_{y1}, \quad v_{y1} \approx -\frac{\cos\alpha}{\sqrt{4\pi\rho_0}} H'_{y1}, \\ &v_{z3} \approx \frac{H^{(0)}}{4\pi\rho_0 u_0} \operatorname{ctg}\alpha\, H'_{y3}, \quad v_{y3} \approx -\frac{H^{(0)}}{4\pi\rho_0 u_0} H'_{y3}. \end{aligned}\right\} \tag{14,18}$$

В этом предельном случае скорость $\boldsymbol{v}_1$ в волне 1 перпендикулярна к $\boldsymbol{H}^{(0)}$.

В большей части книги вместо фазовых скоростей используются показатели преломления $n = \frac{c}{v_{ф}}$. Заметим поэтому, что показатель преломления для магнитогидродинамических волн обычно очень велик. Так, например, в чисто электронно-ионной плазме для собственно магнитогидродинамической волны находим:

$$n_2 = \frac{c}{v_{ф2}} = \frac{c\sqrt{4\pi MN}}{H^{(0)}\cos\alpha}.$$

В солнечной короне при $N \sim 10^8$, $H^{(0)} \sim 10$ имеем $n_2 \gg 10^2$ и $v_{ф2} \leqslant 3\cdot10^8$ *см/сек*; в более низких слоях солнечной атмосферы и в толще Солнца показатель n_2, разумеется, может быть еще несравненно больше. В межзвездной среде при $N \sim 1$ и $H^{(0)} \sim 10^{-5}$ показатель $n_2 \gg 10^4$ и $v_{ф2} \leqslant 3\cdot10^6$.

Выше затухание магнитогидродинамических волн считалось отсутствующим. При учете вязкости и конечной электропроводности, но пренебрежении теплопроводностью, система линеаризованных магнитогидродинамических уравнений, аналогичная

14,4), имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{H}'}{\partial t} = \operatorname{rot}\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}^{(0)}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\,\Delta \boldsymbol{H}', \\ &\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}' = \sigma\left\{\boldsymbol{E}' + \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}^{(0)}]\right\}, \\ &\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{u_0^2}{\rho_0}\nabla\rho' - \frac{1}{4\pi\rho_0}\,[\boldsymbol{H}^{(0)}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}'] + \\ &\qquad + \frac{\eta}{\rho_0}\,\Delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho_0}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v}, \\ &\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14,19)$$

Решение этой системы, в принципе, не составляет труда, но получающиеся выражения в общем случае несколько громоздки. Ограничимся поэтому рассмотрением предельных случаев. В несжимаемой жидкости $u_0^2 \to \infty$, $\rho' = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ и для волн типа $e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$ получаем дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 - i\left(\frac{4\pi c^2}{\sigma} + \frac{\eta}{\rho_0}\right)\omega k^2 - \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\cos^2\alpha\cdot k^2 - \frac{4\pi c^2\eta}{\rho_0\sigma}\,k^4 = 0. \qquad (14,20)$$

Отсюда, при $\sigma \to \infty$ и $\eta = 0$, для фазовой скорости волн с любой поляризацией получается выражение $v_\text{ф} = \dfrac{H^0\cos\alpha}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$, как это и должно быть в несжимаемой жидкости. Полагая $k = \dfrac{\omega}{c}(n - i\varkappa)$, причем $\varkappa \ll n$ (слабое затухание), получаем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\omega}{c}\,\varkappa_{2,\,3} = \operatorname{Im} k = \frac{\omega^2}{2v^3_{\text{ф}2,\,3}}\left(\frac{4\pi c^2}{\sigma} + \frac{\eta}{\rho_0}\right), \\ &v_{\text{ф}2,\,3} = \frac{H^{(0)}\cos\alpha}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \end{aligned}\right\} \qquad (14,21)$$

В другом предельном случае положим $u_0^2 = 0$. Тогда для волны 2 получаем результат (14,21), а для волны 1 (в волне 3 в этом приближении $v_{\text{ф}3} = 0$; см. (14,17) и (14,18)):

$$\omega - i\,\frac{4\pi c^2}{\sigma}\,k^2 - \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\left\{\frac{\cos^2\alpha}{\omega - i\,\dfrac{\eta}{\rho_0}\,k^2} + \frac{\sin^2\alpha}{\omega - i\left(\dfrac{4}{3}\,\dfrac{\eta}{\rho_0} + \dfrac{\zeta}{\rho_0}\right)k^2}\right\}k^2 = 0. \qquad (14,22)$$

Отсюда при слабом поглощении

$$\frac{\omega}{c}\,\varkappa_1 = \frac{\omega^2}{2v^3_{\text{ф}1}}\left\{\frac{4\pi c^2}{\sigma} + \frac{\eta}{\rho_0} + \left(\frac{\eta}{3\rho_0} + \frac{\zeta}{\rho_0}\right)\sin^2\alpha\right\}, \quad v_{\text{ф}1} = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \qquad (14,23)$$

Помимо волн, носящих характер малых возмущений, в магнитной гидродинамике, как и в обычной гидродинамике, могут рассматриваться волны большой амплитуды и различные разрывы. В той или иной мере такие волны большой амплитуды и разрывы сохраняются и вне пределов магнитогидродинамического приближения. Весь этот интересный вопрос мы рассматривать не будем (в области магнитной гидродинамики картина выяснена [12, 152, 156]; в более общем случае, в частности в разреженной плазме, напротив, вопрос о характере разрывов в настоящее время находится в стадии исследования [174]).

Низкочастотные волны (квазигидродинамическое рассмотрение). Продольное распространение. Магнитогидродинамические волны, о которых шла речь, представляют собой лишь предельный случай низкочастотных волн с $\omega \ll \Omega_H$, для которых выполнены условия $\omega \ll \nu_{\text{эфф}}$ и $\omega_H \ll \nu_{\text{эфф}}$ (см. (13,7)). Переходя к низкочастотным и «промежуточным» волнам вне области применимости магнитной гидродинамики (см. [123, 124, 175, 176], а также [58, 72]), будем исходить из квазигидродинамических уравнений (13,15) — (13,18). При этом, имея в виду волны малой амплитуды, воспользуемся линейным приближением. Соответствующая полная система уравнений при $T_e = T_i = T_m = T = \text{const}$ такова:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t} &= \frac{e}{m}\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_e \boldsymbol{H}^{(0)}]\right\} - \frac{\varkappa T}{mN^{(0)}}\nabla N + \\
&\qquad\qquad + \nu_{ei}(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_e) + \nu_{em}(\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_e), \\
\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} &= -\frac{e}{M}\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{H}^{(0)}]\right\} - \frac{\varkappa T}{mN^{(0)}}\nabla N_i + \\
&\qquad\qquad + \frac{m}{M}\nu_{ei}(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i) + \nu_{im}(\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_i), \\
\frac{\partial \boldsymbol{v}_m}{\partial t} &= -\frac{\varkappa T}{MN_m^{(0)}}\nabla N_m - \frac{mN^{(0)}}{MN_m^{(0)}}\nu_{cm}(\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_e) - \\
&\qquad\qquad - \frac{N^{(0)}}{N_m^{(0)}}\nu_{im}(\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_i), \\
\frac{\partial N}{\partial t} &+ N^{(0)}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_e = 0, \quad \frac{\partial N_i}{\partial t} + N^{(0)}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_i = 0, \\
&\qquad \frac{\partial N_m}{\partial t} + N_m^{(0)}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_m = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (14,24)$$

$$\Delta \boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{j}'}{\partial t}, \quad \boldsymbol{j}' = eN^{(0)}(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_i); \quad (14,25)$$

здесь $N^{(0)} \equiv N_e^{(0)} = N_i^{(0)}$ и $N_m^{(0)}$ — невозмущенные значения N, N_i и N_m (ниже индекс нуль, если это не повлечет к недоразумениям, будет опускаться).

Подставляя в (14,24) решения, пропорциональные $e^{i(\omega t - kr)}$, получаем дисперсионное уравнение, определяющее зависимость

$(n - i\varkappa)^2$ от ω. Ввиду громоздкости общего случая пренебрежем ролью членов с давлением (к тому же уравнения (14,24) при этом значительно более точны) *). Тогда система (14,24) эквивалентна системе (10,34) — (10,36), и можно ввести тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega)$, имеющий вид (10,43). При введении тензора ε'_{ij} для нахождения $(n - i\varkappa)^2$ нужно использовать лишь волновое уравнение (14,25), которое для плоской монохроматической волны запишется так:

$$-k^2E_i + k_i(\boldsymbol{kE}) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'_{il}E_l = 0, \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n - i\varkappa)^2, \qquad (14,26)$$

где при отсутствии молекул (см. (10,44)):

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon'_{xx} \mp i\varepsilon'_{xy} = 1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega \mp \omega_H)(\omega \pm \Omega_H) - i\omega\nu_{ei}}, \\ &\varepsilon'_{yy} = \varepsilon'_{xx}, \quad \varepsilon'_{yx} = -\varepsilon'_{xy}, \quad \varepsilon'_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - i\nu_{ei})}, \end{aligned}\right\} \qquad (14,27)$$

остальные компоненты ε'_{ij} равны нулю.

Запишем также эти выражения (14,27) в несколько иной форме для случая, когда $\nu_{ei} = 0$ и, таким образом, $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}$:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_0^2(\omega^2 - \omega_H\Omega_H)}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - \Omega_H^2)}, \\ &\varepsilon_{xy} = -i\frac{\omega_0^2\omega\omega_H}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - \Omega_H^2)}, \quad \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (14,27\text{a})$$

Заметим, что при переходе от (14,27) к (14,27а) в числителе выражения для ε_{xy} стоит множитель $(\omega_H - \Omega_H)$ вместо ω_H. Однако в пределах используемой точности расчета (см. § 10) сохранить множитель $(\omega_H - \Omega_H)$ вместо ω_H было бы незаконным.

Из (14,26) и (14,27) для волны, распространяющейся под углом α к направлению внешнего поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$, когда можно положить

$$\boldsymbol{k} = \{0,\ k\sin\alpha,\ k\cos\alpha\},$$

получаем:

$$\left.\begin{aligned} &(n - i\varkappa)^2_{1,2} = \frac{[\varepsilon'^2_{xx}\sin^2\alpha + \varepsilon'_{xx}\varepsilon'_{zz}(1 + \cos^2\alpha) + \varepsilon'^2_{xy}\sin^2\alpha] \pm \sqrt{R}}{2(\varepsilon'_{xx}\sin^2\alpha + \varepsilon'_{zz}\cos^2\alpha)}, \\ &R = [\varepsilon'^2_{xx}\sin^2\alpha + \varepsilon'_{xx}\varepsilon'_{zz}(1 + \cos^2\alpha) + \varepsilon'^2_{xy}\sin^2\alpha]^2 - \\ &\qquad - 4(\varepsilon'_{xx}\sin^2\alpha + \varepsilon'_{zz}\cos^2\alpha)(\varepsilon'^2_{xx} + \varepsilon'^2_{xy})\varepsilon'_{zz}. \end{aligned}\right\} \qquad (14,28)$$

---

*) Давление $p_e = \varkappa TN$, а скорость звука $u_0 \sim \sqrt{\varkappa T/M}$. Поэтому в плазме без молекул, когда плотность $\rho_0 \approx MN$, условие (14,17) имеет вид $H^{(0)2}/8\pi \gg p_e$. Таким образом, пренебрежение давлением частиц, вообще говоря, возможно в достаточно сильном магнитном поле, так как в этом случае основную роль играет магнитное давление $H^{(0)2}/8\pi$.

При продольном распространении ($\alpha = 0$) получаем:

$$(n - i\varkappa)^2_{1,\,2} \equiv (n - i\varkappa)^2_{\mp} = \varepsilon'_{xx} \pm i\varepsilon'_{xy} = 1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega \pm \omega_H)(\omega \mp \Omega_H) - i\omega\nu_{ei}} \approx$$

$$\approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega\left(\omega - i\nu \pm \omega_H - \dfrac{\omega_H\Omega_H}{\omega}\right)}, \qquad (14{,}29)$$

где в последнем выражении опущены индексы ei у ν_{ei} и пренебрежено величиной Ω_H по сравнению с ω_H. Последнее недопустимо вблизи ионного гирорезонанса $\omega \approx \Omega_H$, о чем еще пойдет речь ниже.

В высокочастотном случае (14,1) выражение (14,29) переходит в формулу (11,8); если же

$$\omega \ll \Omega_H, \quad \omega\nu \ll \omega_H\Omega_H, \qquad (14{,}30)$$

то при пренебрежении слабым поглощением из (14,29) получаем:

$$\left.\begin{aligned} n^2_{1,\,2} &= 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_H\Omega_H} = 1 + \frac{4\pi MNc^2}{H^{(0)2}}, \\ v_\text{ф}^2 &= \frac{c^2}{n^2_{1,\,2}} = \frac{H^{(0)2}}{\dfrac{H^{(0)2}}{c^2} + 4\pi MN}. \end{aligned}\right\} \qquad (14{,}31)$$

Обычно

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_H\Omega_H} = \frac{4\pi c^2MN}{H^{(0)2}} \gg 1 \qquad (14{,}32)$$

и скорость $v_\text{ф}$, согласно (14,31), равна скорости магнитогидродинамических волн $v_\text{ф} = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$, поскольку $MN = \rho_M = \rho_0$ с точностью до пренебрегаемых членов порядка $\frac{m}{M}$.

Мы видим, таким образом, что высокочастотные волны (например, радиоволны, распространяющиеся в ионосфере или солнечной короне) и магнитогидродинамические волны, столь сильно отличающиеся друг от друга в отношении ряда свойств, тем не менее тесно связаны между собой и, по существу, отличаются лишь значениями параметров: соответствующие выражения для $(n - i\varkappa)^2$ получаются [123] из общих формул (см., например, (14,29)).

Условие (14,32) соответствует возможности пренебречь частью тока смещения $\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E}$ по сравнению с умноженной на $\frac{4\pi}{c}$ плотностью «полного тока» $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j} + i\omega\boldsymbol{P}$. Вместе с тем, как ясно из (14,31), условие (14,32) означает, что $n^2 \gg 1$ и фазовая скорость волн равна $v_\text{ф} = \frac{c}{n} \ll c$. При условиях (14,30) и (14,32), как ясно из (14,27), находим

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_H \Omega_H}, \quad \varepsilon'_{zz} \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - i\nu)}, \quad |\varepsilon'_{zz}| \gg \varepsilon_{xx} \qquad (14,33)$$

(остальные компоненты равны нулю или малы); в (14,33) и ниже мы отождествляем вещественные ε'_{xx} и ε'_{yy} с ε_{xx} и ε_{yy}).

Пусть теперь, кроме того, угол α между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)}$ не слишком близок к $\pi/2$, так что соблюдается условие $|\varepsilon'_{zz}| \cos^2\alpha \gg \gg \varepsilon_{xx} \sin^2\alpha \sim \varepsilon_{xx}$, т. е.

$$\frac{\omega_H \Omega_H \cos^2\alpha}{\omega \sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \gg 1. \qquad (14,34)$$

Тогда из (14,28) и (14,33) получаем:

$$\left.\begin{aligned} n_1^2 &= \varepsilon_{xx} = \frac{4\pi c^2 MN}{H^{(0)2}}, & v_{\text{ф}1} &= \frac{c}{n_1} = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \\ n_2^2 &= \frac{\varepsilon_{xx}}{\cos^2\alpha} = \frac{4\pi c^2 MN}{H^{(0)2}\cos^2\alpha}, & v_{\text{ф}2} &= \frac{c}{n_2} = \frac{H^{(0)}\cos\alpha}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \end{aligned}\right\} \qquad (14,35)$$

Эти выражения совпадают с магнитогидродинамическими формулами (14,7) и (14,10) при $u_0 = 0$ (напомним, что еще при переходе к формулам (14,27) было пренебрежено давлением, т. е. положено $u_0 = 0$).

Об области применимости магнитогидродинамических формул. Весьма важно подчеркнуть, что условия применимости формул магнитогидродинамического типа (14,35), т. е. неравенства (14,30), (14,32) и (14,34), могут быть значительно слабее общих условий справедливости магнитогидродинамического приближения (см. (13,7)). На такую возможность мы уже указывали в конце первого раздела § 13, связывая ее со сдерживающим влиянием внешнего магнитного поля на движение частиц поперек поля (в этом случае роль длины свободного пробега $l = \frac{v_T}{\nu}$ в известном отношении играет гирорадиус ионов $r_{H,i} \sim \frac{v_{T,i}Mc}{eH^{(0)}}$ и значение ν может оказаться несущественным). Поясним теперь возможность справедливости некоторых магнитогидродинамических формул вне пределов применимости самой магнитной гидродинамики, исходя из исходных выражений. Условия применимости магнитной гидродинамики (13,7) нужны для того, чтобы более общее соотношение (13,24) приняло вид:

$$\boldsymbol{j}' = \frac{e^2 N}{m\nu}\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vH}]\right\},$$

т. е. совпало с основным магнитогидродинамическим уравнением (13,2); кроме того, для справедливости самого соотношения (13,24) нужно, чтобы частота ω была достаточно мала (для этого достаточно условия $\omega \ll \Omega_H$). Вместе с тем при переходе к бесконечной проводимости используется лишь связь $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$, которая имеет место и без пренебрежения током смещения *).

Действительно, для гармонического процесса уравнение (13,24) можно записать в виде ($\nu = \nu_{ei}$):

$$\boldsymbol{j}' + \frac{\omega_H}{(i\omega+\nu)}\left[\boldsymbol{j}'\frac{\boldsymbol{H}}{H}\right] = \frac{e^2N}{m(i\omega+\nu)}\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right\}. \qquad (14,36)$$

Отсюда ясно, что при достаточной малости ω и ν или достаточно большом N связью $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]$ можно, вообще говоря, пользоваться и при несоблюдении условий (13,7). В результате даже при полном пренебрежении соударениями (бесстолкновительная плазма) предельные формулы (14,35) справедливы без учета теплового движения (формально при $T = 0$) при условиях:

$$\omega \ll \Omega_H, \quad \frac{\omega_0^2}{\omega_H\Omega_H} \gg 1, \quad \frac{\omega_H\Omega_H\cos^2\alpha}{\omega^2} \gg 1. \qquad (14,37)$$

В свете изложенного представляется довольно естественным, что о магнитогидродинамических волнах часто говорят не только в области применимости магнитной гидродинамики, но и всегда, когда справедливы формулы (14,35), например при $\nu_{\text{эфф}} = 0$, $\alpha = \pi/2$ и соблюдении неравенств (14,37).

Углы α, близкие к $\pi/2$. «Гибридные» резонансы. Остановимся теперь на области углов α, близких к $\pi/2$.

Если $\alpha = \pi/2$, формула (14,28) при любых значениях других параметров дает

$$(n-i\varkappa)_1^2 = \frac{\varepsilon'^2_{xx}+\varepsilon'^2_{xy}}{\varepsilon'_{xx}}, \quad (n-i\varkappa)_2^2 = \varepsilon'_{zz}. \qquad (14,38)$$

Такой результат для $(n-i\varkappa)_2^2$ очевиден с самого начала, поскольку при $\alpha = \pi/2$ обыкновенная волна 2 в квазигидродинамическом приближении распространяется точно так же, как и при отсутствии магнитного поля (поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ в этом случае не влияет на движение частиц, так как их средние скорости параллельны полю). Для необыкновенной волны 1 из (14,38) в условиях (14,33) по-прежнему получается выражение (14,35), и, таким образом, углы $\alpha \to \pi/2$ для этой волны не являются исключительными. Для волны 2, напротив, согласно (14,35) при $\alpha = \pi/2$ получим $n_2^2 = \infty$ и $v_{\text{ф}2} = 0$, а согласно (14,38) и (14,33) имеем:

$$(n-i\varkappa)_2^2 = -\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega-i\nu)},$$

---

*) Для применимости же магнитной гидродинамики (уравнения (13,1) — (13,4)) возможность пренебречь током смещения, конечно, необходима.

и волна очень сильно затухает даже при $\nu = 0$. Подставляя значения (14,33) в (14,28), при условии

$$\cos^2\alpha \ll 1 \qquad (14,39)$$

получаем:

$$(n - i\varkappa)_2^2 = \frac{\omega_0^2}{(\omega_H \Omega_H \cos^2\alpha - \omega^2) - i\omega\nu}\,. \qquad (14,40)$$

Разумеется, при достаточном удалении от угла $\alpha = \pi/2$, когда соблюдается требование (14,34), формула (14,40) дает значение (14,35): $n_2^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_H \cdot \Omega_H \cos^2\alpha} = \frac{4\pi c^2 MN}{H^{(0)2}\cos^2\alpha}$. Если же $\alpha \to \pi/2$ (или, точнее, если нарушено условие (14,34)), то магнитогидродинамическое выражение (14,35), как сказано и видно из формулы (14,40), непригодно. При $\alpha \to \pi/2$ магнитная гидродинамика при бесконечной проводимости приводит к неверным результатам даже при сколь угодно малых ω и ν, потому что для обыкновенной волны при $\alpha = \pi/2$ векторное произведение $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}^{(0)}] = 0$. Таким образом, в магнитной гидродинамике при $\sigma \to \infty$ для рассматриваемой волны $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}^{(0)}] = 0$, и, следовательно, о волне может идти речь только при конечной проводимости или при учете тока смещения. Оба эти момента и учтены в выражении (14,40). Заметим также, что в области углов $\alpha \to \pi/2$ сильно изменяется и поляризация волны 2. Несколько подробнее распространение низкочастотных волн в области углов α, близких к $\pi/2$, рассмотрено в статье [177].

Остановимся теперь на распространении волн под углом $\alpha = \pi/2$ при произвольных частотах ω, причем для простоты пренебрежем столкновениями. Таким образом, будем использовать выражения (14,27а) и (14,38), которые дают

$$\tilde{n}_2^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

и

$$\tilde{n}_1^2 = 1 - \frac{\omega_0^2(\omega^2 - \omega_H\Omega_H)}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - \Omega_H^2)} - \frac{\omega_0^4\omega^2\omega_H^2}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - \Omega_H^2)\{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - \Omega_H^2) - \omega_0^2(\omega^2 - \omega_H\Omega_H)\}}\,. \qquad (14,38а)$$

Знаменатель у третьего члена в правой части обращается в нуль, в частности, при условии

$$\omega^4 - (\omega_0^2 + \omega_H^2)\,\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_H\Omega_H = 0, \qquad (14,38б)$$

$$\omega^2 = \omega_{\text{г},\,\pm}^2 \equiv \frac{\omega_0^2 + \omega_H^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2 + \omega_H^2)^2}{4} - \omega_0^2\omega_H\Omega_H},$$

где мы пренебрегаем Ω_H^2 по сравнению с ω_H^2 и $\omega_H\Omega_H$ по сравнению с ω_0^2. При $\omega^2 = \omega_{\text{г},\pm}^2$, очевидно, $\tilde{n}_1^2 = \infty$ и поэтому частоты $\omega_{\text{г},\pm}$ часто называются частотами «гибридного» резонанса. Выражение (14,38а) обращается в бесконечность (имеет полюс) также при $\omega^2 = \omega_H^2$ и $\omega^2 = \Omega_H^2$, но «гибридные» резонансы более интересны в том смысле, что могут лежать в области частот ω, где $\Omega_H^2 \ll \omega^2 \ll \omega_H^2 = \left(\frac{M}{m}\right)^2 \Omega_H^2$. Действительно,

$$(\omega_0^2+\omega_H^2)^2 \gg \omega_0^2\omega_H\Omega_H$$

и, следовательно,

$$\omega_{\text{г},+}^2 \approx \omega_0^2+\omega_H^2, \qquad \omega_{\text{г},-}^2 \approx \omega_H\Omega_H\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega_H^2}. \qquad (14,38в)$$

При $\omega_0^2 \gg \omega_H^2$ имеем $\omega_{\text{г},-} \approx \omega_H\Omega_H$, и именно частоту $\omega_{\text{г},-} = \sqrt{\omega_H\Omega_H}$ обычно называют «гибридной». Поскольку при $\omega = \omega_{\text{г},-}$ имеется полюс $\tilde{n}_1^2$ и $\omega_{\text{г},-} = \sqrt{\omega_H\Omega_H} \gg \Omega_H$, ясно, что в рассматриваемом случае при широко использованном выше условии $\omega \gg \Omega_H$ (условия (10,5), (14,1)) влиянием ионов пренебречь нельзя: это можно сделать лишь при условии

$$\omega \gg \sqrt{\omega_H\Omega_H} = \sqrt{\frac{M}{m}}\,\Omega_H. \qquad (14,38г)$$

В большинстве случаев, однако, условий (10,5), (14,1) достаточно для пренебрежения влиянием ионов. Так, даже при $\alpha = \pi/2$ к неравенству (14,38г) мы приходим лишь при $\omega_0^2 \gtrsim \omega_H^2$; если же $\alpha \neq \pi/2$, то область сильного влияния ионов обычно не превосходит частоту Ω_H (при $\alpha = 0$ это утверждение является строгим — оно очевидно из выражения (14,29); при $\alpha \neq 0$ частота ионного резонанса близка к Ω_H при указанном ниже условии (14,38и)).

Об области ионного гирорезонанса. Приведенные формулы позволяют составить весьма полное представление о распространении низкочастотных волн в плазме без молекул. Переход к «промежуточным» частотам не составляет труда: соответствующие результаты уже содержатся, по существу, в общей формуле (14,28). В качественном отношении важнейшей особенностью области частот $\omega \sim \Omega_H$ является появление ионного гирорезонанса. Наличие при $\alpha = 0$ резонанса на частоте $\omega = \Omega_H$ сразу ясно из формулы (14,29) для $(n - i\varkappa)_{1,2}^2$. В связи с использованием этой формулы (14,29) сделаем такое замечание. На первый взгляд кажется, что при пренебрежении малыми членами порядка $\frac{m}{M}$ в выражении для $(n - i\varkappa)^2$ можно всегда пренебречь частотой Ω_H по сравнению с ω_H. Это заключение, однако, неверно, что особенно ясно видно именно на примере формулы (14,29). Без пренебрежений знаменатель в этой формуле имеет вид:

$$(\omega \pm \omega_H)(\omega \mp \Omega_H) - i\omega\nu_{ei} = \omega^2 \pm \omega_H\omega \mp \omega\Omega_H - \omega_H\Omega_H - i\omega\nu_{ei};$$

при $\omega = \Omega_H$ и выборе верхнего знака (волна 2) это выражение равно $-i\omega\nu_{ei}$ (резонанс). Если же пренебречь членом $\omega\Omega_H$ по сравнению с $\omega\omega_H$, как это сделано при переходе к последнему выражению (14,29), то при $\omega = \Omega_H$ знаменатель равен $\Omega_H^2 - i\omega\nu_{ei}$, т. е. уже нет подлинного резонанса. Сказанное, конечно, совершенно элементарно и имеет целью только подчеркнуть необходимость проводить вычисления в «промежуточной» области частот с большей точностью, чем в низкочастотной области. В результате формулы становятся несколько более громоздкими. Здесь мы ограничимся обсуждением условий резонанса.

Из (14,28) очевидно, что $\tilde{n}_{1,2}^2 \rightarrow \infty$ (резонанс; поглощения не учитываем) при условии

$$\varepsilon_{xx}\sin^2\alpha + \varepsilon_{zz}\cos^2\alpha = 0. \qquad (14,38д)$$

После подстановки выражений (14,27а) это условие сводится к следующему уравнению для ω:

$$\omega^6 - \omega^4(\omega_H^2 + \omega_0^2) + \omega^2(\omega_H^2\Omega_H^2 + \omega_0^2\omega_H\Omega_H\sin^2\alpha + \\ + \omega_0^2\omega_H^2\cos^2\alpha) - \omega_0^2\omega_H^2\Omega_H^2\cos^2\alpha = 0, \qquad (14,38е)$$

где отброшены члены Ω_H^2 по сравнению с ω_H^2.

При $\Omega_H \rightarrow 0$ (формально это достигается для ионов с массой $M \rightarrow \infty$) уравнение (14,38е) переходит, конечно, в (12,2). Корни ω_∞^2 (см. (12,2а)) этого уравнения (12,2) обычно велики по сравнению с Ω_H^2. Уже отсюда ясно, что в реальных условиях, когда $\Omega_H = \frac{m}{M}\omega_H \ll \omega_H$, корни уравнения (14,38е), кроме особых случаев, либо велики, либо малы. Иными словами, за некоторыми исключениями, четыре корня уравнения (14,38е) находятся из уравнения

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_H^2 + \omega_0^2) + (\omega_H^2\Omega_H^2 + \omega_0^2\omega_H\Omega_H\sin^2\alpha + \omega_0^2\omega_H^2\cos^2\alpha) = 0, \qquad (14,38ж)$$

а два других корня равны

$$\omega_{\infty,\,5,\,6}^2 = \frac{\Omega_H^2}{1 + \dfrac{\Omega_H^2 + \dfrac{m}{M}\omega_0^2\sin^2\alpha}{\omega_0^2\cos^2\alpha}}. \qquad (14,38з)$$

Поскольку мы считаем, что $\omega \geqslant 0$, фактически здесь, конечно, имеется только один корень.

При условии

$$\omega_0^2\cos^2\alpha \gg \Omega_H^2 + \frac{m}{M}\omega_0^2\sin^2\alpha \tag{14,38и}$$

корни $\omega_{\infty,5,6} \approx \Omega_H^2$, что совпадает с условием резонанса при продольном распространении.

Условие (14,38и) обычно нарушается лишь при углах, весьма близких к углу $\alpha = \pi/2$. При $\alpha = \pi/2$ уравнение (14,38е), как это и должно быть, сводится к (14,38б), если пренебречь членами порядка Ω_H^2 по сравнению с ω_H^2 и членами порядка $\omega_H\Omega_H$ по сравнению с ω_0^2. Что же касается уравнения (14,38ж), то в условиях (14,38и) оно совпадает с (12,2). Несколько подробнее об области ионного гирорезонанса см. [5, 8, 72]. Представляет интерес также ход кривых $\tilde{n}^2(\omega)$ или $n(\omega)$ и $\varkappa(\omega)$ во всем интервале частот, т. е. и с учетом влияния ионов и в высокочастотном случае. Соответствующие графики можно найти, например, на стр. 25 статьи [72].

Учет влияния молекул. Формулы существенно усложняются и при учете влияния молекул. В этом последнем вопросе мы ограничимся здесь для иллюстрации только одним примером. Именно, при наличии молекул, когда тензор ε'_{ij} имеет вид (10,43), для продольного распространения формула (14,28) приводит к выражению [123]

$$(n-i\varkappa)^2_{1,2} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega\left\{\omega - i\nu_e \pm \omega_H - \dfrac{\omega_H\Omega_H\left(i\omega + \nu_{im}\dfrac{N}{N_m}\right)}{\omega\left[i\omega + \nu_{im}\dfrac{N+N_m}{N_m}\right]}\right\}}, \tag{14,41}$$

где $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{em}$ и учтено, что $M\nu_{im} \gg m\nu_{em}$ и $\nu_{em} \gg \nu_{im}$ (кроме того, в (14,41) использовано условие $M\nu_{im} \gg m\nu_{ei}$ и отброшены члены, которые вне области ионного гирорезонанса всегда малы по сравнению с выписанными членами). При низких частотах, когда соблюдаются неравенства

$$\Omega_H \gg \omega, \qquad \frac{N}{N_m}\Omega_H \gg \omega, \qquad \omega_H\Omega_H\frac{N}{N_m}\nu_{im} \gg \omega^2\nu_e,$$

из (14,41) получаем:

$$(n-i\varkappa)^2_{1,2} =$$

$$= 1 + \frac{4\pi c^2 MN\left[\omega^2 + \nu_{im}^2\dfrac{N(N+N_m)}{N_m^2}\right]}{\left(\omega^2 + \nu_{im}^2\dfrac{N^2}{N_m^2}\right)H^{(0)2}} - i\frac{4\pi c^2 MN\omega\nu_{im}}{\left(\omega^2 + \nu_{im}^2\dfrac{N^2}{N_m^2}\right)H^{(0)2}}. \tag{14,42}$$

В предельном случае, когда

$$\omega^2 \ll \nu_{im}^2 \frac{N^2}{N_m^2} = (\overline{q_{im} v_{im}} N)^2 \tag{14,43}$$

(q_{im} — эффективное сечение, v_{im} — относительная скорость), при пренебрежении относительно слабым затуханием из (14,42) получаем магнитогидродинамическое значение $n^2 = \frac{c^2}{v_ф^2} = \frac{4\pi\rho_0 c^2}{H^{(0)2}}$, так как плотность среды $\rho_M = \rho_0 = M(N + N_m)$.

В другом предельном случае

$$\omega^2 \gg \nu_{im}^2 \frac{N^2}{N_m^2} \tag{14,44}$$

получаем:

$$(n - i\varkappa)_{1,2}^2 = 1 + \frac{4\pi c^2 MN}{H^{(0)2}} \left(1 + \frac{\nu_{im}^2 N}{\omega^2 N_m}\right) - i\,\frac{4\pi c^2 MN\nu_{im}}{\omega H^{(0)2}} \approx$$
$$\approx \frac{4\pi c^2 MN}{H^{(0)2}} - i\,\frac{4\pi c^2 MN\nu_{im}}{\omega H^{(0)2}}, \tag{14,45}$$

где переход к последнему выражению предполагает, что

$$\frac{4\pi c^2 MN}{H^{(0)2}} \gg 1, \quad \frac{\nu_{im}^2 N}{\omega^2 N_m} \ll 1. \tag{14,46}$$

При пренебрежении затуханием, согласно (14,45), $n^2 = \frac{4\pi c^2 MN}{H^{(0)2}}$; этот результат может радикально отличаться от магнитогидродинамического значения $n^2 = \frac{4\pi c^2 M(N + N_m)}{H^{(0)2}}$ (другими словами, в случае (14,44), (14,46) и слабом затухании волна распространяется так, как если бы молекул совсем не было). При $q_{im} \sim 10^{-15}$ и $v_{im} \sim 10^5$ условие (14,43) принимает вид $\omega \ll 10^{-10} N$, что для земной ионосферы приводит к весьма сильному неравенству $\omega \ll 10^{-4}$, поскольку $N \leqslant 10^6$.

В противоположном случае (14,44) примем, например, что $\omega \sim 10$. Тогда получим

для F-слоя ($N \sim 10^6$, $N_m \sim 10^{10}$, $\nu_{im} \sim 1$, $H^{(0)} \sim 0{,}5$):

$$n \approx \sqrt{\frac{4\pi c^2 MN}{H^{(0)2}}} \sim 10^3, \quad v_ф = \frac{c}{n} \sim 3\cdot 10^7, \quad \lambda = \frac{2\pi v_ф}{\omega} \sim 200 \text{ км},$$
$$\varkappa \approx \frac{\nu_{im} n}{2\omega} \sim 50, \quad d = \frac{c}{\omega\varkappa} \sim 600 \text{ км};$$

для E-слоя ($N \sim 10^5$, $N_m \sim 10^{13} \div 10^{14}$, $\nu_{im} \sim 10^3 \div 10^4$):

$$n \approx \varkappa \approx \sqrt{\frac{2\pi c^2 MN\nu_{im}}{\omega H^{(0)2}}} \sim 1 \div 3\cdot 10^{-7} c \sim 3\cdot 10^3 \div 10^4,$$
$$v_ф \sim 3\cdot 10^6 \div 10^7, \quad d = \frac{c}{\omega\varkappa} \sim 3 \div 10 \text{ км}.$$

Учет теплового движения. Некоторые результаты кинетической теории (изменение скорости, затухание при отсутствии соударений). Скорость низкочастотных (магнитогидродинамических) волн в ряде случаев весьма мала. Например, как уже указывалось, в межзвездном пространстве при $H^{(0)} \sim 10^{-5}$ и $\rho_0 = MN \sim 10^{-21}$ *г/см*^{3} скорость $v_ф = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \sim 3 \cdot 10^6$; в солнечной короне при $H^{(0)} \sim 1$ и $\rho_0 \sim 10^{-16}$ имеем $v_ф \sim 10^8$. Тепловые скорости электронов в этих случаях порядка или больше $v_ф$, и поэтому может оказаться существенным учет теплового движения *).

При сохранении членов с давлением система уравнений (14,24)—(14,25) может быть использована для исследования распространения волн и с учетом теплового движения частиц. Однако, как и в высокочастотном случае (см. § 12), в квазигидродинамическом приближении не только отсутствует поглощение, не связанное с соударениями, но и нельзя придавать количественное значение зависящим от температуры поправкам к скорости волн. Поэтому квазигидродинамический метод в силу относительной простоты получающихся выражений интересен главным образом с точки зрения возможности проведения общего анализа формул для $n - i\varkappa$ в зависимости от разных параметров, вблизи резонанса и т. п. Поскольку мы не предполагаем здесь проводить такой анализ, остановимся сразу на результатах кинетической теории в применении к плазме без молекул и только для низкочастотного случая (14,2).

По своему характеру и технике расчеты в этом случае [178—180] (см. также [8, 94]) отличаются от обсуждавшихся в § 12 лишь использованием кинетического уравнения не только для электронов, но и для ионов. Величина тепловых поправок к скорости распространения и затухания магнитогидродинамических волн оказывается различной при $\alpha \to 0$ (продольное распространение), при $\alpha \to \pi/2$ (для обыкновенной волны) и при $0 < \alpha < \pi/2$. Случай $\alpha \to 0$ выделен потому, что обе волны 1 и 2 являются при этом поперечными; об особенностях, имеющих место при $\alpha \to \pi/2$

---

*) Учет влияния теплового движения, например, в случае изотропной плазмы (см. § 8) свидетельствует о том, что это влияние не может полностью определяться просто параметром $\frac{v_T}{v_ф} \sim \frac{\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\, n}{c}$. Вместе с тем как из результатов расчета, так и в связи с отмечавшейся в §§ 8, 12 ролью черенковского излучения ясно, что значение параметра $\frac{v_T}{v_ф}$ весьма существенно (достаточно сказать, что именно при $v_T \sim v_ф$ становится значительным поглощение волн, носящее характер обратного эффекта Вавилова — Черенкова; см. § 8).

для волны 2, мы уже говорили; поскольку волна 2 при $\alpha \to \pi/2$ сильно затухает уже без учета теплового движения, рассматривать сейчас эту задачу более полно представляется излишним.

При $\alpha = 0$ кинетический расчет [178] приводит в области слабого затухания ($\gamma \ll \omega$) и при отсутствии соударений к следующим выражениям для скоростей волн 1 и 2, которые поляризованы по кругу (с противоположными направлениями вращения электрического вектора)

$$\left.\begin{aligned} v_{\text{ф}1}^2 &= \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\left\{1+\frac{\varkappa T}{M\left(\frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\right)}\cdot\frac{\omega}{\Omega_H}\right\} \equiv v_0^2\left\{1+\frac{v_{iT}^2}{v_0^2}\frac{\omega}{\Omega_H}\right\}, \\ v_{\text{ф}2}^2 &= \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\left\{1-\frac{\varkappa T}{M\left(\frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\right)}\cdot\frac{\omega}{\Omega_H}\right\} \equiv v_0^2\left\{1-\frac{v_{iT}^2}{v_0^2}\frac{\omega}{\Omega_H}\right\}; \end{aligned}\right\} \quad (14,47)$$

здесь предполагается, что

$$\frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0} \ll c^2, \quad \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}} \ll \frac{\Omega_H \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}}{\omega}\sqrt{1 \pm \frac{\varkappa T}{M\left(\frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\right)}\frac{\omega}{\Omega_H}} \quad (14,48)$$

(знак плюс относится к необыкновенной волне 1 и знак минус — к обыкновенной волне 2). Условия (14,48) совместимы с соотношением $\frac{v_{iT}^2}{v_0^2}\frac{\omega}{\Omega_H} = \frac{\frac{\varkappa T}{M}}{\frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}}\frac{\omega}{\Omega_H} \sim 1$, и, таким образом, изменение скоростей $v_{\text{ф}1,2}$ за счет теплового движения может быть значительным уже в области применимости формул (14,47). Еще более важно то обстоятельство, что при учете теплового движения скорости $v_{\text{ф}1}$ и $v_{\text{ф}2}$ не равны друг другу и зависят от частоты. Поэтому будут иметь место поворот плоскости поляризации и изменение формы импульсов, образованных из низкочастотных волн с разными частотой и поляризацией.

Затухание поля в этих волнах со временем, происходящее по закону $e^{-\gamma t}$, определяется значениями:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \Omega_H \frac{v_{\text{ф}1}}{v_{iT}}\frac{\Omega_H}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(2-\frac{v_{iT}^2\omega}{v_{\text{ф}1}^2\Omega_H}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{v_{\text{ф}1}^2\Omega_H^2}{2v_{iT}^2\omega^2}\right\}, \\ \gamma_2 &= \Omega_H \frac{v_{\text{ф}2}}{v_{iT}}\frac{\Omega_H}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(2+\frac{v_{iT}^2\omega}{v_{\text{ф}2}^2\Omega_H}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{v_{\text{ф}2}^2\Omega_H^2}{2v_{iT}^2\omega^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (14,49)$$

Из (14,47) и (14,49) ясно, что при $\alpha = 0$ изменения скорости и затухания волн, обусловленные тепловым движением, определяются параметрами:

$$\xi = \frac{v_{iT}^2\omega}{v_0^2\Omega_H}, \quad \xi\frac{\omega}{\Omega_H} = \frac{v_{iT}^2}{v_0^2}\,\frac{\omega^2}{\Omega_H^2}. \tag{14,50}$$

Если $\xi \ll 1$, то и подавно $\xi\frac{\omega}{\Omega_H} \ll 1$, и тепловыми эффектами можно пренебречь. При этом $\xi \ll 1$ даже при $v_0 = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \sim v_{iT} = \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}}$, поскольку $\frac{\omega}{\Omega_H} \ll 1$. На этом примере, кстати сказать, ясно, что роль тепловых поправок не всегда определяется отношением $\frac{v_T}{v_\text{ф}}$, но может характеризоваться и значительно меньшей величиной: в данном случае параметром ξ в случае скорости и параметром $\xi\frac{\omega}{\Omega_H}$ в отношении затухания. В результате при $\alpha = 0$ влияние теплового движения на распространение поперечных низкочастотных волн в условиях, представляющих реальный интерес, оказывается весьма небольшим.

Положение, вообще говоря, изменяется при углах α, отличных от нуля, или, точнее, углах α, не слишком близких к нулю *). Приведем соответствующие результаты (см. [180], а также [179]), полученные в предположении, что

$$\left.\begin{aligned} &\omega \ll \Omega_H, \quad \frac{c^2k^2}{\omega^2} = n^2 \gg 1 \left(\text{т. е. } v_\text{ф}^2 = \frac{c^2}{n^2} \ll c^2\right), \\ &\frac{\varkappa T}{M}\frac{k^2}{\Omega_H^2}\sin^2\alpha = \frac{v_{iT}^2}{v_\text{ф}^2}\,\frac{\omega^2}{\Omega_H^2}\sin^2\alpha \ll 1. \end{aligned}\right\} \tag{14,51}$$

Если, кроме того,

$$v_\text{ф} = \frac{c}{n} \gg \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\cos\alpha, \tag{14,52}$$

для скоростей $v_{\text{ф}1}$ и $v_{\text{ф}2}$ получаются магнитогидродинамические значения (14,35); при этом для волны 2 предполагается выполненным также последнее условие (14,37), т. е. угол α не должен быть слишком близок к $\frac{\pi}{2}$ (как уже указывалось, область углов

---

*) Поглощение особенно мало при $\alpha \to 0$, потому что при $\alpha = 0$ обратное черенковское поглощение отсутствует (см. § 12), а резонансное поглощение на частотах ионного гирорезонанса $\omega \approx s\Omega_H$ ($s = 1, 2, 3, \ldots$), очевидно, здесь не рассматривается, поскольку используется условие $\omega \ll \Omega_H$.

Заметим также, что при $\alpha = 0$ волна 3 является продольной и сильно затухает при отсутствии достаточно большого числа соударений (см. § 8).

$\alpha \to \frac{\pi}{2}$ с точки зрения выяснения роли тепловых поправок интереса не представляет$\Big)$.

Декременты затухания в условиях (14,52) равны:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \omega \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, \beta_T n_1 \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\frac{m}{M} \exp\left\{-\frac{1}{2\beta_T^2 n_1^2\cos^2\alpha}\right\}, \\ \gamma_2 &= \omega \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, \frac{\sin^2\alpha}{(\beta_T n_2\cos\alpha)^3}\, \frac{m\omega^2}{M\cos^2\alpha\,\Omega_H^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\beta_T^2 n_2^2\cos^2\alpha}\right\}, \end{aligned}\right\} \qquad (14,53)$$

где $\beta_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{mc^2}}$ и опущены малые члены, в частности члены порядка значений (14,49) для $\gamma_{1,\,2}$ при $\alpha = 0$. По последней причине понятен тот факт, что по формулам (14,53) при $\alpha = 0$ декременты $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Согласно (14,52) формулы (14,53) справедливы лишь, пока $\beta_T n \cos\alpha \ll 1$, но для ориентировки их можно использовать и при $\beta_T n \cos\alpha \leqslant 1$. Даже в этом последнем случае, не говоря уже об области (14,52), γ_1 и γ_2 малы в том смысле, что всегда $\gamma_{1,2} \ll \omega$. Однако по своей величине значения γ_1 и γ_2 при $\beta_T n \cos\alpha \sim 1$ могут быть не так уже малы и, во всяком случае, не экспоненциально малы. При этом $\gamma_1 \gg \gamma_2$.

Мы видим, таким образом, что при $\alpha \sim 1$ условие заметного затухания имеет простой вид:

$$v_\text{ф} \sim v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}.$$

Но уже при $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ для волны 1, для которой приведенные формулы справедливы, затухание сильно ослабляется и не экспоненциально мало только при $v_\text{ф} \sim v_T \cos\alpha$.

Рассмотрим теперь область меньших скоростей волн, когда

$$\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\cos\alpha \gg v_\text{ф} \gg \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}}\cos\alpha. \qquad (14,54)$$

Тогда с точностью до членов порядка $\frac{\varkappa T}{M}$ включительно получим:

$$v_{\text{ф}1}^2 = \frac{c^2}{n_1^2} = \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0} + \frac{3\varkappa T}{M}\sin^2\alpha, \quad v_{\text{ф}2}^2 = \frac{c^2}{n_2^2} = \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\cos^2\alpha, \qquad (14,55)$$

где опущены малые (в условиях (14,51) и (14,54)) добавки порядка $\frac{\varkappa T}{M v_\text{ф}^2}\frac{\omega}{\Omega_H}$, фигурирующие в формулах (14,47). Далее, обозначая

$\frac{\varkappa T}{Mc^2}$ через β_i^2, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1 &= \omega\sqrt{\frac{\pi}{8}}\sin^2\alpha\left[\frac{\beta_i^2 n_1^2}{\beta_T n_1\cos\alpha}+\frac{5\beta_i n_1}{\cos\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2\beta_i^2 n_1^2\cos^2\alpha}\right\}\right],\\
\gamma_2 &= \omega\sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega^2}{\Omega_H^2}\left[\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\frac{3\omega^2}{\Omega_H^2}\cos^2\alpha}\right]\left[\frac{\beta_i^2 n_2^2}{\beta_T n_2\cos\alpha}+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\beta_T n_2(\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}\exp\left\{-\frac{1}{2\beta_i^2 n_2^2\cos^2\alpha}\right\}\right].
\end{aligned}\right\}\quad(14,56)$$

Одно из условий (14,54) означает, что $\beta_i n\cos\alpha \ll 1$, но для ориентировки формулами (14,56) можно пользоваться и при $\beta_i n\cos\alpha \sim 1$, т. е. при $v_ф \sim \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}}\cos\alpha$. В этом случае при $\alpha \sim 1$ затухание волны 1 является очень сильным ($\gamma \sim \omega$) и при уменьшении угла α ослабляется лишь за счет множителя $\sin^2\alpha$. Затухание волны 2 при $\alpha \sim 1$ примерно в $\frac{\omega^2}{\Omega_H^2}$ раз меньше затухания волны 1.

Как уже указывалось в §§ 8 и 12, при наличии помимо рассмотренного затухания $\gamma_0 = \gamma_{1,2}$ также слабого затухания $\gamma_{соуд}$, вызванного соударениями, полное затухание равно $\gamma = \gamma_0 + \gamma_{соуд}$, а затухание в пространстве будет $\mu = \frac{2\omega}{c}\varkappa = \frac{2\gamma}{v_{гр,\,k}}$, где $v_{гр,\,k}$ — проекция групповой скорости на направление волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Поэтому для выявления роли специфического затухания достаточно сравнить γ_0 с $\gamma_{соуд}$; при этом для оценок можно использовать значение $\gamma_{соуд}$ при $\alpha = 0$, поскольку зависимость этой части затухания от угла α в общем мало существенна.

Согласно (14,29), (14,30) и (14,32)

$$n_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_H\Omega_H}},\quad \frac{2\omega}{c}\varkappa = \frac{\omega}{c}n_{1,2}\frac{\omega\nu}{\omega_H\Omega_H}\quad\text{и}\quad \gamma_{соуд} = \frac{\omega^2\nu}{2\omega_H\Omega_H},$$

так как в данном случае $v_{гр,\,k} = \frac{c}{n}$.

В галактической «короне» при $H^{(0)} \sim 10^{-5}$ и концентрации протонов $N \sim 0{,}01$ имеем:

$$v_ф = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \sim 2\cdot 10^7,$$

в то время как

$$v_i = \sqrt{\frac{\varkappa T}{M_p}} \sim 10^6 \quad\text{и}\quad v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}} \sim 4\cdot 10^7$$

(при $T \sim 10^4$ градусов). Эти значения таковы, что при $\alpha \sim 1$ можно использовать формулы (14,56); например, при $v_\text{ф} = 7\cdot 10^6$, $v_i = 9\cdot 10^5$ и $\alpha = 45^\circ$ имеем $\gamma_1 = 1{,}3\cdot 10^{-3}\omega$ и $\frac{\omega}{c}\varkappa = \frac{\gamma k}{\omega} = \frac{1{,}3\cdot 10^{-3}\,2\pi}{\lambda} = \frac{8{,}2\cdot 10^{-3}}{\lambda}$. Такое затухание в несколько раз за время порядка сотен периодов или на пути в сотни длин волн может быть весьма существенным. Для волны 2 в тех же условиях затухание γ_2 значительно меньше в связи с наличием множителя $\frac{\omega^2}{\Omega_H^2}$ $\Big($при $\Omega_H \sim 0{,}1$, что имеет место для протонов в поле $H^{(0)} \sim 10^{-5}$, множитель $\frac{\omega^2}{\Omega_H^2} < 10^{-8}$ для частот $\omega < 10^{-5}\Big)$.

В то же время для межзвездной плазмы с плотностью $N \sim 0{,}1 - 0{,}01$ при $T \sim 10^4$ число соударений $\nu \sim 10^{-5}$—10^{-6} $\left(l = \frac{v}{\nu} \sim 10^{12} \div 10^{13}\ \textit{см}\right)$ и $\gamma_\text{соуд} = \frac{\omega^2\nu}{2\omega_H\Omega_H} \sim 10^{-7}\omega^2$, т. е. при $\omega \sim 10^{-5}$ на девять порядков меньше значения γ_1 (см. выше), но сравнимо с γ_2.

В нижней части солнечной короны при $N \sim 10^8$, $H^{(0)} \sim 10$ *эрст* и $T \sim 10^6$ получаем $v_\text{ф} = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \sim 3\cdot 10^8$, где $v_T \sim 4\cdot 10^8$ и $v_i \sim 10^7$. В данном случае в известной области углов $v_\text{ф} \sim v_T \cos\alpha$ и для оценок используем формулы (14,53). В результате $\gamma_1 \sim \frac{m}{M}\,\omega \sim 10^{-3}\omega$ и $\gamma_2 \sim \left(\frac{\omega}{\Omega_H}\right)^2 \gamma_1$, в то время как $\gamma_\text{соуд} \sim 10^{-12}\omega^2$, поскольку $\nu \sim 10$, $\omega_H \sim 10^8$; даже при $\omega \sim 0{,}1\,\Omega_H \sim 10^4$ получаем $\gamma_1 \sim 10$, $\gamma_2 \sim 0{,}1$ и $\gamma_\text{соуд} \sim 10^{-4}$. В более глубоких областях Солнца и других звезд скорость магнитогидродинамических волн уменьшается в связи с ростом плотности и, например, при $H^{(0)} \sim 10$ и $\rho_0 \sim 10^{-5}$ фазовая скорость равна $v_\text{ф} = \sqrt{\frac{H^{(0)}}{4\pi\rho_0}} \sim 10^3$; в то же время при $T \sim 10^5$ скорость равна $v_i = \sqrt{\frac{\varkappa T}{M}} \sim 3\cdot 10^5$ и, следовательно, $v_\text{ф} \ll v_i$. Последний случай количественно не рассчитан, но в подобных условиях, вероятно, затухание еще сильнее, чем в случае (14,54). При этом, вообще говоря, $\gamma_1 \gg \gamma_2$ и при достаточно малых частотах $\gamma_\text{соуд} \ll \gamma_1$.

Приведенные примеры выбраны довольно произвольно: их цель состоит лишь в том, чтобы продемонстрировать необходимость помнить о возможной роли не связанного с соударениями затухания низкочастотных волн. Такое затухание может быть тем интереснее, что оно весьма различно для обыкновенной и необыкновенной волн и довольно сильно зависит от ряда параметров, в частности от угла α между полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и волновым вектором $\boldsymbol{k}$.

§ 15. Сводка основных формул

Распространение волн в магнитоактивной плазме отличается многообразием различных частных случаев, в которых значительно упрощаются общие весьма громоздкие выражения для показателей преломления и других величин. По этой причине, а также для справочных целей приведем здесь ряд важнейших формул.

В высокочастотном случае, когда

$$\omega \gg \Omega_H = \frac{|e|\,H^{(0)}}{Mc}, \tag{10,5}$$

ролью ионов можно обычно пренебречь, и тензор ε'_{ij} имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy} = 1 - \frac{\omega_0^2\,(\omega - i\nu_{\text{эфф}})}{\omega\,[(\omega - i\nu_{\text{эфф}})^2 - \omega_H^2]}, \quad \varepsilon'_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega\,(\omega - i\nu_{\text{эфф}})},\\ &\varepsilon'_{xy} = -\varepsilon'_{yx} = -i\,\frac{\omega_0^2\omega_H}{\omega\,(\omega + \omega_H - i\nu_{\text{эфф}})\,(\omega - \omega_H - i\nu_{\text{эфф}})},\\ &\varepsilon'_{xx} \mp i\varepsilon'_{xy} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \mp \omega\omega_H - i\omega\nu_{\text{эфф}}}, \quad \varepsilon'_{xz} = \varepsilon'_{zx} = \varepsilon'_{yz} = \varepsilon'_{zy} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{10,12}$$

здесь ось z совпадает с направлением внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$, $\omega_H = \frac{|e|\,H^{(0)}}{mc} = 1{,}76\cdot 10^7\,H^{(0)}$. При отсутствии поглощения нужно в (10,12) положить $\nu_{\text{эфф}} = 0$; при этом $\sigma_{ij} = 0$ и $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}$. В координатной системе, изображенной на рис. 10,1, компоненты тензора ε'_{ij} определяются выражениями (10,17). Вопрос о вычислении $\nu_{\text{эфф}}$ (или при кинетическом подходе о нахождении тензоров ε_{ij} и σ_{ij} в зависимости от $\nu_{\text{эфф}}$) освещен в § 10 (см. в особенности выражения (10,32)). При учете движения не только электронов, но и ионов имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon'_{xx} \mp i\varepsilon'_{xy} = 1 - \frac{\omega_0^2}{(\omega \mp \omega_H)\,(\omega \pm \Omega_H) - i\omega\nu_{ei}},\\ &\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy}, \quad \varepsilon'_{xy} = -\varepsilon'_{yx}, \quad \varepsilon'_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega\,(\omega - i\nu_{\text{эфф}})} \end{aligned}\right\} \tag{10,44}$$

(остальные компоненты равны нулю), где молекулы считаются отсутствующими (чистая электронно-ионная плазма; ν_{ei} — эффективное число соударений электрона с ионами). При наличии молекул тензор ε'_{ij} определяется формулой (10,43).

Волновое уравнение для волн, распространяющихся в магнитоактивной плазме, таково:

$$\Delta\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\boldsymbol{D} - i\,\frac{4\pi}{\omega}\,\boldsymbol{j}\right) = 0, \quad D_i - i\,\frac{4\pi}{\omega}\,j_i = \varepsilon'_{ij}E_j. \tag{11,1}$$

Это уравнение имеет такой же вид, разумеется, и в других средах, и конкретизация среды определяется выбором тензора ε'_{ij}.

В используемой системе координат с волновым вектором $\boldsymbol{k}$, направленным по оси z (см. рис. 11,1), для плоских волн имеем:

$$\frac{d^2E_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(AE_x+iCE_y)=0,\quad \frac{d^2E_y}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(-iCE_x+BE_y)=0, \tag{11,3}$$

$$\begin{aligned}E_z=&-\frac{i\sqrt{u}\,(1-is)\,v\sin\alpha}{(1-is)\,u-(1-is)^2(1-is-v)-uv\cos^2\alpha}E_x+\\&+\frac{uv\cos\alpha\sin\alpha}{(1-is)\,u-(1-is)^2(1-is-v)-uv\cos^2\alpha}E_y,\end{aligned} \tag{10,20}$$

$$\sqrt{u}=\frac{\omega_H}{\omega}=\frac{|e|\,H^{(0)}}{mc\omega},\quad v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}=\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2},\quad s=\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}, \tag{10,18}$$

где коэффициенты A, B и C, зависящие от u, v, s и α, определяются выражениями (10,22) (см. также (10,23) — (10,25) и (11,3)).

Подстановка в (11,3) решения в виде $E_{xy}=E_{0xy}e^{-i\frac{\omega}{c}(n-i\varkappa)z}$ приводит к уравнениям (11,2а) и (11,4); отсюда в общем случае $(n-i\varkappa)^2_{1,2}$ определяется формулой (11,5) а при отсутствии поглощения

$$\begin{aligned}\tilde{n}^2_{1,2}&=(n-i\varkappa)^2_{1,2}=\\&=1-\frac{2v\,(1-v)}{2\,(1-v)-u\sin^2\alpha\pm\sqrt{u^2\sin^4\alpha+4u\,(1-v)^2\cos^2\alpha}}=\\&=1-\frac{2\omega_0^2\,(\omega^2-\omega_0^2)}{2\,(\omega^2-\omega_0^2)\,\omega^2-\omega_H^2\omega^2\sin^2\alpha\pm\sqrt{\omega^4\omega_H^4\sin^4\alpha+4\omega_H^2\omega^2\,(\omega^2-\omega_0^2)^2\cos^2\alpha}}.\end{aligned} \tag{11,6}$$

Знак (+) отвечает здесь обыкновенной волне 2 и знак (—) отвечает необыкновенной волне 1.

При $H^{(0)}=0$ (изотропная плазма)

$$(n-i\varkappa)^2_{1,2}=(n-i\varkappa)^2_0=1-\frac{v}{1-is}=1-\frac{\omega_0^2}{\omega\,(\omega-i\nu_{\text{эфф}})}. \tag{11,7}$$

При $\alpha=0$ (продольное распространение)

$$(n-i\varkappa)^2_{1,2}\equiv(n-i\varkappa)^2_{\mp}=1-\frac{v}{1-is\pm\sqrt{u}}, \tag{11,8}$$

или при отсутствии поглощения $\left(\text{при } s=\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}=0\right)$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{n}_1^2 &\equiv \tilde{n}_+^2 = 1-\frac{v}{1-\sqrt{u}} = 1-\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega-\omega_H)},\\ \tilde{n}_2^2 &\equiv \tilde{n}_-^2 = 1-\frac{v}{1+\sqrt{u}} = 1-\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega+\omega_H)}.\end{aligned}\right\}\qquad(11,9)$$

При $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (поперечное распространение)

$$\left.\begin{aligned}(n-i\varkappa)_1^2 &= 1-\frac{v(1-is-v)}{(1-is)^2-u-(1-is)v},\\ (n-i\varkappa)_2^2 &= (n-i\varkappa)_0^2 = 1-\frac{v}{1-is}.\end{aligned}\right\}\qquad(11,14)$$

В предельном случае, когда

$$u\cos^2\alpha=\frac{\omega_H^2}{\omega^2}\cos^2\alpha\gg 1,\quad v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\gg 1,\quad \omega_0\gg\omega_H,\quad \omega\gg\Omega_H,\qquad(11,23)$$

имеем:

$$\tilde{n}_2^2\approx\frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha},\quad \tilde{n}_1^2\approx-\frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha}.\qquad(11,24)$$

Эта формула для n_2 применяется, например, при изучении распространения в ионосфере свистящих атмосфериков.

При всех $\alpha\neq 0$ имеем: $\tilde{n}_2^2=0$ при $v_{20}=1$, а $\tilde{n}_1^2=0$ при $v_{10}^{(\pm)}=1\pm\sqrt{u}$; если $u<1$, то показатель $\tilde{n}_2$ в бесконечность не обращается, но $\tilde{n}_1^2(v_{1\infty})=\infty$ при $v_{1\infty}=\frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha}$. В области, где $u>1$ и $u\cos^2\alpha<1$, функции $\tilde{n}_{1,2}^2(v)$ полюсов не имеют; при $u>1$ и $u\cos^2\alpha>1$ функция $\tilde{n}_1^2(v)$ не имеет полюса, но $\tilde{n}_2^2(v_{2\infty})=\infty$ при $v_{2\infty}=\frac{u-1}{u\cos^2\alpha-1}$.

Поляризация нормальных волн 1 и 2 (необыкновенной и обыкновенной) определяется соотношением

$$\frac{E_{y1,2}}{E_{x1,2}}=K_{1,2}=-i\,\frac{2\sqrt{u}\,(1-v)\cos\alpha}{u\sin^2\alpha\mp\sqrt{u^2\sin^4\alpha+4u(1-v)^2\cos^2\alpha}}\qquad(11,26)$$

или при наличии поглощения — формулой (11,25); компонента $E_{z1,2}$ находится с помощью связи (10,20).

При $v=1$ и критическом числе соударений $\nu_{\text{эфф, к}}$, причем

$$s_{\text{к}}=\frac{\nu_{\text{эфф, к}}}{\omega}=\frac{\omega_H\sin^2\alpha}{2\omega\cos\alpha}=\frac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2\cos\alpha},\qquad(11,41)$$

дисперсионное уравнение имеет существенный кратный корень для вещественной частоты $\omega = \omega_0$.

При учете теплового движения электронов плазмы дисперсионное уравнение при данном ω имеет три корня $(n - i\varkappa)^2_{1,2,3}$. Появление корня $\tilde{n}_3^2$ тесно связано с плазменной волной, распространяющейся в изотропной плазме. Весь этот вопрос подробно освещен в § 12. Здесь отметим лишь, что третий корень $\tilde{n}_3^2$ не слишком велик и его нахождение представляет интерес только в окрестности точки $v_{1,2\infty}$, где $\tilde{n}_1^2$ или $\tilde{n}_2^2$ стремятся к бесконечности при пренебрежении поглощением и тепловым движением. Точка $v_{1,2\infty}$ или соответствующая частота ω_∞ определяются соотношениями (см. также выше):

$$1 - u - v_\infty + uv_\infty \cos^2\alpha = 0, \quad v_\infty = \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2} = \frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha}, \tag{12,2}$$

$$\omega_\infty^2 = \frac{\omega_0^2+\omega_H^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2+\omega_H^2)^2}{4} - \omega_0^2\omega_H^2\cos^2\alpha}. \tag{12,2a}$$

В области больших значений $n_3^2 \gg n_{1,2}^2$ для нахождения n_3^2 можно пользоваться формулой (12,54). В общем случае при соблюдении условий (12,14а) и (12,50) величины $\tilde{n}^2_{1,2,3}$ находятся из уравнения (12,52). Приводить здесь это уравнение, а также другие формулы из § 12 не будем, поскольку изложение в этом параграфе уже само носило характер сводки результатов, касающихся влияния теплового движения на значеиия $\tilde{n}^2_{1,2,3}$ и величину не связанного с соударениями затухания. Помимо области вблизи точки $v_{1,2\infty}$, учет теплового движения существен вблизи частот $\omega = \omega_H$, $\omega = 2\omega_H$, $\omega = 3\omega_H$ и т. д., а также для обыкновенной волны в области частот $\omega \ll \omega_H$, $\omega \ll \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}$ (эта область частот интересна, например, при исследовании свистящих атмосфериков).

В § 13 приведены основные уравнения магнитной гидродинамики, а также квазигидродинамические уравнения для плазмы, содержащей молекулы. Там же рассмотрен вопрос о связи между скоростью движения ионизированной компоненты плазмы $\boldsymbol{v}_p$, средней скоростью всей плазмы $\boldsymbol{v}$ и электрическим полем $\boldsymbol{E}$ (предполагается, что $N_m \gg N$, как это имеет место в земной ионосфере).

В области низких частот, когда

$$\omega \ll \Omega_H = \frac{|e|\, H^{(0)}}{Mc},$$

распространение волн в плазме обязательно должно проводиться при учете движения ионов (§ 14).

Если применимо приближение магнитной гидродинамики, то при отсутствии диссипации ($\sigma \to \infty$, вязкостью и теплопроводностью пренебрегаем) в каждом направлении распространяются три волны с фазовыми скоростями (α — угол между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)}$, ρ_0 — невозмущенная волной плотность плазмы, u_0 — адиабатическая скорость звука в данной среде):

$$v_{\text{ф}2} = \frac{H^{(0)} \cos\alpha}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \tag{14,7}$$

$$v_{\text{ф}1,3}^2 = \frac{1}{2}\left(u_0^2 + \frac{H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{u_0^4 + \frac{H^{(0)4}}{(4\pi\rho_0)^2} - 2\frac{u_0^2 H^{(0)2}}{4\pi\rho_0}\cos 2\alpha}. \tag{14,10}$$

В предельных случаях

$$\zeta = \frac{u_0}{\dfrac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}} \gg 1: \quad v_{\text{ф}1} \approx u_0, \quad v_{\text{ф}3} \approx \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}};$$

$$\zeta = \frac{u_0}{\dfrac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}} \ll 1: \quad v_{\text{ф}1} \approx \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad v_{\text{ф}3} \approx u_0 \cos\alpha.$$

В § 14 приведены также связи между различными величинами в магнитогидродинамических волнах и показатели поглощения этих волн, зависящие от электропроводности σ и коэффициентов вязкости (см. (14,21) — (14,23)). Выражение для $(n - i\varkappa)^2$ при учете движения ионов получено не только в магнитогидродинамической области, но и для более общего случая распространения волн в среде с тензором ε'_{ij}, определяемым согласно (10,44). Соответствующую общую формулу (14,28) для $(n - i\varkappa)_{1,2}$ приводить здесь не будем. При продольном распространении ($\alpha = 0$)

$$(n - i\varkappa)_{1,2}^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega\left(\omega - i\nu \pm \omega_H - \dfrac{\omega_H \Omega_H}{\omega}\right)}. \tag{14,29}$$

Отсюда при высоких частотах ($\omega \gg \Omega_H$) получается формула (11,8). Если же

$$\omega \ll \Omega_H, \quad \omega\nu \ll \omega_H \Omega_H, \quad \frac{\omega_0^2}{\omega_H \Omega_H} \gg 1, \quad (14,30) \text{ и } (14,32)$$

то из (14,29) получается магнитогидродинамическая формула

$$v_{\text{ф}1,2} = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi M N}} = \frac{H^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \tag{14,31}$$

При $\alpha \neq 0$, условиях (14,30), (14,32) и условии

$$\frac{\omega_H \Omega_H \cos^2 \alpha}{\omega \sqrt{\omega^2 + \nu^2}} \gg 1 \qquad (14,34)$$

из общего выражения (14,28) следуют магнитогидродинамические формулы для случая $u_0 = 0$ (тепловое движение здесь не учитывается, что формально как раз эквивалентно использованию равной нулю скорости звука u_0). Таким образом, полученные при $\sigma \to \infty$ магнитогидродинамические формулы для $v_{\text{ф}1,\,2}$ оказываются справедливыми и вне общих пределов применимости магнитной гидродинамики (13,7). Подробнее об этом см. § 14, где обсуждаются также следующие вопросы: особый случай, когда $\alpha \to \pi/2$ и условие (14,34) не выполняется; появление «гибридного» резонанса и вообще область ионного гирорезонанса; распространение низкочастотных волн в плазме с молекулами (случай $\alpha = 0$; (14,41) — (14,45)); влияние на распространение низкочастотных (магнитогидродинамических) волн теплового движения (см. формулу (14,47) и дальше).

Глава IV

Распространение волн в неоднородной изотропной среде (плазме)

§ 16. Введение. Приближение геометрической оптики

Волновые уравнения. Плоскослоистая среда. При распространении электромагнитных волн в изотропной неоднородной среде (в частности, в плазме) поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ должны удовлетворять волновым уравнениям (2,23) и (2,24):

$$\Delta\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(\omega, \boldsymbol{r})\boldsymbol{E} = 0, \tag{16,1}$$

$$\Delta\boldsymbol{H} + \frac{1}{\varepsilon'(\omega, \boldsymbol{r})}[\operatorname{grad}\varepsilon'(\omega, \boldsymbol{r})\operatorname{rot}\boldsymbol{H}] + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(\omega, \boldsymbol{r})\boldsymbol{H} = 0. \tag{16,2}$$

Разумеется, решать нужно лишь одно из этих уравнений, поскольку, зная $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$, найти другое поле (т. е. $\boldsymbol{H}$ или $\boldsymbol{E}$) можно сразу же с помощью уравнений поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{i\omega}{c}\varepsilon'\boldsymbol{E}$ или $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H}$. Вместе с тем полезно иметь в виду оба уравнения (16,1) и (16,2), так как в зависимости от характера задачи более удобным для исследования может оказаться или первое или второе из них (см. § 19).

Распространение волн в неоднородных средах отличается исключительно большим разнообразием возможностей, что в первую очередь связано с различным выбором функций $\varepsilon'(\omega, \boldsymbol{r})$. Поэтому необходимо поставить задачу более конкретно, например, считая среду плоскослоистой или сферически слоистой; в первом случае $\varepsilon' = \varepsilon'(\omega, z)$, а во втором $\varepsilon' = \varepsilon'(\omega, R)$, где R — расстояние от некоторого центра. Ниже мы будем иметь дело почти исключительно с важнейшим случаем плоскослоистой среды. Распространение волн в средах, свойства которых постоянны на сферических или цилиндрических поверхностях, во многих отношениях сходно с распространением в плоскослоистой среде (о распространении в сферически слоистой среде см. §§ 34, 36).

Распространение волн в плоскослоистой среде целесообразно рассматривать сначала для важного частного случая нормального падения волны на слой неоднородной среды. В этом случае поля $\boldsymbol{E}$

и $\boldsymbol{H}$ зависят лишь от координаты z, и уравнение (16,1) для $\boldsymbol{E}$ принимает вид:

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(\omega, z)E=0, \qquad (16,3)$$

где под E можно понимать любую из компонент E_x или E_y. Компоненту E_z считаем равной нулю, что при нормальном падении автоматически следует из уравнения (16,1) при $\varepsilon'(\omega, z)\neq 0$; если же $\varepsilon'(\omega, z)=0$, то могут существовать плазменные волны с $E_z\neq 0$, но они при нормальном падении в используемом линейном приближении совершенно независимы от поперечных волн, удовлетворяющих уравнению (16,3). Уравнения (16,1) — (16,3) совпадают с уравнениями (2,23), (2,24), (2,26), но для удобства они выписаны здесь еще раз.

В случае наклонного падения задача о распространении волн в плоскослоистой среде сводится к задаче о нормальном падении (см. § 19), если не говорить об одном исключительном случае (см. §§ 19, 20).

Уравнение типа (16,3) встречается также в акустике и вообще в теории распространения волн любого типа. В частности, в квантовой механике волновое уравнение Шредингера для одномерного движения таково:

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(W-V(z))\Psi=0,$$

где Ψ — волновая функция, $\hbar = 1{,}05\cdot 10^{-27}$ *эрг·сек* —квантовая постоянная, m—масса частицы, W — энергия частицы и $V(z)$ — потенциальная энергия.

Строгие решения для плоскослоистой среды. Математические результаты, относящиеся к уравнению (16,3), в связи со сказанным имеют непосредственное отношение к акустическим, квантовомеханическим и другим задачам. Понятно поэтому, что исследованию уравнения типа (16,3) посвящено большое число работ. Поскольку при произвольной функции $\varepsilon'(\omega, z)$ это уравнение не имеет решения, которое можно записать через известные функции, приобретают значительный интерес те частные случаи, когда имеется такая возможность. Так, в очень важном случае линейного слоя $\varepsilon' = a + bz$ решение уравнения (16,3) выражается через функции Бесселя порядка $^1/_3$ или функции Эйри [181—184]. Для параболического слоя $\varepsilon' = a + bz^2$ решение выражается в функциях параболического цилиндра (функциях Вебера) [182, 185]. Если ε' имеет вид $\varepsilon' = a+\frac{e^{\gamma z}[b(e^{\gamma z}+1)+c]}{(e^{\gamma z}+1)^2}$ (здесь, как и в двух предыдущих случаях, a, b, c и γ — некоторые комплексные постоянные), то уравнение (16,3) приводится к гипергеометрическому и его решение исследовано [186, 187].

В бесселевых функциях выражается [188, 189] решение для слоя $\varepsilon' = (a + bz)^m$ с целым m (при $m = -2$ решением является степенная функция). Известны решения [190, 191] также для некоторых других функций $\varepsilon'(z)$. Некоторые из перечисленных решений приводятся и обсуждаются также в монографиях [192, 193].

О приближенных решениях. Все эти точные решения в своей совокупности позволяют составить представление о распространении и отражении волн от слоев самого разнообразного профиля. Соответствующие точные решения и вопрос об их использовании будут рассмотрены в §§ 17, 18, а также в гл. V.

Не меньший интерес имеет, однако, проблема приближенного решения уравнения типа (16,3). Во-первых, это связано с тем, что приближенные решения могут быть получены для произвольной в широких пределах функции $\varepsilon'(\omega, z)$. Во-вторых, методы приближенного решения простейшего уравнения (16,3) могут обычно быть перенесены на более сложные случаи (например, на неоднородную магнитоактивную плазму), когда точные решения задачи либо вообще неизвестны, либо малоэффективны с точки зрения их практического использования.

Важнейший приближенный метод решения волновых уравнений, и в частности уравнения (16,3), основан на использовании приближения геометрической оптики; этот же метод и родственный ему в квантовой механике часто называют квазиклассическим или методом Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (ВКБ-метод). Метод геометрической оптики позволяет найти хорошее приближение к точному решению уравнения, если свойства среды достаточно медленно изменяются с расстоянием. В случае плазмы, например в ионосфере или в солнечной короне, соответствующее условие медленности изменения свойств среды обычно хорошо выполняется.

Приближение геометрической оптики. Отправным пунктом для нахождения приближения геометрической оптики является решение уравнения (16,3) для однородной среды, т. е. при $\varepsilon' = \varepsilon'(\omega)$; это решение таково:

$$E = E_0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'}\, z} = E_0 e^{\pm \frac{\omega}{c} \varkappa z}\, e^{\pm i \frac{\omega}{c} n z}. \qquad (16,4)$$

Если среда неоднородна, но на длине электромагнитной волны свойства среды меняются мало, то распространение волн в небольшой области очень близко к распространению в однородной среде с показателями преломления и поглощения, соответствующими данному участку неоднородной среды. Другими словами, распространение в неоднородной среде должно быть примерно таким же, как в однородной среде с меняющейся диэлектрической проницаемостью. Последнее означает, что решение должно в основном иметь вид (16,4) с заменой

$$\sqrt{\varepsilon'}z=(n-i\varkappa)z \quad \text{на} \quad \int\sqrt{\varepsilon'}\,dz=\int(n-i\varkappa)\,dz.$$

Условие медленности изменения свойств среды на длине волны выполнено, если соблюдается неравенство

$$\frac{d\varepsilon}{dz}\lambda\ll\varepsilon; \qquad (16,5)$$

здесь $\lambda=\frac{\lambda_0}{n}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}}$ — длина волны в среде ($\lambda_0=\frac{2\pi c}{\omega}$ — длина волны в вакууме) и для простоты поглощение предполагается отсутствующим.

Указанные соображения приводят к выражению

$$E=E_0e^{\pm i\frac{\omega}{c}\int\sqrt{\varepsilon'}\,dz}, \quad E_0=\mathrm{const},$$

в то время как при условии (16,5) можно легко получить еще лучшее приближение к точному решению уравнения (16,3). Для этой цели можно применить два метода. Первый из них, менее строгий, состоит в том, что ищется решение уравнения (16,3) в виде:

$$E(z)=E_0(z)\,e^{-i\frac{\omega}{c}\Psi(z)}, \qquad (16,6)$$

где $E_0(z)$ и $\Psi(z)$ — подлежащие определению медленно меняющиеся функции z.

Подставляя (16,6) в (16,3), имеем:

$$E_0''-2i\frac{\omega}{c}\Psi'E_0'-i\frac{\omega}{c}\Psi''E_0+\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon'-(\Psi')^2)E_0=0. \qquad (16,7)$$

Здесь штрихи над E_0 и Ψ означают дифференцирование по z (штрих над ε имеет другой смысл, что после настоящей оговорки не должно повести к недоразумению).

Медленность изменения поля, грубо говоря, означает, что $E_0(z)$ и $\Psi'(z)$ заметно меняются только на некотором характерном расстоянии $L\gg\lambda_0$. Поэтому в (16,7) $E_0'\sim\frac{E_0}{L}$, $E_0''\sim\frac{E_0}{L^2}$, $\Psi''\sim\frac{\Psi'}{L}$ и, следовательно, если умножить все уравнение на $\frac{c^2}{\omega^2}=\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}$, ясно, что первый член порядка $\frac{c^2}{\omega^2}E_0''\sim\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2L^2}E_0$, второй и третий члены, в сумме равные $-2i\frac{c}{\omega}\Psi'E_0'-i\frac{c}{\omega}\Psi''E_0$, порядка $\frac{\lambda_0}{2\pi L}\Psi'E_0$ и последний член $(\varepsilon' - (\Psi')^2) E_0$ от $\frac{\lambda}{2\pi L}$ не зависит. Приближенное решение уравнения можно найти, приравнивая нулю отдельно выражения разных порядков, т. е. выражения, содержащие множители $\frac{\omega^2}{c^2}$ и $\frac{\omega}{c}$ в (16,7).

Таким образом, находим:

$$(\varepsilon' - (\Psi')^2) E_0 = 0, \quad E_0' + \frac{\Psi''}{2\Psi'} E_0 = 0. \tag{16,8}$$

Первое из этих равенств приводит к соотношению

$$\varepsilon' = (\Psi')^2, \quad \Psi = \pm \int_{z_0}^{z} \sqrt{\varepsilon'(z)}\, dz = \pm \int_{z_0}^{z} [n(z) - i\varkappa(z)]\, dz, \tag{16,9}$$

где z_0 — некоторая постоянная.

Выражение (16,9) определяет фазу поля в (16,6) в полном согласии со сказанным выше о необходимости замены в решении (16,4) фазы $\pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} z$ интегралом $\pm i \frac{\omega}{c} \int \sqrt{\varepsilon'(z)}\, dz$.

Второе из уравнений (16,8) имеет решение

$$E_0(z) = \frac{C}{\sqrt{\Psi'}} = \frac{C}{\sqrt[4]{\varepsilon'(z)}} = \frac{C}{\sqrt{n(z) - i\varkappa(z)}}, \tag{16,10}$$

где C — постоянная.

Таким образом, решение уравнения (16,3) в приближении геометрической оптики таково:

$$E(z) = \frac{C}{\sqrt[4]{\varepsilon'(z)}} e^{\pm i \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^{z} \sqrt{\varepsilon'}\, dz} =$$

$$= \frac{C}{\sqrt{n(z) - i\varkappa(z)}} e^{\pm \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^{z} \varkappa(z)\, dz \pm i \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^{z} n(z)\, dz}. \tag{16,11}$$

В приближении геометрической оптики волны, распространяющиеся в обоих направлениях (знаки ± в (16,11)), очевидно, совершенно независимы, так же как это имеет место в случае однородной среды. Можно поэтому сказать, что общее решение в приближении геометрической оптики имеет вид

$$E(z) = \frac{C_+}{\sqrt[4]{\varepsilon'(z)}} e^{+i \frac{\omega}{c} \int_{z_{0+}}^{z_0} \sqrt{\varepsilon'(z)}\, dz} + \frac{C_-}{\sqrt[4]{\varepsilon'(z)}} e^{-i \frac{\omega}{c} \int_{z_{0-}}^{z} \sqrt{\varepsilon'(z)}\, dz} \tag{16,12}$$

и зависит от двух произвольных комплексных постоянных C_+

и C_-, поскольку любое изменение постоянных z_{0+} и z_{0-} может быть сведено к соответствующему изменению величин C_+ и C_-.

Соблюдение равенств (16,8) обеспечивает обращение в (16,7) в нуль всех членов, кроме E_0''. Поэтому решение (16,11) — (16,12) может оказаться действительно приближающимся к истинному решению только, если, подставляя его в (16,7), окажется, что член E_0'' меньше всех других. Таким образом, для справедливости приближения естественно потребовать, чтобы член E_0'' был значительно меньше каждого из членов в (16,7), содержащих множитель $\frac{\omega}{c}$, т. е. чтобы соблюдалось неравенство

$$|E_0''| \ll \frac{\omega}{c} |\Psi'' E_0| \sim \frac{\omega}{c} |\Psi' E_0'|. \tag{16,13}$$

Подставляя сюда выражения (16,9) и (16,10), получаем условие применимости приближения геометрической оптики в виде:

$$\left| -\frac{\Psi'''}{2\Psi'} + \frac{3}{4} \frac{(\Psi'')^2}{(\Psi')^2} \right| \ll \frac{2\pi |\Psi''|}{\lambda_0};$$

это неравенство будет заведомо выполнено, если соблюдаются неравенства ($\Psi' = n - i\varkappa$):

$$\frac{\lambda_0 \sqrt{(n')^2 + (\varkappa')^2}}{2\pi (n^2 + \varkappa^2)} \ll 1, \quad \frac{\lambda_0 \sqrt{(n'')^2 + (\varkappa'')^2}}{2\pi \sqrt{n^2 + \varkappa^2} \sqrt{(n')^2 + (\varkappa')^2}} \ll 1, \tag{16,14}$$

или при отсутствии поглощения неравенства

$$\frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{|n'|}{|n^2|} \ll 1, \quad \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{|n''|}{|nn'|} \ll 1 \tag{16,15}$$

$\left(\text{здесь } n' = \frac{dn}{dz} \text{ и т. д.}\right)$.

Легко видеть, что при соблюдении неравенств (16,14) и (16,15) заведомо соблюдается также неравенство

$$|E_0''| \ll \frac{\omega^2}{c^2} (\Psi')^2 E_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' E_0,$$

т. е. член E_0'' действительно много меньше всех других членов в уравнении (16,7).

Заметим, что первое из условий (16,15) практически совпадает с (16,5), так как $\varepsilon = n^2$ и $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$. В (16,14)—(16,15) входит не λ_0, а $\text{ƛ}_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi}$; это является общим для всей теории электромагнитных волн — истинным параметром служит именно $\text{ƛ}_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{c}{\omega}$, а не λ_0. В силу экспоненциального характера ряда выражений теории это отличие, вообще говоря, существенно.

Условие (16,5) или первое неравенство (16,15) можно также записать в виде $\left(\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$:

$$\frac{d\lambda}{dz} \ll 2\pi, \text{ т. е. } \frac{d\bar{\lambda}}{dz} \ll 1. \tag{16,16}$$

Приведенный способ нахождения приближения геометрической оптики и условий его применимости не может считаться вполне удовлетворительным, так как основан на оценке и пренебрежении различными членами в исходном уравнении (16,3). Между тем небольшой член в уравнении может сильно сказаться на решении, и единственным вполне законным методом является пренебрежение малыми членами в решении, а не в уравнении.

Более строгое рассмотрение того же вопроса. Найдем поэтому приближенное решение другим, значительно более корректным путем, для чего представим решение уравнения (16,3) в виде:

$$E(z) = \left(E_{(0)} + \frac{c}{\omega} E_{(1)} + \frac{c^2}{\omega^2} E_{(2)} + \ldots\right) e^{-i\frac{\omega}{c}\Psi(z)}, \tag{16,17}$$

где Ψ, $E_{(0)}$, $E_{(1)}$ и т. д. — неизвестные функции от z.

Подставляя (16,17) в (16,3), получаем уравнение типа

$$A\frac{\omega^2}{c^2} + B\frac{\omega}{c} + C + D\frac{c}{\omega} + F\frac{c^2}{\omega^2} + \ldots = 0,$$

где A, B, C, ... — некоторые выражения, содержащие $E_{(i)}$, Ψ и их производные. Поскольку приведенное равенство должно иметь место при всех значениях $\frac{\omega}{c}$, оно выполняется только, если $A = B = C = D = F = \ldots = 0$. Таким образом, после несложных вычислений, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &[\varepsilon' - (\Psi')^2]\, E_{(0)} = 0, \\ &E'_{(0)} + \frac{\Psi''}{2\Psi'} E_{(0)} = 0, \\ &E'_{(1)} + \frac{\Psi''}{2\Psi'} E_{(1)} = \frac{E''_{(0)}}{2i\Psi'} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{16,18}$$

Решение первых двух уравнений совпадает соответственно с (16,9) и (16,10). Решение уравнения для $E_{(1)}$ таково $\left(\Psi' = \sqrt{\varepsilon'}\right)$:

$$E_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\Psi'}} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{E''_{(0)}}{2i\sqrt{\Psi'}}\, dz = \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon'(z)}} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{E''_{(0)}\, dz}{2i\sqrt[4]{\varepsilon'(z)}}, \tag{16,19}$$

где мы ограничиваемся вынужденным решением, так как решение однородного уравнения для $E_{(1)}$ имеет такой же вид, как и решение уравнения для $E_{(0)}$.

Приближение геометрической оптики *), как ясно из предыдущего, применимо, если в (16,17) можно ограничиться первым членом, т. е.

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\,|E_{(1)}| \ll |E_{(0)}|, \qquad (16,20)$$

причем предполагается, что более высокие члены все меньше $E_{(1)}$.

Условие (16,20) в силу (16,19) имеет интегральный характер; мы ограничимся нахождением более сильных неравенств, выполнение которых лишь достаточно для соблюдения неравенства (16,20).

Полагая для простоты $\varepsilon' = \varepsilon = n^2 > 0$ и учитывая, что в этом случае $E_{(0)} = \frac{c}{\sqrt{\Psi'}} = \frac{c}{\sqrt{n}}$, мы, согласно (16,19), имеем:

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{E_{(1)}}{E_{(0)}} = \frac{\lambda_0}{2\pi}\int\limits_{z_0}^{z}\left[\frac{3}{8i}\frac{\left(\frac{dn}{dz}\right)^2}{n^3} - \frac{1}{4i}\frac{\frac{d^2n}{dz^2}}{n^2}\right]dz =$$

$$= -\left[\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\frac{dn}{dz}}{4in^2}\right]_{z_0}^{z} - \frac{\lambda_0}{16i\pi}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\left(\frac{dn}{dz}\right)^2}{n^3}\,dz =$$

$$= -\left[\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\frac{dn}{dz}}{4in^2}\right]_{z_0}^{z} - \frac{\lambda_0}{16i\pi}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\frac{dn}{dz}}{n^2}\,d(\ln n). \qquad (16,21)$$

Допустим теперь, что функция $n(z)$ является монотонной на всем интервале (z_0, z). Тогда оба сомножителя в последнем интеграле, стоящем в (16,21), всегда одного знака и

$$\int\limits_{z_0}^{z}\frac{1}{n^3}\left(\frac{dn}{dz}\right)^2 dz = \int\limits_{z_0}^{z}\frac{1}{n^2}\frac{dn}{dz}\,d(\ln n) \leqslant \left(\frac{1}{n^2}\frac{dn}{dz}\right)_{\max}\ln\frac{n(z)}{n(z_0)},$$

где индекс max означает, что берется максимальное значение на интервале (z_0, z) (при преобразовании предположено, что рассматриваемый интеграл положительный, иначе при оценке в соответствующем месте нужно поставить знак минус). Из сказанного ясно, что для соблюдения интересующего нас неравенства $\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{|E_{(1)}|}{|E_{(0)}|} \ll 1$ достаточно, чтобы на всем интервале

---

*) Точнее, речь идет о первом приближении геометрической оптики. Поскольку, однако, высшие приближения обычно не применяются $\left(\text{если } \frac{\lambda_0}{L} \text{ близко к единице, ряд (16,17) сходится плохо}\right)$, условие применимости геометрической оптики можно отождествить с условием справедливости рассматриваемого первого приближения.

соблюдалось условие

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\left|\frac{dn}{dz}\right|}{|n^2|} \ll 1 \qquad (16{,}22)$$

и значения $\left|\ln\frac{n(z)}{n(z_0)}\right|$ или просто $|(\ln n)|_{\max}$ не были очень велики. Последнее требование представляется обычно совершенно несущественным; поэтому достаточное условие для применимости приближения геометрической оптики и записано в виде (16,22), а не непосредственно в форме $\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|\frac{\frac{dn}{dz}}{n^2}\ln n\right| \ll 1$. Условие (16,22) совпадает с первым из неравенств (16,15); второе неравенство (16,15), накладывающее ограничение на значение производной $\frac{d^2n}{dz^2} \equiv n''$, оказывается, таким образом, для справедливости приближения геометрической оптики излишним. Однако, как будет выяснено в конце настоящего параграфа, отсутствие скачков $\frac{dn}{dz}$ $\left(\text{или, что то же, больших значений } \frac{d^2n}{dz^2}\right)$ весьма желательно для того, чтобы поправка к решению геометрической оптики была не только мала, но и очень мала.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что условие (16,22) является лишь достаточным, но не необходимым, так как исходное условие (16,20) носит интегральный характер (см. (16,19)). Более существенно, что при получении достаточного условия (16,22) функция $n(z)$ предполагалась монотонной. Для исследований распространения волн в плазме такое предположение часто вполне допустимо (вопроса об отражении волн от хаотических неоднородностей мы здесь не касаемся). Если функция $n(z)$ не монотонна [например, если она имеет вид $n(z) = 1 + a\cos(\Omega z)$], то интегральное условие (16,20), вообще говоря, не сводится к дифференциальному условию типа (16,22) и отношение $\frac{E_{(1)}}{E_{(0)}}$ может расти с увеличением проходимого волной пути, т. е. разности $z - z_0$ *).

---

*) Например, если $n = 1 + a\cos\Omega z$, где $|a| \ll 1$, то при отбрасывании осциллирующего члена имеем

$$\frac{E_{(1)}}{E_{(0)}} \sim a^2\Omega^2(z - z_0).$$

Аналогичный результат получается при наличии статистических неоднородностей (см. [194]). Из (16,21) сразу можно получить достаточное условие малости отношения $\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|\frac{E_{(1)}}{E_{(0)}}\right|$ в виде неравенства (16,22) и одновременно условия $\left|\left(\frac{dn}{dz}\right)^2 n^{-3}\right|_{\max}\cdot\frac{\lambda_0}{16\pi}(z - z_0) \ll 1$, где $(z - z_0)$ — путь, проходимый волной.

Заметим также, что выше не было проявлено тщательности при использовании в неравенствах модулей величин $E_{(0)}$, $E_{(1)}$ и т. д. Строго говоря, при использовании модулей нужно было бы записать неравенства также для фаз соответствующих выражений. Мы не делали этого потому, что в условиях плазмы поглощение обычно является с точки зрения характера распространения волн вторичным эффектом (поглощение слабо). В результате можно, как это и сделано в (16,21), ограничиться случаем отсутствия поглощения, когда при $\varepsilon > 0$ величины $E_{(0)}$ и Ψ' вещественны. Поэтому в неравенствах нужно лишь следить за тем, чтобы входящие выражения были одного знака. Именно потому в (16,15) и (16,22) фигурируют абсолютные значения, иначе левая часть неравенств может быть отрицательной, и они потеряют свой подлинный смысл.

Случаи, когда приближение геометрической оптики неприменимо. Полное внутреннее отражение. Условие применимости приближения геометрической оптики (16,22) не соблюдается в двух случаях: если имеется достаточно резкий градиент n (т. е. производная $\frac{dn}{dz}$ велика) или если показатель преломления n достаточно мал *).

В разреженной плазме резкие градиенты могут иметь место лишь как спорадическое явление; при регулярном же, сглаженном ходе $\varepsilon(z)$ свойства среды ничтожно мало изменяются на расстояниях порядка длин волн, относящихся к радиодиапазону. Так, в ионосферном E-слое показатель преломления $n(z)$ обычно меняется для отражающихся от слоя волн на величину порядка единицы на пути ~ 10 *км* и, таким образом, $\frac{dn}{dz} \sim 10^{-6}$; в F-слое $\frac{dn}{dz} \sim 10^{-7}$. При $\lambda_0 = 6 \cdot 10^4$ *см* $= 600$ *м* условие (16,22) для E-слоя принимает поэтому вид $n^2 \gg 10^{-2}$. Для F-слоя при $\lambda_0 = 6 \cdot 10^3$ *см* соответственно имеем $n^2 \gg 10^{-4}$. Таким образом, геометрическая оптика в этих случаях будет неприменима лишь при малом n. В солнечной короне средние градиенты n еще значительно меньше, чем в земной ионосфере. Поэтому, если речь идет о радиодиапазоне, для плазмы типично несоблюдение геометрической оптики не при больших $\frac{dn}{dz}$, а в области малых значений n.

При отсутствии поглощения для плазмы (см. (3,5))

$$\varepsilon = n^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} = 1 - 3{,}18 \cdot 10^9 \frac{N(z)}{\omega^2}, \qquad (16{,}23)$$

и при достаточно большом $N(z)$ или при достаточно малой частоте

---

*) Поскольку речь идет об одном условии (16,22), выделение двух указанных случаев, конечно, условно. Вместе с тем оно удобно и, по сути дела, оправдано.

ω квадрат показателя преломления n^2 обращается в нуль. Во всех других средах область $\varepsilon \approx 0$ имеет несравненно меньшее значение, так как концентрация $N(z)$ фактически изменяется в несравненно более узких пределах, чем в газовой плазме; кроме того, во всех средах, кроме плазмы, обычно нельзя пренебрегать поглощением, в силу чего значения $\varepsilon \leqslant 0$ уже не столь специфичны, как при отсутствии поглощения.

Выше мы имели, очевидно, в виду распространение волн с фиксированной частотой ω. В этом случае, действительно, значение $\varepsilon \approx 0$ достигается лишь при специальном подборе параметров и конкретно при $\omega \approx \omega_0$. Приходится, однако, встречаться и с другой постановкой вопроса, когда электромагнитное поле обладает широким спектром частот. Теоретически такой случай проще всего реализовать при распространении достаточно узких (в пространственном отношении) импульсов электромагнитных волн. Практически же с широким спектром чаще приходится иметь дело, когда речь идет о движении в среде различных заряженных частиц,— при Фурье-разложении поля движущегося заряда мы сталкиваемся с волнами, зависимость которых от времени определяется фактором $e^{-i\boldsymbol{kv}t}$ (см. § 12). Если заряд движется равномерно, то $\boldsymbol{v} = \mathrm{const}$ и в задаче фигурируют все частоты $\omega = \boldsymbol{kv}$, отличающиеся различными значениями $\boldsymbol{k}$. В подобных случаях, конечно, равенство $\omega \approx \omega_0$ или лучше $\varepsilon(\omega) \approx 0$ осуществить уже не так трудно.

Более того, именно область значений $\varepsilon(\omega) \approx 0$ вносит существенный вклад в так называемые ионизационные потери, имеющие место при прохождении заряженных частиц через вещество (см., например, [3,12]). Интересно, что при сравнительно слабом поглощении и учете квантования потери, связанные с возбуждением плазменных волн с частотой ω_0, имеют дискретный характер — они осуществляются порциями, равными $\hbar\omega_0$ (очевидно, $\hbar\omega_0$ это энергия плазмона; подробнее см. [3,13, 23—25, 89, 90]). С продольными (плазменными) волнами в твердом теле приходится сталкиваться не только при исследовании потерь энергии, но и в ряде других случаев (см. указанную выше литературу, а также [10]).

Таким образом, если вопрос ставится широко, то область $\varepsilon(\omega) \approx 0$ представляет большой интерес не только для газовой плазмы, но в физике твердого тела. То, что действительно специфично именно для газовой плазмы, так это возможность реализации сильно неоднородной среды, в которой значение $\varepsilon(\omega) = 0$ может достигаться за счет изменения электронной концентрации N. Как раз эту сторону дела мы и подчеркнули выше в связи с формулой (16,23).

Неприменимость геометрической оптики при малом n имеет ясный физический смысл. Дело в том, что для справедливости геометрикооптического приближения нужно, чтобы свойства среды мало менялись на длине волн в среде λ. Но $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ и при $n \to 0$, очевидно, $\lambda \to \infty$, вследствие чего даже при плавном ходе $n(z)$ изменения n с расстоянием становятся существенными.

Выше уже указывалось, что в приближении геометрической оптики волны, бегущие вверх и вниз, совершенно независимы. Поэтому отражение волн может происходить лишь в областях, где геометрическая оптика неприменима. При отсутствии поглощения в соответствии с этим утверждением, в приближении геометрической оптики поток энергии $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]$ в бегущей волне после усреднения по времени постоянен (не зависит от z). В самом деле, для волны, распространяющейся вдоль оси z, согласно (16,11), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E}_0}{\sqrt{n(z)}}\, e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n(z)\,dz\right)}, \quad E_z = 0,\\
&\boldsymbol{H} = \frac{ic}{\omega}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E},\\
&H_x = -\frac{ic}{\omega}\frac{dE_y}{dz} = \left[-\sqrt{n} + \frac{ic}{\omega}\frac{\frac{dn}{dz}}{n^{3/2}}\right] E_{0y} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n\,dz\right)},\\
&H_y = \frac{ic}{\omega}\frac{dE_x}{dz} = \left[\sqrt{n} - \frac{ic}{2\omega}\frac{\frac{dn}{dz}}{n^{3/2}}\right] E_{0x} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n\,dz\right)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (16{,}24)$$

Из условия применимости геометрикооптического приближения (16,22) ясно, что в этом приближении члены, содержащие $\frac{dn}{dz}$, пренебрежимо малы. Таким образом, в приближении геометрической оптики

$$S = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2\left(\omega t - \int\limits_0^z n\,dz\right) \text{ и } \overline{S} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 = \text{const}.$$

Впрочем, если сохранить члены с $\frac{dn}{dz}$, то средний по времени поток энергии $\overline{S}$ по-прежнему равен $\frac{c}{8\pi}E_0^2 = \text{const}$, так как упомянутые малые члены в выражении для $\boldsymbol{H}$ сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно основного члена.

Итак, отражение волн должно происходить тем сильнее, чем менее точным является приближение геометрической оптики. В частности, отражение имеет место при наличии резких градиентов n, причем коэффициент отражения не слишком мал только, когда переходная область от одного значения n к другому порядка $\frac{\lambda_0}{2\pi}$ и меньше. В пределе при стремлении толщины переходной области к нулю (граница раздела) получаются известные формулы Френеля (см. § 18).

От области, где $n = 0$, также имеется отражение. Это отражение при отсутствии поглощения является полным, если только за точкой $\varepsilon = n^2 = 0$, со стороны отрицательных значений ε, концентрация электронов продолжает возрастать на значительном расстоянии $\left(\text{расстоянии, много большем } \frac{\lambda_0}{2\pi}\right)$. Физически наличие полного отражения ясно из того, что в области, где $\varepsilon < 0$, волна затухает. В этой области $n = 0$, $\varkappa = \sqrt{|\varepsilon|}$, $E = E_0 e^{-\frac{\omega}{c}\int\sqrt{|\varepsilon|}dz}$ и на сравнительно небольшом расстоянии за точкой $\varepsilon = 0$ поле практически равно нулю (если производная $\frac{d\varepsilon}{dz}$ не слишком мала). Поскольку, далее, поглощение энергии по предположению отсутствует ($\sigma = 0$), ясно, что вся энергия должна отразиться от слоя, так что образуется стоячая волна.

Об отражении радиоволн от ионосферы. Приведенные соображения объясняют тот фундаментальный факт, что радиоволны могут полностью отражаться от ионосферы и аналогичных слоев неоднородной плазмы даже при нормальном падении. Это отражение аналогично полному внутреннему отражению в оптике. Действительно, согласно закону преломления углы падения и преломления волны, падающей на границу раздела, связаны соотношением

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где θ_1 и θ_2 — углы падения и преломления, а n_1 и n_2 — показатели преломления первой и второй сред (угол θ_1 относится к среде 1). Если $n_1 > n_2$, то для углов $\theta_1 \geqslant \arcsin\frac{n_2}{n_1}$ имеет место полное внутреннее отражение (так как при этом $\sin\theta_2$ формально больше единицы). При нормальном падении ($\theta_1 = 0$) полное внутреннее отражение возможно лишь, когда $n_2 = 0$, что как раз и может иметь место в плазме (отсутствие резкой границы раздела в данном случае несущественно).

Для плавной среды о точке отражения в буквальном смысле этого слова говорить нельзя, так как отражение происходит в некоторой области. Однако несколько условно за точку отражения можно считать то место, где $\varepsilon = n^2 = 0$, поскольку за этой точкой в глубь слоя поле быстро убывает и обычно может не учитываться (см. подробнее гл. VI).

Согласно (16,23) в точке отражения

$$N = \frac{m\omega^2}{4\pi e^2} = \frac{\omega^2}{3{,}18\cdot 10^9} = 1{,}24\cdot 10^{-8} f^2. \tag{16,25}$$

Формула (16,25) является одним из основных соотношений, используемых при интерпретации ионосферных данных, а также при радиоастрономических исследованиях солнечной атмосферы и в ряде других случаев.

Вопрос об отражении радиоволн от ионосферы более подробно обсуждается в гл. VI, которая тесно примыкает к настоящей главе IV и содержит ряд сведений, относящихся не только к конкретной задаче об отражении волн от ионосферы, но и ко всей проблеме распространения волн в неоднородной среде. Радиоастрономические вопросы разбираются в гл. VII.

Совершенно неотражающий слой. Отсутствие резких градиентов n или области, где $n = 0$, обеспечивает отсутствие сильного отражения волн. Однако и в этих условиях в произвольной неоднородной среде, вообще говоря, имеется некоторое слабое отражение волн (малость этого отражения гарантируется самими условиями применимости геометрической оптики). В общем можно сказать, что чем функция $\varepsilon(z)$ более гладкая и плавная, тем отражение меньше. Отражение полностью отсутствует только в однородной среде, а также в неоднородной среде со специального вида зависимостью $\varepsilon(z)$.

Так, отражение полностью отсутствует для сред, в которых решения типа (16,11), т. е. решения

$$E = \frac{E_0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz}}{\sqrt{f(z)}}, \tag{16,26}$$

являются точными решениями волнового уравнения [195]. Действительно, выше было показано (см. (16,24)), что для таких решений при вещественном $f(z)$ средний поток энергии не зависит от z и, таким образом, отражение отсутствует. С другой стороны, нетрудно найти такую функцию $\varepsilon'(z)$ в волновом уравнении (16,3), чтобы решение (16,26) было точным. Именно непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что функция (16,26) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2E}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(z)E=0,\quad \varepsilon'(z)=f^2(z)+\frac{c^2}{2\omega^2}\left[\frac{\frac{d^2f}{dz^2}}{f}-\frac{3}{2}\frac{\left(\frac{df}{dz}\right)^2}{f^2}\right]. \tag{16,27}$$

Любопытно, что требование вещественности f, необходимое для отсутствия поглощения, еще не гарантирует положительности $\varepsilon(z)$ (при f вещественном, разумеется, $\varepsilon'(z)$ вещественно и равно $\varepsilon(z)$). Таким образом, и при наличии области, где $\varepsilon(z)<0$, волна может не отражаться в отличие от ситуации, имеющей место в приближении геометрической оптики.

Как будет показано в § 19, отражение волн от слоя при наклонном падении в простейшем случае определяется уравнением типа (16,3), но с заменой $\varepsilon'(z)$ на

$$\varepsilon'(z)\,[1-\sin^2\theta(z)]=(\varepsilon'(z)-\sin^2\theta_0),$$

где $\sqrt{\varepsilon'(z)}\sin\theta(z)=\sin\theta_0$ (θ_0 — угол падения волны из вакуума на слой, в начале которого $\sqrt{\varepsilon'}=1$). Из (16,26) — (16,27) ясно, что слой можно сделать неотражающим путем выбора функции $\varepsilon'(z)$ при заданной функции $f(z)$, вообще говоря, только для одного значения угла падения θ_0, а не одновременно для целого набора значений θ_0.

Слабое отражение от слоя. Интерполяционная формула для $|R|$ в случае произвольного слоя. В некоторых случаях представляет интерес то слабое отражение волн, которое имеется в условиях, когда первое приближение геометрической оптики является хорошим приближением к точному решению. Для решения такой задачи представим решение волнового уравнения (16,3) при отсутствии поглощения в виде:

$$E(z)=\frac{E_0}{\sqrt{n(z)}}e^{-i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z}n(z)\,dz}+E_1(z)e^{+i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z}n(z)\,dz},\quad |E_1|\ll\left|\frac{E_0}{\sqrt{n}}\right|. \tag{16,28}$$

Неравенство $|E_1|\ll\left|\frac{E_0}{\sqrt{n}}\right|$ как раз и гарантирует, очевидно, справедливость в первом приближении геометрикооптического решения, которое выбрано в виде волны, бегущей вдоль оси z.

Функцию $E_1(z)$ и амплитудный коэффициент отражения R найдем методом теории возмущений. Именно, подставляя (16,28) в (16,3) с $\varepsilon'=\varepsilon(z)=n^2(z)$, получаем уравнение

$$\frac{dE_1}{dz}+\frac{\frac{dn}{dz}}{2n}E_1=-\frac{ic}{\omega n}\frac{d}{dz}\left(\frac{\frac{dn}{dz}}{4n^{3/2}}\right)E_0e^{-2i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z}n\,dz}\equiv\chi(z), \tag{16,29}$$

где приближение состоит в пренебрежении членом $\frac{d^2E_1}{dz^2}$. Интегрируя уравнение (16,29), получаем:

$$E_1(z) = -\frac{1}{\sqrt{n(z)}}\int_{z_1}^{z}\sqrt{n(z)}\,\chi\,dz = -\frac{icE_0}{4\omega\sqrt{n}}\int_{z_1}^{z}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{d}{dz}\left(\frac{\frac{dn}{dz}}{n^{3/2}}\right)e^{-2i\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z} n\,dz}\,dz =$$

$$= -\frac{ic\,E_0}{4\omega\sqrt{n(z)}}\left[\frac{\frac{dn}{dz}}{n^2}\,e^{-2i\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z} n\,dz}\right]_{z_1}^{z} +$$

$$+\frac{E_0}{\sqrt{n}}\int_{z_1}^{z}\frac{\frac{dn}{dz}}{2n}\,e^{-2i\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z} n\,dz}\,dz - \frac{icE_0}{8\omega\sqrt{n}}\int_{z_1}^{z}\frac{\left(\frac{dn}{dz}\right)^2}{n^3}\,e^{-2i\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z} n\,dz}\,dz, \quad (16,30)$$

где z_0 и z_1 — произвольные постоянные.

Несколько конкретизируя постановку задачи, будем теперь считать, что за слоем (при $z \to \infty$) среда однородна и имеется только проходящая волна, а поле нас интересует при значениях z, лежащих перед слоем, где среда также однородна ($n = \text{const}$). Именно такие граничные условия и осуществляются при падении волны на слой со стороны отрицательных значений z и отсутствии волны, падающей на слой с противоположной стороны. В таких условиях $E_1(z \to \infty) = 0$ и в (16,30) нужно положить $z_1 = \infty$, $\left(\frac{dn}{dz}\right)_{z_1} = 0$. Далее, в рассматриваемой области перед неоднородным слоем $\frac{dn}{dz} = 0$. Таким образом, в последнем выражении (16,30) первый член равен нулю, а третий член в силу условия (16,22) значительно меньше второго и

$$\left.\begin{aligned} E_1(z) &\approx -\frac{E_0}{\sqrt{n}}\int_{z}^{\infty}\frac{\frac{dn}{dz}}{2n}\,e^{-2i\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z} n\,dz}\,dz,\\ R &\approx \frac{E_1 e^{i\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z} n\,dz}}{\frac{E_0}{\sqrt{n}}\,e^{-i\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z} n\,dz}} = -e^{2i\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z} n\,dz}\int_{z}^{\infty}\frac{\frac{dn}{dz}}{2n}\,e^{-2i\frac{\omega}{c}\int_{z_0}^{z} n\,dz}\,dz. \end{aligned}\right\} \quad (16,31)$$

Это выражение совпадает с приведенным в § 17 книги [192], где оно получено другим, несколько более громоздким методом, пригодным вместе с тем и при сильном отражении.

Нужно сказать, что выражение (16,31) не всегда удобно, и иногда выгоднее использовать для R более общую формулу, получающуюся из (16,30):

$$R=\frac{E_1 e^{i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n\,dz}}{\frac{E_0}{\sqrt{n}}\, e^{-i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n\,dz}}=-\frac{i\lambda_0 e^{2i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n\,dz}}{8\pi}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{d}{dz}\left(\frac{\frac{dn}{dz}}{n^{3/2}}\right)e^{-2i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n\,dz}\,dz. \tag{16,32}$$

Согласно (16,31)

$$|R|=\left|\int\limits_a^b \frac{1}{2n}\frac{dn}{dz}e^{-2i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n(z)\,dz}\,dz\right|,\quad |R|\ll 1, \tag{16,31а}$$

где считаем слой расположенным в области $a \leqslant z \leqslant b$ (при $z < a$ и $z > b$ среда, по предположению, является однородной и, кроме того, в области $z > b$ имеется лишь прошедшая волна, распространяющаяся в направлении больших значений z).

Представляет интерес обобщить формулу (16,31а), отказавшись и от предположения о малости $|R|$ и от использования в первом приближении геометрикооптического выражения для поля. Решить эту задачу точно и для произвольной функции было бы почти эквивалентно нахождению строгого решения волнового уравнения (16,3) для произвольной функции $\varepsilon(z)$. Последнее невозможно, в связи с чем представляют интерес, с одной стороны, строгие решения для некоторых определенных функций $\varepsilon(z)$ и, с другой стороны, приближенное вычисление $|R|$. О строгих решениях уравнения (16,3) речь пойдет в следующем § 17. Сейчас же укажем на такое приближенное выражение (см. [196]):

$$|R|=\operatorname{th}\left|\int\limits_a^b \frac{1}{2n}\frac{dn}{dz}e^{-2i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n(z)\,dz}\,dz\right|, \tag{16,31б}$$

где условия задачи такие же, как и оговоренные после формулы (16,31а).

При $|R| \ll 1$ формула (16,31б) переходит в (16,31а). Пусть теперь $n(a)=n_1$, $n(b)=n_2$ и слой является резким, или, точнее, $n_{\max}(b-a) \ll \frac{c}{2\omega}=\frac{\lambda_0}{4\pi}$, где $n_{\max}$ — максимальное значение n

в пределах слоя. Тогда в (16,31б) можно положить

$$e^{-2i\frac{\omega}{c}\int n\,dz} = 1 \quad \text{и} \quad R = \operatorname{th}\left|\ln\sqrt{\frac{n_2}{n_1}}\right| = \left|\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right|,$$

т. е. получаем формулу Френеля. Таким образом, формула (16,31б) в двух предельных случаях приводит к правильному результату. В промежуточных случаях формула (16,31б) неточна, но может применяться [196] в качестве довольно простого интерполяционного выражения; к сожалению, точность этого выражения в общем виде еще не выяснена.

Отражение от скачка производной $\frac{dn}{dz}$. В качестве интересного и важного примера применения формулы (16,32) рассмотрим отражение волн от скачка производной $\frac{dn}{dz}$. Скачок $\left(\text{граница разрыва величины } \frac{dn}{dz}\right)$ должен быть, как это ясно из физических соображений, эквивалентен резкому изменению $\frac{dn}{dz}$ на расстоянии, малом по сравнению с длиной $\frac{c}{\omega} = \frac{\lambda_0}{2\pi}$. В области такого изменения $\frac{dn}{dz}$ в (16,32) можно считать постоянными все величины, кроме $\frac{d^2n}{dz^2}$. Поэтому, помещая скачок в точку $z = 0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} R &= -\frac{i\lambda_0}{8\pi n^2(0)}\left[\left(\frac{dn}{dz}\right)_2-\left(\frac{dn}{dz}\right)_1\right]e^{2i\frac{\omega}{c}\int\limits_0^z n(z)\,dz}, \\ |R| &= \frac{\lambda_0}{8\pi}\frac{\left|\left(\frac{dn}{dz}\right)_2-\left(\frac{dn}{dz}\right)_1\right|}{n^2(0)}, \end{aligned}\right\} \qquad (16,33)$$

где $\left(\frac{dn}{dz}\right)_{1,2}$ — значения $\frac{dn}{dz}$ с обеих сторон скачка и для фиксации фазового множителя положено $z_0 = 0$, так как величина $2i\frac{\omega}{c}\int\limits_0^z n(z)\,dz$ имеет ясный смысл: она равна набегу фазы при распространении от точки z до скачка при $z = 0$ и обратно до точки z.

Формула (16,33) получается также сразу при решении задачи об отражении от скачка $\frac{dn}{dz}$ в условиях, когда с обеих сторон скачка применимо приближение геометрической оптики и поле можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} &E(1)=\frac{E_0}{\sqrt{n}}e^{-i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n\,dz}+\frac{c_1}{\sqrt{n}}e^{i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n\,dz}\\ &\text{в среде 1 (падающая и отраженная волны),}\\ &E(2)=\frac{c_2}{\sqrt{n}}e^{-i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n\,dz}\\ &\text{в среде 2 (проходящая волна).}\end{aligned}\right\} \qquad (16{,}34)$$

На границе разрыва $\frac{dn}{dz}$ (при $z = 0$), как и всегда, должны быть непрерывны тангенциальные компоненты полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, т. е. в данном случае значения *) E и $\frac{dE}{dz}$. В применении к полям (16,34) эти граничные условия сразу же приводят к результату (16,33), если отбросить малый член, который в $\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\frac{dn}{dz}}{n^2}$ раз меньше оставленного. Подобное пренебрежение, разумеется, вполне законно, поскольку вне разрыва предполагается справедливым геометрико-оптическое приближение (см. (16,22)). По последней причине коэффициент отражения R в (16.31) — (16,33) всегда мал, т. е. $|R| \ll 1$.

В связи с получением условий применимости приближения геометрической оптики выше уже отмечалось, что это приближение действительно аппроксимирует точное решение для монотонной функции $\varepsilon(z)$ при соблюдении одного неравенства (16,22) независимо от значений $\frac{d^2n}{dz^2}$. В то же время, если производная $\frac{d^2n}{dz^2}$ также везде мала и поэтому соблюдается второе условие (16,15), приближение геометрической оптики является еще более хорошим. Сказанное ясно из формул (16,32) и (16,33), свидетельствующих о падении отражения от среды при уменьшении производной $\frac{d^2n}{dz^2}$.

---

*) Тот факт, что в разбираемой задаче граничное условие $H(2) = H(1)$, т. е. равенство тангенциальных компонент поля $\boldsymbol{H}$, эквивалентно непрерывности производной $\frac{dE}{dz}$, ясен, например, из (16,24). То же следует из формальных соображений, поскольку для уравнения второго порядка типа (16,3) на границе должны быть непрерывны и функция E и ее производная $\frac{dE}{dz}$.

Отражение от границы разрыва (скачка) производной $\frac{dn}{dz}$, при соблюдении приближения геометрической оптики вне скачка, аналогично отражению от границы разрыва самого показателя преломления n (мы, таким образом, не согласны с противоположным мнением, высказанным в [192], § 17,5). В обоих случаях разрыв можно считать резким и его структура *) в широких пределах не сказывается на коэффициенте отражения, если толщина разрыва мала по сравнению с длиной $\frac{\lambda_0}{2\pi}$. Другими словами, в обоих случаях эффект отражения можно считать либо происходящим на резком разрыве, либо рассматривать его в качестве результата отражения во всем переходном слое, где происходит интересующее нас резкое изменение $\frac{dn}{dz}$ или $n(z)$. Разница между обоими случаями состоит, правда, в том, что скачок n может иметь место на границе между двумя однородными средами, когда все отражение происходит только от области самого скачка. Если же имеется скачок $\frac{dn}{dz}$, то, по крайней мере, одна из сред с обеих сторон скачка является неоднородной и отражение, вообще говоря, не локализовано только на скачке. Этот момент, однако, представляется мало существенным, поскольку отражение от неоднородной среды вне скачка (т. е. вне всего переходного слоя, рассматриваемого в качестве скачка) может быть сколь угодно малым или даже равным нулю (последнее имеет место для слоя типа (16,27)).

§ 17. Строгие решения волнового уравнения (линейный и параболический слои; слой $\varepsilon' = \frac{a}{(b+z)^2}$)

Введение. При исследовании распространения волн в произвольной неоднородной среде ограничиться первым приближением геометрической оптики, очевидно, нельзя. То же можно сказать и о других общих методах: методе возмущений, изложенном в конце § 16 и являющемся, по сути дела, вторым приближением геометрической оптики, а также методе фазовых интегралов, в котором широко используется приближение геометрической оптики (см. [77, 105, 197, 198] и указанную там литературу; кроме того, об этом методе еще пойдет речь в § 28). Ни одно из подобных приближенных решений общего характера (общего в том смысле, что конкретный вид функций $\varepsilon'(z)$ не фиксируется) не может быть использовано для нахождения коэффициента отражения и, тем более, поля волны в самой области отражения от произвольного слоя. Поэтому большое значение имеют точные решения волнового уравнения (16,3), известные для ряда функций $\varepsilon'(z)$, уже указанных в начале § 16. Сейчас остановимся на важнейших таких точных решениях: для «линейного слоя» $\varepsilon' = a + bz$ и «параболического слоя» $\varepsilon' = a + bz^2$, а также для слоя $\varepsilon' = \frac{a}{(b \mp z)^2}$; последний случай интересен главным образом потому, что для него точное решение выражается в элементарных функциях и, следовательно, особенно просто.

---

*) Под структурой разрыва понимается, очевидно, характер изменения функций $\frac{dn}{dz}$ или $n(z)$ в пределах той области, которая при более грубом рассмотрении считается точкой на оси z, в которой происходит скачок величин $\frac{dn}{dz}$ или n.

Линейный слой без поглощения. Рассмотрим раньше всего решение для линейного слоя плазмы при отсутствии поглощения [181, 182], полагая в (16,3) при $z \geqslant 0$

$$\varepsilon = \tilde{n}^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} = 1 - \frac{z}{z_1}, \quad \sigma = 0. \tag{17,1}$$

При $z < 0$ можно считать, что $\varepsilon = 1$, но лучше вообще не детализировать свойства среды в этой области, рассматривая только область $z \geqslant 0$ и задаваясь при $z = 0$ граничным условием — выражением для падающей волны. При этом следует иметь в виду, что если при $z = 0$ производная $\frac{dn}{dz}$ терпит разрыв, то на этой границе раздела будет иметь место отражение волны, идущей из области $z < 0$. В силу сказанного мы отвлекаемся от этого вопроса, задавая сразу поле волны при $z = +0$.

Производя замену переменных:

$$\zeta = \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{1/3} (z_1 - z) = \left(\frac{\omega}{c} z_1\right)^{2/3} \varepsilon(z), \tag{17,2}$$

легко видеть, что уравнение (16,3) для слоя (17,1) принимает вид:

$$\frac{d^2E}{d\zeta^2} + \zeta E = 0. \tag{17,3}$$

Уравнение (17,3) приводится к уравнению Бесселя (см., например, [199]), и его решение выражается в функциях Бесселя порядка $^1/_3$. Нас интересует решение, отвечающее случаю, когда волна падает на среду в направлении положительной оси z (рис. 17,1). При $z \to \infty$ (т. е. $\zeta \to -\infty$) волновое поле должно затухать, так как при $z = z_1$ (т. е. $\zeta = 0$) $\varepsilon = 0$ и при $z > z_1$ (т. е. $\zeta < 0$) $\varepsilon < 0$. В области $z < z_1$ имеется, очевидно, стоячая волна. Соответствующее решение, которое является однозначно определенным, таково:

$$\left.\begin{aligned}
&E(\zeta)=A\zeta^{1/2}\left\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right)+J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad\text{при } \zeta>0,\\
&E(\zeta)=A(-\zeta)^{1/2}\left\{-I_{1/3}\left(\frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2}\right)+I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad\text{при } \zeta<0,
\end{aligned}\right\}\quad(17,4)$$

где A — постоянная, J — бесселева функция и $I_\nu(z)=i^{-\nu}J_\nu(iz)$ (см. [199]). Необходимость различного по внешнему виду представления поля E при $\zeta>0$ и $\zeta<0$ связана с ветвлением величины

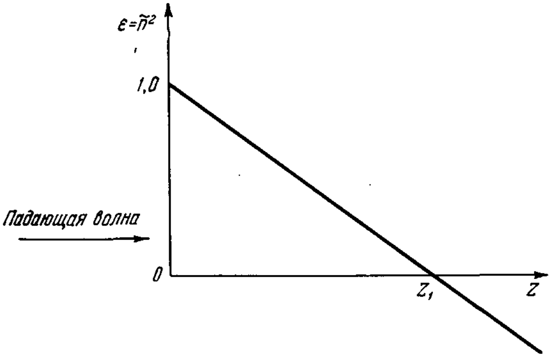


Рис. 17,1. Линейный слой.

$\zeta^{3/2}$ при $\zeta=0$. Разумеется, при $\zeta=0$ приведенные решения для E переходят одно в другое (при $\zeta=0$ поле E и его производная по z непрерывны). Решение уравнения (17,3), убывающее при $\zeta<0$, т. е. решение (17,4), можно записать также в виде так называемого интеграла Эйри (см., например, [200]):

$$E(\zeta)=\frac{3A}{\pi}\int_0^\infty\cos\left(\frac{x^3}{3}-\zeta x\right)dx. \qquad (17,5)$$

Выражения (17,4) и (17,5) тождественны (коэффициенты при этом выбраны так, что постоянная A в обеих выражениях одинакова). При $\zeta<0$ ($z>z_1$, $\varepsilon<0$) поле E экспоненциально затухает, а при $\zeta>0$ ($z<z_1$, $\varepsilon>0$) поле осциллирует. Детальнее вид поля (17,4) — (17,5) будет обсужден в § 32.

При большом ζ ($|\zeta|\gg1$) можно воспользоваться асимптотическим представлением функций Бесселя [199] или интеграла Эйри

[200], в результате чего имеем:

$$E \approx \frac{3A}{\sqrt{\pi}}\,\zeta^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right), \quad \zeta \gg 1. \qquad (17,6)$$

В силу (17,2) условие справедливости приближения (17,6), т. е. условие $\zeta \gg 1$, имеет вид $\left(z_1 = \frac{1}{\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|},\ \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\right)$:

$$\zeta = \left(\frac{\omega}{c} z_1\right)^{2/3}\left(1-\frac{z}{z_1}\right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|}\right)^{2/3}\varepsilon(z) \gg 1. \qquad (17,7)$$

Неравенство (17,7) совпадает с условием применимости геометрической оптики (16,22), поскольку $\varepsilon(z) = n^2(z)$; само решение (17,6) также, конечно, представляет собой геометрикооптическое решение типа (16,12), так как

$$\zeta^{-1/4} = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{n(z)}},$$

$$\frac{2}{3}\zeta^{3/2} = \frac{2\omega}{3c} z_1 \varepsilon^{3/2}(z) = \frac{\omega}{c}\int\limits_z^{z_1}\sqrt{1-\frac{z}{z_1}}\,dz = \frac{\omega}{c}\int\limits_z^{z_1} n(z)\,dz. \qquad (17,8)$$

Будем считать, что в начале слоя (при $z=0$) амплитуда падающей волны E_+ равна единице (т. е. при $z=0$ поле E_+ с учетом временного множителя равно $E_+ = e^{i\omega t}$). Решение (17,4) — (17,5) представляет собой стоячую волну, и при $z=0$ его можно представить в виде (множитель $e^{i\omega t}$ опускаем; используем (17,6)):

$$E = E_+ + E_- = 1 + e^{-i\left(\frac{4\omega}{3c}z_1 - \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega}{c} z_1\right)^{1/6} e^{-i\left(\frac{2}{3}\frac{\omega}{c}z_1 - \frac{\pi}{4}\right)}. \qquad (17,9)$$

Поле в любой точке (при $z \geqslant 0$) определяется формулами (17,4) и (17,5) с постоянной A из (17,9). Сдвиг фаз между отраженной и падающей волнами, очевидно, равен

$$\varphi = \frac{4}{3}\frac{\omega}{c} z_1 - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\omega}{c}\int\limits_0^{z_1}\sqrt{1-\frac{z}{z_1}}\,dz - \frac{\pi}{2} = 2\frac{\omega}{c}\int\limits_0^{z_1} n\,dz - \frac{\pi}{2}. \qquad (17,10)$$

Поглощающий линейный слой. Полученные результаты легко обобщить на случай, когда есть поглощение [184], причем для линейного слоя:

$$\varepsilon' = \varepsilon - i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega} = (n - i\varkappa)^2 = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) - i\left(\alpha + \beta\frac{z}{z_1}\right) = a - b\,\frac{z}{z_1}, \tag{17,11}$$

где α и β — вещественные постоянные.

Замена переменной

$$\zeta = \left(\frac{\omega^2 b}{c^2 z_1}\right)^{1/3}\left(\frac{a}{b}z_1 - z\right) = \left(\frac{\omega z_1}{cb}\right)^{2/3}\varepsilon'(z) = \xi - i\eta \tag{17,12}$$

приводит волновое уравнение (16,13) опять к виду (17,3), где ζ является, разумеется, комплексной переменной (ξ и η вещественны). Решение уравнения, удовлетворяющее условиям задачи ($E \longrightarrow 0$ при $z \longrightarrow \infty$), по-прежнему имеет вид (17,4) — (17,5), причем условия $\zeta \gtrless 0$ нужно заменить условиями $\xi \lessgtr 0$. Асимптотическое представление поля при $\xi \gg 1$ также сохраняет вид (17,6), и, если $E_+ = 1$, при $z = 0$ можно написать:

$$\left.\begin{aligned} E &= 1 + e^{-i\left(\frac{4}{3}\zeta^{3/2}_{(z=0)} - \frac{\pi}{2}\right)} = 1 + e^{-i\Psi},\\ A &= \frac{2}{3}\sqrt{\pi}\,\zeta^{1/4}_{(z=0)}e^{-i\frac{\Psi}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{17,13}$$

где $\zeta_{(z=0)}$ — значение ζ при $z = 0$.

Здесь во избежание недоразумений нужно еще раз подчеркнуть, что поле падающей волны E_+ считается равным единице при $z = +0$, т. е. отражение от границы слоя при $z = 0$ не рассматривается. Если же линейный слой при $z = 0$ граничит, например, с однородной средой с $\varepsilon' = 1$, то при отсутствии поглощения на границе $z = 0$ имеет место скачок производной $\frac{dn}{dz}$ и происходит отражение. Это отражение является слабым в случае малости градиента $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right| = \frac{1}{z_1}$. Если же слой поглощающий, то даже при малом $\left|\frac{d\varepsilon'}{dz}\right|$ отражение слабо только для малых значений параметра α в (17,11). Последнее вполне понятно, так как при $\alpha \neq 0$ на границе с вакуумом имеется скачок проводимости, равный $\frac{\omega\alpha}{4\pi}$. Поэтому при больших α отражение на границе будет практически полным (отражение от зеркала) *).

---

*) Для слоя (17,11) на границе с вакуумом скачок испытывает только проводимость σ. Для слоя несколько более общего типа, когда на границе имеется также скачок проницаемости ε, отражение от границы, конечно, может быть большим и при малом значении $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|$.

Решить задачу о распространении и отражении волн от линейного слоя с учетом границы при $z=0$ не составляет труда, но мы не будем на этом останавливаться. Дело в том, что при $\alpha=0$ и малом градиенте $\frac{d\varepsilon'}{dz}$ область $\varepsilon=0$ расположена далеко от границы $z=0$, и задача об отражении по существу разделяется на две (отражение от области $\varepsilon\approx 0$ и отражение от границы при $z=0$); кроме того, сглаживая слой вблизи границы $z=0$, можно сделать отражение от этой границы совсем незначительным.

Для линейного слоя типа $\varepsilon=1+\frac{z}{z_1}$ $(z\geqslant 0)$, когда ε в нуль не обращается, отражение волн от слоя не является полным. В случае малости градиента $\frac{d\varepsilon}{dz}=\frac{1}{z_1}$ это отражение слабо и сводится к отражению от границы $z=0$; (предполагается, что при $z<0$ значение $\varepsilon=1$); при этом, конечно, можно воспользоваться формулой (16,33). Коэффициент отражения от рассматриваемого слоя при любом z_1 и наклонном падении приведен в [192], § 17,3.

Возвращаясь к вопросу об отражении от поглощающего слоя (17,11), укажем, что согласно (17,13) сдвиг фаз отраженной волны равен $\varphi=\operatorname{Re}(\Psi)$, а амплитудный коэффициент отражения равен $R=e^{\operatorname{Im}(\Psi)}$, причем можно записать (см. 17,12)):

$$\Psi+\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}\zeta^{3/2}_{(z=0)}=2\int\limits_0^{\zeta_{(z=0)}}\zeta^{1/2}\,d\zeta=2\left(\frac{\omega z_1}{cb}\right)^{1/3}\int\limits_0^{\zeta_{(z=0)}}(n-i\varkappa)\,d\zeta=$$

$$=2\frac{\omega}{c}\int\limits_0^{\frac{a}{b}z_1}(n-i\varkappa)\,dz,\qquad(17,14)$$

так как $\zeta=0$ при $z=\frac{a}{b}z_1$ и $d\zeta=-\left(\frac{\omega^2 b}{c^2 z_1}\right)^{1/3}dz$.

В интеграле (17,14) верхний предел равен

$$\frac{a}{b}z_1=\frac{1-i\alpha}{1+i\beta}z_1\qquad(17,15)$$

и переменная интегрирования z является комплексной. Для простоты положим вначале $\beta=0$; тогда, согласно (17,11),

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega}=\alpha=\text{const},\qquad(17,16)$$

т. е. проводимость не зависит от координат. В этом случае

$$\Psi+\frac{\pi}{2}=2\frac{\omega}{c}\int\limits_0^{(1-i\alpha)z_1}(n-i\varkappa)\,dz=$$

$$=2\frac{\omega}{c}\left\{\int\limits_0^{z_1}(n-i\varkappa)\,dz+\int\limits_{z_1}^{z_1-i\alpha z_1}\sqrt{\frac{\alpha+\frac{y}{z_1}}{2}}\,(1-i)\,dz\right\}=$$

$$=\frac{2\omega}{c}\left\{\int\limits_0^{z_1}n(z)\,dz-\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha^{3/2}z_1\right\}-i\frac{2\omega}{c}\left\{\int\limits_0^{z_1}\varkappa(z)\,dz+\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha^{3/2}z_1\right\},\qquad(17{,}17)$$

так как при $z=z_1+iy$, в силу (17,16),

$$n=\varkappa=\sqrt{\frac{\alpha+\frac{y}{z_1}}{2}}.$$

Согласно (17,17) и (17,16)

$$\varphi=\frac{2\omega}{c}\left\{\int\limits_0^{z_1}n(z)\,dz-\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^{3/2}z_1\right\}-\frac{\pi}{2}\qquad(17{,}18)$$

и

$$-\ln R=\frac{2\omega}{c}\left\{\int\limits_0^{z_1}\varkappa(z)\,dz+\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)^{3/2}z_1\right\}.\qquad(17{,}19)$$

Разумеется, выражения (17,17), (17,18) и (17,19) можно получить непосредственно, вычисляя

$$\varphi=\operatorname{Re}\left(\frac{4}{3}\zeta_{z=0}^{3/2}\right)-\frac{\pi}{2}\quad\text{и}\quad\ln R=\operatorname{Im}\left(\frac{4}{3}\zeta_{z=0}^{3/2}\right),\qquad(17{,}20)$$

где

$$\zeta_{z=0}=\left(\frac{\omega^2 b}{c^2 z_1}\right)^{1/3}\frac{a}{b}z_1=\left(\frac{\omega z_1}{c(1+i\beta)}\right)^{2/3}(1-i\alpha).$$

Если $\alpha=0$ и $\beta\neq0$, т. е. $\frac{4\pi\sigma}{\omega}=\beta\frac{z}{z_1}$, то

$$\Psi+\frac{\pi}{2}=2\frac{\omega}{c}\int\limits_0^{\frac{(1-i\beta)z_1}{1+\beta^2}}(n-i\varkappa)\,dz.$$

В встречающихся обычно условиях, когда $\beta^2\ll1$, выражение (17,20), как легко показать, сводится к предыдущему, т. е.

приводит к формулам (17,18) и (17,19), где под σ нужно понимать значение проводимости $\frac{\omega\beta}{4\pi}$ при $z=z_1$.

Вообще же с точностью до членов порядка α^2, β^2 и $\alpha\beta$

$$-\ln R \approx \frac{2\omega}{c}\left(\alpha+\frac{2}{3}\beta\right)z_1 = \frac{\omega}{c}\int_0^{z_1}\frac{\alpha+\beta\frac{z}{z_1}}{\sqrt{1-\frac{z}{z_1}}}\,dz = \frac{2\omega}{c}\int_0^{z_1}\frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon}}\,dz. \tag{17,20a}$$

Приведенные формулы позволяют ответить на все вопросы, которые могут возникнуть в отношении волн, отражающихся и распространяющихся в линейном слое. Обсуждение этих формул в применении к ионосфере будет проведено в §§ 30—32.

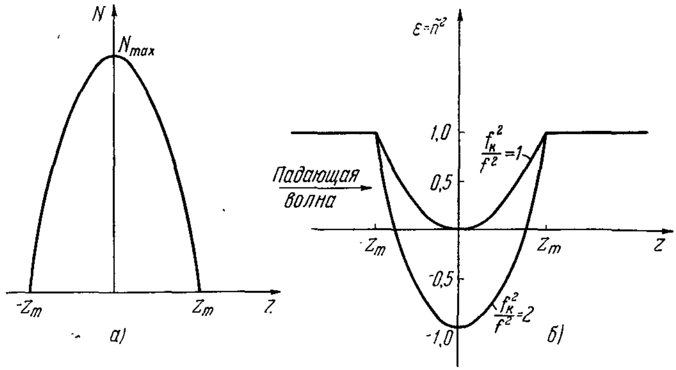


Рис. 17,2. Параболический слой: а) $N(z)$; б) $\varepsilon(z)$ при $\frac{f_к^2}{f^2}=1$ и $\frac{f_к^2}{f^2}=2$.

Параболический слой без поглощения. Перейдем к случаю параболического слоя без поглощения, когда при $|z|\leqslant z_m$

$$\varepsilon = 1-\frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} = 1-\frac{f_к^2}{f^2}\left(1-\frac{z^2}{z_m^2}\right), \tag{17,21}$$

где координата z отсчитывается от максимума концентрации $N = N_{\max}\left(1-\frac{z^2}{z_m^2}\right)$, $N(0)=N_{\max}$ — концентрация в максимуме слоя, $f_к$ — критическая частота $\left(f_к=\frac{\omega_к}{2\pi}=\sqrt{\frac{e^2N_{\max}}{\pi m}},\ \lambda_к=\frac{c}{f_к}\right)$ и z_m — полутолщина слоя (рис. 17,2). Отражений от точек $z=\pm z_m$ мы рассматривать не будем (см. [201]); эти отражения отсутствуют, если несколько сгладить переход к области $\varepsilon = 1$ так, чтобы производная $\frac{d\varepsilon}{dz}$ не терпела разрыва.

Производя в волновом уравнении (16,3) с функцией ε, взятой согласно (17,21), замену

$$\rho = \pi \frac{z_m}{\lambda_к} \frac{f_к^2 - f^2}{f_к^2}, \quad v = \left(\frac{4\pi z_m}{\lambda_к} \right)^{1/2} \frac{z}{z_m} e^{i\frac{\pi}{4}} = u e^{i\frac{\pi}{4}}, \tag{17,22}$$

мы приводим его к виду:

$$\frac{d^2E}{dv^2} + \left(i\rho - \frac{v^2}{4} \right) E = 0. \tag{17,23}$$

Это уравнение решается в функциях параболического цилиндра $D_{i\rho - \frac{1}{2}}\left(ue^{i\frac{\pi}{4}}\right)$ и $D_{-i\rho - \frac{1}{2}}\left(ue^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$, называемых также функциями Вебера (см. [202], гл. 16).

Как будет показано в § 38, точное решение для параболического слоя с точки зрения теории распространения радиоволн в ионосфере имеет весьма ограниченный интерес. Соответствующим решением не нужно даже непосредственно пользоваться, и оно предназначено лишь для контроля некоторых приближенных решений. По этой причине, а также некоторым другим, ясным из дальнейшего, мы не будем детально исследовать решение для параболического слоя и ограничимся указанием результатов [185, 201].

В начале слоя (при $z = -z_m$) разность фаз между отраженной и падающей волнами равна

$$\varphi = \frac{u^2}{2} - \rho \ln (4u^2) + \arg \left[\frac{(2i\rho)!}{(i\rho)!} \right] + 2 \left[1 + \frac{i\left(\rho - \frac{1}{2}i\right)\left(\rho - \frac{3}{2}i\right)}{2u^2} - \ldots \right] + \frac{\pi}{2}. \tag{17,24}$$

В случае параболического слоя область, где $\varepsilon(\omega) < 0$, является всегда конечной (если $f > f_к$, то такой области нет вообще; см. (17,21) и рис. 17,2). Поэтому в принципе всегда имеется некоторое просачивание волны через слой. Для параболического слоя без поглощения коэффициент отражения $|R|^2$ (отношение интенсивностей отраженной и падающей волн) определяется соотношением

$$\frac{|R|^2}{1 - |R|^2} = e^{2\pi\rho} = e^{4\pi^2 \frac{z_m}{\lambda_к} \frac{f_к^2 - f^2}{2f_к^2}}. \tag{17,25}$$

Эта формула справедлива и при $f > f_к$, и при $f < f_к$. При $f < f_к$ коэффициент отражения $|R|^2$ для толстого слоя, когда

$$\frac{z_m}{\lambda_к} \gg 1, \tag{17,26}$$

равен единице уже в самой непосредственной близости от критической частоты $f_к$. Так, например, при $\frac{z_m}{\lambda_к} = 10$ коэффициент $|R|^2 = 0{,}999$ при $\frac{\Delta f}{f_к} \equiv \frac{f_к - f}{f_к} = 1{,}7\cdot 10^{-2}$. При $f > f_к$ коэффициент $|R|^2$ быстро стремится к нулю; так, при $\frac{z_m}{\lambda_к} = 10$ значение $|R|^2 = 0{,}001$ уже при $\frac{\Delta f}{f_к} = -1{,}7\cdot 10^{-2}$.

Нужно иметь в виду, что формула (17,25) справедлива, если не учитывать отражения волн от начала и конца слоя, об этом уже было сказано выше. Подобное условие, однако, невыполнимо, если слой очень тонок ($z_m \lesssim \lambda_к$), так как в этом случае нет возможности без отказа от параболичности слоя в целом «закруглить» его границы, обеспечив тем самым плавность изменения ε от z. Поэтому формула (17,25) вообще строго справедлива лишь при условии (17,26). Если не иметь в виду этого замечания, то можно ошибочно заключить [185], что при $z_m \to 0$ будет $|R|^2 \to 0{,}5$ при всех f, как это вытекает из (17,25). На самом же деле при $z_m \to 0$, разумеется, $|R|^2 \to 0$ (при конечной частоте $f_к$). Отражение от плавного куполообразного слоя произвольной толщины рассмотрено в § 18.

Если учесть, что в силу неравенства (17,26) интерес представляет лишь область малых значений Δf, когда

$$\frac{\Delta f}{f_к} \equiv \frac{f_к - f}{f_к} \ll 1, \tag{17,27}$$

то формулу (17,25) можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{|R|^2}{1-|R|^2} &= e^{4\pi^2 \frac{z_m}{\lambda_к}\frac{\Delta f}{f_к}} = e^{4\pi^2 \frac{z_m}{c}\Delta f}, \\ |D|^2 = 1 - |R|^2 &= \frac{1}{1 + e^{\frac{4\pi^2 z_m \Delta f}{c}}}, \end{aligned}\right\} \tag{17,28}$$

где $|D^2|$ — коэффициент пропускания.

Вопрос о просачивании волн через слой будет подробно продискутирован в § 33.

Слой $\varepsilon' = \frac{a}{(b+z)^2}$. В начале § 16 уже упоминалось о том, что волновое уравнение (16,3) имеет точное решение, выражающееся в известных функциях, не только для линейного и параболического слоев, но также и для ряда других. На одном таком довольно общем и важном случае мы остановимся в § 18. Сейчас же укажем,

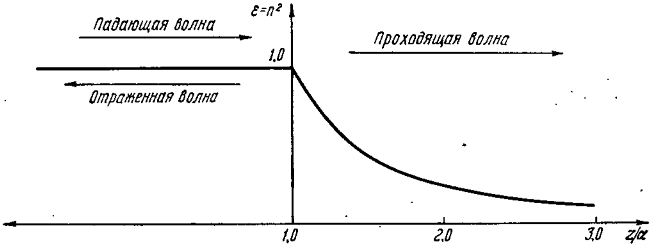


Рис. 17,3. Слой $\varepsilon = \frac{\alpha^2}{z^2}\left(\text{при } \frac{z}{\alpha} > 1\right)$.

что волновое уравнение (16,3) имеет точное решение, выражающееся через элементарные функции для слоя (см. [203])

$$\varepsilon'(z) = \frac{a}{(b+z)^2}, \tag{17,29}$$

где a и b — произвольные комплексные числа.

Прямой подстановкой решения в уравнение (16,3) с такой функцией $\varepsilon'(z)$ легко проверить, что это решение таково:

$$E = C_1 (b+z)^{r_1} + C_2 (b+z)^{r_2}, \quad r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{c^2} a}. \tag{17,30}$$

В качестве примера рассмотрим здесь отражение от слоя типа (17,29). Именно пусть (рис. 17,3)

$$\underset{\text{(среда 1)}}{\varepsilon = 1 \text{ при } z \leqslant \alpha,} \quad \underset{\text{(среда 2)}}{\varepsilon = \frac{\alpha^2}{z^2} \text{ при } z > \alpha.} \tag{17,31}$$

Волна пусть падает из среды 1 (из вакуума), где поле имеет вид:

$$E = e^{-i\frac{\omega}{c}(z-\alpha)} - Re^{i\frac{\omega}{c}(z-\alpha)}.$$

В среде 2 поле таково:

$$E = Az^{1/2} z^{-i\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\alpha\right)^2 - \frac{1}{4}}} \equiv Az^{1/2} z^{-i\beta} = Az^{1/2} e^{-i\beta \ln z},$$

так как в (17,30) нужно положить $b = 0$, а $a = \alpha^2$ (кроме того, учтено, что в среде 2 имеется только бегущая волна, уходящая от границы; предполагается, что волна может распространятся, для чего должно соблюдаться неравенство $\frac{\omega}{c}\alpha > \frac{1}{2}\Big)$ *). На границе (при $z=\alpha$) должны соблюдаться условия:

$$\left.\begin{aligned}
&E_1 = E_2 \text{ и } \left(\frac{dE}{dz}\right)_1 = \left(\frac{dE}{dz}\right)_2, \\
&\text{откуда} \\
&R = 1 - A\alpha^{\frac{1}{2}-i\beta} = i\frac{1}{2\left(\frac{\omega}{c}\alpha+\beta\right)}, \quad |R| = \frac{1}{2\left(\frac{\omega}{c}\alpha+\beta\right)}, \\
&A = \frac{2\alpha^{-\frac{1}{2}+i\beta}}{1+i\dfrac{\frac{1}{2}-i\beta}{\frac{\omega}{c}\alpha}} = \alpha^{-1/2+i\beta}\left[1 - i\frac{1}{2\left(\frac{\omega}{c}\alpha+\beta\right)}\right], \\
&\beta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\alpha\right)^2 - \frac{1}{4}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (17,32)$$

Если проницаемость ε медленно изменяется на длине волны, то $\frac{\omega}{c}\alpha \gg 1$ и $\beta \approx \frac{\omega}{c}\alpha$, т. е.

$$R = i\frac{1}{4\frac{\omega}{c}\alpha} = -i\frac{\lambda_0}{8\pi}\left(\frac{dn}{dz}\right)_{2,\ z=\alpha}, \qquad (17,33)$$

так как при $z=\alpha$ имеем $\frac{dn}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{\alpha}{z}\right) = -\frac{1}{\alpha}$. Эта формула находится в соответствии с общим результатом (16,33), поскольку в (17,33) значение $n(0)=1$. Из сопоставления выражений (17,32) и (17,33) ясна также степень точности предельной формулы (17,33).

§ 18. Отражение и прохождение волн в случае «симметричного» и «переходного» слоев произвольной толщины

Плавный слой с четырьмя параметрами. Параболический слой (17,21), рассматриваемый в § 17, не может служить в качестве хорошей модели полупрозрачного тонкого слоя в силу необходимости дополнительно учитывать отражения от точек $z = \pm z_m$, где производная $\frac{d\varepsilon}{dz}$ терпит разрыв. Поэтому преимущество простоты для тонкого параболического слоя места не имеет. Кроме того, параболический слой имеет только два свободных параметра

---

*) Если $\frac{\omega}{c}\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, средний по времени поток энергии $\overline{S} = \frac{c}{4\pi}\overline{[EH]}$ равен нулю.

$f_к$ и z_m (см. (17,21)). В то же время интересно выяснить характер отражения и прохождения волн через слои более общего типа. Наиболее подходящим таким слоем, для которого известно и подробно продискутировано точное решение (см. [186, 187], а также [192], § 14), является слой

$$\varepsilon'(z)=a+\frac{be^{\gamma z}}{1+e^{\gamma z}}+c\frac{e^{\gamma z}}{(1+e^{\gamma z})^2}, \tag{18,1}$$

где a, b, c, γ — комплексные постоянные.

При отсутствии поглощения, полагая $a=1$, запишем выражение (18,1) в виде (P, M и γ — произвольные вещественные коэффициенты):

$$\varepsilon(z)=1-P\frac{e^{\gamma z}}{1+e^{\gamma z}}-M\frac{4e^{\gamma z}}{(1+e^{\gamma z})^2}. \tag{18,2}$$

Решение волнового уравнения в случае слоя (18,1) — (18,2) выражается в гипергеометрических функциях. Выписывать это решение не будем и приведем лишь выражения для коэффициента отражения $|R|^2$, т. е. для отношения потока энергии в отраженной волне к потоку энергии в волне падающей (R есть отношение амплитуд отраженной и падающей волн).

«Симметричный» слой. Если положить в (18,2) $P=0$, а M и γ считать положительными, то получается «симметричный» слой с одним минимумом функции $\varepsilon(z)$, изображенной на рис. 18,1, где начало координат помещено как раз в точке минимума. Значение $\varepsilon(z)$ в минимуме $\varepsilon_{\min}=1-M$.

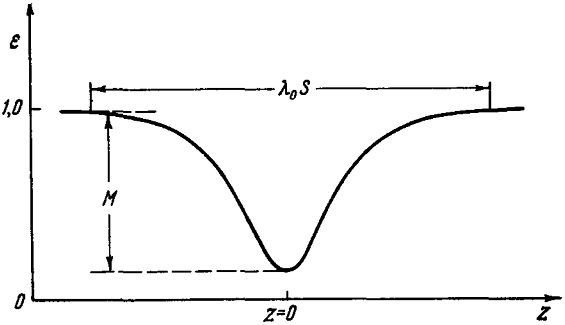


Рис. 18,1. «Симметричный» слой.

Ширина слоя характеризуется безразмерным параметром

$$S=\frac{2\omega}{c\gamma}=\frac{4\pi}{\lambda_0\gamma}. \tag{18,3}$$

Для рассматриваемого «симметричного» слоя, который можно записать в виде $\left(M=\frac{f_\text{к}^2}{f^2}\right)$:

$$\varepsilon=1-\frac{4f_\text{к}^2}{f^2}\frac{e^{\gamma z}}{(1+e^{\gamma z})^2}, \tag{18,4}$$

полуширина слоя равна $\xi=0{,}14S\lambda_0$, т. е. при $z=\xi$

$$1-\varepsilon=0{,}5\frac{f_\text{к}^2}{f^2}=0{,}5\,(1-\varepsilon_{\min}).$$

Если в (18,2) коэффициент $M=0$ при положительных P и γ, то получается «переходный» слой, представленный на рис. 18,2;

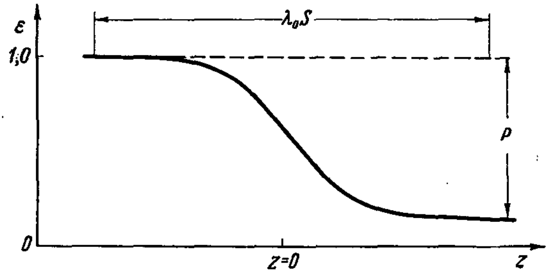


Рис. 18,2. «Переходный» слой.

при $z\to-\infty$ имеем $\varepsilon=1$, как и для «симметричного» слоя. Однако при $z\to+\infty$ для «симметричного» слоя также $\varepsilon=1$, а для «переходного» слоя $\varepsilon=1-P$.

Коэффициент отражения от слоя (18,2) равен

$$|R|^2=\left|\frac{\Gamma(iS)\,\Gamma\left\{\frac{1}{2}-d_2-i\left[\frac{1}{2}S\left(1+\sqrt{1-P}\right)+d_1\right]\right\}\times\Gamma\left\{\frac{1}{2}+d_2-i\left[\frac{1}{2}S\left(1+\sqrt{1-P}\right)-d_1\right]\right\}}{\Gamma(-iS)\,\Gamma\left\{\frac{1}{2}-d_2+i\left[\frac{1}{2}S\left(1-\sqrt{1-P}\right)-d_1\right]\right\}\times\Gamma\left\{\frac{1}{2}+d_2+i\left[\frac{1}{2}S\left(1-\sqrt{1-P}\right)+d_1\right]\right\}}\right|^2,$$

где Γ — гамма-функция, $S=\frac{2\omega}{c\gamma}$ и $2(d_2+id_1)=\sqrt{1-4S^2M}$.

Для «симметричного» слоя (18,4)

$$\sqrt{1-4S^2M}=\sqrt{1-\frac{64\pi^2}{\lambda_\text{к}^2\gamma^2}},$$

где $\lambda_{к} = \frac{c}{f_{к}}$ и обычно $\left(\frac{8\pi}{\lambda_{к}\gamma}\right) > 1$. В этом последнем случае

$$d_2 = 0, \quad \sqrt{1-4S^2M} = 2id_1,$$

$$|R|^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 \pi d_1}{\operatorname{ch}\pi(d_1+S)\operatorname{ch}\pi(d_1-S)}. \qquad (18,5)$$

Коэффициент пропускания — отношение потока энергии в прошедшей волне к потоку в падающей волне — равен $|D|^2 = 1-|R|^2$; величина $\sqrt{|D|^2}$ равна модулю отношения амплитуд электрического поля в прошедшей и падающей волнах, так как для «симметричного» слоя при $z = \pm\infty$ значение ε одинаково и равно единице. Зависимость $|R|^2$ от $M = \frac{f_{к}^2}{f^2}$ при разных S ясна из рис. 18,3. Уже при $S = 10$ значение $|R|^2$ для $M \geqslant 1,3$ (т. е. $f \leqslant 0,9f_{к}$) практически равно единице.

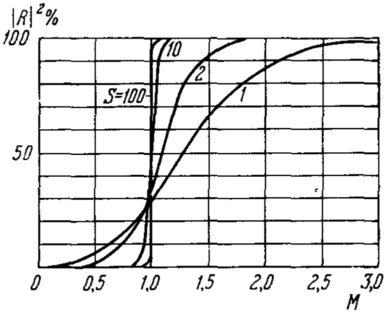


Рис. 18,3. Коэффициент отражения для «симметричного» слоя.

«Переходный» слой. Предельный переход к резкой границе раздела. Для «переходного» слоя $\left(M = 0; P > 0,\ d_2 = \frac{1}{2},\ d_1 = 0\right)$

$$|R|^2 = \frac{\operatorname{sh}^2\left[\frac{\pi}{2}S\left(1-\sqrt{1-P}\right)\right]}{\operatorname{sh}^2\left[\frac{\pi}{2}S\left(1+\sqrt{1-P}\right)\right]}. \qquad (18,6)$$

В этом случае при $z = +\infty$ получим $\varepsilon = 1 - P$, и поэтому величина $|D|^2 = 1 - |R|^2$ не есть отношение квадратов модулей амплитуд электрического поля в прошедшей и падающей волнах. Действительно, в среде с диэлектрической постоянной $\varepsilon = n^2$ поток энергии по абсолютной величине равен

$$\frac{c}{4\pi}EH = \frac{cn}{4\pi}E^2,$$

и, таким образом, отношение модулей амплитуд поля E в прошедшей и падающей волнах равно $\frac{D}{\sqrt{n}} = \frac{D}{\sqrt[4]{1-P}}$ (при $z = -\infty$ положено $\varepsilon = 1$).

Вид функции $|R(P,\ S)|^2$ для «переходного» слоя ясен из рис. 18,4. Заметим, что формула (18,6) справедлива лишь, если

$P<1$. Если же $P>1$, то имеет место полное внутреннее отражение, как это ясно с самого начала, так как в этом случае при $z\to-\infty$ будет $\varepsilon<0$.

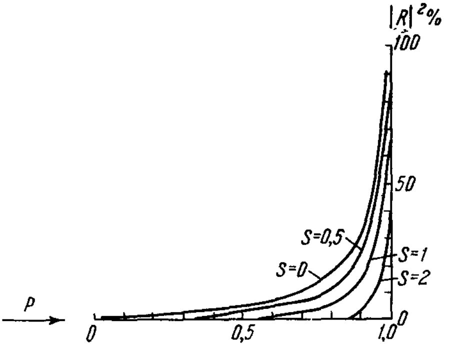


Рис. 18,4. Коэффициент отражения для «переходного» слоя.

При $S\to0$ «переходный» слой стремится к резкой границе раздела, и для $|R|^2$ должна быть справедлива формула Френеля.

Из (18,6) ясно, что это действительно имеет место, и

$$|R|^2_{S\to0}=\left(\frac{1-\sqrt{1-P}}{1+\sqrt{1-P}}\right)^2=\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2, \qquad (18,7)$$

где n — значение показателя преломления при $z>0$.

Простые формулы (18,5) и (18,6) позволяют без труда оценить коэффициент отражения для любого слоя, близкого по форме к довольно типичным «симметричному» и «переходному» слоям. Более подробные сведения об отражении и прохождении волн в случае слоев (18,1) — (18,2) можно найти в [187, 192].

§ 19. Наклонное падение волн на слой

Общие соотношения. Волна с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости падения. Рассмотрим теперь случай наклонного падения плоских гармонических волн на плоскослоистую среду. Исходными здесь являются уравнения (16,1) или (16,2) с $\varepsilon'=\varepsilon'(\omega, z)$, где ось z совпадает с нормалью к слою.

Выбор направления осей x и y содержит известный произвол, чем удобно воспользоваться, считая волновую нормаль лежащей в плоскости yz (рис. 19,1). Тогда вне слоя (на рис. 19,1 при $z<0$) падающая (плоская) волна имеет вид:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{-i\frac{\omega}{c}(\sin\theta_0 y+\cos\theta_0 z)}=\mathbf{E}_0e^{-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}}, \qquad (19,1)$$

где $\mathbf{k}_0=\frac{\omega}{c}\{0, \sin\theta_0, \cos\theta_0\}$, $\mathbf{r}=\{x, y, z\}$, поглощение предполагается отсутствующим, а показатель преломления равным единице. Очевидно, что такой выбор осей, при котором $k_{0x}=0$, всегда возможен и не нарушает общности задачи. Поскольку падающая волна не зависит от координаты x, то же будет иметь место и для «преломленной» волны в неоднородной среде, свойства которой от x не зависят. Следовательно, в (16,1) производные по x можно считать равными нулю.

Поэтому уравнение (16,1) в компонентах имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(z)E_y-\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0,\\ &\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(z)E_z-\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0, \end{aligned}\right\} \tag{19,2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(z)E_x=0. \tag{19,3}$$

Поле волны $\boldsymbol{E}$ всегда можно разложить на волны с двумя взаимно-перпендикулярными направлениями поляризации. В качестве одного из этих направлений выберем ось x. Тогда, как ясно из (19,2) и (19,3), компонента поля E_x совершенно не зависит от компонент E_y и E_z, т. е. если на слой падает волна, у которой вектор $\boldsymbol{E}$ направлен по оси x, то направление вектора $\boldsymbol{E}$ в среде остается неизменным. Для волны, у которой вектор $\boldsymbol{E}$ лежит в плоскости yz, напротив, компоненты E_y и E_z связаны и зависят от координат, что вполне понятно из рассмотрения траектории лучей (см. ниже). Заметим, что в общем случае неоднородной изотропной среды независимость падающих волн обоих типов поляризации друг от друга места не имеет, а в нашем случае она явилась следствием неизменности ε' в направлении оси x.

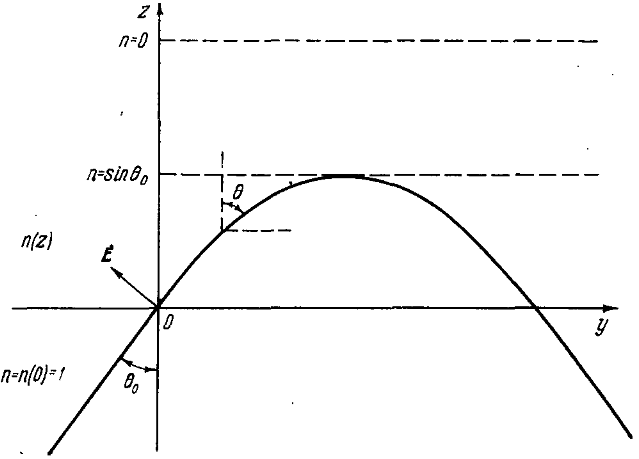


Рис. 19,1. Наклонное падение волны на слой. При $z<0$ показатель преломления равен $n=n(0)=1$, при $z>0$ он равен $n=n(z)$.

Рассмотрим сначала волновое уравнение (19,3) для компоненты E_x, которое отличается от уравнения (16,3) лишь членом $\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}$. Положим

$$E_x = F(z)\, e^{\pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \sin\theta \cdot y} = F(z)\, e^{\pm ik\alpha y}, \tag{19,4}$$

где

$$k(z) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'(z)} \quad \text{и} \quad \alpha(z) = \sin\theta(z).$$

Тогда из (19,3) получаем:

$$\frac{d^2F}{dz^2} + k^2(1-\alpha^2)F = \\ = \mp 2i \frac{d(k\alpha)}{dz} y \frac{dF}{dz} + \left\{ \mp iy \frac{d^2(k\alpha)}{dz^2} + y^2 \left[\frac{d(k\alpha)}{dz} \right]^2 \right\} F. \tag{19,5}$$

Поскольку это уравнение должно удовлетворяться при всех y, ясно, что правая и левая части равны нулю, т. е.

$$\frac{d^2F}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'(z)\,(1-\alpha^2(z))\,F = 0 \tag{19,6}$$

и

$$\frac{d(k\alpha)}{dz} = 0. \tag{19,7}$$

Переход от равной нулю правой части (19,5) к (19,7) также обусловлен произвольностью координаты y. Из (19,7) следует:

$$k\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'}\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'(z)} \sin\theta(z) = k_0\alpha_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'(0)} \sin\theta_0 = \text{const}. \tag{19,8}$$

При отсутствии поглощения $\sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{\varepsilon} = n(z)$, и соотношение (19,8) можно записать в виде:

$$n(z) \sin\theta(z) = \sin\theta_0, \tag{19,9}$$

где θ_0 — угол падения волны на слой, в начале которого $n = n(0) = 1$ (отождествление введенного выше угла θ с углом волновой нормали с осью z ясно из приводимой ниже формулы (19,14)).

Соотношение (19,9) соответствует закону преломления на границе раздела двух сред:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

Поэтому формулу (19,9) легко получить также элементарным путем, рассматривая неоднородную среду как предельный случай среды, составленной из большого числа однородных слоев.

Уравнение (19,6) имеет вид (16,3) с заменой $\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(z)$ на

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(z)\left(1-\alpha^2(z)\right)=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(z)\cos^2\theta=\frac{\omega^2}{c^2}\{\varepsilon'(z)-\varepsilon'(0)\alpha_0^2\}.$$

Таким образом, решение уравнения (19,6) сводится к решению уравнения (16,3) с той же функциональной зависимостью ε' от z (линейный слой остается линейным и т. д.). Например, для линейного слоя (17,1) коэффициент у F в (19,6) равен $\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\varepsilon(0)\sin^2\theta_0-\frac{z}{z_1}\right)$, и уравнение (19,6) переходит в (17,3) путем введения переменной

$$\zeta=\left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{1/3}[z_1(1-\varepsilon(0)\sin^2\theta_0)-z].$$

Приближение геометрической оптики. Отсюда ясно, что в применении к уравнению (19,3) можно сразу же написать решение в приближении геометрической оптики, сравнивая (16,3), (16,10), (16,11) с (19,3), (19,4), (19,6) и (19,8). В результате

$$E_x=\frac{E_{x0}}{\sqrt[4]{\varepsilon'(z)-\varepsilon'(0)\alpha_0^2}}\,e^{\pm i\frac{\omega}{c}\left\{\int\limits_0^z\sqrt{\varepsilon'(z)-\varepsilon'(0)\alpha_0^2}\,dz+\sqrt{\varepsilon'(0)}\alpha_0 y\right\}}, \qquad (19,10)$$

$$\varepsilon'(0)\alpha_0^2=\varepsilon'(0)\sin^2\theta_0=\mathrm{const},$$

или при отсутствии поглощения

$$E_x=\frac{E_{x0}}{\sqrt[4]{n^2(z)-n^2(0)\sin^2\theta_0}}\,e^{\pm i\frac{\omega}{c}\left\{\int\limits_0^z\sqrt{n^2(z)-n^2(0)\sin^2\theta_0}\,dz+n(0)\sin\theta_0\cdot y\right\}}. \qquad (19,11)$$

Эта формула помимо зависимости от y отличается от имеющей место при нормальном падении заменой $n(z)$ на

$$\sqrt{n^2(z)-n^2(0)\sin^2\theta_0}=n(z)\cos\theta(z).$$

Уже отсюда, а также непосредственно из (19,6) ясно, что отражение волны от слоя имеет место в области около точки z_0, где

$$n(z_0)=n(0)\sin\theta_0. \qquad (19,12)$$

Из (19,9) явствует, что равенство (19,12) есть просто условие полного внутреннего отражения, имеющего место при $\theta=\frac{\pi}{2}$ (в (19,9) принято, что $n(0)=1$). Поскольку, как уже отмечено, различие между случаями нормального и наклонного падений сводится в соответствующем уравнении к замене $n(z)$ на $n(z)\cos\theta$, ясно, что условие применимости первого приближения геометрической оптики (16,22) заменится при наклонном падении на условие

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|\frac{\dfrac{d(n\cos\theta)}{dz}}{n^2\cos^2\theta}\right| \ll 1, \qquad (19,13)$$

где $n(z)\sin\theta(z) = n(0)\sin\theta_0 = \mathrm{const}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{n^2(z)-n^2(0)\sin^2\theta_0}}{n(z)}$.

Это условие, очевидно, нарушается при $\cos\theta \to 0$, т. е. вблизи точки отражения (19,12).

Лучевая трактовка. В приближении геометрической оптики можно перейти от волновой к лучевой трактовке. В однородной изотропной среде направление луча (направление потока энергии или направление движения волнового импульса; см. § 24) совпадает с направлением нормали к волновой поверхности. То же имеет место в области применимости геометрической оптики, так как в этом случае среду можно считать квазиоднородной, и на относительно небольших участках волна распространяется так же, как в однородной среде с соответствующими значениями ε и σ (см. также § 24).

Направление нормали сразу же получается из (19,11) путем нахождения grad E_x, причем в силу медленной зависимости знаменателя от z дифференцировать нужно лишь экспоненциальный множитель. Таким образом, находим компоненты волнового вектора $\boldsymbol{k}$:

$$\left.\begin{aligned} &k_x = 0, \quad k_y = \frac{\omega}{c}n(0)\sin\theta_0 = \frac{\omega}{c}n(z)\sin\theta, \\ &k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{n^2(z)-n^2(0)\sin\theta_0} = \frac{\omega}{c}n(z)\cos\theta, \\ &k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}n^2(z). \end{aligned}\right\} \qquad (19,14)$$

Единичный вектор нормали к волновому фронту равен $\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$. Вектор $\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$ в изотропной квазиоднородной среде, как сказано, является одновременно касательным к траектории луча.

Вблизи точки отражения z_0 (в этой точке $n(z_0) = n(0)\sin\theta_0$) приближение геометрической оптики неприменимо и направление нормали к волновой поверхности не совпадает с направлением движения центра тяжести волнового импульса. Об этом еще будет идти речь в § 34. Сейчас же заметим, что для линейного слоя (17,1) и для произвольного слоя вдали от критической частоты имеет место полное внутреннее отражение, причем, сравнивая (16,3), (17,10) и (19,4), (19,6), легко видеть, что изменение фазы волны в результате отражения от слоя при наклонном падении равно

$$\varphi=\frac{2\omega}{c}\int_0^{z_0}\sqrt{n^2(z)-n^2(0)\sin^2\theta_0}\,dz+\frac{\omega}{c}n(0)\sin\theta_0(y_2-y_1)-\frac{\pi}{2}=$$
$$=2\int_0^{z_0}k_z\,dz+k_y(y_2-y_1)-\frac{\pi}{2};\qquad(19{,}15)$$

здесь $n(z_0)-n(0)\sin\theta_0=0$, поглощение для простоты считается равным нулю и y_2, y_1 — точки на оси y (при $z=0$), для которых определяется разность фаз φ.

Вообще в области применимости геометрической оптики изменение фазы волны на пути l равно (см. (19.11), (19,14))

$$\varphi=\frac{\omega}{c}\int_l n(z)\,ds=\int \boldsymbol{k}\,d\boldsymbol{s},\qquad(19{,}16)$$

где $d\boldsymbol{s}$ — элемент траектории луча, направление которого такое же, как и направление вектора $\boldsymbol{k}$.

Траектория луча, падающего на среду в точке $y=y_1$ и $z=0$, где $n(0)=1$, под углом θ_0 (см. рис. 19,1), определяется, очевидно, уравнением $\left(\text{см. (19,14), откуда ясно, что вдоль траектории луча } \frac{dy}{dz}=\frac{k_y}{k_z}=\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{n^2(z)-\sin^2\theta_0}}\right)$

$$y=y_1+\int_0^z\frac{\sin\theta_0\,dz}{\sqrt{n^2(z)-\sin^2\theta_0}}.\qquad(19{,}17)$$

О волнах с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения. Перейдем теперь к рассмотрению распространения волны, электрический вектор которой лежит в плоскости yz (см. уравнения (19,2)). Физически отличие этого случая от предыдущего связано с тем, что при изменении направления волнового вектора по мере углубления волны в слой должен происходить также поворот вектора $\boldsymbol{E}$.

Раньше всего удобно несколько преобразовать уравнения (19,2), воспользовавшись соотношением

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right)=0,\qquad(19{,}18)$$

вытекающим из уравнения поля (2,1).

В нашем случае

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right)=\operatorname{div}\varepsilon'\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\operatorname{grad}\varepsilon')+\varepsilon'\operatorname{div}\boldsymbol{E}=$$
$$=E_z\frac{d\varepsilon'}{dz}+\varepsilon'\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0, \qquad (19,19)$$

откуда

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\left(E_z\frac{d\ln\varepsilon'}{dz}\right).$$

Разумеется, в однородной среде из (19,19) следует, что $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$, а также $\operatorname{div}\boldsymbol{D}=0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$, поскольку $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$.

Используя приведенное выражение для $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}$ и считая для простоты, что поглощение отсутствует (т. е. полагая $\varepsilon'=\varepsilon$), мы можем записать уравнения (19,2) в виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_y}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(z)E_y+\frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{d\ln\varepsilon(z)}{dz}=0,\\ \frac{\partial^2E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(z)E_z+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_z\frac{d\ln\varepsilon(z)}{dz}\right)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (19,20)$$

Ограничимся сейчас рассмотрением второго из уравнений (19,20) для E_z. Подставляя в это уравнение решение в виде

$$\left.\begin{aligned}&E_z=\alpha(z)F_z(z)e^{\pm ik(z)\alpha(z)y},\\ &k(z)=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(z)}=\frac{\omega}{c}n(z),\quad \alpha(z)=\sin\theta(z)\end{aligned}\right\} \qquad (19,21)$$

и отделяя так же, как и в случае (19,5), члены, содержащие y и y^2, получаем для $k\alpha$ уравнение (19,7) и для F_z уравнение

$$\frac{d^2F_z}{dz^2}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(z)(1-\alpha^2(z))+\frac{1}{2}\frac{d^2\ln\varepsilon}{dz^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{d\ln\varepsilon}{dz}\right)^2\right]F_z=0. \qquad (19,22)$$

В (19,22) уже учтено, что в силу (19,7) и пренебрежения поглощением

$$\frac{2\dfrac{d\alpha}{dz}}{\alpha}=-\frac{d\ln\varepsilon}{dz}.$$

Легко видеть, что при наличии поглощения в (19,22) нужно просто заменить ε на ε'.

Заметим, что в формулах (19,2) и (19,3) переход к случаю нормального падения очевиден, так как при этом производные по y равны нулю, и $\left(\text{в силу того, что } \operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{dE_z}{dz}\right)$ уравнения (19,2) принимают вид (2,26) и (2,27). В (19,6) переход к нормальному падению также достигается сразу, если положить $\alpha = 0$. Что касается уравнения (19,22), то при $\alpha \to 0$ использовать его для вычисления компоненты E_z не нужно, поскольку при $\alpha \to 0$ компонента $E_z \to 0$ (последнее следует из (19,21) и совершенно очевидно сразу же в силу поперечности поля).

Уравнение (19,22) отличается от (19,6) лишь членами, содержащими производные от ε. Легко видеть, что в приближении геометрической оптики этими членами можно пренебречь, и, таким образом, для E_z получается выражение (19,11), но умноженное еще на $\alpha(z) = \sin\theta(z)$ (см. (19,4) и (19,21)). Появление этого множителя вполне понятно, так как при пренебрежении производной $\frac{d\varepsilon}{dz}$, согласно (19,19), $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$ и вектор $\boldsymbol{E}$ перпендикулярен к волновому вектору $\boldsymbol{k}$; поэтому проекция E_z на ось z должна быть пропорциональна $\alpha(z) = \sin\theta$, где θ — угол между $\boldsymbol{k}$ и осью z (см. (19,14) и рис. 19,1).

В области, где геометрическая оптика неприменима, в частности вблизи «точки отражения» z_0, характер волнового поля для волн различной поляризации уже не одинаков, так как уравнение (19,22) эквивалентно волновому уравнению (16,3) для нормального падения с эффективным значением ε, равным

$$\varepsilon_{\text{эфф}}(z) = \varepsilon(z) - \varepsilon(0)\sin^2\theta_0 + \left(\frac{\lambda_0}{2\pi}\right)^2 \left[\frac{\frac{d^2\varepsilon}{dz^2}}{2\varepsilon} - \frac{3}{4}\frac{\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2}{\varepsilon^2}\right]; \quad (19,23)$$

здесь учтено, что

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\ln\varepsilon}{dz^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\ln\varepsilon}{dz}\right)^2 = \frac{\frac{d^2\varepsilon}{dz^2}}{2\varepsilon} - \frac{3}{4}\frac{\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2}{\varepsilon^2}.$$

В то же время уравнение (19,6), отвечающее наклонному падению волны с вектором $\boldsymbol{E}$, направленным по оси x, эквивалентно уравнению (16,3) с $\varepsilon_{\text{эфф}} = \varepsilon(z) - \varepsilon(0)\sin^2\theta_0$.

Выражение (19,23) при $\varepsilon \to 0$ стремится к бесконечности, т. е. вид эффективного показателя преломления в этом случае радикально изменяется; в районе точки z_0 различие между $\varepsilon_{\text{эфф}}$ и $\varepsilon(z) - \varepsilon(0)\sin^2\theta_0$ особенно существенно при малых значениях $\alpha_0 = \sin\theta_0$, так как $\varepsilon(z_0) = \varepsilon(0)\sin\theta_0$ и, следовательно, $\varepsilon(z_0) \to 0$ при $\sin\theta_0 \to 0$.

Для линейного слоя множитель перед F_z в (19,22), т. е. введенная выше величина $\varepsilon_{\text{эфф}}$, принимает вид:

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = \varepsilon(z) - \varepsilon(0)\alpha_0^2 - \frac{3\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)^2}{4\varepsilon^2}\left(\frac{\lambda_0}{2\pi}\right)^2$$

и обращается в нуль при $z < z_0$, где z_0 определяется из условия $\varepsilon(z_0) = \varepsilon(0)\alpha_0^2$. Таким образом, волна начинает затухать несколько раньше, чем при $\alpha = \sin\theta = 1$. В условиях ионосферы это смещение «точки отражения» обычно ничтожно мало. В особом исследовании, как уже только что было отмечено, нуждается лишь область малых углов падения. Вместе с тем при $\alpha_0 = 0$ мы имеем просто известный случай нормального падения, когда $E_z = 0$, и, следовательно, результат предельного перехода $\alpha \to 0$ известен.

Область выше точки отражения для достаточно толстого слоя казалось бы не представляет интереса; при нормальном падении волна в этой области экспоненциально затухает, и аналогичного поведения можно было бы ожидать и при наклонном падении. В действительности, однако, в случае наклонного падения волны с лежащим в плоскости падения вектором $\boldsymbol{E}$ подобное экспоненциальное падение поля нарушается вблизи точки $\varepsilon(\omega, z) = 0$. При приближении к этой точке снизу (из области больших значений ε) поле начинает расти, и при отсутствии поглощения в самой точке $\varepsilon = 0$ компоненты E_y и E_z стремятся даже к бесконечности (фактически значения E_y и E_z становятся конечными не только при учете поглощения, но и по другим причинам, о которых еще будет идти речь в § 20). Этот интересный результат связан в формальном отношении с уже отмеченной особенностью функции $\varepsilon_{\text{эфф}}$ при $\varepsilon = 0$ (см. (19,23)).

Уравнение для магнитного поля волны. Вопрос о поведении поля в области $\varepsilon \approx 0$ при наклонном падении подробно разбирается в § 20. Здесь же отметим, что при исследовании наклонного падения волны с вектором $\boldsymbol{E}$, лежащим в плоскости падения, удобнее работать с уравнением для магнитного поля волны. Действительно, в этом случае, как ясно из уравнения $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{i\omega}{c}\varepsilon'\boldsymbol{E}$, можно положить*)

$$\left.\begin{aligned} E_y = -\frac{ic}{\omega\varepsilon'}\frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{ic}{\omega\varepsilon'}\frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ H_y = H_z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (19,24)$$

Поле $\boldsymbol{H}$ подчиняется при этом общему волновому уравнению (16,2), которое в данном случае принимает вид:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{1}{\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dz}\frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{\omega^2}{c^2}H_x = 0. \qquad (19,25)$$

---

*) Если H_y или H_z не равны нулю, то, вообще говоря, и $E_x \neq 0$. Нас же интересует случай, когда $E_x = 0$. Ему как раз и отвечает выбранное поле $\boldsymbol{H}$ с $H_y = H_z = 0$.

После подстановки в это уравнение выражения

$$H_x = G(z)\, e^{\pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \sin\theta \cdot y} \tag{19,26}$$

приходим, так же как при переходе от уравнения (19,3) к (19,6) и (19,7), к закону преломления (19,8) и уравнению для G:

$$\frac{d^2G}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dz}\frac{dG}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon'(z) - \varepsilon'(0)\sin^2\theta_0\right) G = 0. \tag{19,27}$$

Это уравнение несколько сложнее уравнения (19,6) для $F(z) = E_x e^{\mp i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} \sin\theta \cdot y}$, но проще системы уравнений (19,20). Конечно, уравнения (19,27) и (19,22) для $F_z = \frac{E_z}{\sin\theta(z)} e^{\mp i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'(z)} \sin\theta \cdot y}$ уже мало чем отличаются в смысле сложности, но, зная G, мы сразу же получаем и E_y и E_z, в то время как переход от F_z к E_y непосредственно не производится. Итак, в рассматриваемом случае, как и в ряде аналогичных, в силу характера симметрии задачи более целесообразно исследовать уравнение для $\boldsymbol{H}$, а не для $\boldsymbol{E}$.

§ 20. Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной изотропной плазме. Взаимодействие электромагнитных и плазменных волн

Физическая картина явления. Для того чтобы довольно громоздкие расчеты не помешали ясно представлять себе физическую картину явления, начнем сразу же с качественного изложения результатов.

Если волна падает нормально на слой неоднородной непоглощающей плазмы, то полное отражение волны происходит вблизи точки $\varepsilon(\omega, z_1) = 0$ и, таким образом, образуется стоячая волна; амплитуда этой волны осциллирует в области $z < z_1$ и экспоненциально затухает в области $z > z_1$, где $\varepsilon < 0$. Зависимость поля от z в области отражения для этого случая подробно обсуждается в § 32, а в качественном отношении ясна на основании сказанного и из рис. 20,1, *а*. На этом рисунке указана зависимость квадрата модуля поля $|E_x|^2$ при наклонном падении волны на слой, когда вектор $\boldsymbol{E}$ перпендикулярен к плоскости падения ($E_y = E_z = 0$, $E_x \neq 0$; см. рис. 19,1). При переходе к нормальному падению, как сказано, картина сохраняется, но, конечно, $\sin\theta_0 = 0$ и в «точке отражения» $n(\omega, z_1) = \sqrt{\varepsilon(\omega, z_1)} = 0$.

При интересующем нас сейчас наклонном падении на слой волны, в которой вектор E лежит в плоскости падения ($E_x = 0$,

$E_y \neq 0$, $E_z \neq 0$), картина поля уже другая (рис. 20,1, *б*). В области «точки отражения» z_0, где $n(\omega, z_0) = \sin\theta_0$, поле ведет себя так же, как для волны с $E_y = E_z = 0$ или для нормального падения, т. е. так же, как на рис. 20,1, *а*. Но в дальнейшем по мере углубления в слой и приближения к точке, где $n(\omega, z_1) = \sqrt{\varepsilon(\omega, z_1)} = 0$, поле начинает возрастать. Более того, это возрастание, при пренебрежении поглощением, образованием плазменных волн и нелинейными эффектами (см. ниже) оказывается бесконечным для обеих компонент E_y и E_z.

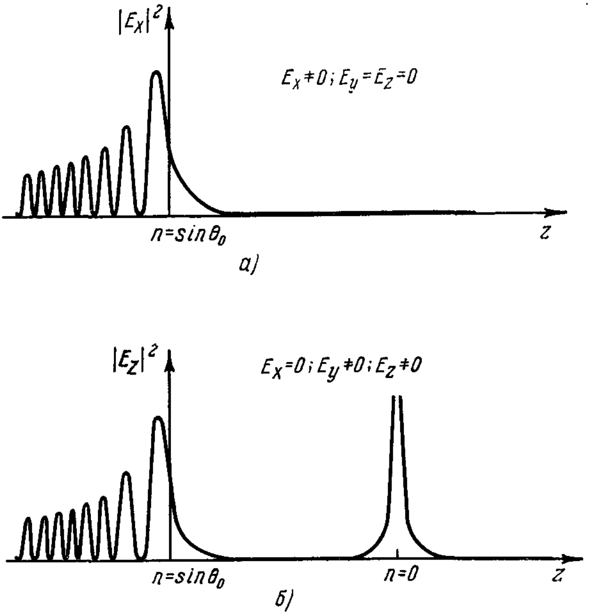


Рис. 20,1. Квадрат модуля компоненты электрического поля при отражении от неоднородного слоя волны, падающей под углом θ_0. Показатель преломления равен $n = n(z)$: *а*) волна с электрическим вектором, перпендикулярным к плоскости падения; *б*) волна с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения.

Такая особенность поля в точке $n = 0$, очевидно, исчезает при нормальном падении. Кроме того, при достаточно больших углах падения θ_0 и учете сколь угодно малого поглощения, когда поля E_y и E_z везде конечны, возрастание поля в точке $n = 0$ с ростом угла θ_0 становится все менее выраженным. Этот результат, вытекающий из проведенных ниже расчетов, вполне естествен физически. Дело в том, что с ростом угла θ_0 расстояние между «точкой отражения» $n(\omega, z_0) = \sin\theta_0$ и точкой, где $n(\omega\ z_1) = 0$, все больше увеличивается. Поэтому при больших θ_0 волне «трудно» просочиться в область $n = 0$.

Поскольку рассматриваемый эффект исчезает и при $\theta = 0$ и при больших углах θ_0, ясно, что он наиболее ярко выражен при некоторых «средних» значениях угла падения θ_0.

Решение волнового уравнения. Вопрос о наклонном падении на слой волны с вектором E, лежащим в плоскости падения, и об особенности поля при $n = 0$ рассматривался в работах [122, 183, 204—208]. Ниже мы будем следовать работе [206], где эта проблема получила наиболее полное решение (см. также [77, 122]).

Исходным при исследовании является уравнение (19,27), которое перепишем еще раз:

$$\left.\begin{aligned} &H_x = G(z)\, e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\alpha_0 y\right)},\\ &\frac{d^2G}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon'(z)}\frac{d\varepsilon'}{dz}\frac{dG}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon'(z) - \alpha_0^2)\, G = 0,\\ &E_y = -\frac{i}{\frac{\omega}{c}\varepsilon'}\frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{i}{\frac{\omega}{c}\varepsilon'}\frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad \alpha_0 = \sin\theta_0. \end{aligned}\right\} \qquad (20,1)$$

В качестве $\varepsilon'(z)$ воспользуемся выражением (3,7) для плазмы, причем сразу же будем считать, что $\omega^2 \gg \nu_{\text{эфф}}^2$. Тогда

$$\varepsilon'(z) \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}\left(1 + i\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\right) = \varepsilon(z) - i\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}.$$

Для простоты предположим также, что поглощение мало меняется с высотой, т. е. $\nu_{\text{эфф}}$ слабо зависит от z. В таком случае мнимую часть $\varepsilon'(z)$ можно считать постоянной и равной ее значению при $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}$. В результате для линейного слоя получаем*):

$$\varepsilon'(z) = -az - i\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} = -az - is, \qquad (20,2)$$

где $a > 0$, так что для значений $z > 0$ диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z) < 0$.

Дифференциальное уравнение (20,1) запишется теперь в виде:

$$\frac{d^2G}{dz^2} - \frac{a}{az + is}\frac{dG}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}(-az - is - \alpha_0^2)\, G = 0.$$

---

*) Для произвольного слоя выражение (20,2) также обычно пригодно в малой окрестности нуля функции $\varepsilon'(z)$, где неприменимо приближение геометрической оптики (см. § 30). Выбор в (20,2) других обозначений и другого начала координат по сравнению с принятыми в § 17 диктуется соображениями удобства и не должен повести к недоразумениям, поскольку мы приводим здесь же все необходимые выражения.

Вводя новую переменную $\zeta = az + is$ и обозначение $\rho = \frac{\omega}{ca}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2G}{d\zeta^2} - \frac{1}{\zeta}\frac{dG}{d\zeta} + \rho^2(-\zeta - \alpha_0^2)G = 0, \\ &\rho = \frac{\omega}{ca} = \frac{2\pi}{\lambda_0 a}, \quad a = \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|. \end{aligned}\right\} \tag{20,3}$$

Вид уравнения (20,3) при переходе к случаю $s = 0$, очевидно, не меняется. Единственное отличие задачи с учетом поглощения заключается в том, что в ней «математическая» точка отражения $\zeta = -\alpha_0^2$ соответствует комплексным значениям координаты z. Отметим, кроме того, что для среды с медленно меняющимися свойствами, входящая в уравнение (20,3) величина $\rho = \frac{\omega}{ca} \gg 1$.

Так, в ионосферном F-слое ($a \sim 10^{-7}$) для частоты $\omega \sim 10^8$ имеем $\rho \sim 3\cdot 10^4$.

Как будет показано ниже (см. [204—206]), решение уравнения (20,3), удовлетворяющее необходимым физическим требованиям, принимает некоторое не равное нулю значение $G(0)$ в точке на комплексной плоскости, где $\varepsilon'(z)$ обращается в нуль. Поэтому вертикальная компонента электрического поля

$$E_z = \frac{i}{\frac{\omega}{c}\varepsilon'}\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\alpha_0}{\varepsilon'(z)}G(z)\,e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\alpha_0 y\right)} \tag{20,4}$$

обращается в этой точке в бесконечность. Характер этой особенности зависит от поведения функции $\varepsilon'(z)$, причем для линейного слоя E_z обращается в бесконечность как $\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{az + is}$, а компонента E_y, как будет выяснено ниже, имеет логарифмическую особенность. Эти особенности находятся на вещественной оси только при отсутствии соударений, когда $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} = 0$. При учете же поглощения максимальное значение E_z будет равно

$$|E_z|_{z=0} = \frac{\alpha_0|G(0)|}{s} = \frac{\sin\theta_0\cdot\omega\,|G(0)|}{\nu_{\text{эфф}}}, \tag{20,5}$$

и при достаточно малых s может быть очень большим. При этом величина поля существенным образом зависит от того, какие значения принимает функция $G(0)$. Эта функция зависит от угла падения θ_0 и определяет, таким образом, величину $|E_z|_{z=0}$ во всем интервале значений параметра $\alpha_0 = \sin\theta_0$.

Сравнительно легко установить вид функции $G(z)$ при больших углах падения, когда точка отражения $\zeta = -\alpha_0^2$ (точка $\varepsilon' = \sin^2\theta_0$) и особая точка $\zeta = 0$ (т. е. точка $\varepsilon' = 0$) отстоят друг от друга на значительном расстоянии. Для этой цели вместо уравнения (20,3) удобнее исследовать уравнение

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}-\left[\rho^2(\zeta+\alpha_0^2)+\frac{3}{4\zeta^2}\right]u=0, \qquad (20,6)$$

которому подчиняется функция

$$u(\zeta)=\frac{G(\zeta)}{\sqrt{\zeta}}. \qquad (20,7)$$

Предположение о том, что расстояние между точками $\zeta=-\alpha_0^2$ и $\zeta=0$ велико, означает в данном случае, что это расстояние много больше длины волны. Для среды с медленно меняющимися свойствами ($\rho \gg 1$) это имеет место даже при довольно малых значениях $\alpha_0^2=\sin^2\theta_0$. В подобных условиях приближенное решение уравнения (20,6), справедливое всюду за исключением малой окрестности точки $\zeta=0$ и представляющее слева от $\zeta=-\alpha_0^2$ стоячую волну (рис. 20,2), можно записать в виде (см. [209]):

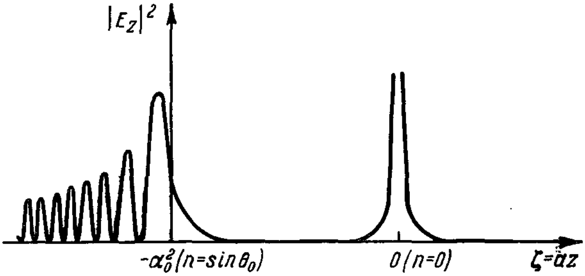


Рис. 20,2. Картина, изображенная на рис. 20.1, *б*, в новых координатах $\zeta=-\varepsilon=az$.

$$u=\sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}\sqrt{\frac{S}{S'}}\,H^{(1)}_{1/3}(iS), \qquad (20,8)$$

где

$$S=\rho\int\limits_{-\alpha_0^2}^{\zeta}\sqrt{\zeta+\alpha_0^2}\,d\zeta=\frac{2}{3}\rho(\zeta+\alpha_0^2)^{3/2}, \qquad S'=\frac{dS}{d\zeta} \qquad (20,9)$$

и $H^{(1)}_{1/3}$ — функция Ганкеля первого рода порядка $^1/_3$. Постоянная, стоящая в решении (20,8), выбрана так, чтобы на границе неоднородного слоя (при $\varepsilon'(z)=1$) амплитуда поля падающей волны была бы равна единице.

Другое приближенное решение, годное справа от точки отражения, можно получить, используя метод, предложенный в работе [209]. Введем новую независимую переменную

$$\xi = \rho \int_0^{\zeta} \sqrt{\zeta + \alpha_0^2}\, d\zeta = \frac{2}{3} \rho \left[(\zeta + \alpha_0^2)^{3/2} - \alpha_0^3 \right]. \tag{20,10}$$

Легко показать, что функция

$$w = A \sqrt{\frac{\xi}{\frac{d\xi}{d\zeta}}}\, H_1^{(1)}(i\xi), \quad A = \mathrm{const}, \tag{20,11}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\zeta^2} - \left[\rho^2 (\zeta + \alpha_0^2) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{d\zeta} \right)^2 + \frac{5}{16 (\zeta + \alpha_0^2)^2} \right] w = 0. \tag{20,12}$$

При малых ζ, как ясно из (20,10), $\xi \approx \rho \alpha_0 \zeta$, и уравнение (20,12) имеет точно такую же особенность в точке $\zeta = 0$, как и основное уравнение (20,6). Кроме того, при больших значениях параметра ρ уравнения (20,12) и (20,6) вообще весьма мало отличаются друг от друга, если исключить из рассмотрения некоторую окрестность точки $\zeta = -\alpha_0^2$, где функция $\frac{5}{16 (\zeta + \alpha_0^2)^2}$ начинает резко расти. Следовательно, вдали от точки $\zeta = -\alpha_0^2$ соответствующим образом выбранные решения этих уравнений будут мало отличаться друг от друга. При этом функция (20,11) аппроксимирует то решение, которое стремится к нулю при $\zeta \to \infty$ (в области отрицательных значений $\varepsilon(z)$).

Мы получили, таким образом, приближенные решения (20,8) и (20,11), передающие асимптотическое поведение искомого решения (при $\rho \gg 1$) в различных областях значения переменной ζ: слева от $\zeta = 0$ (функция (20,8)) и справа от $\zeta = -\alpha_0^2$ (решение (20,11)). В интервале $-\alpha_0^2 < \zeta < 0$ справедливы оба приближения, что дает возможность связать эти решения так, чтобы они передавали поведение одного и того же частного решения нашей задачи. Это сшивание решений дает для константы A значение [206]

$$A = \sqrt{\frac{\pi \rho}{2}}\, e^{i \frac{\pi}{4} - S_0}, \tag{20,13}$$

где

$$S_0 = \rho \int_{-\alpha_0^2}^{0} \sqrt{\zeta + \alpha_0^2}\, d\zeta = \frac{2}{3} \rho \alpha_0^3. \tag{20,14}$$

Учитывая (20,11) и (20,13), окончательную формулу, передающую поведение функции $G(\zeta)$ в области $\zeta > -\alpha_0^2$, можно записать в следующем виде:

$$G(\zeta) = \sqrt{\zeta}\, w = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}}\, e^{i\frac{\pi}{4} - S_0} \sqrt{\frac{\zeta\xi}{\frac{d\xi}{d\zeta}}}\, H_1^{(1)}(i\xi). \qquad (20,15)$$

Если величина ζ настолько мала, что $\xi = \rho\alpha_0\zeta \ll 1$, то при вычислении компонент поля мы можем использовать разложение функции $H_1^{(1)}(i\xi)$ в степенной ряд, ограничиваясь первыми членами разложения

$$H_1^{(1)}(i\xi) \approx -\frac{2}{\pi\xi} - \frac{\xi}{\pi}\ln\xi. \qquad (20,16)$$

Теперь легко видеть, что амплитуды компонент поля ведут себя следующим образом. Амплитуда H_x при $\zeta \to 0$ стремится к постоянному значению (см. (20,1)):

$$|H_x^{(0)}| = |G(0)| \approx \frac{2}{\pi\rho\alpha_0}|A| = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\,\frac{e^{-S_0}}{\alpha_0}. \qquad (20,17)$$

Горизонтальная компонента электрического поля E_y, согласно (20,1), равна (при $\zeta \to 0$)

$$|E_y| \approx \frac{2\alpha_0}{\pi}|A \ln\xi|, \quad \xi = \rho\alpha_0\zeta, \quad \rho = \frac{\omega}{ca}, \quad a = \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|; \qquad (20,18)$$

таким образом, компонента E_y имеет логарифмическую особенность. И, наконец, вертикальная компонента электрического поля E_z обращается в бесконечность по закону (см. (20,4))

$$|E_z| \approx \frac{\alpha_0|G(0)|}{|\zeta|} = \frac{\alpha_0|G(0)|}{\left|az + i\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\right|}. \qquad (20,19)$$

Используя для величины $|G(0)|$ выражение (20,17), окончательно запишем:

$$|E_z| \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\,\frac{e^{-S_0}}{|\zeta|}, \quad S_0 = \frac{2}{3}\rho\alpha_0^3 = \frac{2}{3}\left(\frac{\omega}{ca}\right)\alpha_0^3. \qquad (20,20)$$

При $z = 0$ поле $|E_z|$ принимает максимальное значение (в среде с поглощением $\zeta = az + is$):

$$|E_z|_{z=0} = \frac{\alpha_0|G(0)|}{s} = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\,\frac{e^{-S_0}}{s}. \qquad (20,21)$$

Напомним, что полученные формулы применимы лишь при относительно больших углах падения: при $\alpha_0 = \sin\theta_0 \to 0$ формула (20, 17) дает явно неверный результат, так как при $\alpha_0 = 0$ (нормальное падение) строгое решение задачи свидетельствует о том, что $E_z = 0$.

Для верхних слоев земной ионосферы, где $\rho \gg 1$, приближенные формулы (20,17), (20,18), (20,20) и (20,21) оказываются пригодными вплоть до углов падения θ_0 порядка $4 \div 5°$, и, как легко убедиться, в этих условиях эффект нарастания поля вблизи точки $\zeta = 0$ $(n = 0)$ был бы незначительным $(S_0 \gg 1)$, даже если не учитывать влияния земного магнитного поля, о чем речь пойдет в § 27. (Большие значения электрическое поле может принимать лишь при очень малых значениях $\nu_{\text{эфф}}$, в то время как в ионосфере до максимума F-слоя $\nu_{\text{эфф}} \gg 10^3$.) При этом наличие особенности в точке, где $\varepsilon' = 0$, не сказывается на поведении поля в области, расположенной ниже точки отражения, т. е. отражение волны, имеющей компоненту E_z, в этих условиях происходит так же, как это имеет место для волны, электрический вектор которой перпендикулярен к плоскости падения *).

Формула (20,19) показывает, что величина поля в точке, где $\varepsilon = 0$ (т. е. в точке $z = 0$), помимо $\nu_{\text{эфф}}$, определяется значениями функции $\alpha_0 G(0)$. При нормальном падении, когда $\alpha_0 = 0$, поле равно $E_z = 0$; при больших значениях S_0, как ясно из (20,20), поле E_z падает с ростом α_0. Следовательно, как уже отмечалось, при некотором малом угле падения эффект нарастания поля у точки $\varepsilon = 0$ будет максимальным. В связи с этим интерес представляет поведение функции $\alpha_0 G(0, \alpha_0)$ при всех углах падения. Исследование решений уравнения (20,3) показывает [206], что функция $\alpha_0 \mid G(0, \alpha_0) \mid$ во всем интервале значений параметра α_0 может быть приближенно представлена в виде:

$$\alpha_0 \left| G(0, \alpha_0) \right| = \frac{4\tau v(\tau^2)}{\sqrt{2\pi\rho}} \sqrt{\frac{v(\tau^2)}{-v'(\tau^2)}} = \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt{2\pi\rho}}, \qquad (20,22)$$

где v и v' — функция Эйри и ее производная (см. [200]), а

$$\tau = \rho^{1/3}\alpha_0 = \left(\frac{\omega}{ca}\right)^{1/3} \sin\theta_0. \qquad (20,23)$$

Зависимость максимальной величины $|E_z|$ от угла падения определяется, таким образом, функцией $\Phi(\tau)$, график которой приведен на рис. 20,3; на этом рисунке, кроме того, параллельно оси абсцисс приведен масштаб для угла падения в градусах при $a = 10^{-7}$ *см*$^{-1}$ и $\omega = 2\pi \cdot 10^7$ ($\lambda_0 = 30$ *м*).

---

*) Вся задача рассматривается здесь для стационарного случая. Поэтому остается открытым вопрос о времени установления полученной картины распределения поля. Вместе с тем из физических соображений ясно, что при значительном удалении точки $\varepsilon = 0$ от «точки отражения» $\varepsilon = \sin^2\theta_0$ время установления распределения поля, показанного на рис. 20,1, *б*, может быть весьма большим. Дело в том, что волна при этом может лишь медленно «просачиваться» в область $\varepsilon \approx 0$ и достаточное количество энергии попадет в эту область только по истечении некоторого времени. В более ранние моменты времени поле в области точки $\varepsilon = 0$ будет слабее стационарного, а в самом начале вся картина будет ближе к изображенной на рис. 20,1, *а*, чем к стационарной картине, показанной на рис. 20,1, *б*.

Существенно, что функция $\Phi(\tau)$ принимает значение порядка единицы для очень узкого интервала значений угла падения. Максимум кривой, равный 1,2, приходится для рассматриваемого примера на угол $\theta_0 = 1{,}5°$, а уже при $\theta_0 = 5°$ получим $\Phi(\tau) \sim 10^{-4}$.

Оценим, основываясь на формулах (20,19) и (20,22), значения, которые может достигать поле E_z в различных условиях. Максимальное значение $|E_z|$ равно

$$\frac{1{,}2}{\sqrt{2\pi\rho}}\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}} = \frac{1{,}2}{\sqrt{\frac{2\pi\omega}{ca}}}\frac{\omega}{\nu_{\text{эфф}}}.$$

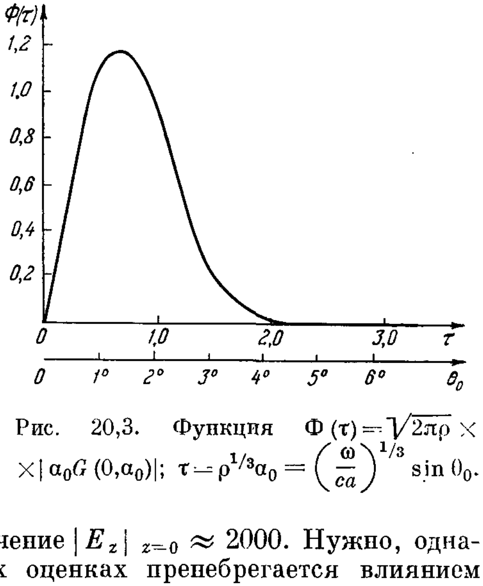


Рис. 20,3. Функция $\Phi(\tau) = \sqrt{2\pi\rho} \times |\alpha_0 G(0, \alpha_0)|$; $\tau = \rho^{1/3}\alpha_0 = \left(\frac{\omega}{ca}\right)^{1/3}\sin\theta_0$.

Поэтому в *E*-слое ионосферы, где можно положить $a \sim 10^{-6}$, при $\lambda_0 = 100$ *м* ($\omega = 6\pi \cdot 10^6$) $|E_z|_{z=0} \approx 3{,}6$ для $\nu_{\text{эфф}} = 10^5$ и $|E_z|_{z=0} \approx 36$ для $\nu_{\text{эфф}} = 10^4$. Для ионосферного *F*-слоя ($a = 10^{-7}$, $\omega = 2\pi \cdot 10^7$, $\lambda_0 = 30$ *м*) при $\nu_{\text{эфф}} = 10^4$ имеем $|E_z|_{z=0} \approx 20$, а при $\nu_{\text{эфф}} = 10^3$ уже $|E_z|_{z=0} \approx 200$. В солнечной короне при $a = \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right| = 10^{-10}$, $\omega = 2\pi \cdot 10^8$ ($\lambda_0 = 3$ *м*) и $\nu_{\text{эфф}} = 10$ максимальное значение $|E_z|_{z=0} \approx 2000$. Нужно, однако, подчеркнуть, что в этих оценках пренебрегается влиянием магнитного поля, чего в случае земной ионосферы заведомо нельзя делать (см. об этом ниже и в § 27). Напомним также, что по предположению на нижней границе неоднородного слоя $|E| = 1$ и $|E_z| = |E| \sin\theta_0 = \alpha_0$.

Известный интерес представляет также эффективный размер области, где поле велико. Из формулы (20,19) легко установить, что величина $|E_z|^2$ спадает до половины своего максимального значения на расстоянии

$$\Delta z = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega a} = \frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\nu_{\text{эфф}}}{ca} \qquad (20{,}24)$$

от точки $z = 0$, где поле максимально. При $\nu_{\text{эфф}} \sim 10^4$ и $a \sim 10^{-7}$, очевидно, $\Delta z \sim \lambda_0$.

Учет пространственной дисперсии и некоторых нелинейных эффектов. Резкое нарастание напряженности электрического поля вблизи точки, где $\varepsilon(0, z) = 0$, может привести к необходимости учета пространственной дисперсии, т. е. невозможности ограничиваться использованием локальной характеристики среды $\varepsilon'(\omega, z)$.

При отсутствии соударений пространственной дисперсией можно пренебречь, если проходимый частицей за период путь $\frac{2\pi v}{\omega}$ мал по сравнению с характерными размерами неоднородности поля. В рассматриваемой задаче при отсутствии соударений и использовании величины $\varepsilon(z)$ поле $\boldsymbol{E}$ в точке $\varepsilon = 0$ возрастало бы до бесконечности. Но в достаточно сильном поле электрон приобретает большую скорость v, так что величина $\frac{2\pi v}{\omega}$ возрастает и использование локальной проницаемости $\varepsilon(\omega)$ становится недопустимым. В результате индукции $\boldsymbol{D}(z)$ отлична от величины $\varepsilon\boldsymbol{E}(z)$ и в точке $\varepsilon = 0$ равна не нулю, а определяется полем $\boldsymbol{E}$ в точке, смещенной на расстояние порядка амплитуды колебаний электрона, т. е. на расстояние порядка v/ω. Поэтому, как было отмечено в [205], в формуле типа (20,19) в точке $z = 0$ (т. е. при $\varepsilon = 0$) в знаменателе стоит не нуль, а величина $a\int_0^t v_z dt$, где v_z — скорость электрона в направлении оси z и $t = 0$ — момент, когда поле обращается в нуль. В сильном поле скорость v_z значительно превосходит скорость теплового движения $v \sim \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}} \sim 10^7$ (при $T \sim 300°$ К) и по порядку величины $v_z \sim \frac{eE_z}{m\omega}$. Отсюда $a\int_0^t v_z dt \sim \frac{aeE_z}{m\omega^2} \sim 10^{-5} E_z$ (при $a \sim 10^{-7}$ и $\omega = 2\pi \cdot 10^7$). Поскольку зависящая от E_z величина $a\int_0^t v_z dt$ появляется в знаменателе выражения типа (20,19) для E_z, ясно, что задача перестает быть линейной. Это и понятно, так как в гармоническом во времени, но сильно неоднородном поле электрон движется уже не по гармоническому закону.

Обсуждаемый нелинейный эффект в неоднородной плазме становится существенным, если значение $a\int_0^t v_z dt$ сравнимо с величиной $\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$, которая появляется в знаменателе выражения (20,19) при учете поглощения. В F-слое, как мы видели, $\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \sim 10^{-4}$ и в то же время $a\int_0^t v_z dt \sim 10^{-5} E_z \sim 10^{-4}$ только при $E_z \sim 10 =$

$= 3000$ *в/см*; но в тех же условиях поле в точке $\varepsilon = 0$ больше поля в начале слоя лишь в 20 раз (см. выше) и, таким образом, нелинейный эффект нужно было бы учитывать только в очень сильных полях, с которыми не приходится иметь дело в случае ионосферы.

Еще более важно другое обстоятельство: в неоднородном электрическом поле на среду (в частности, плазму) действуют силы, которые изменяют само распределение плотности среды. Усредненная за период $\frac{2\pi}{\omega}$ сила на плазму, отнесенная к одному электрону, равна

$$\boldsymbol{F} = \frac{\varepsilon - 1}{16\pi N} \nabla |\boldsymbol{E}|^2 = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \nabla |\boldsymbol{E}|^2, \tag{20,25}$$

где $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ и соударения не учитываются*). Силе $\boldsymbol{F}$ в (20,25) отвечает потенциал [210]

$$\boldsymbol{F} = -\nabla\Phi, \quad \Phi = \frac{e^2}{4m\omega^2} |\boldsymbol{E}|^2, \tag{20,25а}$$

и таким образом, частицы плазмы как бы находятся в дополнительном потенциальном поле, аналогичном полю тяжести. Заметим, что скорость упорядоченного движения электрона в поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ равна $v_z = -i\,\frac{eE_z}{m\omega}$ и, следовательно, $\Phi = \frac{m}{4} |v_z|^2$.

В результате, распределение электронной и ионной концентрации в ионосфере, как уже упомянуто, будет изменяться; такой нелинейный эффект [211], вообще говоря, значительно больше нелинейного эффекта, обсуждавшегося выше и малого, если

$$a \int_0^t v_z\, dt \sim \frac{2\pi a v_z}{\omega} \sim a\, \frac{eE_z}{m\omega^2} \ll \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}. \tag{20,26а}$$

Влияние же потенциала (20,25а) можно считать малым лишь при условии, что максимальное значение $\Phi_{\max} = \frac{e^2 E_{\max}}{4m\omega^2} = \frac{m}{4} |v_{z,\,\max}|^2$ мало по сравнению с кинетической энергией электрона $\frac{m v_T^2}{2}$, т. е. при условии

$$v_z \sim \frac{eE_z}{m\omega} \ll v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}} \tag{20,26б}$$

(здесь, как и ранее, мы не делаем различия между v_z и $|v_z|$).

---

*) Если пользоваться вещественным полем в форме $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t} + \boldsymbol{E}_0^* e^{-i\omega t})$, которая применена ниже (см. § 24), то сила $\boldsymbol{F} = \frac{\varepsilon - 1}{16\pi N} \nabla (\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{E}_0^*)$.

При $v_T \sim 10^7$ *см/сек*, $\nu_{\text{эфф}}/\omega \sim 10^{-4}$, $a \sim 10^{-7}$ *см*$^{-1}$ и $\omega = 2\pi \cdot 10^7$, условие (20,26а) сводится к неравенству $E_z \ll 10 = 3000$ *в/см*. Условие же (20,26б) имеет в этом случае вид $E \ll 10^{-3} = 0{,}3$ *в/см*.

Насколько нам известно, количественный анализ влияния силы F (20,25) на ионосферные слои еще не производился. Кроме того, указанные два нелинейных эффекта не являются единственными эффектами, определяющими характер электромагнитных процессов в области $\varepsilon \approx 0$. В частности, как мы сейчас увидим, в этой области для пренебрежения пространственной дисперсией условие (20,26а) не является достаточным. Этот вопрос имеет общее значение, в силу чего остановимся на нем несколько подробнее.

В плазме пренебрежение пространственной дисперсией эквивалентно отбрасыванию в кинетическом уравнении члена, содержащего пространственные производные. Допустим, например, что для величины φ — отклонения функции распределения от равновесной функции f_{00}, можно воспользоваться уравнением *)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{e}{m} E_x \frac{\partial f_{00}}{\partial v_x} + \nu(v)\,\varphi = 0. \qquad (20,27)$$

Тогда отбрасывание члена $v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ приводит к локальной связи $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$ с $\boldsymbol{E}$ (см. § 6), т. е., действительно, эквивалентно пренебрежению пространственной дисперсией. Законность такой операции может быть проверена в результате вычисления члена $v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, исходя из решения задачи при пренебрежении этим членом, т. е. из решения $\varphi = -\frac{\frac{e}{m} E_x \frac{\partial f_{00}}{\partial v_x}}{i\omega + \nu(v)}$, где поле E_x уже считается монохроматическим. Для волны, распространяющейся вдоль оси z в однородной среде, $E_x = E_{x_0} e^{-i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'}z}$ и $v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'}\, v_z \varphi = -(in + \varkappa)\frac{\omega}{c} v_z \varphi$. Для того чтобы пренебрежение этим членом было оправдано, он, как ясно из сказанного, должен быть мал по сравнению с остающимся в (20,27) членом $(i\omega + \nu)\,\varphi$. Отсюда при сравнении отдельно вещественной и мнимой частей получаем условия:

$$\frac{vn}{c} \ll 1 \quad \left(\text{или } \frac{v}{\omega} \ll \frac{c}{\omega n} = \frac{\lambda_0}{2\pi n} = \frac{\lambda}{2\pi}\right), \qquad (20,28\text{а})$$

$$\frac{v\omega\varkappa}{c} \ll \nu_{\text{эфф}} \quad \left(\text{или } l = \frac{v}{\nu_{\text{эфф}}} \ll \frac{c}{\omega\varkappa}\right); \qquad (20,28\text{б})$$

---

*) Уравнение (20,27) получается из (8,21) при учете соударений и в предположении, что $E_y = E_z = 0$, а φ и E_x зависят только от z.

здесь частота соударений $\nu(v)$ заменена на $\nu_{\text{эфф}}$, а проекция скорости — на характерное в задаче значение самой скорости v $\left(\text{в слабом поле для максвелловской плазмы } v \sim v_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\right)$.

Условие (20,28а) для рассматриваемых поперечных волн всегда выполняется в полном согласии со сказанным в § 8. Условие же (20,28б), о котором в § 8 не было речи, поскольку поглощение вообще не учитывалось, означает, что длина свободного пробега l должна быть мала по сравнению с расстоянием $\frac{c}{\omega\varkappa}$, на котором амплитуда волны заметно изменяется в силу поглощения *).

Для волн, распространяющихся в неоднородной среде, и это как раз важно подчеркнуть, условия пренебрежения пространственной дисперсией жестче, чем для однородной среды. Объясняется это просто тем, что амплитуда поля в неоднородной среде может заметно изменяться и при отсутствии поглощения, т. е. на расстояниях, меньших $\frac{c}{\omega\varkappa}$. В то же время, если амплитуда волны меняется на характерном расстоянии $L_{\text{а}}$, а фаза — на характерном расстоянии $L_{\text{ф}}$, то условия (20,28а) и (20,28б) заменяются, очевидно, на следующие:

$$\frac{v}{\omega} \ll L_{\text{ф}}, \quad l \ll L_{\text{а}} \quad \left(\text{или } \nu_{\text{эфф}} \gg \frac{v}{L_{\text{а}}}\right). \tag{20,28в}$$

В задаче об особенности поля в точке $\varepsilon = 0$ амплитуда поля E_z существенно изменяется на расстоянии порядка $\Delta z = \frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\nu_{\text{эфф}}}{ca}$ (см. (20,24)). Поэтому второе из условий (20,28в) принимает вид $\nu_{\text{эфф}} \gg \frac{v}{\Delta z} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{vca}{\nu_{\text{эфф}}}$, или

$$\nu^2_{\text{эфф}} \gg \frac{2\pi c}{\lambda_0} va = \omega va. \tag{20,29}$$

При $a = \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right| \sim 10^{-7}$, $\omega = 2\pi \cdot 10^7$ и $v \sim \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}} \sim 10^7$ это условие принимает вид $\nu_{\text{эфф}} \gg 10^4$. Такое неравенство в ионосферном F-слое не соблюдается, и, следовательно, для строгого вычисления поля вблизи точки $\varepsilon = 0$ нужно было бы использовать кинетическое уравнение. Если иметь в виду применение к ионосфере, в соответствующем исследовании нет, однако, необходимости. Дело в том, что выше не учитывалось влияние земного магнитного поля, в силу чего только и можно было считать ионосферную плазму изотропной. Как мы увидим в § 27, учет влияния магнитного поля в применении к ионосфере существенно изменяет картину. Поэтому, когда выше при численных оценках речь шла об ионосфере, это носило условный характер и служило, собственно, только для целей выбора каких-то параметров среды. Аналогичным образом мы будем поступать и ниже при обсуждении еще одного эффекта, обеспечивающего конечность поля в точке $\varepsilon = 0$.

---

*) В применении к металлам условия (20,28*а*) и (20,28*б*) отвечают возможности использовать теорию нормального скин-эффекта (см., например, [3,212]).

Учет образования плазменных волн. Взаимодействие между различными нормальными волнами. Этот эффект состоит в том, что в области вблизи точки $\varepsilon = 0$ падающая наклонно на слой волна с электрическим вектором $\boldsymbol{E}$, лежащим в плоскости падения, частично переходит в плазменную волну. Другими словами, как раз в этом случае нельзя игнорировать возможность появления плазменных волн в связи с тем, что в точке $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 0$ (поглощением пренебрегаем) частота волны ω как раз равна частоте плазменных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}$. Уже поэтому можно думать, что характерное поведение вертикальной компоненты E_z в окрестности точки $\varepsilon = 0$ связано с резонансными свойствами плазмы. Функция, изображающая зависимость $|E_z|^2$ от z, представляет собой при этом своего рода резонансную кривую (см. рис. 20,1, *б* и 20,2), которая вблизи максимума ($\varepsilon = 0$, $z = 0$) имеет вид $|E_z|^2 = \frac{\text{const}}{(az)^2 + \left(\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\right)^2}$ (см. (20,19)).

Физически появление плазменных волн в результате падения на слой из вакуума поперечных волн объясняется очень просто. В неоднородной среде в общем случае падающая волна не остается чисто поперечной, так как для плоскослоистой среды (см. (19,19))

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{E} \operatorname{grad} \varepsilon'}{\varepsilon'} = -\frac{E_z \frac{d\varepsilon'}{dz}}{\varepsilon'}. \tag{20,30}$$

Очевидно, $\operatorname{div} \boldsymbol{E} \neq 0$ как раз для рассматриваемого здесь случая, поскольку при нормальном падении или для волны с вектором $\boldsymbol{E}$, перпендикулярным к плоскости падения, $E_z = 0$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$. Далее, в плазме $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho'$, где $\rho' = e\Delta N$ и ΔN — отклонение электронной концентрации от равновесного значения (движение ионов не учитываем). При $E_z \neq 0$ и $\frac{d\varepsilon'}{dz} \neq 0$ в волне происходит, следовательно, появление зарядов ρ', и при $\varepsilon = 0$ плотность этих зарядов колеблется с плазменной частотой ω_0. Таким образом, падающая на слой волна с $E_z \neq 0$ вызывает плазменные колебания, амплитуда которых растет по мере приближения к резонансной точке $\varepsilon = 0$. Эти локальные колебания не являются при этом независимыми, поскольку всякое изменение плотности электронов в одном из участков среды при учете теплового движения передается соседнему участку, что приводит к появлению плазменных волн, уносящих с собой некоторую долю энергии стоячей электромагнитной волны. В конечном итоге при учете диссипации (соударений) энергия, связанная с плазменными волнами, идет на нагревание плазмы.

Таким образом, при достаточно общей постановке задачи нужно учитывать возможность возникновения плазменных волн, что приводит к устранению особенности решения и конечному значению поля в резонансной точке [206—208]. Соответствующий анализ в первом приближении можно провести, используя квазигидродинамический метод, о котором была речь в §§ 8, 13. Для удобства выпишем здесь еще раз исходную систему уравнений с учетом соударений

$$\left.\begin{aligned} &mN\ddot{r}+mN\nu_{\text{эфф}}\dot{\boldsymbol{r}}=-\varkappa T\nabla N+eN\boldsymbol{E},\quad \frac{\partial N}{\partial t}+\operatorname{div}N\dot{\boldsymbol{r}}=0,\\ &\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=i\frac{\omega}{c}(\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}'),\quad \boldsymbol{P}'=eN\boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}+i\omega\boldsymbol{P}=i\omega\boldsymbol{P}',\\ &\qquad\operatorname{div}(\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}')=0,\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0. \end{aligned}\right\}\quad(20{,}31)$$

В нулевом приближении (при отсутствии волн) $\varkappa T\nabla N_0=eN_0E_z$, где $N_0(z)$ — распределение электронной концентраций с высотой. Положим теперь $N=N_0+N'$ и $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$, где N' и $\boldsymbol{E}'$ — малые величины, меняющиеся по закону $e^{i\omega t}$. Тогда в линейном приближении получаем (индекс 0 у N_0 и штрих у $\boldsymbol{E}'$ опускаем, т. е. ниже $N_0=N$ и $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}$; кроме того, $s=\nu_{\text{эфф}}/\omega$):

$$\boldsymbol{P}'=\frac{e\varkappa T}{m\omega^2(1-is)}\nabla N'-\frac{e^2N}{m\omega^2(1-is)}\boldsymbol{E}-\frac{2\varkappa TN'\nabla N}{m\omega^2(1-is)N},$$

$$eN'+\operatorname{div}\boldsymbol{P}'=0,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{P}'=-\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{E}}{4\pi},$$

или в условиях, когда все величины не зависят от x:

$$\left.\begin{aligned} P'_x&=-\frac{e^2N}{m\omega^2(1-is)}E_x,\\ P'_y&=\frac{\varkappa T}{4\pi m\omega^2(1-is)}\left(\frac{\partial^2E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial y\,\partial z}\right)-\frac{e^2N}{m\omega^2(1-is)}E_y,\\ P'_z&=\frac{\varkappa T}{4\pi m\omega^2(1-is)}\left(\frac{\partial^2E_y}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}\right)-\frac{e^2N}{m\omega^2(1-is)}E_z-\\ &\qquad\qquad-\frac{\varkappa T}{4\pi m\omega^2(1-is)}\frac{\frac{dN}{dz}}{N}\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\}\quad(20{,}32)$$

Уравнение $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=i\frac{\omega}{c}(\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}')$ при $\frac{\partial H_{y,z}}{\partial x}=0$ дает:

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=i\frac{\omega}{c}(E_x+4\pi P'_x),\quad \frac{\partial H_x}{\partial z}=i\frac{\omega}{c}(E_y+4\pi P'_y),\\ \frac{\partial H_x}{\partial y}=-i\frac{\omega}{c}(E_z+4\pi P'_z).\end{gathered}\right\}\tag{20,33}$$

Для волны с вектором $\boldsymbol{E}$, перпендикулярным к плоскости падения ($E_x\neq 0$, $E_y=E_z=0$, $H_x=0$, $H_y\neq 0$, $H_z\neq 0$), учет электронного давления, как ясно из (20,32), ничего не меняет. Для интересующей же нас волны с $H_x\neq 0$, $H_y=H_z=0$, $E_x=0$, $E_y\neq 0$, $E_z\neq 0$ из (20,32), (20,33) и уравнения поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H}$ получаем:

$$-\frac{i\omega}{c}H_x=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H_x}{\partial y}&=-i\frac{\omega}{c}\left\{\varepsilon' E_z+\frac{\beta_T'^2}{\frac{\omega^2}{c^2}}\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\right\}+\\ &\qquad+\frac{\beta'_T\frac{d\varepsilon'}{dz}}{\frac{\omega^2}{c^2}(1-\varepsilon')}\left(\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial H_x}{\partial z}&=i\frac{\omega}{c}\left\{\varepsilon' E_y+\frac{\beta_T'^2}{\frac{\omega^2}{c^2}}\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y\,\partial z}\right)\right\},\end{aligned}\right\}\tag{20,34}$$

где $\varepsilon'=1-\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2(1-is)}$ — обычная диэлектрическая проницаемость плазмы и $\beta_T'^2=\frac{\varkappa T}{mc^2(1-is)}$ (при $s\ll 1$, как это будет предполагаться, можно положить $\beta_T'^2\approx\beta_T^2=\frac{\varkappa T}{mc^2}$).

При $\beta_T\to 0$ система (20,34) эквивалентна исследованной ранее системе (19,2). Поскольку в нерелятивистской плазме $\beta_T^2\ll 1$ (например, в земной ионосфере $\beta_T^2\sim 10^{-7}$) учет теплового движения (т. е. пространственной дисперсии) может быть существен лишь в исключительных случаях. К их числу и относится задача об особенности поля в точке $\varepsilon=0$.

Будем искать решение системы уравнений (20,34) в виде ($\alpha_0=\sin\theta_0$):

$$H_x=G(z)\,e^{-i\frac{\omega}{c}\alpha_0 y},\quad E_z=F_z(z)\,e^{-i\frac{\omega}{c}\alpha_0 y},\quad E_y=F_y(z)\,e^{-i\frac{\omega}{c}\alpha_0 y}.$$

Тогда, исключая $F_y(z)$, получаем систему двух связанных между собой уравнений второго порядка для G и F_z:

$$\frac{d^2G}{dz^2} - \frac{1+\dfrac{\alpha_0^2\beta_T^2}{1-\varepsilon'}}{\varepsilon'-\alpha_0^2\beta_T^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dz}\frac{dG}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon'-\alpha_0^2)G = -\frac{\alpha_0\beta_T^2}{\varepsilon'-\alpha_0^2\beta_T^2}\cdot\frac{d\varepsilon'/dz}{1-\varepsilon'}\cdot\frac{dF_z}{dz}, \qquad (20,35)$$

$$\beta_T^2\frac{d^2F_z}{dz^2} + \frac{\varepsilon'\beta_T^2}{\varepsilon'-\alpha_0^2\beta_T^2}\cdot\frac{d\varepsilon'/dz}{1-\varepsilon'}\frac{dF_z}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon'-\alpha_0^2\beta_T^2)F_z = \alpha_0\frac{\omega^2}{c^2}G + \frac{\alpha_0\beta_T^2}{\varepsilon'-\alpha_0^2\beta_T^2}\cdot\frac{d\varepsilon'/dz}{1-\varepsilon'}\frac{dG}{dz},$$

где отброшены члены порядка β_T^2 по сравнению с членами порядка единицы.

При $\beta_T = 0$ первое из этих уравнений переходит, конечно, в уравнение (20,1); заметим, что точность рассмотрения повышается при замене β_T^2 на $3\beta_T^2$ (см. § 8).

Учет теплового движения электронов приводит, таким образом, к уравнениям более высокого порядка. Решения системы (20,35) описывают нормальные волны двух типов, которые только в некоторых частных случаях или вне области, где величина ε мала, дают возможность представлять волновое поле в виде суперпозиции электромагнитных и плазменных волн. Так, при $\alpha_0 = \sin\theta_0 = 0$ (нормальное падение) система (20,35) распадается на два независимых уравнения. Первое из этих уравнений совпадает с уравнением (20,1) с $\alpha_0 = 0$, и его решения описывают электромагнитные волны. Второе же из уравнений (20,35) переходит при этом в уравнение для плазменных волн в квазигидродинамическом приближении:

$$\frac{d^2F_z}{dz^2} + \frac{\dfrac{d\varepsilon'}{dz}}{1-\varepsilon'}\frac{dF_z}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon'(z)}{\beta_T^2}F_z = 0. \qquad (20,36)$$

Для однородной среды без поглощения (при $\varepsilon' = \varepsilon$) отсюда, в согласии с (8,16), получаем для показателя преломления плазменных волн n_3 выражение

$$n_3^2 = \frac{\varepsilon}{\beta_T^2} = \frac{1-\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}}{\dfrac{\varkappa T}{mc^2}}.$$

В случае наклонного падения ($\alpha_0 \neq 0$) разделение поля на электромагнитные и плазменные волны, строго говоря, невозможно. Поэтому, если выбрать нормальное решение, которое в области отрицательных $\varepsilon(z)$ затухает, то ниже некоторой точки «взаимодействия», где $\varepsilon' = \beta_T^2\alpha_0^2$, асимптотическое поведение этого решения будет представлять электромагнитные (падающую и отраженную) и плазменную (отраженную) волны.

Легко убедиться в том, что если $\varepsilon'(z)$ не имеет особых точек и $\beta_T^2 \neq 0$, то решения системы (20,35) в интересующей нас области будут аналитическими функциями. Особенность же решения в точке, где $\varepsilon'(z) = 0$, появляется только при стремлении к нулю малого параметра β_T^2, стоящего при старшей производной в эквивалентном системе (20,35) уравнении четвертого порядка.

Таким образом, учет теплового движения электронов действительно приводит к устранению особенностей электромагнитного поля. Как уже отмечалось, это связано с тем, что падающая на слой электромагнитная волна в резонансной области вызывает плазменную волну, энергия которой затем при учете соударений переходит в энергию теплового движения электронов. Такой механизм диссипации энергии естественно приводит к конечному значению плотности энергии в резонансной области *).

Если величина $\alpha_0 = \sin\theta_0$ не мала, то взаимодействие между электромагнитной и плазменной волнами незначительно. Решая систему уравнений (20,35) методом последовательных приближений, можно при этом показать, что значение E_z в резонансной точке по порядку величины равно **)

$$|E_z|_{z=0} \sim \frac{\alpha_0\,|G(0,\,\alpha_0)|}{\left(\dfrac{\beta_T}{\rho}\right)^{2/3}}, \quad \rho = \frac{\omega}{ca}, \quad a = \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|. \qquad (20,36a)$$

К этому результату можно прийти также при помощи следующих простых рассуждений, которыми мы здесь и ограничимся. Напишем уравнение движения электронов под действием компоненты E_z при учете и соударений, и градиента давления:

---

*) Примененный квазигидродинамический метод, разумеется, не может иметь строго количественного значения. Имеются, однако, основания полагать, что, по крайней мере, в изотропной плазме этот метод позволяет правильно описать качественную сторону дела и приводит к формулам, правильным с точностью до множителей порядка единицы. Вместе с тем задача об особенности поля в точке $\varepsilon = 0$ несомненно должна быть исследована также методом кинетического уравнения.

**) Формула (20,36a) получена при условии $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \ll \left(\frac{\beta_T}{\rho}\right)^{2/3}$; в противном случае приближение геометрической оптики не нарушается, и значение поля в резонансной точке определяется не переходом электромагнитных волн в плазменные, а обычным поглощением. Кроме того, выражение (20,36a) справедливо лишь, если выполняется неравенство $s \gg \left(\frac{\beta_T}{\rho}\right)^{4/3}$, которое используется для нахождения фундаментальной системы решений уравнений (20,35); подробнее об этом см. [207a].

$$-\omega^2 Nmr + i\omega\nu_{\text{эфф}} Nmr = eNE_z - \varkappa T\frac{\partial N}{\partial z}; \tag{20,37}$$

здесь движение для простоты сразу предполагается гармоническим и, очевидно, $r=\frac{v}{i\omega}$ — смещение электрона. Если учесть, кроме того, уравнение непрерывности

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} N\dot{\boldsymbol{r}} = 0$$

и положить $\frac{\partial N}{\partial z} \approx kN'$, $\frac{\partial N}{\partial t} = i\omega N'$, $\operatorname{div} N\dot{\boldsymbol{r}} \approx i\omega kNr$, где N' — малое отклонение концентрации электронов N от равновесного значения, а $\frac{1}{k}$ — некоторый размер, характеризующий волновое поле, то уравнение (20,37) можно записать в виде:

$$-\omega^2 Nmr + i\omega\nu_{\text{эфф}} Nmr = eNE_z - \varkappa Tk^2 Nr. \tag{20,38}$$

Заметим, что в (20,38) отображен член $-\varkappa TkaNr$, возникающий, если учесть уравнение нулевого приближения $eN_0E_{0,z} = \varkappa T\frac{\partial N_0}{\partial z} = \varkappa TaN_0$; это законно при $k \gg a$ (в (20,38), как и в (20,32) и некоторых других формулах $N \equiv N_0$ и $E_z \equiv E_z'$).

Из уравнения (20,38) ясно, что учет градиента давления (член $\varkappa Tk^2 Nr$) родствен учету соударений (член $i\omega\nu_{\text{эфф}} mNr$). Следовательно, можно думать, что для учета градиента давления (т. е. плазменных волн) в пренебрежении соударениями нужно в полученной ранее при учете соударений формуле

$$|E_z| \approx \frac{\alpha_0\,|G(0,\alpha_0)|}{\left|az + i\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\right|} \tag{20,39}$$

заменить $\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$ на $\frac{\varkappa T}{m\omega^2}k^2$. Что касается характерного размера $\frac{1}{k}$, то в качестве него естественно выбрать расстояние Δz, на котором величина $|E_z|^2$ уменьшается, скажем, в два раза. Очевидно, такое уменьшение будет иметь место, если $a\Delta z \sim \frac{a}{k} \sim \frac{\varkappa T}{m\omega^2}k^2$ $\left(\text{см. (20,19), где величина } \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \text{ заменена на } \frac{\varkappa T}{m\omega^2}k^2\right)$. Отсюда

$$k \sim \left(\frac{m\omega^2 a}{\varkappa T}\right)^{1/3},$$

и значение поля E_z в резонансной точке $z=0$ по порядку величины будет равно

$$|E_z|_{z=0} \sim \frac{\alpha_0\,|G(0,\alpha_0)|}{\dfrac{\varkappa T k^2}{m\omega^2}} \sim \frac{\alpha_0\,|G(0,\alpha_0)|}{\left(\dfrac{\beta_T}{\rho}\right)^{2/3}},$$

что полностью совпадает с (20,36а).

Таким образом, влияние плазменных волн в нашей задаче можно сравнить с аналогичным влиянием поглощения, если ввести некоторое эквивалентное число соударений

$$\frac{\nu_{\text{экв}}}{\omega} = \left(\frac{\beta_T}{\rho}\right)^{2/3} = \left(\frac{\varkappa T}{m}\right)^{1/3}\left(\frac{a}{\omega}\right)^{2/3}, \quad a = \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|. \tag{20,40}$$

Для E-слоя ($\beta_T \sim 2\cdot10^{-4}$, $a = 10^{-6}$, $\lambda_0 = 100$ *м*) $\nu_{\text{экв}} \sim 10^3$, для F-слоя ($\beta_T \sim 2 \div 4\cdot10^{-4}$, $\lambda_0 = 30$ *м*) $\nu_{\text{экв}} \sim 4\cdot10^2$ (при $a = 10^{-7}$) и $\nu_{\text{экв}} \sim 2\cdot10^3$ (при $a = 10^{-6}$).

Из этих цифр видно, что учет влияния плазменных волн в некоторых случаях ($a \sim 10^{-6}$) мог бы быть столь же существен, как и учет соударений (при $\nu_{\text{эфф}} \sim 10^3$). Однако в условиях ионосферы, даже если отвлечься от влияния земного магнитного поля (см. § 27), поглощение все же играло бы доминирующую роль.

Обсуждаемый эффект взаимодействия поперечной и плазменной волн представляет, быть может, еще больший интерес при другой постановке задачи. Именно, это взаимодействие приводит к возможности трансформации в неоднородной среде плазменных волн в электромагнитные. Последнее существенно, например, в условиях солнечной короны [73, 77, 207, 208].

О взаимной трансформации и взаимодействии между продольными и поперечными волнами в плазме. До сих пор речь шла о регулярной трансформации волн. Если же в плазме имеются достаточно мелкие хаотические неоднородности электронной концентрации, то на этих неоднородностях рассеяние плазменных волн с превращением их в электромагнитные и наоборот происходит и вне области $\varepsilon \approx 0$. Механизм такого рассеяния состоит в том, что под действием поля падающей волны (плазменной или электромагнитной) рассматриваемая плазменная неоднородность поляризуется, т. е. приобретает некоторый индуцированный дипольный момент (предполагаем, что неоднородность мала по сравнению с длиной волны, так что высшие мультипольные моменты несущественны). Такой, находящийся в плазме диполь излучает, вообще говоря, и электромагнитные и плазменные волны. Механизм трансформации плазменных волн в электромагнитные в результате рассеяния, по имеющимся данным, играет важную роль в солнечной короне (см. § 36 и [73, 77, 135]) и, вероятно, для квазаров (квазизвездных радиоисточников) и некоторых других небольших по размерам источников космического радиоизлучения [213]. Возможно, что процесс рассеяния плазменных волн с их превращением в электромагнитные представляет интерес и в земной ионосфере. В этом случае, однако, большее значение имеет рассеяние поперечных волн, и особенно волн, посланных с Земли от мощного радиопередатчика. Возвращающиеся к земной поверхности радиоволны, рассеянные на ионосферных неоднородностях (в особенности на неоднородностях, обусловленных существованием тепловых флуктуаций в плазме), несут ценную информацию об ионосфере, например об электронной и ионной температуре ионосферной плазмы [53, 214—215].

Вопрос о флуктуациях в равновесной и неравновесной плазме, а также о рассеянии и трансформации на этих флуктуациях электромагнитных волн различных типов в последние годы привлекает к себе пристальное внимание. Этой проблеме поэтому посвящена уже обширная литература (см. [3, 8, 73, 77, 86, 214, 215, 217] и указанные там работы). Останавливаться в настоящей книге на флуктуациях в плазме и рассеянии волн на флуктуациях мы не будем (впрочем, еще несколько замечаний на этот счет будет сделано в § 36).

С вопросом о трансформации волн в результате рассеяния тесно связана общая проблема нелинейного взаимодействия между волнами в плазме.

В линейном приближении, очевидно, различные волны (если они являются «нормальными волнами», т. е. строгими решениями волнового уравнения в линейной электродинамике) совершенно независимы и никак не взаимодействуют. С учетом же нелинейности, и пока эта нелинейность достаточно мала, происходят взаимные трансформации (слияния, расщепления, преобразования) волн, являющихся нормальными в линейном приближении. Малость нелинейности здесь существенна потому, что при сильной нелинейности нельзя, вообще говоря, рассматривать нормальные волны, полученные в линейном приближении, даже в качестве волн, так сказать, исходного или нулевого приближения и тем самым пользоваться понятием о взаимной трансформации таких волн.

Глубокую связь, существующую между рассеянием волн на плазменных неоднородностях (в частности, тепловых флуктуациях концентрации) и нелинейным взаимодействием между волнами, поясним на примере распространения плазменной волны в плазме, являющейся однородной и изотропной (при отсутствии флуктуаций и других волн). Если такая плазма равновесна и в ней нет никаких волн внешнего происхождения, кроме рассматриваемой («падающей») волны, то неоднородности в плазме возникают только в результате действия самой падающей волны и тепловых флуктуаций (в основном существенны флуктуации концентраций электронов и ионов — их только и имеем в виду). Флуктуационные изменения концентраций малы, и их можно представить в виде совокупности всех волн, могущих распространяться в плазме и приводящих к изменению концентраций *). Поперечные волны, в которых $\operatorname{div} E = 4\pi\rho' = 4e(N - N_i) = 0$, к числу последних не относятся. Остаются, таким образом, плазменные и акустические волны (см. § 8). Итак, рассеяние «падающей» волны на тепловых флуктуациях в рассматриваемой плазме сводится к ее рассеянию на флуктуационных плазменных и акустических волнах; в результате рассеяния появляются волны всех типов, в частности поперечные (электромагнитные) волны. Здесь мы, таким образом, описали тот же процесс трансформации волн, о котором шла речь в начале настоящего раздела.

Пусть теперь в плазме помимо «падающей» волны 1 распространяется также какая-то другая плазменная волна 2, скажем, созданная пронизывающим плазму пучком электронов. Поскольку в волне 2 электронная концентрация изменяется, ясно, что волна 1 будет рассеиваться на волне 2, подобно тому как она рассеивается на плазменных волнах флуктуационного происхождения. При этом, если амплитуда волны 2 поддерживается постоянной «внешним источником» (пучком частиц и т. п.), то нет никакой принципиальной разницы между обеими упомянутыми случаями. Если же, однако, амплитуду волны 2 нельзя считать заданной, а она зависит от амплитуды волны 1, то мы имеем уже типичный случай нелинейного взаимодействия двух волн, причем возможно образование и других волн разных типов. Таким образом, при рассеянии речь идет, можно сказать, о трансформации падающей волны на заданных неоднородностях (волнах). При учете же действия падающей волны на рассеивающие ее волны (неоднородности), а также обратного действия рассеивающих волн на падающую задача нелинейна, и в частности, мы имеем дело с нелинейной трансформацией волн.

К этому нужно добавить, что процесс рассеяния волн в равновесной плазме не сводится только к описанному рассеянию волны на флуктуационных неоднородностях диэлектрической проницаемости, обусловленных флуктуациями концентраций. Существен и другой процесс, связанный с тем, что падающая плазменная волна сама, очевидно, создает неоднородную концентрацию зарядов $\left(\rho' = \frac{\operatorname{div} E}{4\pi}\right.$, где E — поле в волне$\left.\right)$. Поэтому электроны плазмы движутся в неоднородной среде, а это даже при равномерном движении с небольшой скоростью приводит к излучению (мы имеем здесь дело с одним из видов так называемого переходного излучения). Образующиеся волны по сути дела можно считать рассеянными (они порождены падающей волной), и они являются продуктом нелинейного эффекта (в линейной электродинамике не учитывается воздействие волны на саму среду, что в данном случае было решающим).

---

*) Формально, такие представления всегда можно применять, но они плодотворны лишь, когда речь идет о достаточно больших неоднородностях, которым отвечают не слишком короткие волны, например волны с длиной $\lambda \gg N^{-1/3}$, где N — электронная концентрация.

Из сказанного ясно, что задача о рассеянии волн в плазме может, в широком плане, считаться частным случаем общей проблемы распространения волн с учетом нелинейных эффектов. Некоторые из этих эффектов будут рассмотрены в гл. VIII, однако в основном для плазмы со столкновениями, но не для бесстолкновительной плазмы. Нелинейные эффекты и трансформация волн в бесстолкновительной плазме в гл. VIII лишь затронуты; они довольно подробно рассмотрены в книге [86] (как в [86], так и в гл. VIII указана также соответствующая оригинальная литература).

Сделаем здесь еще одно замечание в связи с тем, что мы употребляли выше термин «взаимодействие» в применении к трансформации поперечных волн в плазменные и наоборот, при их распространении в неоднородной среде. Во избежание недоразумений необходимо подчеркнуть, что речь при этом, конечно, идет не о взаимодействии, обусловленном нелинейностью плазмы, а совсем о другом понятии.

Нормальные волны в неоднородной среде (плазме) близки к нормальным волнам в однородной среде, вообще говоря, только в приближении геометрической оптики. В тех же случаях, когда это приближение неприменимо, распространение волн в неоднородной среде существенно отличается от имеющего место в однородной или квазиоднородной среде. Это отличие при соответствующей постановке задачи может быть связано или даже сведено к взаимодействию волн, которые являются нормальными в областях, где справедливо приближение геометрической оптики. Именно о таком «взаимодействии» и была речь выше в случае изотропной неоднородной плазмы в условиях, когда электромагнитные (поперечные) и плазменные (продольные) волны являются практически нормальными везде вне непосредственной окрестности точки $\varepsilon(\omega, z) = 0$. Вблизи же этой точки для волны с $E_z \neq 0$ дивергенция $\operatorname{div} \mathbf{E}$ отлична от нуля и возрастает с уменьшением ε (см. (20,30)); в то же время частота падающей волны $\omega \approx \omega_0$ и даже приближенное разделение волн на поперечные и продольные может здесь оказаться совершенно недопустимым. Но при рассмотрении волн вдали от точки $\varepsilon(\omega, z) = 0$ существование области неприменимости геометрикооптического приближения эквивалентно тому, как если бы вблизи точки $\varepsilon = 0$ (в «области взаимодействия») нормальные волны разных типов взаимодействовали друг с другом. В этом смысле, например, появление отражения от слоя при нормальном падении также можно считать результатом «взаимодействия» волн, бегущих в противоположных направлениях, в районе «точки отражения» $\varepsilon = 0$. С понимаемым в указанном смысле взаимодействием волн в неоднородной среде нам придется еще столкнуться в гл. V для случая неоднородной магнитоактивной плазмы.

§ 21. Распространение импульсов (сигналов)

Фурье-представление поля импульса. До сих пор речь шла о распространении и отражении монохроматических волн. Между тем, как известно, на практике часто приходится иметь дело с импульсами (сигналами), представляющими собой некоторую группу волн. В линейной теории для рассмотрения этого случая нужно разложить волновое поле в интеграл Фурье и провести его исследование. Задачу при этом можно сформулировать несколькими различными способами: рассматривать распространение трехмерного импульса или, считая импульс одномерным, интересоваться формой импульса по прохождении заданного пути, в точке отражения и т. д. Возникают также вопросы об учете анизотропии среды и поглощения, характере расплывания импульса в зависимости от различных парамегров и др.

В настоящем параграфе рассматривается только одна задача — распространение импульса без поглощения, характеризуемое некоторой фазой $\varphi(\omega)$. Конкретно можно иметь в виду, например, отражение плоской волны от плазменного (ионосферного) слоя, хотя полученные результаты имеют более общее значение. Влияние поглощения и учет анизотропии будут обсуждены в §§ 22, 24.

Представим падающую плоскую волну в начале слоя в виде:

$$E_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \qquad (21{,}1)$$

где по теореме Фурье

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \qquad (21{,}2)$$

В случае монохроматической волны с частотой ω_0 имеем $E_0 = e^{i\omega_0 t}$ и $g(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$, где δ — дельта-функция $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0)\, d\omega = 1,\right.$ $\left.\delta(\omega - \omega_0) = 0 \text{ при } \omega \neq \omega_0\right)$.

Для квазимонохроматической группы волн, по определению, функция $g(\omega)$ является весьма «острой», существенно отличной от нуля лишь в небольшой области частот вблизи несущей частоты сигнала ω_0; другими словами, спектральная ширина сигнала $\Delta\omega$ в этом случае удовлетворяет неравенству

$$\Delta\omega \ll \omega_0. \tag{21,3}$$

Поле $E_0(t)$ в случае квазимонохроматической группы удобно представить в виде:

$$E_0(t) = A(t)\, e^{i\omega_0 t}, \tag{21,4}$$

где $A(t)$ — медленно меняющаяся функция t (за исключением отдельных точек, где $A(t)$ может меняться быстро). В простейшем случае «оборванной синусоиды»:

$$\left.\begin{aligned} &A(t) = 1 \quad \text{при} \quad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}, \\ &A(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > \frac{T}{2} \ \text{и} \ t < -\frac{T}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{21,5}$$

т. е. $E_0 = e^{i\omega_0 t}$ в интервале $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ и $E_0 = 0$ вне этого интервала. Из (21,2) сразу находим $g(\omega)$ для поля (21,4)—(21,5):

$$g(\omega) = \frac{\sin(\omega - \omega_0)\frac{T}{2}}{\pi(\omega - \omega_0)}. \tag{21,6}$$

В этом случае, очевидно, $\Delta\omega \sim \frac{\pi}{T}$, и неравенство (21,3) выполнено, если на интервале T укладывается много периодов $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, т. е. если $T \gg T_0$.

После отражения импульса от слоя или, более общо, после прохождения им какого-то пути, поле можно представить в виде:

$$E(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(\omega)\, g(\omega)\, e^{i(\omega t - \varphi(\omega))}\, d\omega, \tag{21,7}$$

где $R(\omega) \equiv |R(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ — соответственно амплитудный коэффициент отражения (фактор ослабления амплитуды) и сдвиг фаз для монохроматической волны с частотой ω.

В (21,1) и (21,7) явно указана лишь зависимость поля от t, так как волны предполагаются плоскими, зависящими, помимо t, лишь от одной координаты, например координаты z. При этом в каждой точке z можно ставить вопрос о временной форме импульса, что мы и делаем. Разумеется, аналогичным образом можно при данном t интересоваться пространственной формой импульса, т. е. зависимостью E от z.

Линейность уравнений поля в (21,7) уже используется, так как волны с разными частотами предполагаются распространяющимися независимо друг от друга ($R(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ в (21,7) не зависят от характера импульса).

Согласно (21,1) — (21,2) и (21,4) поля E_0 и E можно записать в виде:

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\eta)\, e^{i[(\omega_0-\omega)\eta+\omega t]}\, d\omega\, d\eta, \tag{21,8}$$

$$E(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\eta)\, e^{i[(\omega_0-\omega)\eta+\omega t-\varphi(\omega)]}\, R(\omega)\, d\omega\, d\eta. \tag{21,9}$$

При отсутствии поглощения и полном отражении $R(\omega)=1$; это равенство будет ниже предполагаться имеющим место, если не оговорено противное.

Распространение квазимонохроматического импульса без учета его расплывания. Для квазимонохроматического импульса (группы) в первом приближении

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + \varphi'(\omega_0)\,\Omega, \tag{21,10}$$

где

$$\varphi'(\omega_0) = \left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}$$

и

$$\Omega = \omega - \omega_0.$$

В этом приближении

$$E(t) = e^{i(\omega_0 t-\varphi(\omega_0))}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int A(\eta)\, e^{i\Omega[t-\eta-\varphi'(\omega_0)]}\, d\eta\, d\omega =$$

$$= A(t-\varphi'(\omega_0))\, e^{i[\omega_0 t-\varphi(\omega_0)]}, \tag{21,11}$$

так как согласно (21,8) и (21,4)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int A(\eta)\, e^{i\Omega(t-\eta)}\, d\eta\, d\Omega = A(t).$$

Следует заметить, что фаза $\varphi(\omega)$ непосредственно определена лишь для положительных значений ω. По самому своему смыслу фаза φ входит всегда в комбинации $i\,[\,|\omega|\,t-\varphi(|\omega|)]$, и, следовательно, при $\omega<0$ в интеграле (21,9) и аналогичных нужно вместо $i\,[\omega t-\varphi(\omega)]$ писать выражение $i\,[\,|\omega|\,t-\varphi(|\omega|)]=$

$= -i\,[\omega t + \varphi\,(|\,\omega\,|)\,]$. Поэтому при работе с интегралами типа (21,11) следует соблюдать известную осторожность (см. в этой связи, например, [218]). В нашем случае, когда функция $g\,(\omega)$ имеет острый максимум в точке $\Omega = 0$ (т. е. при $\omega = \omega_0$), никаких осложнений не возникает, так как область отрицательных значений ω не играет роли; действительно, при $\omega = 0$ частота будет $\Omega = -\,\omega_0$, причем $\omega_0 \gg \Delta\omega$ и, таким образом, в интеграле (21,11) замена нижнего предела с $-\,\infty$ на $-\,\omega_0$ несущественна.

Полученный результат (21,11), как ясно из сравнения его с (21,4), означает, что в первом приближении (21,10) импульс не меняет своей формы (как функция от t), но в результате отражения и прохождения через слой фаза волны изменилась на $\varphi\,(\omega_0)$, а весь импульс как целое запаздывает во времени на «время группового запаздывания» *):

$$\Delta t_{\text{гр}} = \left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} \equiv \varphi'\,(\omega_0). \tag{21,12}$$

Можно ввести также «время фазового запаздывания» $\Delta t_{\text{ф}}$, которое равно (см. (21,11)):

$$\Delta t_{\text{ф}} = \frac{\varphi\,(\omega_0)}{\omega_0}\,. \tag{21,13}$$

Вместо времен $\Delta t_{\text{гр}}$ и $\Delta t_{\text{ф}}$ часто используются длины группового и оптического пути, соответственно равные

$$L_{\text{гр}} = c\Delta t_{\text{гр}}, \qquad L_{\text{ф}} = L_{\text{о}} = c\Delta t_{\text{ф}}. \tag{21,14}$$

Групповой путь $L_{\text{гр}}$ равен, очевидно, расстоянию, проходимому группой за время $\Delta t_{\text{гр}}$, если бы она двигалась со скоростью света в вакууме. Аналогичный смысл (с заменой $\Delta t_{\text{гр}}$ на $\Delta t_{\text{ф}}$) имеет оптический путь $L_{\text{о}}$.

Фазовая и групповая скорости волн. Для того чтобы связать времена $\Delta t_{\text{гр}}$ и $\Delta t_{\text{ф}}$ с групповой и фазовой скоростями, как это обычно делается, рассмотрим распространение импульса в однородной изотропной среде. При этом под φ будем понимать сдвиг фаз при прохождении пути z, т. е. $E_0\,(t)$ в этом случае есть поле при $z = 0$ и $E\,(t)$ — поле в точке z. Тогда $\varphi = \frac{\omega}{c}\,n(\omega)\,z$ (см. (7,6)), и в приближении (21,10), согласно (21,11), имеем:

$$E\,(t) = A\left[t - \left(\frac{d\left(\frac{\omega}{c}\,n\,(\omega)\right)}{d\omega}\right)_{\omega_0} z\right] e^{i\left[\omega_0 t - \frac{\omega_0 n(\omega_0) z}{c}\right]}\,. \tag{21,15}$$

---

*) Это означает следующее: если падающий импульс появляется в выбранной точке наблюдения в момент $t = 0$ и при $t < 0$ поле $E_0\,(t) = 0$, то отраженный импульс в рассмотренном приближении появится в той же точке в момент $t = \varphi'\,(\omega_0)$, а до этого момента $E\,(t) = 0$.

Отсюда видно, что фаза распространяется с фазовой скоростью

$$v_{\text{ф}}(\omega_0)=\frac{z}{\Delta t_{\text{ф}}}=\frac{c}{n(\omega_0)}=\left(\frac{\omega}{k}\right)_{\omega_0}, \tag{21,16}$$

где $k=\frac{\omega}{c}n(\omega)$ — абсолютное значение волнового вектора.

Весь же импульс как целое распространяется без искажений с групповой скоростью

$$v_{\text{гр}}(\omega_0)=\frac{z}{\Delta t_{\text{гр}}}=\frac{c}{\left[\frac{d}{d\omega}(\omega n(\omega))\right]_{\omega_0}}=\frac{c}{n(\omega_0)+\omega_0\left(\frac{dn}{d\omega}\right)_{\omega_0}}=\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega_0}. \tag{21,17}$$

Заметим, что если n^2 определяется формулой (3,5), т. е.

$$n^2=1-\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2},$$

то

$$v_{\text{гр}}=cn \tag{21,18}$$

и, таким образом, $v_{\text{гр}}v_{\text{ф}}=c^2$.

Кстати, зависимость $n^2=\frac{c^2k^2}{\omega^2}=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ характерна не только для плазмы, но имеет место и в ряде других случаев, например в простых волноводах (смысл величины ω_0 при этом, конечно, совсем другой; кроме того, в теории волноводов обычно не пишут выражения для n, а ограничиваются рассмотрением эквивалентного выражения $\omega^2=\omega_0^2+c^2k^2$). Большинство результатов настоящего и ряда других параграфов справедливо безотносительно к виду функции $n(\omega)$. В тех же случаях, когда используется выражение $n^2=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, полученные результаты, как сказано, могут применяться не только в случае плазмы, но и, например, в теории волноводов.

В однородной среде

$$\left.\begin{aligned}
L_{\text{гр}}&=\frac{cz}{v_{\text{гр}}}=\frac{d(\omega n)}{d\omega}z=\frac{d(\omega L_0)}{d\omega}=L_0+\omega\frac{dL_0}{d\omega},\\
L_0&=\frac{cz}{v_{\text{ф}}}=nz,
\end{aligned}\right\} \tag{21,19}$$

где z — проходимое группой расстояние.

Поскольку в ионосфере (при пренебрежении влиянием магнитного поля) всегда $n^2<1$, ясно, что $v_{\text{ф}}>c$ и $v_{\text{гр}}<c$. Таким образом, сигналы распространяются со скоростью (групповой скоростью), меньшей скорости света, как это и должно быть в согласии с теорией относительности. Вместе с тем групповая скорость $v_{\text{гр}}$, определяемая формулой (21,17), при некоторых зави-

симостях n от ω может быть и больше скорости света в вакууме c. Например, в области аномальной дисперсии $\frac{dn}{d\omega} < 0$ и при $n + \omega \frac{dn}{d\omega} < 1$ скорость $v_{\text{гр}} > c$. Однако в подобных случаях мы имеем дело не с распространением сигналов со скоростью, большей c, а неприменимо само используемое понятие групповой скорости. Дело в том, что, как явствует из приведенных выше вычислений, формулы (21,11), (21,12) и (21,17) получены, если представить фазу φ в виде выражения (21,10), которое носит характер первого приближения (разложение $\varphi(\omega)$ в ряд Тейлора с точностью до линейного члена относительно $\omega - \omega_0 = \Omega$). Только при подобном ограничении членом порядка Ω в разложении фазы в ряд импульс распространяется в диспергирующей среде без изменения своей формы. При учете же высших степеней Ω форма импульса меняется — он расплывается, и понятие групповой скорости становится без дальнейшего не вполне определенным.

Введенное понятие групповой скорости, вообще говоря, неприменимо также при наличии поглощения, если только зависимость R от ω не может считаться пренебрежимо малой в пределах спектральной ширины сигнала. В области аномальной дисперсии пренебречь зависимостью R от ω как раз и нельзя, поскольку поглощение сильно зависит от частоты. Таким образом, в области аномальной дисперсии форма сигнала в процессе его распространения заметно изменяется. В результате формула (21,17) в этой области частот просто не имеет физического смысла (т. е. не определяет скорости сигнала). Нужно заметить, что понятию о скорости сигнала в некоторых случаях можно все же придать известный смысл и при наличии поглощения, но, конечно, без непосредственной связи с формулой (21,17). На этом вопросе мы остановимся в § 22.

Расплывание импульсов. Распространение сигнала в однородной, изотропной диспергирующей среде с учетом его искажения (расплывания) было исследовано в работах [219], а также [105, 198, 220]. При этом было показано, что самый передний фронт сигнала всегда распространяется со скоростью света в вакууме. Этот результат вполне понятен, так как в спектральном разложении сигнала конечной ширины присутствуют и сколь угодно высокие частоты, для которых $n \to 1$ и $v_{\text{гр}} \to v_{\text{ф}} \to c$. Однако удельный вес этих высоких частот в случае длинного сигнала совершенно ничтожен. Поэтому примыкающая к самому переднему краю часть сигнала, так называемый «предвестник», обычно имеет ничтожную интенсивность. Основной же интерес имеет та часть сигнала, где его интенсивность значительна («основная часть» или «тело» сигнала). В случае однородной среды характер изменения интенсивности сигнала исследован в уже упомянутых работах [219], а для плазмы более детально в работе [221]; случай неоднородной среды и конкретно плазмы (ионосферы) рассмотрен в [218, 222, 223].

Для вычисления изменения формы основной части квазимонохроматического импульса при его распространении в произвольной непоглощающей среде обычно достаточно дополнить разложение фазы в ряд (см. (21,10)) еще одним членом, полагая

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + \varphi'(\omega_0)\,\Omega + \frac{\varphi''(\omega_0)}{2}\,\Omega^2. \qquad (21,20)$$

Поле $E(t)$ принимает при этом вид (см. (21,9)):

$$E(t) = e^{i[\omega_0 t-\varphi(\omega_0)]}\,\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} A(\eta)\,e^{i\Omega[t-\eta-\varphi'(\omega_0)]-i\frac{\varphi''(\omega_0)}{2}\Omega^2}\,d\eta\,d\Omega, \qquad (21,21)$$

Полагая здесь

$$\varphi''\left(\Omega+\frac{\eta-t+\varphi'}{\varphi''}\right)^2 = \pi\xi^2, \qquad (21,22)$$

т. е. заменяя переменную Ω на ξ, и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}\xi^2}\,d\xi = 1-i,$$

получаем:

$$E(t) = \frac{1-i}{2\pi}\,e^{i[\omega_0 t-\varphi(\omega_0)]}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{\varphi''(\omega_0)}}\,A(\eta)\,e^{\frac{i(\eta-t+\varphi')^2}{2\varphi''}}\,d\eta.$$

Заменяя теперь $\frac{(\eta-t+\varphi')^2}{2\varphi''}$ на $\frac{\pi u^2}{2}$, имеем окончательно*):

$$E = \frac{1-i}{2}\,e^{i[\omega_0 t-\varphi(\omega_0)]}\int_{-\infty}^{+\infty} A\left(t-\varphi'(\omega_0)+\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}\,u\right)e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\,du. \qquad (21,23)$$

Разумеется, если производная $\varphi''(\omega_0)$ достаточно мала, то выражение (21,23), как это и должно быть, переходит в (21,11), поскольку

---

*) Для определенности считаем, что $\varphi'' > 0$; если $\varphi'' < 0$, то, меняя при замене переменных знаки, приходим к тем же результатам, причем вместо $\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}$ стоит $\sqrt{\pi\,|\varphi''(\omega_0)|}$. Если же $\varphi'' = 0$, то, разумеется, для выяснения характера расплывания сигнала необходимо учитывать следующие члены в разложении $\varphi(\omega)$ в ряд.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\,du = 1+i.$$

Проведенные вычисления, однако, недостаточно корректны, так как не учтена уже отмечавшаяся необходимость замены при $\omega<0$ знака у фазы $\varphi(|\omega|)$. Это обстоятельство несущественно, если при интегрировании по Ω в (21,21) можно в хорошем приближении заменить предел $-\infty$ на $-\omega_0$. После подстановки (21,22) эта замена приводит к появлению в выражении типа (21,23) следующего интеграла по ξ:

$$\Psi = \int\limits_{-\sqrt{\frac{\varphi''}{\pi}}\omega_0+\frac{\eta-t+\varphi'}{\sqrt{\pi\varphi''}}}^{\infty} e^{-i\frac{\pi}{2}\xi^2}\,d\xi =$$

$$= \frac{1-i}{2} + F^*\left(\sqrt{\frac{\varphi''(\omega_0)}{\pi}}\,\omega_0 - \frac{\eta-t+\varphi'(\omega_0)}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right), \qquad (21,24)$$

где F — интеграл Френеля:

$$\left.\begin{aligned}
&F(u) = \int_0^u e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\,du = C+iS,\quad F^* = C-iS = \int_0^u e^{-i\frac{\pi}{2}u^2}\,du,\\
&F(\infty) = \frac{1+i}{2},\quad F(-u) = -F(u),\quad F(0)=0,\\
&C(u) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi u}\sin\frac{\pi}{2}u^2 \quad (\text{при } u \gg 1),\\
&S(u) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi u}\cos\frac{\pi u^2}{2} \quad (\text{при } u \gg 1).
\end{aligned}\right\} \qquad (21,25)$$

Точность приведенных выражений для C и S, пригодных при $u \gg 1$, порядка $\frac{1}{\pi^2u^3}$; поэтому уже при $u \geqslant 3$ приближенные выражения справедливы с точностью $\geqslant 1\%$.

Выше при переходе от (21,21) к (21,23) в выражении (21,24) было положено $F^* = F^*(\infty) = \frac{1-i}{2}$. Если этого не делать, то в (21,23) вместо множителя $1-i$ будет под знаком интеграла стоять величина (21,24) с заменой $\frac{\eta-t+\varphi'}{\sqrt{\pi\varphi''}}$ на u, т. е. выражение $\frac{1-i}{2} + F^*\left(\sqrt{\frac{\varphi''}{\pi}}\,\omega_0 - u\right)$. Это выражение равно $1-i$, как это принято в (21,23), если

$$\sqrt{\frac{\varphi''(\omega_0)}{\pi}}\,\omega_0 \gg 1 \tag{21,26}$$

и, кроме того, если в интеграле (21,23) существенны значения $u = u_0$, для которых (при $u_0 > 0$)

$$\sqrt{\frac{\varphi''}{\pi}}\,\omega_0 \gg u_0. \tag{21,27}$$

Условия (21,26) и (21,27) можно заменить одним требованием, чтобы величина $\sqrt{\frac{\varphi''}{\pi}}\,\omega_0 - u$ была велика во всей существенной области интегрирования в (21,23).

При условиях (21,26) и (21,27) расплывание сигнала определяется формулой (21,23), которая может быть конкретизирована лишь при заданной функции $A(t)$, определяющей форму падающего (первоначального) сигнала. В случае «оборванной синусоиды», т. е. прямоугольного импульса (21,5), имеем:

$$\left.\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1-i}{2}\, e^{i[\omega_0 t - \varphi(\omega_0)]} \int\limits_{-\frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''}}}^{\frac{T-\theta}{\sqrt{\pi\varphi''}}} e^{i\frac{\pi}{2}u^2}\, du = \\
&= \frac{1-i}{2}\, e^{i[\omega_0 t - \varphi(\omega_0)]} \left\{ F\left(\frac{T-\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right) - F\left(\frac{-\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right) \right\}, \\
|E(t)| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| F\left(\frac{T-\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right) + F\left(\frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right) \right|.
\end{aligned}\right\} \tag{21,28}$$

Здесь F — интегралы Френеля (21,25) и

$$\theta = \frac{T}{2} + t - \varphi'(\omega_0). \tag{21,29}$$

Очевидно, θ есть время, отсчитываемое от момента $-\frac{T}{2} + \varphi'(\omega_0)$, т. е. от момента прихода сигнала в точку наблюдения без учета его расплывания.

Если длительность сигнала

$$T \gg \sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}, \tag{21,30}$$

то интерес представляет искажение сигнала лишь в области значений $\theta \ll T$ у точки $\theta = 0$ и в области $T - \theta \ll T$ у точки $\theta = T$, т. е. на краях сигнала. В этом случае для переднего края сигнала

$$|E(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|F(\infty)+F\left(\frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{1+i}{2}+F\left(\frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left[C\left(\frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right)+\frac{1}{2}\right]^2+\left[S\left(\frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right)+\frac{1}{2}\right]^2}. \quad (21,31)$$

Для заднего края сигнала справедлива эта же формула, но с заменой $-\theta$ на θ_1 — время, отсчитываемое от момента $\frac{T}{2}+\varphi'(\omega_0)$ прихода в точку наблюдения заднего края нерасплывшегося сигнала.

Выражение (21,31) хорошо известно, так как оно определяет интенсивность волнового поля при дифракции Френеля у края плоского экрана. График функции $|E(u)|$, где

$$u = \frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}} = \frac{\frac{T}{2}+t-\varphi'(\omega_0)}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}},$$

приведен на рис. 21,1. Положение максимумов этой функции отвечает значениям $\frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}$, равным 1,22; 2,35; 3,08; 3,67; 4,18 и т. д.; минимумы расположены в точках 1,87; 2,74; 3,39; 3,93; 4,42 и т. д. Значения $|E|$ в максимумах и минимумах указаны на рис. 21,1; отметим, что в первом максимуме при $\frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''}} = 1{,}22$ интенсивность $|E^2|$ равна 1,36 (интенсивность первоначального сигнала принята равной единице). При $\theta = 0$, т. е. в момент, когда без учета расплывания в точку наблюдения должен прийти передний фронт сигнала и его амплитуда должна измениться скачком от 0 до 1, согласно (21,31) амплитуда равна

$$|E| = \frac{1}{2}. \quad (21,32)$$

Время установления амплитуды сигнала определяется, как ясно из (21,31), параметром

$$\tau_0 = \sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}. \quad (21,33)$$

То обстоятельство, что время установления должно определяться величиной $\varphi''(\omega_0)$, ясно сразу; появление же в (21,33) квадратного корня можно было предвидеть из соображений размерности.

Точное определение времени установления может быть произведено, если задать требуемую точность установления амплитуды.

Например, интервал времени τ между моментами, когда амплитуда устанавливается с точностью до 5% при $\theta > 0$ и $|E| = 0{,}05$ при $\theta < 0$, согласно рис. 21,1 равен $\tau \approx 8\tau_0$.

Если условие (21,30) не выполнено, то нужно использовать формулу (21,28) и форма сигнала определяется параметром $\frac{T}{\tau_0} = \frac{T}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}$. Амплитуда сигнала $|E|$ после его отражения от слоя или вообще прохождения некоторого пути в среде представлена на рис. 21,2 как функция переменной θ/τ_0 для значений T/τ_0, равных 1, 3 и 5 (амплитуда падающего сигнала принята равной единице; использована формула (21,28)).

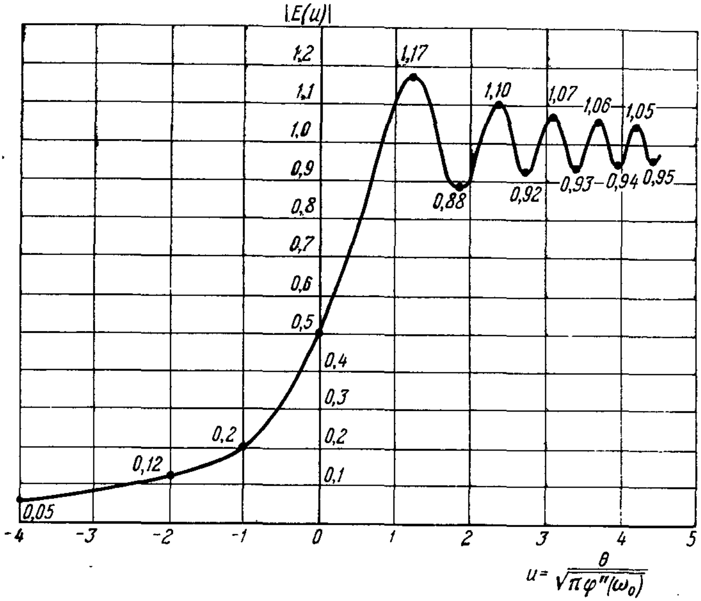


Рис. 21,1. Форма переднего края импульса, который до прохождения среды был прямоугольным.

Условие (21,26) применимости используемого выражения (21,28) можно записать в виде (см. (21,33))

$$\sqrt{\frac{\varphi''(\omega_0)}{\pi}}\,\omega_0 = \frac{\tau_0\omega_0}{\pi} = \frac{2\tau_0}{T_0} \gg 1. \qquad (21{,}26\text{а})$$

В ионосфере, как ясно из оценок τ_0, приведенных в § 30, это условие обычно хорошо соблюдается. Что касается неравенства (21,27), то в случае (21,28) под u_0 можно понимать пределы интегрирования $\frac{T-\theta}{\sqrt{\pi\varphi''}}$ и $\frac{-\theta}{\sqrt{\pi\varphi''}}$, если только они положительны. Полагая для определенности $|\theta| < T$, получаем условие (21,27) в виде:

$$\varphi''(\omega_0)\,\omega_0 \gg T. \qquad (21,27\text{а})$$

При соблюдении неравенства (21,3), когда $T \sim \frac{1}{\Delta\omega} \gg \frac{1}{\omega_0}$, условия (21,27) и (21,27а) слабее условий (21,26) и (21,26а), которыми поэтому можно ограничиться. Точнее, условие (21,27) имеет в этом случае независимое значение лишь в областях, где $T-\theta \gg T$ или $-\theta \gg T$; эти области соответствуют, очевидно, далеким «предвестнику» и «хвосту» сигнала, где поле $|E|$ ничтожно мало.

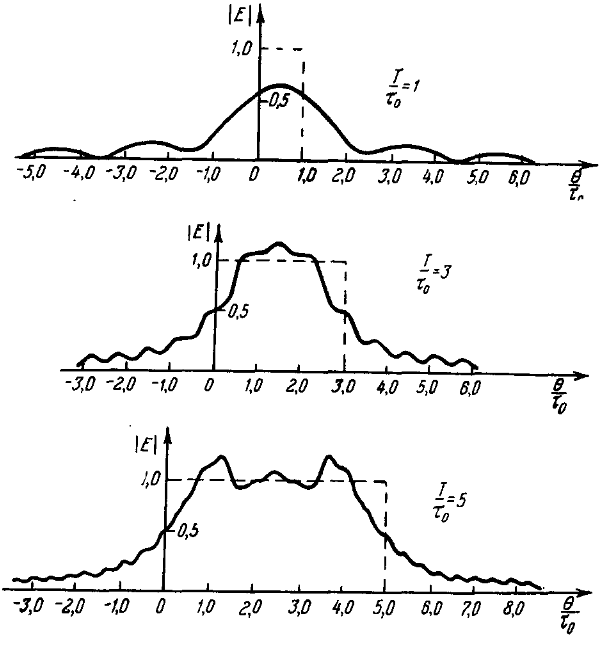


Рис. 21,2. Форма отраженного сигнала при $\frac{T}{\tau_0} = 1$, 3 и 5. Пунктиром показана первоначальная форма импульса в том же масштабе.

Величина φ'', так же как сама фаза φ, тем больше, чем больше проходимый сигналом путь. Поэтому условия (21,26а) и (21,27а) имеют смысл требования, чтобы этот путь был достаточно велик.

При наличии поглощения, вообще говоря, необходимо рассмотрение всего вопроса заново. Если, однако, как это иногда имеет место, в области спектральной ширины сигнала амплитуда волны с частотой ω или коэффициент отражения $R(\omega)$ меняется мало, можно положить $R(\omega)=R(\omega_0)$, и таким образом, все полученные формулы остаются без изменения, конечно, за исключением появления множителя $R(\omega_0)$. Вместе с тем не следует забывать, что поглощение сказывается и на фазе $\varphi(\omega)$, но в проведенном общем рассмотрении это обстоятельство, разумеется, несущественно.

Подчеркнем, что формула (21,28) и последующие, а также рис. 21,1 и 21,2 относятся лишь к первоначальному (падающему) сигналу вполне определенной формы — речь идет об «оборванной синусоиде» (21,4) — (21,5). Поэтому, конечно, использование соответствующих результатов очевидным образом ограничено.

Пределы применимости использованного приближения и более точные результаты. Полученные результаты ограничены также в силу приближенного характера исходного соотношения (21,20), в котором опущены члены, пропорциональные Ω^3, Ω^4 и т. д.

Условие применимости полученных результатов можно найти, учитывая роль, которую играет в разложении типа (21,20) следующий член, равный $\frac{\varphi'''(\omega_0)}{6}\Omega^3$.

Если не говорить о далеких «предвестнике» и «хвосте» сигнала, в которых представлены волны с частотами, существенно отличными от ω_0, то во всех интегралах важна область изменения $\Omega\sim\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — спектральная ширина сигнала. Поэтому членом $\frac{\varphi'''(\omega_0)}{6}\Omega^3$ можно пренебречь по сравнению с предыдущим членом при условии, что

$$\frac{\varphi'''(\omega_0)\,\Delta\omega}{3\varphi''(\omega_0)}\sim\frac{\varphi'''(\omega_0)}{\varphi''(\omega_0)\,T}\ll 1. \qquad (21,34)$$

Если, например, $\varphi(\omega)=\mathrm{const}\;\omega^m$, где показатель m не слишком велик, то неравенство (21,34) является следствием условия квазимонохроматичности (21,3). Таким образом, нужно думать, что для квазимонохроматических сигналов, т. е. когда

$$T\gg T_0, \qquad (21,3а)$$

в основной части сигнала пренебрежение членами, пропорциональными Ω^3, Ω^4 и т. д., будет несущественно. Это утверждение подтверждается количественной оценкой роли члена $\frac{\varphi'''(\omega_0)}{6}\Omega^3$, которая может быть произведена путем проведения всего расчета поля на основе разложения

$$\varphi(\omega)=\varphi(\omega_0)+\varphi'(\omega_0)\,\Omega+\frac{\varphi''(\omega_0)}{2}\Omega^2+\frac{\varphi'''(\omega_0)}{6}\Omega^3. \qquad (21,35)$$

В этом случае вместо (21,28) для $E(t)$ получается выражение [223]

$$E(t)=\frac{1-i}{2\sqrt{\pi}}\,e^{i[\omega_0 t-\varphi(\omega_0)]}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{F\left(\frac{T-\theta-\sqrt[3]{\frac{\varphi'''(\omega_0)}{2}}\,y}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right)+\right.$$

$$\left.+F\left(\frac{\theta+\sqrt[3]{\frac{\varphi'''(\omega_0)}{2}}\,y}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\right)\right\}v(y)\,dy, \qquad (21,36)$$

где $v(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\cos\left(\frac{x^3}{3}+xy\right)dx$ — функция Эйри.

При $\varphi'''(\omega_0)=0$ выражение (21,36) переходит, как это и должно быть, в (21,28), так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v(y)\,dy=\sqrt{\pi}$. В приближении (21,35), как ясно из (21,36), сигнал характеризуется, помимо $\tau_0=\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}$, также параметром

$$\beta=\frac{\sqrt[3]{\frac{\varphi'''(\omega_0)}{2}}}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}\,. \qquad (21,37)$$

В условиях, имеющих место при отражении радиоволн от ионосферы, $\beta\approx 0{,}1\div 0{,}3$, и, как показывают расчеты [223], основанные на формуле (21,36), в основной части квазимонохроматических сигналов точность формулы (21,28) не меньше нескольких процентов. Применение этой формулы недопустимо практически лишь для очень узких сигналов, для которых не выполнены условия (21,3) и (21,3а). Столь короткие импульсы с $T\leqslant T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{1}{f_0}$ при распространении радиоволн в ионосфере обычно интереса не представляют (при радиозондировании ионосферы в большинстве случаев $T\sim 10^{-4}$ *сек* при $T_0\sim 10^{-6}\div 10^{-7}$ *сек*). Впрочем, как можно показать на основе рассмотрения, предпринятого в [221], и видно из дальнейшего, вблизи точек $\theta=0$ и $\theta=T$ формула (21,28) применима и в случае коротких сигналов.

Общее исследование распространения коротких импульсов, а также «предвестника» и «хвоста» любых импульсов представляет значительные трудности. В случае однородного ионизированного газа эта задача подробно рассмотрена в [221], где для прямоугольного сигнала (21,4) — (21,5), прошедшего достаточно длинный путь, получено простое окончательное выражение:

$$\left.\begin{aligned}
|E(t, z)| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|F(u_1)-F(u_2)|,\\
u_1 &= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}}\left\{\sqrt{t+\frac{T}{2}-\frac{z}{c}}\;\sqrt{1+n(\omega_0)}-\right.\\
&\qquad\left.-\sqrt{t+\frac{T}{2}+\frac{z}{c}}\;\sqrt{1-n(\omega_0)}\right\},\\
u_2 &= \sqrt{\frac{\omega_0}{\pi}}\left\{\sqrt{t-\frac{T}{2}-\frac{z}{c}}\;\sqrt{1+n(\omega_0)}-\right.\\
&\qquad\left.-\sqrt{t-\frac{T}{2}+\frac{z}{c}}\;\sqrt{1-n(\omega_0)}\right\},\\
n(\omega_0) &= \sqrt{1-\frac{4\pi e^2 N}{m\omega_0^2}}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{21,38}$$

Здесь предполагается, что сигнал вышел из точки $z=0$ в момент $t=-\frac{T}{2}$ $\left(\text{при } z=0\right.$ сигнал прямоугольный с длиной T, т. е. в точке $z=0$ сигнал оканчивается при $\left.t=\frac{T}{2}\right)$; формула (21,38) справедлива только в том случае, когда сигнал прошел в среде достаточно длинный путь, в результате чего выполняется неравенство

$$t_{\text{гр}}-\frac{z}{c}=z\left(\frac{1}{v_{\text{гр}}}-\frac{1}{c}\right)=\frac{z(1-n)}{cn}\gg T_0. \tag{21,39}$$

Смысл этого неравенства состоит, очевидно, в требовании, чтобы разность между временем $t_{\text{гр}}$, необходимым для прохождения пути z с групповой скоростью $v_{\text{гр}}=cn$, и временем $\frac{z}{c}$, необходимым для этой цели переднему фронту («предвестнику») сигнала, движущемуся со скоростью света в вакууме c, была значительно больше периода колебаний $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$. Кроме того, предполагается, что $t>\frac{T}{2}+\frac{z}{c}$. Это условие означает, что рассматривается лишь поле на достаточном расстоянии от переднего фронта сигнала, распространяющегося со скоростью c и достигающего точки z в момент $t_1=\frac{z}{c}-\frac{T}{2}$ (задний край первоначального сигнала, если бы он двигался со скоростью c, достиг бы точки z в момент $t_2=\frac{z}{c}+\frac{T}{2}$).

В рассматриваемом сейчас случае однородного ионизированного газа

$$\varphi(\omega_0)=\frac{\omega_0 n(\omega_0)\,z}{c},\quad \varphi'(\omega_0)=t_{\text{гр}}=\frac{z}{cn(\omega_0)}\quad\text{и}\quad|\varphi''(\omega_0)|=\frac{z}{c}\,\frac{1-n^2}{n^3\omega_0}\,.$$

Учитывая эти соотношения, из (21,38) можно видеть, что вблизи точки $t' = t_{\text{гр}} - \frac{T}{2} = \frac{z}{cn} - \frac{T}{2}$ с точностью до членов порядка $\left(t - t_{\text{гр}} + \frac{T}{2}\right)^2$ имеем:

$$u_1 = \frac{t - t_{\text{гр}} + \frac{T}{2}}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}} = \frac{\theta}{\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}}.$$

Аналогично, разлагая u_2 в ряд вблизи точки $t'' = t_{\text{гр}} + \frac{T}{2}$, получаем $u_2 = \frac{0 - T}{\sqrt{\pi\varphi''}}$, где $\theta = t - t_{\text{гр}} + \frac{T}{2}$.

Подставляя в (21,38) полученные значения u_1 и u_2, мы видим, что в данном случае формула (21,38) совпадает с выражением (21,28). Для достаточно длинных сигналов этого, разумеется, заранее следовало ожидать, так как формула (21,28) должна быть применима и в частном случае однородной среды. Однако теперь мы видим, что формула (21,28) вблизи точек $\theta = 0$ и $\theta = T$, по крайней мере в однородной плазме, применима и в случае коротких сигналов (о чем мы уже упоминали). При значительном удалении от точек $\theta = 0$ и $\theta = T$, что для сильно расплывающихся коротких сигналов представляет интерес, пользоваться формулой (21,28) уже нельзя, но в случае однородного ионизированного газа пригодна формула (21,38).

§ 22. Плотность энергии в диспергирующей среде. Скорость сигналов в плазме при наличии поглощения

Введение. Для выяснения некоторых моментов нужно получить выражение для плотности энергии в диспергирующей среде.

Плотность энергии электрического поля в изотропной среде часто полагают равной

$$W_E = \frac{ED}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{22,1}$$

В случае монохроматической волны $E = E_0 \sin \omega_0 t$ это выражение дает:

$$\left.\begin{aligned} W_E &= \frac{\varepsilon}{8\pi} E_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{\varepsilon}{16\pi} E_0^2 (1 - \cos 2\omega_0 t), \\ \overline{W}_E &= \frac{\varepsilon}{8\pi} \frac{E_0^2}{2} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \overline{E^2}, \end{aligned}\right\} \tag{22,2}$$

где черта означает усреднение по времени.

Пусть теперь $\varepsilon(\omega_0) < 0$, что для непоглощающего ионизированного газа, где $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$, вполне возможно. В этом случае $W_E \leqslant 0$, а $\overline{W}_E < 0$. Но отрицательное значение плотность электрической энергии принимать не может (мы не касаемся здесь неравновесных, неустойчивых систем). При $\omega_0 \to 0$ (в статическом поле) это ясно из термодинамических соображений: в состоянии термодинамического равновесия W_E есть плотность свободной энергии (см., например, [11]), и в изотермическом случае значение W_E будет минимально; если же $W_E < 0$, то минимум отвечает значениям $W_E \to -\infty$ и $E^2 \to \infty$, что явно не имеет места. Далее, при пренебрежении поглощением и тепловым движением, чему соответствует приведенное выражение для $\varepsilon(\omega)$, плотность энергии в среде есть сумма плотностей энергии $W_E^{(0)} = \frac{E^2}{8\pi}$ в вакууме и энергии, связанной с поляризацией среды. В случае свободных зарядов (в плазме) эта последняя часть энергии есть кинетическая энергия упорядоченного движения зарядов, т. е. величина заведомо положительная. Отсюда ясно, что в плазме при любой частоте и при отсутствии поглощения $W_E \geqslant 0$. Итак, выражения (22,1) и (22,2) в общем случае не могут быть справедливы.

Плотность энергии в непоглощающей диспергирующей среде. Для выяснения поставленного вопроса обратимся к исходной теореме Пойнтинга, выражающей закон сохранения энергии и вытекающей из уравнений поля (см., например, [10—12], магнитная проницаемость $\mu = 1$):

$$\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int^{t}\frac{\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}{4\pi}\,dt + \frac{\partial}{\partial t}\frac{H^2}{8\pi} = -\boldsymbol{jE} - \frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\boldsymbol{EH}]. \qquad (22,3)$$

Отсюда следует, по крайней мере при отсутствии поглощения (т. е. при $\boldsymbol{jE} = 0$), что плотность электрической энергии равна

$$W_E = \frac{1}{4\pi}\int^{t}\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,dt. \qquad (22,4)$$

Для монохроматической волны $E = E_0 \sin \omega_0 t$ имеем $\boldsymbol{D} = \varepsilon(\omega_0)\boldsymbol{E}$ и $W_E(t) = \frac{\varepsilon E^2(t)}{8\pi} + \mathrm{const}$. Входящую сюда произвольную постоянную *) для монохроматической волны, которая задана во всем интервале $-\infty < t < +\infty$, определить нельзя, и поэтому в этом случае утверждение об отрицательном значении $\overline{W}_E$ при $\varepsilon < 0$ не имеет смысла. Но на первый взгляд кажется, что вывод об отрицательности $\overline{W}_E$ справедлив и для квазимонохроматической волны: достаточно считать, что волна не монохроматическая, а квазимонохроматическая, и тогда при $t \to -\infty$ имеем $E(-\infty) = 0$ и плотность энергии поля равна $W_E(-\infty) = 0$, а значит, получающаяся аддитивная постоянная равна нулю. Повлиять же на выражение для плотности энергии переход от бесконечно длинного сигнала к конечному, но сколь угодно длинному сигналу, казалось бы, не может; в результате получается, что для квазимонохроматической волны при $\varepsilon < 0$ опять $\overline{W}_E < 0$, а это как раз и не может быть верно. Однако, как мы сейчас покажем, для диспергирующей среды переход от монохроматической волны к квазимонохроматической нужно делать более тщательно, в результате чего сформулированный парадокс разрешается.

---

*) Точнее, речь может идти о произвольной функции координат, не зависящей от времени, которую можно было добавить еще к выражению (22,4).

Рассмотрим некоторое поле $E(t)$:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} [g(\omega)\, e^{i\omega t} + g^*(\omega)\, e^{-i\omega t}]\, d\omega, \tag{22,5}$$

где переход ко второму выражению связан с вещественностью $E(t)$ (при рассмотрении энергетических соотношений удобно использовать вещественное поле с самого начала). Очевидно,

$$D(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\omega)\, [g(\omega)\, e^{i\omega t} + g^*(\omega)\, e^{-i\omega t}]\, d\omega, \tag{22,6}$$

где учтено, что $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(-\omega)$; этому последнему условию функция $\varepsilon(\omega)$ удовлетворяет в самом общем случае*).

Общее выражение для плотности энергии получается теперь в результате подстановки (22,5) и (22,6) в (22,4); оно имеет вид:

$$W_E = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_0^{\infty} \int \{g(\omega)\, g(\omega')\, i\omega\varepsilon(\omega)\, e^{i(\omega+\omega')t} + \text{к. с.}\}\, d\omega\, d\omega'\, dt + {}$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_0^{\infty} \int \{g(\omega)\, g^*(\omega')\, i\omega\varepsilon(\omega)\, e^{i(\omega-\omega')t} + \text{к. с.}\}\, d\omega\, d\omega'\, dt, \tag{22,7}$$

где к. с. означает комплексно сопряженное выражение.

Рассмотрим теперь случай квазимонохроматического импульса, когда функция $g(\omega)$ имеет острый максимум вблизи несущей

---

*) Равенства $\varepsilon(-\omega) = \varepsilon(\omega)$ и $\sigma(-\omega) = \sigma(\omega)$, из которых следует, что $\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'^*(\omega)$, вытекают из требования, чтобы величины $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$ были вещественными при любом вещественном $\boldsymbol{E}$ (см. (22,5), (22,6) и аналогичное выражение для $\boldsymbol{j}$).

частоты ω_0. Полагая $\omega = \omega_0 + \Omega$ и $\omega' = \omega_0 + \Omega'$, можем в первом приближении записать $\varepsilon(\omega)$ в виде $\varepsilon(\omega_0) + \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_0 \Omega$. Для достаточно узкого импульса членом, пропорциональным Ω^2, действительно можно пренебречь; но членом, пропорциональным Ω, пренебречь, как мы увидим, уже нельзя. Далее, в первом из слагаемых в (22,7) появляются множители $e^{2i\omega_0 t}$ и $e^{-2i\omega_0 t}$, и при усреднении по времени это слагаемое дает нуль (ср. (22,2)). Второй член в (22,7) равен средней плотности энергии $\overline{W}_E$ и при пренебрежении членами порядка Ω^2 имеет вид (точнее, речь все время идет только об усреднении за время, большее по сравнению с $2\pi/\omega_0$):

$$\overline{W}_E = \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty}\int \Big\{ g(\omega_0+\Omega)\, g^*(\omega_0+\Omega')\, i \Big[\omega_0 \varepsilon(\omega_0) + \left(\varepsilon(\omega_0) + \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_0 \omega_0 \right) \Omega \Big] e^{i(\Omega-\Omega')t} + \text{к. с.} \Big\}\, d\Omega\, d\Omega'\, dt; \quad (22,8)$$

здесь нижние пределы интегрирования заменены на $-\infty$, так как фактически существенна лишь узкая область частот вблизи частоты ω_0 (квазимонохроматический импульс).

Легко видеть, что часть выражения (22,8), содержащая член $\omega_0\varepsilon(\omega_0)$, равна нулю (в этом случае комплексно сопряженное выражение равно выписанному выражению, взятому с обратным знаком). В результате получим:

$$\overline{W}_E = \overline{\frac{1}{4\pi} \int^t \boldsymbol{E} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\, dt} = \frac{1}{4\pi} \left[\varepsilon(\omega_0) + \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_0 \omega_0 \right] \times$$

$$\times \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty}\int \{ i\Omega g(\omega_0+\Omega)\, g^*(\omega_0+\Omega')\, e^{i(\Omega-\Omega')t} + \text{к. с.} \}\, d\Omega\, d\Omega'\, dt =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left[\varepsilon(\omega_0) + \left(\frac{d\varepsilon}{d\omega}\right)_0 \omega_0 \right] \overline{E}^2 = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\right)_0 \overline{E}^2, \quad (22,9)$$

где индекс 0 у скобки означает, что производная берется при $\omega = \omega_0$. Если используется комплексное поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$, то $\overline{W}_E = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\right)_0 (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^*)$.

Переход от первого выражения (22,9) ко второму сделан, учитывая, что

$$4\pi W_E^{(0)} = \int_0^t \boldsymbol{E} \frac{d\boldsymbol{E}}{dt}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial E^2}{\partial t}\, dt = \frac{E^2(t)}{2}$$

(можно положить $E(0)=0$, так как в начале процесса поля не было, а выбор точки $t=0$ произволен); с другой стороны, записывая $4\pi W_E^{(\omega)}=\int\limits_0^t \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\,dt$ через интегралы Фурье, опираясь на (22,5) и отделяя высокочастотную часть от постоянной во времени, можно видеть, что выражение $\frac{\overline{E^2}}{2}$ равно как раз интегралу, фигурирующему в (22,9) (вывод формулы (22,9) можно найти также в [3, 12, 32, 191, 224—227]).

Выражение (22,9) показывает, что при наличии дисперсии учет немонохроматичности существен: он приводит к замене $\varepsilon(\omega)$ на $\varepsilon+\omega\frac{d\varepsilon}{d\omega}$. В случае, когда $\varepsilon=1-\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}$, имеем:

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}=1+\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}=2-\varepsilon. \tag{22,10}$$

Выражение (22,10) всегда положительно, тем самым парадоксальный результат, сформулированный в связи с выражением (22,2), действительно ошибочен, и плотность энергии в плазме без поглощения положительна, как это и должно быть.

Может возникнуть вопрос, а что же будет в непоглощающей среде без дисперсии, но с $\varepsilon<0$; в этом случае производная $\frac{d\varepsilon}{d\omega}$ роли не играет и $\overline{W_E}<0$. Ответ на этот вопрос состоит просто в том, что подобная среда существовать не может, что доказывается приведенным абсурдным результатом и получается, конечно, автоматически при вычислении ε для любых реально существующих сред. Парадоксальность же вывода о том, что $\overline{W_E}<0$ для квазимонохроматической волны, к которому можно было бы прийти, если исходить из (22,2), состояла именно в том, что этот вывод был справедлив и для реально существующей равновесной среды с $\varepsilon=1-\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}$.

Можно показать, что для произвольной равновесной среды $\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\geqslant 0$ и, таким образом, $\overline{W_E}\geqslant 0$. В соответствующем доказательстве (см. [10], § 2.5 и [12], § 64) используется предположение о равновесном характере среды в том отношении, что в такой среде под действием поля тепло обязательно должно выделяться (отсутствие поглощения нужно при этом понимать как предел очень слабого поглощения электромагнитной энергии). Если же среда неравновесна (например, неустойчива), то она под действием поля может остывать, а не нагреваться. Поведение таких сред с «отрицательным поглощением» может очень существенно отличаться от более привычного поведения поглощающих сред (см., например, [129]). В частности, для неравновесной среды вполне может оказаться, что $\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} < 0$ и $\overline{W}_E < 0$ (см., например, [228]). Неравновесные среды (в частности, неравновесная плазма) в этой книге не рассматриваются. Мы не будем также сколько-нибудь подробно останавливаться на энергетических соотношениях для сред с пространственной дисперсией (см. [229, 230] и [10], § 3), но обсудим здесь вопрос об энергии поля в поглощающей среде.

Случай поглощающей среды. Приведенный вывод формулы (22,9) остается в силе и при наличии поглощения, отсутствие которого нами при выводе нигде не предполагалось. В этой связи можно сформулировать еще один вопрос. Для плазмы при $\omega^2 \ll \nu^2_{\text{эфф}}$ имеем $\varepsilon \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\nu^2_{\text{эфф}}}$ (см. (3,11)), и при соответствующих значениях N и $\nu_{\text{эфф}}$ величина ε может быть отрицательной, в то же время дисперсия отсутствует, а значит, согласно (22,9) все же $\overline{W}_E < 0$.

В этом случае, однако, выражение (22,9) не имеет смысла полной средней плотности энергии. Вообще нужно подчеркнуть, что при наличии поглощения не представляется возможным в общем случае феноменологически ввести понятие о средней плотности электромагнитной энергии. Формально это связано с тем, что при наличии поглощения в выражении для закона сохранения энергии (22,3) присутствуют два объемных члена: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,dt + \frac{H^2}{8\pi}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(W_E + W_H)$ и $\boldsymbol{jE}$; поэтому, особенно при усреднении по времени, остается неясным, каким образом однозначно разделить эту сумму на части, отвечающие изменению энергии и диссипации (приведенный выше пример свидетельствует о недопустимости при наличии поглощения выбрать в качестве полной средней энергии по-прежнему величину $\overline{W}_E$, определенную согласно (22,9)).

Более того, при наличии поглощения плотность энергии, вообще говоря, не выражается через ε и σ и производные этих величин по ω. Тем самым однозначная, так сказать, энергетическая интерпретация отдельных членов в законе сохранения (22,3) вообще невозможна.

Для выяснения ситуации рассмотрим движение электронов в плазме с помощью кинетического уравнения (4,2). Тогда после умножения уравнения (4,2) на $\frac{mv^2}{2}$ и интегрирования по $d\boldsymbol{v}$ легко получить соотношение (подробнее см. [227])

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{K} + \frac{E^2}{8\pi}\right) = \frac{\boldsymbol{E}}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{jE} - \operatorname{div}\int \frac{mv^2}{2}\boldsymbol{v}f\,d\boldsymbol{v} - \int \frac{mv^2}{2} S\,d\boldsymbol{v}, \quad (22,11)$$

где кинетическая энергия

$$\mathcal{K} = \int \frac{mv^2}{2} f \, d\boldsymbol{v}$$

и принято во внимание, что для плазмы

$$\boldsymbol{j}' = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{j} = e \int \boldsymbol{v} f \, d\boldsymbol{v}. \qquad (22,12)$$

При получении выражения (22,11) учтено, что в силу (22,12),

$$\int \frac{ev^2}{2} \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] \right) \nabla_v f d\boldsymbol{v} = -e \int \boldsymbol{v}\boldsymbol{E} f \, d\boldsymbol{v} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \boldsymbol{E} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \boldsymbol{j}\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{8\pi} \right),$$

причем при проведении интегрирования по частям использовано естественное предположение о достаточно быстром убывании функции $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ при $v \to \infty$. Отметим, что обозначение ∇_r, фигурирующее в (4,2), заменено в (22,11) на оператор div. Последний член в (22,11) есть энергия, передаваемая в единицу времени электронами тяжелым частицам.

В сочетании с теоремой Пойнтинга (22,3), из (22,11) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \mathcal{K} \right) =$$

$$= -\operatorname{div} \left\{ \frac{c}{4\pi} [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}] + \int \frac{mv^2}{2} \boldsymbol{v} f \, d\boldsymbol{v} \right\} - \int \frac{mv^2}{2} S \, d\boldsymbol{v}. \qquad (22,13)$$

Выражение (22,13) имеет очевидный смысл закона сохранения энергии, причем $\boldsymbol{S}^{(1)} = \int \frac{mv^2}{2} \boldsymbol{v} f \, d\boldsymbol{v}$ есть поток энергии, переносимый частицами. Как ясно из вывода, этот член в (22,11) и (22,13) появляется только при учете члена $\boldsymbol{v}\nabla_r f$ в кинетическом уравнении (4,2) и, таким образом, непосредственно связан с учетом пространственной дисперсии. При пренебрежении же пространственной дисперсией полный поток энергии равен потоку электрической энергии — вектору Пойнтинга $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi} [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]$. Можно показать (см. [229—231] и [10], § 3), что при отсутствии поглощения и использовании тензора $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ среднее по времени значение

$$\overline{S}_e^{(1)} = -\frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})}{\partial k_e} E_i^* E_j, \qquad (22,14)$$

где $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ (см. также § 24; обратим внимание на то, что в (22,11) и (22,13) S есть интеграл соударений, который не нужно смешивать с обозначаемым той же буквой вектором Пойнтинга $\boldsymbol{S}$). При отсутствии поглощения (соударений) и неучете пространственной дисперсии закон сохранения энергии (22,13) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}+\mathscr{K}\right)=-\frac{c}{4\pi}\,\mathrm{div}\,[\boldsymbol{EH}]. \tag{22,13а}$$

Кинетическая энергия плазмы, если отвлечься от равновесной кинетической энергии частиц $\frac{3}{2}\varkappa NT$ (ограничиваемся учетом электронов), зависит от f и поля $\boldsymbol{E}$. С другой стороны, проницаемость $\varepsilon(\omega)$ или в общем случае тензор $\varepsilon_{ij}(\omega, \boldsymbol{k})$ выражаются через функцию распределения f (см. §§ 6 и 10). Поэтому априори не исключена возможность выразить $\frac{\partial\mathscr{K}}{\partial t}$ через такие величины, как ε, $\frac{d\varepsilon}{d\omega}$, $\overline{E^2}$ и т. д. Действительно, легко показать [227], что при отсутствии поглощения

$$\overline{\mathscr{K}}-\frac{3}{2}\varkappa NT=\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}-1\right\}\overline{E^2}. \tag{22,13б}$$

Тем самым, как ясно из (22,13а) и (22,13б), $\overline{\frac{E^2}{8\pi}+\mathscr{K}}=\overline{W}_E=\frac{1}{8\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\overline{E^2}$, что совпадает с (22,9).

При наличии соударений (поглощения), напротив, кинетическая энергия, вообще говоря, не выражается через ε, σ, E и производные этих величин. Кроме того, в законе сохранения энергии (22,13) фигурирует член, зависящий от интеграла соударений S и различный в разных случаях $\Big($член $\int\frac{mv^2}{2}S\,d\boldsymbol{v}$ в (22,13) определяет энергию, передаваемую электронами всем другим частицам — молекулам и ионам; ясно, что этот член зависит от состава плазмы$\Big)$. В силу сказанного при наличии поглощения нельзя, вообще говоря, связать выражение $\overline{W}_E=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\right)\overline{E^2}$ или какое-либо другое аналогичное выражение, содержащее ε, σ и E и их производные, со средней кинетической энергией $\overline{\mathscr{K}}$. Такое заключение станет еще более ясным, если напомнить свойства дискретных электрических цепей, состоящих из элементов с самоиндукцией L, емкостью C и сопротивлением R. Известно, что импеданс такой цепи $Z(\omega)=R+iX$, играющий роль проницаемости $\varepsilon'(\omega)=\varepsilon(\omega)-i\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}$, не определяет запаса энергии и параметров цепи — при $R\neq 0$ и одном и том же значении Z эти параметры и запас энергии могут быть совершенно различными (пример такой цепи приведен в [227] и в [10], § 3.1).

Таким образом, при наличии соударений в плазме энергетические вопросы нужно рассматривать на основе кинетического уравнения и уравнений поля, а также вытекающих из них законов сохранения (22,11) и (22,13). Свести же эту задачу к вычислению $\varepsilon(\omega)$ и аналогичных величин, вообще говоря, нельзя. Однако в некоторых частных случаях такое сведе́ние все же возможно. На соответствующем примере не лишено интереса остановиться.

Плотность энергии для модели поглощающей плазмы. Рассмотрим энергетические соотношения при использовании уравнения для средней скорости электрона $\dot{\boldsymbol r}$:

$$\frac{dm\dot{\boldsymbol r}}{dt}=e\boldsymbol E-\nabla U-m\nu_{\text{эфф}}\dot{\boldsymbol r},\qquad \frac{d\left(\frac{m\dot{\boldsymbol r}^2}{2}+U\right)}{dt}=e\dot{\boldsymbol r}\boldsymbol E-m\nu_{\text{эфф}}\dot{\boldsymbol r}^2,\quad (22,15)$$

где U — потенциальная энергия, отвечающая некоторой силе, которая для свободных (плазменных) электронов равна нулю. При $\boldsymbol E=\boldsymbol E_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$ и $U=0$ из (22,15) получаем (см., например, § 4):

$$\left.\begin{aligned}\overline{W'_E}&=\frac{\overline{E^2}}{8\pi}+N\overline{K}=\left(1+\frac{4\pi e^2N}{m(\omega_0^2+\nu_{\text{эфф}}^2)}\right)\frac{\overline{E^2}}{8\pi}=\frac{2-\varepsilon}{8\pi}\overline{E^2},\\ \overline{K}&=\frac{m\overline{\dot{\boldsymbol r}^2}}{2}=\frac{e^2\overline{E^2}}{2m(\omega_0^2+\nu_{\text{эфф}}^2)},\end{aligned}\right\}\quad (22,16)$$

поскольку из (22,15) следуют выражения (3,7) для ε и σ. Очевидно, энергия $\overline{W'_E}$ всегда положительна в отличие от выражения

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\right)_0\overline{E^2}=\frac{1}{8\pi}\left(1+\frac{4\pi e^2N(\omega_0^2-\nu_{\text{эфф}}^2)}{m(\omega_0^2+\nu_{\text{эфф}}^2)^2}\right)\overline{E^2},$$

с которым она совпадает при $\nu_{\text{эфф}}=0$. В этой связи на первый взгляд представляется разумным считать $\overline{W'_E}$ плотностью, зависящей от поля части энергии плазмы (см. [32], § 68 и [225, 226]). Сопоставление с результатом кинетического рассмотрения показывает, однако, что использование уравнения (22,15) и выражения (22,16) отвечает вполне определенному конкретному предположению о виде интеграла $\int\frac{mv^2}{2}S\,d\boldsymbol v$. Именно, при усреднении за время, большое по сравнению с $\frac{2\pi}{\omega_0}$, должно соблюдаться равенство [227]

$$mN\nu_{\text{эфф}}\overline{\dot r^2}=\int\frac{mv^2}{2}S\,d\boldsymbol v.\quad (22,17)$$

Такое условие является по меньшей мере весьма частным, и его использование для плазмы, вероятно, в большинстве случаев не оправдано.

О плотности энергии в случае совокупности осцилляторов. Если вместо плазмы мы имеем совокупность независимых осцилляторов с собственными частотами ω_i, то при использовании уравнения (22,15)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon' &= 1 - \sum_i \frac{\dfrac{4\pi e_i^2 N_i}{m_i}}{\omega^2 - \omega_i^2 - i\omega\nu_{\text{эфф}\, i}}, \\ \overline{W'_E} = \frac{E^2}{8\pi} + N\overline{K} &= \left\{1 + \sum_i \frac{\dfrac{4\pi e_i^2 N_i}{m_i}(\omega_i^2 + \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \omega^2\nu^2_{\text{эфф}\, i}}\right\} \frac{\overline{E^2}}{8\pi}, \end{aligned}\right\} \qquad (22{,}18)$$

где N_i — концентрация осцилляторов с частотой ω_i, значением $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф}\, i}$, зарядом e_i и массой m_i $\left(\text{в (22,15) при этом } U_i = \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 \boldsymbol{r}_i^2\right)$.

Если нет поглощения, т. е. $\nu_{\text{эфф}\, i} = 0$, то $\overline{W'_E}$ в (22,18) выражается через ε с помощью формулы (22,9). Однако при наличии поглощения даже в такой простой осцилляторной модели $\overline{W'_E}$ уже не выражается через ε или ε'. Аналогичный факт, как уже отмечалось выше, известен для электрических цепей (двухполюсников), где роль ε' играет импеданс Z. Отсюда становится ясным, что при наличии поглощения не только в плазме, но и в других средах нельзя указать какое-то выражение для средней плотности энергии, которое получалось бы феноменологически, т. е. как-то однозначно выражалось через $\varepsilon'(\omega)$. Таким образом, для вычисления энергии поля в среде с поглощением нужно прибегать к микроскопической теории, к конкретной модели среды. Плазма при пренебрежении энергией взаимодействия между частицами и использовании элементарной формулы $\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - i\nu_{\text{эфф}})}$, а также уравнения (22,15) является при этом известным исключением: для такой плазмы и при наличии поглощения средняя плотность энергии $\overline{W'_E}$ выражается через ε' (из (22,18) при $\omega_i = 0$ видно, что $\overline{W'_E} = \frac{2-\varepsilon}{8\pi}\overline{E^2} = \frac{2 - \operatorname{Re}\varepsilon'}{8\pi}\overline{E^2}$ и для плазмы, состоящей из частиц разных сортов).

Плотность энергии в плазменных волнах. Согласно (22,9) и (22,10) для плотности энергии в плазме без поглощения имеем $\overline{W}_E = \frac{2-\varepsilon}{8\pi}\overline{E^2}$, причем это выражение носит локальный характер, т. е. не зависит от характера изменения поля в пространстве. Другими словами, пространственной дисперсией пренебрежено и поле можно с равным правом считать и продольным и поперечным (поляризация поля волны $e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$ определяется значением $\operatorname{div}\mathbf{E} = -i\mathbf{kE}$ и становится неопределенной при $k \to 0$). Поэтому средняя во времени плотность энергии в плазменных волнах (колебаниях) равна

$$\overline{W}_E = \frac{\overline{E^2}}{4\pi}, \tag{22,16a}$$

как это следует из (22,9) и (22,10), при отвечающем плазменным волнам условии $\varepsilon = \varepsilon(\omega_0) = 0$ (соударениями пренебрегается).

Результат (22,16а) не противоречит тому факту, что для плазменных волн, для которых $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$, выражение (22,4) равно нулю, т. е. $\frac{1}{4\pi}\int^{t} \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,dt = 0$. Дело в том, что теорема Пойнтинга (см. (22,3)) теряет смысл, если с самого начала положить $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$. Если же исходить для плотности энергии из выражения $W_E = \frac{E^2}{8\pi} + \int \frac{mv^2}{2}(f - f_0)\,d\boldsymbol{v}$, то оно преобразуется к виду $\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{t} \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,dt$, где $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi e\int \boldsymbol{v} f\,d\boldsymbol{v}$, только при двух предположениях. Во-первых, нужно считать, что при $t = -\infty$ функции $f(t = -\infty) = f_0$ и $E(t = -\infty) = 0$, т. е. $W(t = -\infty) = 0$; во-вторых, используется кинетическое уравнение типа $\frac{df}{dt} = -\frac{e\mathbf{E}}{m}\nabla_v f$ (выше f_0 — равновесная функция распределения). Первое из этих предположений означает, что сначала (при $t = -\infty$) никаких плазменных колебаний не было, как и нужно считать при рассмотрении квазимонохроматических волн. Но эти волны не могут возникнуть сами по себе: их создание требует либо действия неэлектрических сил, либо движения каких-то внешних по отношению к плазме зарядов с плотностью ρ. В первом случае (например, когда электроны и ионы «раздвинуты» с помощью сил тяготения) несправедливо приведенное уравнение для $\frac{df}{dt}$, в котором не учтено действие неэлектромагнитных сил. Во втором, значительно более реальном случае (например, при излучении плазменных волн движущимся зарядом) $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$, и нельзя во всем временном интервале положить $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$. Итак, кажущееся противоречие, связанное с использованием выражения (22,4) для плазменных волн, снимается, и формула (22,16а) действительно определяет плотность энергии в плазменных волнах. Формула (22,16а) определяет также плотность энергии в поперечных волнах с несущей частотой $\omega = \omega_0$, для которой $\varepsilon(\omega_0) = 0$. В этом случае можно исходить из выражения (22,4), но величина $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ не равна тождественно нулю, так как рассматривается квазимонохроматическая волна. По последней причине в спектре присутствуют частоты, отличные от ω_0, для которых значения ε и $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ не равны нулю (именно учет этого обстоятельства и привел к замене формул (22,1) и (22,2) на (22,9)).

Скорость сигналов в поглощающей среде. Применение к плазме. В условиях, когда можно воспользоваться выражением для плотности энергии в поглощающей среде, представляется возможным ввести также понятие о скорости сигналов (импульсов), распространяющихся в такой среде [225, 226].

Групповая скорость была введена в § 21, по существу, из кинематических соображений, и, действительно, выражение $v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$ годится для квазимонохроматических волн любой природы. Вместе с тем групповая скорость как скорость распространения сигналов должна иметь и энергетический смысл скорости переноса энергии. Это действительно так, в чем легко убедиться, определив скорость переноса энергии как отношение среднего по времени значения плотности потока энергии $\overline{S}$ к средней плотности энергии $\overline{W}$:

$$v_{\text{эн}} = \frac{\overline{S}}{\overline{W}}. \tag{22,19}$$

Для диспергирующей непоглощающей среды

$$\overline{W} = \overline{W}_E + \overline{W}_H = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\right)\overline{E^2} + \frac{\overline{H^2}}{8\pi} = \\ = \frac{1}{16\pi}\left(\left(\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\right)\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*\right), \tag{22,20}$$

где в последнем выражении используются комплексные поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ и $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i\omega t}$ (квазимонохроматический характер поля уже учтен в (22,20) путем замены ε на $\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}$; поэтому в (22,20) поля можно считать монохроматическими).

Далее, в любой среде, как и в вакууме, поток электромагнитной энергии

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}], \quad \overline{S}_z = \frac{c}{4\pi}(\overline{E_x H_y} - \overline{E_y H_x}) = \\ = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*), \tag{22,21}$$

где рассматривается поперечная волна, бегущая по оси z, и в последнем выражении используются комплексные поля (подробнее см. § 24).

Для плоской, поперечной, монохроматической и однородной волны

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t-\boldsymbol{kr})},\quad \boldsymbol{H}=\sqrt{\varepsilon'}\left[\frac{\boldsymbol{k}}{k}\boldsymbol{E}\right],\quad \overline{S}_z=\frac{c}{8\pi}n(\boldsymbol{EE}^*),\\ &(\boldsymbol{kE})=0,\quad k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'=\frac{\omega^2}{c^2}(n-i\varkappa)^2,\quad \operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon'}=n. \end{aligned}\right\}\quad (22{,}22)$$

При отсутствии поглощения $\sqrt{\varepsilon'}=\sqrt{\varepsilon}=n$, $k=\frac{\omega}{c}n$ и

$$\left.\begin{aligned} &\overline{S}_z=\frac{c}{8\pi}n(\boldsymbol{EE}^*),\quad \overline{W}=\frac{n}{8\pi}\left(n+\omega\frac{dn}{d\omega}\right)(\boldsymbol{EE}^*)=\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad=\frac{n}{8\pi}\frac{d(\omega n)}{d\omega}\boldsymbol{EE}^*,\\ &v_{\text{эн}}=\frac{\overline{S}}{\overline{W}}=\frac{c}{\dfrac{d(\omega n)}{d\omega}}=\frac{d\omega}{dk}, \end{aligned}\right\}\quad (22{,}23)$$

т. е., как и утверждалось, $v_{\text{эн}}=v_{\text{гр}}$.

При наличии поглощения волновой вектор $\boldsymbol{k}$ комплексен (частоту ω считаем вещественной; см. § 7) и, следовательно, вектор $d\omega/d\boldsymbol{k}$ также является комплексным. Скорость же распространения импульса, если она вообще имеет определенный смысл, во всяком случае является вещественной величиной. В качестве такой скорости при наличии поглощения можно было бы, например, выбрать выражение $v'_{\text{гр}}=\dfrac{c}{\dfrac{d(\omega n)}{d\omega}}$, где n — показатель преломления для однородных плоских волн с $\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}(n-i\varkappa)\boldsymbol{s}$, $s=1$ и $\frac{\omega}{c}n=\operatorname{Re}k$. В § 21 мы уже подчеркивали, что значение $v'_{\text{гр}}$ может превосходить c и, помимо того, такой выбор выражения для скорости импульса не имеет оснований. То же можно сказать, например, о выражении

$$v''_{\text{гр}}=\operatorname{Re}\frac{c}{\dfrac{d}{d\omega}[\omega(n-i\varkappa)]}=\frac{c\dfrac{d(\omega n)}{d\omega}}{\left(\dfrac{d(\omega n)}{d\omega}\right)^2+\left(\dfrac{d(\omega\varkappa)}{d\omega}\right)^2}.$$

Можно показать [232, 233] (см. также [10], § 3.2), что при наличии существенного поглощения никакого универсального выражения для скорости импульса вообще не существует. На этом вопросе мы еще остановимся в § 24, где сразу рассматривается анизотропная среда. В то же время, если известна плотность энергии $\overline{W}'_E$ при наличии поглощения, скорость $v_{\text{эн}}$, определяемая формулой (22,19) и уже не равная $\frac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}}$, может быть найдена и в какой-то мере характеризует скорость распространения сигнала.

Для плазмы при использовании элементарной формулы для ε' и формулы (22,16) для $\overline{W}'_E$:

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega - i\nu_{\text{эфф}})} = \varepsilon - i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega} = (n - i\varkappa)^2, \quad \overline{S}_z = \frac{c}{8\pi}\,n\,(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^*),$$

$$\overline{W} = \frac{1}{16\pi}\{(2-\varepsilon)\,\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^*\} = \frac{1}{16\pi}(2 - \varepsilon + |\varepsilon'|)\,\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^* \qquad (22,24)$$

получим:

$$v_{\text{эн}} = \frac{\overline{S}}{\overline{W}} = \frac{2c\,\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon'}}{2 - \mathrm{Re}\,\varepsilon' + |\varepsilon'|} = \frac{cn}{1+\varkappa^2}\,. \qquad (22,25)$$

При отсутствии поглощения $\varkappa = 0$ и $v_{\text{эн}} = cn = \frac{d\omega}{dk}$ (см. (21,18)); если $\sigma = 0$ и $\varepsilon < 0$, то $n = 0$ и $v_{\text{эн}} = 0$, как это и должно быть при полном внутреннем отражении без поглощения. Отсюда, а также из рассмотрения других примеров ясно, что формула (22,25) для скорости сигналов в плазме приводит к вполне разумным результатам. Однако, как подчеркивалось ранее, использованное выражение (22,16) для $\overline{W}'_E$ является частным и не может иметь места в общем случае. Кроме того, даже отвлекаясь от этого момента, формула (22,25) может оказаться совершенно непригодной, если волна заметным образом затухает уже на длине рассматриваемого квазимонохроматического импульса (подробнее см. [226], а также [227]). Последнее вполне естественно, поскольку понятие о скорости сигнала в среде по самому своему смыслу является приближенным понятием, характеризующим распространение сигнала при пренебрежении его изменением (искажением) во времени. В то же время все сведения о распространении сигнала в линейной среде с учетом его искажения, очевидно, могут быть получены из анализа соответствующего интеграла Фурье (см. §§ 21, 24).

Глава V

Распространение волн в неоднородной магнитоактивной плазме

§ 23. Введение. Приближение геометрической оптики

Волновые уравнения. При исследовании распространения электромагнитных волн в неоднородной анизотропной среде, и в частности в магнитоактивной плазме, исходной является система уравнений (см. (2,22) и (2,18); пространственная дисперсия не учитывается):

$$\Delta E_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{r})\, E_j = 0. \tag{23,1}$$

Для изотропной среды, когда $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'\delta_{ij}$, эти уравнения, разумеется, переходят в (16,1). Что касается аналогичных уравнений для магнитного поля волны $\mathbf{H}$, то они в общем случае неудобны в связи с их громоздкостью (эти уравнения можно получить, исключая поле $\mathbf{E}$ из уравнений $\Delta\mathbf{H} + \frac{i\omega}{c}\operatorname{rot}\left(\mathbf{D} - \frac{4\pi i}{\omega}\mathbf{j}\right) = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{H}$, $D_i - \frac{4\pi i}{\omega}j_i = \varepsilon'_{ij}(\mathbf{r})\, E_j$).

В частном случае плоскослоистой среды, когда $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'(\omega, z)$, при рассмотрении плоских волн уравнения (23,1) заметно упрощаются, но даже при нормальном падении волн на слой получаются два уравнения второго порядка (см. (2,32) и (11,3)):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left[AE_x + iCE_y\right] = 0,\\ &\frac{d^2E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left[-iCE_x + BE_y\right] = 0; \end{aligned}\right\} \tag{23,2}$$

здесь A, B и C определяются формулами (11,3), в которых параметры $v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$, $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$ и $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$ зависят от z (в частных случаях зависеть от z может, конечно, только один или два из этих параметров; зависимость u от z отвечает случаю, когда плазма находится в неоднородном внешнем магнитном поле $\mathbf{H}^{(0)}(z)$).

Система (23,2) эквивалентна уравнениям четвертого порядка для E_x или E_y, в то время как при нормальном падении волн на изотропный слой компоненты E_x и E_y подчиняются уравнению второго порядка (16,3). Усложнение, связанное с переходом от этого уравнения (16,3) к системе (23,2), в математическом отношении настолько велико, что исследование точного решения этой системы до сих пор не проводилось. При этом, конечно, имеется в виду, что магнитное поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ составляет с осью z (т. е. с нормалью к волне) угол α, не равный нулю или $\frac{\pi}{2}$. При $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ система (23,2) строго разделяется на два независимых уравнения второго порядка. Поэтому эти частные случаи имеют особенно большое значение как сами по себе, так и при их использовании (с некоторыми модификациями) в качестве приближенных решений, пригодных иногда и при других значениях α.

Сказанное объясняет, почему в теории распространения волн в неоднородной магнитоактивной плазме еще большее значение, чем в случае изотропной среды, имеют приближенные решения. К их числу в первую очередь относится приближение геометрической оптики, а также метод фазовых интегралов и метод теории возмущений.

Приближение геометрической оптики. Широкая область применимости приближения геометрической оптики связана с тем, что в ионосфере, солнечной короне и для некоторых других объектов свойства плазмы обычно медленно изменяются в пространстве. При этом медленность изменения означает, что показатели $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ весьма мало меняются на расстояниях порядка длины волны в среде. Очевидно, что в подобном случае в каждой относительно небольшой области слоя распространение можно считать таким же, как в однородной среде, с соответствующими этой области значениями $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$.

Характер распространения и отражения волн от слоя неоднородной плазмы в приближении геометрической оптики становится ясным из рассмотрения кривых $n_{1,2}(v)$ при заданных u и α (см. рис. 11,2; 11,3; 11,6 и др.; поглощение для простоты не учитываем). В начале слоя при $v = 0$ (т. е. при $N(z) = 0$) волна расщепляется на две: обыкновенную и необыкновенную, которые в дальнейшем распространяются независимо. Если, например, $u < 1$, то при $v = v_{10}^{(-)} = 1 - \sqrt{u}$ показатель $n_1 = 0$, и дальше необыкновенная волна распространяться не может (при $n_1^2 < 0$ волна затухает). Поэтому, так же как для изотропной среды (см. § 16), можно заключить, что в области $n_1^2 \approx 0$ происходит полное отражение необыкновенной волны от слоя. Обыкновенная волна, как ясно из аналогичных рассуждений, отражается в точке $v = v_{20} = 1$. Исключение составляет случай малых углов α, когда область отражения должна «перескочить» из окрестности точки $v_{20} = 1$ к точке $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$. Подобный «перескок» не может быть понят на основе приближения геометрической оптики и рассматривается в § 28. То обстоятельство, что в окрестности точки $v_{20} = 1$ при малых углах α геометрическая оптика неприменима, сразу становится ясным из рис. 11,10 — в этом случае свойства среды с изменением v резко меняются.

На основании сделанной в § 16 и выше идентификации приближения геометрической оптики с возможностью рассматривать среду, как квазиоднородную, ясно, что в этом случае изменение фазы волны при распространении должно определяться выражением типа $\frac{\omega}{c}\int n_{1,2}(z)\,dz$, так же как это имеет место в изотропном случае. Однако для полного определения напряженностей поля $E_{x,y,1,2}$ в приближении геометрической оптики необходимо более детальное рассмотрение вопроса, которое аналогично проведенному в § 16 (см. [234]).

Будем искать решение системы (23,2) в виде:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \left(\boldsymbol{E}^{(0)}(\boldsymbol{r}) + \frac{c}{\omega}\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{r}) + \frac{c^2}{\omega^2}\boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{r}) + \ldots\right) e^{-i\frac{\omega}{c}\Psi(\boldsymbol{r})}, \tag{23,3}$$

где вместо $\boldsymbol{r}$ можно поставить z, так как в (23,2) дифференцирование происходит только по оси z. Подставляя (23,3) в (23,2) и приравнивая нулю члены, стоящие у разных степеней отношения $\frac{\omega}{c}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \{A-(\Psi')^2\}E_x^{(0)} + iCE_y^{(0)} &= 0, \\ -iCE_x^{(0)} + \{B-(\Psi')^2\}E_y^{(0)} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{23,4}$$

$$\left.\begin{aligned} \{A-(\Psi')^2\}E_x^{(1)} + iCE_y^{(1)} &= i\{\Psi''E_x^{(0)} + 2\Psi'E_x'^{(0)}\}, \\ -iCE_x^{(1)} + \{B-(\Psi')^2\}E_y^{(1)} &= i\{\Psi''E_y^{(0)} + 2\Psi'E_y'^{(0)}\}, \end{aligned}\right\} \tag{23,5}$$

$$\left.\begin{aligned} \{A-(\Psi')^2\}E_x^{(2)} + iCE_y^{(2)} &= i\{\Psi''E_x^{(1)} + 2\Psi'E_x'^{(1)}\} - E_x''^{(0)}, \\ -iCE_x^{(2)} + \{B-(\Psi')^2\}E_y^{(2)} &= i\{\Psi''E_y^{(1)} + 2\Psi'E_y'^{(1)}\} - E_y''^{(0)} \end{aligned}\right\} \tag{23,6}$$

и т. д., причем штрихи здесь означают дифференцирование по z $\left(\Psi' \equiv \frac{d\Psi}{dz},\ E' \equiv \frac{dE}{dz}\right.$ и т. п.$\left.\right)$.

Уравнение (23,4) для $E_{x,y}^{(0)}$ совпадает с уравнением (11,26), имеющим место в однородной среде, при замене n^2 на $(\Psi')^2$ (для простоты мы считаем поглощение отсутствующим). Таким образом, условие существования нетривиального решения для $E_{x,y}^{(0)}$

определяет функцию $(\Psi')^2$:

$$(\Psi'_{1,2})^2 = n^2_{1,2}, \tag{23,7}$$

где $n^2_{1,2}$ определяется уравнением (11,6). Отсюда

$$\Psi_{1,2} = \pm \int\limits_{z_0}^{z} n_{1,2}(z)\,dz, \tag{23,8}$$

причем решение с плюсом соответствует распространению по положительному направлению оси z, а решение с минусом — распространению в обратном направлении. Ниже мы будем выбирать всегда в (23,8) знак плюс, учитывая, если это нужно, знак Ψ в самом выражении для поля.

Далее, согласно (23,4)

$$\frac{E^{(0)}_{y1,2}}{E^{(0)}_{x1,2}} = \frac{iC}{B-(\Psi'_{1,2})^2} = -\frac{A-(\Psi'_{1,2})^2}{iC} = K_{1,2}, \tag{23,9}$$

т. е. поляризация волны в первом приближении геометрической оптики в каждой точке такая же, как в однородной среде с соответствующими значениями u, α и $v(z)$ (см. (11,26)). Разумеется, этого и следовало ожидать.

Условие существования нетривиального решения у системы (23,5) приводит к уравнению, определяющему зависимость $E^{(0)}_{x1,2}$ и $E^{(0)}_{y1,2}$ от координат:

$$\left.\begin{aligned} E'^{(0)}_x + \left(\frac{\Psi''}{2\Psi'} - \frac{KK'}{1-K^2}\right) E^{(0)}_x = 0,\\ E'^{(0)}_y + \left(\frac{\Psi''}{2\Psi'} - \frac{K'}{K(1-K^2)}\right) E^{(0)}_y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{23,10}$$

где для волн 1 и 2 нужно под Ψ и K понимать выражения (23,8) и (23,9) соответственно с индексами 1 или 2. Согласно (23,10)

$$E^{(0)}_{x1,2} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\Psi'_{1,2}(1-K^2_{1,2})}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{n_{1,2}(z)(1-K^2_{1,2}(z))}}, \tag{23,11}$$

а компонента $E^{(0)}_y$ в согласии с (23,9) равна $K_{1,2}E^{(0)}_x$.

В результате в первом приближении геометрической оптики

$$\left.\begin{aligned} E_{x1,2} &= \frac{\text{const}}{\sqrt{n_{1,2}(z)(1-K^2_{1,2}(z))}}\, e^{\pm i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z} n_{1,2}(z)dz},\\ E_{y1,2} &= K_{1,2}E_{x1,2}. \end{aligned}\right\} \tag{23,12}$$

Если бы мы учитывали поглощение, то получился бы такой же результат с заменой везде $\Psi' = n_{1,2}$ на $\Psi' = (n_{1,2} - i\varkappa_{1,2})$, где $(n_{1,2} - i\varkappa_{1,2})$ определяется выражением (11,5); величина $K_{1,2}$ при учете поглощения определяется формулой (11,25).

Общее решение системы (23,2) в приближении геометрической оптики имеет вид:

$$E_x = \frac{C_{1+}}{\sqrt{(n_1 - i\varkappa_1)(1-K_1^2)}} e^{+i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z}(n_1 - i\varkappa_1)dz} + \frac{C_{1-}}{\sqrt{(n_1 - i\varkappa_1)(1-K_1^2)}} e^{-i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z}(n_1 - i\varkappa_1)dz} + \frac{C_{2+}}{\sqrt{(n_2 - i\varkappa_2)(1-K_2^2)}} e^{+i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z}(n_2 - i\varkappa_2)dz} + \frac{C_{2-}}{\sqrt{(n_2 - i\varkappa_2)(1-K_2^2)}} e^{-i\frac{\omega}{c}\int\limits_{z_0}^{z}(n_2 - i\varkappa_2)dz}. \qquad (23,13)$$

Выражение для E_y отличается от (23,13) появлением множителя K_1 при C_{1+} и C_{1-} и множителя K_2 при C_{2+} и C_{2-}. Компонента E_z выражается через E_x и E_y с помощью формулы (10,20). Решение (23,13) зависит, как это и должно быть, от четырех произвольных постоянных $C_{1\pm}$ и $C_{2\pm}$, поскольку любое изменение z_0 эквивалентно некоторому изменению этих постоянных.

Формула (23,12) отличается от формулы (16,11), установленной для изотропной среды, лишь своей зависимостью от характеризующей поляризацию величины $K_{1,2}$. В изотропном случае поляризация волны при нормальном падении (уравнение (16,3)) с изменением координаты z не меняется, т. е. $K_{1,2} = \text{const}$, и (23,12) переходит в (16,11) или, точнее, формулу (16,11) с $\varkappa = 0$.

Границы применимости приближения. Границы применимости приближения геометрической оптики, которые мы отождествляем с условиями применимости первого приближения (23,12), можно найти, определяя поле во втором приближении, т. е. вычисляя $E_{x,y}^{(1)}$ из (23,5) и (23,6).

Из (23,5) находим связь $E_x^{(1)}$ и $E_y^{(1)}$:

$$E_y^{(1)} = KE_x^{(1)} + \frac{1}{C}(\Psi'' E_x^{(0)} + 2\Psi' E_x^{\prime(0)}) = KE_x^{(1)} + \frac{2KK'}{C(1-K^2)}\Psi' E_x^{(0)}, \qquad (23,14)$$

где C — один из коэффициентов в уравнении (23,2).

Условие существования решения у системы (23,6) приводит к уравнению для $E_x^{(1)}$:

$$\left.\begin{aligned} &E_x'^{(1)}+\left(\frac{\Psi''}{2\Psi'}-\frac{KK'}{1-K^2}\right)E_x^{(1)}=f(z),\\ &f(z)=\frac{1}{2i\Psi'(1-K^2)}\left\{(1-K^2)E_x''^{(0)}-2KK'E_x'^{(0)}+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{i\Psi''K}{c}\left(\frac{2KK'}{1-K^2}\Psi'E_x^{(0)}\right)+2i\Psi'K\frac{d}{dz}\left(\frac{2KK'}{c(1-K^2)}\Psi'E_x^{(0)}\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{23,15}$$

Приближение геометрической оптики пригодно, если

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|E_x^{(1)}\right|=\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{\chi}}\int\limits_{z_0}^{z}f(z)\sqrt{\chi}\,dz\right|\ll\left|E_x^{(0)}\right|=\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{\chi}}, \tag{23,16}$$

где $\chi=\Psi'(1-K^2)=n(1-K^2)$, $\lambda_0=\frac{2\pi c}{\omega}$ и для определенности взята компонента E_x.

Так же как в § 16, условие (23,16) можно заменить рядом достаточных, более сильных условий. При этом мы не будем для краткости производить в выражении (23,16) интегрирование по частям, как это было сделано в (16,21), и ограничимся самой простой оценкой.

Если функция $\chi(z)$ является монотонной, то при выполнении неравенства

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|f(z)\right|\ll\left|E_x^{(0)}\frac{d}{dz}\ln\chi\right| \tag{23,17}$$

условие (23,16) выполнено, коль скоро на всем интервале (z, z_0) значение $|\ln\chi|$ не слишком велико (например, требование $|\ln\chi|<10$ означает, что $10^{-4}<\chi<10^4$). Для того чтобы убедиться в сказанном, достаточно вспомнить, что $E_x^{(0)}=\frac{\mathrm{const}}{\sqrt{\chi}}$ и подставить (23,17) в (23,16). Условие (23,17), как легко видеть, используя явное выражение для $f(z)$, в свою очередь заведомо выполнено, если соблюдаются неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\chi'}{n\chi}\ll 1,\quad \frac{\lambda_0}{2\pi}\left(\frac{K}{c}\right)\frac{nn'KK'}{\chi'(1-K^2)}\ll 1,\quad \frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{KK'}{\chi}\ll 1,\\ &\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\chi''}{n\chi'}\ll 1,\quad \frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{KK''}{\chi'}\ll 1,\\ &\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{nK\sqrt{\chi}}{\chi'}\frac{d}{dz}\left(\frac{nKK'}{c(1-K^2)\sqrt{\chi}}\right)\ll 1;\end{aligned}\right\} \tag{23,18}$$

здесь все величины нужно брать по модулю (см. § 16) и для каждой из волн 1 или 2 нужно подставить свои значения n, K и χ. Некоторые из этих неравенств можно было бы упростить или совсем ликвидировать подобно тому, как это было сделано в § 16 в отношении второго из неравенств (16,15). Мы не будем на этом останавливаться, так как легко видеть, что при плавной, медленной зависимости v от z условия (23,18) практически (за исключением, указанным ниже) сводятся к одному неравенству:

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|\frac{n'_{1,\,2}}{n^2_{1,\,2}}\right| \ll 1, \qquad (23,19)$$

которое вполне аналогично условию (16,22) и имеет совершенно ясный физический смысл.

Для того чтобы убедиться в законности замены условий (23,18) на (23,19), нужно учесть, что функции C и C' стремятся к бесконечности лишь при $v \to v_{1,\,2\infty}$ и стремятся к нулю при $v \to 1$ и $v \to 0$; $|K_2| \to \infty$ и $|K'_{1,\,2}| \to \infty$ при $v \to 1$. Параметр K_1 к бесконечности не стремится и при $v \to 1$ (см. рис. 11,9). Вместе с тем из сказанного в § 11 о поведении кривых $n_{1,2}(v)$ (см. рис. 11,3 и др.) явствует, что в точках $v = v_{20} = 1$ и $v_{1,2\infty}$ геометрическая оптика неприменима к соответствующим волнам уже в силу невыполнения условия (23,19).

В приближении геометрической оптики волны обоих типов 1 и 2 и волны одного типа, но с противоположным направлением распространения совершенно независимы. Поэтому, в частности, отражение волн может наблюдаться только в областях, где геометрическая оптика неприменима. Последнее имеет место при малых значениях $n^2_{1,\,2}$ или больших значениях $\frac{dn_{1,2}}{dz}$. Поэтому волна типа 1 может отражаться в окрестностях точек $v_0^{(\pm)}$ или, как мы условно говорим, в точках $v_{10}^{(\pm)} = 1 \pm \sqrt{u}$, где $n_1^2 = 0$ (ограничиваемся для простоты разбором случая, когда $u < 1$). В то же время к волне 2 в точках $v_{10}^{(\pm)}$ геометрическая оптика применима и, таким образом, отражение волны 1 не затрагивает волну 2. К волне 2 (обыкновенной волне) геометрическая оптика неприменима при $v = v_{20} = 1$, где $n_2^2 = 0$. И опять-таки к волне 1 в этой точке геометрическая оптика применима. Исключение составляет случай малых углов α, когда в окрестности точки $v = 1$, как ясно из рис. 11,10, геометрическая оптика неприменима к волнам обоих типов (при $\alpha \to 0$ и $v \approx 1$ значение $n_2 \approx 0$ и $\frac{dn_{1,2}}{dz} = n'_{1,\,2} \to \infty$). Поэтому при $\alpha \to 0$ возможно превращение волны типа 2 в волну типа 1, что действительно имеет место и объясняет указанную в § 11 особенность предельного перехода к случаю продольного распространения (см. § 28).

Выше мы, разумеется, имели в виду случай плавного, медленного изменения v в зависимости от z. Если же имеются большие градиенты концентрации N или, что то же, v, то производные $\frac{dn_{1,2}}{dz}$ могут быть велики для обеих волн при любом v. Иначе говоря, рисунки типа рис. 11,2; 11,3 и т. п., на которых отложена функция $n_{1,2}(v)$, позволяют судить о поведении функции $n_{1,2}(z)$, только если v является на всем протяжении линейной или во всяком случае плавной монотонной функцией z. Только при этом условии на основании малости производной $\frac{dn}{dv}$ можно заключить о малости производной $n' \equiv \frac{dn}{dz}$, которая входит в (23,19). При наличии резких градиентов $\frac{dn_{1,2}}{dz}$ волны разных типов и направлений, вообще говоря, переходят друг в друга. В пределе, когда имеется резкий скачок свойств среды на некоторой границе, отражение и преломление волн описываются известными формулами Френеля для анизотропной среды.

Область начала слоя и взаимодействие нормальных волн в этом случае. В самом начале слоя (при $v \to 0$) соблюдение условия (23,19) не является, однако, достаточным для справедливости приближения геометрической оптики (именно этот случай и был при переходе к (23,19) оговорен как исключительный).

При малых v, если

$$v \ll 1, \quad v \ll \left| \frac{u-1}{u\cos^2\alpha - 1} \right|, \tag{23,20}$$

с точностью до членов первого порядка малости имеем (см. (11,3), (11,6) и (11,26)):

$$\left. \begin{aligned} &A = 1 + \frac{v}{u-1}, \quad B = 1 + \frac{v(1-u\sin^2\alpha)}{u-1}, \quad C = \frac{\sqrt{u}\, v\cos\alpha}{u-1}, \\ &n_{1,2}^2 = 1 - \frac{2v}{2 - u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u\cos^2\alpha}}, \\ &\Delta n = n_2 - n_1 = \frac{\sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u\cos^2\alpha}}{2(1-u)}\, v, \\ &K_{1,2} = -i\,\frac{2\sqrt{u}\cos\alpha\,(1-v)}{u\sin^2\alpha \mp \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u\cos^2\alpha}}. \end{aligned} \right\} \tag{23,21}$$

Обратимся теперь ко второму из условий (23,18):

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{K}{C}\frac{nn'KK'}{\chi'(1-K^2)} \ll 1. \tag{23,18a}$$

Учитывая (23,21) и в первую очередь пропорциональность величины C параметру v, мы видим, что при $v \to 0$ коэффициент

$C\to 0$, и, таким образом, условие (23,18а) не выполнено; в то же время неравенство (23,19) выполняется, если только производная $\frac{dv}{dz}$ не слишком велика (в ионосфере и солнечной короне это последнее требование обычно можно считать выполненным).

Если в начале слоя записать v в виде:

$$v=az, \tag{23,22}$$

то, не обращая для простоты внимания на множители типа $u-1$, $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ и т. п. (т. е. предполагая эти множители не слишком большими или малыми), вместо рассматриваемого неравенства (23,18а) получаем условие

$$\frac{\lambda_0}{2\pi z}\sim\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\frac{d\Delta n}{dz}}{\Delta n}\ll 1; \tag{23,23}$$

здесь $n_2-n_1=\Delta n\sim v\approx az$ и координата z отсчитывается от начала слоя. Если вместо (23,22) положить $v=az^m$, где показатель m не слишком мал или велик, то практически получается также условие (23,23). Вообще же при любой зависимости v от z, если по-прежнему не обращать внимания на множители типа $u-1$, вместо (23,23) получается условие $\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\frac{dv}{dz}}{v}\ll 1$.

Из (23,23) ясно, что при достаточно малых z геометрическая оптика неприменима. Точнее, геометрическая оптика в этом случае неприменима для рассмотрения поляризации распространяющихся волн, так как при $v\to 0$ показатели $n_{1,2}\to 1$ и в отношении скорости распространения или изменения фазы среда приближается к вакууму.

В применении к неоднородным слоям плазмы вопрос о распространении волн и их поляризации в области $v\to 0$ будет рассмотрен в § 26, где указана также соответствующая литература. Здесь же сделаем лишь еще несколько замечаний довольно общего характера.

Непригодность приближения геометрической оптики в начале слоя (при $v\to 0$) является частным случаем неприменимости этого приближения к рассмотрению поляризации в неоднородной среде при исчезающе малой анизотропии. Дело в том, что в анизотропной среде поляризация нормальных волн остается фиксированной (см., например, (11,29)) и при стремлении анизотропии (т. е., например, разности n_2-n_1) к нулю. В изотропной же среде имеет место вырождение, так как скорости распространения обеих нормальных волн одинаковы, а сами эти волны можно в известных пределах выбирать произвольно: их можно считать линейно поляризованными, поляризованными по кругу или эллиптически поляризованными. Далее, в изотропной среде при нормальном падении волны на слой (т. е. если волновая нормаль параллельна градиенту ε) изменения поляризации не происходит (в (16,3) компоненты E_x и E_y независимы) *). В магнитоактивной среде, напротив, как ясно из (11,25) и всего вышеизложенного, поляризация зависит от $v(z)$ и согласно приближению геометрической оптики должна начать изменяться с самого начала слоя. С другой стороны, очевидно, что наличие предельно слабой анизотропии не может быть существенно и, таким образом, геометрикооптическое приближение непригодно.

Сказанное особенно ясно на примере распространения света в кристаллической среде со слабой анизотропией и изменяющимися вдоль луча направлениями главных осей эллипсоида диэлектрических постоянных, т. е. главных осей тензора ε_{ij} [235]. Пусть свет распространяется по оси z, а две главные оси расположены в плоскости xy и вращаются при изменении z так, что на пути Δz угол главных осей с каким-либо фиксированным направлением в плоскости xy изменяется на $\Delta\Psi = a\Delta z$. В приближении геометрической оптики нормальные волны, которые линейно поляризованы в направлении главных осей эллипсоида диэлектрических постоянных, совершенно независимы одна от другой и в каждой точке их поляризация такая же, как в соответствующей однородной среде. Таким образом, в приближении геометрической оптики плоскость поляризации волн, распространяющихся в рассматриваемой среде, должна на пути Δz поворачиваться на тот же угол $\Delta\Psi = a\Delta z$, на который поворачиваются главные оси. Вместе с тем, если разность показателей преломления волн Δn достаточно мала, то вращение плоскости поляризации должно, очевидно, становиться сколь угодно малым, так как при $\Delta n = 0$ вращение плоскости поляризации отсутствует (вращение осей имеет в этом случае чисто формальное значение).

Противоречие снимается, если учесть, что при $\Delta n \to 0$ геометрическая оптика непригодна. Условие пригодности приближения геометрической оптики в разбираемом случае таково [235]:

$$\frac{d\Psi}{dz}\frac{\lambda_0}{2\pi\Delta n} = \frac{a\lambda_0}{2\pi\Delta n} \ll 1. \qquad (23,24)$$

Если $\Delta n \sim 1$, то это условие приобретает обычный при переходе

---

*) В общем случае изотропной среды изменение поляризации, разумеется, происходит (см., в частности, § 19) и связано с нераспадением векторного уравнения (16,1) на независимые уравнения для E_x, E_y и E_z. Если луч имеет кручение, т. е. траектория луча не является плоской, то происходит также вращение плоскости поляризации.

к геометрической оптике смысл требования малости изменения свойств среды (в данном случае угла Ψ) на длине волны. Но при $\Delta n \ll 1$ условие (23,24) приобретает самостоятельное значение.

В магнитоактивной среде роль $\frac{d\Psi}{dz}$ играет $\frac{dK_{1,2}}{dz}$; в начале ионосферного слоя $\frac{dK_{1,2}}{dz} \sim \frac{dv}{dz} \sim a$, $\Delta n \sim v \sim az$, и условие (23,24) переходит в (23.23). Как уже упоминалось, распространение волн в начале слоя магнитоактивной плазмы, когда геометрическая оптика неприменима, рассмотрено в § 26. Пользуясь терминологией, уже применявшейся и поясненной в § 20, можно сказать, что в начале слоя имеет место взаимодействие нормальных волн типа 1 и 2.

Другими словами, нормальные волны 1 и 2, полученные в приближении геометрической оптики, в начале слоя не передают характера точного решения уравнений (23,2). В определенном приближении, вместе с тем, правильное решение можно сконструировать на основе некоторой комбинации связанных между собой («взаимодействующих») геометрикооптических решений. Взаимодействие волн, понимаемое в таком же смысле имеет место и в области $v \approx 1$ в упомянутом случае малых углов α (см. подробнее § 28).

Наконец, такое же по существу взаимодействие ответственно за отражение волн типа 1 или типа 2 от точек $v_{10}^{(\pm)} = 1 \pm \sqrt{u}$ или $v_{20} = 1$, где величины n_1^2 или n_2^2 обращаются в нуль. Здесь, однако, для достаточно протяженных слоев неоднородной плазмы возможно существенное упрощение, о котором уже шла речь. Именно, если точки $v_{10}^{(\pm)}$ и v_{20} далеки друг от друга, неприменимость геометрической оптики в каждой из этих точек относится лишь к волне одного типа. В подобной ситуации выход за пределы приближения геометрической оптики требует, по существу, исследования не системы (23,2), а одного уравнения второго порядка, аналогичного уравнению (16,3) для изотропной среды. Соответствующие вычисления проведены в § 25

§ 24. Распространение импульсов

Вектор групповой скорости в анизотропной среде. Выше в гл. III и § 23 рассматривалось лишь распространение плоских монохроматических волн $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}$ в однородной магнитоактивной среде, а также распространение волн $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(z)\, e^{i\omega t}$ в неоднородной магнитоактивной плазме. Теперь необходимо выяснить также вопрос о распространении в магнитоактивной среде импульсов, т. е. ограниченных в пространстве и во времени волновых пакетов или групп.

Вначале при этом нет оснований ограничиваться случаем магнитоактивной среды, а нужно выяснить, как распространяются импульсы в произвольной анизотропной среде. Направление движения такого пакета, по определению, есть направление луча, а скорость пакета называется лучевой или групповой скоростью. В анизотропной среде направление луча и направление волнового вектора $\boldsymbol{k}$ (т. е. нормали к волне), вообще говоря, не совпадают.

Направление луча (направление движения волновой группы) в произвольной однородной среде может быть найдено путем разложения волнового поля в интеграл Фурье по «нормальным» плоским волнам, распространяющимся в этой среде:

$$E(\boldsymbol{r}, t) = \int g(\tilde{\boldsymbol{k}})\, e^{i[\omega(\tilde{\boldsymbol{k}})t - \tilde{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{r}]}\, d\tilde{\boldsymbol{k}}; \tag{24,1}$$

здесь $d\tilde{\boldsymbol{k}} = d\tilde{k}_x\, d\tilde{k}_y\, d\tilde{k}_z$, и под E нужно понимать любую компоненту электрического поля (с таким же успехом можно, разумеется, рассматривать компоненты векторов $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{D}$; считая функцию $g(\tilde{\boldsymbol{k}})$ векторной, в качестве E в (24,1) можно взять сам вектор поля $\boldsymbol{E}$). Как уже сказано, волны $E = \mathrm{const}\cdot e^{i[\omega(\boldsymbol{k})t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}]}$ предполагаются удовлетворяющими однородному волновому уравнению (см., например, (8,6) — (8,8)). Именно такие волны и были ранее названы «нормальными» волнами. В частном случае магнитоактивной плазмы при пренебрежении пространственной дисперсией волновое уравнение имеет вид (11,1), (11,2). При наличии поглощения волновой вектор $\boldsymbol{k}$ является комплексным и лишь для однородных плоских волн имеет простой вид $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}(n - i\varkappa)\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$, $s = 1$. О поглощающей среде ниже речь пойдет особо, и сейчас будем считать, что среда является непоглощающей и прозрачной, т. е. вектор $\boldsymbol{k}$ веществен (напомним, что непоглощающая среда может быть и непрозрачной, как это имеет место при $\tilde{n}^2 = -\varkappa^2 < 0$). Тогда в произвольной анизотропной среде и, в частности, в магнитоактивной плазме при пренебрежении пространственной дисперсией и возможностью существования плазменных волн (колебаний) в каждом направлении могут распространяться две нормальные волны. При учете пространственной дисперсии таких волн может быть несколько. Эти волны отличаются поляризацией и фазовой скоростью $v_ф$:

$$v_ф(\boldsymbol{k}) = \frac{c}{n(\boldsymbol{k})} = \frac{\omega(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{\omega}{k}, \tag{24,2}$$

где $n(\boldsymbol{k}) = \frac{c}{v_ф}$, по определению, есть показатель преломления и запись частоты ω в виде $\omega(\boldsymbol{k})$ означает, что при каждой заданной частоте ω в данном направлении $\boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ величина k (или $v_ф$, или $n(k)$) для каждой из нормальных волн является вполне определенной. Таким образом,

$$k=k(\boldsymbol{s},\omega)=\frac{\omega}{c}n(\boldsymbol{s},\omega), \tag{24,3}$$

и обратно, $\omega=\omega(\boldsymbol{s},k)=\omega(\boldsymbol{k})$. В конкретном случае ионизированного газа в магнитном поле значение $n=n_{1,2}$ определяется формулой (11,6), где $n_{1,2}$ зависит от ω через $v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ и $u=\frac{\omega_H^2}{\omega^2}$ и от направления волновой нормали через угол α между $\boldsymbol{s}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)}$.

Возвращаясь к распространению импульсов, предположим, что импульс является квазимонохроматическим, т. е. достаточно протяженным во всех направлениях, так что функция $g(\widetilde{\boldsymbol{k}})$ имеет острый максимум вблизи «несущего волнового вектора» $\boldsymbol{k}$; мы можем разложить частоту $\omega(\widetilde{\boldsymbol{k}})$ в (24,1) в ряд. Ограничиваясь двумя членами разложения, получаем:

$$E(\boldsymbol{r},t)=e^{i[\omega(k)t-kr]}\int g(\boldsymbol{k})\,e^{i\left(\frac{d\omega}{dk}qt-qr\right)}d\boldsymbol{q}, \tag{24,4}$$

где

$$\boldsymbol{q}=\widetilde{\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}\equiv\operatorname{grad}_k\omega\equiv\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\omega}{\partial k_y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\omega}{\partial k_z}\boldsymbol{k}'$$

(здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}'$ — орты осей x, y, z), причем значение $\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ берется при $\widetilde{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{k}$.

Выражение (24,4) можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned}E(\boldsymbol{r},t)&=e^{i(\omega(k)t-kr)}A\left(\boldsymbol{r}-\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}t\right),\\ A\left(\boldsymbol{r}-\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}t\right)&=\int g(\boldsymbol{k})\,e^{-i\left(r-\frac{d\omega}{dk}t\right)q}d\boldsymbol{q}.\end{aligned}\right\} \tag{24.4a}$$

Амплитуда A постоянна, если $\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{r}=\text{const}$, и, таким образом, из (24,4), (24,4а) явствует, что в рассматриваемом приближении весь импульс распространяется как целое с групповой скоростью

$$\boldsymbol{v}_{гр}=\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}, \tag{24,5}$$

причем значение $\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ нужно брать для несущего волнового вектора $\boldsymbol{k}$. При учете более высоких производных в разложении $\omega(\boldsymbol{k})$ в ряд импульс расплывается (для простейшего случая расплывание было рассмотрено в § 21):

Направление вектора $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ есть направление луча, величина $v_{\text{гр}}$ есть скорость движения группы вдоль луча.

В изотропной среде, по самому определению изотропности среды, $k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$, т. е. n не зависит от направления. Поэтому, например,

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_x} = \frac{d\omega}{dk}\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{d\omega}{dk}\frac{k_x}{k}$$

(так как $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$) и

$$\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{d\omega}{dk}\boldsymbol{s} = \frac{c}{\frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega}}\boldsymbol{s}, \tag{24,6}$$

т. е. групповая скорость, как это и должно быть, равна по величине выражению (21,17).

Что касается направления вектора $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ в изотропной среде, то оно может либо совпадать с направлением $\boldsymbol{k}$, либо быть противоположным — это зависит от знака величины $\frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}}$. Можно показать, что при пренебрежении пространственной дисперсией в изотропной среде всегда

$$\frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega} \geqslant 1, \tag{24,7}$$

т. е. скорость $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ направлена по $\boldsymbol{k}$, причем $v_{\text{гр}} \leqslant c$. Последний вывод отвечает требованиям, связанным с теорией относительности и принципом причинности (подробнее см. [12, 229] и [10], § 2.5). При учете пространственной дисперсии вместо (24,7) имеем:

$$\left|\frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega}\right| \geqslant 1, \tag{24,7а}$$

т. е. по-прежнему $v_{\text{гр}} \leqslant c$. Однако знак $\frac{d(\omega n)}{d\omega}$ может быть любым и, таким образом, возможно существование волн, в которых $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и $\boldsymbol{k}$ антипараллельны. Физическая природа этого вывода будет разъяснена несколько ниже.

Для произвольной прозрачной среды (т. е. при вещественном $\boldsymbol{k}$) в нормальных волнах

$$\omega = \omega(\boldsymbol{k}) = \omega(k_x, k_y, k_z) = \omega(k, s_x, s_y), \tag{24,8}$$

$$s_x = \frac{k_x}{k}, \quad s_y = \frac{k_y}{k}, \quad s_z = \frac{k_z}{k}, \quad s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\omega}{\partial k_x} &= \frac{\partial\omega}{\partial k}\, s_x + \frac{\partial\omega}{\partial s_x}\,\frac{1-s_x^2}{k} - \frac{\partial\omega}{\partial s_y}\,\frac{s_x s_y}{k}\,,\\
\frac{\partial\omega}{\partial k_y} &= \frac{\partial\omega}{\partial k}\, s_y + \frac{\partial\omega}{\partial s_y}\,\frac{1-s_y^2}{k} - \frac{\partial\omega}{\partial s_x}\,\frac{s_x s_y}{k}\,,\\
\frac{\partial\omega}{\partial k_z} &= \frac{\partial\omega}{\partial k}\, s_z - \frac{\partial\omega}{\partial s_x}\,\frac{s_x s_z}{k} - \frac{\partial\omega}{\partial s_y}\,\frac{s_y s_z}{k}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad (24,9)$$

Удобнее, однако, выразить $\frac{\partial\omega}{\partial k_l}$ через n, учитывая, что

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\, n(\omega, s_x, s_y)\,\boldsymbol{s}, \qquad (24,8\text{a})$$

$$\frac{\partial k}{\partial k_x} = s_x \equiv \frac{k_x}{k} =$$

$$= \frac{1}{c}\,\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\, n + \frac{\omega}{c}\,\frac{\partial n}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial k_x} + \frac{\omega}{c}\,\frac{\partial n}{\partial s_x}\,\frac{\partial s_x}{\partial k_x} + \frac{\omega}{c}\,\frac{\partial n}{\partial s_y}\cdot\frac{\partial s_y}{\partial k_x} =$$

$$= \frac{1}{c}\,\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial k_x} + \frac{\omega}{c}\,\frac{\partial n}{\partial s_x}\cdot\frac{1-s_x^2}{k} - \frac{\omega}{c}\,\frac{\partial n}{\partial s_y}\cdot\frac{s_x s_y}{k}\,,$$

и аналогично для $\frac{\partial k}{\partial k_y}$ и $\frac{\partial k}{\partial k_z}$.

Отсюда, поскольку $n = \frac{ck}{\omega}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
v_{\text{гр},\,x} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_x} = \frac{s_x + \frac{1}{n}\left[-\frac{\partial n}{\partial s_x}(1-s_x^2) + \frac{\partial n}{\partial s_y}\, s_x s_y\right]}{\frac{1}{c}\,\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}}\,,\\
v_{\text{гр},\,y} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_y} = \frac{s_y + \frac{1}{n}\left[\frac{\partial n}{\partial s_x}\, s_x s_y - \frac{\partial n}{\partial s_y}(1-s_y^2)\right]}{\frac{1}{c}\,\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}}\,,\\
v_{\text{гр},\,z} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \frac{s_z + \frac{1}{n}\left[\frac{\partial n}{\partial s_x}\, s_x s_z + \frac{\partial n}{\partial s_y}\, s_y s_z\right]}{\frac{1}{c}\,\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad (24,10)$$

Далее, как легко убедиться, проекция $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ на $\boldsymbol{k}$ равна

$$v_{\text{гр},\,k} = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}\,\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}} = v_{\text{гр}}\cos\theta = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}}\,, \qquad (24,11)$$

где θ — угол между $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и $\boldsymbol{k}$, причем

$$\cos\theta = \frac{v_{\text{гр},\,k}}{v_{\text{гр}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{\partial n}{\partial s_x}\right)^2(1-s_x^2)+\left(\frac{\partial n}{\partial s_y}\right)^2(1-s_y^2)-2s_xs_y\frac{\partial n}{\partial s_x}\frac{\partial n}{\partial s_y}\right]}}, \tag{24,12}$$

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}}\cdot\frac{1}{\cos\theta}.$$

Из (24,10) и (24,12) ясно, что направления групповой скорости $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$, т. е. отношения $\frac{v_{\text{гр},\,i}}{v_{\text{гр}}}$, не зависят от $\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}$ и определяются только значениями s_x, s_y и $\frac{\partial n}{\partial s_x}$ и $\frac{\partial n}{\partial s_y}$. Напротив, проекция $v_{\text{гр},\,k}$ групповой скорости $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ на волновой вектор $\boldsymbol{k}$ зависит лишь от $\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}$, но не от $\frac{\partial n}{\partial s_x}$ и $\frac{\partial n}{\partial s_y}$.

Случай магнитоактивной плазмы. В интересующем нас случае магнитоактивной среды показатель $n=n_{1,2}$, помимо ω, зависит лишь от угла между вектором $\boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ и полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$. Поэтому, выбирая направление $\boldsymbol{H}^{(0)}$ за ось z' и обозначая

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{H}^{(0)}}) = \gamma_3 \equiv \gamma,$$

имеем:

$$k = \frac{\omega}{c}\,n\left(\omega,\,\frac{k_{z'}}{k}\right) = \frac{\omega}{c}\,n\,(\omega,\,\gamma); \tag{24,13}$$

отсюда ясно, что $\omega=\omega(k,\,k_z)$, и, дифференцируя выражение (24,13), мы имеем:

$$\frac{dk}{dk_{z'}} = \gamma = \frac{1}{c}\frac{\partial\omega}{\partial k_{z'}}n + \frac{\omega}{c}\frac{\partial n}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial k_{z'}} + \frac{\omega}{c}\frac{\partial n}{\partial\left(\frac{k_{z'}}{k}\right)}\frac{\partial\left(\frac{k_{z'}}{k}\right)}{\partial k_{z'}} =$$

$$= \frac{1}{c}\left(n+\omega\frac{\partial n}{\partial\omega}\right)\frac{\partial\omega}{\partial k_{z'}} + \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial\gamma}(1-\gamma^2) \text{ и т. д.}$$

В результате получаем:

$$\left.\begin{aligned}
v_{\text{гр}\, x'} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_{x'}} = \frac{\gamma_1 c\left(1+\frac{\gamma}{n}\frac{\partial n}{\partial\gamma}\right)}{n+\omega\frac{\partial n}{\partial\omega}} = \frac{\gamma_1\frac{\partial(\gamma n)}{\partial\gamma}}{\frac{n}{c}\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}},\\
v_{\text{гр}\, y'} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_{y'}} = \frac{\gamma_2\frac{\partial(\gamma n)}{\partial\gamma}}{\frac{n}{c}\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}},\\
v_{\text{гр}\, z'} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_{z'}} = \frac{c\left[\gamma-\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial\gamma}(1-\gamma^2)\right]}{n+\omega\frac{\partial n}{\partial\omega}} = \frac{\gamma\frac{\partial(\gamma n)}{\partial\gamma}-\frac{\partial n}{\partial\gamma}}{\frac{n}{c}\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}},\\
v_{\text{гр}\, r'} &= \sqrt{v^2_{\text{гр}\, x'}+v^2_{\text{гр}\, y'}} = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}\,\frac{\partial(\gamma n)}{\partial\gamma}}{\frac{n}{c}\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}} = -\frac{\frac{\partial(n\cos\alpha)}{\partial\alpha}}{\frac{n}{c}\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}},
\end{aligned}\right\}\qquad(24{,}14)$$

где γ_1 и γ_2 — косинусы углов между вектором $\boldsymbol{k}$ и осями x' и y' (напомним еще раз, что в (24,8) $\gamma\equiv\gamma_3=\cos\alpha$ косинус угла α между вектором $\boldsymbol{k}$ и осью z', направленной по полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$). Далее,

$$\left.\begin{aligned}
v_{\text{гр}} &= \left|\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}\right| = \frac{c\sqrt{1+\frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial\gamma}\right)^2(1-\gamma^2)}}{\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}},\\
\cos\widehat{\left(\boldsymbol{k},\ \frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right)} &\equiv \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial\gamma}\right)^2(1-\gamma^2)}};
\end{aligned}\right\}\qquad(24{,}15)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg}\theta &= \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial\gamma}\sqrt{1-\gamma^2} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial\cos\alpha}\sin\alpha = -\frac{1}{2n^2}\frac{\partial n^2}{\partial\alpha},\\
v_{\text{гр},k} &= v_{\text{гр}}\cos\theta = \frac{c}{\frac{\partial(\omega n)}{\partial\omega}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(24{,}16)$$

Разумеется, формулы (24,14) — (24,16) являются частным случаем формул (24,10) — (24,12), но мы повторили их вывод для удобства и в связи с другим выбором аргументов. Так, в (24,8а) n зависит от s_x и s_y, а в (24,13) — от $s_z=\gamma$. Это значит, что для магнитоактивной среды в (24,8а) показатель $n(\omega,\ s_x,\ s_y)=n\left(\omega,\sqrt{1-s_x^2-s_y^2}\right)$. С учетом этого обстоятельства формулы (24,10), (24,12) переходят в (24,14), (24,15).

Формулы (24,15) и (24,16) справедливы, очевидно, при любом выборе системы координат, причем для «холодной» магнитоактивной плазмы под γ нужно понимать косинус угла между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)}$, а в качестве $n(\omega, \gamma)$ в (24,11) — (24,16) следует взять значение (11,6), т. е. n_1 для необыкновенной волны и n_2 для обыкновенной (кроме того, $\gamma = \cos\alpha$); при этом мы считаем величину $n_{1,2}$ вещественной и, таким образом, значения $n_{1,2}^2 < 0$ не рассматриваются (в этом случае волны обычно сильно затухают и понятие групповой скорости, вообще говоря, неприменимо). Наличие поглощения, так же как это было указано в § 21,

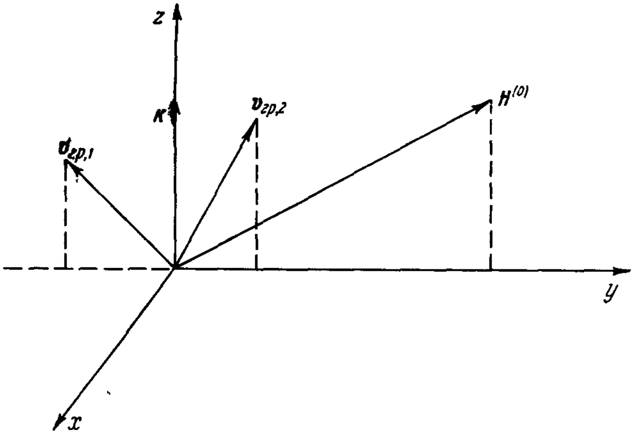


Рис. 24,1. Направление векторов групповой скорости $v_{гр\,1,2}$.

не меняет приведенных результатов, только если коэффициент поглощения в пределах спектральной ширины сигнала достаточно слабо зависит от частоты. Подробнее о влиянии поглощения речь еще пойдет ниже.

Из сказанного явствует, что в общем случае векторы групповой скорости волн типа 1 и 2, т. е. векторы $\boldsymbol{v}_{гр,1}$ и $\boldsymbol{v}_{гр,2}$, не параллельны вектору нормали k и друг другу, но лежат в плоскости $\boldsymbol{H}^{(0)}$, $\boldsymbol{k}$ (рис. 24,1). Останавливаться на выяснении направления и величины векторов $\boldsymbol{v}_{гр,1}$ и $\boldsymbol{v}_{гр,2}$ в различных случаях мы здесь не будем (см. § 29). При нормальном падении волны на неоднородный слой вопрос о направлении $\boldsymbol{v}_{гр}$ не имеет большого значения, поскольку вектор $\boldsymbol{k}$ всегда направлен по оси z, а проекция $\boldsymbol{v}_{гр}$ на $\boldsymbol{k}$, которая в этом случае определяет время группового запаздывания (см. ниже формулу (24,28)), согласно (24,16) равна

$$v_{гр\,z} = \frac{c}{n_{1,2} + \omega \dfrac{\partial n_{1,2}}{\partial \omega}} = \frac{1}{\dfrac{\partial \left[\dfrac{\omega}{c} n_{1,2}(\omega, \gamma) \right]}{\partial \omega}}. \tag{24,17}$$

Другими словами, проекция групповой скорости на k (в данном случае на ось z) имеет такой же вид, как групповая скорость в изотропной среде (см. (21,17)) с заменой, конечно, n на $n_{1,2}$.

Ввиду сложности выражения (11,6) величина $v_{\text{гр}1,2z}$ выражается через v, u и α довольно громоздким образом. Здесь мы ограничимся указанием на то, что при «квазипоперечном» и, в частности, поперечном распространении для обыкновенной волны величина $v_{\text{гр}2,z}$ согласно (11,14) совпадает с групповой скоростью

$$v_{\text{гр}} = cn = c\sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}}$$

без учета влияния поля. При «квазипродольном» распространении (см. (11,37) при $\nu_{\text{эфф}} = 0$)

$$v_{\text{гр}\,1,\,2z} = \frac{cn_{1,\,2}}{1 \mp \dfrac{2\pi e^2 N\omega_L}{m\omega\,(\omega \pm \omega_L)^2}} = \frac{c\sqrt{1 - \dfrac{4\pi e^2 N}{m\omega\,(\omega \pm \omega_L)}}}{1 \mp \dfrac{2\pi e^2 N\omega_L}{m\omega\,(\omega \pm \omega_L)^2}} = \frac{c\sqrt{1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega\,(\omega \pm \omega_L)}}}{1 \mp \dfrac{\omega_0^2\,\omega_L}{2\omega\,(\omega \pm \omega_L)^2}}. \qquad (24,18)$$

Заметим также, что для низких частот, когда справедлива формула $n_2^2 = \frac{v}{\sqrt{u}\cos\alpha}$ (см. (11,24)), из (24,15) получаем

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$

Из последнего соотношения следует, что для функции $n^2 = \frac{\text{const}}{\cos\alpha}$ угол θ между $\boldsymbol{k}$ и $\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ зависит только от α. Далее, легко видеть, что угол между $\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ и полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ не может в этом случае превосходить 19°28′.

Вектор групповой скорости, направление луча и вектор потока энергии. Приведенный выше способ нахождения направления луча как направления групповой скорости эквивалентен нахождению луча на основе принципа Гюйгенса, согласно которому поверхность лучей является огибающей семейства плоскостей волны. Действительно, семейство плоскостей волны в параметрической форме (параметры k_x, k_y, k_z) имеет вид $\boldsymbol{kr}' = \omega(\boldsymbol{k}) = \frac{ck}{n(\omega, \boldsymbol{k})}$, а уравнение огибающей в параметрической форме есть

$\boldsymbol{r}' = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$. Другими словами, при заданном $\boldsymbol{k}$ луч направлен по $\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$, причем вектор $\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ при заданном $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ в силу дисперсии зависит еще от ω.

Направление луча часто связывают не с $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$, а с направлением вектора Пойнтинга $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]$. В известных пределах это законно, но, вообще говоря, только при пренебрежении пространственной дисперсией. Дело в том, что, помимо электромагнитного потока энергии — вектора Пойнтинга $\boldsymbol{S}$, существует еще поток энергии $\boldsymbol{S}^{(1)}$, переносимый частицами среды. Общее выражение для среднего по времени значения $\boldsymbol{S}^{(1)}$ имеет вид (22,14); физический смысл потока $\boldsymbol{S}^{(1)}$ в плазме особенно прозрачен, поскольку в этом случае $\boldsymbol{S}^{(1)} = \int \frac{mv^2}{2} \boldsymbol{v} f \, d\boldsymbol{v}$ (см. (22,13)). Совершенно естественно, что направление луча, когда такое понятие имеет смысл, совпадает с направлением среднего по времени полного потока энергии $\overline{\boldsymbol{S}'} = \overline{\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}^{(1)}}$, а не с направлением вектора $\overline{\boldsymbol{S}}$.

Прежде чем придать этому результату более определенную формулировку, запишем поля для рассматриваемого квазимонохроматического импульса в виде

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{2}\{\boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} + \boldsymbol{E}_0^* e^{-i(\omega t - \boldsymbol{kr})}\}, \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{1}{2}\{\boldsymbol{H}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} + \boldsymbol{H}_0^* e^{-i(\omega t - \boldsymbol{kr})}\}, \end{aligned}\right\} \tag{24,19}$$

где комплексные векторы $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ медленно меняются с $\boldsymbol{r}$ и t (медленность означает, что изменение мало за период $\frac{2\pi}{\omega}$ и на расстоянии $1/k = \lambda/2\pi$).

Поля (24,19) вещественные, и $\overline{\boldsymbol{E}^2} = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_0^*}$, причем обычно можно, и по смыслу усреднения по высокой частоте даже нужно, зависимостью $\boldsymbol{E}_0$ от t в конечных результатах пренебречь и полагать $\overline{\boldsymbol{E}_0^2} = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}_0^*}$. Такой же, по существу, результат получается, если, как это делалось в § 22, рассматривать комплексное поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ или полагать $E = E_0 \sin \omega t$ $\left(\text{в последнем случае } \overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2}\right)$.

В обозначениях (24,19), которые наиболее удобны, для средних по времени значений плотности энергии W и потоков $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}^{(1)}$

получаем (подробнее см., например, [10], § 3.2):

$$\left.\begin{aligned}\overline{W}&=\frac{1}{16\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon_{ij}(\omega,\,k)\right)E_{0j}E^*_{0i}+H_{0i}H^*_{0j}\right\},\\ \overline{\boldsymbol{S}}&=\frac{c}{16\pi}\left\{[\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{H}^*_0]+[\boldsymbol{E}^*_0\boldsymbol{H}_0]\right\},\quad \overline{S}^{(1)}_l=-\frac{\omega}{16\pi}\frac{\partial\varepsilon_{ij}(\omega,\,k)}{\partial k_l}E^*_{0i}E_{0j}.\end{aligned}\right\}\tag{24,20}$$

Можно показать, что (см. [224, 229, 231] и [10], § 3.2)

$$\overline{W}\boldsymbol{v}_{\text{гр}}=\overline{\boldsymbol{S}}'=\overline{\boldsymbol{S}}+\overline{\boldsymbol{S}}^{(1)},\qquad \boldsymbol{v}_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}.\tag{24,21}$$

В этом соотношении (2,21) содержится как утверждение о параллельности $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и $\overline{\boldsymbol{S}}'$, так и вполне естественное представление среднего потока энергии в виде произведения средней плотности энергии на групповую скорость.

При пренебрежении пространственной дисперсией $\boldsymbol{S}'=\boldsymbol{S}$ и имеет место совпадение направлений $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и среднего вектора Пойнтинга $\overline{\boldsymbol{S}}$. Далее, имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\frac{c}{16\pi}\left\{[\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{H}^*_0]+[\boldsymbol{E}^*_0\boldsymbol{H}_0]\right\}=\\ &=\frac{c^2}{16\pi\omega}\left\{2\boldsymbol{k}(\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}^*_0)-\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^*_0)-\boldsymbol{E}^*_0(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0)\right\},\end{aligned}\tag{24,22}$$

где векторы $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ считаются постоянными, вектор $\boldsymbol{k}$ — вещественным и использовано уравнение поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$, приводящее к связям $\frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}_0=-[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0]$, $\frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}^*_0=-[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^*_0]$.

Умножая выражение (2,22) на $\boldsymbol{k}$, получаем:

$$\boldsymbol{k}\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{c^2}{8\pi\omega}\left\{k^2(\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E}^*_0)-(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}_0)(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^*_0)\right\}\geqslant 0.\tag{24,23}$$

Таким образом, средний вектор Пойнтинга $\overline{\boldsymbol{S}}$ всегда образует с $\boldsymbol{k}$ острый или максимум прямой угол (этот результат в несколько более общем виде получен в [229] и в [10], § 3.3). При отсутствии пространственной дисперсии, в силу сказанного выше, групповая скорость $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ также не может образовать с $\boldsymbol{k}$ тупого угла. В изотропной среде векторы $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и $\boldsymbol{k}$ коллинеарны (из соображений симметрии), отсюда следует совпадение направлений $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и $\boldsymbol{k}$, что находится в соответствии с неравенством (24,7).

При учете пространственной дисперсии на угол между $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и $\boldsymbol{k}$ ограничений не накладывается — этот угол θ может быть тупым за счет вклада, связанного с потоком энергии $\boldsymbol{S}^{(1)}$. О том, что такая возможность может реализоваться в «горячей» магнитоактивной плазме, было уже упомянуто в § 12 (см. также [149]).

Укажем еще на две теоремы, имеющие место в равновесной среде при отсутствии пространственной дисперсии, но могущие нарушаться при ее наличии (доказательство см. [229] и [10], § 3.3).

Во-первых, при отсутствии пространственной дисперсии в равновесной среде

$$n\varkappa > 0, \tag{24,24}$$

т. е. знаки n и $\varkappa$ совпадают, причем n и $\varkappa$ относятся к любой нормальной волне, например, бегущей по оси z и имеющей вид

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c} nz\right)} \cdot e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa z};$$

очевидно, в этом случае амплитуда убывает в том же направлении, в котором бежит волна.

Во-вторых, при отсутствии пространственной дисперсии и поглощения величина

$$(n - i\varkappa)^2 \ \textit{всегда является вещественной.} \tag{24,25}$$

Это значит, что в прозрачной среде $n \neq 0$, $\varkappa = 0$, а в непоглощающей непрозрачной среде (например, если $\sigma(\omega) = 0$ и $\varepsilon(\omega) < 0$) $n = 0$, $\varkappa \neq 0$ и поле затухает по закону $e^{-\frac{\omega}{c}\varkappa z}$ без осцилляций.

В справедливости теорем (24,24) и (24,25) для «холодной» плазмы легко убедиться непосредственно из выражений для $(n - i\varkappa)_{1,2}$. При этом в изотропном случае доказательство ясно сразу же, ибо $n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon(\omega)$, $2n\varkappa = \frac{2\pi\sigma(\omega)}{\omega}$ (см. (7,11)) и в равновесной среде $\sigma(\omega) > 0$.

Все три результата (24,23) — (24,25) по сути дела связаны между собой, а причина их возможного нарушения при учете пространственной дисперсии имеет одну и ту же и при этом вполне ясную физическую природу.

Поскольку вектор Пойнтинга $\overline{\boldsymbol{S}}$ составляет острый угол с $\boldsymbol{k}$ и, с другой стороны, при отсутствии пространственной дисперсии равен полному потоку $\overline{\boldsymbol{S}'}$, вполне естественно, что волна в этом случае затухает тоже в направлении $\boldsymbol{k}$. Далее, при отсутствии поглощения в монохроматической волне средний поток энергии $\overline{\boldsymbol{S}}$ должен быть постоянен в пространстве или в случае непрозрачной среды равняться нулю. Отсюда и следует (см., например, [10], § 3.3), что при отсутствии пространственной дисперсии, когда $\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}$, вектор $\boldsymbol{k}$ является либо вещественным, либо мнимым, но не может быть комплексным (поглощение, по предположению, отсутствует).

Итак, возможное нарушение неравенства $\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_{\text{гр}} \geqslant 0$ и свойств (24,24) и (24,25) при учете пространственной дисперсии обусловлено существованием потока энергии $\boldsymbol{S}^{(1)}$. Особенно нагляден при этом случай изотропной среды, когда при учете пространственной дисперсии групповая скорость $v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$ может иметь любой знак (если $v_{\text{гр}} < 0$, то вектор $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ антипараллелен вектору $\boldsymbol{k}$). При достаточно слабом поглощении понятие о групповой скорости сохраняет свой смысл и, поскольку при $v_{\text{гр}} < 0$ энергия течет против $\boldsymbol{k}$, затухание волны тоже должно происходить в направлении, противоположном $\boldsymbol{k}$. Но это значит, что $n\varkappa < 0$. В непрозрачной непоглощающей среде при учете пространственной дисперсии вектор Пойнтинга $\overline{\boldsymbol{S}} \neq 0$ и лишь $\overline{\boldsymbol{S}'} = 0$; именно поэтому и при отсутствии поглощения для такой среды с $\varkappa \neq 0$ одновременно и $n \neq 0$.

Выше, как правило, речь шла не о самом векторе Пойнтинга $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]$, а о его среднем по времени значении $\overline{\boldsymbol{S}}$. Это связано с тем обстоятельством, что в гиротропных кристаллах, т. е. кристаллах, обладающих естественной оптической активностью, и в случае магнитоактивной среды (в частности, в случае ионизированного газа в магнитном поле) тензор ε_{ij} эрмитов, но не веществен, и «нормальные волны» в общем случае эллиптически поляризованы. Поэтому вектор $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]$ с течением времени меняет свое направление, причем его конец описывает за половину периода, т. е. за время $\frac{\pi}{\omega}$, некоторую замкнутую кривую. Приводить выражение для компонент вектора $\boldsymbol{S}$ мы не будем, так как в этом нет никакой необходимости. Укажем, однако, что компоненты вектора $\boldsymbol{E}$ определяются по формулам, приведенным в § 11, а магнитное поле плоской волны $e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$ равно

$$\boldsymbol{H} = \frac{ic}{\omega}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \frac{c}{\omega}[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}] = n\left[\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\boldsymbol{E}\right].$$

При вычислении вектора потока энергии $\boldsymbol{S}$ следует перейти к вещественным векторам $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, например, в форме (24,19). Соответствующие формулы для магнитоактивной плазмы можно найти, например, в [105, 236]. Характер вращения вектора $\boldsymbol{S}$ ясен из схематического рис. 24,2. Поскольку вектор $\boldsymbol{S}$ вращается, его мгновенное направление не может, разумеется, иметь особого физического смысла. В то же время, как было указано выше, при отсутствии пространственной дисперсии среднее по времени направление $\overline{\boldsymbol{S}}$ совпадает с направлением потока энергии (как ясно из рис. 24,2, вектор $\overline{\boldsymbol{S}}$ направлен по оси конуса, описывае мого вектором $\boldsymbol{S}$, и, таким образом, этот последний никогда не совпадает с $\overline{\boldsymbol{S}}$, если только конус не вырождается в сектор или прямую).

Вычисление вектора $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ в однородной среде проще, чем нахождение вектора $\boldsymbol{S}$ или $\overline{\boldsymbol{S}}$. Таким образом, оперировать с вектором $\overline{\boldsymbol{S}}$ в случае однородной среды нет ни особых оснований, ни какой-либо необходимости (поэтому мы выше и не останавливались на этом вопросе подробнее). Впрочем, возражать против

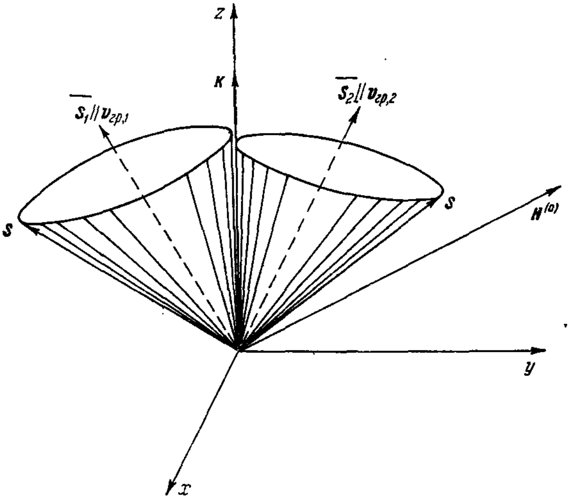

z
K
$\overline{S}_1 \parallel v_{гр,1}$
$\overline{S}_2 \parallel v_{гр,2}$
S
S
$H^{(0)}$
y
x

Рис. 24,2. Вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S}$, средний по времени вектор $\overline{\boldsymbol{S}}$ и вектор групповой скорости $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ (индексы 1 и 2 относятся к необыкновенной и обыкновенной волнам).

нахождения направления луча путем вычисления $\overline{\boldsymbol{S}}$ тоже не приходится. Именно таким путем направление луча вычислялось в работе [101], на которой мы еще остановимся в § 35.

Распространение импульсов в неоднородной среде. Распространение импульсов в неоднородной среде в приближении геометрической оптики происходит так же, как и в однородной среде с изменяющимися свойствами (квазиоднородность). Другими словами, в каждой области среды импульс распространяется с групповой скоростью $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$, отвечающей однородной среде со значениями параметров $v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, $u = \frac{\omega_{\text{н}}}{\omega}$ и α такими же, как для данной области неоднородной среды. Траектория луча есть кривая, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$.

Сказанное ясно из самого смысла приближения геометрической оптики и может быть формально оправдано следующим образом. В неоднородной среде разложение (24,1) с произвольной функцией $g(\widetilde{\boldsymbol{k}})$ незаконно, так как плоские волны не удовлетворяют в этом случае волновому уравнению. Однако, если справедливо приближение геометрической оптики, можно, по крайней мере в ограниченной пространственной области, разложить поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ по решениям типа (23,12). Если при этом не обращать внимания на медленно зависящие от координат предэкспоненциальные множители, то поле можно записать в виде

$$E(\boldsymbol{r}, t) = \int g(\widetilde{\boldsymbol{k}})\, e^{i\left[\omega(\widetilde{k}(r))t - \int^{r} \widetilde{k}(r)\,dr\right]}\, d\boldsymbol{k}. \qquad (24,26)$$

Разлагая теперь $\omega(\widetilde{\boldsymbol{k}})$ в ряд, получаем:

$$E(\boldsymbol{r}, t) = e^{i\left[\omega(k(r))t - \int^{r} k\,dr\right]} \int g(\boldsymbol{q})\, e^{i\left[\frac{d\omega}{dk} qt - \int^{r} q\,dr\right]}\, d\boldsymbol{q}, \qquad (24,27)$$

где $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r})$ — волновой вектор несущей волны импульса и $\boldsymbol{q} = \widetilde{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}$.

Отсюда следует, что уравнение движения импульса имеет вид

$$\frac{d\omega}{dk}\, t\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) - \int^{r} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} = \text{const} \qquad (24.27\text{a})$$

и скорость импульса, если производные $\boldsymbol{q}$ по $\boldsymbol{r}$ достаточно малы, равна $\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ (этот результат получается путем дифференцирования равенства (24,27а) с $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ по t); при этом по смыслу разложения, предпринятого в (24,26), производная берется при $\widetilde{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{r})$.

Если приближение геометрической оптики неприменимо, то поле $\boldsymbol{E}$ нужно разлагать в интеграл по собственным функциям волнового уравнения в данной неоднородной среде; для линейного слоя в изотропном случае такими функциями являются функции Бесселя или Эйри, как это ясно из § 17. Подробное рассмотрение, необходимое, например, для определения направления групповой скорости в вершине траектории луча при его отражении от слоя, непосредственно не проводилось. В условиях ионосферы и солнечной короны геометрическая оптика неприменима лишь в узких областях, в связи с чем рассмотрение траектории лучей вне пределов геометрикооптического приближения малосущественно (см. также § 34).

В приближении геометрической оптики при нормальном падении (волновой вектор $\boldsymbol{k}$ параллелен оси z) согласно (23,12) изменение фазы волны при прохождении пути z равно

$$\varphi = \frac{\omega}{c}\int_0^z n_{1,2}(z)\,dz. \qquad (24,28)$$

В том же приближении время группового запаздывания вдоль траектории луча ds равно (см. (24,16))

$$\Delta t_{\text{гр}} = \int_0^z \frac{ds}{v_{\text{гр}\,1,2}} = \int_0^z \frac{dz}{v_{\text{гр}\,1,2}\cos\theta} = \int_0^z \frac{dz}{v_{\text{гр}\,1,2z}} =$$

$$= \int_0^z \frac{1}{c}\frac{\partial[\omega n_{1,2}(\omega, z)]}{\partial\omega}\,dz = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}, \qquad (24,29)$$

где предполагается, что интегрирование вдоль луча происходит до той же высоты z, что и в (24,28); точка z может быть, в частности, точкой отражения волны от слоя. Формула (24,29) отличается от имеющей место в изотропном случае (см., например, (30,10)) лишь заменой n на $n_{1,2}$. Несовпадение направлений $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и вектора нормали $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}$ и отличие величины $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ от значения групповой скорости в изотропной среде в (24,29) ни в чем, кроме замены n на $n_{1,2}$, не проявляются, как это ясно уже из (24,16). Нужно, однако, подчеркнуть, что это утверждение справедливо только при предполагаемой независимости свойств среды от координат x и y (см. в этой связи § 35). Заметим также, что соотношение $\Delta t_{\text{гр}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ не связано с конкретным видом функции φ, а является общим, так как соответствующее доказательство, проведенное в § 21, совершенно не зависит от свойств среды. То же относится к рассмотрению расплывания сигналов, и, таким образом, результаты § 21 полностью справедливы и для данного случая.

Распространение импульсов в поглощающей среде. Мы уже несколько раз затрагивали вопрос о распространении импульсов при наличии поглощения. Строго говоря, вектор групповой скорости $\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = d\omega/d\boldsymbol{k}$ имеет вполне определенный смысл и вводится только для совершенно прозрачной среды. Конечно, уже из общих соображений ясно, что при очень слабом поглощении его роль может быть достаточно мала. Но каковы критерии этой малости и, что не менее важно, как обстоит дело для сред с сильным поглощением? Последнее особенно существенно в магнитоактивной плазме и в кристаллах вблизи линий поглощения, где как раз и могут наблюдаться некоторые интересные эффекты, обусловленные пространственной дисперсией.

В изотропной среде направление распространения симметричного импульса (пакета или цуга волн, сигнала) всегда будет, очевидно, направлено по или против $\boldsymbol{k}$, поскольку нет никакого другого выделенного направления. Таким образом, для изотропной среды нужно знать влияние поглощения только на скорость распространения сигнала. Соответствующее исследование [219, 220] свидетельствует о том, что при наличии поглощения импульс, вообще говоря, искажается и о какой-либо его универсальным образом определенной групповой скорости говорить не приходится. Но как обстоит дело в поглощающей среде с направлением движения импульса, т. е. направлением луча? Такой вопрос представляет несомненный интерес, если только направление луча не совпадает с направлением $\boldsymbol{k}$ уже из соображений симметрии. Насколько нам известно, этот по сути дела простой вопрос был рассмотрен лишь недавно [232, 233]. Кроме того, учет влияния поглощения на скорость сигнала в изотропной среде обычно проводится довольно сложным образом [219, 220]. В этой связи остановимся на поставленной задаче несколько подробнее.

Средний поток энергии $\overline{\boldsymbol{S}}'$ может быть вычислен и в поглощающей среде, поэтому можно было бы предполагать, что направление луча в этом случае есть направление $\overline{\boldsymbol{S}}'$. Кроме того, существуют другие векторы $\left(\text{например, } \operatorname{Re}\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}\right)$, с которыми можно было бы надеяться связать направление луча. Мы, однако, убедимся в том, что никакого «универсального» направления луча в поглощающей среде вообще не существует.

В соответствии с постановкой задачи, встречающейся в теории распространения радиоволн и в оптике, будем считать частоту ω всегда вещественной. Тогда в непрозрачной среде вектор $\boldsymbol{k}$, а вообще говоря, и вектор $d\omega/d\boldsymbol{k}$ оказываются комплексными. Это обстоятельство, однако, не препятствует использованию выражений (24,1), (24,4) и (24,4а), если только уточнить область интегрирования и считать, что функция A существует и при рассматриваемых комплексных значениях $d\omega/d\boldsymbol{k}$. Таким образом, при корректной в физическом отношении постановке задачи, когда в соблюдении соответствующих математических требований сомневаться не приходится, результат (24,4а) относится и к непрозрачной среде. Но, очевидно, и в этом случае величины $\boldsymbol{r}$ и t являются вещественными, а значит, при комплексном $d\omega/d\boldsymbol{k}$ импульс не будет перемещаться как целое. В самом деле, перемещение импульса как целого означает, что в некоторой точке $\boldsymbol{r}$ и в любой другой точке $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}} T$ функция A совершенно одинаковым образом изменяется во времени, если только сдвинуть начало отсчета времени на интервал T. При комплексном $d\omega/dk$, очевидно, точки $\boldsymbol{r}'$ уже также комплексны, а значит, при перемещении в обычном пространстве функция A изменяется. Вместе с тем в рассматриваемом приближении *) формула (24,4а) дает полный ответ на вопрос о распространении импульса. Для иллюстрации этого утверждения обратимся к двум более конкретным задачам.

Рассмотрим распространение одномерного квазимонохроматического импульса

$$E(z, t) = e^{i(\omega t - kz)} \int g(\Omega)\, e^{i\left(t - \frac{dk}{d\omega} z\right)\Omega}\, d\Omega = e^{i(\omega t - kz)} A\left(t - \frac{dk}{d\omega} z\right) \tag{24,30}$$

в случае, когда

$$A(\xi) = A_0 e^{-\alpha\xi^2},\ \ \alpha > 0,\ \ g(\Omega) = \frac{A_0}{2\sqrt{\pi\alpha}}\, e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}},\ \ k = \frac{\omega}{c}(n - i\varkappa).$$

Формула (24,30) сразу же дает следующее выражение для $E(z, t)$:

$$E(z, t) = A_0 e^{\left\{-\alpha\left(\frac{dk}{d\varkappa} z - t\right)^2 + i(\omega t - kz)\right\}}. \tag{24,31}$$

При наличии поглощения форма импульса с расстоянием искажается и говорить о скорости импульса как целого уже нельзя. Можно, однако, найти некоторую эффективную групповую скорость, с которой распространяется точка максимума функции $|E(z, t)|$. Для этой цели фиксируем z и находим время t, отвечающее условию $\frac{d|E|}{dt} = 0$. Легко видеть, что в случае (24,31) максимум амплитуды $|E|$ перемещается со скоростью $\frac{z}{t_m} = \frac{c}{d(\omega n)/d\omega}$. При несколько иной постановке вопроса, фиксируя t и находя положение максимума импульса z_m, видим, что в случае (24,31) этот максимум перемещается со скоростью

$$\frac{dz_m}{dt} = c\left[\frac{d(\omega n)}{d\omega} - \left(\frac{d(\omega\varkappa)}{d\omega}\right)^2 \cdot \left(\frac{d(\omega n)}{d\omega}\right)^{-2}\right]^{-1}. \tag{24,32}$$

Из (24,31) ясна вместе с тем неприменимость полученных выражений для $\frac{z}{t_m}$ и $\frac{dz_m}{dt}$ при достаточно больших $\frac{d(\omega\varkappa)}{d\omega} z$, что связано

---

*) Речь идет об ограничении при переходе от (24,1) к (24,4) — (24,4а) членами порядка q. При учете членов порядка q^2 импульс расплывается уже в прозрачной среде (см. § 21). Такое расплывание, однако, определяется другими параметрами, чем в случае влияния поглощения.

с непригодностью в таких условиях самого исходного приближения (24,4).

В качестве второй задачи рассмотрим падение на анизотропную поглощающую пластинку (например, слой магнитоактивной плазмы, занимающую область $0 \leqslant z \leqslant l$) монохроматического импульса (пучка) электромагнитных волн. Падение считаем нормальным, т. е. «несущий» волновой вектор $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\{n(\omega, \boldsymbol{s}) - i\varkappa(\omega, \boldsymbol{s})\}\,\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s} = \{0, 0, 1\}$, в то время как $\widetilde{\boldsymbol{k}} = \frac{\omega}{c}[n(\omega, \widetilde{\boldsymbol{s}}) - i\varkappa(\omega, \widetilde{\boldsymbol{s}})]\,\widetilde{\boldsymbol{s}}$, $\widetilde{\boldsymbol{s}} = \{s_x, s_y, s_z\}$.

Считая импульс большим по сравнению с длиной волны, имеем:

$$E_i(\boldsymbol{r}, t) = $$

$$= e^{i(\omega t - kz)} \int g_i(s_x, s_y)\, e^{-i\frac{\omega}{c}\left[\left(\widetilde{n}x + \frac{\partial \widetilde{n}}{\partial s_x} z\right)_{s_x=0} + \left(\widetilde{n}y + \frac{\partial \widetilde{n}}{\partial s_y} z\right)_{s_y=0}\right]}\, ds'_x\, ds_y =$$

$$\doteq e^{i(\omega t - kz)} A_i\left\{x + \left(\frac{1}{\widetilde{n}}\frac{\partial \widetilde{n}}{\partial s_x}\right)_{s_x=0} z;\; y + \left(\frac{1}{\widetilde{n}}\frac{\partial \widetilde{n}}{\partial s_y}\right)_{s_y=0} z\right\}, \quad (24,33)$$

где для сокращения записи введено обозначение $\widetilde{n} = n - i\varkappa$.

Если функция $\boldsymbol{g}(s_x, s_y)$ известна и удовлетворяет в физическом отношении вполне естественным математическим условиям, то выражение (24,33) в пределах применимости самого приближения типа (24,4) — (24,4а) можно использовать для получения ответа на любой вопрос, возникающий в эксперименте. Например, если в качестве $A_i(\xi, \eta)$ выбрать функцию

$$A_i(\xi, \eta) = A_{0i} e^{-a(\xi^2 + \eta^2)}, \quad a > 0, \quad (24,34)$$

то согласно (24,33) сразу же находим $E_i(\boldsymbol{r}, t)$ при $z = l$, а максимум интенсивности определим из условий:

$$\frac{\partial |A_i|}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial |A_i|}{\partial y} = 0. \quad (24,35)$$

Направлением луча при этом естественно назвать прямую, соединяющую точку $x = y = z = 0$ и точку $x = x_m$, $y = y_m$, $z = l$, отвечающую максимуму функции $|A_i|$. Значение x_m и y_m нетрудно найти из формул (24,33) — (24,35):

$$x_m = -\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\widetilde{n}}\frac{\partial \widetilde{n}}{\partial s_x}\right)_{s_x=0} \cdot l = -\left(\frac{1}{|\widetilde{n}|}\frac{\partial |\widetilde{n}|}{\partial s_x}\right)_{s_x=0} \cdot l,$$

$$y_m = -\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\widetilde{n}}\frac{\partial \widetilde{n}}{\partial s_y}\right)_{s_y=0} \cdot l = \quad (24,36)$$

$$-\left(\frac{1}{|\widetilde{n}|}\frac{\partial |\widetilde{n}|}{\partial s_y}\right)_{s_y=0} \cdot l, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{x_m^2 + y_m^2}}{l},$$

где θ — угол между «лучом» и вектором k. При вещественном $\tilde{n}$ формулы (24,36) переходят в выражения, которые легко получить для прозрачной среды с помощью (24,10) с $s_x = s_y = 0$ и $s_z = 1$ (см. [10], § 3.2).

§ 25. Отражение волн от неоднородного слоя

Отражение волн от слоя. Углы $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$. Приближением геометрической оптики нельзя ограничиться, в частности, в случае, когда одна из волн отражается от слоя, достигая области отрицательных значений $\tilde{n}^2$. Вместе с тем, в подобных условиях еще нет обычно необходимости исследовать общее решение системы (23,2). Напротив, как уже упоминалось в § 23 и ясно из качественных соображений, решение задачи об отражении одной из волн может быть в хорошем приближении сведено к исследованию одного уравнения второго порядка, а именно уравнения типа

$$\frac{d^2 g_{1,2}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\tilde{n}^2_{1,2} g_{1,2} = 0, \tag{25,1}$$

где функции $g_{1,2}$ как-то связаны с E_x и E_y. Обобщение получающихся на таком пути результатов на случай наличия поглощения в принципиальном отношении не составляет труда. В дальнейшем поэтому ограничимся рассмотрением непоглощающей магнитоактивной плазмы.

Если $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$ (продольное и поперечное распространение), система (23.2) строго распадается на два независимых уравнения второго порядка. Так, при продольном распространении введем новые переменные:

$$F_{\pm} = E_x \pm iE_y. \tag{25,2}$$

Учитывая, что при $\alpha = 0$ (см. § 11)

$$\tilde{n}^2_{1,2} \equiv \tilde{n}^2_{\mp} = A \mp C = 1 - \frac{v}{1 \pm \sqrt{u}}, \quad K_{1,2} = \pm i, \tag{25,3}$$

легко видеть, что в переменных $F_{\pm}$ система (23,2) сводится к уравнениям:

$$\frac{d^2 F_{\pm}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2_{\pm} F_{\pm} = \frac{d^2 F_{\pm}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{v}{1 \mp \sqrt{u}}\right) F_{\pm} = 0. \tag{25,4}$$

Каждое из уравнений (25,4) совпадает с уравнением (25,1) если положить $g_{1,2} = F_{\pm}$; в частности, если v есть линейная функция z, т. е.

$$v = az + b, \tag{25,5}$$

то каждое уравнение (25,4) эквивалентно уравнению (25,1) для линейного слоя со всеми вытекающими отсюда следствиями (см. § 16).

При поперечном распространении ($\alpha = \pi/2$) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{n}_1^2 = A = 1 - \frac{v(1-v)}{1-u-v}, \quad K_1 = 0, \\ &\tilde{n}_2^2 = \tilde{n}_0^2 = B = 1 - v, \quad C = 0, \quad K_2 = i\infty, \end{aligned}\right\} \tag{25,6}$$

и система (23,2) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 E_x = \frac{d^2E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{v(1-v)}{1-u-v}\right)E_x = 0, \\ &\frac{d^2E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 E_y = \frac{d^2E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}(1-v)E_y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{25,7}$$

т. е. уравнения разделяются и имеют форму (25,1) с $g_1 = E_x$ и $g_2 = E_y$.

Второе из уравнений (25,7) совпадает к тому же с уравнением для изотропной плазмы, поскольку $n_2^2 = n_0^2 = 1 - v$. Уравнение же для E_x и при $v = az$ нелинейно зависит от z. Однако для справедливости ряда формул нужно лишь, чтобы функцию $n_1^2(z)$ можно было заменить линейной только в области, где неприменима геометрическая оптика. Выбирая начало координат в точке $n_1^2 = 0$, положим

$$v = 1 \pm \sqrt{u} + az, \tag{25,8}$$

где знак (+) или (—) берется в зависимости от того, вблизи какой из двух точек $n_1^2 = 0$ ведется рассмотрение.

Тогда при условии

$$\left|\frac{az}{1 \pm \sqrt{u}}\right| \ll 1 \tag{25,9}$$

имеем:

$$n_1^2 \approx -\frac{2az}{1 \pm \sqrt{u}}, \tag{25,10}$$

и первое уравнение (25,7) сводится к (25,1) с линейной зависимостью $\tilde{n}^2$ от z.

Использование условия (23,19) и выражения (25,10) показывает, что геометрическая оптика применима, если

$$|z| \gg \left(\frac{1 \pm \sqrt{u}}{8a}\,\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \tag{25,11}$$

Таким образом, если условия (25,9) и (25,11) выполнены одновременно, то функцию $n_1^2(z)$ в первом уравнении (25,7) можно считать линейной во всей области, где неприменимо приближение геометрической оптики (это обстоятельство позволяет получить некоторые важные общие формулы, на которых мы остановимся в § 30). Для ионосферного F-слоя $a \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$, $\lambda_0 \sim 6 \cdot 10^3$ *см*, и при $1 \pm \sqrt{u} \sim 1$ условие (25,9) означает, что $z \ll 10^6 \div 10^7$ *см*, а условие (25,11), что $z \gg 10^4$ *см*, т. е. оба неравенства вполне совместимы.

Приближенное решение при произвольном угле α. Распадение уравнений (23,2) на два независимых уравнения второго порядка при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ связано с тем, что в этих случаях поляризация волны не зависит от z (т. е. $K_{1,2} = \mathrm{const}$). Вообще же $K = K(z)$, уравнения (23,2) не распадаются и могут быть приведены только к одному уравнению четвертого порядка для E_x или E_y. Здесь целесообразно поэтому прибегнуть к приближенному решению (см. [237]; несколько другим методом этот вопрос рассмотрен в работе [238]; см. также [105]).

Если перейти к переменным

$$F_{\pm} = E_y \pm KE_x, \tag{25,12}$$

где в зависимости от характера задачи $K = K_1$ или $K = K_2$, то уравнения (23,2) принимают вид $\left(K' = \frac{dK}{dz},\ K'' = \frac{d^2K}{dz^2}\right)$:

$$\begin{gathered}\frac{d^2F_+}{dz^2} - \frac{K'}{K}\frac{dF_+}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}\left\{\frac{A+B}{2} + i\,\frac{C(K^2-1)}{2K}\right\}F_+ + \\ + \left\{\left(\frac{K'}{K}\right)^2 - \frac{K''}{2K}\right\}F_+ + \frac{K'}{K}\frac{dF_-}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}\left\{\frac{B-A}{2} + \frac{iC(K^2+1)}{2K}\right\}F_- - \\ - \left\{\left(\frac{K'}{K}\right)^2 - \frac{K''}{2K}\right\}F_- = 0,\end{gathered} \tag{25,13}$$

$$\begin{gathered}\frac{d^2F_-}{dz^2} - \frac{K'}{K}\frac{dF_-}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}\left\{\frac{A+B}{2} - i\,\frac{C(K^2-1)}{2K}\right\}F_- + \\ + \left\{\left(\frac{K'}{K}\right)^2 - \frac{K''}{2K}\right\}F_- + \frac{K'}{K}\frac{dF_+}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2}\left\{\frac{B-A}{2} - \frac{iC(K^2+1)}{2K}\right\}F_+ - \\ - \left\{\left(\frac{K'}{K}\right)^2 - \frac{K''}{2K}\right\}F_+ = 0.\end{gathered} \tag{25,14}$$

Учитывая, что в силу (11,3) и (11,26)

$$\frac{A+B}{2} + \frac{iC(K^2-1)}{2K} - n^2 = \frac{B-A}{2} - \frac{iC(K^2+1)}{2K} = 0,$$

и оценивая порядок отдельных членов в уравнениях (25,13) и (25,14), оказывается естественным искать решение этой системы в виде

$$F_{\pm} = F_{\pm}^{(0)} + F_{\pm}^{(1)}, \tag{25,15}$$

где

$$\left|F_{\pm}^{(1)}\right| \ll \left|F_{\pm}^{(0)}\right| \tag{25,16}$$

и величины $F_{\pm}^{(0)}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2F_{+}^{(0)}}{dz^2} - \frac{K'}{K}\frac{dF_{+}^{(0)}}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 F_{+}^{(0)} + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{iC(K^2+1)}{K} F_{-}^{(0)} = 0, \\ \frac{K'}{K}\frac{dF_{+}^{(0)}}{dz} - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{iC(K^2-1)}{K} F_{-}^{(0)} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25,17}$$

Таким образом, будет применен, по существу, метод теории возмущений.

Легко убедиться в том, что в приближении геометрической оптики отвечающие нормальным волнам решения систем (25,13) — (25,14) и (25,17) совпадают с результатами, приведенными в § 23 (в приближении геометрической оптики $F_{+} = 2E_y = 2KE_x$ и $F_{-} = 0$).

Используя (25,15) — (25,17), из (25,13) и (25,14) получаем уравнения для $F_{\pm}^{(1)}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2F_{+}^{(1)}}{dz^2} - \frac{K'}{K}\frac{dF_{+}^{(1)}}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 F_{+}^{(1)} + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{iC(K^2+1)}{K} F_{-}^{(1)} = \\ = \left\{\frac{K''}{2K} - \left(\frac{K'}{K}\right)^2\right\}\left(F_{+}^{(0)} - F_{-}^{(0)}\right) - \frac{K'}{K}\frac{dF_{-}^{(0)}}{dz}, \\ \frac{K'}{K}\frac{dF_{+}^{(1)}}{dz} - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{iC(K^2-1)}{K} F_{-}^{(1)} = -\frac{d^2F_{-}^{(0)}}{dz^2} + \frac{K'}{K}\frac{dF_{-}^{(0)}}{dz} - \\ - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 F_{-}^{(0)} + \left\{\frac{K''}{2K} - \left(\frac{K'}{K}\right)^2\right\}\left(F_{-}^{(0)} - F_{+}^{(0)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{25,18}$$

Исключая в (25,17) и (25,18) соответственно $F_{-}^{(0)}$ и $F_{-}^{(1)}$, после простых преобразований имеем:

$$L\left(F_{+}^{(0)}\right) \equiv \frac{d^2F_{+}^{(0)}}{dz^2} + \frac{2K'}{K(K^2-1)}\frac{dF_{+}^{(0)}}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 F_{+}^{(0)} = 0, \tag{25,19}$$

$$\left.\begin{aligned} &L\left(F_{+}^{(1)}\right) = f(z), \\ &f(z) = -\frac{2}{K^2+1}\left\{\frac{K''}{2K} - \left(\frac{K'}{K}\right)^2\right\}\left(F_{+}^{(0)} - F_{-}^{(0)}\right) + \\ &+ \frac{2K'}{K(K^2-1)}\frac{dF_{-}^{(0)}}{dz} - \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{K^2+1}{K^2-1}\right) F_{-}^{(0)} - \frac{K^2+1}{K^2-1}\frac{d^2F_{-}^{(0)}}{dz^2}. \end{aligned}\right\} \tag{25,20}$$

Если условие (25,16) выполнено, то приближенное решение имеет вид $F_{\pm}^{(0)}$ и получается из уравнений (25,17) или (25,19).

Для дальнейшего существенно поведение функции $K_{1,2}$ (см. (11,26) и (11,27)) вблизи точек отражения $v_{20} = 1$ и $v_{10}^{(+)} = 1 \pm \sqrt{u}$. С точностью до членов высшего порядка относительно

$(v-v_{20})$ и $(v-v_{10}^{(\pm)})$ имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&K_1(v\approx 1\pm\sqrt{u})=\pm i\cos\alpha+\frac{i\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sqrt{u}\,(1+\cos^2\alpha)}(v-1\mp\sqrt{u}),\\
&\qquad K_2(v\approx 1)=i\,\frac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{(1-v)\cos\alpha},\\
&\left(\frac{dK_1}{dz}\right)_{v_{10}}=\frac{i\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sqrt{u}\,(1+\cos^2\alpha)}\left(\frac{dv}{dz}\right)_{v_{10}},\\
&\left(\frac{d^2K_1}{dz^2}\right)_{v_{10}}=\frac{i\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sqrt{u}\,(1+\cos^2\alpha)}\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_{v_{10}}+\\
&\qquad\qquad+i\,\frac{2\sin^2\alpha\cos\alpha\,(3+3\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)}{u\,(1+\cos^2\alpha)^3}\left(\frac{dv}{dz}\right)^2_{v_{10}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(25{,}21)$$

Рассмотрим теперь распространение волны типа 1 в области точек $v_{10}^{(\pm)}=1\pm\sqrt{u}$; в этом случае везде в (25,13) — (25,20) мы должны положить $n^2=n_1^2$ и $K=K_1$ (для волны типа 2 в этих уравнениях нужно положить $n^2=n_2^2$ и $K=K_2$, но этот случай не интересен, так как для волны 2 в области точек $v_{10}^{(\pm)}$, по предположению, применимо приближение геометрической оптики).

Полагая в (25,19)

$$F_+^{(0)}=\frac{K_1}{\sqrt{1-K_1^2}}\,g_+^{(0)},\qquad(25{,}22)$$

для $g_+^{(0)}$ получаем:

$$\frac{d^2g_+^{(0)}}{dz^2}+\left\{\frac{\omega^2}{c^2}n_1^2+\frac{(3K_1^2-2)\,K_1'^2}{K_1^2\,(K_1^2-1)^2}-\frac{K_1''}{K_1\,(K_1^2-1)}\right\}g_+^{(0)}=0.\qquad(25{,}23)$$

Это уравнение имеет вид (25,1), но отличается от него членами, содержащими K_1. Эти члены порядка $\left(\frac{dv}{dz}\right)^2$ и $\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)$, т. е. в ионосферных условиях порядка $10^{-12}\div 10^{-14}$ ($v\sim az$, $a\sim 10^{-6}\div\div 10^{-7}$). Одновременно $\frac{\omega^2}{c^2}\sim 10^{-6}$ и, следовательно, члены с K_1 существенны только при $n_1^2\leqslant 10^{-5}\div 10^{-7}$, в то время как первому максимуму напряженности поля отвечает значение

$$n_1^2\approx\left|\frac{dn_1^2}{dz}\right|\left(\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2\left|\frac{dn_1^2}{dz}\right|}\right)^{1/3}=\left(\left|\frac{dn_1^2}{dz}\right|\frac{\lambda_0}{2\pi}\right)^{2/3}\sim 10^{-2}$$

(см. (32,2) и далее). Таким образом, влияние членов с K_1 ничтожно, оно сводится к смещению точки, где коэффициент у $g_+^{(0)}$ обращается в нуль, на $\Delta z\sim 0{,}1\div 1$ *см* (для ориентировки принимаем, что $n_1^2\sim az$) и к ничтожному изменению фазы φ на $\Delta\varphi\sim 10^{-6}$.

Итак, вблизи точки отражения решение уравнений распространения сводится к уравнению (25,1), причем для самих полей появляется также амплитудный фактор $\frac{K_1}{\sqrt{1-K_1^2}}$ (см. (25,22)), необходимость присутствия которого выясняется еще в приближении геометрической оптики (23,11).

Разумеется, этот вывод справедлив только, если соблюдено условие (25,16), т. е. величины $F_{\pm}^{(0)}$ действительно являются приближенным решением системы (25,13) — (25,14).

Решение уравнения (25,20) имеет вид:

$$F_+^{(1)} = F_0 \int \left\{ \frac{K^2}{F_0^2 (K^2-1)} \int^{z} \frac{f(z')\, F_0}{K^2} (K^2-1)\, dz' \right\} dz, \qquad (25,24)$$

где F_0 — решение того же однородного уравнения, т. е. выражение (25,22). Согласно (25,17)

$$F_-^{(0)} = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{K'}{iC\,(K^2-1)} \frac{dF_+^{(0)}}{dz}\,; \qquad (25,25)$$

далее, вблизи точек $v_{10}^{(\pm)} = 1 \pm \sqrt{u}$ величина C не стремится к нулю, а K_1 не стремится ни к нулю, ни к бесконечности (см. (25,21)). Поэтому в рассматриваемом случае

$$f(z) < \frac{\omega^2}{c^2} F_-^{(0)} \sim \left(\frac{dv}{dz}\right)_{v_{10}} \frac{dF_+^{(0)}}{dz} \leqslant \left(\frac{dv}{dz}\right)_{v_{10}} \frac{2\pi}{\lambda_0} F_+^{(0)} \qquad (25,26)$$

(здесь для простоты опущены факторы, содержащие u и $\sin^2\alpha$, которые обычно порядка единицы). Для обоснования соотношения (25,26) учтем, что в приближении геометрической оптики

$$\frac{d^2F_-^{(0)}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 F_-^{(0)} \sim \frac{\omega}{c} \frac{dn_1}{dz} F_-^{(0)},$$

а в области, где $n_1^2 \approx 0$, отклонение от приближения геометрической оптики порядка самой величины поля, т. е.

$$\frac{d^2F_-^{(0)}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2(z)\, F_-^{(0)} \sim \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 \left(z \sim \frac{\lambda_0}{2\pi}\right) F_-^{(0)} < \frac{\omega^2}{c^2} F_-^{(0)},$$

где $n_1^2\left(z \sim \frac{\lambda_0}{2\pi}\right)$ — значение n_1^2 при $z \sim \frac{\lambda_0}{2\pi}$ (см. результаты § 32); далее, $\frac{dF_+^{(0)}}{dz} \sim \frac{2\pi}{\lambda_0} n_1 F_+^{(0)} < \frac{2\pi}{\lambda_0} F_+^{(0)}$ и согласно (25,17) $\frac{\omega^2}{c^2} F_-^{(0)} \sim \left(\frac{dv}{dz}\right)_{v_{10}} \frac{dF_+^{(0)}}{dz}$, откуда и вытекает выражение (25,26).

Подставляя в (25,24) значение $f(z)$ и (25,26), можно видеть, что

$$F_+^{(1)} < \left(\frac{dv}{dz}\right)_{v_{10}} z F_+^{(0)}. \qquad (25,27)$$

В интересующей нас области вблизи точки $n_1^2 = 0$ имеем $\left(\frac{dv}{dz}\right) z \sim az \ll 1$; таким образом, условие (25,16) выполнено, и решение $F_+^{(0)}$ является хорошим приближением, тем более, что фактически уже в (25,27) знак $<$ можно заменить знаком $\ll$.

Для волны типа 2 вблизи точки отражения $v_{20} = 1$, где $n_2^2 = 0$, напротив, приведенное приближение незаконно. Действительно, как следует из (11,3) и (25,21), вблизи этой точки $C \sim (1 - v)$, $K_2 \sim \frac{1}{1-v}$, в (25,25) $F_-^{(0)} \sim \frac{1}{1-v}\frac{dF_+^{(0)}}{dz}$ и в $f(z)$ главный член $\sim \frac{1}{(1-v)^3}F_+^{(0)}$. Поэтому условие (25,16) не выполнено и все приближение не годится. Это связано с тем, что как раз вблизи точки $v = 1$ поляризация волны 2 резко изменяется (см. рис. 11,9). Областью $v \approx 1$ придется поэтому заняться особо.

Положим в этой области

$$v = 1 + az, \tag{25,28}$$

где

$$|az| \ll 1. \tag{25,29}$$

Тогда с точностью до членов высшего порядка малости система (23,2) принимает вид (см. (11,3)):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left\{\left(1 - \frac{az}{u\sin^2\alpha}\right)E_x - i\,\frac{az\cos\alpha}{\sqrt{u}\sin^2\alpha}E_y\right\} = 0,\\ &\frac{d^2E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left\{i\,\frac{az\cos\alpha}{\sqrt{u}\sin^2\alpha}E_x - \frac{az}{\sin^2\alpha}E_y\right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25,30}$$

Далее,

$$n_2^2 = -\frac{az}{\sin^2\alpha}, \quad K_2 = -\frac{i\sqrt{u}\sin^2\alpha}{az\cos\alpha}. \tag{25,31}$$

В приближении геометрической оптики и при условии, что

$$\left|\frac{1}{K_2}\right| = \left|\frac{az\cos\alpha}{\sqrt{u}\sin^2\alpha}\right| \ll 1, \tag{25,32}$$

выполняется неравенство $\left|\frac{E_{y2}}{E_{x2}}\right| = |K_2| \gg 1$ (при $v = 1$ волна 2 в случае однородной среды линейно поляризована (см. (11,26) и рис. 11,9). Это обстоятельство делает естественным использование приближения

$$E_y = E_y^{(0)} + E_y^{(1)}, \quad E_x = E_x^{(1)}, \tag{25,33}$$

причем

$$|E_y^{(1)}| \ll |E_y^{(0)}|, \quad |E_x^{(1)}| \ll |E_y^{(0)}| \tag{25,34}$$

и

$$\frac{d^2E_y^{(0)}}{dz^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{az}{\sin^2\alpha}E_y^{(0)} = \frac{d^2E_y^{(0)}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}n_2^2E_y^{(0)} = 0. \tag{25,35}$$

Для $E_{x,y}^{(1)}$ имеем (см. (25,30), (25,34) и (25,35)):

$$\frac{d^2E_x^{(1)}}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{az}{u\sin^2\alpha}\right)E_x^{(1)}=i\frac{\omega^2}{c^2}\frac{az\cos\alpha}{\sqrt{u}\sin^2\alpha}E_y^{(0)}\equiv f_1(z),\qquad(25,36)$$

$$\frac{d^2E_y^{(1)}}{dz^2}+i\frac{\omega^2}{c^2}\frac{az\cos\alpha}{\sqrt{u}\sin^2\alpha}E_x^{(1)}-\frac{\omega^2}{c^2}\frac{az}{\sin^2\alpha}E_y^{(1)}=0.\qquad(25,37)$$

Решение уравнения (25,36) таково:

$$E_x^{(1)}=E_{x0}\int\left\{\frac{1}{E_{x0}^2}\int^z f_1(z')E_{x0}\,dz'\right\}dz,\qquad(25,38)$$

где E_{x0} — решение однородного уравнения (25,36). Для оценки величины (25,38) можно положить $E_{x0}=e^{\pm i\frac{\omega}{c}z}$; учитывая далее, что в рассматриваемой окрестности точки $v=1$ показатель $n_2^2\ll 1$ и поэтому зависимость $E_y^{(0)}$ от z значительно слабее (см. (25,35)), чем эта зависимость от z для E_{x0}, имеем:

$$E_x^{(1)}\sim i\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{u}\sin^2\alpha}\left(z+2i\frac{c}{\omega}\right)E_y^{(0)}.\qquad(25,39)$$

При условии (25,32) и, строго говоря, если это условие (25,32) справедливо и для $z\sim\lambda_0$, из (25,39) вытекает второе неравенство (25,34); первое из этих неравенств следует из уравнения (25,37). Таким образом, при условиях (25,29) и (25,32) принятое приближение законно. Заметим, что в разбираемом случае применимость приближения геометрической оптики, как следует из (23,19) и (25,31), эквивалентна соблюдению неравенства

$$|z|\gg\left(\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}\frac{\sin^2\alpha}{a}\right)^{1/3}.\qquad(25,40)$$

Например, при $a\sim10^{-6}$, $\frac{\lambda_0}{2\pi}\sim10^3$ *см* и $\sqrt{u}\sim\sin\alpha\sim\cos\alpha\sim1$ условия (25,29) и (25,32) означают, что $z\ll10^6$ *см*, а условие (25,40), что $z\gg10^4$ *см*. В этом случае, таким образом, выбранное приближение справедливо и в области, где уже применима геометрическая оптика. При малых α положение ухудшается, но даже при $\sin\alpha\sim\alpha\sim\frac{1}{10}$ условия (25,32) и (25,40) таковы: $z\ll10^4$ *см* и $z\gg2\cdot10^3$ *см*. При меньших значениях α приближение уже не может быть справедливо из-за эффекта «утраивания», связанного с взаимодействием волн 1 и 2 в области $v\approx1$ (см. § 28).

Уравнение (25,35) имеет вид (25,1) с $g_2=E_y$, т. е. на рассматриваемое решение непосредственно переносятся все результаты, получаемые для изотропной среды.

Выше мы не только стремились показать, что в области точек отражения можно пользоваться уравнением типа (25,1) для отражающейся волны, но и переходили в этой области к линейному слою. Последнее связано с тем, что в подавляющем большинстве случаев для толстых слоев достаточно ограничиться точным решением волнового уравнения для линейного слоя (см. § 30). Линейная аппроксимация функции $\tilde{n}^2_{1,2}(z)$ вблизи точки отражения недопустима практически только вблизи критических частот, когда точка $\tilde{n}^2_{1,2}(z) = 0$ приближается к максимуму слоя. В этом случае, при соблюдении условий, ясных из вышеизложенного, волны 1 и 2 также можно считать независимыми. Распространение каждой из них поэтому также может быть рассмотрено на основе уравнения типа (25,1).

Полученными в этом параграфе результатами мы еще воспользуемся в § 35, посвященном вопросу об отражении радиоволн от ионосферы при учете влияния земного магнитного поля.

§ 26. Предельная поляризация волн, выходящих из слоя неоднородной магнитоактивной плазмы

Введение. Некоторые оценки. При распространении электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной среде приближение геометрической оптики неприменимо, в частности, в начале слоя при $v = \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} \to 0$. Причина этого была выяснена в § 23 и, коротко говоря, связана с «поляризационным вырождением», имеющим место в вакууме или любой изотропной среде (вырождение обусловлено тем, что в изотропной среде нормальными являются волны любой поляризации).

Остановимся здесь на выяснении влияния области малых концентраций (т. е. начала слоя) на поляризацию и фазу выходящих из слоя волн (например, волн, возвращающихся на землю после отражения от ионосферы).

Проще всего произвести оценку того вклада, который вносится в значения фазы волны и коэффициентов ее поляризации $K_{1,2}$ в результате распространения в области с малой концентрацией. Для этой цели можно рассматривать [237] непосредственно уравнения (23,2) с подстановкой в качестве A, B и C значений (23,21), относящихся как раз к области $v \ll 1$. Приближенное решение получающейся системы можно найти, выбирая за нулевое приближение либо решение типа $E^{(0)}_{x,y} = \mathrm{const}\, e^{\pm i \frac{\omega}{c} z}$, либо более точное решение в приближении геометрической оптики. Не останавливаясь на вычислениях, укажем лишь их результат для случая, когда $v = az$ (для зависимости типа $v = az^m$, где m не слишком велико, результат получается такой же).

Поправки к нулевому приближению (точнее, отношение членов первого приближения к нулевому) — порядка az и $\frac{2\pi a z^2}{\lambda_0}$. В области, где геометрическая оптика уже применима, т. е. выполнено условие

$$\frac{\lambda_0}{2\pi z} \sim \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{\frac{d\,|\Delta n|}{dz}}{|\Delta n|} \ll 1, \quad (\Delta n = n_2 - n_1 \sim az)$$

(см. (23,23) *), основным является член $\sim \frac{2\pi a z^2}{\lambda_0}$. В верхних слоях ионосферы это отношение меньше единицы. Действительно, при $a \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$ и $\frac{\lambda_0}{2\pi} \sim 10^3$ *см* имеем:

$$\frac{2\pi a z^2}{\lambda_0} \sim (10^{-9} \div 10^{-10})\, z^2;$$

таким образом, при $z \sim 10^4$ *см* получим $\frac{2\pi a z^2}{\lambda_0} \sim 0{,}1 \div 0{,}01 \ll 1$, и в то же время геометрическая оптика применима, так как $\frac{\lambda_0}{2\pi z} \sim 0{,}1 \ll 1$. Отсюда следует, что поправка к фазе и к отношению амплитуд $K_{1,2} = \frac{E_{y1,2}}{E_{x1,2}}$ много меньше единицы, и, таким образом, фаза и, главное, поляризация волн, отражающихся от ионосферы, в хорошем приближении получаются при применении геометрической оптики с самого начала слоя, т. е. без учета области, где условие (23,23) не выполнено и геометрическая оптика неприменима. Для поляризации волн, отраженных от слоя, можно поэтому пользоваться формулой (11,29). Объясняется этот результат просто тем, что в начале слоя (при $v \to 0$) в рассматриваемых условиях верхней ионосферы разность фаз обеих волн и изменение их поляризации настолько малы, что не представляют интереса безотносительно к тому, точно или не точно они выражаются в приближении геометрической оптики. Например, разность фаз в начале слоя порядка $\frac{2\pi a z^2}{\lambda_0}$, т. е., как показано выше, обычно весьма мала. Сама же фаза каждой из волн определяется значением $n_{1,2}$, которое в начале слоя близко к единице, так что фаза $\varphi_{1,2} \approx \frac{\omega}{c} z = \frac{2\pi z}{\lambda_0}$ в первом приближении не содержит никакой ошибки.

---

*) Напомним, что условие (23,23) было получено в § 23 в предположении, что множители типа $u - 1$, $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ и т. п.— порядка единицы. Поэтому при $u \to 1$ (область гирочастоты) и при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \pi/2$ оценки нужно делать более тщательно. При этом, очевидно, при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ геометрическая оптика может быть в начале слоя всегда применима, поскольку в этих случаях поляризация от v не зависит, т. е. $K' = 0$. Уже отсюда ясно, что при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \pi/2$ неравенство (23,23) является более сильным, чем нужно.

Неприменимость приближения геометрической оптики в начале слоя могла бы быть существенной для $\frac{\lambda_0}{2\pi} \sim 10^3$ *см* при $a \gg 10^{-5}$ $\left(\text{см. приведенные выше оценки величины } \frac{2\pi a z^2}{\lambda_0}\right)$.

Поскольку $v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 3{,}18\cdot 10^9 \frac{N(z)}{\omega^2}$, параметр a при $\frac{\lambda_0}{2\pi} = \frac{c}{\omega} = 10^3$ *см* порядка $a \sim 3{,}18\cdot 10^9 \frac{\left(\frac{dN}{dz}\right)_0}{\omega^2} \sim 3\cdot 10^{-6} \left(\frac{dN}{dz}\right)_0$. Для того чтобы в этом примере было $a \sim 10^{-5}$, нужно значение $\frac{dN}{dz} \sim 3$, в то время как в F-слое обычно $\frac{dN}{dz} \sim 0{,}1$ (полутолщина слоя $z_m \sim 100$ *км*, $N_{\max} \sim 10^6$). В начале слоя естественно к тому же ожидать уменьшения $\frac{dN}{dz}$. В E-слое величина

$$\frac{2\pi a z^2}{\lambda_0} = \frac{3{,}18\cdot 10^9 \lambda_0}{2\pi c^2} \left(\frac{dN}{dz}\right)_0 z^2$$

обычно больше, чем в F-слое, так как волны, отражающиеся от F-слоя, длиннее. Вместе с тем в E-слое по той же причине условие применимости геометрической оптики $\frac{\lambda_0}{2\pi z} \ll 1$ жестче, чем в F-слое. То же в еще большей степени относится к области ионосферы, расположенной ниже E-слоя. От этой области отражаются длинные и очень длинные волны, для которых геометрическая оптика становится неприменимой не только из-за «поляризационного вырождения» в начале слоя, но и в силу недостаточной медленности изменения показателей $(n(z) - i\varkappa(z))_{1,2}$ на расстояниях порядка длины волны. Таким образом, для длинных волн вопрос о предельной поляризации должен рассматриваться лишь как одна из сторон более общей проблемы. На этой проблеме отражения от ионосферы длинных и очень длинных волн мы останавливаться не будем (ее исследованию как без учета, так и с учетом влияния земного магнитного поля посвящен ряд работ; см. [32, 43, 192, 193, 239—245], а также дополнительную литературу в конце книги).

Приближенное решение. Для не слишком длинных волн вычисление предельной поляризации может, очевидно, производиться на основе использования геометрикооптического приближения. Точнее, решение можно искать в форме «взаимодействующих» нормальных волн геометрикооптического типа. Выше при оценке роли начала слоя для вычисления коэффициентов $K_{1,2}$ и фазы

$\varphi_{1,2}$ мы, по существу, так и поступали. Использованный метод возмущений позволяет без труда установить критерий малости отклонения величин $K_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ от их геометрикооптических значений. Для того же чтобы более полно выяснить характер взаимодействия нормальных волн в начале слоя, нужно решить задачу в условиях, когда это взаимодействие достаточно велико.

Вопрос о предельной поляризации выходящих из слоя волн рассмотрен в нескольких работах (см. [105, 237, 246—250]). При этом приводимые ниже вычисления [248] основаны на применении некоторой системы «связанных волновых уравнений», широко используемой также при решении других задач [105, 238, 251]. Эта система тождественна с основной системой уравнений (23,2), но иногда более удобна. Впрочем, подобное утверждение об удобстве является довольно условным и часто определяется только привычкой. Соответствующие уравнения уместно, тем не менее, привести, учитывая хотя бы факт их использования в ряде статей.

Введем вместо E_x и E_y новые функции E_{x1} и E_{x2}:

$$\left.\begin{aligned} &E_x = E_{x1} + E_{x2}, \quad E_y = E_{y1} + E_{y2},\\ &E_{y1} = K_1 E_{x1}, \quad E_{y2} = K_2 E_{x2},\\ &K_{1,2}(z) = -i\,\frac{2\sqrt{u}\,(1-is-v)\cos\alpha}{u\sin^2\alpha \mp \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u\,(1-is-v)^2\cos^2\alpha}} \end{aligned}\right\} \qquad (26,1)$$

(волне 1 отвечает нижний знак и волне 2— верхний знак). Смысл производимой замены состоит в том, что для однородной среды отношения $\frac{E_{y1}}{E_{x1}}$ и $\frac{E_{y2}}{E_{x2}}$ такие же, как для необыкновенной и обыкновенной волн (коэффициенты $K_{1,2}$ в (26,1) суть коэффициенты (11,25), определяющие поляризацию нормальных волн в однородной среде). Именно по этой причине новые функции отмечены индексами 1 и 2, хотя в общем случае неоднородной среды они могут не иметь ничего общего с нормальными волнами 1 и 2 в однородной среде.

Для функций $E_{x,y1}$ и $E_{x,y2}$ или их комбинаций можно получить систему уравнений, эквивалентную исходной системе (23,2). Такими уравнениями являются, в частности, уравнения (25,13) и (25,14) для величин $F_\pm = E_y \pm K_{1,2}E_x$. В работах [238, 248, 251] производится, однако, еще одно преобразование, а именно вводятся функции

$$\Pi_1 = E_{x1}\sqrt{1-K_1^2}, \quad \Pi_2 = E_{x2}\sqrt{1-K_2^2}, \qquad (26,2)$$

где $E_{x1,2}$ — функции, определенные согласно (26,1). Для функций $\Pi_{1,2}$ система (23,2) приводит к эквивалентным ей уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\Pi_1}{dz^2}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}(n-i\varkappa)_1^2-\Psi^2\right]\Pi_1&=\frac{d\Psi}{dz}\Pi_2+2\Psi\frac{d\Pi_2}{dz}, \\ \frac{d^2\Pi_2}{dz^2}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}(n-i\varkappa)_2^2-\Psi^2\right]\Pi_2&=-\frac{d\Psi}{dz}\Pi_1-2\Psi\frac{d\Pi_1}{dz}, \end{aligned}\right\} \qquad (26,3)$$

причем функции $(n-i\varkappa)^2_{1,\,2}$ определяются формулой (11,5) и

$$\Psi=\frac{1}{2}\,i\,\frac{d}{dz}\ln\frac{K_2-1}{K_2+1}=\frac{i}{K_2^2-1}\frac{dK_2}{dz}=$$

$$=\frac{i}{4}\frac{d}{dz}\ln\left[\frac{1-v-is+i\,\dfrac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}}{1-v-is-i\,\dfrac{\sqrt{u}}{2}\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}\right]. \qquad (26,4)$$

Нужно заметить, что преобразование (26,2) недопустимо при $K_1^2=1$ или $K_2^2=1$. Поскольку всегда $K_1K_2=1$ (см. (11,27)), условие $K_1^2=1$ влечет за собой равенство $K_2^2=1$ и наоборот. Далее, $K_1^2=K_2^2=1$ только при $v=\frac{4\pi e^2N(z)}{m\omega^2}=1$, $s=\frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}=s_{\text{к}}=$ $=\frac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2\,|\cos\alpha|}$ (см. (11,4)), и, таким образом, системой (26,3) нельзя пользоваться лишь в этом случае.

Если внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ может считаться однородным, то в (26,4) нужно дифференцировать по z только v и s. При этом

$$\Psi=-\frac{\dfrac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{4\cos\alpha}}{(1-v-is)^2+\dfrac{u^2\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha}}\left(\frac{dv}{dz}+i\frac{ds}{dz}\right). \qquad (26,5)$$

Характерно, что даже при полном отсутствии ионизации, когда $v=0$, функция Ψ отлична от нуля, если $\frac{ds}{dz}=\frac{1}{\omega}\frac{d\nu_{\text{эфф}}}{dz}\neq 0$. Этот результат вполне понятен, поскольку при $v=0$

$$K_{1,\,2}=-i\frac{2\sqrt{u}\,(1-is)\cos\alpha}{u\sin^2\alpha\mp\sqrt{u^2\sin^4\alpha+4u\,(1-is)^2\cos^2\alpha}}, \qquad (26,6)$$

т. е. коэффициенты поляризации и при $v=0$ зависят от z через $s\,(z)$.

Система (26,3) является точной, и из нее при отсутствии ионизации, конечно, следует очевидный с самого начала вывод о неизменности поляризации $\left(\text{т. е. о постоянстве отношения } \frac{E_y}{E_x}=\frac{E_{y1}+E_{y2}}{E_{x1}+E_{x2}}\right)$, хотя вспомогательные величины $\Pi_{1,2}$ и зависят от z. Вместе с тем уже этот пример перехода к неионизированной среде, как и упомянутое требование $K^2_{1,2} \neq 1$, свидетельствует о том, что система (26,3) отнюдь не всегда может считаться удобной для применения.

Задача о предельной поляризации решается на базе уравнений (26,3) в предположении о применимости в начале слоя геометрикооптического приближения для уравнений

$$\frac{d^2\Pi_{1,2}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}(n - i\varkappa)^2_{1,2}\Pi_{1,2} = 0. \tag{26,7}$$

Соответствующие частные решения таковы (см. (16,11)):

$$\left.\begin{aligned} \Pi^{(0)}_{1,\pm} &= \frac{1}{\sqrt{(n-i\varkappa)_1}}\, e^{\pm i\frac{\omega}{c}\int (n-i\varkappa)_1\,dz}, \\ \Pi^{(0)}_{2,\pm} &= \frac{1}{\sqrt{(n-i\varkappa)_2}}\, e^{\pm i\frac{\omega}{c}\int (n-i\varkappa)_2\,dz}. \end{aligned}\right\} \tag{26,8}$$

При отсутствии поглощения эти выражения хорошо аппроксимируют точные решения уравнений (26,7) при соблюдении условия $\dfrac{\lambda_0}{2\pi}\dfrac{\left|\frac{dn_{1,2}}{dz}\right|}{|n_{1,2}|^2} \ll 1$ (см. (16,22)); при наличии поглощения аналогичные условия в несколько символической форме записываются так $\dfrac{\lambda_0}{2\pi}\dfrac{\frac{d(n-i\varkappa)_{1,2}}{dz}}{(n-i\varkappa)^2_{1,2}} \ll 1$.

Уравнения (26,3) можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\Pi_1}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}(n-i\varkappa)^2_1\Pi_1 = f_1(z), \quad \frac{d^2\Pi_2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}(n-i\varkappa)^2_2\Pi_2 = f_2(z), \\ &f_1 = \Psi^2\Pi_1 + \frac{d\Psi}{dz}\Pi_2 + 2\Psi\frac{d\Pi_2}{dz}, \quad f_2 = \Psi^2\Pi_2 - \frac{d\Psi}{dz}\Pi_1 - 2\Psi\frac{d\Pi_1}{dz}. \end{aligned}\right\} \tag{26,9}$$

Принимая в качестве решений однородных уравнений (26,7) выражение (26,8), мы можем теперь найти решения системы (26,9) по известным формулам, получающимся в методе «вариации постоянных». Именно, если $\Pi_{1,+}$ и $\Pi_{1,-}$ являются решениями однородного уравнения (26,7), то частное решение неоднородного уравнения (26,9) для Π_1 таково:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= -\Pi_{1,+}\int\frac{\Pi_{1,-}f_1}{W_1}\,dz + \Pi_{1,-}\int\frac{\Pi_{1,+}f_1}{W_1}\,dz, \\ W_1 &= \frac{d\Pi_{1,-}}{dz}\Pi_{1,+} - \Pi_{1,-}\frac{d\Pi_{1,+}}{dz}. \end{aligned}\right\} \tag{26,10}$$

Решение для Π_2 получается просто заменой индекса 1 на 2. Для решений (26,8) вронскианы равны $W_1 = W_2 = -\frac{2i\omega}{c}$. Кроме того, в задаче о предельной поляризации для плавного слоя можно ограничиться рассмотрением волн, идущих только в одном направлении (из слоя). По последней причине в решениях типа (26,10) с функциями (26,8) в качестве $\Pi_{1,2,\pm}$ нужно оставить лишь члены, пропорциональные $\Pi^{(0)}_{1,2,+}$. В результате имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= -\frac{i\Pi^{(0)}_{1,+}}{2\frac{\omega}{c}}\int^{z} f_1\Pi^{(0)}_{1,-}\,dz; \\ \Pi_2 &= -\frac{i\Pi^{(0)}_{2,+}}{2\frac{\omega}{c}}\int^{z} f_2\Pi^{(0)}_{2,-}\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{26,11}$$

Эти выражения еще не являются решениями задачи, поскольку сами функции $f_{1,2}$ зависят от $\Pi_{1,2}$. Тем не менее, они могут с успехом использоваться при слабом взаимодействии между волнами 1 и 2, когда функции $f_{1,2}$ малы. Проще всего воспользоваться здесь методом последовательных приближений, называемым также методом теории возмущений. В применении к выражениям (26,11) этот метод сводится к подстановке в $f_{1,2}$ в качестве $\Pi_{1,2,+}$ решений $\Pi^{(0)}_{1,2,+}$. Так мы, по существу, уже поступили в начале настоящего параграфа в применении к исходным уравнениям (23,2). В работе [248] проводится более полное решение, но лишь для конкретного ионосферного слоя. Все вычисления в своей совокупности довольно громоздки, хотя и просты по идее. Ограничимся поэтому только указанием общего хода расчетов и их результата.

Решения $\Pi_{1,2}$ ищутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi_{1,2} = A_{1,2}(z)\,\Pi^{(0)}_{1,2,+}, \quad A_1 = u_1(z)\,e^{-i\frac{\omega}{2c}\int_{z_0}^{z}(n_2-n_1)\,dz}, \\ &A_2 = u_2(z)\,e^{+i\frac{\omega}{2c}\int_{z_0}^{z}(n_2-n_1)\,dz}, \end{aligned}\right\} \tag{26,12}$$

где точка z_0 выбрана вне слоя, так что $n_2(z_0) = n_1(z_0)$; при наличии поглощения здесь и везде ниже нужно просто заменить $n_{1,2}$ на $(n - i\varkappa)_{1,2}$.

Функции $A_{1,2}(z)$ при слабом взаимодействии могут считаться медленно меняющимися по сравнению с $\Pi^{(0)}_{1,2,+}$.

Далее, для конкретных условий, отвечающих началу ионосферного E-слоя, как показывают оценки, можно пренебречь множителями $\Psi^2\Pi^{(0)}_{2,+}\Pi^{(0)}_{2,-}$ и $\frac{d\Psi}{dz}\Pi^{(0)}_{2,-}\Pi^{(0)}_{1,+}$ и им аналогичными по сравнению с $2\Psi\Pi^{(0)}_{2,-}\frac{d\Pi^{(0)}_{1,+}}{dz}$ и $2\Psi\Pi^{(0)}_{1,-}\frac{d\Pi^{(0)}_{2,+}}{dz}$. Впрочем, возможность такого пренебрежения вполне естественна и без дальнейших оценок, поскольку производные $\frac{d\Pi_{1,2}^{(0)}}{dz}$ содержат большой множитель $\frac{\omega}{c}$, отсутствующий у отбрасываемых членов. В итоге для функции $u_{1,2}$ получается уравнение

$$\frac{d^2u_{1,2}}{dz^2}+\left\{\Psi^2+\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{c^2}(n_2-n_1)^2-\frac{i}{2}\frac{\omega}{c}\frac{d}{dz}(n_2-n_1)\right\}u_{1,2}=0. \qquad (26,13)$$

Если

$$|\Psi|^2\gg\left|\frac{\omega^2}{4c^2}(n_2-n_1)^2-\frac{i}{2}\frac{\omega}{c}\frac{d}{dz}(n_2-n_1)\right|, \qquad (26,14)$$

уравнение (26,13) оказывается практически таким же, как при $n_1=n_2$. Но для изотропной среды результат решения уравнений известен заранее и состоит в том, что поляризация волны остается неизменной (поэтому мы и не будем проводить здесь соответствующего доказательства, связанного просто с переходом от $u_{1,2}$ к $\Pi_{1,2}$ и затем к полю $E_{x,y}$). В обратном предельном случае

$$|\Psi|^2\ll\left|\frac{\omega^2}{4c^2}(n_2-n_1)^2-\frac{i}{2}\frac{\omega}{c}\frac{d}{dz}(n_2-n_1)\right|; \qquad (26,15)$$

в уравнении (26,13) можно пренебречь членом с Ψ^2 и, учитывая медленность изменения $u_{1,2}$ с z, найти $u_{1,2}=\mathrm{const}\, e^{\pm i\frac{\omega}{2c}\int(n_2-n_1)\,dz}$. Отсюда для $A_{1,2}$ и $\Pi_{1,2}$ получаются, в частности, решения $A_{1,2}=\mathrm{const}$ и $\Pi_{1,2}=\mathrm{const}\,\Pi_{1,2,+}^{(0)}$ (см. (26,12)), т. е. волны $\Pi_{1,+}$ и $\Pi_{2,+}$ не взаимодействуют. Таким образом, область взаимодействия при определении предельной поляризации отвечает условию

$$|\Psi|^2\sim\left|\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{c^2}(n_2-n_1)^2-\frac{i}{2}\frac{\omega}{c}\frac{d}{dz}(n_2-n_1)\right|. \qquad (26,16)$$

Обычно один из членов в правой части этого выражения мал по сравнению с другим. Так, например, для модели слоя, принятой в [248], при $f>1$ *Мгц* ($\lambda_0<300$ *м*) можно пренебречь членом $\frac{\omega}{c}\frac{d}{dz}(n_2-n_1)$ по сравнению с $\frac{\omega^2}{c^2}(n_2-n_1)^2$, а при $f<0{,}5$ *Мгц* ($\lambda_0>600$ *м*), наоборот, доминирует второй член.

Результаты расчета. Уравнение (26,13) имеет вид волнового уравнения в изотропной среде (см. (16,3)), и его исследование может быть доведено до конца. Это и сделано в [248] для случая, когда

$$n_2-n_1=\mathrm{const}\,e^{\beta z},\quad \Psi=\mathrm{const} \quad \text{и} \quad \lambda_0\leqslant 300\ \text{м}.$$

Результат расчетов состоит в том, что предельная поляризация выходящей из слоя волны 1 или 2 равна

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{1,2} &= K_{1,2} = \frac{K^{(0)}_{1,2}(F-g)-(F+g)}{(F-g)-K^{(0)}_{1,2}(F+g)}, \\ \frac{F}{g} &= -2^{-2r}r^{2r}e^{i\pi r}\frac{\Gamma(1-r)}{\Gamma(1+r)}, \quad r = i\frac{\Psi}{\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (26{,}17)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция и $K^{(0)}_{1,2}(z_b)$ — обычные коэффициенты поляризации (см. (11,25) или (26,1)), в которые нужно подставить значение концентрации электронов на уровне z_b, определяемом из условия

$$\Psi^2(z_b) = \frac{\omega^2}{4c^2}(n_2(z_b) - n_1(z_b)). \qquad (26{,}18)$$

Для конкретного примера [248], относящегося к началу E-слоя и $\lambda_0 = 300$ *м*, в области взаимодействия $|\Psi| \approx 2\cdot 10^{-8}$ *см*$^{-1}$, $r \approx 2\cdot 10^{-3}$ и $\frac{F}{g} \approx -0{,}973$ $\Big($для более коротких волн значение $|\Psi|$ еще меньше, а отношение $\left|\frac{F}{g}\right|$ еще ближе к единице$\Big)$. Если же $\frac{F}{g} = -1$, то

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{1,2} = K_{1,2} = K^{(0)}_{1,2}(z_b). \qquad (26{,}19)$$

Таким образом, в рассматриваемом примере для волн короче 300 *м* предельная поляризация практически такая же, как в приближении геометрической оптики для среды с параметрами, отвечающими точке z_b, определяемой условием (26,18). Эта точка комплексна, так как в начале слоя поглощением, вообще говоря, нельзя пренебречь и везде выше вместо $n_2 - n_1$ фактически фигурирует разность $(n - i\varkappa)_2 - (n - i\varkappa)_1$. Однако для достаточно коротких волн (здесь для волн с $\lambda_0 < 300$ *м*) опять имеет место упрощение и координата z_b может считаться вещественной. Более того, оказывается, что точке z_b отвечают весьма небольшие значения параметров v и s. Это и понятно, так как в начале слоя $v \ll 1$ и $s \ll 1$. В итоге получается почти тривиальный результат: в качестве $K_{1,2} = K^{(0)}_{1,2}$ нужно взять предельное значение

$$K_{1,2} = -i\frac{2\sqrt{u}\cos\alpha}{u\sin^2\alpha \mp \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u\cos^2\alpha}}, \qquad (26{,}20)$$

вытекающее из (11,25), (26,1), (26,6) при $v = 0$ и $s = 0$.

Другими словами, в конкретных условиях, рассчитанных в [248] до конца, приближение геометрической оптики фактически применимо и для вычисления поляризации в начале слоя.

К такому выводу можно было бы прийти уже на основе оценок, приведенных в начале этого параграфа. Мы осветили тем не менее путь более подробного расчета, имея в виду методическую сторону дела и возможность подобрать другие примеры, в которых взаимодействие более существенно. В ионосферных условиях, в области взаимодействия (26,18), все же, по-видимому, всегда $v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \ll 1$, $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \ll 1$, и значение предельной поляризации определяется только земным магнитным полем, т. е. величинами u и α. Отсюда ясно, что экспериментальное определение предельной поляризации не может служить источником новых сведений об ионосфере (поле $H^{(0)}$ в нижней части ионосферы известно, разумеется, с достаточной точностью).

В случае солнечной короны, напротив, магнитное поле плохо известно и измерение предельной поляризации могло бы быть очень интересным. Здесь встречается, однако, другая трудность — она связана с отсутствием информации о характере поляризации или типе волны до достижения ею «границы» короны или, точнее, области взаимодействия. Не исключено, тем не менее, что из дополнительных соображений можно будет иногда считать выходящую из короны волну обыкновенной без примеси необыкновенной или наоборот; измерение поляризации такой волны позволило бы получить ценные сведения о магнитном поле в короне на «уровне взаимодействия».

§ 27. Поведение поля волны, коэффициенты отражения и прохождения при наличии особенности у показателя преломления

Введение. Особенности (полюса) у показателя преломления. Одной из характерных черт неоднородной магнитоактивной плазмы является возможность обращения показателей преломления $\tilde{n}_{1,2}$ в бесконечность в условиях, когда электронная концентрация $N(z)$ остается конечной. Действительно, как об этом уже говорилось, при данном значении $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} < 1$ значение $\tilde{n}_1^2 \to \infty$ при $v \to v_{1\infty} = \frac{4\pi e^2 N_\infty}{m\omega^2} = \frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha}$; если же $u\cos^2\alpha > 1$, то $\tilde{n}_2^2 \to \infty$ при $v \to v_{2\infty} = \frac{4\pi e^2 N_\infty}{m\omega^2} = \frac{u-1}{u\cos^2\alpha - 1}$. Ход кривых $\tilde{n}_{1,2}^2(v)$ в районе полюсов ясен из рис. 11,3; 11,6; 11,8 и 11,10. Величина $\tilde{n}_1^2$ может иметь полюс, в частности, в простом случае поперечного распространения $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, когда волновое уравнение для волны 1 имеет вид (см. (25,7)):

$$\frac{d^2E_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\tilde{n}_1^2E_x=0,\quad \tilde{n}_1^2=1-\frac{v(1-v)}{1-u-v}. \tag{27,1}$$

Отсюда или из приведенного общего выражения для $v_{1\infty}$ ясно, что при $\alpha=\frac{\pi}{2}$

$$v_{1\infty}=1-u,\qquad \omega_\infty^2=\omega_0^2+\omega_H^2; \tag{27,2}$$

здесь ω_∞ — частота, для которой $\tilde{n}_1^2\to\infty$ при данных ω_0 и ω_H $\Bigl($оба написанных выражения, конечно, тождественны, если записать параметры v и u в виде $v=\frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}$ и $u=\frac{\omega_H^2}{\omega_\infty^2}\Bigr)$. При $\alpha=0$ и $u\neq1$ у функции $\tilde{n}_{1,2}^2=\tilde{n}_\pm^2$ полюса нет (при $\alpha\to0$ параметр $v_\infty=\frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha}\to1$, но получающаяся в этом пределе прямая $v=1$ отвечает плазменной волне; см. § 12). Если $\alpha\neq0$ или $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$, система волновых уравнений (23,2) не разделяется строго на два уравнения второго порядка, но для достаточно протяженного слоя такое разделение обычно все же может быть эффективно произведено в хорошем приближении (см. § 25). Исключение составляет, во-первых, область малых концентраций ($v\to0$), рассмотренная в § 26. Вопрос о полюсе функций $\tilde{n}_{1,2}^2$ для этого случая мало интересен ($v_{1\infty}\to0$ только при $u\to1$; кроме того, в начале слоя обычно велика роль соударений и полюс расположен далеко от вещественной оси; см. ниже). Второе исключение, когда невозможно ограничиться исследованием уравнения второго порядка, имеет место при $\alpha\to0$. Этот случай, соответствующий эффекту «утраивания» сигналов, рассмотрен в § 28. Здесь же в силу сказанного можно ограничиться исследованием уравнения типа (16,3):

$$\frac{d^2F}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'_{\text{эфф}}(\omega,z)\,F=0, \tag{27,3}$$

где F — некоторая функция, связанная с полем волны E (см., например, (25,22), (25,23) и (25,4)).

В магнитоактивной плазме при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ имеем $\varepsilon'_{\text{эфф}}=(n-i\varkappa)_1^2$, или при отсутствии соударений $\varepsilon'_{\text{эфф}}=\tilde{n}_1^2$; при других углах α, как указано в § 25, также можно обычно положить $\varepsilon'_{\text{эфф}}=(n-i\varkappa)_{1,2}^2$. Уравнение (27,3) с функцией $\varepsilon'_{\text{эфф}}$, имеющей полюс, интересно и для изотропной плазмы при наклонном падении на слой волны с вектором $\boldsymbol{E}$, лежащим в плоскости падения. В этом случае (см. (19,22) и (19,23))

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon'_{\text{эфф}} &= \varepsilon'(z) - \varepsilon'(0)\sin^2\theta_0 + \frac{c^2}{\omega^2}\left[\frac{\frac{d^2\varepsilon'}{dz^2}}{2\varepsilon'} - \frac{3}{4}\,\frac{\left(\frac{d\varepsilon'}{dz}\right)^2}{\varepsilon'^2}\right], \\ E_z &= \sin\theta(z)\,F e^{\pm i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'(0)}\sin\theta_0}. \end{aligned}\right\} \qquad (27{,}4)$$

При отсутствии соударений эта функция $\varepsilon'_{\text{эфф}} = \varepsilon_{\text{эфф}}$ имеет полюс в точке, где $\varepsilon = 0$. Например, для линейного слоя $\varepsilon' = -az - is$ при $\varepsilon'(0) = 1$ получим:

$$\varepsilon'_{\text{эфф}} = -az - is - \sin^2\theta_0 - \frac{3c^2}{4\omega^2}\,\frac{a^2}{(az+is)^2}. \qquad (27{,}5)$$

В изотропной плазме при нормальном падении

$$\varepsilon'_{\text{эфф}} = \varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega\,[\omega - i\nu_{\text{эфф}}(z)]}$$

и, следовательно, при конечных значениях концентрации N и вещественном z функция ε' не имеет полюса. Для других же сред проницаемость ε' при отсутствии поглощения имеет полюс и в изотропном случае (см., например, выражение (22,18)).

Итак, для решения ряда задач о распространении волн нужно исследовать уравнение (27,3) с функцией $\varepsilon'_{\text{эфф}}(z)$, имеющей полюс. При этом очевидно, что полюс лежит на интересующей нас вещественной оси z только при $\varepsilon'_{\text{эфф}} = \varepsilon_{\text{эфф}}$, т. е. для вещественной функции $\varepsilon'_{\text{эфф}}$. Если же в плазме учитываются соударения, то полюс $\varepsilon'_{\text{эфф}}$ отвечает комплексным значениям z (см. (27,5)). Для магнитоактивной плазмы при наличии соударений $(n - i\varkappa)^2_{1,2} \to \infty$ при *)

$$v_{1,\,2\infty} = \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} = (1 - is)\,\frac{(1-is)^2 - u}{(1-is)^2 - u\cos^2\alpha}, \qquad (27{,}6)$$

где в самом общем случае плоскослоистой среды

$$u = \frac{\omega_H^2(z)}{\omega^2} \quad \text{и} \quad s = \frac{\nu_{\text{эфф}}(z)}{\omega}.$$

Поскольку при учете соударений на вещественной оси z все величины конечны, может показаться, что обсуждаемая задача не имеет, по сути дела, никаких характерных особенностей. Это, тем не менее, не так. При наличии у функции $\varepsilon'_{\text{эфф}}(z)$ полюса первого порядка проходящая через сингулярную область волна, как оказывается, ослабляется даже при $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \to 0$. Кроме того, при малых значениях s волновое поле в области больших значений $|\varepsilon'_{\text{эфф}}|$ ведет себя весьма своеобразно (в этом мы уже убедились в § 20). Таким образом, вопрос о распространении волн в условиях существования «резонансной области», т. е. полюса функции $\varepsilon'_{\text{эфф}}$, действительно заслуживает специального разбора (эта проблема в различных ее аспектах была рассмотрена в [32], § 79; [105, 204—206, 252—254]).

---

*) См. общее выражение (11,6) для $(n - i\varkappa)^2_{1,2}$. К формуле (27,6) можно сразу прийти также, учитывая, что значениям $(n - i\varkappa)^2_{1,2} = \infty$ отвечает обращение в нуль знаменателей в выражениях для A, B и C в исходном уравнении (11,3).

Строгое решение для слоя $\varepsilon'_{\text{эфф}} = \frac{g}{(z+is)^2}$. Для некоторых функций $\varepsilon'_{\text{эфф}}(z)$, обладающих полюсом, уравнение (27,3) имеет строгое решение, выражающееся в известных функциях. Так, если

$$\varepsilon'_{\text{эфф}} = \frac{g}{(z+is)^2}, \tag{27,7}$$

общее решение уравнения (27,3) уже приводилось в конце § 17 и имеет вид:

$$F = C_1 (z+is)^{r_1} + C_2 (z+is)^{r_2}, \quad r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{c^2} g}. \tag{27,8}$$

Если постоянная g вещественна и $\frac{\omega^2}{c^2} g > \frac{1}{4}$, коэффициенты $r_{1,2}$ комплексны и волны являются бегущими в противоположных направлениях. Обе эти волны независимы, и, таким образом, в точке $z = 0$ или ее окрестности никакого отражения не происходит. Функция F при $z = 0$ конечна и стремится к нулю при $s \to 0$. Для изотропной среды при нормальном падении в качестве F в (27,3) можно выбрать само поле E, причем $\varepsilon'_{\text{эфф}}$ равна комплексной проницаемости данной среды ε'. Для такой среды с $g > 0$, как мы видим, наличие полюса второго порядка у ε' не приводит к появлению особенности у волнового поля. Положение изменяется, если в (27,8) $g < 0$ и один из корней $r_{1,2}$ отрицателен. Функция F при $s \to 0$ имеет теперь особенность в точке $z = 0$ (если $r_1 > 0$ и $r_2 < 0$, то особенность имеется, конечно, только при $C_2 \neq 0$). Эффект разбухания компонент поля E_z и E_y. при наклонном падении волны на изотропный слой (см. § 20) связан именно с этим случаем. Действительно, в § 20 функция $\varepsilon'_{\text{эфф}}$ имела вид (27,5), т. е. при $z \to 0$ и $s \to 0$ близка к (27,7), а именно $\varepsilon'_{\text{эфф}} = -\frac{3c^2}{4\omega^2} \frac{a^2}{(az+is)^2}$. Отсюда при $s \to 0$ получим $r_1 = -\frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{3}{2}$ и $F = \frac{C_1}{z^{1/2}} + C_2 z^{3/2}$. Далее, $|E_z| = |\sin\theta\, F| = \left|\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\varepsilon'(z)}} F\right| = \left|\frac{\sin\theta_0\, F}{\sqrt{-az-is}}\right|$ (см. (19,21)) и, таким образом, при $s \to 0$ имеем

$E_z = \frac{\text{const}}{z}$ (постоянная равна $C_2 = 0$ в силу требования об исчезновении поля для $z \to \infty$). Этот результат для E_z совпадает с полученным в § 20 (см. (20,19)), но, разумеется, соответствующая постоянная может быть определена лишь при исследовании решения во всей области (это как раз и сделано в § 20).

Строгое решение для слоя $\varepsilon'_{\text{эфф}} = \frac{g^2}{z+is}$. Физическая интерпретация. Для проницаемости $\varepsilon' = (a + bz)^m$ с $m \neq -2$ уравнение (27,3) имеет решение [188, 189] в бесселевых функциях. В частности, если

$$\varepsilon' = \frac{g^2}{z+is}, \qquad (27,9)$$

общее решение уравнения (27,3) имеет вид (см. [199, 252]):

$$E = (z+is)^{1/2}\{C_1 H_1^{(1)}(2g(z+is)^{1/2}) + C_2 H_1^{(2)}(2g(z+is)^{1/2})\}, \qquad (27,10)$$

где $H_1^{(1)}$ и $H_1^{(2)}$ — функции Ганкеля и сразу же положено $\varepsilon'_{\text{эфф}} = \varepsilon'$ и $F = E_{x,y} = E$, т. е. имеется в виду задача о распространении волн в изотропной среде и притом нормально к слою.

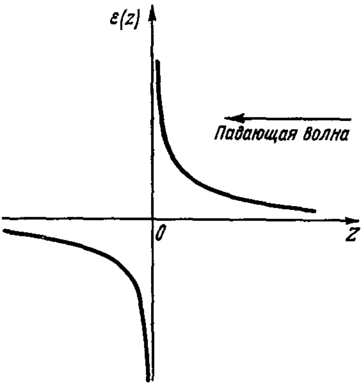


Рис. 27,1. Слой $\varepsilon(z) = \frac{g^2}{z}$.

Выберем перед корнем $\sqrt{z}$ знак таким образом, чтобы $\sqrt{z} > 0$ при $z > 0$ и $\sqrt{z} = i\sqrt{|z|}$ при $z < 0$ (т. е. $0 < \arg(z + is) < \pi$). Тогда из требования конечности поля при $z \to -\infty$ приходим к выводу о необходимости в (27,10) положить $C_2 = 0$. При $|\zeta| \gg 1$, как известно,

$$H_1^{(1)}(\zeta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\, e^{i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right)}$$

и

$$H_1^{(2)}(\zeta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\, e^{-i\left(\zeta - \frac{3\pi}{4}\right)}.$$

Другими словами, при $z < 0$ остается только затухающее решение, как это всегда имеет место в области $\varepsilon < 0$ (рис. 27,1). При больших положительных значениях z, когда $2g\,|(z + is)^{1/2}| \gg 1$, получим:

$$E \approx C_1 \sqrt{\frac{1}{\pi g}}\,(z+is)^{1/4}\, e^{i\left(\omega t + 2g\left[(z+is)^{1/2} - \frac{3\pi}{4}\right]\right)}, \qquad (27,10\text{a})$$

т. е. имеется волна, бегущая из области $z=\infty$ к началу координат $z=0$. Никакой отраженной волны здесь нет, при $z \to -\infty$ поле равно нулю, и, следовательно, волна полностью поглощается в районе начала координат $z=0$, где при $s=0$ имеется полюс проницаемости $\varepsilon'(z)$.

При $2g\,|(z+is)^{1/2}| \ll 1$ имеем:

$$E = C_1 (z+is)^{1/2} H_1^{(1)}[2g(z+is)^{1/2}]\,e^{i\omega t} \approx -\frac{iC_1}{\pi g}e^{i\omega t}, \qquad (27,10б)$$

т. е поле конечно.

До тех пор, пока $s \neq 0$, отсутствие отражения не может вызывать особого удивления. Волна бежит к области $z \approx 0$, где и поглощается. Поглощение в области малых значений z действительно особенно велико, так как оно равно σE^2, причем $\sigma = -\frac{\omega}{4\pi}\operatorname{Im}\varepsilon' = \frac{g^2\omega s}{4\pi(z^2+s^2)}$ (см. (27,9)), и вещественное поле равно $E=\frac{C_1}{\pi g}\sin\omega t$ (см. (27,10 б)). Если же $s \to 0$, отражения по-прежнему нет, потому что поглощение не исчезает и при $s\to 0$. В самом деле, при малых s полные потери равны:

$$\int \sigma E^2\,dz \approx E^2\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma\,dz = \frac{g^2\omega E^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s}{z^2+s^2}\,dz = \frac{g^2\omega E^2}{4} = \frac{C_1^2\omega}{4\pi^2}\sin^2\omega t,$$

т. е. поглощение не зависит от s и в этой связи, естественно, не исчезает и при $s\to 0$ *).

Здесь возникает все же вопрос о том, что будет, если положить $s=0$ с самого начала. Поглощение энергии при этом происходить не может и становится непонятным, куда уходит энергия падающей волны. Ответ заключается в том, что при $s=0$ физически не оправдано решение задачи о распространении волн, как стационарного процесса. Действительно при $s=0$ в районе полюса в стационарном состоянии должна скопиться бесконечная энергия, приток же энергии в единицу времени конечен. Таким образом, нужно рассматривать переходной процесс, при котором

---

*) Этот результат соответствует тому хорошо известному факту, что полная энергия, поглощаемая затухающим гармоническим осциллятором под действием силы с непрерывным спектром (т. е. площадь резонансной кривой), при слабом затухании не зависит от декремента затухания. Условие малости поглощения в приведенной в тексте выкладке использовано при замене пределов в интеграле на $\pm\infty$ и замене поля E на постоянную $E\ (z=0)$; такая операция законна, поскольку

$$\int_{a<0}^{b>0}\frac{s}{z^2+s^2}\,dz = \left[\operatorname{arctg}\frac{z}{s}\right]_{\frac{a}{s}}^{\frac{b}{s}} \to \pi \quad \text{при} \quad s\to 0.$$

энергия падающей волны будет все время накапливаться вблизи полюса и отсутствие поглощения опять не явится парадоксальным.

В физических задачах переход к отсутствию поглощения целесообразно обычно понимать как некоторый предел, осуществляющийся при стремлении поглощения к нулю. Именно в этом смысле мы и будем понимать утверждение об отсутствии соударений. Наличие в этом пределе не равного нулю поглощения является следствием некоторого резонанса и после всего изложенного представляется достаточно ясным (см. также ниже).

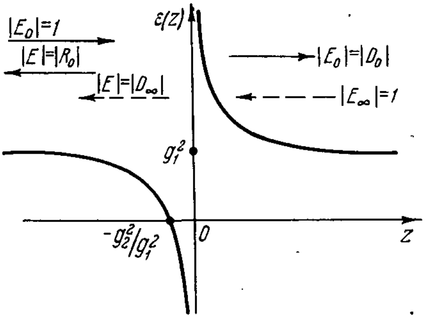


Рис. 27,2. Слой $\varepsilon(z) = g_1^2 + \frac{g_2^2}{z}$.

Слой $\varepsilon'_{\text{эфф}} = g_1^2 + \frac{g_2^2}{z+is}$. В работе [252] решена задача о прохождении и отражении волн для слоя с

$$\varepsilon'_{\text{эфф}} = g_1^2 + \frac{g_2^2}{z+is}, \qquad (27{,}11)$$

когда при $s \to 0$ имеется не только полюс $z_\infty = 0$, но и нуль $z_0 = -\frac{g_2^2}{g_1^2}$ функции $\varepsilon'_{\text{эфф}}$ (рис. 27,2).

Решение уравнения (27,3) с такой проницаемостью $\varepsilon'_{\text{эфф}} = \varepsilon'$ выражается в гипергеометрических функциях определенного типа, называемых иногда функциями Уиттекера [202]. Исследование показывает, что при падении волны на полюс слева — со стороны нуля функции $\varepsilon(z)$ (см. сплошные стрелки на рис. 27,2), модули амплитудного коэффициента отражения $|R_0|$ и амплитудного коэффициента прохождения $|D_0|$ равны $(s \to 0)$

$$|R_0| = 1 - e^{-\pi\frac{\omega g_2^2}{c g_1}}, \qquad |D_0| = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{c}\frac{g_2^2}{g_1}}. \qquad (27{,}12)$$

В районе полюса поглощается, очевидно, относительная доля энергии $|A_0|^2 = 1 - |R_0|^2 - |D_0|^2 \geqslant 0$. Если расстояние между нулем $z_0 = -\frac{g_2^2}{g_1^2}$ и полюсом $z_\infty = 0$ велико, так что $\frac{\pi\omega}{c}\frac{g_2^2}{g_1} = \frac{2\pi^2}{\lambda}\frac{g_2^2}{g_1} \gg 1$, то $|R_0| = 1$, $|D_0| = 0$ и $|A_0| = 0$. Этот результат вполне понятен — между нулем и полюсом функция $\varepsilon(z) < 0$ и волна затухает; поэтому поглощение, происходящее при $s \to 0$ лишь в полюсе, может быть сколько-нибудь заметным только в случае близости полюса к нулю. При $g_2 \to 0$ полюс и нуль исчезают, и $|R_0| \to 0$, $|D_0| \to 1$ и $|A_0| \to 0$. Наконец, из (27,12) ясно, что доля поглощаемой энергии

$$|A_0|^2 = 1 - |R_0|^2 - |D_0|^2 = e^{-\delta_0}(1 - e^{-\delta_0}), \qquad \delta_0 = \frac{\pi\omega g_2^2}{c g_1} \tag{27,13}$$

максимальна при $\delta_0 = \ln 2 = 0{,}6931$; в этом случае в резонансной области поглощается $^1/_4$ падающей энергии.

Пусть теперь волна падает справа — со стороны полюса (см. пунктирные стрелки на рис. 27,2). Тогда

$$\left.\begin{aligned} &|R_\infty| = 0, \quad |D_\infty| = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\omega}{c}\frac{g_2^2}{g_1}} = |D_0|, \\ &|A_\infty|^2 = 1 - |D_\infty|^2 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{27,14}$$

При $g_1 \to 0$ функция (27,11) переходит в (27,9), в согласии с чем в этом предельном случае не только $|R_\infty| = 0$, но и $|D_\infty| = 0$, т. е. вся энергия поглощается в районе полюса. Коэффициент прохождения $|D_\infty|$, естественно, очень мал и при $g_1 \neq 0$, но достаточно большом расстоянии между полюсом и нулем функции $\varepsilon(z)$. С другой стороны, при большой близости полюса к нулю (при $\frac{\pi\omega g_2^2}{2cg_1} \ll 1$) волна «не успевает» поглотиться в районе полюса и свободно проходит через эту область ($|D_\infty| \to 1$). Заметим также, что полученное равенство $|D_\infty| = |D_0|$ не случайно, а является общим для всех задач такого типа в изотропной среде, так как следует из теоремы взаимности *).

Полюс функции $(n - i\varkappa)^2_{1,2}$ в случае магнитоактивной плазмы. Обратимся, наконец, к основной интересующей нас здесь проблеме: влиянию полюса функции $(n - i\varkappa)^2_{1,2}$ на распространение волн в магнитоактивной плазме. Как уже указывалось, если исключить из рассмотрения область малых углов α, картина распространения волн при наличии полюса может быть выяснена на примере поперечного распространения [253, 254]. Соответствующее уравнение (27,1) для линейного слоя $v = az$ при отсутствии поглощения принимает вид:

$$\frac{d^2E_x}{d\zeta^2} + \rho^2\left(2u - \zeta + \frac{u(1-u)}{\zeta}\right)E_x = 0, \tag{27,15}$$

где $\rho = \frac{\omega}{ca} = \frac{2\pi}{\lambda_0 a}$ и $\zeta = v + u - 1$ ($\zeta = 0$ в точке $v_{1\infty} = 1 - u$, где $\tilde{n}_1^2 \to \infty$; см. рис. 27,3).

Сопоставление выражений (27,11) и (27,15), а также рис. 27,2 и 27,3, указывает на большую близость функций $\varepsilon'_{\text{эфф}}$ в обоих этих случаях до тех пор, пока можно не обращать внимания на второй (правый) нуль $v_{10}^{(+)}$ функции $\tilde{n}_1^2$. Последнее представляется законным, если расстояние между этим нулем $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$ и полюсом $v_{1\infty} = 1 - u$ достаточно велико по сравнению с длиной волны $\frac{\lambda_0}{2\pi}$ $\left(\text{для линейного слоя } v = az \text{ это расстояние равно } \Delta z = \frac{\sqrt{u}(1-\sqrt{u})}{a} = \frac{\omega_H(\omega-\omega_H)}{a\omega^2}\right)$.

---

*) В магнитоактивной среде теорема взаимности в ее обычной форме, вообще говоря, несправедлива. Об обобщенной теореме взаимности, пригодной в магнитоактивной среде, речь пойдет в § 29.

Итак, отвлечемся вначале от рассмотрения нуля $v_{10}^{(+)}$ и тем самым будем считать, что волна может уходить в область больших значений v на рис. 27,3 $\left(\text{того же можно достичь, если слой не является линейным и максимальная концентрация } N_{\max} \text{ в нем меньше, чем соответствующая точка } v_{10}^{(+)} = \frac{4\pi e^2 N_{10}^{(+)}}{m\omega^2} = 1 + \sqrt{u}\right)$. Тогда в известном приближении можно воспользоваться результатами (27,12) — (27,14) для слоя (27,11) с заменой $g_2^2 \to \frac{u(1-u)}{a^2}$, $g_1^2 \to \frac{\sqrt{u}(1+\sqrt{u})}{a^2}$ и $z \to \zeta$ (при такой замене полюс $v_{1\infty} = 1 - u$ функции $\tilde{n}_1^2$ и ее левый нуль $v_{10}^{(-)} = 1 - \sqrt{u} = \zeta_{10}^{(-)} + 1 - u$, $\zeta_{10}^{(-)} = -\sqrt{u}\,(1-\sqrt{u})$ совпадают с полюсом и нулем функции (27,11)). В результате получим:

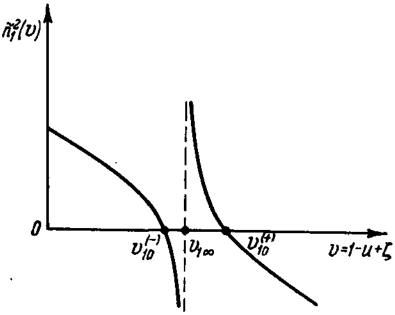


Рис. 27,3. Функция $\tilde{n}_1^2(v)$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\left.\begin{aligned}
&|R_0| = 1 - e^{-\delta_0}, \quad |D_0| = |D_\infty| = e^{-\frac{\delta_0}{2}}, \quad |R_\infty| = 0,\\
&\delta_0 = \frac{\pi\omega u^{3/4}(1-u)}{ca\sqrt{1+\sqrt{u}}},\\
&|A_0|^2 = 1 - |R_0|^2 - |D_0|^2 = e^{-\delta_0}(1 - e^{-\delta_0}),\\
&|A_\infty|^2 = 1 - e^{-\delta_0}.
\end{aligned}\right\} \qquad (27,16)$$

Поглощаемая в районе полюса энергия при падении волны слева (со стороны малых значений v) по-прежнему, конечно, достигает максимального значения $^1/_4$ при $\delta_0 = \ln 2$.

Модули коэффициентов отражения и прохождения для достаточно протяженных слоев, а обычно в хорошем приближении и для более общего случая могут быть получены методом фазовых интегралов. Несколько замечаний об этом методе будет сделано в § 28. Здесь же укажем только результат [254] в применении к уравнению (27,15).

Если не учитывать отражения от второго нуля $v_{10}^{(+)}$, то выражения для $|R|$ и $|D|$ имеют вид (27,16) с

$$\delta_0 = -\frac{i\rho}{2}\oint n_1\,d\zeta, \quad \rho = \frac{\omega}{ca}, \quad n_1 = \sqrt{2u - \zeta + \frac{u(1-u)}{\zeta}}, \tag{27,17}$$

где интеграл берется в комплексной плоскости по контуру, дважды охватывающему обе особые точки $\zeta_{10}^{(-)} = -\sqrt{u}\,(1-\sqrt{u})$

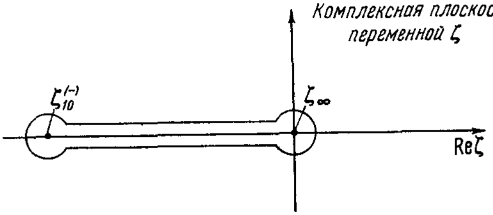


Рис. 27,4. Контур интегрирования в выражении (27,17), причем контур нужно обойти два раза (двулистный характер поверхности на рисунке не отражен).

и $\zeta_\infty = 0$ (рис. 27,4) *). Стягивая контур интегрирования к отрезку вещественной оси между точками $\zeta_{10}^{(-)}$ и ζ_∞, можем также записать (делается замена $\zeta = -\sqrt{u}\,(1-\sqrt{u})\,t^2$):

$$\delta_0 = -2i\rho\int_{\zeta_{10}^{(-)}}^{\zeta_\infty} n_1\,d\zeta =$$

$$= 4u^{3/4}\rho\,(1-\sqrt{u})\,(1+\sqrt{u})^{1/2}\int_0^1 \sqrt{(1-t^2)\left(1+\frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}\,t^2\right)}\,dt. \tag{27,18}$$

Если $\delta_0 \gg 1$, то коэффициент $|R_0| = 1 - e^{-\delta_0}$ очень близок к единице. Интерес поэтому представляет случай, когда $\delta_0 \lesssim 1$. При $\rho = \frac{\omega}{ca} \gg 1$, т. е. для толстого слоя, это может иметь место только при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \ll 1$. Тогда выражение (27,18) принимает вид:

$$\delta_0 = 4\frac{\omega}{ca}u^{3/4}\int_0^1 \sqrt{1-t^4}\,dt = 3{,}5\frac{\omega}{ca}u^{3/4}, \quad u \ll 1, \tag{27,19}$$

---

*) Необходимость обходить точки $\zeta_{10}^{(-)}$ и ζ_∞ два раза связана с аналитичностью функции $n_1(\zeta)$ лишь на двулистной поверхности; на рис. 27,4 это обстоятельство не учтено.

так как $\int_0^1 \sqrt{1-t^4}\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \approx 0{,}875$ ($\Gamma(x)$ — гамма-функция). В то же время согласно (27,16) при $u \ll 1$ получим $\delta_0 = \pi\frac{\omega}{ca}u^{3/4}$.

Результат (27,19), по-видимому, довольно точен, несмотря на приближенный характер метода, приводящего к формулам (27,18) и (27,19), при сближении точек $\zeta_{10}^{(-)} = -\sqrt{u}\,(1-\sqrt{u})$ и ζ_∞. Это заключение можно сделать по следующей причине. Формула (27,16) для слоя типа (27,11) получена в результате точного решения волнового уравнения. В то же время применение общего выражения (27,18), т. е. выражения $\delta_0 = -2i\rho\int_{\zeta_{10}^{(-)}}^{\zeta_\infty} n_1\,d\zeta$, к слою (27,11) опять дает эту же формулу (27,16). Таким образом, видимо, для рассматриваемых задач и им подобных метод фазовых интегралов фактически позволяет получить точные формулы для $|R|$ и $|D|$.

Второй вывод, который можно сделать, состоит в том, что замена слоя (27,15) на соответствующий слой типа (27,11) приводит (по крайней мере, при $u \ll 1$) к весьма близким выражениям для δ_0 (замена коэффициента 3,5 в (27,19) на коэффициент $\pi = 3{,}14$ в (27,16) при $u \ll 1$).

При учете отражения от второго нуля $v_{10}^{(+)} = 1+\sqrt{u} = \zeta_{10}^{(+)} + 1 - u$, $\zeta_{10}^{(+)} = \sqrt{u}\,(1+\sqrt{u})$, метод фазовых интегралов приводит к формулам:

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= e^{i\frac{\pi}{2}}\left[1-e^{-\delta_0}\left(1-e^{-2iS}\right)\right],\\ |R_0|^2 &= 1-4e^{-\delta_0}\left(1-e^{-\delta_0}\right)\sin^2 S,\\ S &= \rho\int_{\zeta_\infty}^{\zeta_{10}^{(+)}} n_1\,d\zeta = 2\rho u^{3/4}\left(1+\sqrt{u}\right)\left(1-\sqrt{u}\right)^{1/2}\times\\ &\qquad\times\int_0^1\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1+\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}\,t^2\right)}\,dt, \end{aligned}\right\}\qquad(27{,}20)$$

где δ_0 по-прежнему определяется выражением (27,18).

Если расстояние между полюсом $\zeta_\infty = 0$ и нулями $\zeta_{10}^{(\pm)}$ велико, из (27,20) получается, конечно, правильный результат $R_0 = e^{i\pi/2}$. Из (27,20) получается правильное значение $R_0 = e^{i\pi/2}$ и при $u \to 0$, когда среда становится изотропной и имеет место полное отражение от слоя $\varepsilon = 1 - v$. Этот результат не вполне тривиален, поскольку метод фазовых интегралов не может, вообще говоря, считаться пригодным при сближении особых точек.

При $u \ll 1$ (см. (27,19)) получим:

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{\delta_0}{2} = 1{,}75\frac{\omega}{ca}u^{3/4}, \\ |R_0|^2 &= 1 - 4e^{-\delta_0}\left(1 - e^{-\delta_0}\right)\sin^2\frac{\delta_0}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (27{,}21)$$

Коэффициент отражения $|R_0|^2$ как функция δ_0 в этом приближении изображен на рис. 27,5. Минимальное значение $|R_0|^2$ равно приблизительно 65%, т. е. в резонансной области теряется максимум 35% падающей энергии. При неучете же отражения от второго нуля, как указывалось, поглощается не более 25% падающей энергии. Сказанное относится к предельному случаю $s \to 0$. При $s \neq 0$ расчет также может быть проведен, причем в методе фазовых интегралов при $s \ll 1$ полное поглощение просто складывается из вычисленного выше резонансного поглощения и поглощения, испытываемого волной на пути до точки отражения $\zeta_{10}^{(-)}$ и обратно.

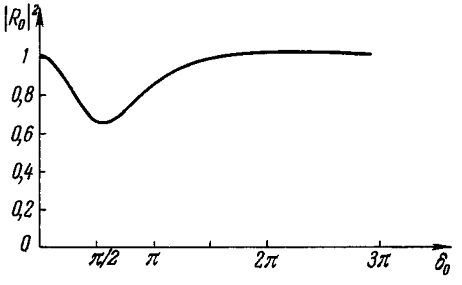


Рис. 27,5. Коэффициент отражения $|R_0|^2$ в зависимости от параметра δ_0.

Для угла $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ до тех пор, пока можно пренебречь взаимодействием между нормальными волнами, задача об отражении и прохождении волн при наличии резонансной области отличается при разных α лишь видом функций $n_{1,2}^2(v, u, s, \alpha)$ в волновом уравнении типа (27,1). Метод фазовых интегралов приводит при этом к результатам (27,17), (27,20) с заменой $n_1\left(v, u, \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ на $n_{1,2}(v, u, \alpha)$.

Механизм резонанса. Эффект «разбухания» поля в магнитоактивной плазме. Поглощение энергии вблизи полюса функции $\varepsilon'_{\text{эфф}}$ называлось выше резонансным, по сути дела, лишь по аналогии с резонансным поглощением гармонического осциллятора. В действительности же для реальных сред здесь имеет место не аналогия, а одно и то же явление, изучаемое в разных условиях. Особенно просто это увидеть для изотропной среды, состоящей из совокупности гармонических осцилляторов с собственной частотой ω_i, когда $\varepsilon' = \varepsilon - i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega} = 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega_i^2 - \omega^2 + i\omega\nu_{эфф})}$ (см. (22,18)). Если изменять частоту падающего излучения ω, то поглощаемая осцилляторами энергия σE^2 изображается в зависимости от ω резонансной кривой $\frac{\text{const}\cdot E^2}{(\omega-\omega_i)^2 + \left(\frac{\nu_{эфф}}{2}\right)^2}$ (принято, что $|\omega - \omega_i| \ll \omega_i$). Пусть теперь частота ω постоянна, но собственная частота ω_i меняется в зависимости от координаты z. Ясно тогда, что результат будет такой же, как в предыдущем случае, только резонансная кривая «растянется» не в шкале частот ω, а вдоль координаты z. Для осцилляторов такая постановка задачи несколько искусственна, но в неоднородной магнитоактивной плазме именно с ней приходится иметь дело. Роль собственных частот при этом играет частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N(z)}{m}}$. В полном согласии с этим в точках $v_{1,\,2\infty}$, где $\tilde{n}^2_{1,2} \to \infty$, как раз появляются плазменные волны (см. § 12).

При переходе к изотропному случаю $v_{1,\,2\infty} \to 1$, и плазменная волна существует только при $v = 1$. При нормальном падении на изотропный слой плазменная волна, однако, не возбуждается. Поэтому резонансный эффект в изотропной среде и имеет место только при наклонном падении волны с $E_z \neq 0$ (см. § 20).

В магнитном поле плазменная волна в окрестности точки $v_{1,2\infty}$ может при $\alpha \neq 0$ возбуждаться и при нормальном падении. Это связано с тем, что (см. (11,28))

$$E_z = -i\,\frac{\sqrt{uv}\sin\alpha}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha}\,E_x + \frac{uv\cos\alpha\sin\alpha}{u-(1-v)-uv\cos^2\alpha}\,E_y,$$

и, следовательно, в большинстве случаев $E_z \neq 0$ и при нормальном падении $\left(\text{исключение составляют обе нормальные волны при } \alpha = 0 \text{ и обыкновенная волна при } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. В частности, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ для необыкновенной волны $E_x \neq 0$, $E_y = 0$ и

$$E_z = -\frac{i\sqrt{uv}}{u-(1-is)(1-is-v)}\,E_x, \tag{27,22}$$

где учтено поглощение (см. (10,20)).

Итак, из физических соображений ясно, что эффект «разбухания» волнового поля, имеющий место в изотропной плазме вблизи точки $\varepsilon = 0$ (т. е. при $v \approx 1$) для наклонного падения волны с $E_z \neq 0$, в магнитоактивной плазме должен наблюдаться вблизи точек $\tilde{n}_{1,2}^2 \to \infty$ (т. е. при $v \approx v_{1,2\infty}$) как при нормальном, так и при наклонном падении. Далее, очевидно, что «разбухание» при прочих равных условиях тем больше, чем ближе точка $\tilde{n}_{1,2}^2 \to \infty$ к точке отражения. При нормальном падении волны 1 в точке отражения $\tilde{n}_1^2 = 0$ и $v_{10}^{(-)} = 1 - \sqrt{u}$. Для наклонного падения точка отражения, определяемая условием $n_{1,2} = \sin \theta_0$, лежит ниже, чем при нормальном падении, и, следовательно, эффект «разбухания» поля менее выражен *). В условиях ионосферы и короны, т. е. для толстых слоев, точки $v_{1,2\infty}$ и v_{10} или $v_{20} = 1$ близки друг к другу лишь при небольших значениях u. В то же время при $u \to 0$ эффект для нормального падения исчезает, так как $E_z \to 0$. Для наклонного падения эффект при $u \to 0$ становится, конечно, таким же, как для изотропной плазмы. Такова довольно ясная в физическом отношении картина.

Получение же количественных результатов при наличии магнитного поля в общем случае остается еще нерешенной задачей. Для нормального падения и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ вопрос о «разбухании» поля вблизи точки $v_{1\infty} = 1 - u$ может быть для линейного слоя выяснен путем решения уравнения (27,15). В самой окрестности полюса это уравнение эквивалентно волновому уравнению для слоя (27,9), т. е. можно положить $2u - \zeta + \frac{u(1-u)}{\zeta} \approx \frac{u(1-u)}{\zeta}$. При этом, как ясно из (27,10), поле E_x в самой точке полюса конечно. Но отсюда и из (27,22) следует, что в полюсе

$$E_z = \frac{C}{u+v-1+is(1+u)} = \frac{C}{az'+is(1+u)}, \qquad (27,23)$$

где поглощение считается малым ($s^2 \ll 1$) и положено $u + v - 1 = az'$ ($az' = \zeta$ при $s = 0$).

Этот результат [253] вполне соответствует формуле (20,19) для изотропной плазмы. Постоянная C в (27,23) стремится к нулю при $u \to 0$ (это сразу ясно уже из формулы (27,22), согласно которой при $u = 0$ будет $E_z = 0$). Далее, как следует и из соответствующего расчета для изотропной среды (см. (20,14)), и из более общих соображений, постоянная C должна определяться множителем

$$C \sim e^{-\left|\frac{\omega}{ca}\int\limits_{\zeta_{10}^{(-)}}^{\zeta_\infty} n_1\,d\zeta\right|} = e^{-\frac{\delta_0}{2}}, \qquad (27,24)$$

---

*) При $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ и $\alpha \neq 0$ сказанное нуждается в известном уточнении в связи с несовпадением точек отражения для луча и для волновой нормали (см. § 29).

который характеризует затухание волны на пути от точки отражения $\zeta_{10}^{(-)}$ до полюса $\zeta_\infty = 0$.

Случай земной ионосферы. Для ионосферных слоев, где $\nu_{\text{эфф}} \geqslant 10^3$ и магнитное поле $H^{(0)} \sim 0{,}5$ *эрст*, эффект «разбухания» поля ничтожно мал. Дело в том, что значение $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$ нельзя сделать очень малым, поскольку частота ω не должна превосходить критической частоты слоя $\omega_{\text{к}}$, иначе полюс функции $\tilde{n}_1^2$ вообще будет отсутствовать. Для F-слоя $2\pi f_{\text{к}} = \omega_{\text{к}} \leqslant 10^8$ ($\lambda_{\text{к}} \geqslant 20 \div 30$ *м*) и при $\omega_H \sim 8 \cdot 10^6$ ($H^{(0)} \sim 0{,}5$ *эрст*) $u \geqslant 10^{-2}$. При $u \ll 1$ согласно (27,19) и (27,24)

$$C \sim e^{-1{,}75 \frac{\omega}{ca} u^{\frac{3}{4}}}. \tag{27,25}$$

Отсюда при $\omega \sim 10^8$, $a \sim 10^{-7}$ и $\omega_H \sim 8 \cdot 10^6$ получаем $C \sim e^{-1000}$. В изотропной же плазме эффект «разбухания» поля мог быть более значительным только потому, что, уменьшая угол падения θ_0, что эквивалентно уменьшению u, можно было сблизить точку отражения $n(z_0) = \sin\theta_0$ и полюс функции $\varepsilon'_{\text{эфф}}$, расположенный при $n(z_\infty) = 0$.

Таким образом, для земной ионосферы, по крайней мере при регулярном ходе ионизации, разбухание поля вблизи точек $\tilde{n}_{1,2} \to \infty$ не играет никакой роли. В условиях солнечной короны, когда частоты ω выше, а поле $H^{(0)}$ может быть очень слабым, этот эффект иногда мог бы оказаться более существенным.

Отметим, что при рассмотрении с обсуждаемой точки зрения магнитоактивной плазмы и, в частности, в применении к ионосфере может оказаться существенным факт несовпадения направления групповой скорости $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и направления волнового вектора $\boldsymbol{k}$. В результате такого несовпадения импульс (волновой пакет), падающий нормально на слой, движется в плазме под углом θ к нормали (нормаль к слою здесь совпадает с $\boldsymbol{k}$; θ есть угол между $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и $\boldsymbol{k}$). Поэтому точка (область) отражения импульса от слоя, вообще говоря, смещена в сторону от точки падения импульса на слой. Конечно, для строго плоскопараллельного слоя (при этом свойства слоя зависят лишь от z, где ось z направлена перпендикулярно к слою) отмеченное обстоятельство при расчетах учитывается автоматически и не играет особой роли. Однако в реальных условиях несовпадение направлений нормали и луча может сильно изменить ситуацию. Особенно это относится к случаю, когда угол θ велик, как это имеет место при приближении к точке $n_{1,2}^2 \to \infty$ (при пренебрежении соударениями и $n_{1,2}^2 \to \infty$ угол $\theta \to \frac{\pi}{2}$; см. § 35 и [105]).

Учет пространственной дисперсии и нелинейных эффектов. Компонента поля волны E_z и энергия поля в точке $\tilde{n}^2_{1,2} \to \infty$ становятся конечными не только при учете соударений (т. е. при $s \neq 0$ в формуле (27,23)), но и при учете пространственной дисперсии и нелинейных эффектов. Положение здесь по существу такое же, как в изотропной плазме (см. § 20). Различие состоит лишь в том, что при наличии магнитного поля плазменные волны выступают не как изолированная ветвь волн, а непосредственно примыкают к ветвям волны, для которой $\tilde{n}^2 \to \infty$. По последней причине физически совершенно ясно, что при учете пространственной дисперсии бегущая к полюсу волна просто переходит в плазменную (см. § 12). Плазменные же волны затухают и при отсутствии соударений. Впрочем, если принять во внимание наличие даже небольшого числа соударений, можно утверждать, что в конце концов вся поглощаемая энергия переходит в тепло.

§ 28. Эффект «утраивания» отраженных сигналов (взаимодействие нормальных волн при малых углах α)

Область малых углов α между магнитным полем и волновой нормалью. Картина явления. При малых углах α между направлением внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и волновым вектором $\boldsymbol{k}$ (при рассматриваемом нормальном падении вектор $\boldsymbol{k}$ направлен по оси z) имеет место взаимодействие между обыкновенной и необыкновенной волнами в области точки $v_{20} = \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} = 1$. Об особом характере распространения волн при малых α речь уже была (см. §§ 11, 12, 23 и 25). Повторим поэтому лишь кратко, в чем здесь дело, на примере радиосигналов, отражающихся от неоднородного слоя (например, от ионосферы).

При продольном распространении ($\alpha = 0$) радиосигналы отражаются от точек $v_{10}^{(\pm)} = 1 \pm \sqrt{u}$; если же угол α достаточно велик, то отражение происходит от точек $v_{10}^{(-)} = 1 - \sqrt{u}$ и $v_{20} = 1$ (см. рис. 28,1, *а*, где рассматривается случай $u < 1$ и предполагается, что частоты меньше критических). В соответствии с этим запаздывание обоих сигналов друг относительно друга при продольном распространении значительно больше, чем когда $\alpha \neq 0$. Формально, если опираться на кривые $n_{1,2}(v)$, непрерывного перехода от случая $\alpha \neq 0$ к случаю $\alpha = 0$ нет, т. е. отражение обыкновенного сигнала должно скачком перейти от точки v_{20} к точке $v_{10}^{(+)}$. Физически же ясно, что переход должен быть непрерывным, и будет наблюдаться следующее.

При $v < 1$ волна 1 (необыкновенная волна) во всех случаях распространяется лишь до точки $v_{10}^{(-)}$, где претерпевает полное отражение. Что касается обыкновенной волны 2, то, пока угол α

достаточно велик, имеет место ее полное отражение от точки $v_{20} = 1$. Однако при уменьшении угла α геометрическая оптика в области $v \approx 1$ становится неприменимой к волнам обоих типов, основываться на рассмотрении кривых $n_{1,2}(v)$ нельзя, и будет происходить лишь частичное отражение волны 2 от области $v \approx 1$. Частично же волна пойдет дальше в форме волны типа 1, которая как раз может распространяться при $v \geqslant v_{1\infty}$. То, что

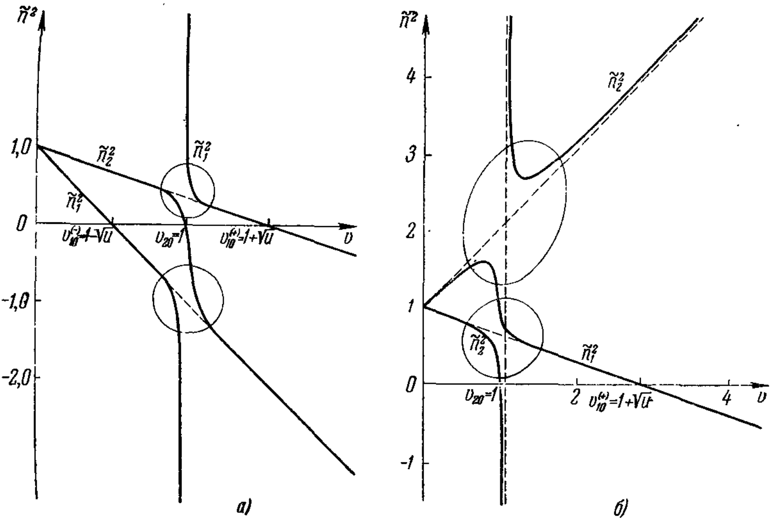


Рис. 28.1. Функции $\widetilde{n}_{1,2}^2$ при малых углах α (схематический рисунок; пунктир относится к углу $\alpha=0$): *а*) $u < 1$; *б*) $u > 1$.

подобный переход возможен, делается понятным из рассмотрения рис. 28,1, *а*, на котором ясно, что при $\alpha \to 0$ кривые u_1 и n_2 очень близко подходят друг к другу, так что волны 1 и 2 обладают в области перехода почти одинаковыми свойствами (эти области обведены кружками). Последнее относится не только к фазовой скорости, определяемой показателем преломления $n_{1,2}$, но и к состоянию поляризации, так как согласно рис. 11.12 при малом угле α поляризации волны 2 при $v \leqslant 1$ и волны 1 при $v \geqslant 1$ очень близки.

Распространяющаяся вверх (при $v > 1$) волна типа 1 полностью отразится в точке $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$ и пойдет обратно вниз (предполагается, что слой простирается на достаточное расстояние в сторону значений v, бо́льших $v_{10}^{(+)}$). Идущая вниз волна 1 в области $v \approx 1$ частично пройдет дальше, превратившись в волну типа 2, и частично поглотится в резонансной области. Отражаться от этой области волна 1, идущая сверху, не будет, как это следует из решения уравнений и вполне аналогично отсутствию отражения в родственных примерах, обсуждавшихся в § 27.

В результате, если речь идет о радиозондировании ионосферы, будут наблюдаться не два, а три отраженных сигнала — в этом и состоит эффект «утраивания» сигналов. Как будет показано ниже, при пренебрежении поглощением (кроме резонансного поглощения) амплитуда третьего сигнала $|E_3|$ в сумме с амплитудой второго сигнала $|E_2|$ равна амплитуде падающей волны $|E_0|$. Соответствующая картина схематически изображена на рис. 28,2, где $|E_1|$ — амплитуда первого отраженного сигнала (отражение от точки $v_{10}^{(-)} = 1 - \sqrt{u}$), которая считается равной амплитуде $|E_0|$ падающей обыкновенной волны *).

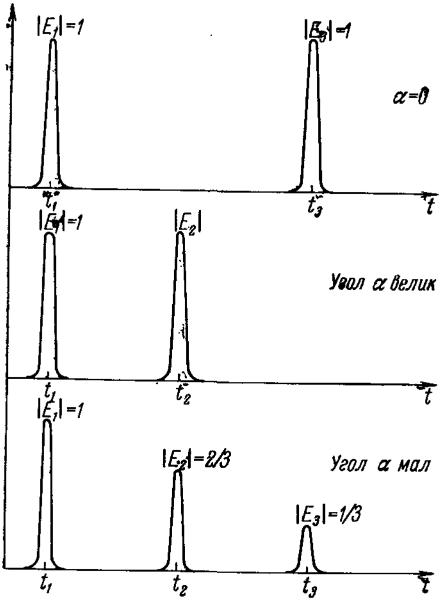


Рис. 28,2. Эффект «утраивания» отраженных сигналов при $u<1$ и разных углах α (схематически).

Если $u>1$, то при $\alpha=0$ имеется только один сигнал, отраженный от точки $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$ (см. рис. 28,1, *б*). При достаточно большом α имеются два сигнала равной интенсивности (поглощением пренебрегается, амплитуда падающих волн типов 1 и 2 считается одинаковой). С уменьшением угла α, как будет выяснено в конце этого параграфа, имеется уже несколько отраженных сигналов, причем интенсивность всех этих сигналов, кроме одного, уменьшается с уменьшением угла α и стремится к нулю при $\alpha \to 0$. Существенно, что при $\alpha = 0$ одна из волн свободно проходит через слой, а при малых углах α происходит частичное просачивание этой волны опять-таки за пределы слоя.

---

*) Под амплитудами выше понимаются, собственно, модули амплитуд. По оси абсцисс на рис. 28,2 отложено время прихода сигнала на Землю, причем это время для первого отраженного сигнала во всех случаях условно считается одинаковым; на рисунке изображен частный случай, когда $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$ и при малом угле α амплитуды равны $|E_2| = \frac{2}{3}$ и $|E_3| = \frac{1}{3}$.

Этот эффект весьма важен с точки зрения возможности прохождения через ионосферу длинных волн, для которых $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} > 1$, но частота ω намного ниже критической частоты $\omega_{\text{к}} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_{\max}}{m}}$ для обыкновенной волны.

Эффекты «утраивания» и «просачивания» радиоволн через слои магнитоактивной плазмы представляют большой интерес не только в земной ионосфере, но также и в ионосферах других планет и в солнечной короне. Этим эффектам посвящено довольно большое количество работ (см. [234], а также [32, 122, 197, 237, 255, 256—260]; экспериментальные данные приведены в [255, 261—263], роль наклонного падения обсуждается в статьях [263]).

В случае «утраивания», как сказано, в области $v \approx 1$ геометрическая оптика одновременно неприменима к обеим волнам и приближенные решения типа исследованных в § 25 пригодны быть не могут, как это ясно уже из условия (23,19). Таким образом, для вычисления коэффициента отражения $|R|$ нужно обратиться к уравнениям (23,2). Решение их в общем виде не представляется возможным или, точнее, должно быть весьма сложным, и мы прибегнем поэтому к приближенным методам.

Решение задачи методом возмущений (область очень малых углов α). Начнем со случая, когда амплитудный коэффициент отражения R весьма мал, что имеет место при достаточно малых углах α (см. [32], § 79). Итак, пусть

$$|R| \ll 1. \tag{28,1}$$

За нулевое приближение примем решение $F_{\pm}^{(0)}$ уравнений для продольного распространения, справедливых при $\alpha = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2F_{\pm}^{(0)}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}(n_{\pm} - i\varkappa_{\pm})^2 F_{\pm}^{(0)} = 0, \\ &(n_{\pm} - i\varkappa_{\pm})^2 = 1 - \frac{v}{1 - is \mp \sqrt{u}}. \end{aligned}\right\} \tag{28,2}$$

Если поглощение отсутствует, то $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} = 0$. Однако в рассматриваемом случае в рамках используемого метода пренебречь поглощением с самого начала нельзя, это можно будет сделать лишь в конечном выражении для $|R|$ *). Если угол α достаточно мал, т. е.

---

*) Необходимость учитывать поглощение объясняется тем, что при $s = 0$ в фигурирующих ниже выражениях (см. (28,11) и (28,13)) появляется расходящийся интеграл. Введение поглощения, которое затем можно стремить к нулю, эквивалентно указанию пути, по которому нужно при интегрировании обходить особую точку. Неучет этого обстоятельства привел к тому, что в [237] допущена ошибка (в частности, в выражении для R пропущен множитель 2), исправленная в [32], § 79.

$$\alpha \ll 1, \tag{28,3}$$

то условие (28,1) должно выполняться и естественно искать решение уравнений (23,2) в виде:

$$F_\pm = E_x \pm iE_y = F_\pm^{(0)} + F_\pm^{(1)}, \tag{28,4}$$

где

$$|F_\pm^{(1)}| \ll |F_\pm^{(0)}|. \tag{28,5}$$

Как можно показать, исходя из (23,2), величина $F_\pm^{(1)}$ удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{d^2F_\pm^{(1)}}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{v}{1-is\mp\sqrt{u}}\right)F_\pm^{(1)}=$$
$$=\frac{\alpha^2 v}{[(1-is)^2-u](1-is-v)-\alpha^2uv}\left[u\frac{d^2F_\pm^{(0)}}{dz^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\alpha^2}{2}\sqrt{u}(v-1+is)F_\pm^{(0)}+\frac{\omega^2}{2c^2}uF_\pm^{(0)}\right]; \tag{28,6}$$

здесь в силу (28,3) в (23,2) положено $\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2}$ и $\cos^2\alpha = 1-\alpha^2$, т. е. проведено разложение в ряд с точностью до членов порядка α^2.

Для конкретизации задачи примем, что неоднородная среда занимает некоторую область значений v вблизи точки $v=1$, так что

$$v = 1+az, \quad -z_0 \leqslant z \leqslant z_0, \quad az_0 \ll 1, \tag{28,7}$$

а при $|z|>z_0$ среда однородна, поглощение в ней отсутствует и ее показатель преломления равен

$$n_2^2 = n_2^2(v=1) \equiv n_-^2(v=1) = 1-\frac{1}{1+\sqrt{u}}. \tag{28,8}$$

В нулевом приближении будем в согласии с характером рассматриваемой задачи при $u<1$ считать, что в среде распространяется волна типа 2 (типа минус), бегущая вверх, т. е. волна

$$F_-^{(0)} = e^{-i\frac{\omega}{c}n_2z}. \tag{28,9}$$

Волна $F_-^{(0)}$ есть по своему типу волна, которая в случае неоднородной среды отражается от точки $v_{10}^{(+)} = 1+\sqrt{u}$. Для нас здесь волна, отраженная от точки $v_{10}^{(+)}$, интереса не представляет, тем более, что волны одного типа «минус», но разных направлений, в области $v\approx 1$ независимы. В (28,9) не учтено также поглощение, которое мы считаем малым и учитываем в уравнении для $F_\pm^{(1)}$ только потому, что там нельзя пренебречь даже малым поглощением. Подставляя (28,9) в (28,6) и пренебрегая членами порядка s по сравнению с единицей, в частности, полагая в левой части уравнения

$$\left(1-\frac{v}{1-is+\sqrt{u}}\right)=\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{u}}\right)=n_2^2,$$

для интересующей нас волны $F_-^{(1)}$ имеем:

$$\frac{d^2F_-^{(1)}}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}n_2^2F_-^{(1)}=\frac{\alpha^2u\omega^2e^{-i\frac{\omega}{c}n_2z}}{2c^2\left(1+\sqrt{u}\right)^2\left(az+is+\frac{\alpha^2u}{1-u}\right)}=\frac{Qe^{-i\frac{\omega}{c}n_2z}}{az+is+\frac{\alpha^2u}{1-u}}. \qquad (28,10)$$

Общее решение этого уравнения в области $-z_0\leqslant z\leqslant z_0$, где оно справедливо, таково (считаем, что s не зависит от z):

$$F_-^{(1)}=C_1e^{-i\frac{\omega}{c}n_2z}+C_2e^{+i\frac{\omega}{c}n_2z}+\frac{Qe^{-i\frac{\omega}{c}n_2z}}{2\frac{\omega}{c}in_2a}\left\{\frac{1}{2}\ln\left[\frac{\left(-az_0+\frac{\alpha^2u}{1-u}\right)^2+s^2}{\left(az+\frac{\alpha^2u}{1-u}\right)^2+s^2}\right]+i\,\mathrm{arctg}\left[\frac{az+\frac{\alpha^2u}{1-u}}{s}\right]+i\,\mathrm{arctg}\left[\frac{az_0-\frac{\alpha^2u}{1-u}}{s}\right]\right\}+\frac{Qe^{i\frac{\omega}{c}n_2z}}{2i\frac{\omega}{c}n_2}\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{e^{-2i\frac{\omega}{c}n_2z}}{az+\frac{\alpha^2u}{1-u}+is}dz. \qquad (28,11)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 должны быть определены из граничных условий, учитывающих, что при $z>z_0$ должна быть только проходящая волна, а при $z<-z_0$ — волны падающая и отраженная (рис. 28,3), т. е.

$$\left.\begin{aligned}&z>z_0: && F_-=De^{-i\frac{\omega}{c}n_2z},\\&z<-z_0: && F_-=e^{-i\frac{\omega}{c}n_2z}+Re^{i\frac{\omega}{c}n_2z}.\end{aligned}\right\} \qquad (28,12)$$

При $z=\pm z_0$ поле $F_-=F_-^{(0)}+F_-^{(1)}$ и его первая производная должны быть непрерывны, откуда

$$\left.\begin{aligned}&C_2=R=-\frac{Q}{2i\frac{\omega}{c}n_2}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\frac{e^{-2i\frac{\omega}{c}n_2z}}{az+is}dz,\quad C_1=0,\\&D=1-\frac{Q}{\frac{\omega}{c}n_2a}\,\mathrm{arctg}\frac{az_0}{s},\end{aligned}\right\} \qquad (28,13)$$

где везде пренебрежено членом $\frac{\alpha^2 u}{1-u}$, что законно, если $\frac{\alpha^2 u}{1-u} \ll az_0$. При $\frac{az_0}{s} \to \infty$, т. е. при достаточно малом поглощении s и

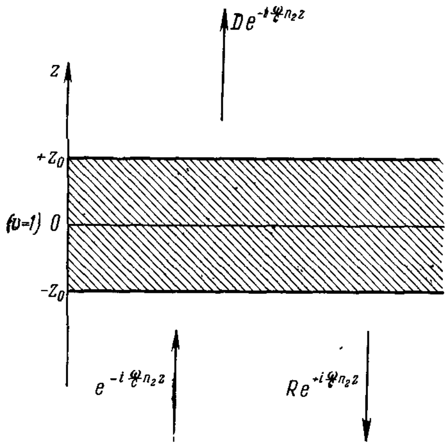

$De^{-i\frac{\omega}{c}n_2 z}$
z
$+z_0$
$(v=1)\ 0$
$-z_0$
$e^{-i\frac{\omega}{c}n_2 z}$
$Re^{+i\frac{\omega}{c}n_2 z}$

Рис. 28,3. Отражение от слоя неоднородной плазмы при $\alpha \ll 1$.

не слишком малой толщине неоднородного слоя z_0, $\operatorname{arctg}\frac{az_0}{s} \to \frac{\pi}{2}$, и мы имеем:

$$D = 1 - \frac{\pi Q}{2\frac{\omega}{c}n_2 a} = 1 - \frac{\pi\omega u\alpha^2}{4cn_2 a\,(1+\sqrt{u})^2} = 1 - \frac{\pi\omega u^{\frac{3}{4}}\alpha^2}{4c\,(1+\sqrt{u})^{3/2}\left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}; \tag{28,14}$$

здесь учтено, что

$$n_2^2(v=1) = \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$$

и

$$a = \left(\frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1} = \left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1},$$

поскольку вблизи точки $v=1$

$$v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1 + \left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1} z = 1 + az.$$

Амплитудный коэффициент отражения R для достаточно толстого слоя $(-z_0, z_0)$, когда $\frac{2\omega}{c}n_2 z_0 \gg 1$ и $az_0 \gg s$ (одновременно, по предположению (28,7), $az_0 \ll 1$), стремится с верхнему пределу, равному

$$|R|_M = 2(1-D) = \frac{\pi\omega u^{\frac{3}{4}}\alpha^2}{2c(1+\sqrt{u})^{3/2}\left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}, \qquad (28,15)$$

так как при $s \to 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2i\frac{\omega}{c}n_2 z}}{z+i\frac{s}{a}}\,dz = -2\pi i.$$

Практически всегда можно считать, что $|R| \approx |R|_M$; так, например, при $z_0 \sim 10^5$ *см* и $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega} \sim 6\cdot 10^3$ *см* величина $2\frac{\omega}{c}n_2 z_0 \sim 10 \div 100$ и для $a \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$, с одной стороны, выполнено условие (28,7) и, с другой стороны, как можно показать,

$$|R|_M - |R| \sim \frac{|R|_M}{2\frac{\omega}{c}n_2 z_0} \ll |R|_M.$$

Поэтому ниже используется только величина $|R|_M$, причем индекс M будет опускаться.

Даже в рассматриваемом пределе $s \to 0$ общее поглощение в слое конечно: поглощаемая в слое энергия пропорциональна выражению

$$|A|^2 = [1 - (|D|^2 + |R|^2)] \approx |R|,$$

так как, по предположению, $|R| \ll 1$. Этот результат, полученный в [32], § 79, подобен обсуждавшемуся в § 27 и имеет, конечно, ту же резонансную природу (в уравнении (28,10) правая часть имеет полюс первого порядка). Впрочем, в рассматриваемом случае взаимодействия волн при малых углах α ситуация несколько сложнее, о чем еще пойдет речь ниже.

Амплитудный коэффициент пропускания D непосредственно определяет напряженность поля E_3 сигнала, отражающегося от точки $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$ (этот сигнал является третьим при $u < 1$; амплитуда падающего сигнала принята равной единице):

$$E_3 = |D|^2 \approx 1 - |R| \approx 1 - \frac{\pi\omega u^{\frac{3}{4}}\alpha^2}{2c(1+\sqrt{u})^{3/2}\left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}} =$$

$$= 1 - \frac{1{,}64\cdot 10^{-20}\omega^3 u^{\frac{3}{4}}\alpha^2}{(1+\sqrt{u})^{3/2}\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}; \qquad (28,16)$$

здесь учтено, что коэффициент $|D|$ для прохождения волны в прямом и обратном направлениях одинаков (в этом можно убедиться путем расчета, аналогичного приведенному; это же следует из более общего результата, обсуждаемого ниже). В качестве примера укажем, что при $u=\frac{1}{4}$ и $\omega=2\omega_H=1{,}76\cdot 10^7$

$$|D|^2\approx 1-17\frac{\alpha^2}{\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}. \tag{28,16a}$$

Амплитуда сигнала, отражающегося от точки $v_{20}=1$, равна:

$$E_2=|R|=1-E_3 \tag{28,17}$$

(этот сигнал является вторым при $u<1$ и первым при $u>1$). Таким образом, поглощение существенно меняет картину распределения интенсивности между сигналами по сравнению с той, которая имела бы место при недопустимом полном игнорировании поглощения (в этом последнем случае, если $E_2=|R|$, то $E_3=1-|R|^2$).

Для параболического слоя $N=N_{\max}\left(1-\frac{z^2}{z_m^2}\right)$ в точке $v=\frac{4\pi e^2N}{m\omega^2}=1$ имеем:

$$\left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}=\frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}=\frac{4\pi e^2N_{\max}}{m\omega^2 z_m^2}2\,|z\,(v=1)|=$$

$$=\frac{2\omega_{\text{к}0}^2}{z_m\omega^2}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_{\text{к}0}^2}}=\frac{2f_{\text{к}0}^2}{z_m f^2}\sqrt{1-\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}. \tag{28,18}$$

Здесь $\omega_{\text{к}0}=2\pi f_{\text{к}0}=\sqrt{\frac{4\pi e^2N_{\max}}{m}}$ — критическая циклическая частота для обыкновенной волны и учтено, что отражение обыкновенной волны с частотой ω, происходящее в точке $v=1$, имеет место при

$$|z\,(v=1)|=z_m\sqrt{1-\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}.$$

В силу (28,18) формула (28,16) для параболического слоя принимает вид:

$$E_3=|D|^2=1-\frac{\pi^2u^{\frac{3}{4}}\frac{z_m}{\lambda_0}\alpha^2\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}{2\left(1+\sqrt{u}\right)^{3/2}\sqrt{1-\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}}. \tag{28,19}$$

При $f=2{,}8\cdot10^6$ ($\omega=1{,}76\cdot10^7$, $\lambda_0\approx10^4$ *см*), $f_H=1{,}4\cdot10^6$, $f_{\text{к}0}=3f=8{,}4\cdot10^6$ и $z_m=10^7=100$ *км*, что отвечает значениям $u=\frac{1}{4}$, $N(v=1)=10^5$ и $\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}\approx0{,}17$, имеем:

$$1-|D|^2=|R|\approx10^2\alpha^2. \tag{28,20}$$

Условие (28,1) означает, что формула (28,20) применима, пока $\alpha^2\ll10^{-2}$, т. е. практически пока $\alpha<2\div3°$. По порядку величины $|R|\sim1$ при $\alpha\sim5°$ и, таким образом, в рассмотренном примере эффект «утраивания» разыгрывается в области углов $\alpha\sim5°$. Однако при вполне возможном (спорадически) значении $\frac{dN}{dz}\sim1$ эта область может достигнуть $10\div20°$, т. е. быть легко доступной для наблюдений (см. также ниже) *). В связи с этим нужно заметить, что, как ясно из качественной картины эффекта «утраивания» (см., в частности, рис. 28,1, *а*), область, в которой происходит переход волны 2 в волну типа 1, есть, грубо говоря, область между точками $v_{20}=1$ и $v_{1\infty}=1-\frac{u\sin^2\alpha}{1-u\cos^2\alpha}$. Ширина этой области равна $\Delta v=v_{20}-v_{1\infty}=\frac{u\sin^2\alpha}{1-u\cos^2\alpha}$, или $\Delta z=\frac{\Delta v}{a}=\frac{u\sin^2\alpha}{a(1-u\cos^2\alpha)}$. При $u=\frac{1}{4}$ и даже большом угле $\alpha=20°$ имеем $\Delta z\approx\frac{0{,}03}{a}=\frac{0{,}03N(v=1)}{\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}$, или для параболического слоя (28,18)

$$\Delta z\approx\frac{0{,}03z_mf^2}{2f_{\text{к}0}^2\sqrt{1-\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}}\sim10^4=100\ \text{м}\ \left(\text{при } z_m\sim100\ \text{км и } \frac{f}{f_{\text{к}0}}=\frac{1}{3}\right).$$

Отсюда ясно, что изменение $\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}$ в зоне всего в несколько сотен метров уже приведет к соответствующему изменению коэффициента пропускания D.

---

*) Если магнитная широта места наблюдения равна θ (т. е. угол между вертикалью и магнитной осью Земли есть $\frac{\pi}{2}-\theta$), то, считая магнитное поле Земли полем диполя, расположенного в ее центре, имеем следующую связь между углом α (углом между вектором $H^{(0)}$ и вертикалью) и углом θ:

$$\cos\alpha=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3\sin^2\theta+1}},\quad \sin\theta=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{4-3\cos^2\alpha}}.$$

Угол $\alpha=5°$ соответствует геомагнитной широте $\theta=80°$, углу $\alpha=20°$ отвечает $\theta\approx54°$.

Вариационный метод (другой предельный случай). В другом более интересном предельном случае, когда

$$|D|^2 \ll 1, \tag{28,21}$$

задачу при $u < 1$ можно решить, выбирая за нулевое приближение стоячую волну типа 2, полностью отражающуюся в области около точки $v_{20} = 1$. Соответствующее решение нулевого приближения в явном виде сразу может быть получено на основании результатов § 25 и решений для изотропного случая (см. §§ 30—32). Для получения коэффициента $|D|^2$ в [234] и [32], § 79 использовался вариационный метод. Нужно отметить, что такой метод не обладает особенной прозрачностью и в целом несомненно уступает методу фазовых интегралов, о котором речь пойдет в следующем разделе. Тем не менее мы кратко остановимся сейчас и на вариационном методе расчета.

Рассмотрим здесь этот вопрос лишь весьма кратко. Система уравнений (23,2) может быть получена из вариационного принципа, т. е. как условие обращения в нуль первой вариации интеграла $I = \int\limits_{z_1}^{z_2} L\,dz$, где L — «функция Лагранжа»:

$$L = -\frac{E'_xE'^*_x + E'_yE'^*_y}{2} + \frac{\omega^2}{c^2}(AE_x + iCE_y)\frac{E^*_x}{2} + \frac{\omega^2}{c^2}(-iCE_x + BE_y)\frac{E^*_y}{2} +$$
$$+ \text{комплексно сопряженное выражение.} \tag{28.22}$$

В (28,22) штрих означает дифференцирование по z, звездочка — комплексно сопряженную величину и коэффициенты A, B и C, разумеется, те же, что и в (23,2). При варьировании функции (28,22) все вариации $\delta E_{x,y}$ и $\delta E^*_{x,y}$ нужно считать независимыми. Например, вариация L по E^*_x равна

$$\delta L = -E'_x\delta E'^*_x + \frac{\omega^2}{c^2}(AE_x + iCE_y)\,\delta E^*_x =$$
$$= \left\{E''_x + \frac{\omega^2}{c^2}(AE_x + iCE_y)\right\}\delta E^*_x - \frac{d}{dz}(E'_x\delta E^*_x). \tag{28,23}$$

Необходимым условием экстремума интеграла $I = \int\limits_{z_1}^{z_2} L\,dz$ является обращение в нуль вариации δI, которая при варьировании величины E^*_x сводится к $\delta I = \int\limits_{z_1}^{z_2}\left\{E''_x + \frac{\omega^2}{c^2}(AE_x + iCE_y)\right\}\delta E^*_x\,dz - [E'_x\delta E^*_x]_{z_1}^{z_2}$. Поскольку вариация δE^*_x произвольная, из условия $\delta I = 0$ следует уравнение $E''_x + \frac{\omega^2}{c^2}(AE_x + iCE_y) = 0$, т. е. первое из уравнений (23,2). Аналогичным образом, варьируя L по E_y^*, получаем и второе из этих уравнений. Кроме того, однако, должны еще обращаться в нуль вариации на границах, т. е., как ясно из выражения для δI, должны равняться нулю величины $[E'_{x,\,y}]_{z_1}^{z_2} = E'_{x,\,y}(z_2) - E'_{x,\,y}(z_1)$. Другими словами, если $[E'_{x,\,y}]_{z_1}^{z_2} = 0$, то уравнения (23,2) обеспечивают обращение в нуль вариации $\delta I = \int\limits_{z_1}^{z_2} \delta L\,dz$, где функция L определена выражением (28,22).

Из сказанного, в согласии с идеей прямых методов вариационного исчисления (см., например, [271]), явствует, что подбор функций, приближающих интеграл I к экстремуму, является вместе с тем способом нахождения приближенного решения системы (23,2).

Будем искать решение системы (23,2) при условии (28,21) в виде:

$$E_{x,\,y} = E_{x,\,y2} + DE_{x,\,y1}, \tag{28,24}$$

где $E_{x,y2}$ — стоячая волна типа 2, т. е. решение, имеющее место при пренебрежении эффектом просачивания волны далеко в область $v > 1$, и $E_{x,\,y1}$ — волна типа 1, распространяющаяся в области $v > v_{1\infty}$. Неизвестной величиной в (28,24) является параметр D, который имеет смысл коэффициента пропускания.

Подставляя (28,24) в (28,22) и выбирая параметр D таким образом, чтобы интеграл $I = \int L\,dz$ был экстремален, мы в силу сказанного получаем приближенное значение коэффициента пропускания. Поскольку исходная функция (28,24), как ясно из физических соображений, при условии (28,21) передает характерные особенности решения задачи, нужно думать, что полученное приближение будет хорошим. Строго доказать это можно лишь, как и в методе Ритца, выбирая пробную функцию типа (28,24), но с двумя неизвестными параметрами и т. д.

Для исследуемого метода решения существенно, чтобы вариация интеграла I на границах z_1 и z_2 обращалась в нуль при любом изменении параметра D. Действительно, только в этом случае, как ясно из сказанного ранее, уравнения (23,2) являются необходимым условием экстремальности интеграла I. На нижней границе z_1, за которую можно выбрать начало слоя, землю и т. д., $E_{x,y1} = 0$ и, таким образом, вариация автоматически исчезает. На верхней границе при $v \sim 1 + \sqrt{u}$ можно считать, что $E_{x,\,y1} \sim e^{-i\frac{\omega}{c}\int n_1 dz}$ и $E_{x,\,y2} = 0$. Вариация I на верхней границе равна $\delta I = -\{E'_x \delta E_x^* + E'^*_x \delta E_x + E'_y \delta E_y^* + E'^*_y \delta E_y\}$ и, как легко видеть, пропорциональна $i\frac{\omega}{c}n_1(z_2)(\delta D^* - \delta D)$. Таким образом, для обращения вариации в нуль нужно считать параметр D вещественным, т. е. отказаться от вычисления фазы проходящей волны (нас это предположение устраивает, и мы его сделаем).

Интеграл I при подстановке в него функции (28,24) экстремален, если $dI/dD = 0$, т. е. если

$$D = -\frac{\int\limits_{z_1}^{z_2} \{E_{y1}^{\prime *}E_{y2}^{\prime} + E_{y1}^{\prime}E_{y2}^{\prime *} + E_{x1}^{\prime *}E_{x2}^{\prime} + E_{x1}^{\prime}E_{x2}^{\prime *} + E_{x2}^{\prime\prime}E_{x1}^{*} + E_{x2}^{\prime\prime *}E_{x1} + E_{y2}^{\prime\prime}E_{y1}^{*} + E_{y2}^{\prime\prime *}E_{y1}\}\,dz}{2\int\limits_{z_1}^{z_2} \{E_{y1}^{\prime}E_{y1}^{\prime *} + E_{x1}^{\prime}E_{x1}^{\prime *} + E_{x1}^{\prime\prime}E_{x1}^{*} + E_{x1}^{\prime\prime *}E_{x1} + E_{y1}^{\prime\prime}E_{y1}^{*} + E_{y1}^{\prime\prime *}E_{y1}\}\,dz}. \tag{28,25}$$

Значение D согласно (28,25) вещественно, и, таким образом, сделанное выше допущение о вещественности D не противоречит методу расчета.

В качестве функций $E_{x,y1,2}$ в (28,24) и (28,25) наиболее правильно было бы выбрать приближенные решения уравнений (23,2), рассмотренные в § 25 (для волны 2, например, речь идет об уравнениях (25,35) — (25,37)). Однако в этом случае решение $E_{x,y1,2}$ для линейного слоя выражается в бесселевых функциях и для дальнейших применений довольно сложно. Вместе с тем в (28,25) наибольшую роль играет не точка $v = 1$, где геометрикооптическое приближение непригодно, а другая точка, отвечающая комплексному значению v (см. ниже). Поэтому естественно сделать дальнейшее приближение, конструируя $E_{x,y1,2}$ из решений геометрической оптики (23,13). При этом волна типа 2, отраженная от точки $v = 1$, в рассматриваемом приближении интереса не представляет и в качестве поля $E_{x,y2}$ можно взять лишь волну типа 2, бегущую вверх. Кроме того, в отношении волны типа 1, которая создается волной типа 2, нужно учесть, что при наличии поглощения ее интенсивность в интересующей нас области с ростом z (или v) должна возрастать. В результате имеем:

$$\left.\begin{aligned} E_{x2} &= \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}\int\limits_0^z (n_2 - i\varkappa_2)\,dz}}{\sqrt{(n_2 - i\varkappa_2)(1 - K_2^2)}}, \quad E_{y2} = K_2E_{x2},\\ E_{x1} &= \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}\int\limits_0^z (n_1 + i\varkappa_1)\,dz}}{\sqrt{(n_1 + i\varkappa_1)(1 - K_1^2)}}, \quad E_{y1} = K_1E_{x1}, \end{aligned}\right\} \tag{28.26}$$

где $n_{1,2}$, $\varkappa_{1,2}$ и $K_{1,2}$ определяются формулами (11,5) и (11,25) и нижний предел в интегралах — точка $z = 0$ — отвечает точке отражения $v_{20} = 1$. Выбор именно этого нижнего предела наиболее удобен и в то же время не изменяет конечного результата, — это ясно уже из того, что выбор другого предела приводит лишь к появлению дополнительного фазового множителя, не могущего сказаться на $|D|^2$.

Единственный момент в (28,26), требующий специальных пояснений, связан с вопросом о том, почему в E_{x1} фигурирует выражение $n_1 + i\varkappa_1$ вместо $n_1 - i\varkappa_1$, как этого можно было бы ожидать. Смысл этой замены состоит в том, что в качестве волны E_{x1} мы выбираем волну, бегущую вверх, но с амплитудой, также нарастающей при удалении от точки $z = 0$. Такой выбор, уже упомянутый выше, диктуется физическим характером задачи.

Дело в том, что с возрастанием поглощения коэффициент пропускания не падает, а возрастает в силу еще большего сближения кривых n_1^2 и n_2^2 (достаточно сказать, что при $\nu = \nu_к$ эти кривые при $v = 1$ просто касаются друг друга). Подобное влияние поглощения и учитывается заменой $n_1 - i\varkappa_1$ на $n_1 + i\varkappa_1$. При этом в рамках рассматриваемого метода против подобной замены нельзя высказать никаких возражений, так как аппроксимирующие решение задачи функции типа (28,24) в известных пределах произвольны, и лучшим является то семейство этих функций, которое приводит к значениям интеграла I, наиболее близким к его точному экстремальному значению.

Не останавливаясь на других аргументах в пользу выбора функций (28,26), заметим, что получаемые с их помощью значения коэффициента пропускания D совпадают со значениями D, вычисляемыми совершенно другим способом (см. ниже).

Подставляя (28,26) в (28,25), получаем выражение для D, содержащее в числителе под знаком интеграла быстро осциллирующие множители. Поэтому точное вычисление D по формуле (28,25) затруднительно, но определение D с точностью до предэкспоненциального множителя весьма просто. Дело в том, что числитель выражения (28,25) имеет вид $\mathrm{Re}\, J$, где

$$J = \int_{z_1}^{z_2} f(z) e^{-i\frac{\omega}{c}\varphi(z)}\, dz, \quad \varphi(z) = \int_0^z [(n_2 - i\varkappa_2] - (n_1 - i\varkappa_1)]\, dz,$$

и $f(z)$ — медленно меняющаяся функция z. Интеграл J имеет такой вид, что для его вычисления можно, продолжая подынтегральную функцию в комплексную область, применить метод перевала. В точке перевала, как известно, производная от стоящей в экспоненте функции φ, т. е. производная $\frac{d}{dz}\int_0^z [(n_2 - i\varkappa_2) -$

$-(n_1 - i\varkappa_1)]\,dz$, должна равняться нулю. Отсюда следует, что в точке перевала v_s

$$(n_2 - i\varkappa_2)_{v_s} = (n_1 - i\varkappa_1)_{v_s}. \tag{28,27}$$

Используя выражение (11,5) для $n_{1,\,2} - i\varkappa_{1,\,2}$, находим:

$$v_{s\pm} = 1 - is \pm i\,\frac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2\,|\cos\alpha|} = 1 - is \pm is_\text{к}; \tag{28,28}$$

здесь $s_\text{к} = \dfrac{\nu_\text{к}}{\omega} = \dfrac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2\,|\cos\alpha|}$ — критический параметр, введенный в § 11 (см. (11,41)).

В § 11 было указано, что точки v_s отвечают существенным кратным корням дисперсионного уравнения, когда, помимо равенства (28,27), также совпадают поляризации $K_1 = K_2$. При $s = s_k$ точка $v_s = 1$, т. е. лежит на вещественной оси (речь идет о частоте ω) и, следовательно, может быть достигнута волной при вещественной частоте ω.

При учете поглощения точки v_{20}, $v_{10}^{(\pm)}$ и $v_{1\infty}$, в которых $(n - i\varkappa)_{1,\,2}$ обращаются в нуль или в бесконечность, таковы:

$$\left.\begin{aligned} v_{20} &= 1 - is, \\ v_{10}^{(\pm)} &= 1 - is \pm \sqrt{u}, \\ v_{1\infty} &= 1 - is - \frac{(1 - is)\,u\sin^2\alpha}{(1 - is)^2 - u\cos^2\alpha}\,. \end{aligned}\right\} \tag{28,29}$$

При этом существенно, что точка $v_{1\infty}$, в которой функция $(n_1 - i\varkappa_1)$ обращается в бесконечность, лежит в нижней полуплоскости комплексной переменной v (см. рис. 28,4). Поэтому, трансформируя путь интегрирования в интеграле J, мы можем провести этот путь через точку перевала $v_{s+} = 1 - is + is_\text{к}$, лежащую при $s < s_\text{к}$, т. е. при (для простоты ниже вместо $|\cos\alpha|$ пишем $\cos\alpha$)

$$\nu \equiv \nu_\text{эфф} < \nu_\text{к} = \frac{\omega_H \sin^2\alpha}{2\cos\alpha}\,, \tag{28,30}$$

в верхней полуплоскости, но не можем провести этот путь через перевальную точку $v_{s-} = 1 - is - is_\text{к}$, лежащую в нижней полуплоскости. Итак, определяющая значение интеграла J перевальная точка есть *)

$$v_{s+} = v_s = 1 + i\,(s_\text{к} - s) = 1 + \frac{i\nu_\text{к}}{\omega}\left(1 - \frac{\nu}{\nu_\text{к}}\right) = 1 + i\left(\frac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2\cos\alpha} - \frac{\nu}{\omega}\right). \tag{28,31}$$

---

*) Заметим, что если не вводить поглощения, т. е. считать $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, как это делалось в [234], то точка $v_{1\infty}$ лежит на действительной оси, и вопрос о выборе между точками $v_{s\pm}$ усложняется; в [234] был получен правильный результат, для чего выбиралась точка v_{s-}, но вместо $n_2 - n_1$ использовалась функция $n_2^* - n_1^*$. Удобнее, однако, поступить так, как это сделано здесь, т. е. ввести затухание, в результате чего приходим к (28,31).

Применение метода перевала связано с заменой интегрирования по вещественной оси v (мы предполагаем, что $v = 1 + az$ и, таким образом, комплексные плоскости v и z равноправны) интегрированием по контуру, указанному пунктиром на схематическом рис. 28,4. При этом, как известно, значение J, а значит,

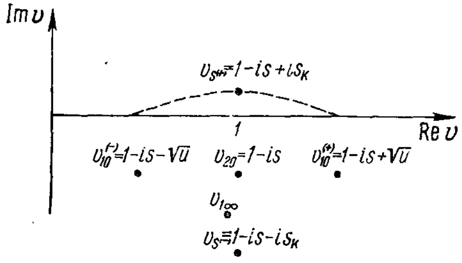


Рис. 28,4. Комплексная плоскость переменной v.

и D, с точностью до предэкспоненциального множителя равно вещественной части подынтегральной функции в точке перевала, так что

$$|D|^2 \sim |J|^2 \sim e^{-2\frac{\omega}{c}\operatorname{Re}\left\{i\int\limits_0^{z_s}[(n_2-i\varkappa_2)-(n_1-i\varkappa_1)]\,dz\right\}} =$$

$$= e^{2\frac{\omega}{c}\operatorname{Im}\int\limits_0^{z_s}[(n_2-i\varkappa_2)-(n_1-i\varkappa_1)]\,dz} = e^{-2\delta}, \qquad (28,32)$$

где Re — вещественная и Im — мнимая части и z_s — значение z в точке v_s.

Теперь остается только вычислить величину

$$2\delta = \frac{2\omega}{c}\operatorname{Im}\int\limits_0^{z_s}[(n_1-i\varkappa_1)-(n_2-i\varkappa_2)]\,dz = \frac{2\omega}{c}\operatorname{Im}\int\limits_1^{v_s}[(n_1-i\varkappa_1)-$$

$$-(n_2-i\varkappa_2)]\,\frac{dv}{a} = \frac{2\omega}{ca}\operatorname{Im} i\int\limits_0^{w_s}[(n_1-i\varkappa_1)-(n_2-i\varkappa_2)]\,dw =$$

$$= 2\frac{\omega w_s}{ca}\operatorname{Re}\int\limits_0^1[(n_1-i\varkappa_1)-(n_2-i\varkappa_2)]\,d\xi, \qquad (28,33)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&v = 1 + az = 1 + iw, \quad \xi = \frac{w}{w_s}, \quad \frac{dv}{dz} = a,\\
&a = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1} = \left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1},\\
&v_s = 1 + i\frac{\nu_{\text{к}}}{\omega}\left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right) = 1 + iw_s,\\
&\nu_{\text{к}} = \frac{\omega_H \sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\omega\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}.
\end{aligned}\right\} \tag{28,34}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
2\delta &= \frac{2\nu_{\text{к}}\left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)\beta}{c\,\frac{4\pi e^2}{m\omega^2}\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}} = \frac{\omega\sqrt{u}\beta\left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)\sin^2\alpha}{c\left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}\cos\alpha} =\\
&= \frac{m\omega^3\sqrt{u}\beta\left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)\sin^2\alpha}{4\pi e^2 c\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}\cos\alpha} =\\
&= 1{,}06\cdot 10^{-20}\beta\omega^3\sqrt{u}\left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)\frac{\sin^2\alpha}{\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}\cos\alpha},
\end{aligned} \tag{28,35}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\beta = \operatorname{Re}\int_0^1 [(n_1 - i\varkappa_1) - (n_2 - i\varkappa_2)]\,d\xi =\\
&\qquad = \operatorname{Re}\frac{1}{\left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)}\int_{\frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}}^1 [(n_1 - i\varkappa_1) - (n_2 - i\varkappa_2)]\,d\eta,\\
&v = 1 + iw, \quad \xi = \frac{w}{w_s}, \quad w_s = \frac{\nu_{\text{к}}}{\omega}\left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right) = s_{\text{к}}\left(1 - \frac{s}{s_{\text{к}}}\right),\\
&s_{\text{к}} = \frac{\nu_{\text{к}}}{\omega} = \frac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}, \quad s = \frac{\nu}{\omega},\\
&\eta = \left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)\xi + \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}} = \frac{(s_{\text{к}} - s)\xi + s}{s_{\text{к}}} = \frac{w_s\xi + s}{s_{\text{к}}},
\end{aligned}\right\} \tag{28,36}$$

$$\left.\begin{aligned}(n-i\varkappa)_{1,2}&=\sqrt{1-\frac{2v(1-v-is)}{2(1-is)(1-v-is)-u\sin^2\alpha\pm\pm\sqrt{u^2\sin^4\alpha+4u(1-v-is)^2\cos^2\alpha}}}=\\&=\sqrt{1-\frac{2i(1+iw_s\xi)(w_s\xi+s)}{2i(1-is)(w_s\xi+s)+u\sin^2\alpha\mp\mp\sqrt{u^2\sin^4\alpha-4u(w_s\xi+s)^2\cos^2\alpha}}}=\\&=\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-\eta^2}+\frac{\eta^2}{2}\operatorname{tg}^2\alpha}{1\mp\sqrt{1-\eta^2}+\frac{i(1-is)\eta}{\sqrt{u}\cos\alpha}}};\end{aligned}\right\}\qquad(28{,}36)$$

здесь верхний знак у корня отвечает волне 2 и нижний — волне 1. При отсутствии поглощения, когда $\nu\equiv\nu_{\text{эфф}}=0$, получим:

$$\left.\begin{aligned}&2\delta=2\delta_0=\frac{2\nu_{\text{к}}\beta_0}{c\left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}=\frac{\omega\sqrt{u}\beta_0\sin^2\alpha}{c\left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}\cos\alpha},\\&\beta=\beta_0=\operatorname{Re}\int_0^1(n_1-n_2)\,d\eta,\\&n_1-n_2=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\eta^2}+\frac{\eta^2}{2}\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\sqrt{1-\eta^2}+\frac{i\eta}{\sqrt{u}\cos\alpha}}}-\\&\qquad\qquad-\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\eta^2}+\frac{\eta^2}{2}\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\sqrt{1-\eta^2}+\frac{i\eta}{\sqrt{u}\cos\alpha}}}.\end{aligned}\right\}\qquad(28{,}37)$$

Учитывая, что при $\eta=0$ разность $n_1-n_2=1$, а при $\eta=1$ $n_1-n_2=0$, нетрудно видеть, что $\beta_0<1$. При малых углах α, как ясно из (28,37), n_1-n_2 и, следовательно, β_0 не зависят от α и определяются лишь величиной $\sqrt{u}=\frac{\omega_H}{\omega}$. Значение β_0 можно получить в результате численного интегрирования. В качестве примера укажем, что при $u=1/4$ и малом α (так что $\cos\alpha\approx1$) $\beta_0\approx0{,}6$. Впрочем, в предположении о близости кривых $n_1(v)$ и $n_2(v)$, когда можно положить $n_1+n_2=2n_2(v=1,\ \alpha=0)=\frac{2\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$, интеграл β_0 можно вычислить [197] и получить:

$$2\delta_0=\frac{\pi\frac{\omega}{ca}u^{3/4}(1+\sqrt{u})^{1/2}}{2(1+\sqrt{u}\cos\alpha)^2}\sin^2\alpha,\quad a=\left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}=\frac{dv}{dz}\qquad(28{,}38)$$

(другими словами, $\beta_0 = \frac{\pi u^{1/4}(1+\sqrt{u})^{1/2}\cos\alpha}{2(1+\sqrt{u}\cos\alpha)^2}$ и в согласии со сказанным при $u=\frac{1}{4}$ и $\cos\alpha=1$ имеем $\beta_0=0{,}6$). Приведенный вывод формулы для $|D|^2$ может заранее претендовать на получение правильного ответа лишь при не слишком малых углах α и только с точностью до некоторого предэкспоненциального множителя. Оказывается, однако, что с довольно высокой точностью при всех углах

$$|D|^2 = e^{-2\delta_0}, \qquad (28{,}39)$$

где $2\delta_0$ определяется выражениями (28,37) и (28,38). Сказанное следует из того факта, что при малых δ_0 (т. е. малых α) формула (28,39) приводит к результату $|D|^2 = 1 - 2\delta_0$, который совпадает с получающимся из (28,14). Действительно, согласно (28,14) и (28,38):

$$|D|^2 \approx 1 - \frac{\pi \frac{\omega}{ca} u^{3/4}\alpha^2}{2(1+\sqrt{u})^{3/2}} = 1 - 2\delta_0, \quad a = \left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}, \qquad (28{,}40)$$

так как при $\alpha \ll 1$ в (28,38) можно положить $\cos\alpha = 1$ и $\sin^2\alpha = \alpha^2$ (к тому же сама формула (28,38) получена в предположении $n_1 + n_2 = 2n_2$, которое заведомо верно именно при малых углах α). Другими словами, предэкспоненциальный множитель в формуле (28,39) определяется (и оказывается равным единице) из соображений предельного перехода к области малых углов α, когда значение $|D|^2$ вычисляется независимым способом.

При малых α, согласно (28,16), модуль амплитудного коэффициента отражения обыкновенной волны от области взаимодействия $|R| = 1 - |D|^2 = 2\delta_0$. По аналогии с переходом от (28,40) к (28,39) можно заключить, что в более общем случае

$$|R| = 1 - |D|^2 = 1 - e^{-2\delta_0}. \qquad (28{,}41)$$

Метод фазовых интегралов. Формула (28,41), а также (28,39) подтверждается в результате расчета, проведенного методом фазовых интегралов [197, 259].

Этот метод основан на представлении решения дифференциального уравнения или системы уравнений в виде общего решения в геометрикооптическом приближении. Например, для уравнения $\frac{d^2E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(z)E = 0$ решение записывается в виде:

$$E = \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon'}}\left(C_1 e^{i\frac{\omega}{c}\int^z \sqrt{\varepsilon'}\,dz} + C_2 e^{-i\frac{\omega}{c}\int^z \sqrt{\varepsilon'}\,dz}\right). \qquad (28{,}42)$$

Если бы удалось корректным образом определить коэффициенты C_1 и C_2 в этом решении, то оно могло бы рассматриваться просто как асимптотическое приближение точного решения задачи. Знания же асимптотики достаточно при вычислении коэффициентов отражения и пропускания для рассматриваемого слоя. Для нахождения C_1 и C_2, не решая самого уравнения, можно воспользоваться тем фактом, что решение $E(z)$ должно быть аналитической функцией, если такой функцией является $\varepsilon'(z)$.

Отсюда действительно возникают некоторые условия для C_1 и C_2, поскольку выражение (28,42) представляет собой комбинацию многозначных функций ($\sqrt{\varepsilon'}$ имеет точку ветвления при $\varepsilon' = 0$; предполагается, что у ε' имеются нули и решается задача, например, об отражении от какого-то слоя). Решение (28,42) может аппроксимировать строгое решение только, если коэффициенты C_1 и C_2 различны в разных секторах комплексной плоскости z. При переходе границ секторов коэффициенты C_1 и C_2 изменяются скачками (этот факт иногда называют явлением Стокса). Сами эти границы (линии Стокса) определяются из требования, чтобы на них функции $e^{\pm i\frac{\omega}{c}\int^{z}\sqrt{\varepsilon'}\,dz}$ принимали вещественные значения.

После полного обхода точек ветвления решение должно остаться неизменным, что и определяет интересующее нас отношение коэффициентов C_1 и C_2 на вещественной оси z. Такова идея, лежащая в основе метода фазовых интегралов. С конкретным использованием этого метода и проведением расчетов можно познакомиться в [105, 197, 198, 272—274] (см. также [77, 254, 256, 258]; в [197] этим методом в качестве примера решена также известная задача об отражении и прохождении волн в случае параболического слоя).

Свое название метод фазовых интегралов получил потому, что при вычислениях в связи с обходом нулей функции ε' или других выделенных точек появляются интегральные выражения для фазы $i\frac{\omega}{c}\oint\sqrt{\varepsilon'}\,dz$ (см., например, (27,17) и ниже). На вопрос о точности метода в общем виде трудно ответить. Во всяком случае правильные (строгие) выражения для $|R|$ и $|D|$ при использовании этого метода могут быть, вообще говоря, получены не только для толстых, но и для тонких слоев [197]. В задаче об отражении от изотропного слоя с максимумом (при отсутствии каких-либо подлежащих обходу точек, кроме двух нулей функции $\varepsilon'(z, \omega)$) такой результат естествен. Ситуация сложнее в задачах, в которых нужно обходить несколько точек, так как явление Стокса имеет место на целом ряде пересекающихся прямых и фактически приходится ограничиться учетом только части этих линий [197, 260].

В задаче об «утраивании» сигналов (при $u < 1$) линии Стокса выходят из перевальных точек $v_{s\pm}$ (см. (28,28)), и уравнения для этих линий можно записать в виде:

$$\arg\left(\pm i \int\limits_{\pm is_{\text{к}}}^{\zeta} \frac{[(n_1 - i\varkappa_1) - (n_2 - i\varkappa_2)]}{2}\, d\zeta\right) = \pi + 2\pi m, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

здесь $\zeta = v - 1 + is = az + is$ (слой в области взаимодействия

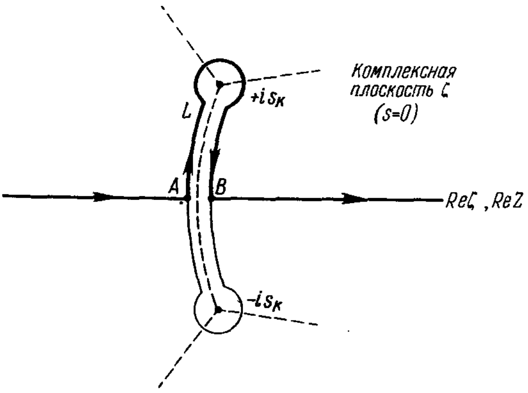


Рис. 28,5. Контур интегрирования в выражении (28,43).

считается линейным); на комплексной плоскости ζ точкам перевала $v_{s\pm}$ отвечают значения $\zeta_{s\pm} = \pm is_{\text{к}}$ (см. рис. 28,5, на котором линии Стокса показаны пунктиром).

Общие результаты при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} < 1$. Если на область взаимодействия слева (со стороны отрицательных значений z и ζ, т. е. из области меньших значений v) падает обыкновенная волна, то появляются отраженная обыкновенная волна (амплитуда R_2) и проходящая необыкновенная волна (амплитуда D_1), причем

$$\left.\begin{aligned} &|R_2| = 1 - e^{-2\delta_0}, \quad |D_1| = e^{-\delta_0}, \\ &\delta_0 = \left|\frac{\omega}{ca} \oint_L \frac{n_1 - n_2}{4}\, d\zeta\right| = \left|\frac{\omega}{ca} \int\limits_A^B \frac{n_1 - n_2}{2}\, d\zeta\right|, \end{aligned}\right\} \qquad (28,43)$$

где поглощение не учитывается и интегрирование в первом интеграле ведется по замкнутому контуру L, охватывающему обе особые точки $\zeta_{s\pm} = \pm is_{\text{к}}$ функции $(n_1 - n_2)$; во втором интеграле интегрирование ведется между точками A и B по полупетле, охватывающей точку $+is_к$ (см. рис. 28,5). Отметим, что пунктирная линия, соединяющая точки $\pm is_к$, на рис. 28,5 проходит между полюсом функции n_1 при $\zeta_{1\infty}=\frac{1-u}{1-u\cos^2\alpha}-1$ и нулем функции n_2 при $\zeta_{20}=0$. Обе эти точки в расчете считаются несущественными, с чем и связан его приближенный характер.

Стягивая в (28,43) путь интегрирования к линии, соединяющей точки $\pm is_к$ (законность этого оправдывается результатом, не содержащим никаких особенностей), можно убедиться в том, что значение $2\delta_0$ определяется выражением (28,38) и, таким образом, формулы (28,43) совпадают с (28,39) и (28,41). Уже в отношении коэффициента отражения $|R_2|$ этот результат при немалых δ_0 является новым, поскольку формула (28,41) выше не была, по сути дела, выведена. Более существенно, что при расчете методом фазовых интегралов становится ясным наличие еще одной волны — необыкновенной волны, отражающейся от области взаимодействия вниз, т. е. в сторону полюса функции n_1. Конечно, наличия такой волны следовало ожидать из общих соображений (если существование какой-либо волны возможно и не противоречит граничным условиям задачи, она может не появиться только в особых случаях). Но найти ее амплитуду R_1 удалось именно методом фазовых интегралов [197]:

$$|R_1|=e^{-\delta_0}\sqrt{1-e^{-2\delta_0}}. \tag{28,44}$$

Очевидно,

$$|R_1|^2+|R_2|^2+|D_2|^2=1, \tag{28,45}$$

т. е. при отсутствии соударений ($s=0$) нет поглощения. Это заключение вполне понятно, поскольку в проведенном расчете наличие полюса функции n_1 было несущественно и оно никак фактически не учитывалось. Резонансное же поглощение, присутствующее и при $s\rightarrow 0$, возможно только в районе полюса. Вместе с тем, полученный вывод о появлении бегущей вниз волны 1 никак не противоречит расчету методом теории возмущений для области углов $\alpha\ll 1$ (см. выше). Дело в том, что бегущая к полюсу волна 1 отражаться не будет и полностью поглотится (см. § 27). Таким образом, энергия

$$|R_1|^2=1-|R_2|^2-|D_2|^2=e^{-2\delta_0}(1-e^{-2\delta_0}) \tag{28,46}$$

в конечном итоге переходит в тепло (максимальное значение $|R_1|^2$, равное $^1/_4$, достигается при $2\delta_0=\ln 2$). Этот вывод сохраняется и при учете пространственной дисперсии, когда рассматриваемая волна превращается при $v<v_{1\infty}$ в «плазменную» (см. § 12), которая затем и поглощается. При $2\delta_0\ll 1$ поглощаемая энергия

$|R_1|^2$ равна поглощаемой энергии $|A|^2 = 1 - |D|^2 - |R|^2 = 2\delta_0$, вычисленной методом возмущений. Более того, интерпретация энергии $|A|^2$, как поглощенной в резонансной области при $\alpha \ll 1$, правильна и сама по себе, так как в методе возмущений рассматриваются только волны, распространяющиеся при $\alpha = 0$, а также возмущение, связанное с наличием полюса. Бегущая же вниз необыкновенная волна при неучете пространственной дисперсии и $\alpha \to 0$ полностью сосредоточена вблизи полюса и о ней не приходится говорить.

Приведем здесь же результат [254] расчета в случае необыкновенной волны, падающей на область взаимодействия справа, т. е. со стороны нуля $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$ (см. рис. 28,1, *а*). Эта волна разбивается на две: обыкновенную, проходящую в область малых значений v с амплитудой D_2', и необыкновенную, бегущую к полюсу функции n_1^2 (ее амплитуда равна D_1'). Никакой отраженной волны 1 при этом не получается в согласии со сказанным в § 27 и выше. Другими словами, идущая справа (сверху, если речь идет об ионосфере) волна 1 частично просачивается вниз, а частично уходит в область полюса, где и поглощается. Количественно имеем:

$$|D_2'| = e^{-\delta_0}, \quad |D_1'| = \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}, \quad |R_1'| = 0, \quad |D_1'|^2 + |D_2'|^2 = 1, \qquad (28,46\text{а})$$

где δ_0 определяется так же, как в (28,43).

Сравнивая формулы (28,43) и (28,46а), видим, что $|D_2'| = |D_1|$, т. е. коэффициент прохождения через область взаимодействия одинаков в обоих направлениях. (Этот вывод не самоочевиден в связи с несправедливостью обычной формы теоремы взаимности для магнитоактивной среды.) Отсюда следует, что амплитуда третьего отраженного сигнала, проходящего через область взаимодействия вверх и вниз, равна $|D_1| \cdot |D_2'| = |D_1|^2 = e^{-2\delta_0}$, т. е. определяется формулой (28,39). Отсутствие отражения бегущей вниз волны 1 приводит к появлению именно трех отраженных сигналов, а не большего их числа, как это имело бы место при наличии многократного отражения от области взаимодействия.

С точки зрения некоторых возможных приложений (например, вопроса о генерации радиоволн в солнечной короне) представляет интерес еще и третья постановка задачи. Именно пусть на область взаимодействия падает необыкновенная волна, бегущая от полюса функции n_1^2 (эта волна, например, могла быть создана в области полюса пучком частиц). Тогда после взаимодействия в область бóльших значений v побежит необыкновенная волна с $|D_1''| = \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}$, а для отраженной необыкновенной волны $|R_1''| = e^{-2\delta_0}$. Кроме того, вниз (в область малых значений v) побежит обыкновенная волна, для которой $|D_2''| = e^{-\delta_0} \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}$.

Формулы для δ_0. Учет соударений. Приведенные формулы для $|D|$ и $|R|$ получены при пренебрежении соударениями и поэтому пригодны, если

$$s \equiv \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \ll s_{\text{к}} \equiv \frac{\nu_{\text{к}}}{\omega} = \frac{\omega_H \sin^2\alpha}{2\omega\cos\alpha} \tag{28,47}$$

(от поглощения на пути вне области взаимодействия, которое может быть существенно и при малых ν, сейчас отвлекаемся).

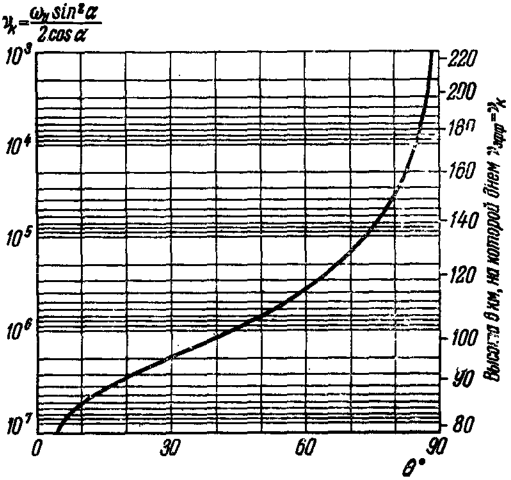


Рис. 28,6. Критическое число соударений $\nu_{\text{к}}$ в зависимости от геомагнитной широты θ. Справа даны высоты, для которых по грубо ориентировочным данным $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{к}}$ при $f_H = 1{,}44$ *Мгц*.

В случае F-слоя (который и имелся в виду в [234], где была получена формула (28,39)) условие (28,47) обычно выполнено. Это ясно из рис. 28,6, на котором приведены значения $\nu_{\text{к}}$ в зависимости от геомагнитной широты θ. Одновременно справа указаны высоты, на которых примерно $\nu_{\text{эфф}} \approx \nu_{\text{к}}$. Мы видим, что на высоте, большей 200 *км*, $\nu_{\text{эфф}}$ сравнимо с $\nu_{\text{к}}$ только на геомагнитных широтах $\theta > 85°$; так, при $\nu_{\text{эфф}} = 10^3$, $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{к}}$ для углов $\alpha \approx 0{,}8°$ и $\theta \approx 88{,}4°$.

Формулы (28,38) для $2\delta_0$ можно записать также в виде:

$$2\delta_0 = \frac{m\omega^3 u^{\frac{3}{4}} (1+\sqrt{u})^{\frac{1}{2}} \sin^2\alpha}{8e^2 c (1+\sqrt{u}\cos\alpha)^2 \left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}} = \frac{1{,}65\cdot 10^{-19}\omega^3 u^{\frac{3}{4}} (1+\sqrt{u})^{\frac{1}{2}} \sin^2\alpha}{(1+\sqrt{u}\cos\alpha)^2 \left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}, \tag{28,48}$$

так как $N(v=1) = \frac{m\omega^2}{4\pi e^2}$.

При $u=\frac{1}{4}$, $\omega=2\omega_H=1{,}76\cdot 10^7$ ($\lambda_0=107$ *м*), полагая $\cos\alpha\approx 1$, имеем $2\delta_0\approx 17\frac{\sin^2\alpha}{\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}$; соответствующее значение $|D|^2=e^{-2\delta_0}$ представлено на рис. 28,7. Из этого рисунка или непосредственно из формулы (28,48) ясно, что в рассматриваемом благоприятном примере ($|D|^2$ падает с ростом ω) $|D|^2\approx 0{,}1$ при $\frac{\sin^2\alpha}{\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}\approx 0{,}125$; при $\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}\approx 0{,}1$ это значение отвечает углу $\alpha\approx 6°$, т. е. геомагнитной широте $\theta=80°$. С ростом α поле $|E_3|=|D|^2$ третьего сигнала резко уменьшается.

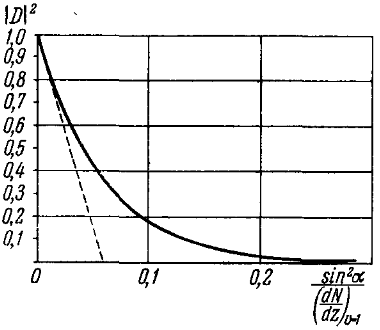


Рис. 28,7. Коэффициент пропускания $|D|^2$ как функция от $\frac{\sin^2\alpha}{\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}}$ при $u=\frac{1}{4}$ и $\omega=1{,}76\cdot 10^7$ ($\lambda_0=107$ *м*). Сплошная кривая $|D|^2=e^{-2\delta_0}$, пунктирная кривая $|D|^2=1-2\delta_0$.

Для более детальных оценок удобно записать формулы (28,38) и (28,39) конкретно для параболического слоя (28,18). В этом случае

$$|D|^2=e^{-2\delta_0},\quad 2\delta_0=$$

$$=\frac{\pi^2\frac{z_m}{\lambda_0}u^{\frac{1}{4}}\left(1+\sqrt{u}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}\sin^2\alpha}{2\left(1+\sqrt{u}\cos\alpha\right)^2\sqrt{1-\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}}=$$

$$=\frac{\nu_{\text{к}}\beta_0 z_m\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}{c\sqrt{1-\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}}. \qquad (28{,}49)$$

При $u=\frac{1}{4}$, $\cos\alpha\approx 1$ и $\lambda_0=107$ *м* ($\omega_H=8{,}82\cdot 10^6$)

$$2\delta_0\approx\frac{9\cdot 10^{-5}z_m\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}\sin^2\alpha}{\sqrt{1-\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}}\sim\frac{10^3\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}\sin^2\alpha}{\sqrt{1-\frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}}, \qquad (28{,}50)$$

где во втором выражении положено $z_m\sim 100$ *км*. Из (28,50) ясно, что для параболического слоя, например, при $f=\frac{f_{\text{к}0}}{3}$ коэффициент $2\delta_0\sim 10^2\sin^2\alpha$ и $2\delta_0\sim 1$ при $\alpha\sim 0{,}1\sim 6°$, что находится в соответствии с оценкой, сделанной выше. Таким образом, для параболического F-слоя и, собственно, любого регулярного слоя тех же размеров эффект «утраивания» сигналов при нормальном падении может систематически наблюдаться лишь на высоких широтах ($\theta \gtrsim 75-80°$). На средних широтах, где $\alpha \sim 20°$ ($\sin^2\alpha \sim 0{,}1$), «утраивание» сигналов в F-слое может наблюдаться лишь спорадически, когда $\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1} \sim 1$ вместо регулярного значения $\sim 0{,}1$. При этом значение $\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}$ должно быть аномально велико только в области слоя толщиной в несколько сотен метров или несколько километров (см. выше) *). Поэтому

---

*) Если бы градиенты N могли быть столь велики, что концентрация N в области $v \sim 1$ заметно менялась бы на расстояниях порядка или меньших $\frac{\lambda_0}{2\pi}$, то появление в области $v > 1$ необыкновенной волны носило бы, так сказать, тривиальный характер,— оно в этом случае следует из формул Френеля для коэффициентов отражения и прохождения волн для резкой границы раздела между двумя анизотропными (в данном случае магнитоактивными) средами. Однако сколько-нибудь длительное существование в ионосфере таких резких градиентов N $\left(\text{т. е. значений } \frac{dN}{dz} \sim 10^2\text{, так как } \frac{\lambda_0}{2\pi} \sim 10^3 \text{ и } N \sim 10^5 \div 10^6\right)$, необходимых хотя бы для ориентировочного использования формул Френеля, представляется невозможным. Действительно, в F-слое длина свободного пробега электронов равна

$$l = \frac{v}{\nu_{\text{эфф}}} \sim \frac{10^7}{10^3} = 10^4 \gg \frac{\lambda_0}{2\pi} \sim 10^3$$

и, следовательно, резкий градиент указанных размеров, если бы он даже мог возникнуть (на что нет никаких оснований), размылся бы за время, меньшее времени свободного пробега $\tau = \frac{1}{\nu_{\text{эфф}}} \sim 10^{-3}$ *сек*. В E-слое для электронов $\nu_{\text{эфф}} \sim 10^5$, $l = 10^2$, $\tau = \frac{1}{\nu_{\text{эфф}}} \sim 10^{-5}$ и время диффузионного размывания границы на величину $\frac{\lambda_0}{2\pi} \sim 10l$ также порядка $\Delta t = \frac{100l^2}{6D} = \frac{50l}{v} = 50\tau \sim 10^{-3}$ *сек* $\left(\text{здесь } D = \frac{lv}{3}\right.$ — коэффициент диффузии для электронов; если размывание обусловлено диффузией ионов, то в рамках сделанной оценки $\left.\Delta t \sim 0{,}1 \text{ сек}\right)$.

Сделанное замечание о роли диффузии свидетельствует о том, что даже сравнительно небольшое значение $\frac{dN}{dz} \sim 1$ в слое с толщиной ~ 1 *км* не может наблюдаться в течение длительного времени. При регулярных же еще меньших значениях $\left(\frac{dN}{dz}\right)_{v=1}$, как уже было сказано, эффект «утраивания» в F-слое на средних широтах наблюдаться не может (речь идет о нормальном зондировании ионосферы без учета рассеяния на неоднородностях; см. § 29).

появление спорадического эффекта на средних широтах ($\alpha \sim \sim 20^\circ$) не исключено.

Однако в ряде случаев наблюдающееся на средних и низких широтах появление трех и большего числа сигналов, отраженных от F-слоя, объясняется, по-видимому, появлением спорадических слоев [43]. Наблюдается [263, 264, 270], также своеобразное «утраивание» сигналов, происходящее при наклонном падении при наличии на уровне отражения рассеивающих неоднородностей (см. § 29). Экспериментально отличить эффект «утраивания» от появления отражений от спорадических слоев можно, в частности, в результате поляризационных измерений (при «утраивании» сигналы E_2 и E_3 на рис. 28,2 должны быть обыкновенными, а сигнал E_1 — необыкновенным).

При переходе к высоким широтам эффект «утраивания» должен наблюдаться все чаще, что и имеет место на опыте [255, 262].

В отношении F-слоя, как указывалось, влияние поглощения обычно несущественно. Иначе обстоит дело в E-слое [255], так как амплитуда третьего сигнала $E_3 = |D|^2$ возрастает с приближением частоты столкновений $\nu_{\text{эфф}} \equiv \nu$ к критической частоте $\nu_{\text{к}}$. При этом, как ясно из рис. 28,6, на геомагнитных широтах не слишком высоких, но бо́льших 55—60°, в E-слое как раз $\nu \sim \nu_{\text{к}}$ и эффект «утраивания» может проявиться самым резким образом. Увеличение $|D|^2$ с ростом ν определяется не только множителем $\left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)$ в (28,35), но и тем обстоятельством, что при $\frac{\nu}{\nu_{\text{к}}} \to 1$ будет $\beta \to 0$ (это ясно из (28,36), учитывая, что $[(n_1 - i\varkappa_1) - (n_2 - i\varkappa_2)] \to 0$ при $\eta \to 1$). Как указано в [255], при $\alpha \approx 13^\circ$

$$\beta \approx \beta_0 \left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{28,51}$$

Используя выражения (28,35), (28,37), (28,49) и (28,51), для параболического слоя (28,18) имеем:

$$|D|^2 = e^{-2\delta}, \quad 2\delta \approx \frac{\nu_{\text{к}} z_m \beta_0 \left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}{\sqrt{1 - \frac{f^2}{f_{\text{к}0}^2}}} = \left(1 - \frac{\nu}{\nu_{\text{к}}}\right)^{\frac{3}{2}} 2\delta_0, \tag{28,52}$$

причем предполагается, что $\nu < \nu_{\text{к}}$; если же $\nu > \nu_{\text{к}}$, то $|D|^2 = 1$ (в рассматриваемом приближении $|D|^2 \to 1$ при $\nu \to \nu_{\text{к}}$ и $|D|^2 = 1$ при $\nu > \nu_{\text{к}}$); при этом не следует забывать, что обусловленное поглощением затухание волны в области $v < 1$ здесь не учитывается. Зависимость $|D|^2$ от $\nu/\nu_к$ по формуле (28,52) для конкретных условий наблюдения, осуществляющихся в [255], ясна из рис. 28,8. Кривая рассчитана для параболического слоя ($z_m = 30$ *км*) при $\nu_к = \frac{\omega_H \sin^2\alpha}{2\cos\alpha} = 2{,}3\cdot 10^5$; критическая частота для волны 2 равна $f_{к2} \equiv f_{к0} = 4$ *Мгц*, $f = 3{,}47$ *Мгц*, $f_H = \frac{\omega_H}{2\pi} = 1{,}44$ *Мгц* и $\alpha = 13°$. При проведении расчета методом фазового интегрирования также получается результат (28,52), причем [122]

$$\delta = \left| \frac{\omega}{ca} \int\limits_{A'}^{B'} \frac{[(n_1 - i\varkappa_1) - (n_2 - i\varkappa_2)]}{2}\, d\zeta \right|, \quad a = \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dz} \right)_{v=1}, \qquad (28{,}53)$$

где интеграл берется по петле, охватывающей точку $+is_к$ (рис. 28,9). При $s = \frac{\nu}{\omega} = 0$ эта формула переходит в (28,43). Стягивая контур к пунктирной линии, соединяющей точку $+is_к$ с прямой $\mathrm{Re}\, z$, придем к формулам (28,35) и (28,36) и в частном случае к (28,52). Вместе с тем, из (28,53) и рис. 28,9 сразу же ясно, что при $s > s_к$ (т. е. $\nu > \nu_к$) в рассматриваемом приближении $\delta = 0$, поскольку контур интегрирования уже не охватывает точку $is_к$. При $s > s_к$ осуществляется, таким образом, квазипродольное распространение с отражением от точки $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$.

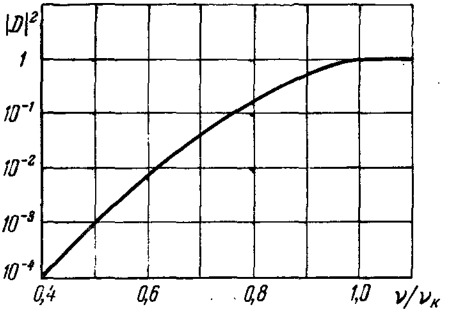


Рис. 28,8. Коэффициент пропускания $|D|^2$ как функция $\frac{\nu}{\nu_к}$ при $u = \frac{1}{4}$ и $\omega = 1{,}76\cdot 10^7$ ($\lambda_0 = 107$ *м*).

Выше по существу принималось, что $\nu = \mathrm{const}$. Если же зависимость ν от z заметна, но все же является более слабой, чем зависимость N от z, то все формулы остаются в силе, но под ν нужно понимать эффективное число соударений в точке $v = 1$.

Заметим также, что в области взаимодействия должно быть особенно заметно рассеяние радиоволн на ионосферных неоднородностях, поскольку при $v \to 1$ и $\alpha \to 0$ значения $\frac{dn_{1,2}}{dv}$, а значит, и $\frac{dn_{1,2}}{dN}$ особенно велики. В результате даже сравнительно небольшие изменения N влекут за собой значительные изменения показателей $n_{1,2}$.

Результаты при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} > 1$. Выше эффект «утраивания» рассмотрен для нормального падения в основном только при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} < 1$. О роли наклонного падения речь пойдет в следующем § 29, сейчас же кратко остановимся на случае $u > 1$ (в условиях земной ионосферы, на средних и высоких широтах это отвечает волнам $\lambda > 214$ *м*). При очень малых углах α, когда применим метод возмущений, для обыкновенной волны результат при $u > 1$ уже получен выше (см. (28,14), (28,16)). Проведенный методом возмущений расчет годен для обыкновенной волны при любых u потому, что нулевое приближение (28,9) одинаково и при $u < 1$ и при $u > 1$, а первое приближение вычисляется без всяких предположений о величине u. Совершенно аналогичный расчет можно при $u > 1$ произвести и для необыкновенной волны, считая, что в нулевом приближении имеется только необыкновенная волна, т. е. $F_+^{(0)} = e^{-i\frac{\omega}{c} n_1 z}$, $n_1^2 = 1 + \frac{v}{\sqrt{u}-1}$. Тогда для коэффициента отражения $|R_1|^2$ и коэффициента прохождения $|D_1|^2$ получаем *):

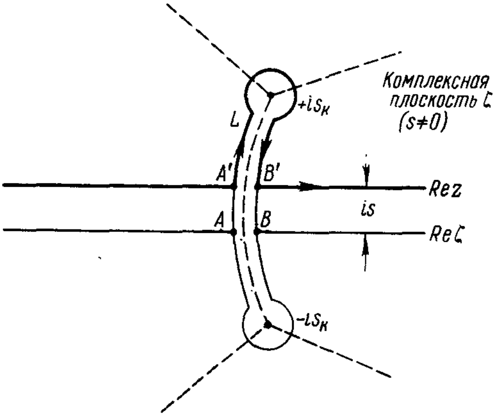


Рис. 28,9. Контур интегрирования в выражении (28,53).

$$\left.\begin{aligned} &|R_1|^2 = 4\delta_{0,\,2}^2, \quad |D_1|^2 = 1 - 2\delta_{0,\,2}, \\ &2\delta_{0,\,2} = \frac{\pi\omega u^{\frac{3}{4}}\alpha^2}{2ca\left(\sqrt{u}-1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi\omega\alpha^2}{2ca\left(1-\frac{\omega}{\omega_H}\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (28{,}54)$$

---

*) Индексы 1 и 2 в (28,54) и (28,55) характеризуют невозмущенную волну при $\alpha = 0$ и отличаются от индексов, использованных в (28,43) и др.

Для сравнения приведем здесь же еще раз результат такого же расчета для обыкновенной волны (см. (28,14) — (28,16)):

$$\left.\begin{gathered} |R_2|^2 = 4\delta_{0,\,1}^2, \quad |D_2|^2 = 1 - 2\delta_{0,\,1}, \\ 2\delta_{0,\,1} = \frac{\pi\omega u^{\frac{3}{4}}\alpha^2}{2ca\left(1+\sqrt{u}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi\omega\alpha^2}{2ca\left(1+\dfrac{\omega}{\omega_H}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad a = \left(\frac{dv}{dz}\right)_{v=1}. \end{gathered}\right\} \qquad (28,55)$$

(Раньше величина $\delta_{0,1}$ обозначалась просто через δ_0; см. (28,38) при $\alpha \ll 1$.)

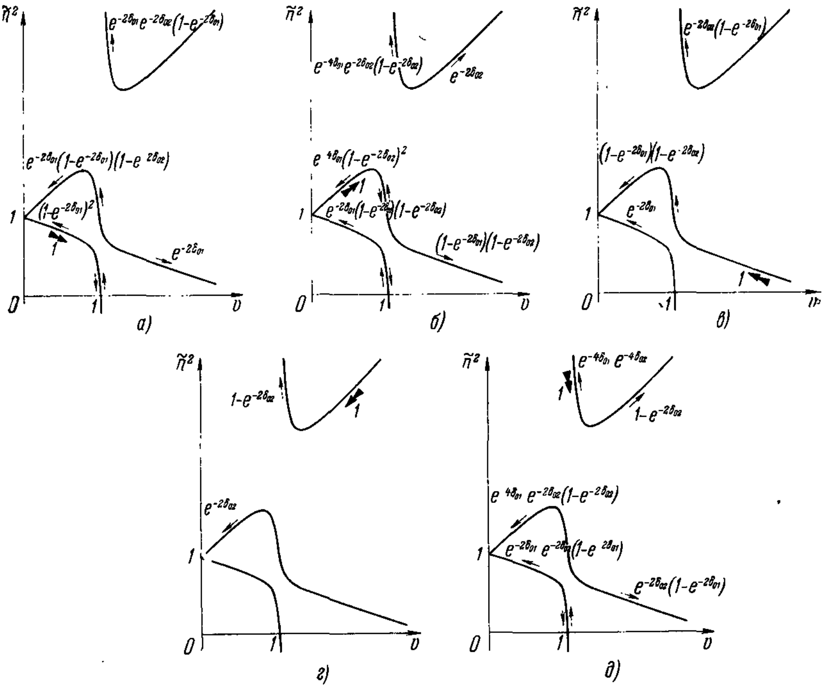
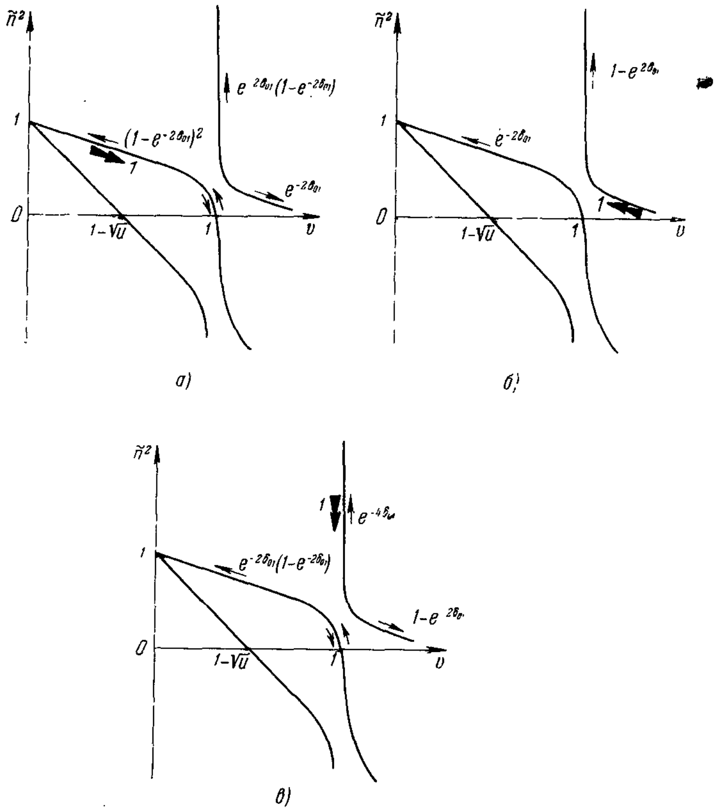

$\tilde{n}^2$
$e^{-2\delta_{01}}e^{-2\delta_{02}}(1-e^{-2\delta_{01}})$
$e^{-2\delta_{01}}(1-e^{-2\delta_{01}})(1-e^{2\delta_{02}})$
$(1-e^{-2\delta_{01}})^2$
1
$e^{-2\delta_{01}}$
0
1
v
а)
$\tilde{n}^2$
$e^{-4\delta_{01}}e^{-2\delta_{02}}(1-e^{-2\delta_{02}})$
$e^{-2\delta_{02}}$
$e^{4\delta_{01}}(1-e^{-2\delta_{02}})^2$
1
$e^{-2\delta_{01}}(1-e^{-2\delta_{02}})(1-e^{-2\delta_{02}})$
$(1-e^{-2\delta_{01}})(1-e^{-2\delta_{02}})$
0
1
v
б)
$\tilde{n}^2$
$e^{-2\delta_{02}}(1-e^{-2\delta_{01}})$
$(1-e^{-2\delta_{01}})(1-e^{-2\delta_{02}})$
$e^{-2\delta_{01}}$
1
0
1
v
в)
$\tilde{n}^2$
$1-e^{-2\delta_{02}}$
1
$e^{-2\delta_{02}}$
0
1
v
г)
$\tilde{n}^2$
$e^{-4\delta_{01}}e^{-4\delta_{02}}$
1
$1-e^{-2\delta_{02}}$
$e^{4\delta_{01}}e^{-2\delta_{02}}(1-e^{-2\delta_{02}})$
$e^{-2\delta_{01}}e^{-2\delta_{02}}(1-e^{2\delta_{01}})$
$e^{-2\delta_{02}}(1-e^{-2\delta_{01}})$
0
1
v
д)

Рис. 28,10. Различные случаи взаимодействия волн при $u_L = u\cos^2\alpha > 1$. Приведены квадраты модулей амплитуд волн, причем амплитуда падающей волны (жирная стрелка) считается равной единице. Отражение от точки $v_{10}^{(+)}$ не учитывается.

При $u_L = u\cos^2\alpha > 1$ имеются пять основных случаев взаимодействия волн, в то время как при $u < 1$ было три таких случая *). Значения $|D|^2$ и $|R|^2$ при $u_L > 1$, полученные [260] методом фазовых интегралов, приведены на рис. 28,10. Вместо


$\tilde{n}^2$
1
0
$1-\sqrt{u}$
1
v
$(1-e^{-2\delta_{01}})^2$
1
$e^{-2\delta_{01}}$
$e^{2\delta_{01}}(1-e^{-2\delta_{01}})$
$\tilde{n}^2$
1
0
$1-\sqrt{u}$
1
v
$1-e^{2\delta_{01}}$
$e^{-2\delta_{01}}$
1
$\tilde{n}^2$
1
0
$1-\sqrt{u}$
1
v
1
$e^{-4\delta_{01}}$
$e^{-2\delta_{01}}(1-e^{-2\delta_{01}})$
$1-e^{2\delta_{01}}$

а) б) в)

Рис. 28,11. Различные случаи взаимодействия волн при $u<1$. Все остальные обозначения и условия такие же, как на рис. 28,10.

(28,54) и (28,55) получаются выражения, содержащие $e^{-2\delta_{0,1,2}}$, $1-e^{-2\delta_{0,1,2}}$ и т. п. Положение в этом отношении аналогично имеющему место при $u<1$. Для удобства уже обсуждавшиеся выше результаты для частот ω, больших ω_H (т. е. при $u<1$), сопоставлены на рис. 28,11.

---

*) Область $u>1$, $u_L = u\cos^2\alpha < 1$ требует особого рассмотрения, что еще не сделано. Практически взаимодействие происходит лишь при малых углах α и, следовательно, при $u>1$ обычно также $u_L>1$.

Строго говоря, выражения для $\delta_{0,1,2}$ при произвольных углах α отличны от приведенных в (28,54) и (28,55) и относящихся к малым α. Практически, однако, взаимодействие существенно именно при очень малых α и в качестве $\delta_{0,1,2}$ можно пользоваться формулами, указанными на рис. 28,10 и 28,11, со значениями $\delta_{0,1,2}$, определяемыми согласно (28,54) и (28.55). Учет теплового движения мало изменяет $\delta_{0,1,2}$, если только

$$\beta_{\text{т}}^2 = \frac{\varkappa T}{mc^2} \ll 1.$$

Поглощение волн не сказывается существенно на результатах, пока в области взаимодействия

$$\nu_{\text{эфф}} \ll \nu_{\text{к}} = \frac{\omega_H \sin^2\alpha}{2\cos\alpha}.$$

Весьма важной особенностью рассмотренного взаимодействия волн является тот факт, что оно само по себе не приводит к образованию отраженных волн (см. рис. 28,10, *в*, *г* и рис. 28,11, *б*). Появление отражения всегда связано поэтому с достижением какой-либо волной нуля функции n_2^2.

Во всех случаях, представленных на рис. 28,10 и 28,11, отражение от нуля $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$ не учитывается. Из рис. 28,10, *а* и *б* ясно, что при посылке вверх обыкновенного сигнала обратно придет также и необыкновенный, и наоборот. Таким образом, при $u_L > 1$ и малых углах α, когда существенно взаимодействие, при зондировании ионосферы неполяризованным сигналом должно появиться четыре отраженных сигнала (при отсутствии отражения от точки $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$). Если же имеется отражение от точки $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$, то падающий обыкновенный сигнал даст два обыкновенных и два необыкновенных отраженных сигнала. То же имеет место для падающего необыкновенного сигнала (здесь учтено, что необыкновенный сигнал, возвращающийся после отражения от точки $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$, по прохождении области взаимодействия превращается в два сигнала: обыкновенный и необыкновенный; см. рис. 28,10, *в*). В результате падающий на ионосферу неполяризованный сигнал может дать целых восемь отраженных сигналов. Однако в области $u > 1$ более интересно не появление «умножения» отраженных сигналов, а возможность прохождения необыкновенной волны через весь слой при нормальном падении на него, несмотря на то, что $\alpha \neq 0$ и частота ниже критической частоты, отвечающей точке $v_{10}^{(+)}$. Этот эффект в той или иной мере имеет место и при наклонном падении, когда он при определенных условиях даже усиливается (см. § 29).

§ 29. Наклонное падение волн на слой. Теорема взаимности

Введение. При решении задачи о наклонном падении волн на слой магнитоактивной плазмы исходным является общее волновое уравнение (2,21) для произвольной среды:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\frac{\omega^2}{c^2}\left(\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right)=0; \tag{29,1}$$

для плоского слоя «холодной» магнитоактивной плазмы уравнение принимает вид:

$$\Delta E_i-\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\boldsymbol{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'_{ij}(\omega,\,z)\,E_j=0 \tag{29,2}$$

(см. (23,1); тензор ε'_{ij} определяется формулами, проведенными в § 10).

Уравнение (29,2) имеет важное частное решение типа

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{F}(z)\,e^{-ik_y y}=\boldsymbol{F}(z)\,e^{-i\frac{\omega}{c}py}, \tag{29,3}$$

отвечающее волнам с нормалью, расположенной в плоскости yz (магнитное поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ в плоскослоистой среде однородно или зависит только от z, но может иметь любое направление; поэтому, выбирая решение в виде (29,3), мы не предполагаем, что поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ лежит в плоскости падения yz; таким образом, используется система координат, отличная от изображенной на рис. 10,1).

Подставляя (29,3) в уравнение (29,2), получаем:

128

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2F_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left[(\varepsilon'_{xx}-p^2)\,F_x+\varepsilon'_{xy}F_y+\varepsilon'_{xz}F_z\right]=0,\\
&\frac{d^2F_y}{dz^2}+i\frac{\omega}{c}p\frac{dF_z}{dz}+\frac{\omega^2}{c^2}\left[\varepsilon'_{yx}F_x+\varepsilon'_{yy}F_y+\varepsilon'_{yz}F_z\right]=0,\\
&i\frac{\omega}{c}p\frac{dF_y}{dz}+\frac{\omega^2}{c^2}\left[\varepsilon'_{zx}F_x+\varepsilon'_{zy}F_y+(\varepsilon'_{zz}-p^2)\,F_z\right]=0,
\end{aligned}\right\} \tag{29,4}$$

где уже принято, что $p=\frac{c}{\omega}k_y=\text{const}$. В справедливости этого существенного обстоятельства можно убедиться, считая вначале, что $p=p(z)$. Тогда для F_{xyz} получаются уравнения, которые удовлетворяются при всех y только в случае постоянства p (см. в § 19 аналогичные вычисления для изотропной среды). При нормальном падении волн на слой $p=0$ и уравнения (29,4) очевидным образом упрощаются, переходя в систему двух уравнений второго порядка, исследованную ранее (см. (23,2) и дальше). Уравнения (29,4) сводятся [275] к системе двух уравнений второго порядка также для магнитного полюса (внешнее поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ направлено по оси z) и при распространении волн на экваторе в плоскости магнитного меридиана (поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ направлено по оси y, и рассматриваются волны типа (29,3)) *). Однако даже в этих частных случаях, не говоря уже об общем случае, уравнения (29,4) не только не были строго решены хотя бы для одной модели слоя, но и не использовались для приближенного учета взаимодействия нормальных волн при наклонном падении. В результате при наклонном падении на слой магнитоактивной плазмы анализ решения проведен лишь в приближении геометрической оптики. Кроме того, в качественном отношении ясна картина взаимодействия волн, приводящего к их просачиванию через слой, а также появлению своеобразного эффекта «утраивания» сигналов при наклонном падении (этот эффект существенно отличен от имеющего место при нормальном падении). Именно на этих моментах мы и остановимся. В заключение будет, помимо того, доказана обобщенная теорема взаимности, пригодная в магнитоактивной среде и могущая быть полезной при решении некоторых конкретных задач.

Приближение геометрической оптики. Решение в приближении геометрической оптики в общем виде получается для произвольной среды. Для этого нужно искать решение основного уравнения (29,1) в форме

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\left\{\boldsymbol{E}^{(0)}(\boldsymbol{r})+\frac{c}{\omega}\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{r})+\frac{c^2}{\omega^2}\boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{r})+\ldots\right\}e^{-i\frac{\omega}{c}\Psi(\boldsymbol{r})} \qquad (29,5)$$

и аналогичных рядов для $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{j}$. Подставляя эти ряды в (29,1) и приравнивая нулю члены, стоящие у разных степеней $\frac{\omega}{c}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&[\nabla\Psi\,[\nabla\Psi\boldsymbol{E}^{(0)}]]+\boldsymbol{D}^{(0)}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}^{(0)}=0,\\
&[\nabla\Psi\,[\nabla\Psi\boldsymbol{E}^{(1)}]]+\boldsymbol{D}^{(1)}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}^{(1)}=\\
&\qquad\qquad=-i\{\operatorname{rot}[\nabla\Psi\boldsymbol{E}^{(0)}]+[\nabla\Psi\operatorname{rot}\boldsymbol{E}^{(0)}]\},\\
&[\nabla\Psi\,[\nabla\Psi\boldsymbol{E}^{(2)}]]+\boldsymbol{D}^{(2)}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}^{(2)}=\\
&\quad=-i\{\operatorname{rot}[\nabla\Psi\boldsymbol{E}^{(1)}]+[\nabla\Psi\operatorname{rot}\boldsymbol{E}^{(1)}]\}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}^{(0)}
\end{aligned}\right\} \qquad (29,6)$$

и т. д.

---

*) Из соображений симметрии выделен также случай распространения волн на экваторе в плоскости, перпендикулярной к плоскости магнитного меридиана.

Полагая $D_i - i\frac{4\pi}{\omega}j_i = \varepsilon'_{ij}(\boldsymbol{r})E_j$ и сопоставляя первое уравнение (29,6) с уравнениями (11,2) — (11,5), убеждаемся в том, что

$$(\nabla\Psi)^2_{1,2} = (n(\boldsymbol{r}) - i\varkappa(\boldsymbol{r}))^2_{1,2}; \tag{29,7}$$

здесь для магнитоактивной плазмы $(n - i\varkappa)^2_{1,2}$ — выражения (11,5), могущие теперь зависеть от координат (другими словами, в (11,5) v, u, s и α могут зависеть от $\boldsymbol{r}$). При этом существенно, что угол α в (11,5) есть угол между внешним полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и $\nabla\Psi$, т. е. направлением нормали к волне; поэтому правая часть уравнения (29,7) сама зависит от $(\nabla\Psi)_{1,2}$, хотя в (29,7) мы и не указали этого в явном виде.

Выражение (29,7) получается из условия существования нетривиального решения у первого из уравнений (29,6). Условие разрешимости второго из этих уравнений дает уравнение для поля $\boldsymbol{E}^{(0)}$ и т. д.

Геометрикооптическое приближение для решения типа (29,3) получается в результате подстановки в уравнения (29,4) ряда

$$\boldsymbol{F}(z) = \left(\boldsymbol{F}^{(0)}(z) + \frac{c}{\omega}\boldsymbol{F}^{(1)}(z) + \ldots\right)e^{-i\frac{\omega}{c}\psi(z)}. \tag{29,8}$$

Результат можно записать в виде ($x \longleftrightarrow 1$, $y \longleftrightarrow 2$, $z \longleftrightarrow 3$; по дважды встречающимся индексам проводится суммирование):

$$\left.\begin{aligned}
&a_{ij}F_j^{(0)} = 0, \quad a_{ij}F_j^{(1)} = ig_i \text{ и т. д.}\\
&a_{11} = \left[\varepsilon'_{xx} - p^2 - \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2\right], \; a_{12} = -a_{21} = \varepsilon'_{xy} = -\varepsilon'_{yx},\\
&a_{13} = -a_{31} = \varepsilon'_{xz} = -\varepsilon'_{zx},\\
&a_{22} = \left[\varepsilon'_{yy} - \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2\right], \; a_{33} = [\varepsilon'_{zz} - p^2],\\
&a_{23} = \left[\varepsilon'_{yz} + p\frac{d\psi}{dz}\right],\\
&a_{32} = \left[\varepsilon_{zy} + p\frac{d\psi}{dz}\right] = \left[-\varepsilon_{yz} + p\frac{d\psi}{dz}\right],\\
&g_1 = 2\frac{d\psi}{dz}\frac{dF_x^{(0)}}{dz} + F_x^{(0)}\frac{d^2\psi}{dz^2},\\
&g_2 = 2\frac{d\psi}{dz}\frac{dF_y^{(0)}}{dz} + \frac{d^2\psi}{dz^2}F_y^{(0)} - p\frac{dF_z^{(0)}}{dz}, \; g_3 = -p\frac{dF_y^{(0)}}{dz}.
\end{aligned}\right\} \tag{29,9}$$

Условие существования решения у системы уравнений для $F_j^{(0)}$, т. е. равенство нулю детерминанта $\Delta \equiv |a_{ij}|$, должно совпадать (и, конечно, совпадает) с выражением (29,7), принимающим для решения (29,3) и (29,8) вид:

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2+p^2=(n-i\varkappa)^2_{1,2}. \qquad (29{,}10)$$

Вектор $\nabla\Psi=\left\{0,\ p,\ \frac{d\psi}{dz}\right\}$ направлен по нормали к фронту волны (пренебрегается малыми в приближении геометрической оптики производными от $F_i^{(0)}$; величины $\Psi(\boldsymbol{r})$ и $\psi(z)$ входят, соответственно, в выражения (29,5) и (29,8)). Поэтому естественно положить

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2=q^2=(n-i\varkappa)^2_{1,2}\cos^2\theta(z),\quad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2=$$
$$=p^2\equiv\left(\frac{c}{\omega}k_y\right)^2=(n-i\varkappa)^2_{1,2}\sin^2\theta(z), \qquad (29{,}11)$$

где θ — угол между $\nabla\Psi$ и осью z, а сами n и $\varkappa$ зависят от p и $q=\frac{d\psi}{dz}$.

В силу постоянства p отсюда получается закон преломления:

$$[n_{1,2}(z,\theta)-i\varkappa_{1,2}(z,\theta)]\sin\theta(z)=\sin\theta_0; \qquad (29{,}12)$$

причем, по предположению, в начале слоя угол падения $\theta=\theta_0$, $n_{1,2}=1$ и $\varkappa_{1,2}=0$.

В (29,12) в $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ поставлен также аргумент θ, поскольку $(n-i\varkappa)_{1,2}$ зависит от угла α между полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и нормалью к волне, направленной по $\nabla\Psi$. Угол α меняется с изменением θ, в силу чего изменяются с θ и показатели $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ в (29,11) и (29,12). Поэтому траектории, описываемые волновой нормалью, а также траектории лучей (т. е. траектории волновых пакетов) в неоднородной магнитоактивной среде, вообще говоря, весьма сложны. Нахождению этих траекторий в различных условиях посвящено большое число работ (см. [101, 105, 236, 244, 246, 263—269, 276—281]).

Поле в первом приближении геометрической оптики. Прежде чем остановиться на характере траекторий волновых нормалей и лучей, выясним вид функций $\frac{d\psi}{dz}=q(z)$ и $\boldsymbol{F}^{(0)}(z)$ в (29,8), т. е. найдем поле в первом приближении геометрической оптики.

Для нахождения $\frac{d\psi}{dz}=q$ нужно, очевидно, явно выразить правую часть уравнения (29,10) через q. Это значит, что в выражении (11,5) для $(n-i\varkappa)^2_{1,2}$, где α есть угол между $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и $\nabla\Psi$, нужно положить

$$\cos^2\alpha=\frac{(H_y^{(0)}p+H_z^{(0)}q)^2}{H^{(0)^2}(p^2+q^2)}. \qquad (29{,}13)$$

Разумеется, то же самое получается непосредственно из условия существования нетривиального решения у первого уравнения (29,9).

В результате из (29,10) получаем уравнение четвертой степени для q:

$$\alpha_p q^4 + \beta_p q^3 + \gamma_p q^2 + \delta_p q + \varepsilon_p = 0, \tag{29,14}$$

где коэффициенты зависят от $v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$, $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2}$, $s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$, p и направления поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ в пространстве.

В используемой в настоящем параграфе системе координат, когда волновой вектор $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\{0,\ p,\ q\}$ лежит в плоскости yz, а вектор $\boldsymbol{H}^{(0)} = \{H_x^{(0)},\ H_y^{(0)},\ H_z^{(0)}\}$ направлен произвольным образом, имеем [277]:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_p &= (1-is)\left[(1-is)^2-u\right] - v\left[(1-is)^2-u_z\right],\\
\beta_p &= 2pv\sqrt{u_y u_z},\\
\gamma_p &= -2(1-is)\left\{\left[(1-p^2)(1-is)-v\right](1-is-v)-\right.\\
&\qquad \left.-(1-p^2)u\right\} + v\left[p^2u_y-(1-p^2)u_z-u\right],\\
\delta_p &= -2(1-p^2)pv\sqrt{u_y u_z},\\
\varepsilon_p &= \left[(1-p^2)(1-is)-v\right]\left\{\left[(1-p^2)(1-is)-v\right]\times\right.\\
&\qquad \left.\times(1-is-v)-(1-p^2)u\right\}-(1-p^2)p^2u_y v.
\end{aligned}\right\} \tag{29,15}$$

Здесь $\sqrt{u_y} = \frac{eH_y^{(0)}}{mc\omega}$, $\sqrt{u_z} = \frac{eH_z^{(0)}}{mc\omega}$, $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} = \frac{e^2 (H^{(0)})^2}{m^2c^2\omega^2} = u_x + u_y + u_z$.

Заметим, что в системе координат с вектором $\boldsymbol{H}^{(0)}$, лежащим в плоскости yz, и волновым вектором $\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\{p_1,\ p_2,\ q\}$, $p_1 = \sin\theta_0\cos\varphi_0$, $p_2 = \sin\theta_0\sin\varphi_0$, $q = \cos\theta_0$, коэффициенты в уравнении (29,14) имеют вид [269]:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_p &= (1-is)\left[(1-is)^2-u\right] - v\left[(1-is)^2-u_L\right],\\
\beta_p &= 2p_2v\sqrt{u_L u_T},\\
\gamma_p &= -2(1-is)\left\{\left[(1-p^2)(1-is)-v\right](1-is-v)-\right.\\
&\qquad \left.-(1-p^2)u\right\} + v\left[p_2^2u_T-(1-p^2)u_L-u\right],\\
\delta_p &= -2(1-p^2)p_2v\sqrt{u_L u_T},\\
\varepsilon_p &= \left[(1-p^2)(1-is)-v\right]\left\{\left[(1-p^2)(1-is)-v\right]\times\right.\\
&\qquad \left.\times(1-is-v)-(1-p^2)u\right\}-(1-p^2)p_2^2u_T v.
\end{aligned}\right\} \tag{29,15a}$$

Здесь $p^2 = p_1^2 + p_2^2 = \sin^2\theta_0 = 1 - q^2(z=0)$, $1 - p^2 = \cos^2\theta_0 = q^2(z=0)$, $u_L = u\cos^2\chi$, $u_T = u\sin^2\chi$ и χ — угол между $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и осью z (при нормальном падении $\chi = \alpha$ — углу между $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и нормалью к волне — осью z; см. § 11 и др.). При распространении волн в плоскости магнитного меридиана в (29,15а) $p_1 = 0$, $p_2 = p = \sin\theta_0$. Переход от (29,15а) к (29,15) осуществляется заменой p_2 на p, u_L на u_z и u_T на u_y.

В однородной среде q не зависит от координат, и всегда можно выбрать оси так, что $p = 0$ и $q^2 = (n - i\varkappa)^2$ (см. (29,11) при $\cos\theta = \cos\theta_0 = 1$). Уравнение (29,14) становится при этом биквадратным, и его решение есть выражение (11,5).

Отношение компонент $F_x^{(0)}$, $F_y^{(0)}$ и $F_z^{(0)}$ получается с помощью любой пары из уравнений $a_{ij}F_j^{(0)} = 0$ (см. (29,9)):

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_x^{(0)}}{F_y^{(0)}} &= \frac{A_{31}}{A_{32}} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}} = K, \\ \frac{F_z^{(0)}}{F_y^{(0)}} &= \frac{A_{33}}{A_{32}} = \frac{a_{11}a_{22} + a_{12}^2}{a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}} = B. \end{aligned}\right\} \qquad (29,16)$$

Здесь A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} в детерминанте $\Delta \equiv |a_{ij}|$. (Напомним, что по определению $\Delta \equiv |a_{ij}| = A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} + A_{i3}a_{i3}$, т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, где Δ_{ij} — минор элемента a_{ij}). Коэффициенты K и B в (29,16) зависят, очевидно, от p и q; поэтому они различны для волн 1 и 2, когда для q берутся значения q_1 или q_2. Наконец, зависимость $F_i^{(0)}$ от z определяется из условия разрешимости уравнения (29,9) для $F_i^{(1)}$. В результате [269]

$$F_y^{(0)} = \frac{\text{const}}{\sqrt{q(K^2-1) + pB}}, \qquad (29,17)$$

а поле $\boldsymbol{E}$ в первом приближении геометрической оптики имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &E_x = KE_y, \quad E_z = BE_y, \\ &E_y = \frac{\text{const}}{\sqrt{q(K^2-1) + pB}}\, e^{\pm i\frac{\omega}{c}\left(py + \int\limits_{z_0}^{z} q\,dz\right)}, \\ &q = \frac{d\psi}{dz} = (n - i\varkappa)\cos\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (29,18)$$

где сразу выделены знаки ± у фазы, которые были раньше скрыты в p и q (см. также обозначения (29,16)).

Анализ распространения волн в магнитоактивной среде также в геометрикооптическом приближении, но в более общем виде содержится в работе [282].

Графики функций $q_{1,2}(v)$. Получить представление о характере распространения волн при наклонном падении и отсутствии поглощения в приближении геометрической оптики легче всего, используя графики величины $q = n\cos\theta$ в зависимости от $v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$ (см., например, [246, 269, 277]). При наклонном падении эти графики играют роль графиков функций $n^2_{1,2}(v)$, которые использовались при нормальном падении. В этом последнем случае обе формы графиков по существу эквивалентны, так как при отсутствии поглощения $q_{1,2} = n_{1,2}$ для волны, бегущей вверх ($\cos\theta = 1$), и $q_{1,2} = -n_{1,2}$ для волны, бегущей вниз ($\cos\theta = -1$). Таким образом, при нормальном падении графики $q(v)$ представляют собой просто графики $n(v)$ и их зеркальное отражение относительно оси абсцисс v (рис. 29,1). Симметричные кривые получаются, в частности, также на полюсе (вектор $\boldsymbol{H}^{(0)}$ направлен по оси z; рис. 29,2) и на экваторе при распространении волн в плоскости магнитного меридиана (вектор $\boldsymbol{H}^{(0)}$ направлен по оси y; рис. 29,3). Если же магнитное поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ направлено произвольным образом и даже если оно лежит в пло-

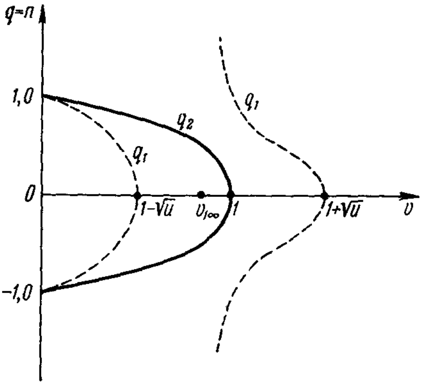


Рис. 29,1. Функции $q_{1,2}(v)$ при нормальном падении $\left(u = \frac{1}{4},\ \alpha = 45^\circ\right)$.

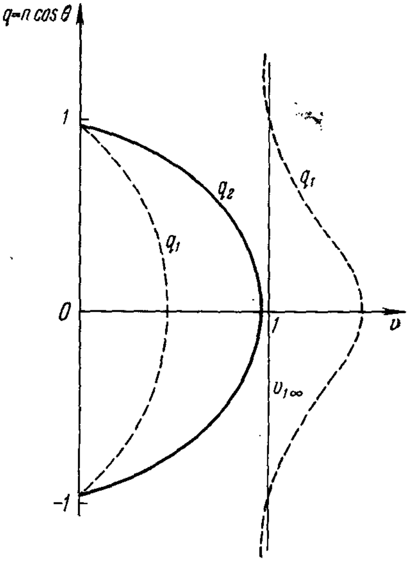


Рис. 29,2. Функции $q_{1,2}(v)$ для распространения на полюсе (вертикальное магнитное поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$). Использованы значения $\theta_0 = 20^\circ$, $u = \frac{1}{4}$.

скости yz (распространение в плоскости магнитного меридиана), то кривые $q(v)$, вообще говоря, несимметричные (рис. 29,4 и 29,5) *). В общем случае кривые $q_{1,2}(v)$ уходят в бесконечность в точке $v_{1,2\infty} = \frac{1-u}{1-u\cos^2\chi}$ (χ — угол между полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и осью z). Этот результат вполне понятен, поскольку величина $q = n\cos\theta$ обращается в бесконечность при $n \to \infty$, когда в силу закона преломления (29,12) значение $\sin\theta = \frac{\sin\theta_0}{n} \to 0$. Но если $\sin\theta = 0$, то нормаль к волне направлена по оси z и угол χ равен использованному в предыдущих параграфах углу α между нормалью и полем

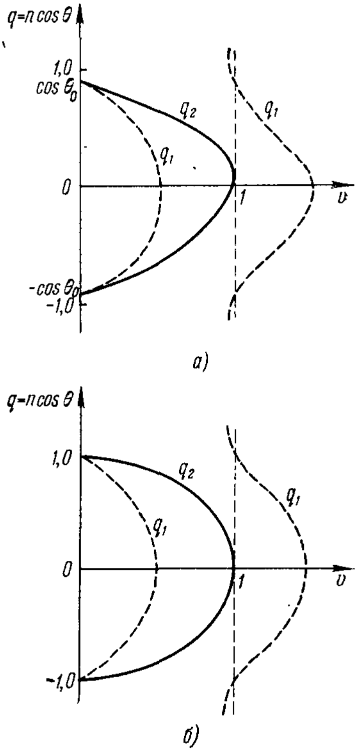


Рис. 29,4. Функции $q_{1,2}(v)$ при распространении в плоскости магнитного меридиана для случая, когда вектор $\boldsymbol{H}^{(0)}$ направлен под углом $\chi = 45°$ к вертикали (оси z): *а*) $\theta_0 = 10°$, $u = \frac{1}{4}$; *б*) $\theta_0 = 0$, $u = \frac{1}{4}$.

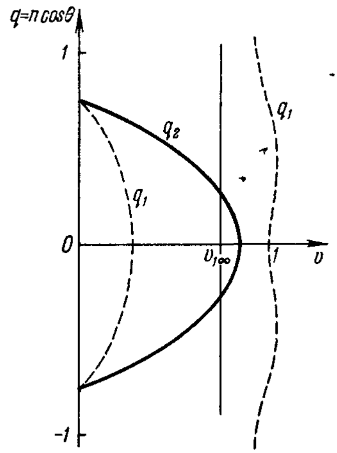


Рис. 29,3. Функции $q_{1,2}(v)$ для распространения на экваторе в плоскости магнитного меридиана $\left(\theta_0 = 42°,\ u = \frac{1}{4}\right)$.

---

*) На всех этих кривых, а также приводимых ниже, в начале слоя $n_{1,2} = 1$ и $q_{1,2} = \pm\cos\theta_0$ (θ_0 — угол падения волны на слой). Поглощением во всех случаях пренебрегается. Заметим, что симметричным кривым $q(v)$ отвечает обращение в нуль коэффициентов β_p и δ_p в уравнении (29,14). Поэтому кривые $q(v)$ симметричны не только в указанных в тексте частных случаях, но и всегда при $u_y = 0$ или $u_z = 0$ (см. (29,15); случай $u_z = 0$ отвечает распространению на магнитном экваторе).

$H^{(0)}$. Поэтому приведенное выражение для $v_{1,2\infty}$ и совпадает с полученным ранее (см. (11,18) и (11,22)). Нули функций $q_{1,2}(v)$ являются корнями некоторого кубического уравнения [277]. Существенно, что нули $q_{1,2}(v)$ при изменении угла падения θ_0 и направления поля $H^{(0)}$ меняются лишь в известных пределах, которые часто довольно узки. Это ясно из рис. 29,6, где вертикально заштрихованные области отвечают нулям q_2 и горизонтально заштрихованные — нулям q_1 (при каждом данном $\sin\theta_0$ нули $q_{1,2}$ при любых направлениях $H^{(0)}$ лежат в заштрихованных областях, т. е. в определенном интервале значений v). Кривые T, ограничивающие заштрихованные области, определяют нули $q_{1,2}$ при распространении в плоскости, перпендикулярной к плоскости магнитного меридиана $\Big($в этом случае $q=0$ при $v=\cos^2\theta_0$ и $v=\frac{1}{2}\left[1+\cos^2\theta_0\pm\sqrt{\sin^4\theta_0+4u\sin^2\theta_0}\right]$, что и определяет кривые $T(v)\Big)$. При распространении в мери-

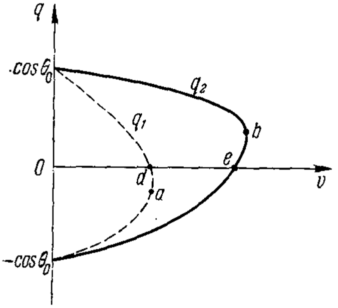


Рис. 29,5. Схематический вид функций $q_{1,2}(v)$ при $u<1$ (проведена лишь одна ветвь кривой $q_1(v)$).

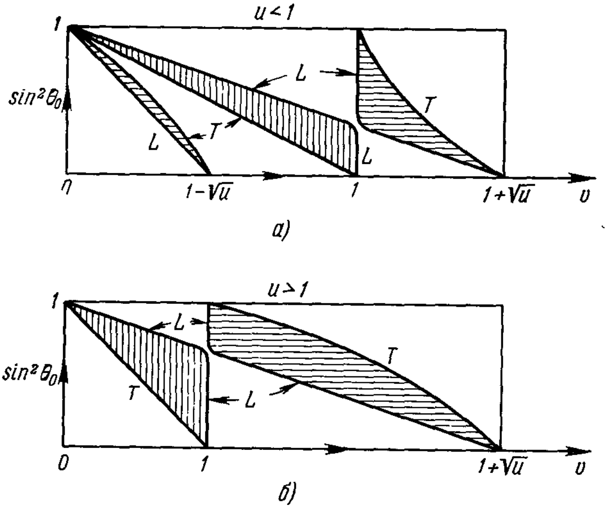


Рис. 29,6. Области изменения нулей функций $q_{1,2}(v)$: а) $u=\frac{1}{4}$; б) $u=4$.

диональной плоскости на магнитном экваторе $q_{1,2} = 0$ при $v = 1$ и $v = \cos^2\theta_0 (1 \pm \sqrt{u})$, что определяет кривые L на рис. 29,6, *а*

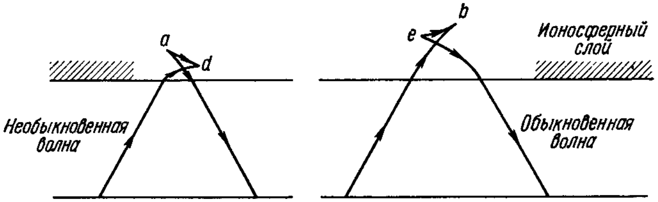


Рис. 29,7. Траектории, описываемые волновой нормалью в случае, отвечающем рис. 29,5. Точки *a*, *b*, *d*, *e* на кривых соответствуют точкам *a*, *b*, *d*, *e* на рис. 29,5.

(на рис. 29,6, *б*, т. е. при $u > 1$, граничные кривые L не всегда отвечают распространению в меридиональной плоскости на экваторе).

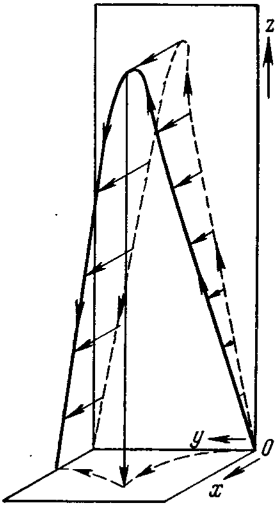


Рис. 29,8. Траектория луча в плоском слое магнитоактивной плазмы (угол падения $\theta_0 = 5°$, обыкновенная волна, угол между осью y и горизонтальной проекцией магнитного поля $\varphi_H = -27°$).

Траектории волновых нормалей и лучей. Несимметрия кривых $q(v)$ соответствует тому, что падающая волна ($q > 0$) и отраженная волна ($q < 0$) на том же уровне v имеют разные направления волновой нормали. Другими словами, траектория, описываемая волновой нормалью, весьма сложна $\left(\text{для этой траектории } \frac{dz}{dy} = \operatorname{ctg}\theta = \frac{q(\theta)}{p}\right)$. В качестве примера на рис. 29,7 приведены траектории нормали для случая, изображенного на рис. 29,5. Своеобразная петля в вершине траектории связана с тем, что для необыкновенной волны после достижения значения $q = 0$ (нормаль горизонтальна) дальнейшее уменьшение q (в области $q < 0$) на некотором участке отвечает росту v. Для обыкновенной волны, наоборот, максимальное значение v достигается при $q > 0$ и $q = 0$ лишь в точке *e* траектории, соответствующей точке *e* на рис. 29,5.

Причудливый ход кривых на рис. 29,7 и на аналогичных графиках (см. [236, 276, 277]), вообще говоря, не свидетельствует о наличии в области отражения каких-либо физических особенностей. Этот вывод связан, во-первых, с тем, что на кривых $q(v)$, изображенных на рис. 29,1—29,5, нет каких-либо особенностей (речь идет об области значений v, отвечающих петле на рис. 29,7). Во-вторых, непосредственное физическое значение имеют не траектории нормалей, а другие кривые — траектории лучей (волновых пакетов, сигналов). На этих же траекториях «петли» нет, и, если не говорить об особых случаях, они ведут себя плавным образом.

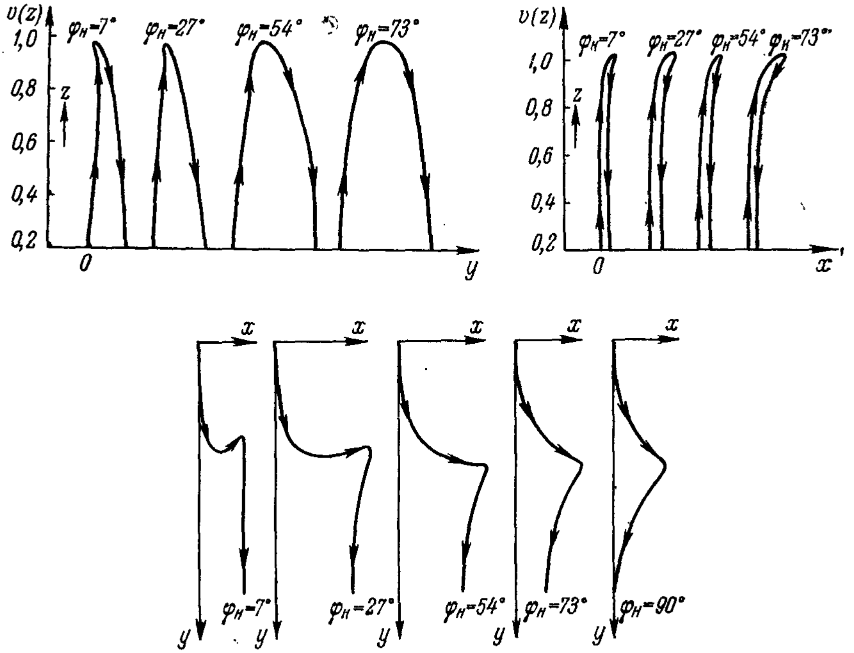


Рис. 29,9. Проекции траекторий лучей на координатные плоскости при различных углах φ_H и $\theta_0=5^\circ$ (для обыкновенной волны).

Траектория луча определяется уравнением

$$\frac{dx}{v_{\text{гр}\,x}}=\frac{dy}{v_{\text{гр}\,y}}=\frac{dz}{v_{\text{гр}\,z}}, \qquad (29,19)$$

где $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}=\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ — вектор групповой скорости (см. § 24).

В то время как нормаль к волне всегда лежит в плоскости падения (выше — плоскость yz), вектор групповой скорости, вообще говоря, имеет слагающую и по оси x. Таким образом, сигнал описывает некоторую пространственную кривую типа изображенной на рис. 29,8. Проекции траекторий лучей на координатные плоскости изображены на рис. 29,9 и 29,10; на рис. 29,11 приведены при том же угле $\theta_0 = 5°$, как и на рис. 29,7 и 29,8, траектории волновой нормали. На рис. 29,7—29,10, относящихся к обыкновенной волне [236], слой считается линейным и φ_H — угол между осью y и проекцией магнитного поля на плоскость xy.

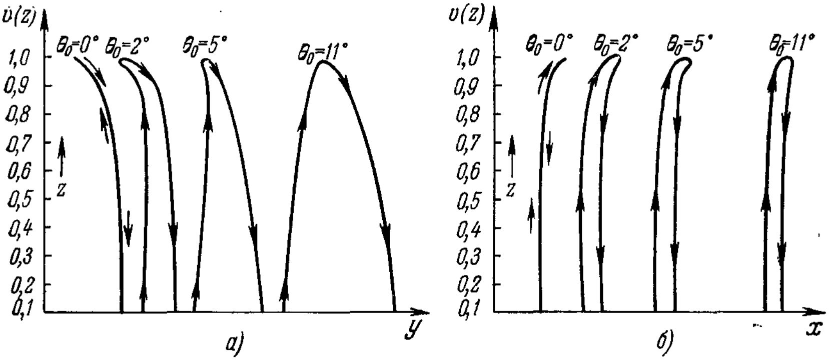


Рис. 29,10. Проекции траекторий лучей при различных углах θ_0 и $\varphi_H = 27°$ (для обыкновенной волны).

Ряд траекторий лучей, значения групповой скорости радиоволн в ионосфере и другие относящиеся сюда данные приведены в работах [101, 236, 244, 246, 264—268, 279, 281]; кроме того, о траекториях лучей при нормальном падении речь еще пойдет в § 35. К этому же кругу вопросов относится вычисление траекторий «свистящих атмосфериков» [26, 96, 97, 280]. (В этом случае $u \gg 1$ и обычно можно пользоваться формулой (11,24) для $\tilde{n}_2^2$.)

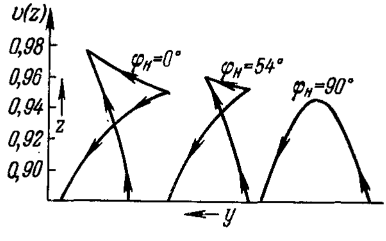


Рис. 29,11. Траектории волновой нормали при $\theta_0 = 5°$ и различных значениях φ_H (для обыкновенной волны).

Остановимся на некоторых особенностях лучевых траекторий.

Из соображений симметрии ясно, что при распространении волн в плоскости магнитного меридиана траектория луча лежит в той же плоскости. Далее, вершине траектории луча (точке отражения луча) в произвольном случае отвечает не точка $q = 0$ (горизонтальное направление волновой нормали), а точка, где горизонтален вектор групповой скорости $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$, т. е.

$$v_{\text{гр}\,z} = \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = v_{\text{гр}\,x'}\beta_1 + v_{\text{гр}\,y'}\beta_2 + v_{\text{гр}\,z'}\beta_3 = 0. \qquad (29,20)$$

Здесь $\boldsymbol{v}_{\text{гр}\,x'y'z'}$ — компоненты $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ в системе координат с вектором $\boldsymbol{H}^{(0)}$, направленным по оси z' (см. (24,14)), а β_1, β_2 и β_3 суть косинусы углов между осями x', y', z' и используемыми нами осями x, y, z (ось z направлена по нормали к неоднородному слою

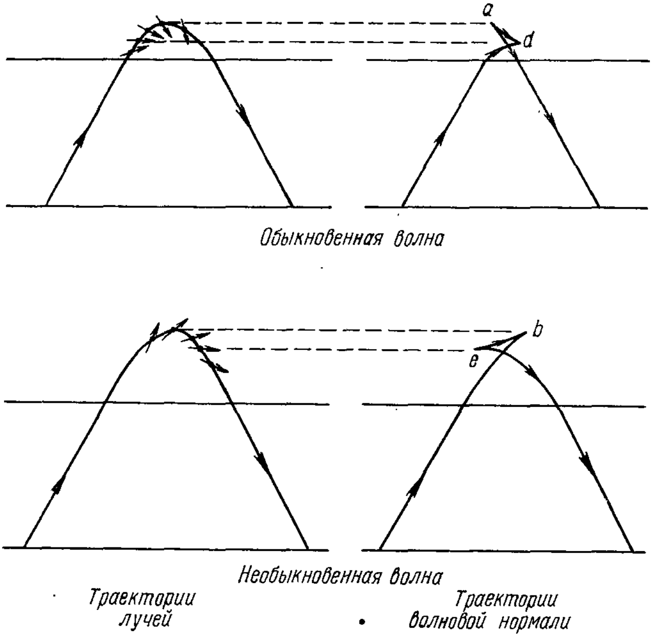


Рис. 29,12. Взаимосвязь между проекциями траекторий лучей на плоскость падения и траекториями волновых нормалей в случае, отвечающем рис. 29,5 и 29,7. Стрелки на траекториях лучей указывают направления нормалей.

или, условно говоря, направлена вертикально). В силу (24,14) можно видеть, что условие $v_{\text{гр}\,z} = 0$ принимает вид $\gamma' \dfrac{\partial n\gamma}{\partial \gamma} = \beta_3 \dfrac{\partial n}{\partial \gamma}$, или

$$n = \frac{\beta_3 - \gamma\gamma'}{\gamma'} \frac{\partial n}{\partial \gamma}, \qquad (29,21)$$

где $\gamma' = \cos\theta$ — косинус угла θ между нормалью к волне и осью z (нормаль к слою), γ — косинус угла между нормалью к волне и полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и β_3 — косинус угла между осью z и $\boldsymbol{H}^{(0)}$ (т. е. осью z'). При нормальном падении $\gamma' = 1$, $\gamma = \beta_3 = \cos\alpha$ и получается известное условие отражения $n = 0$. В изотропной среде, когда $\boldsymbol{H}^{(0)} = 0$ и $\dfrac{\partial n}{\partial \gamma} = 0$, из выражения, предшествующего (29,21), получается очевидное сразу условие отражения $\gamma' n = n \cos\theta =$

$=0$; отсюда при наклонном падении, в точке отражения $\cos\theta=0$ и, учитывая закон преломления, получается известное условие $n\sin\theta=n=\sin\theta_0$. Обращаясь к рис. 29,4 и 29,5, естественно думать, что отражение луча будет иметь место в точках, где кривые поворачивают вниз и достигается максимальное значение v. Этим точкам отвечает, очевидно, условие

$$\frac{dq}{dv}=\infty. \qquad (29,22)$$

Это предположение подтверждается расчетом [277] (другими словами, условия (29,21) и (29,22) эквивалентны). Разумеется, в тех частных случаях, когда кривые $q_{1,2}(v)$ симметричны, вершина траектории луча лежит при $q_{1,2}=0$. Взаимосвязь между траекториями нормалей и проекциями траекторий лучей на плоскость падения ясна из рис. 29,12.

Некоторые особые случаи. Приведенные графики функции $q_{1,2}(v)$ и траекторий лучей и волновых нормалей отвечают типичным условиям. Помимо того, имеются отдельные случаи, когда картина усложняется. Эти усложнения, если иметь в виду монотонные плавные слои, связаны со своеобразным поведением показателей преломления $n_{1,2}$ в магнитоактивной плазме при $v\approx1$ и малых углах α между нормалью к волне и полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$.

В применении к наклонному падению картину можно выяснить на графиках $q_{1,2}(v)$, а также в результате построения поверхности волновых векторов. Для последней цели из некоторого центра проводится радиус-вектор с длиной $n_{1,2}$ и под углом θ с вертикалью (с осью z); направление $\boldsymbol{H}^{(0)}$, а также параметры v и u при этом фиксируются. Сечение получающейся поверхности $n_{1,2}(\theta,\boldsymbol{H}^{(0)},v,u)$ плоскостью падения определяет некоторую плоскую кривую. Такие кривые для обыкновенной волны, распространяющейся в плоскости магнитного меридиана, приведены на рис. 29,13 для различных значений v (см. [266]; ось z направлена вверх, $n_2=1$ при $v=1$, $\lambda_0=\frac{2\pi c}{\omega}=80$ *м*, $H^{(0)}=0{,}5$ *эрст*; $\chi=25°$, т. е. магнитное наклонение $I=\frac{\pi}{2}-\chi=65°$) *).

Вся поверхность n_2 при данном v получается из соответствующей кривой рис. 29,13 в результате ее вращения вокруг поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ (это справедливо, конечно, только при совпадении плоскости чертежа, т. е. плоскости падения, с плоскостью магнитного меридиана). На рис. 29,13 обращает на себя внимание тот факт, что при $v \to 1$ кривые $n_2(\theta)$ стягиваются к прямой; на концах этой прямой (точки a) $n_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{1+\sqrt{u}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}}$, что отвечает значению n_2 при $v = 1$ и $\alpha = 0$ (см. (11,9)).

---

*) В северном полушарии земное магнитное поле направлено вниз в соответствии с направлением стрелки на рис. 29,13. При нормальном падении на слой это означает, что в формулах предыдущих параграфов $\cos\alpha<0$, а в некоторых случаях фактически фигурирует $|\cos\alpha|$.

Из графиков $\tilde{n}^2_{1,2}$, приведенных в § 11 для $u < 1$, легко видеть, что при значениях v, близких к $v = 1$, кривые $n_2 = \text{const}$ действительно будут как бы обволакивать прямую aa на рис. 29,13.

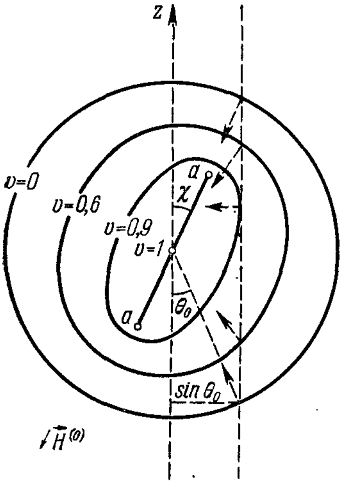


Рис. 29,13. Показатель преломления n_2 для обыкновенной волны в зависимости от угла θ и параметра v ($H^{(0)} = 0,5$ *эрст*, $\alpha = 25°$, $\lambda_0 = 80$ *м*).

Значениям $n(v, \theta)$, удовлетворяющим закону преломления (29,12), отвечают точки пересечения кривых $n(v, \theta)$ на рис. 29,13 с пунктирной вертикальной прямой, проходящей на расстоянии $\sin\theta_0$ от центра графика (в точках пересечения кривой n_2 с вертикальной прямой имеет место равенство $n_2 \sin\theta = \sin\theta_0$). Таким образом, в точке пересечения кривой n_2 и вертикальной прямой направление волновой нормали совпадает с направлением радиуса вектора, а направление луча совпадает с нормалью к кривой $n_2(v, \theta)$. На рис. 29,13 направления лучей указаны пунктирными стрелками. Если бы плоскость падения не совпадала с плоскостью магнитного меридиана, то пунктирные стрелки соответствовали бы проекциям направлений лучей.

Из рис. 29,13 ясна одна интересная особенность. При малых углах θ_0, пока $\sin\theta_0 < \sqrt{\frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}} \sin\chi$, вертикальная прямая пересекается с прямой aa. В точке пересечения обыкновенный луч, очевидно, перпендикулярен к прямой aa и, следовательно, перпендикулярен к направлению магнитного поля; направление луча при пересечении прямой aa меняется на противоположное. Таким образом, при $\theta_0 < \theta_{\text{к}2}$ отражение обыкновенных лучей происходит при $v = 1$, т. е. всегда на одной и той же высоте. При этом угол $\theta_{\text{к}2}$ определяется соотношением

$$\sin\theta_{\text{к}2} = \sqrt{\frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}} \sin\chi = \sqrt{\frac{\omega_H}{\omega_H + \omega}} \sin\chi \qquad (29,23)$$

(χ — угол между полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и осью z).

Траектория луча при $\theta_0 < \theta_{к2}$ имеет своеобразное «острие» в точке отражения, как это ясно из рис. 29,14, *б* (на этом рисунке приведены траектории лучей, отражающихся от линейного слоя

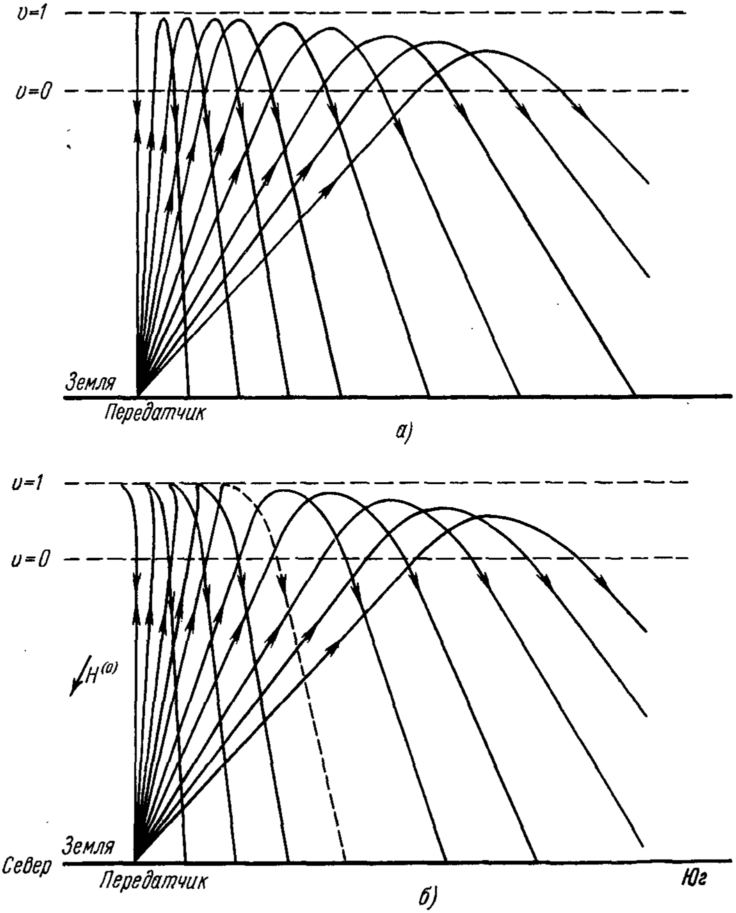


Рис. 29,14. Траектории лучей, отражающихся от линейного слоя (обыкновенная волна, $\lambda_0 = 80$ *м*): *а*) изотропный слой; *б*) $H^{(0)} = 0,5$ *эрст*, $\chi = 25°$ (магнитное поле лежит в плоскости падения). Пунктиром показан отраженный луч при критическом угле падения $\theta_{к2}$.

при $H^{(0)} = 0,5$ *эрст*, $\chi = 25°$, $\lambda_0 = 80$ *м*; на рис. 29,14, *а* приведены траектории для того же слоя, но при $H^{(0)} = 0$). При углах падения $\theta_0 > \theta_{к2}$ отражение носит уже характер, в качественном отношении близкий к имеющему место в изотропном случае (речь идет о распространении волн в плоскости магнитного меридиана, когда лучи не выходят из этой плоскости). При распространении не в плоскости магнитного меридиана, как легко видеть, лучи в точке отражения не могут иметь «острия», так как прямая *аа* никогда не достигается (в этом случае на рис. 29,13, если считать вектор $\boldsymbol{H}^{(0)}$ лежащим в плоскости чертежа, плоскость падения уже не совпадает с плоскостью чертежа и, следовательно, волновая нормаль тоже не лежит в плоскости чертежа). Физически, конечно, не может быть существенной разницы между «острием» и траекторией луча вблизи точки отражения при распространении в плоскости, очень близкой к меридиональной. Сглаживание разницы связано не только с близостью траекторий в этих случаях, но и с тем, что вблизи точки отражения неприменима геометрическая оптика, а следовательно, и сама лучевая трактовка. Тем не менее лучевые траектории позволяют составить известное представление о распространении волн и в области отражения, поскольку для плавного слоя область применимости геометрической оптики обычно весьма широка и не включает в себя лишь весьма небольшой район у самой «точки отражения».

Просачивание волн и эффект «утраивания» сигналов при наклонном падении. Критический угол падения $\theta_{\text{к}2}$ (см. (29,23)) имеет тот смысл, что при этом угле в точке отражения — при $v = 1$, волновая нормаль для обыкновенной волны параллельна магнитному полю $\boldsymbol{H}^{(0)}$. В соответствии со сказанным ранее нормаль $\nabla\Psi$ может быть параллельна $\boldsymbol{H}^{(0)}$ только при распространении в меридиональной плоскости, поскольку нормаль всегда лежит в плоскости падения. Как известно из рассмотрения распространения волн при нормальном падении, если направление волновой нормали приближается к направлению поля, то точка отражения «перескакивает» от значения $v = 1$ к значению $v = 1 + \sqrt{u}$ (в этом и состоит эффект «утраивания», причем имеется в виду случай $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} < 1$; см. § 28). Таким образом, ясно, что при критическом угле падения $\theta_{\text{к}2}$ луч не отразится на уровне $v = 1$, а пойдет дальше. Однако, отразившись на некотором более высоком уровне, луч при регулярном распространении уже не сможет вернуться обратно, так как он пойдет по другому пути, волновая нормаль уже не станет при $v = 1$ параллельной $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и энергия волны поглотится в резонансной области. Чтобы яснее проследить характер распространения вблизи критического угла падения, когда геометрическая оптика неприменима, целесообразно опять обратиться к кривым $q_{1,2}(v)$.

На рис. 29,15 представлены такие кривые [269] для случая $u = \frac{1}{4}$ и $\chi = 22°$, когда $\theta_{\text{к}2} = 12{,}5°$. Как ясно из рис. 29,15, *б*, при $\theta_0 = \theta_{к2}$ в точке $v = 1$ обыкновенная ветвь 2 переходит во вторую необыкновенную ветвь 1; в дальнейшем эта волна после отражения уйдет в область больших значений q (область ниже

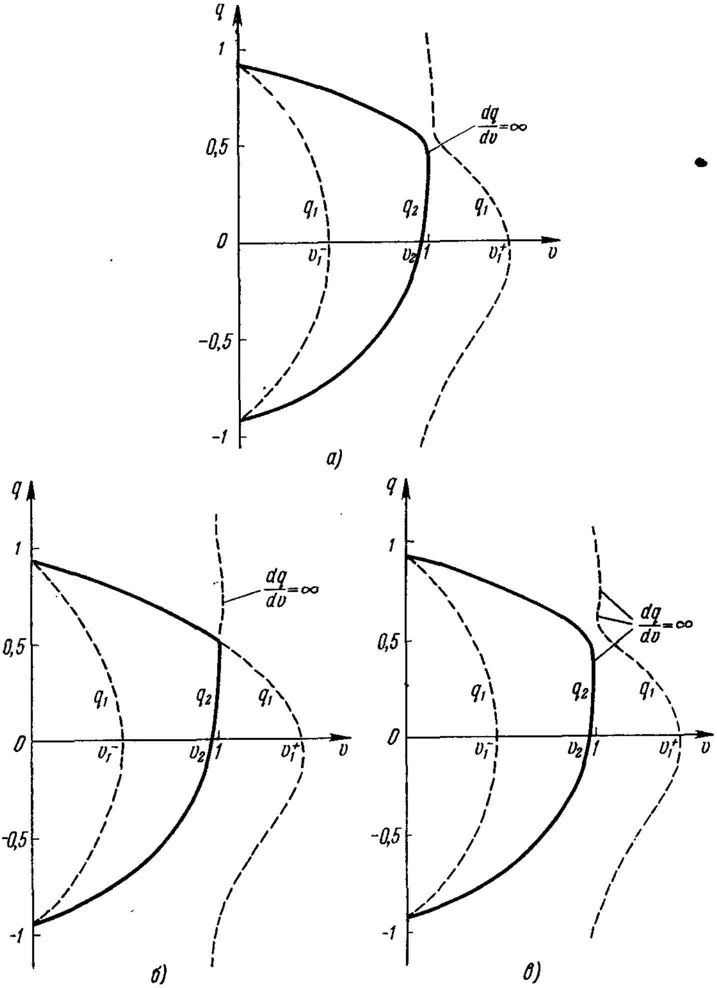


Рис. 29,15. Функции $q_{1,2}(v)$ при распространении в меридиональной плоскости при $u=\frac{1}{4}$ и $\chi=22°$: *а*) $\theta_0=10°$; *б*) $\theta_0=\theta_{к2}=12°30'$; *в*) $\theta_0=15°$.

точки $v_{10}^{(+)}$), где и поглотится на уровне $v_{1\infty}$. При углах θ_0, близких к $\theta_{к2}$, формально, если опираться на графики $q_{1,2}(v)$, обыкновенная волна не должна переходить в необыкновенную. Физически же ясно, что такой переход будет иметь место в некотором интервале углов вблизи $\theta_{\text{к}2}$. В этой области геометрическая оптика при $v \approx 1$ неприменима к обеим волнам, имеет место их взаимодействие и, следовательно, эффект просачивания; по своей природе этот эффект такой же, как и при нормальном падении (см. § 28). Количественная теория явления в случае наклонного падения, насколько нам известно, еще не развита.

Весьма любопытно, что при зондировании ионосферы просочившуюся через область $v \approx 1$ обыкновенную волну все же удается наблюдать. Дело в том, что до сих пор речь все время шла о регулярной картине, имеющей место для плавных слоев. Фактически же в ионосфере имеются неоднородности, приводящие к рассеянию волн. Поэтому просочившаяся волна в результате рассеяния вблизи точки отражения $\left(\text{т. е. вблизи точки } \frac{dq}{dv} = \infty \text{ на правой кривой } q_1 \text{ на рис. 29,15, а практически вблизи точки } v_{10}^{(+)}\right)$ частично пойдет обратно по тому же пути и вернется на Землю. Пропутешествовавший таким образом сигнал вернется позже сигналов 1 и 2, отразившихся на более низких уровнях, т. е. будет наблюдаться эффект «утраивания» сигналов при наклонном падении. Именно о таком эффекте мы упоминали в § 28. Этот эффект генетически связан с эффектом «утраивания» при нормальном падении, но радикально от него отличается — он наблюдается только при участии рассеяния волн. Кроме того, эффект наблюдается, конечно, только при излучении передатчиком волн под углами $\theta_0 \approx \theta_{\text{к}2}$, а также при приеме отраженных волн в этом же направлении. Такой эффект наблюдался [263, 264, 270] при отражении радиоволн от F-слоя в условиях, когда $\chi = 18°$, $\omega = 2\pi \cdot 4{,}65 \cdot 10^6$, $\omega_H = 2\pi \cdot 1{,}55 \cdot 10^6$, (т. е. $\sqrt{u} = 0{,}334$), $\theta_{\text{к}2} = 8{,}7°$. Амплитуда третьего сигнала в зависимости от разности $\theta_0 - \theta_{\text{к}2}$ имеет вид гауссоподобной кривой, причем в опытах [264] квадрат амплитуды (мощность) уменьшался в два раза при $\theta_0 - \theta_{\text{к}2} = 0{,}42°$.

Итак, независимо от того, какова его дальнейшая судьба, при $\theta_0 \approx \theta_{\text{к}2}$ обыкновенный сигнал проходит через «дыру» в слое на уровне $v = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1$. Помимо отмеченных выше двух возможностей: поглощения сигнала в области $v_{1\infty}$ и частичного его рассеяния (в том числе рассеяния в обратном направлении), сигнал может вообще пройти через слой; это имеет место, если электронная концентрация не достигает значения $N \approx \frac{\omega^2 + \omega\omega_H}{\frac{4\pi e^2}{m}}$, необходимого для отражения необыкновенного сигнала от области вблизи точки $v_{10}^{(+)}$ (см. рис. 29,15, *а*). Другими словами, сигнал проходит через слой, если критическая частота для третьего отражения $f_{\text{к}3} = f_{\text{к}z}$ ниже несущей частоты сигнала f (см. также § 35).

Просачивание волн при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} > 1$. Эффект просачивания волн может иметь место и при $u > 1$, т. е. для волн с длиной, большей длины $\lambda_H = \frac{2\pi c}{\omega_H}$. Как и в рассмотренном выше случае $u < 1$, просачивание возможно, когда направление волновой нормали в области $v \approx 1$ достаточно близко к направлению магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$. Направление нормали и вектор $\boldsymbol{H}^{(0)}$ параллельны, если плоскость падения является плоскостью магнитного меридиана и $\frac{q}{p} = \frac{n \cos\theta}{\sin\theta_0} = \operatorname{ctg}\theta = \operatorname{ctg}\chi$, т. е. угол θ волновой нормали с осью z равен углу χ между полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и осью z. Как сказано и ясно из графиков функций $\tilde{n}_{1,2}^2(v)$ при $u > 1$ (см., например, рис. 28,1, *б*), взаимодействие волн при $\chi \to 0$ происходит при $v \approx 1$. Для $v = 1$ и $\chi = 0$ находим:

$$n_{1,2}^2(v=1) = p^2 + q^2 = 1 - \frac{1}{1 \pm \sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u} \pm 1}.$$

Таким образом, для критического угла $\theta_{\text{к}}$ получаем:

$$\frac{n_{1,2}(v=1)\cos\chi}{\sin\theta_{\text{к}}} = \operatorname{ctg}\chi,$$

или

$$\sin\theta_{\text{к}1,2} = \sqrt{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u} \pm 1}}\sin\chi = \sqrt{\frac{\omega_H}{\omega_H \pm \omega}}\sin\chi, \tag{29,24}$$

где знак (+) относится к обыкновенной волне 2 и знак (—) к необыкновенной волне 1. (Заметим, что для обыкновенной волны $\theta_{\text{к}2} < \chi$ и для необыкновенной волны $\theta_{\text{к}1} > \chi$.) При $u < 1$ и рассматриваемых положительных значениях $\tilde{n}_{1,2}^2$ критический угол существует только для обыкновенной волны. Формула (29,24) при этом тождественна с формулой (29,23), полученной в результате геометрического построения. При $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} > 1$ для обыкновенной волны критический угол также всегда существует. Для необыкновенной волны взаимодействие имеет место и критический угол существует только при условии $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1}\sin^2\chi \leqslant 1$, т. е. условии

$$\sqrt{u} \geqslant \frac{1}{\cos^2\chi}. \tag{29,25}$$

Для очень низких частот $\sqrt{u} \to \infty$ и $\theta_{\text{к}} \to \chi$, т. е. взаимодействие происходит при распространении вдоль силовых линий магнитного поля. Этот случай реализуется для «свистящих атмосфериков» [96].

При углах падения θ_0, близких к $\theta_{\text{к}\,1,\,2}$, кривые $q_{1,\,2}(v)$ при $u > 1$ имеют ряд особенностей, подобно тому как это было продемонстрировано на рис. 29,15 для области $u < 1$. Мы не будем здесь подробнее останавливаться на этом вопросе, который исследован далеко не исчерпывающим образом (см. [266, 277]). С точки зрения приложений особенно важна возможность прохождения волн через слой. При нормальном падении и $u_L = u \cos^2 \alpha > 1$ этот вопрос рассмотрен в конце § 28. Роль наклонного падения состоит в том, что эффект просачивания может сильно возрасти и оказаться заметным при немалых углах χ между полем и вертикалью, т. е. проявляться не только на высоких широтах. Физически дело сводится просто к тому, что из-за рефракции в слое волновая нормаль может приблизиться к направлению поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ как раз в области взаимодействия $v \approx 1$. Именно это и имеет место при углах падения, близких к $\theta_{\text{к}1,\,2}$.

Из рис. 28,10, *б*, таким образом, ясно, что при $\theta_0 \approx \theta_{\text{к}1}$ необыкновенная волна будет проходить через весь слой, как бы толст он ни был (речь идет о волне, являющейся необыкновенной при $v < 1$). Обыкновенная же волна при $\theta_0 \approx \theta_{\text{к}2}$ может пройти через область $v \approx 1$ и распространяться дальше в виде необыкновенной волны *). Эта волна пройдет через слой только в том случае, если точка $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$ ею не достигается $\left(\text{т. е. если максимальная концентрация электронов в слое } N_{\max} < \dfrac{\omega^2 + \omega\omega_H}{\frac{4\pi e^2}{m}}\right)$ **).

Доказательство теоремы взаимности. Решение задачи о распространении и отражении волн от слоев магнитоактивной плазмы, даже в пределах применимости геометрической оптики, обычно связано с использованием графических или численных методов. Картина еще больше усложняется, если нужно учитывать взаимодействие волн, вычислять их интенсивность и т. д. В этой связи особенно полезно знать общие свойства решений уравнений поля. Примером таких общих свойств является известная электродинамическая теорема взаимности (см., например, [194], § 9; [12], § 69 и [225], § 77). Правда, в своей обычной форме теорема взаимности при наличии магнитоактивной среды, вообще говоря, неприменима. Именно этот факт позволяет создать световой или радиовентиль — систему, пропускающую излучение только в одном направлении (см. [283]). Однако некоторая обобщенная теорема взаимности справедлива и в случае магнитоактивной среды; кроме того, в некоторых частных случаях и при наличии магнитоактивной среды можно использовать обычную теорему взаимности или ее следствия.

---

*) Точнее, как мы указывали в § 11, волна, отражающаяся от точки $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$, в области $v > 1$ называется необыкновенной при $\alpha \neq 0$ и называется обыкновенной при $\alpha = 0$.

**) При наклонном падении необыкновенная волна отражается несколько ниже, чем от области, где $v = v_{10}^{(+)}$; здесь, очевидно, этот факт не учитывается, так как при $\theta_{\text{к}2} \ll 1$ соответствующее отличие от случая нормального падения невелико.

Для удобства проведем доказательство теоремы взаимности с самого начала. Для этой цели рассмотрим два источника поля 1 и 2, в которых плотности сторонних токов равны соответственно $\boldsymbol{j}^{(1)}_{\text{стор}}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{j}^{(2)}_{\text{стор}}(\boldsymbol{r})$. Создаваемые этими источниками поля $\boldsymbol{E}^{(1)}$, $\boldsymbol{H}^{(1)}$ и $\boldsymbol{E}^{(2)}$, $\boldsymbol{H}^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^{(1)}=i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}^{(1)}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(1)}_{\text{стор}},\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}^{(1)}=-\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}^{(1)},\qquad(29{,}26)$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}^{(2)}=i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}^{(2)}+\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(2)}_{\text{стор}},\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}^{(2)}=-i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}^{(2)};\qquad(29{,}27)$$

здесь все величины считаются изменяющимися по закону $e^{i\omega t}$, а под $\boldsymbol{D}$ при наличии поглощения нужно понимать $\boldsymbol{D}-i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}$ ($\boldsymbol{D}$ — электрическая индукция, $\boldsymbol{j}$ — плотность тока проводимости); среда пока считается совершенно произвольной, в силу чего и введена магнитная индукция $\boldsymbol{B}$.

Умножая уравнения (29,26) соответственно на $\boldsymbol{E}^{(2)}$ и $\boldsymbol{H}^{(2)}$, а уравнение (29,27) на $-\boldsymbol{E}^{(1)}$ и $-\boldsymbol{H}^{(1)}$, складывая все эти уравнения и производя переход к дивергенциям с помощью формулы $\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}]=\boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$, получаем:

$$\operatorname{div}\{[\boldsymbol{E}^{(1)}\boldsymbol{H}^{(2)}]-[\boldsymbol{E}^{(2)}\boldsymbol{H}^{(1)}]\}=\frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j}^{(1)}_{\text{стор}}\boldsymbol{E}^{(2)}-\boldsymbol{j}^{(2)}_{\text{стор}}\boldsymbol{E}^{(1)})+$$
$$+\frac{i\omega}{c}\{(\boldsymbol{D}^{(1)}\boldsymbol{E}^{(2)}-\boldsymbol{E}^{(1)}\boldsymbol{D}^{(2)})+(\boldsymbol{H}^{(1)}\boldsymbol{B}^{(2)}-\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{H}^{(2)})\}.$$

При интегрировании этого выражения по объему первый член преобразуется в поверхностный интеграл и исчезает (поле предполагается должным образом убывающим на бесконечности; легко видеть, что поверхности разрыва также не дают вклада в интеграл). Поэтому теорема взаимности в своей обычной форме

$$\int\boldsymbol{j}^{(1)}_{\text{стор}}(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}=\int\boldsymbol{j}^{(2)}_{\text{стор}}(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}\qquad(29{,}28)$$

справедлива, если

$$\int \{(\mathbf{D}^{(1)}\mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)}\mathbf{D}^{(2)})+(\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{B}^{(2)}-\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{H}^{(2)})\}\,d\mathbf{r}=0, \qquad (29{,}29)$$

Для покоящихся сред при пренебрежении пространственной дисперсией и в предположении о линейности среды $D_i - i\frac{4\pi}{\omega}j_i = \varepsilon'_{ij}E_j$ и $B_i = \mu'_{ij}H_j$, где комплексные тензоры ε'_{ij} и μ'_{ij} могут зависеть от ω и координат. При этом выражение (29,29) принимает вид (по дважды встречающимся индексам проводится суммирование, и учтено, что $\varepsilon'_{ij}E_i^{(1)}E_j^{(2)} \equiv \varepsilon'_{ji}E_j^{(1)}E_i^{(2)}$ и т. п.):

$$\int \{(\varepsilon'_{ij}-\varepsilon'_{ji})\,E_j^{(1)}E_i^{(2)}+(\mu'_{ij}-\mu'_{ji})\,H_i^{(1)}H_j^{(2)}\}\,d\mathbf{r}=0. \qquad (29{,}30)$$

Отсюда очевидна справедливость теоремы взаимности (29,28) для сред с симметричными тензорами ε'_{ij} и μ'_{ij}. Для сред с несимметричными тензорами теорема взаимности (29,28) верной, вообще говоря, быть не может, что ясно из упомянутой возможности создать вентиль, пропускающий волны лишь в одном направлении.

Обобщение на случай магнитоактивной среды. Обобщение теоремы взаимности на случай магнитоактивной среды (тензор ε'_{ij} несимметричен, $\mu'_{ij} = \mu\delta_{ij}$; в плазме практически $\mu = 1$) достигается, если учесть, что из обобщенного принципа симметрии кинетических коэффициентов вытекает общее соотношение

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{H}^{(0)}) = \varepsilon'_{ji}(-\mathbf{H}^{(0)}) \qquad (29{,}31)$$

(см. (10,13) и [3, 10, 12]; для магнитоактивной плазмы соотношение (29,31) следует из выражений (10,12) для тензора ε'_{ij}). В силу (29,31) и условия (29,30) приходим к обобщенной теореме взаимности:

$$\int \mathbf{j}^{(1)}_{\text{стор}}(\mathbf{r})\,\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{H}^{(0)})\,d\mathbf{r} = \int \mathbf{j}^{(2)}_{\text{стор}}(\mathbf{r})\,\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r},-\mathbf{H}^{(0)})\,d\mathbf{r}. \qquad (29{,}32)$$

Здесь поле $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r},-\mathbf{H}^{(0)})$ есть поле, создаваемое источником 1 в случае, когда постоянное во времени (внешнее по отношению к рассматриваемым полям) магнитное поле равно $-\mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r})$, т. е. имеет везде другой знак, чем при нахождении поля $\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{H}^{(0)})$ от источника 2. Если среда не магнитоактивна, тензор ε'_{ij} и поля $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ от $\mathbf{H}^{(0)}$ вообще не зависят, и мы приходим, конечно, к симметричному тензору ε'_{ij} и старой теореме (29,28). Соотношение (29,32), являясь более общим, естественно слабее обычной теоремы взаимности (29,28), поскольку оно связывает поля $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$ не в одних и тех же условиях, а при противоположных направлениях поля $\mathbf{H}^{(0)}$. Тем не менее теорема (29,32) содержательна и показывает, например, что теорема взаимности справедлива в старой форме, если в силу симметрии или характера задачи

$$\boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{H}^{(0)}) = \boldsymbol{E}^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{H}^{(0)}) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{H}^{(0)}) = \boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{H}^{(0)}).$$

Именно к отысканию таких случаев в значительной мере и сводится рассмотрение, проведенное в [284—286].

Для источников, являющихся электрическими и магнитными точечными диполями в (29,32), нужно положить

$$\boldsymbol{j}^{(1,2)}_{\text{стор}} = i\omega \boldsymbol{P}^{(1,2)} + c \operatorname{rot} \boldsymbol{M}^{(1,2)} \quad \text{с} \quad \boldsymbol{P}^{(1,2)} = \boldsymbol{p}^{(1,2)} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{1,2})$$

и $\boldsymbol{M}^{(1,2)} = \boldsymbol{m}^{(1,2)} \delta(r - r_{1,2})$, где δ — дельта-функции. Тогда получаем:

$$\boldsymbol{p}^{(1)} \boldsymbol{E}^{(2)}(1, \boldsymbol{H}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(1)} \boldsymbol{H}^{(2)}(1, \boldsymbol{H}^{(0)}) = \\ = \boldsymbol{p}^{(2)} \boldsymbol{E}^{(1)}(2, -\boldsymbol{H}^{(0)}) - \boldsymbol{m}^{(2)} \boldsymbol{H}^{(1)}(2, -\boldsymbol{H}^{(0)}), \qquad (29{,}33)$$

где при преобразовании члена с $\boldsymbol{m}$ использовано уравнение $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{B}$, магнитная проницаемость μ принята равной единице и, например, $\boldsymbol{E}^{(2)}(1, \boldsymbol{H}^{(0)})$ есть поле электрического диполя $\boldsymbol{p}^{(2)}$ и магнитного диполя $\boldsymbol{m}^{(2)}$ в точке, где находятся диполи $\boldsymbol{p}^{(1)}$ и $\boldsymbol{m}^{(1)}$, причем внешнее поле есть $\boldsymbol{H}^{(0)}$.

Среды с несимметричным тензором μ'_{ij} и с пространственной дисперсией. Для сред с несимметричным тензором μ'_{ij} из обобщенного принципа симметрии кинетических коэффициентов следует, что $\mu'_{ij}(\boldsymbol{B}^{(0)}) = \mu'_{ji}(-\boldsymbol{B}^{(0)})$, где $\boldsymbol{B}^{(0)}$ — магнитная индукция, которая считается здесь «внешней» (независимой) по отношению к рассматриваемым полям с частотой ω (приведенный результат ясен из [12], § 88, если учесть, что среднее макроскопическое магнитное поле равно $\boldsymbol{B}$ и может заменяться на $\boldsymbol{H}$ только в немагнитной среде). Отсюда следует, что теорема (29,32) справедлива и для среды с несимметричным тензором μ'_{ij}, если только заменить в (29,32) $\boldsymbol{H}^{(0)}$ на $\boldsymbol{B}^{(0)}$, что можно было сделать и с самого начала. Впрочем, для ферритов, когда нужно вводить тензор μ'_{ij}, изменение знака $\boldsymbol{B}^{(0)}$ достигается обычно изменением знака внешнего поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и можно непосредственно пользоваться (29,32).

При учете пространственной дисперсии векторы $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ (для простоты считаем сразу, что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$) связаны интегральным или дифференциальным соотношением (вместо алгебраической связи $D_i = \varepsilon'_{ij} E_j$; см. (2,3)). Из принципа симметрии кинетических коэффициентов следует (см. [12], § 83), что при отсутствии внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ имеет место как раз равенство (29,29) и, таким образом, теорема взаимности справедлива в своей обычной форме. Тот же вывод получаем, если пространственная дисперсия учитывается путем использования связи типа (см. [10, 13])

$$D_i = \varepsilon'_{ij} E_j + \gamma_{ijl} \frac{\partial E_j}{\partial x_l} + \delta_{ijlm} \frac{\partial^2 E_j}{\partial x_l \partial x_m}. \qquad (29{,}34)$$

Свойства симметрии тензоров γ_{ijl} и δ_{ijlm} ($\gamma_{ijl} = -\gamma_{jil}$, $\delta_{ijlm} = \delta_{jilm}$) позволяют тогда прийти к (29,29) в результате интегрирования по частям (этот вывод эквивалентен предыдущему, поскольку сами свойства симметрии тензоров γ_{ijl} и δ_{ijlm} следуют из принципа симметрии кинетических коэффициентов).

Естественноактивные среды, как известно,— это среды, где нужно учитывать пропорциональный γ_{ijl} член в (29,34). Таким образом, в естественноактивных средах при $\boldsymbol{H}^{(0)} = 0$ справедлива обычная теорема взаимности (в соответствии с этим, как хорошо известно, используя естественноактивную среду, нельзя создать оптический вентиль).

При учете пространственной дисперсии (теплового движения) в магнитоактивной среде справедлива обобщенная теорема взаимности (29,32), т. е. пространственная дисперсия и здесь сама по себе изменений не вносит.

В качестве примера приложения теоремы взаимности в магнитоактивной среде укажем на такой результат [285]. При отражении волн от ионосферного слоя в плоскости магнитного меридиана (т. е. когда магнитное поле лежит в плоскости падения) теорема взаимности в своей обычной форме (т. е. без замены $\boldsymbol{H}^{(0)}$ на $-\boldsymbol{H}^{(0)}$) справедлива для антенн, излучающих и принимающих поле $\boldsymbol{E}$, лежащее в плоскости падения; то же имеет место, если обе антенны излучают и принимают поле $\boldsymbol{E}$, перпендикулярное к плоскости падения. Для двух антенн, одна из которых принимает поле $\boldsymbol{E}$ в плоскости падения, а другая излучает поле $\boldsymbol{E}$, лежащее в перпендикулярном направлении (или наоборот), тоже справедлива обычная теорема взаимности, но только для модулей поля (т. е. без учета фазы).

В §§ 27, 28 мы также могли убедиться в том, что в ряде случаев в согласии с обычной теоремой взаимности и в магнитоактивной плазме модули коэффициентов прохождения волн противоположного направления равны друг другу. Из теоремы (29,32), как уже отмечалось, ясно, что для доказательства полной применимости обычной теоремы взаимности в той или иной задаче для магнитоактивной среды достаточно показать, что электрическое поле волны не изменяется при замене $\boldsymbol{H}^{(0)}$ на $-\boldsymbol{H}^{(0)}$. Именно это и имеет место в тех из упомянутых случаев, когда в магнитоактивной плазме справедлива обычная теорема взаимности.

Глава VI

Отражение радиоволн от ионосферных слоев

§ 30. Введение. Отражение от произвольного плавного слоя

О распространении радиоволн в ионосфере. Земная ионосфера явилась исторически первым объектом, в применении к которому был изучен ряд вопросов теории распространения электромагнитных волн в неоднородной плазме. Понятно поэтому, что уже в предыдущих разделах мы неоднократно приводили примеры в применении именно к ионосферным слоям. Ниже рассматривается ряд существенных моментов, касающихся отражения волн от неоднородной среды, также преимущественно в приложении к ионосфере. Необходимо, однако, подчеркнуть, что большинство результатов имеет более общее значение. Кроме того, весь этот материал тесно связан с изложенным ранее, и его выделение в особую главу носит в значительной мере условный характер.

Распространению и отражению радиоволн от ионосферы и родственным проблемам посвящено огромное количество работ. Здесь приходится встречаться с многочисленными особенностями, касающимися распространения волн разной длины в различное время и на разных широтах; сюда же относятся разнообразные ионосферные возмущения, спорадические явления и т. п. Большинство этих интересных вопросов ниже оставлено без внимания, и нас по существу будет интересовать только одна задача: распространение и отражение радиоволн от плавного слоя плазмы. Со всем остальным материалом можно познакомиться в первую очередь в [32, 37, 41, 43, 46, 47, 97, 278, 287]. История и результаты ионосферных исследований в СССР освещены в [32, 287—289].

Особо нужно при этом указать на работы, посвященные распространению волн при учете случайных неоднородностей. В последние годы со всей ясностью выяснилось, что и в земной ионосфере и в солнечной короне всегда присутствуют те или иные неоднородности, приводящие к ряду эффектов. Упомянем о флуктуациях амплитуды и фазы отражающихся от ионосферы радиоволн, а также о флуктуациях амплитуды и угла прихода космического радиоизлучения, возникающих в результате прохождения ионосферы. К этому же кругу вопросов относится рассеяние радиоволн, идущих от Крабовидной туманности, при их прохождении через солнечную корону. Могут оказаться существенными, кроме того, рассеяние и рефракция космического радиоизлучения при его распространении в статистически неоднородной межзвездной и межпланетной среде.

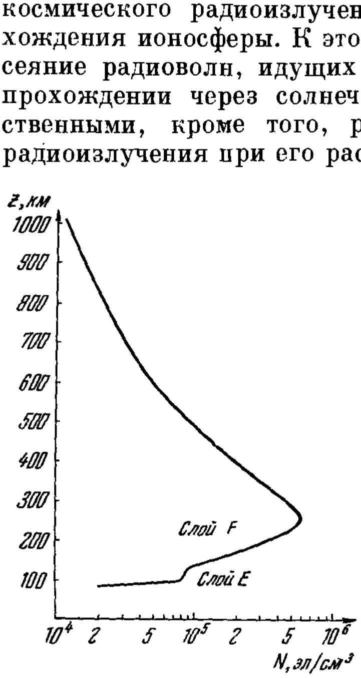


Рис. 30,1. Электронная концентрация N в ионосфере (средние широты, полдень, зима, годы минимума солнечной активности; приводятся некоторые усредненные значения).

Распространение волн разных типов при учете статистических неоднородностей составляет в настоящее время большую и в значительной мере самостоятельную область исследования, представляющую интерес с точки зрения радиофизики, практики радиосвязи, акустики, радиоастрономии и оптической астрономии. Эта область затрагиваться в настоящей книге не будет. Для известной ориентировки укажем лишь на некоторые относящиеся сюда обзорные и оригинальные работы [194, 244, 290—307]; см. также [32, 43, 47, 77].

Параметры ионосферы. Еще сравнительно недавно основным и практически единственным надежным методом определения электронной концентрации в ионосфере являлся метод радиозондирования с поверхности Земли. Сейчас для той же цели с успехом используются также радиоастрономические методы (исследование космического радиоизлучения), наблюдение отражения радиоволн от Луны и, наконец, измерения с помощью ракет и искусственных спутников. Полученная в результате усредненная зависимость электронной концентрации N от высоты над земной поверхностью приведена на рис. 30,1 (данные относятся к средним широтам, в полдень, зимой, в годы минимума солнечной активности). Концентрация молекул (всех нейтральных частиц) приведена на рис. 30,2, а электронная температура в верхних частях атмосферы — на рис. 30,3.

На этих рисунках свойства ионосферы отражены лишь в общих чертах. Фактически же в зависимости от ряда факторов (широты, сезона, времени суток и т. д.) распределение ионизации заметно изменяется. В качестве примера можно указать на появление

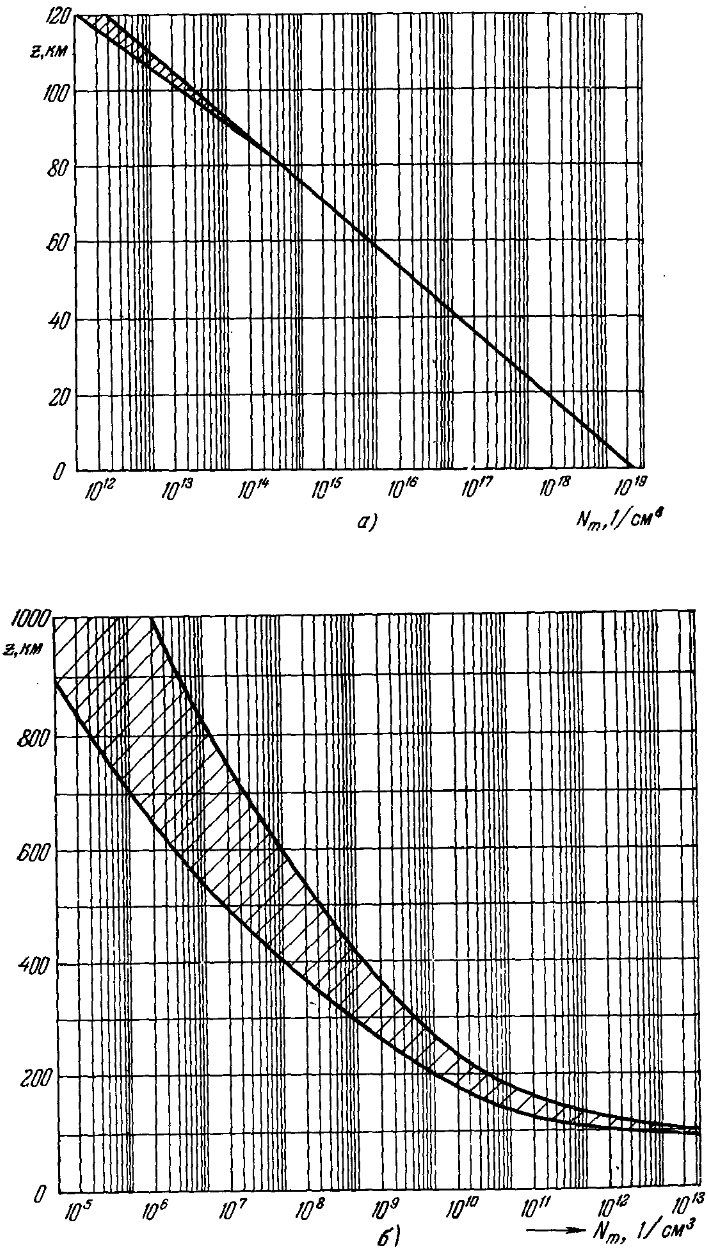


Рис. 30,2. Концентрация нейтральных частиц (молекул) N_m в атмосфере: *а*) высоты, меньшие 120 *км*; *б*) высоты, бо́льшие 100 *км* (значения концентрации лежат в пределах заштрихованной полосы, они зависят от времени суток и солнечной активности).

летом в нижней части F-слоя некоторого F_1-слоя, на появление спорадического E-слоя и т. д.

Реальные ионосферные слои, даже если не обращать внимания на локальные неоднородности концентрации электронов, не имеют какой-либо простой геометрической формы. Правда, весьма часто, например, F-слой в нижней его части хорошо аппроксимируется параболическим слоем

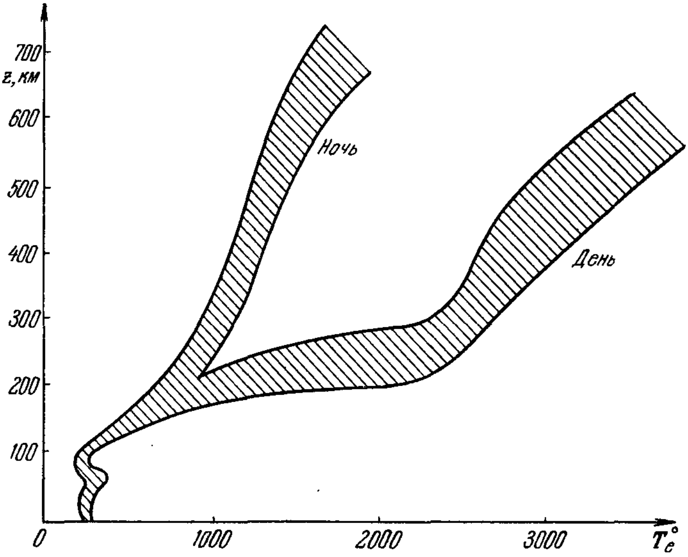


Рис. 30,3. Электронная температура в верхней атмосфере (значения температуры лежат в пределах заштрихованной области).

$$\left.\begin{aligned}
&N = N_{\max}\left(1 - \frac{z^2}{z_m^2}\right),\\
&\varepsilon = n^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} = 1 - \frac{f_{\text{к}}^2}{f^2}\left(1 - \frac{z^2}{z_m^2}\right),\\
&\omega = 2\pi f,\quad f_{\text{к}} = \sqrt{\frac{e^2 N_{\max}}{\pi m}} \approx 9\cdot 10^3 \sqrt{N_{\max}};\\
&N_{\max} = 1{,}24\cdot 10^4 f_{\text{к}}^2\ (f_{\text{к}} \text{ в } \textit{Мгц}),\\
&\lambda_{\text{к}} = \frac{c}{f_{\text{к}}} \approx \frac{10^5}{3\sqrt{N_{\max}}}\ \textit{м}.
\end{aligned}\right\} \quad (30{,}1)$$

Однако в начале слоя отступления от параболичности весьма значительны и вообще нет никаких оснований считать слой строго параболическим; не является, в частности, параболическим так называемый «простой слой», часто используемый в ионосферных расчетах (см. [32, 41, 43]).

Отражение волн от произвольного слоя. Поэтому весьма важно, что распространение и отражение радиоволн могут быть рассмотрены для произвольного (в широких пределах) ионосферного слоя. Именно, это имеет место в отношении любого плавного достаточно толстого слоя с одним максимумом, типа слоя, изображенного на рис. 30,4.

Дело в том, что вдали от точки отражения для волн данной частоты ω (точка A на рис. 30,4, *а*) *) можно воспользоваться приближением геометрической оптики, пригодным при известных предположениях для любой зависимости $\varepsilon'(z)$. В области же вблизи точки отражения A слой обычно можно считать линейным или, если точка A расположена вблизи максимума, параболическим. В первом из этих случаев при отсутствии поглощения имеет место полное отражение волн от слоя, поведение которого при значениях z, существенно бо́льших $z\,(\varepsilon = 0)$, не играет никакой роли. Во втором случае, имеющем место при частотах, близких к критической, может сказываться просачивание волн через слой. Решения для линейного, а также для параболического слоев известны (см. § 17), и таким образом, смыкая эти решения с решением геометрической оптики, получаем решение для произвольного слоя. Условие применимости этого последнего решения (при замене слоя вблизи точки A линейным) состоит в том, чтобы уклонение рассматриваемого слоя от линейного вблизи точки A было мало, т. е. чтобы соблюдалось неравенство

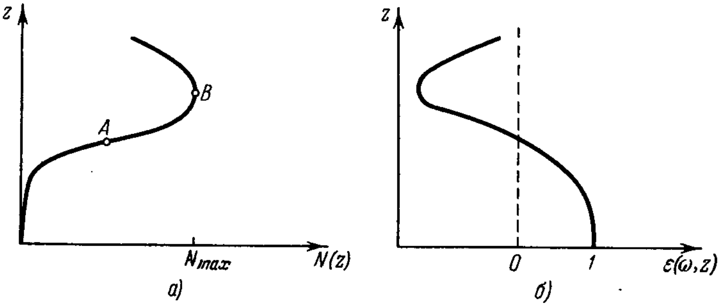


Рис. 30,4. Произвольный плавный слой с одним максимумом.

$$\left|\frac{d^2\varepsilon'}{dz^2}\right|_0 \Delta z \ll \left|\frac{d\varepsilon'}{dz}\right|_0; \qquad (30,2)$$

---

*) Точкой отражения везде несколько условно называем точку, где $\varepsilon(\omega) = 0$, т. е. точку $z\,(\varepsilon = 0)$.

здесь производные берутся в точке $z\ (\varepsilon = 0)$ и Δz — расстояние от точки A, начиная с которого отклонение точного решения от решения геометрической оптики достаточно мало.

Как будет ясно из дальнейшего, описанный прием имеет широкую область применимости, причем основной интерес имеет первый случай, когда слой вблизи точки A можно считать линейным. Замена слоя параболическим нужна лишь в непосредственной близости от критической частоты, имеет очень небольшое практическое значение и будет рассмотрена в § 33.

С точки зрения изучения ряда нерегулярных явлений представляет также интерес исследование прохождения и отражения радиоволн через тонкие слои, где использование приближения геометрической оптики, вообще говоря, недопустимо. Отражение и прохождение волн в случае слоев произвольной толщины и, в частности, тонких слоев уже были рассмотрены в § 18.

Итак, будем слой вблизи точки отражения считать линейным (решение для линейного случая определяется приведенными в § 17 формулами (17,2), (17,4), (17,5) (17,6) и т. д.).

Если поглощение отсутствует и расстояние Δz от точки $z\ (\varepsilon = 0)$ достаточно велико и поэтому удовлетворяет неравенству (см. (17,7))

$$\Delta z = z\,(\varepsilon = 0) - z \gg \left(\frac{c^2}{\omega^2 \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/3} = \left(\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2 \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/3}, \qquad (30,3)$$

то поле E для линейного слоя имеет вид (см. (17,6), (17,2)):

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{3A}{\sqrt{\pi}}\,\zeta^{-1/4}\cos\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \zeta &= \left(\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right)^{1/3}\Delta z = \\ &= \left(\frac{\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{2/3}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 [z\,(\varepsilon = 0) - z] = \left(\frac{\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{2/3}\varepsilon\,(z). \end{aligned}\right\} \qquad (30,4)$$

Единственное изменение, которое внесено здесь в формулы § 17, состоит в том, что там $\varepsilon = 1 - \frac{z}{z_1} = 1 - \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 z$, а здесь $\varepsilon = \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 [z\,(\varepsilon = 0) - z]$; поэтому в формулах § 17 нужно положить

$$z_1 = \frac{1}{\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0} = -\frac{1}{\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)_0} \quad \text{и} \quad z_1 - z = \Delta z = z\,(\varepsilon = 0) - z.$$

Условие (30,3) означает, что $\zeta \gg 1$, и именно поэтому для поля E можно пользоваться асимптотическим представлением бесселевых функций (30,4), имеющим смысл приближения геометрической оптики. Последнее ясно, в частности, из того, что условие (30,3) есть по существу условие применимости геометрической оптики (16,22)

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\left|\frac{dn}{dz}\right|}{n^2}\ll 1,$$

так как

$$\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{\left|\frac{dn}{dz}\right|}{n^2}=\frac{\lambda_0\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|}{4\pi\varepsilon^{3/2}}=\frac{\lambda_0}{4\pi\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0^{1/2}(\Delta z)^{3/2}}.$$

Выражение (30,4) можно записать в виде:

$$E=\frac{3A}{\sqrt{\pi}\left(\frac{\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/6}\sqrt[4]{\varepsilon(z)}}\cos\left(\frac{\omega}{c}\int\limits_z^{z(\varepsilon=0)}\sqrt{\varepsilon(z)}\,dz-\frac{\pi}{4}\right). \qquad (30,5)$$

Сравнивая (30,5) с общим выражением (16,12) для поля в приближении геометрической оптики (в нашем случае $\varkappa=0$, $n=\sqrt{\varepsilon}$ и нужно взять решение, отвечающее стоячей волне), мы видим, что эти выражения совпадают. Поэтому, если при дальнейшем удалении от точки отражения слой не является линейным, но к нему применимо приближение геометрической оптики, то это скажется лишь на том, что в (30,5) функцию $\varepsilon(z)$ нужно считать не линейной, а отвечающей рассматриваемому слою. Итак, выражение (30,5) как раз и представляет собой искомое решение для произвольного слоя.

Если в начале слоя (при $z=0$) амплитуда падающей волны равна единице, ее фаза равна нулю и $\varepsilon=1$, то поле при $z=0$ представляется в виде $E=E_{+}+E_{-}=1+e^{-i\varphi}$, где согласно (30,5)

$$\varphi(\omega)=\frac{2\omega}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon(\omega)=0)}n(\omega,\,z)\,dz-\frac{\pi}{2}. \qquad (30,6)$$

Далее, в этом случае в (30,5) (см. также (17,9))

$$A=\frac{2\sqrt{\pi}}{3}\left(\frac{\omega}{c\left|\frac{dn^2}{dz}\right|_0}\right)^{1/6}e^{-i\left(\frac{\omega}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon=0)}n(z)\,dz-\frac{\pi}{4}\right)}. \qquad (30,7)$$

Поле в области вблизи точки $z(\varepsilon=0)$ определяется формулами (17,4) и (17,5), где постоянная A равна выражению (30,7);

в этом случае в начале слоя, как указано, поле имеет вид:

$$\text{при } z=0 \quad E=1+e^{-i\varphi}. \tag{30,8}$$

Полученное решение для произвольного слоя справедливо, во-первых, если ко всему этому слою при Δz, удовлетворяющем неравенству (30,3), применима геометрическая оптика; во-вторых, для расстояний Δz, еще удовлетворяющих неравенству (30,3), должно выполняться неравенство (30,2), т. е. должно выполняться условие приближенной линейности слоя в области отражения.

Выражение (30,4) справедливо с точностью до членов порядка $\dfrac{5}{72\cdot\frac{2}{3}\zeta^{3/2}}$ (см., например, [200]); поэтому уже при $\zeta \gg 5$ точность формулы (30,4) больше 1%. Значению $\zeta=5$ соответствует согласно (30,3) и (30,4) расстояние

$$\Delta z = \Delta z_0 = 5\left(\frac{c^2}{\omega^2\left|\dfrac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/3}.$$

При $\lambda_0=\dfrac{2\pi c}{\omega}\sim 60$ *м* и $\left|\dfrac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\sim 10^{-7}$ получим $\Delta z_0\sim 2\cdot 10^4=200$ *м*. Если $\Delta z=\Delta z_0$, то условие (30,2) переходит в следующее:

$$\left|\frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right|_0 \ll \frac{1}{5}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0^{4/3}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^{2/3} \approx \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0^{4/3}\lambda_0^{-2/3}. \tag{30,9}$$

Выполнение этого неравенства необходимо для справедливости предпринятой замены слоя в области отражения линейным слоем.

Особенно важной является формула (30,6), определяющая сдвиг фаз отраженной волны по сравнению с падающей, так как, зная фазу, можно определить также время группового запаздывания $\Delta t_{\text{гр}} = \varphi'(\omega_0)$.

Выражение (30,6), за исключением члена $-\dfrac{\pi}{2}$, получается из геометрической оптики, если считать, что она справедлива до точки отражения $z(\varepsilon=0)$. Другими словами, если дополнить геометрическую оптику условием отражения в точке $z(\varepsilon=0)$, то получается формула (30,6) без добавки $-\dfrac{\pi}{2}$. Однако подобное «дополнение» геометрической оптики условием отражения может быть, разумеется, строго получено только на основе проведенного исследования. Что касается фазы $-\dfrac{\pi}{2}$, то этот член много меньше основного члена $2\dfrac{\omega}{c}\displaystyle\int_0^{z(\varepsilon=0)} n(z)\,dz$, так как применимость геометрической оптики к основной части слоя (вдали от точки $z(\varepsilon=0)$) предполагает, что толщина слоя значительно больше $\lambda_0=\frac{2\pi c}{\omega}$ $\left(\text{поэтому, действительно, } \frac{2\omega}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon=0)} n(z)\,dz \gg \frac{\pi}{2}\right)$.

Время группового запаздывания согласно (21,12), (30,6) равно

$$\Delta t_{\text{гр}}=\varphi'(\omega)=\frac{2}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon(\omega)=0)} n(\omega,\ z)\,dz+\frac{2\omega}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon(\omega)=0)}\frac{dn(\omega,\ z)}{d\omega}\,dz=$$
$$=2\int\limits_0^{z(\varepsilon(\omega)=0)}\frac{dz}{v_{\text{гр}}(\omega,\ z)};\tag{30,10}$$

здесь $v_{\text{гр}}(\omega,\ z)$ — групповая скорость (21,17), индекс нуль у ω опущен, так как теперь в явном виде фигурирует лишь одна частота — несущая частота сигнала ω; кроме того, при дифференцировании интеграла (30,6) по верхнему пределу учтено, что, по определению, $n(z(\varepsilon=0))=0$. Далее, согласно (21,13), (21,14) и (30,10) имеем:

$$\left.\begin{aligned}\Delta t_{\text{ф}}&=\frac{2}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon(\omega)=0)} n(\omega,\ z)\,dz=2\int\limits_0^{z(\varepsilon(\omega)=0)}\frac{dz}{v_{\text{ф}}(\omega,\ z)}=\frac{L_0}{c},\\ L_{\text{гр}}&=c\Delta t_{\text{гр}}=2\int\limits_0^{z(\varepsilon(\omega)=0)}\frac{c\,dz}{v_{\text{гр}}(\omega,\ z)},\end{aligned}\right\}\tag{30,11}$$

где $v_{\text{ф}}$ — фазовая скорость (21,16) и в выражении для $\Delta t_{\text{ф}}$ отброшен исчезающе малый член $-\frac{\pi}{2\omega}$.

Действующая высота отражения $z_{\text{д}}$. Высотно-частотные характеристики. При нормальном (т. е. вертикальном) зондировании ионосферы, отраженный от слоя сигнал возвращается назад через время $\Delta t_{\text{гр}}$, причем место отражения — координата $z(\varepsilon=0)$ — непосредственно не определяется. Поэтому вместо истинной высоты $z_{\text{и}}=z(\varepsilon=0)$ обычно пользуются кажущейся или действующей высотой точки отражения $z_{\text{д}}$, которая, по определению, равна высоте отражения сигнала, движущегося со скоростью света в вакууме в течение времени $\frac{\Delta t_{\text{гр}}}{2}$ (множитель $^1/_2$ возникает из-за двух путей — вверх и вниз). Таким образом,

$$z_{\text{д}}(\omega)=\frac{c\Delta t_{\text{гр}}}{2}=\frac{L_{\text{гр}}}{2}=\int\limits_0^{z_{\text{и}}}\frac{c\,dz}{v_{\text{гр}}(\omega,\ z)}.\tag{30,12}$$

Действующая высота $z_{\text{д}}$ всегда больше истинной высоты $z_{\text{и}}=$ $=z(\varepsilon=0)$, так как $v_{\text{гр}}<c$. При пренебрежении влиянием

магнитного поля $v_{\text{гр}}=cn=c\sqrt{1-\frac{4\pi e^2N(z)}{m\omega^2}}$ (см. (21,18)) и

$$z_{\text{д}}(\omega)=\int\limits_0^{z_{\text{и}}(\omega)}\frac{dz}{n}=\int\limits_0^{z_{\text{и}}(\omega)}\frac{dz}{\sqrt{1-\frac{4\pi e^2N(z)}{m\omega^2}}}, \qquad (30,13\text{а})$$

$$1-\frac{4\pi e^2N(z_{\text{и}})}{m\omega^2}=0. \qquad (30,13\text{б})$$

Уравнение (30,13б) можно разрешить относительно $z_{\text{и}}$. При этом получается следующий результат (см. [185] и [32], § 94):

$$z_{\text{и}}(\omega)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} z_{\text{д}}(\omega\sin\chi)\,d\chi, \qquad (30,14)$$

где $z_{\text{д}}(\omega\sin\chi)$ — значение функции $z_{\text{д}}$ (см. (30,13а)) с заменой в ней ω на $\omega\sin\chi$.

Таким образом, зная действующую высоту $z_{\text{д}}$ как функцию от ω (несущей частоты сигнала), в рассматриваемом случае $\left(\text{при } n=\sqrt{1-\frac{4\pi e^2N(z)}{m\omega^2}}\right)$ с помощью (30,14) можно найти истинную высоту $z_{\text{и}}(\omega)$. Функция $z_{\text{д}}(\omega)$, определяющая зависимость действующей (кажущейся) высоты ионосферы от частоты, называется высотно-частотной характеристикой ионосферы. Именно эта величина непосредственно получается на ионосферных станциях путем измерения времени группового запаздывания $\Delta t_{\text{гр}}=\frac{2z_{\text{д}}(\omega)}{c}$ для сигналов с различной несущей частотой ω. На современных ионосферных станциях вся кривая $z_{\text{д}}(\omega)$ снимается автоматически за время, меньшее минуты. Типичные высотно-частотные характеристики ионосферы на средних широтах схематически представлены на рис. 30,5, причем, как обычно, на оси абсцисс откладывается не циклическая частота ω, а обыкновенная частота $f=\frac{\omega}{2\pi}$ в мегагерцах.

На опыте вследствие влияния земного магнитного поля высотночастотные характеристики расщепляются на две близкие кривые; это расщепление особенно заметно вблизи критических частот и указано пунктиром на рис. 30,5, *б*. На рис. 30,5, *а* расщепление не показано: для *E*-слоя оно обычно незаметно. О влиянии магнитного поля на отражение радиоволн от ионосферы еще будет идти речь в § 35.

Обсуждение экспериментальных данных об ионосфере и, в частности, подробный анализ различных высотно-частотных характеристик проводятся в [32, 43, 46, 47, 287]. Здесь же мы остановимся лишь на некоторых качественных особенностях высотно-частотных характеристик, которые ясно видны на рис. 30,5. Именно вблизи критической частоты E-слоя высотно-частотная характеристика E-слоя довольно резко поднимается

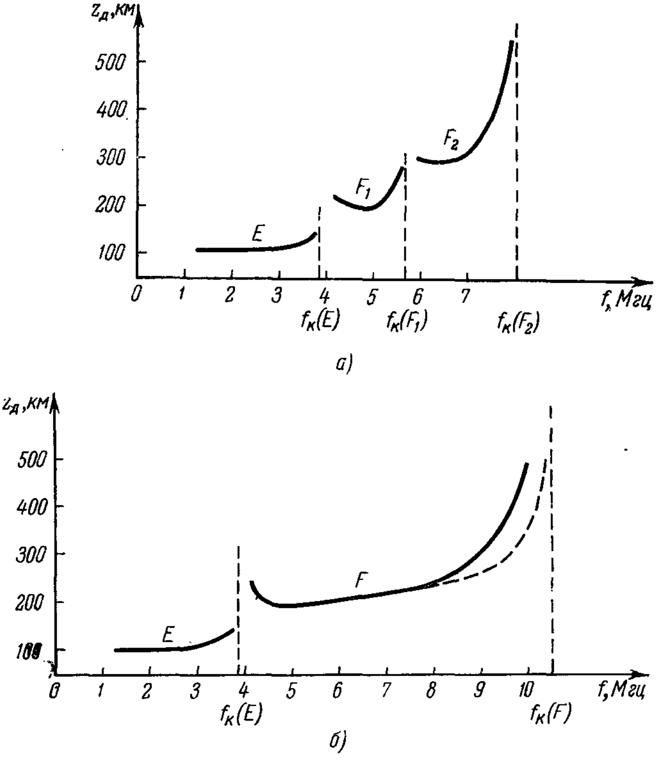


Рис. 30,5. Высотно-частотные характеристики ионосферы: *а*) летом и *б*) зимой.

вверх; значительно более ясно это проявляется в случае F_1-слоя и F_2-слоя. Кроме того, вблизи критической частоты $f_{\text{к}}$ (E) слоя E высотно-частотная характеристика F_1-слоя летом и F_2-слоя зимой имеет «загиб»; загиб этот такой, как если бы на этих частотах F_1- и F_2-слои лежали выше, чем для несколько больших частот. Последнее, конечно, невозможно, и здесь проявляется существенное отличие между действующей и истинной высотами.

Крутой подъем высотно-частотных характеристик вблизи критической частоты объясняется тем, что в этом случае сигнал распространяется в области максимума слоя и поэтому проходит относительно большой путь в области малых показателей преломления n. В интеграле же (30,13а), определяющем действующую высоту $z_{д}$, n входит в знаменатель (групповая скорость $v_{гр} = cn$) и, таким образом, вклад области вблизи максимума слоя в значение $z_{д}$ особенно велик. В количественном отношении это ясно из приводимого ниже примера параболического слоя. Что касается загиба характеристики для F-слоя в области частот больших, но близких к критической частоте $f_{к}(E)$ для E-слоя (см. рис. 30,5, *б*), то этот загиб объясняется дополнительным запаздыванием сигнала при его прохождении через E-слой. Поскольку в этом случае $f > f_{к}(E)$, сигнал проходит через E-слой свободно, практически не отражаясь (если f больше $f_{к}$ хотя бы на несколько процентов; см. § 33). Но пока частота f близка к $f_{к}$, показатель преломления для частоты f в E-слое все же заметно меньше единицы, и E-слой также вносит свой вклад в выражение (30,13а), определяющее действующую высоту $z_{д}$ для F-слоя.

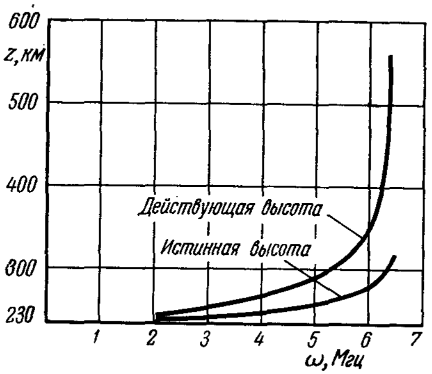


Рис. 30,6 Действующая (кажущаяся) и истинная высота отражения для F-слоя.

В областях, близких к критической частоте, отличие действующей высоты $z_{д}$ от истинной высоты отражения $z_{и} = z$ ($\varepsilon = 0$) может быть очень велико. Это ясно из рис. 30,6 [201], на котором для одного конкретного случая показана как экспериментально полученная кривая $z_{д}(\omega)$ (т. е. высотно-частотная характеристика), так и истинная высота $z_{и}$, вычисленная с помощью формулы (30,14). Заметим, что для линейного слоя истинная высота вдвое меньше действующей, т. е. $z_{и}(\omega) = \frac{1}{2} z_{д}(\omega)$, причем обе высоты, разумеется, нужно отсчитывать от начала слоя.

Зная истинную высоту отражения $z_{и}(\omega)$, сразу же можно определить распределение плотности электронов в слое, так как по определению на высоте $z_{и}(\omega)$ имеем $\varepsilon(\omega) = 0$, и концентрация электронов равна

$$N(z_{и}) = \frac{m\omega^2}{4\pi e^2} = 3{,}14 \cdot 10^{-10}\omega^2 = 1{,}24 \cdot 10^{-8} f^2. \qquad (30{,}13\text{в})$$

Параболический слой. Из экспериментальных данных следует, что F_2-слой, а также другие слои (или, точнее, нижние части этих слоев) часто хорошо аппроксимируются параболическим слоем (см. [32, 43]). Кроме того, параболический слой является наиболее простым и в то же время в качественном отношении близким к произвольному плавному толстому слою (рис. 30,4). Применим поэтому все полученные общие формулы к параболическому слою.

Согласно (30,1) координаты точки отражения для частоты f таковы:

$$z(\varepsilon=0)=\pm\sqrt{\frac{f_{\text{к}}^2-f^2}{f_{\text{к}}^2}}\,z_m, \tag{30,15}$$

где начало координат помещено в максимуме слоя и знаки $\pm$ соответствуют симметрично расположенным двум точкам, где $\varepsilon=0$. Если направить ось z так, как это сделано на рис. 17,2 (при этом в начале слоя $z=-z_m$), то нижней точке $z\,(\varepsilon=0)$, которая только нас и интересует, в (30,15) отвечает знак минус. Для фазы φ и длины оптического пути L_0 согласно (30,6), (30,11) и (30,1) имеем:

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=2\frac{\omega}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon=0)}n(z)\,dz-\frac{\pi}{2}=\frac{\omega}{c}L_0-\frac{\pi}{2};\\ L_0&=z_m\left\{1-\frac{f_{\text{к}}^2-f^2}{2ff_{\text{к}}}\ln\frac{f_{\text{к}}+f}{f_{\text{к}}-f}\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{30,16}$$

Для времени группового запаздывания $\Delta t_{\text{гр}}$, длины группового пути $L_{\text{гр}}$ и действующей (кажущейся) высоты $z_{\text{д}}$ согласно (30,10), (30,11), (30,12) и (30,1) получаем:

$$\Delta t_{\text{гр}}=\varphi'(\omega)=\frac{L_{\text{гр}}}{c}=\frac{2z_{\text{д}}}{c};\quad z_{\text{д}}=\frac{z_m}{2}\frac{f}{f_{\text{к}}}\ln\frac{f_{\text{к}}+f}{f_{\text{к}}-f}. \tag{30,17}$$

Посмотрим теперь, каково в случае параболического слоя условие справедливости формул (30,16) и (30,17); это условие, очевидно, совпадает с условием (30,9) применимости основной формулы для фазы (30,6). Согласно (30,9) и (30,1), как легко показать, условие, о котором идет речь, таково:

$$\Delta f=f_{\text{к}}-f\gg\frac{c}{3z_m}, \tag{30,18}$$

или

$$\frac{\Delta f}{f_{\text{к}}}\sim\frac{\Delta f}{f}\gg\frac{\lambda_{\text{к}}}{3z_m}, \tag{30,19}$$

причем $\lambda_{\text{к}}=\frac{c}{f_{\text{к}}}$ и предположено, что $\Delta f\ll f_{\text{к}}$ (условие (17,27)).

Как будет показано в § 33, отличие формулы (30,17) от точной, полученной в результате решения волнового уравнения для параболического слоя, совершенно ничтожно уже при $\frac{\Delta f}{f_к} = \frac{\lambda_к}{3z_m}$. Таким образом, по сути дела, условия (30,18) и (30,19) можно заменить такими:

$$\Delta f > \frac{c}{3z_m}, \quad \frac{\Delta f}{f} > \frac{\lambda_к}{3z_m}. \qquad (30,20)$$

Подобная возможность ослабления условий (30,18) и (30,19) связана, в частности, с тем, что исходное неравенство (30,9) было написано на основе требования точности, большей 1% (но, разумеется, основным аргументом в пользу замены формул (30,18) и (30,19) на (30,20) является сравнение со строгим решением для параболического слоя).

Для F-слоя полутолщина $z_m \sim 100$ *км*, и условие (30,18) переходит в требование $\Delta f \gg 10^3$. Поскольку в этом случае $f_к \sim 10$ *Мгц* $= 10^7$ ($\lambda_к \sim 30$ *м*), приведенные формулы применимы при $\frac{\Delta f}{f} \gg 10^{-4}$, а практически уже при $\frac{\Delta f}{f_к} \gtrsim 10^{-4}$.

Для E-слоя $z_m \sim 20$ *км*, $f_к \sim 3$ *Мгц*, $\lambda_к \sim 100$ *м*, и условия (30,18) и (30,19) принимают вид $\Delta f \gg 5 \cdot 10^3$ и $\frac{\Delta f}{f_к} \gg 2 \cdot 10^{-3}$; в этом случае формулы (30,16) и (30,17) вполне применимы уже при $\frac{\Delta f}{f_к} \gtrsim 10^{-3}$, т. е. также практически всегда.

Произвольный плавный слой типа, изображенного на рис. 30,4, в области максимума всегда можно, если не говорить о каких-либо специальных случаях, аппроксимировать параболой (30,1) с соответствующим значением z_m и критической частотой $f_к$, равной критической частоте рассматриваемого произвольного слоя. Поэтому приведенная оценка области применимости основной формулы (30,6) и следствия из нее полностью относятся и к произвольному слою. Таким образом, формула (30,6) практически всегда применима. В особом рассмотрении, как уже упоминалось, нуждается лишь небольшая область вблизи критической частоты слоя (см. § 33). Кроме того, результаты настоящего параграфа неприменимы к тонким слоям, для которых приближение геометрической оптики несправедливо во всем или в большей части слоя. Подобные слои, по-видимому, могут спорадически появляться в ионосфере, и их исследование представляет поэтому известный интерес. В силу тонкости слоя основной вопрос, стоящий в этом случае перед теорией, состоит в нахождении коэффициента отражения R в зависимости от частоты и параметров слоя (этот вопрос был рассмотрен в § 18).

Расплывание сигнала, согласно (21,33), характеризуется «временем установления» $\tau_0=\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}$; для параболического слоя

$$\tau_0=\sqrt{\pi\varphi''(\omega_0)}=\sqrt{\frac{\pi z_m}{2cf_к}\left[\ln\left(\frac{1+\frac{f}{f_к}}{1-\frac{f}{f_к}}\right)+\frac{2\frac{f}{f_к}}{1-\left(\frac{f}{f_к}\right)^2}\right]}. \qquad (30,21)$$

Зависимость $\tau_0\sqrt{\frac{2cf_к}{\pi z_m}}$ от $\frac{f}{f_к}$ ясна из рис. 30,7. В качестве типичного примера укажем, что для $\frac{f}{f_к}=0{,}8$ при $z_m\sim 100$ *км* и $f_к\sim 10$ *Мгц* (F-слой) или при $z_m\sim 20$ *км* и $f_к\sim 3$ *Мгц* (E-слой) $\tau_0=10^{-5}$ *сек*. Время τ_0 особенно велико вблизи критической частоты; при условии (17,27), когда $\Delta f\ll f_к$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}\tau_0&\approx\sqrt{\frac{z_m}{2c\Delta f}},\\ \Delta f&=f_к-f\ll f_к.\end{aligned}\right\}\qquad(30,22)$$

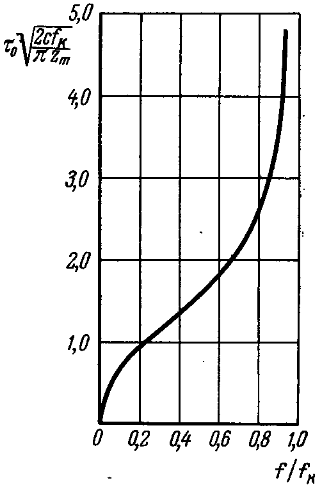


Рис. 30,7. Время установления τ_0 (умноженное на $\sqrt{\frac{2cf_к}{\pi z_m}}$) для параболического слоя.

При $z_m\sim 100$ *км* и $\Delta f\sim 10^4$ имеем $\tau_0\sim 10^{-4}$ *сек* и, следовательно, τ_0 того же порядка, как и длительность T обычно используемых для зондирования ионосферы сигналов, для которых $T\sim 10^{-4}$ *сек*. Таким образом, вблизи критической частоты расплывание сигнала может быть вполне заметным. Для оборванной синусоиды, т. е. прямоугольного сигнала (21,4) и (21,5), форма квазимонохроматического отраженного сигнала определяется выражением (21,8). При условии, что $T\gg\tau_0$ (условие (21,30)), форма переднего и заднего краев сигнала показана на рис. 21,1 (см. также формулу (21,31)). Если же условие (21,30) не выполнено, что может иметь место вблизи критической частоты, то согласно (21,28) форма сигнала определяется параметром $\frac{T}{\tau_0}$ и при значениях этого параметра, равных 1, 3 и 5, ясна из рис. 21,2 (просачивание волны через слой не учитывается).

Учет изменений слоя во времени. Эффект Доплера. До сих пор всегда предполагалось, что в отражающем слое не происходит никаких изменений во времени. Между тем экспериментальные данные свидетельствуют о том, что временные изменения, происходящие в отражающей среде, часто существенны и приводят к заметному Доплер-эффекту. В этой связи выясним, чему равно изменение частоты отраженной волны в зависимости от временного хода показателя преломления $n(t) = \sqrt{\varepsilon(t)}$.

Если свойства среды меняются со временем достаточно медленно, то выражение для фазы φ отраженной волны остается по форме неизменным. Зависимость же φ от времени t проявляется при этом лишь в том, что определяющая φ функция n теперь зависит от t. В подобных квазистационарных условиях при отражении от плавного слоя согласно (30,6) имеем:

$$\varphi(\omega_0, t) = \frac{2\omega_0}{c} \int^{z(\varepsilon(\omega_0)=0)} n(\omega_0, z, t)\, dz - \frac{\pi}{2}, \tag{30,23}$$

где ω_0 — частота при пренебрежении эффектом Доплера. Частота колебаний ω, по определению, есть производная по времени от полной фазы волны, т. е. в нашем случае, когда поле отраженной волны имеет вид $E = \mathrm{const} \cdot e^{i(\omega_0 t - \varphi(\omega_0, t))}$, $\omega = \omega_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega_0 + \Delta\omega$. В случае (30,23)

$$\Delta\omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{2\omega_0}{c} \int_0^{z(\varepsilon(\omega_0)=0)} \frac{\partial n}{\partial t}\, dz \tag{30,24}$$

(дифференцирование выражения (30,23) по верхнему пределу несущественно, поскольку при $z\,[\varepsilon(\omega_0) = n^2(\omega_0) = 0]$, по определению, $n = 0$). Если отражение происходит не от области $n = 0$, а от некоторой одинаковой при всех частотах границы (например, от ионосферного облака), то

$$\varphi(\omega_0, t) = \frac{2\omega_0}{c} \int_0^{z_0} n\, dz,$$

где z_0 — положение границы раздела, на которой

$$n = n(\omega_0, z_0) = n_0.$$

В этом случае

$$\Delta\omega = -\frac{2\omega_0}{c} \int_0^{z_0} \frac{\partial n}{\partial t}\, dz - \frac{2\omega_0}{c} n_0 \frac{dz_0}{dt}. \tag{30,25}$$

Наиболее простая и, по-видимому, типичная картина имеет место, когда все изменение частоты связано просто с движением границы раздела, т. е. когда в (30,25) можно пренебречь первым членом и положить $z_0 = v_0 t$. Тогда

$$\Delta\omega = -\frac{2\omega_0}{c} n_0 v_0, \tag{30,26}$$

т. е. мы приходим к обычной формуле для эффекта Доплера при движении отражающего зеркала в однородной среде; заметим, что скорость $v_0 > 0$, если граница движется вверх; если же граница движется вниз, то $v_0 < 0$ и, как это и должно быть, $\Delta\omega > 0$. Напомним также, что здесь разбирается только случай, когда граница раздела перпендикулярна к оси z, по которой направлен волновой вектор падающей волны $\boldsymbol{k}$; в однородной среде при любом угле между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}_0$

$$\Delta\omega = -\frac{2\omega_0}{c} n_0 \frac{\boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} = -\frac{2\omega_0}{c} n_0 v_0 \cos\theta,$$

где θ — угол между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{v}_0$.

Упомянутое несколько раньше условие медленности изменения n со временем (условие квазистационарности) сводится к неравенству

$$\frac{\partial\varepsilon(\omega_0, t)}{\partial t} \frac{1}{\omega_0} \ll \varepsilon(\omega_0, t), \tag{30,27}$$

т. е. требованию, чтобы изменение ε за период $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ было значительно меньше самого значения ε. Довольно очевидное условие (30,27) легко получить также, рассматривая распространение волн в однородной среде с $\varepsilon = \varepsilon(t)$; при условии (30,27) в соответствующем уравнении можно пренебречь членом типа $\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial E}{\partial t}$ по сравнению с членом типа $\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$. Помимо использования условия (30,27), в выражении для n выше всегда в качестве аргумента использовалась несмещенная частота ω_0. Это возможно, разумеется, лишь, если

$$\frac{\partial n(\omega_0)}{\partial\omega_0}\Delta\omega \ll n(\omega_0). \tag{30,28}$$

В условиях ионосферы, если не говорить о рассеянии радиоволн на высокочастотных «плазменных волнах», неравенства (30,27) и (30,28) должны хорошо выполняться.

Выше, хотя и в неявном виде, предполагалось, что излучатель и приемник излучения покоятся и находятся, например, на земной поверхности. Аналогичной является, очевидно, задача об излучении и приеме радиоволн движущимися объектами (спутниками, ракетами). Результаты расчетов и наблюдений волн, излучаемых и ретранслируемых спутниками и ракетами, можно найти в [43, 287, 289, 307а].

§ 31. Учет поглощения

Влияние поглощения на отражение волн. Обобщение результатов § 30 на случай, когда имеется поглощение, не составляет труда. Можно было, собственно, сразу рассматривать задачу с поглощением, и это не сделано лишь по соображениям удобства. Кроме того, поглощение в ионосфере, если не говорить о D-слое, обычно невелико, и в ряде случаев его можно игнорировать.

Получение формул для фазы φ и коэффициента отражения R отраженной волны для произвольного слоя рис. 30,4 при учете поглощения производится так же, как это было сделано в § 30 для непоглощающего слоя. Сопрягая вблизи точки отражения z ($\varepsilon = 0$) решение геометрической оптики (16,12) с решением для линейного слоя (17,4), (17,12) — (17,14), (17,18) — (17,20), мы без труда получаем следующие выражения для произвольного слоя с поглощением *):

$$\varphi = \frac{2\omega}{c} \int\limits_0^{z(\varepsilon=0)} n(\omega, z)\, dz - \frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{2}\,\omega\left(\frac{4\pi\sigma(0)}{\omega}\right)^{3/2}}{3c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}, \tag{31,1}$$

$$-\ln R = \frac{2\omega}{c} \int\limits_0^{z(\varepsilon=0)} \varkappa(\omega, z)\, dz + \frac{2\sqrt{2}\,\omega\left(\frac{4\pi\sigma(0)}{\omega}\right)^{3/2}}{3c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}, \tag{31,2}$$

где значения $\sigma(0)$ и $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0$ отвечают точке $z(\varepsilon(\omega) = 0)$. Для слоя, линейного при всех z, формулы (31,1) и (31,2), разумеется, переходят в (17,18) и (17,19), так как в этом случае $z(\varepsilon = 0) = z_1$ и $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right| = \frac{1}{z_1}$.

Формулы (31,1) и (31,2) отличаются от часто употребляемых наличием поправок:

$$\Delta(-\ln R) = -\Delta\varphi = \frac{2\sqrt{2}\omega\left(\frac{4\pi\sigma(0)}{\omega}\right)^{3/2}}{3c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0} = \frac{2\sqrt{2}\,(\nu_{\text{эфф}}(0))^{3/2}}{3c\omega^{1/2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}; \tag{31,3}$$

здесь $\nu_{\text{эфф}}(0)$ — эффективное число соударений в точке $z(\varepsilon = 0)$ и учтено, что при $\varepsilon = 0$, согласно (3,7), $\frac{4\pi\sigma}{\omega} = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$. Поправка

---

*) Под R везде ниже понимается модуль амплитудного коэффициента отражения, который обозначался также через $|R|$.

$\Delta(-\ln R) = -\Delta\varphi$ обычно невелика; так, например, при

$$\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 = 10^{-7}, \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = 1{,}9\cdot 10^6\,(\lambda_0 = 1000\ м) \text{ и } \nu(0) = 10^4$$

имеем:

$$\Delta(-\ln R) = -\Delta\varphi = 0{,}23.$$

Таким образом, поправка к фазе $\Delta\varphi$ обычно меньше даже члена $-\frac{\pi}{2}$, который сам мал по сравнению с φ (см. § 30), и, следовательно, наличие поглощения практически не сказывается на виде выражения для φ; это последнее сохраняет вид (30,6). При этом, разумеется, показатель преломления в (31,1) нужно брать с учетом поглощения, т. е., строго говоря, в виде (7,12).

В отношении коэффициента отражения поправка $\Delta(-\ln R)$, вообще говоря, мала по сравнению с $-\ln R$, но все же без дальнейшего анализа отбрасываться не может. Произведем поэтому оценку величины $\Delta(-\ln R)$ для параболического слоя (30,1), когда

$$\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 = \frac{2f_к^2 z\,(\varepsilon=0)}{f^2 z_m^2} = \frac{2\sqrt{f_к^2 - f^2}}{f^2 z_m} f_к; \tag{31,4}$$

здесь учтено, что при условии $\omega^2 \gg \nu_{эфф}^2$, выполняющемся для F-слоя, выражение для ε при наличии поглощения остается таким же, как без поглощения. Вблизи критической частоты

$$\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 \approx \frac{2}{z_m}\sqrt{\frac{2\Delta f}{f_к}}. \tag{31,5}$$

При $z_m = 100$ *км*, $f_к = 10$ *Мгц* и $\Delta f = 10^5$ имеем $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 = 2{,}8\cdot 10^{-8}$. Далее, в F-слое $\nu \leqslant 10^4$, и таким образом, $\Delta(-\ln R) \leqslant 0{,}15 \div 0{,}20$; в то же время $-\ln R$ в рассматриваемых условиях порядка нескольких единиц и, следовательно, поправка $\Delta(-\ln R)$ составляет максимум 10% по отношению к $-\ln R$.

Область применимости формул (31,1) и (31,2) ограничена требованием, чтобы слой был плавным и достаточно толстым (см. § 30), а также условием (30,2), которое при относительно слабом поглощении сводится к (30,9) или практически к условию (30,20): $\Delta f > \frac{c}{3z_m}$. Заметим, что в (30,2) фигурируют модули только для того, чтобы неравенство имело смысл и при разных знаках $\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)_0$ и $\left(\frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right)_0$. При наличии поглощения условие, аналогичное (30,2), нужно наложить на вещественную и мнимую части ε' в отдельности. Поэтому, помимо (30,9), строго говоря, нужно требовать также выполнения неравенства

$$\left|\frac{d^2\sigma}{dz^2}\right|_0 \Delta z \ll \left|\frac{d\sigma}{dz}\right|_0 . \tag{31,6}$$

Если σ меняется с высотой не быстрее, чем ε, что и имеет обычно место в ионосфере, условие (31,6) не сильнее условия (30,9). Кроме того, как уже упомянуто, само неравенство (30,9) получено из условия $\left|\frac{d^2\varepsilon}{dz^2}\right|_0 \Delta z \ll \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0$ в предположении об относительной слабости поглощения (это ясно в связи с использованием при соответствующем выводе выражений (30,3) и (30,4), справедливых при отсутствии поглощения).

Предположение о слабости поглощения в ионосфере обычно выполняется. Так, для F-слоя всегда, а для E-слоя в большинстве случаев соблюдается неравенство

$$\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}, \tag{31,7}$$

и поэтому для изотропной плазмы (см. (3,9))

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \sigma = \frac{1-\varepsilon}{4\pi}\,\nu_{\text{эфф}} \approx \frac{e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{m\omega^2}. \tag{31,8}$$

Далее, как всегда,

$$\left.\begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}, \\ \varkappa &= \frac{2\pi\sigma}{\omega n} = \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{31,9}$$

При $\varepsilon = 0$, т. е. в точке $z(\varepsilon = 0)$, в общем случае

$$n(0) = \varkappa(0) = \sqrt{\frac{2\pi\sigma(0)}{\omega}} = \sqrt{\frac{\nu_{\text{эфф}}(0)}{2\omega}}. \tag{31,10}$$

Если выполнено условие (31,7), то значение n мало отличается от $\sqrt{\varepsilon}$ и от значения n при отсутствии поглощения. Так, при $\nu(0) \sim 3\cdot 10^3$ и $f \sim 10^7$ имеем $n(0) \sim 10^{-2}$. Вместе с тем для параболического слоя (30,1) вблизи точки $z(\varepsilon = 0)$ получим $\varepsilon = \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 \Delta z$, где $\Delta z = z(\varepsilon = 0) - z$ и $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0$ определяется формулами (31,4) и (31,5). При $f_{\text{к}} = 10^7$ и $z_m = 100$ *км* даже в практически наихудшем случае, когда $\Delta f = 10^5$, $\sqrt{\varepsilon} = 10^{-2}$ при $\Delta z \approx 40$ *м*, или $\frac{\Delta z}{z_m} \approx 4\cdot 10^{-4}$. При бо́льших Δz (например, при $\Delta z = 100$ *м*), как ясно из приведенных формул и оценок, уже можно считать практически, что $n = \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому в F-слое, за исключением области частот, непосредственно примыкающих к критической (см. § 33), для фазы волны φ и действующей высоты $z_д = \frac{c\varphi'(\omega)}{2}$ можно пользоваться выражениями, полученными при отсутствии поглощения (см. (30,16) и (30,17)).

Коэффициент отражения в случае малости поглощения. Определение $\nu_{эфф}$ по измерению поглощения. Малость поглощения позволяет также сильно упростить выражения для $-\ln R$. Учитывая, что согласно (31,8) и (31,9)

$$\varkappa = \frac{2\pi\sigma}{\omega n} = \frac{1-\varepsilon}{2\omega n}\nu_{эфф} = \frac{1-n^2+\varkappa^2}{2\omega n}\nu_{эфф}, \qquad (31,11)$$

и опуская в выражении (31,2) поправку $\Delta(-\ln R)$, имеем:

$$-\ln R = \frac{1}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon=0)} \nu_{эфф}\frac{1-n^2+\varkappa^2}{n}\,dz. \qquad (31,12)$$

Далее, в F-слое, где выполняется условие (31,7), в силу (31,9), (31,10) и (31,11) и сказанного выше в отношении точности соотношения $n=\sqrt{\varepsilon}$, получаем*):

$$-\ln R \approx \frac{1}{c}\int\limits_0^{z(\varepsilon=0)} \frac{1-n^2}{n}\nu_{эфф}\,dz = \frac{\bar{\nu}_{эфф}}{2c}(L_{гр}-L_0). \qquad (31,13)$$

Здесь $L_{гр}$ и L_0 — групповой и оптический пути (30,11):

$$L_{гр} = 2\int\limits_0^{z(\varepsilon=0)} \frac{dz}{n}, \qquad L_0 = 2\int\limits_0^{z(\varepsilon=0)} n\,dz. \qquad (31,14)$$

В (31,14) принято, что $v_{гр} = cn$, как это имеет место, если

$$n = \sqrt{1-\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}}\,.$$

Величина $\bar{\nu}_{эфф}$ в (31,13) есть некоторое среднее значение эффективного числа соударений. Для F-слоя неточность формулы

---

*) Строго говоря, выражение (31,13) пригодно, очевидно, если $(1-n^2) \gg \varkappa^2$. Поэтому им можно пользоваться только в области, где n^2 не слишком близко к единице. Такую область обычно называют «отклоняющей».

Другое выражение для $\ln R$, справедливое при условии $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \ll 1$, получается из (17,20а). Именно, обобщая выражение (17,20а) на случай плавного слоя (см. § 30), имеем:

$$-\ln R = \frac{2\omega}{c}\int \frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon}}\,dz, \qquad \frac{4\pi\sigma}{\omega} \ll 1. \qquad (31,13а)$$

Для $|\varepsilon| \lesssim 1$ неравенство $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \ll 1$ заведомо выполнено при условии (31,7).

(31,13), связанная с переходом от (31,12) и пренебрежением поглощением в выражении для $n = \sqrt{\varepsilon}$, не превосходит нескольких процентов [184].

На опыте непосредственно измеряется величина $L_{\text{гр}}(\omega) = 2z_{\text{д}}(\omega)$, которая вблизи критической частоты быстро растет с частотой (см. (30,17) и рис. 30,5 и 30,6), в то время как L_0 возрастает весьма медленно (см. (30,16)). Поэтому вводя разность значений $\delta L_{\text{гр}}$ для двух частот f_1 и f_2 в области, где $L_{\text{гр}}$ круто растет, можно положить:

$$\delta(-\ln R) \approx \frac{\bar{\nu}_{\text{эфф}}}{2c}\,\delta L_{\text{гр}}, \tag{31,15}$$

где теперь $\nu_{\text{эфф}}$ усредняется по области высот между точками отражения частот f_1 и f_2. Если не пренебрегать величиной L_0, то, умножая (31,13) на f, а затем дифференцируя это выражение по частоте и используя равенство $d(L_0 f) = L_{\text{гр}}\,df$ (см. (21,19)), получаем:

$$-d(f \ln R) = \frac{\bar{\nu}_{\text{эфф}}}{2c}\,f\,dL_{\text{гр}}. \tag{31,16}$$

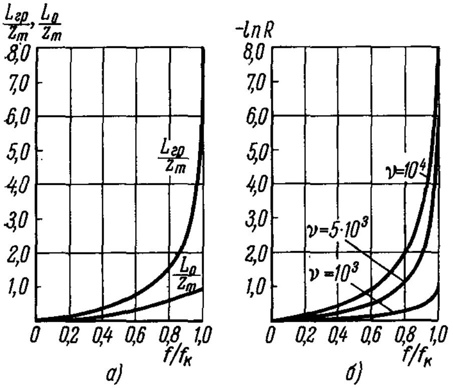


Рис. 31,1. *а*) Значения $L_{\text{гр}}/z_m$ и L_0/z_m для параболического слоя как функции $f/f_{\text{к}}$; *б*) логарифм коэффициента отражения для параболического слоя при $z_m = 100$ *км* как функция $f/f_{\text{к}}$ для среднего эффективного числа соударений $\bar{\nu}_{\text{эфф}} = 10^3, 5\cdot10^3$ и 10^4.

Для параболического слоя (30,1) значения $L_{\text{гр}}$ и L_0 в формуле (31,13) определяются выражениями (30,16) и (30,17); отношения $\frac{L_{\text{гр}}}{z_m}$ и $\frac{L_0}{z_m}$, вычисленные по этим формулам, приведены на рис. 31,1, *а*. На рис. 31,1, *б* приведены значения $-\ln R$ по формуле (31,13) для $\bar{\nu}_{\text{эфф}} = 10^3$, $5\cdot10^3$ и 10^4 при $z_m = 100$ *км*.

Об измерении коэффициента отражения R и определении отсюда $\bar{\nu}_{\text{эфф}}$ см. [32], § 102 и [43], а об усложнениях, связанных с учетом влияния земного магнитного поля, см. ниже § 35.

Заметим в заключение, что в общем случае в приближении геометрической оптики ослабление амплитуды волны R при прохождении некоторого пути l, как ясно из (16,11) и (19,10), равно

$$-\ln R = \frac{\omega}{c}\int_l \varkappa(s)\,ds, \tag{31,17}$$

где ds — элемент траектории луча и показатель поглощения $\varkappa$ определяется формулой (31,9) или в частных случаях формулами (7,17) или (7,20). Интенсивность волны I убывает при этом по закону

$$I = I_0 e^{-2\frac{\omega}{c}\int\limits_l \varkappa(s)\,ds} = I_0 e^{-\int\limits_l \mu(s)\,ds}, \tag{31,18}$$

где μ — коэффициент поглощения (7,10).

§ 32. Структура поля вблизи точки отражения

Структура поля. В большинстве случаев интерес представляют лишь фаза и амплитуда отраженной от ионосферного слоя волны. Однако при исследовании ряда вопросов, например нелинейного взаимодействия радиоволн в ионосфере, важно также знать, какова структура поля в области отражения. В этой области, если отношение $\frac{\Delta f}{f_к}$ не слишком мало (см. §§ 30, 31), слой можно считать линейным, и, таким образом, полное решение задачи содержится в формулах (17,2), (17,4) (17,5) (при наличии поглощения ζ определяется не выражением (17,2), а формулой (17,12)). При этом удобнее, имея в виду произвольный слой, записать параметр ζ не в виде (17,2), а так же, как в (30,4):

$$\zeta = \left\{\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right\}^{1/3}\Delta z = \left(\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right)^{1/3}\Delta z, \tag{32,1}$$

где Δz — расстояние от точки $z(\varepsilon = 0)$ и $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0$ — значение $\frac{d\varepsilon}{dz}$ в той же точке $\left(\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 \equiv \left|\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)_0\right|\right)$; λ_0, очевидно, есть длина волны в вакууме.

Постоянная A в (17,4) и (17,5) зависит от значения поля на границе слоя; для произвольного плавного слоя при амплитуде падающей волны, равной единице, A определяется формулой (30,7). Дальнейшая конкретизация вида поля вблизи точки отражения может быть достигнута, если обратиться к свойствам функции Бесселя или, проще, интеграла Эйри (см., например, [199, 200]).

При отсутствии поглощения отношение $\left|\frac{E}{A}\right|^2$ согласно формулам (17,4) и (17,5) представлено сплошной линией на рис. 32,1, где по оси абсцисс отложен параметр (32,1). Поле E обращается в нуль в точках, отстоящих от точки $z(\varepsilon = 0)$ на расстоянии

$$\Delta z_{0m} = \beta_m\left(\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right)^{-1/3} = \beta_m\left(\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right)^{-1/3}, \tag{32,2}$$

где m — номер нуля (корня) и $\beta_1 = 2{,}338$; $\beta_2 = 4{,}088$; $\beta_3 = 5{,}521$; $\beta_4 = 6{,}787$; $\beta_5 = 7{,}944$; $\beta_{10} = 12{,}8$ и т. д. Значения β_m иногда удобно представить в виде $\beta_m = \left(\frac{3}{2}\eta_m\right)^{2/3}$, где $\eta_1 = 2{,}38$; $\eta_2 = 5{,}61$; $\eta_3 = 8{,}64$; $\eta_{10} = 30{,}63$ и вообще

$$\eta_m = \left(m - \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{0{,}0884194}{4m-1} - \frac{0{,}08328}{(4m-1)^3} + \ldots$$

Максимумы поля E лежат в точках $z_{M,\,m}$, определяемых выражением (32,2), но с заменой β_m на γ_m, где $\gamma_1 = 1{,}019$; $\gamma_2 = 3{,}248$; $\gamma_3 = 4{,}820$; $\gamma_4 = 6{,}163$; $\gamma_5 = 7{,}372$.

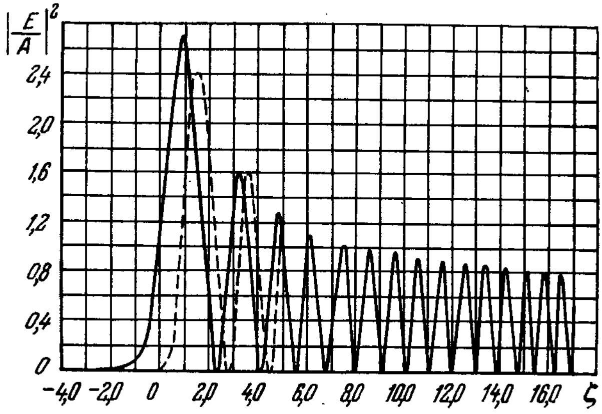


Рис. 32,1. Структура поля вблизи точки отражения (сплошная линия). Пунктиром нанесено отношение $\left|\frac{E}{A}\right|^2$ в приближении геометрической оптики (32,7). Параметр $\zeta = \left\{\frac{\omega^2}{c^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right\}^{1/3}\Delta z$.

В качестве примера укажем, что для $\lambda_0 = 60$ *м* ($f = 5\cdot10^6$) и $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right| = 10^{-7}$ имеем $\Delta z_{01} \approx 520$ *м* и $z_{M1} \approx 230$ *м*.

Если бы слой отсутствовал и в точке z ($\varepsilon = 0$) находилось идеальное зеркало, первый узел образующейся при отражении стоячей волны находился бы на расстоянии $\frac{\lambda_0}{2} = 30$ *м*, а первый максимум — на расстоянии $\frac{\lambda_0}{4} = 15$ *м* от зеркала. Таким образом, в рассмотренном примере из-за малости n в области отражения поле «растягивается» более чем в 15 раз.

Значение $\left|\frac{E}{A}\right|^2$ в первом максимуме равно 2,68, и, так как согласно (30,7)

$$|A|^2 = \frac{4\pi}{9}\left(\frac{\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/3},$$

квадрат напряженности поля в первом максимуме равен

$$|E_{M1}|^2 = 3{,}6\left[\frac{\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right]^{1/3}. \qquad (32{,}3)$$

Вдали от точки отражения, согласно (30,4), имеем:

$$\left|\frac{E}{A}\right|^2 = \frac{9}{\pi}\zeta^{-1/2}\cos^2\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \zeta \gg 1. \qquad (32{,}4)$$

В работе [191] была рассмотрена структура поля вблизи точки отражения на основе строгого решения волнового уравнения для слоя:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } z<0 \quad \varepsilon = \varepsilon_1 - \frac{4p^2-1}{4\frac{\omega^2}{c^2}(a-z^2)};\\ &\text{при } z>0 \quad \varepsilon = \varepsilon_2 - \frac{4p^2-1}{4\frac{\omega^2}{c^2}(b+z)},\end{aligned}\right\} \qquad (32{,}5)$$

где p, a и b — некоторые постоянные, удовлетворяющие тому условию, что при $z=0$

$$\varepsilon_1 - \frac{4p^2-1}{4\frac{\omega^2}{c^2}a} = \varepsilon_2 - \frac{4p^2-1}{4\frac{\omega^2}{c^2}b} = \varepsilon_0$$

(фактически в [191] рассматривается лишь частный случай слоя (32,5), а именно полагается $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ и $a = b$).

Решение волнового уравнения для слоя (32,5) выражается в функциях Бесселя порядка p. Если имеет место полное отражение, то в области точки отражения слой (32,5) можно заменить линейным с таким же значением $\left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right)_0$; при этом величина $|E_{M1}|^2$ отличается от (32,3) не раньше, чем в третьем знаке.

Геометрикооптическое приближение. Как было указано в § 30, несмотря на то, что при $\sqrt{\varepsilon} = n \to 0$ геометрическая оптика неприменима, фаза отраженной волны (30,6) может быть с большой точностью получена из геометрикооптического приближения, дополненного условием отражения в точке $\varepsilon = 0$. В этой связи представляет известный интерес посмотреть, как в этом приближении выглядит волновое поле. Конструируя стоячую волну с узлом в точке z ($\varepsilon = 0$) из решений (16,11) при отсутствии поглощения, мы приходим к такому выражению ($n = \sqrt{\varepsilon}$):

$$E = \frac{2}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\omega}{c} \int\limits_0^z n(z)\, dz\right), \tag{32,6}$$

где z отсчитывается от точки $z(\varepsilon = 0)$ и коэффициент 2 выбран в соответствии с тем, что амплитуда падающей волны вне слоя считается равной единице, так же как в решении (17,4) с

$$|A|^2 = \frac{4\pi}{9}\left(\frac{\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/3}.$$

Для линейного слоя, где $\varepsilon = \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 z$, квадрат выражения (32,6) принимает вид (вместо z пишем Δz):

$$|E|^2 = \frac{4}{\sqrt{\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 \Delta z}} \sin^2\left\{\frac{2\omega}{3c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\left(\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0 \Delta z\right)^{3/2}\right\} =$$

$$= \frac{4}{\zeta^{1/2}}\left(\frac{\omega}{c\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/3} \sin^2\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right) = \frac{9}{\pi\zeta^{1/2}}|A|^2 \sin^2\left(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right). \tag{32,7}$$

Сравнение (32,7) с (32,4) показывает, как этого и следовало ожидать, что при $\zeta \gg 1$ асимптотическое приближение строгого решения и решение (32,6) отличаются лишь фазой $\frac{\pi}{4}$ (см. §§ 17, 30). Нули функции (32,7) определяются формулой (32,2) с заменой β_m на $\left(\frac{3}{2}n\pi\right)^{2/3}$, т. е., например, $\beta_1 \approx 2{,}8$, $\beta_2 \approx 4{,}5$, $\beta_{10} \approx 13{,}0$; для первого нуля разница составляет $\sim 20\%$, для второго $\sim 10\%$ и для десятого $\sim 2\%$ от β_m. Положение первого максимума поля и его высота определяются теперь формулами (32,2) и (32,3) с заменой $\gamma_1 = 1{,}019$ на $\gamma_1' \approx 1{,}75$ и коэффициента 3,6 на 3. Таким образом, уже начиная с области первого максимума функции (32,6) и (32,7) могут оказаться для ряда задач неплохими приближениями к точному решению. Отношение $\left|\frac{E}{A}\right|^2$ согласно (32,7) нанесено на рис. 32,1 пунктиром *).

---

*) Заметим, что в то время как электрическое поле в области малых значений n «разбухает», магнитное поле, напротив, уменьшается. Это сразу ясно из того, что, например, в бегущей волне при отсутствии поглощения поток энергии постоянен и, следовательно, $EH = \mathrm{const}$. К тому же выводу приходим, отправляясь от выражения (32,6): если поле E направлено по оси x, то поле H направлено по оси y, причем

$$H_y = i\frac{c}{\omega}\,\mathrm{rot}_y\, E = i \cdot 2\sqrt{n} \cos\left(\frac{\omega}{c}\int\limits_0^z n(z)\, dz\right).$$

Если бы слоя не было совсем, а вместо него было поставлено идеальное зеркало, то значение $|E_M|^2$ равнялось бы 4 (амплитуда падающей волны считается равной единице). При наличии слоя имеет место некоторое разбухание поля, которое можно характеризовать фактором

$$\delta^2=\frac{|E_{M1}|^2}{4}=0{,}9\left(\frac{2\pi}{\lambda_0\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/3}. \qquad (32{,}8)$$

При $\lambda_0=60$ *м* и $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0=10^{-7}$ имеем $\delta^2\approx 20$. Для E-слоя, где разбухание поля могло бы представить известный интерес с точки зрения нелинейных эффектов, по-видимому, $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\geqslant 10^{-7}$, и для $\lambda_0=1000$ *м* получим $\delta^2\leqslant 8$.

Учет поглощения. При наличии поглощения исследование структуры поля также достигается путем использования формулы (17,4), но с ζ, определяемым согласно (17,12). Основное изменение в выражениях для $|E_{M1}|^2$ и δ^2 состоит теперь в появлении в качестве множителя амплитудного коэффициента отражения R. Кроме того, численные множители в (32,2) и (32,3) заменяются несколько другими, зависящими от величины поглощения. Если, например,

$$\frac{4\pi\sigma(0)}{\omega}=\frac{\nu_{\text{эфф}}(0)}{\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}{\frac{\omega}{c}}\right)^{2/3}, \qquad (32{,}9)$$

то

$$z_{M1}\approx 1{,}22\left(\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0\right)^{-1/3}, \quad |E_{M1}|^2\approx 6R\left(\frac{2\pi}{\lambda_0\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0}\right)^{1/3}. \qquad (32{,}10)$$

Полагая $\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0=10^{-7}$, $\lambda_0=1000$ *м* и $R=\frac{1}{8}$ ($-\ln R\approx 2$), для δ^2 получаем значение 1,6. В то же время в разбираемом примере согласно (32,9) $\nu_{\text{эфф}}\approx 1{,}3\cdot 10^4$, т. е. даже меньше, чем это обычно бывает в E-слое. Из приведенного примера явствует, что роль «разбухания» поля в общем сводится к тому, что поле в ионосфере можно оценивать по формулам, выведенным для случая, когда ионосферный слой заменен идеальным зеркалом (полностью отражающей поверхностью раздела). Наличие разбухания при этом примерно компенсирует затухание поля вследствие поглощения. Разбухание нужно учитывать, так сказать, явно лишь в случаях, когда поглощение и производная

$\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_0$ одновременно очень малы. Влияние на эффект разбухания поля вблизи точки отражения неоднородностей, находящихся в этой области, исследовано в работе [300].

§ 33. Отражение и просачивание через слой волн с частотой, близкой к критической

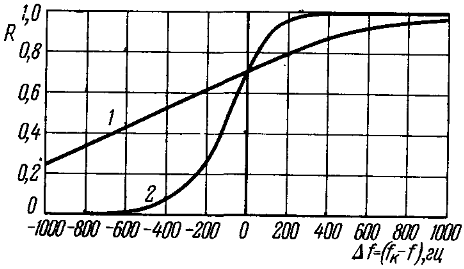


Рис. 33,1. Коэффициент отражения $|R|\equiv R$ для параболических слоев с полутолщиной $z_m=20$ *км* (кривая *1*) и 100 *км* (кривая *2*) при отсутствии поглощения.

Параболический слой. В § 30 уже было указано на необходимость особого рассмотрения вопроса об отражении волн от слоя в области частот близких к критическим. Так, для параболического слоя формулы § 30, полученные в результате линеаризации слоя в области точки отражения, справедливы лишь при условии

$$\Delta f=f_к-f>\frac{c}{3z_m}. \qquad (33,1)$$

Для частот, не удовлетворяющих этому неравенству, слой в области отражения нельзя считать линейным, но обычно можно аппроксимировать параболой. Вместе с тем для слоя с максимумом, в частности для параболического слоя, вблизи этого максимума (при малых Δf) имеет место частичное просачивание волн через слой. Как было указано в § 17, коэффициент отражения волны от параболического слоя без поглощения при $\Delta f \ll f_к$ равен (см. (17,28); ниже $R\equiv|R|$)

$$\frac{R^2}{1-R^2}=e^{4\pi^2\frac{z_m}{c}\Delta f}; \quad D^2=1-R^2. \qquad (33,2)$$

Из (33,2) явствует, что условие (33,1) является вместе с тем условием малости просачивания (малости коэффициента пропускания D^2), так как

$$D^2\leqslant 3\cdot 10^{-6} \text{ при } \Delta f\geqslant\frac{c}{3z_m}. \qquad (33,3)$$

Таким образом, требования малости просачивания и возможности замены слоя в области отражения линейным совпадают. Оценки, произведенные в § 30, показывают, что для ионосферных слоев область просачивания ничтожно мала (это ясно также сразу из (33,3), так как для F-слоя при $z_m = 100$ *км* $D^2 = 3\cdot 10^{-6}$ для $\Delta f = 10^3$).

Зависимость $R\,(\Delta f)$ по формуле (33,2) для слоев с $z_m = 20$ *км* и $z_m = 100$ *км* показана на рис. 33,1.

При строгой волновой трактовке отражения от слоя критическая частота $f_к$ с точки зрения значений коэффициента R ничем не выделена, так как отражение имеет место и при $f < f_к$ и при $f > f_к$. Однако большая резкость функции $R\,(f)$ приводит к тому, что практически обычно можно считать, что $R = 1$ при $f < f_к$ и $R = 0$ при $f > f_к$. В этом случае критическая частота $f_к = \sqrt{\frac{e^2 N_{\max}}{\pi m}}$, т. е. частота, при которой точка $z\,(\varepsilon = 0)$ достигает максимума слоя, имеет очевидный физический смысл предельной частоты волн, отражающихся от слоя.

Произвольный слой. В связи с вопросом о просачивании волн через слой укажем на возможность получения выражения для коэффициента пропускания $D^2 = 1 - R^2$ для довольно произвольного слоя, но при условии, что

$$|D| \ll 1. \tag{33,3a}$$

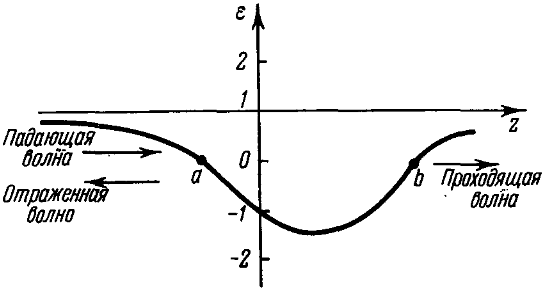


Рис. 33,2. Диэлектрическая проницаемость ε для плавного слоя с одним максимумом.

Представим себе слой типа, изображенного на рис. 33,2, для которого при $z = a$ и $z = b$ диэлектрическая проницаемость равна $\varepsilon\,(\omega) = 0$. Область $a \leqslant z \leqslant b$ предполагается настолько большой, что на этом пути волна сильно затухает, в силу чего как раз и выполняется условие (33,3а). Мы можем при этом считать, что $R \approx 1$, и, таким образом, снизу образуется стоячая волна, в первом приближении такая же, как при полном отражении. Поэтому, согласно (30,5), вдали от слоя при $(a - z) \gg \left(\frac{c^2}{\omega^2 \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_a}\right)^{1/3}$

получим:

$$E_1 = \frac{2C_1}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \cos\left(\frac{\omega}{c}\int_z^a \sqrt{\varepsilon}\,dz - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (33,4)$$

В области $a \leqslant z \leqslant b$ волна затухает, и (в том же приближении) при z, существенно меньшем b, но условии $(z-a) \gg \left(\frac{c^2}{\omega^2 \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_a}\right)^{1/3}$, находим:

$$E_2 = \frac{C_1}{\sqrt[4]{|\varepsilon|}} e^{-\frac{\omega}{c}\int_a^z \sqrt{|\varepsilon|}\,dz} = \frac{C_1}{\sqrt[4]{|\varepsilon|}} e^{-\frac{\omega}{c}\int_a^b \sqrt{|\varepsilon|}\,dz}\, e^{\frac{\omega}{c}\int_z^b \sqrt{|\varepsilon|}\,dz}. \qquad (33,5)$$

Выражение (33,5) представляет собой асимптотическое (в области $\varepsilon < 0$) представление строгого решения (17,4) и (17,5), обобщенное на произвольный (вдали от точки z ($\varepsilon = 0$)) слой. Важно подчеркнуть, что в (33,4) и (33,5) стоит одна и та же постоянная C_1 (для достижения этого в (33,4) как раз и нужен множитель 2; см. [200]). Запись решения внутри области $a < z < b$ в виде (33,5) справедлива при пренебрежении волной, отражающейся от области $z \approx b$ (или, как мы обычно говорим, от точки $z = b$). Если область отрицательных значений ε велика, как это имеет место при условии (33,3), то волна, отражающаяся от точки $z = b$, даже если бы коэффициент отражения был заметным (это кстати, не так), действительно не играла бы при удалении от точки $z = b$ никакой роли просто из-за малости множителя $e^{-\frac{\omega}{c}\int_a^b \sqrt{|\varepsilon|}\,dz}$.

За точкой b (при $z > b$) имеется лишь слабая уходящая волна и при $(z-b) \gg \left(\frac{c^2}{\omega^2 \left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_b}\right)^{1/3}$ поле таково:

$$E_3 = \frac{C_2}{\sqrt[4]{\varepsilon}} e^{-i\left(\frac{\omega}{c}\int_b^z \sqrt{|\varepsilon|}\,dz - \frac{\pi}{4}\right)}. \qquad (33,6)$$

Для нахождения коэффициента пропускания $|D|^2 \equiv D^2 \equiv \left|\frac{C_2}{C_1}\right|^2$ (предполагается, что при $z = \pm\infty$ значение $\varepsilon = 1$) нужно, очевидно, связать C_2 с C_1. Если незаконно продлить решения (33,5) и (33,6) до точки b и там положить $E_3 = E_2$, то получаем $C_2 = C_1 e^{-\frac{\omega}{c}\int_a^b \sqrt{|\varepsilon|}\,dz}$. Вместе с тем именно этот результат в применении к модулям, т. е. равенство $|C_2|^2=|C_1|^2 e^{-2\frac{\omega}{c}\int\limits_a^b \sqrt{|\varepsilon|}\,dz}$, ясен также из энергетических соображений. Действительно, волной, отражающейся от точки $z=b$ внутрь слоя, можно пренебречь (см. выше). Но это означает, что в область $z>b$ попадает практически вся энергия, доходящая снизу (от $z<b$) до точки $z=b$. Ослабление же потока энергии в точке $z=b$ по сравнению с точкой $z=a$ с большой точностью определяется множителем $e^{-2\frac{\omega}{c}\int\limits_a^b \sqrt{|\varepsilon|}\,dz}$ $\left(\text{если } \frac{2\omega}{c}\int\limits_a^b \sqrt{|\varepsilon|}\,dz \gg 1\right)$.

Наконец, связь между C_2 и C_1, отличающаяся от приведенной лишь множителем $-i$, может быть получена из следующих строгих соображений. Любое решение волнового уравнения равно сумме двух линейно независимых решений u и v: $E=\alpha v(z)+\beta u(z)$. Заменяя слой вблизи точки b линейным, мы получаем возможность выписать оба решения u и v в явном виде: одно из них совпадает с (17,4) — (17,5), другое отличается знаком перед функциями $J_{1/3}$ и $I_{1/3}$ в (17,4) (подробнее см. [200]). Одновременно выражения (33,5) и (33,6) представляют собой искомое решение задачи с двух сторон от точки b в достаточном от нее отдалении. Следовательно,

$$E_2=\alpha v(z \ll b)+\beta u(z \ll b) \quad \text{и} \quad E_3=\alpha v(z \gg b)+\beta u(z \gg b),$$

где, как ясно из предыдущего, неравенства $z \overset{\ll}{\gg} b$ означают, что $|z-b| \gg \left(\frac{c^2}{\omega^2\left|\frac{d\varepsilon}{dz}\right|_b}\right)^{1/3}$. При $z \overset{\ll}{\gg} b$ можно, с другой стороны, заменить функции u и v их известными асимптотическими представлениями (см. (17,6) и [200]). В результате легко показать (см. (33,5) и (33,6)), что $\alpha=C_2$ и $\beta=iC_2=C_1 e^{-\frac{\omega}{c}\int\limits_a^b \sqrt{|\varepsilon|}\,dz}$. Таким образом,

$$C_2=-iC_1 e^{-\frac{\omega}{c}\int\limits_a^b \sqrt{|\varepsilon|}\,dz} \tag{33,7}$$

и

$$D^2=e^{-2\frac{\omega}{c}\int\limits_a^b \sqrt{|\varepsilon(z,\,\omega)|}\,dz}. \tag{33,8}$$

Для параболического слоя (30,1) в качестве точек a и b нужно, очевидно, взять значения $z(\varepsilon=0)=\pm\sqrt{\frac{f_к^2-f^2}{f^2}}\,z_m$ (см. (30,15)). Проводя для этого случая в (33,8) вычисление стоящего в экспоненте интеграла, получаем:

$$D^2=e^{-\frac{4\pi^2}{\lambda_к}\frac{f_к^2-f^2}{2f_к^2}z_m}=e^{-\frac{4\pi^2 z_m}{c}\Delta f},\tag{33,9}$$

где переход от $f_к^2-f^2$ к $2f_к\Delta f$ сделан для случая, когда $\Delta f=f_к-f\ll f_к$.

Выражение (33,9) при условии (33,3) тождественно, как этого и следовало ожидать, с формулами (17,25) и (17,28) или (33,2), полученными путем решения волнового уравнения для параболического слоя (30,1). С помощью формулы (33,8) можно определить границу просачивания для произвольного (в широких пределах) слоя.

В количественном отношении формула (33,8), полученная еще в [19], пригодна только при условии $D^2\ll 1$, что было использовано при ее выводе. Методом фазовых интегралов можно получить [197] более общую формулу *)

$$\left.\begin{aligned}&|D^2|\equiv D^2=\frac{e^{-2\delta_0}}{1+e^{-2\delta_0}},\quad |R|^2\equiv R^2=\frac{1}{1+e^{-2\delta_0}},\\&2\delta_0=i\frac{\omega}{c}\oint\sqrt{\varepsilon(z)}\,dz=2\frac{\omega}{c}\int\limits_a^b\sqrt{\varepsilon}\,dz.\end{aligned}\right\}\tag{33,10}$$

Здесь в контурном интеграле путь интегрирования охватывает оба нуля функции $\varepsilon(z)$ и при переходе к интегрированию по оси z предполагается, что нули ε расположены на вещественной оси, т. е. $f<f_к$. При условии $D^2\ll 1$ формула (33,10) для D^2 переходит в (33,8). Формулы (33,10) справедливы и при $f>f_к$, если положить $2\delta_0=-i\frac{\omega}{c}\oint\sqrt{\varepsilon(z)}\,dz$ с интегрированием по контуру, охватывающему расположенные в этом случае на мнимой оси нули функции $\varepsilon(z)$. Для параболического слоя выражения (33, 10) совпадают с выражением (17,25), получающимся в результате точного решения задачи. Таким образом, метод фазовых интегралов в этом случае приводит для $|D|^2$ и $|R|^2$ к точным результатам даже для тонких слоев (для фазы отраженной и прошедшей волн метод фазовых интегралов для тонких параболиче-

---

*) Записывая тождества $|D|^2\equiv D^2$ и $|R|^2\equiv R^2$, мы хотим лишь подчеркнуть, что здесь везде через D^2 и R^2 обозначаются квадраты модулей амплитудных коэффициентов D и R.

ских слоев уже не приводит к правильным значениям). Для произвольного плавного слоя с одним максимумом формулы (33,10), вообще говоря, не могут считаться точными при любой толщине слоя, но область их применимости шире, чем у формулы (33,8). Вопрос о вычислении малого коэффициента отражения от плавного слоя при распространении волн с частотами, существенно бо́льшими критических, можно выяснить, используя результат работы [308]. Для параболического слоя ответ и на этот вопрос содержится в формуле (17,25).

Учет поглощения. Выше не учитывалось поглощение. При условии (33,1) влияние последнего рассмотрено в § 31. В непосредственной близости от критической частоты условие (33,1) не

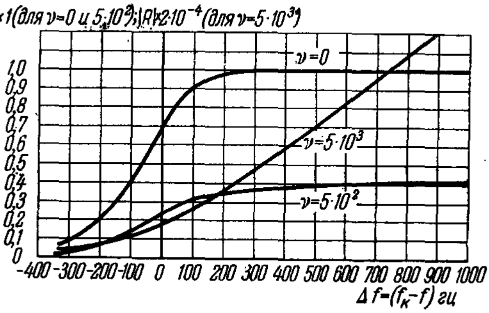


Рис. 33,3. Коэффициент отражения $|R|$ для параболического слоя $z_m = 120$ *км*, $\lambda_к = \frac{c}{f_к} = 30$ *м* при различных значениях числа соударений $\nu_{эфф} = \nu$.

соблюдается, и нужно обобщить формулы (33,2) и (33,8) на случай наличия поглощения. В отношении формулы (33,2) это сделано в [201] и весьма сложно. Поскольку просачивание заметно лишь в ничтожном интервале частот, мы ограничимся тем, что приведем графики R в некоторых случаях (рис. 33,3 и 33,4).

Выражение типа (33,8) можно получить и с учетом поглощения. Не останавливаясь на детальном выводе, укажем, что в этом случае, как легко видеть, по порядку величины

$$D^2 \approx R_0 e^{-\frac{2\omega}{c}\int\limits_a^b \varkappa\, dz}. \qquad (33,10а)$$

Здесь R_0 — используемый нами модуль амплитудного коэффициента отражения (от всего слоя) в приближении, не учитывающем просачивания (поле в области точки $z = a$ отличается от (33,4) множителем

$\sqrt{R_0} \approx e^{-\frac{\omega}{c}\int\limits_0^a \varkappa dz}$, так как коэффициент R_0 отвечает двукратному прохождению волны через среду), и $\varkappa$ — показатель поглощения (31,9), который при $\sigma = 0$ равен $\sqrt{|\varepsilon|}$. При отсутствии поглощения формула (33,10а) переходит в (33,8) и знак $\approx$ поставлен потому, что при более точном расчете в ней могут появиться небольшие дополнительные множители, как это, например, имеет место в формуле (31,2) в отношении слагаемого Δ ($-\ln R$). При наличии поглощения роль просачивания меньше, чем при отсутствии поглощения, так как уменьшение наблюдаемого коэффициента отражения R происходит и из-за поглощения и, кроме того, в области слоя, где начинается просачивание, волновое поле уже ослаблено из-за того же поглощения (множитель R_0 в (33,10а)). Метод фазовых интегралов при учете поглощения приводит к формулам (33,10) с заменой $2\delta_0$ на $2\delta = i\frac{\omega}{c}\oint\sqrt{\varepsilon'(z)}\,dz$, где контур интегрирования охватывает нули функции ε' (z).

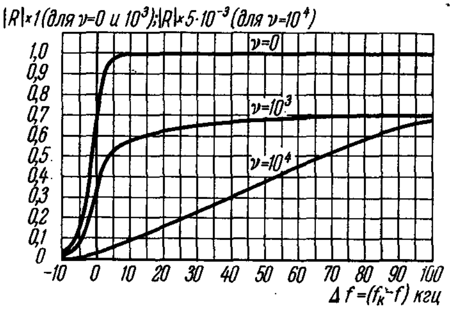


Рис. 33,4. Коэффициент отражения при $z_m = 6$ *км* и $\lambda_к = 90$ *м*.

Действующая высота для параболического слоя (строгое решение). Вблизи максимума слоя при несоблюдении условия (33,1) не только появляется просачивание, но и, как это многократно отмечалось, становятся непригодными формулы § 30 для φ, L_0, $L_{гр}$ и $z_д$. Это обстоятельство особенно ясно проявляется в выражении (30,17) для $z_д$, согласно которому действующая (кажущаяся) высота $z_д \to \infty$ при $f \to f_к$. В действительности же действующая высота стремится к конечному пределу. В § 17 уже было приведено выражение для фазы отраженной волны для параболического слоя (см. (17,24)). С помощью этого выражения можно получить [185, 201] следующую формулу для $z_д$ в случае параболического слоя (30,1):

$$z_д = \frac{c\varphi'(\omega)}{2} = \frac{z_m f}{2f_к}\left\{0,5772 + \ln\left(16\pi\frac{z_m}{\lambda_к}\right) + \right.$$

$$\left. + \rho\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\rho - i3n}{n(n+i\rho)(n+2i\rho)}\right)\right\}, \quad (33,11)$$

где отброшен очень малый в обычных условиях член $-\frac{2\rho}{u^2}$ и параметры ρ и u определены согласно (17,22). При $f=f_\text{к}$ высота $z_\text{д}$ максимальна и равна

$$z_\text{д}(f=f_\text{к})=\frac{z_m}{2}\left(0{,}5772+\ln\left(16\pi\frac{z_m}{\lambda_\text{к}}\right)\right). \qquad (33{,}12)$$

При условии (30,19), эквивалентном неравенству $\rho \simeq \pi\frac{z_m}{\lambda_\text{к}}\frac{f_\text{к}^2-f^2}{f_\text{к}^2} \gg$ $\gg 1$, выражение (33,11) переходит в (30,17), т. е.

$$z_\text{д}=\frac{z_m}{2}\frac{f}{f_\text{к}}\ln\left(\frac{f_\text{к}+f}{f_\text{к}-f}\right) \qquad (\rho \gg 1). \qquad (33{,}13)$$

Можно показать, что

$$\frac{(z_\text{д})_\text{строго}}{(z_\text{д})_\text{прибл}} \to 1 \text{ при } \frac{z_m}{\lambda_\text{к}} \to \infty, \qquad (33{,}14)$$

где $(z_\text{д})_\text{строго}$ и $(z_\text{д})_\text{прибл}$ определяются соответственно выражениями (33,11) и (33,13).

График функции $\frac{2z_\text{д}}{z_m}$ по формулам (33,11) и (33,13) представлен на рис. 33,5 для $z_m = 120$ *км* и $\lambda_\text{к} = 30$ *м* $\left(\frac{z_m}{\lambda_\text{к}}=4000\right)$. Из рисунка ясно, что уже при $\frac{\Delta f}{f_\text{к}}=10^{-4}$, т. е. $\Delta f = 10^3$, выражения (33,11) и (33,13) приводят к неотличимым друг от друга результатам.

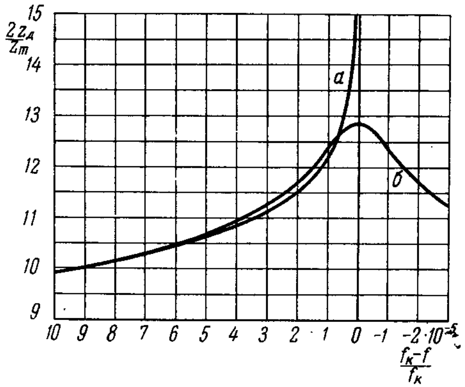


Рис. 33,5. Высотно-частотная характеристика для параболического слоя ($z_m=120$ *км*, $\lambda_\text{к}=30$ *м*) вблизи критической частоты: *а*) приближение геометрической оптики; *б*) строгое решение.

Функция (33,11) при $f \approx f_\text{к}$ зависит от частоты только через параметр $\rho = -2\pi\frac{z_m}{c}\Delta f=\frac{2\pi z_m}{\lambda_\text{к}}\frac{\Delta f}{f_\text{к}}$. Поэтому на основании рис. 33,5 можно утверждать, что отличие формул (33,11) и (33,13) ничтожно уже при $\rho > 2$ или при Δf, удовлетворяющем условию (33,1). Тем самым доказывается справедливость этого последнего условия в качестве критерия замены слоя в области отражения линейным, как это делалось в § 30. Что касается величины отношения $\frac{2z_\text{д}}{z_m}$ (см. (33,11)), то, помимо параметра ρ, она зависит также от значения $\frac{z_m}{\lambda_к}$. Поэтому общий ход кривых $z_д(\rho)$ при разных $\frac{z_m}{\lambda_к}$ аналогичен, но не совпадает. Вместе с тем кривые $z_д\left(\frac{\Delta f}{f_к}\right)$ зависят лишь от отношения $\frac{z_m}{\lambda_к}$. На рис. 33,6 приведены значения $\frac{2z_д}{z_m}$, а также коэффициент отражения R для слоя с $z_m = 12$ *км*.

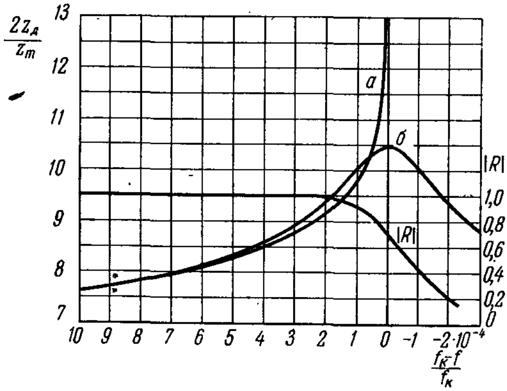


Рис. 33,6. Высотно-частотная характеристика и коэффициент отражения $|R|$ для параболического слоя ($z_m=12$ *км*, $\lambda_к=30$ *м*): *а*) приближение геометрической оптики; *б*) строгое решение.

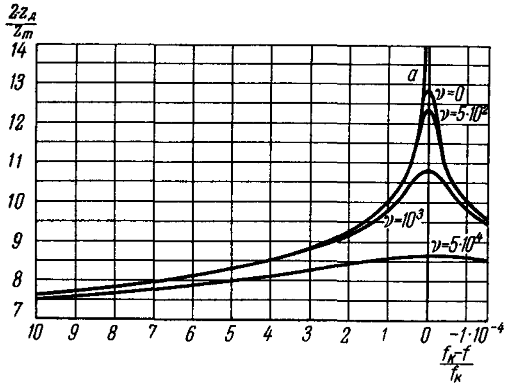


Рис. 33,7. Высотно-частотные характеристики для параболического слоя ($z_m=120$ *км*, $\lambda_к=30$ *м*) при различных значениях числа соударений $\nu_{эфф}\equiv\nu$. Кривая *а* — приближение геометрической оптики при $\nu=0$; все остальные кривые — точные решения.

и $\lambda_к = 30$ *м*, т. е. $\frac{z_m}{\lambda_к} = 400$ (рисунки настоящего параграфа, кроме рис. 33,1 и 33,2, взяты из [201]).

При наличии поглощения, как указывалось в § 31, значение $z_д$ обычно меняется очень мало, так как в F-слое $\nu_{эфф} \ll \omega$. Наиболее заметное влияние на $z_д$ поглощение может оказать вблизи критической частоты, так как в этом случае область малых значений $n = \sqrt{\varepsilon}$ особенно велика (см. (30,13)). Изменение $\frac{2z_д}{z_m}$ для параболического слоя при разных значениях $\nu_{эфф} = \mathrm{const}$ ясно из рис. 33,7 и 33,8. Кстати, из рис. 33,5—33,8 видно, какие большие значения принимает отношение $\frac{z_д}{z_m}$ вблизи критической частоты.

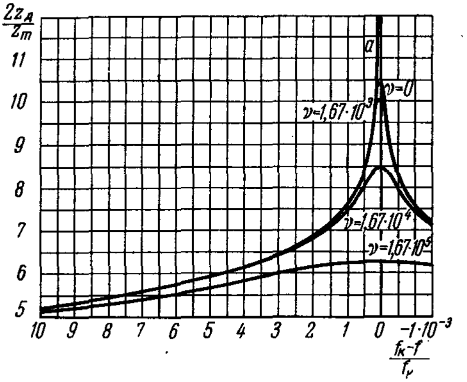


Рис. 33,8. Высотно-частотные характеристики для параболического слоя ($z_m = 36$ *км*, $\lambda_к = 90$ *м*) при различных значениях $\nu_{эфф} \equiv \nu$. Кривая *а* — приближение геометрической оптики при $\nu = 0$; все остальные кривые — точные решения.

О времени установления амплитуды сигнала. Приведенные на рис. 33,5—33,8 кривые дают по существу время группового запаздывания $\Delta t_{гр} = \frac{2z_д}{c}$ в зависимости от несущей частоты сигнала. Необходимо теперь заметить, что как раз вблизи критической частоты время установления амплитуды сигнала τ_0 особенно велико (см. (30,22)); например, при $z_m = 120$ *км* и $\Delta f = 10^2$, где отличие $(z_д)_{строго}$ от $(z_д)_{прибл}$ велико (см. рис. 33,5), $\tau_0 = 10^{-3}$ *сек*, т. е. в 10 раз больше длительности обычно употребляемых сигналов. Кроме того, формулы § 21 получены в предположении, что коэффициент $R(\omega) = \mathrm{const}$ или во всяком случае мало меняется в области спектральной ширины сигнала. Вблизи критической частоты это условие, очевидно, не выполняется, так как при наличии просачивания R резко зависит от частоты (см. (33,2)). Поэтому даже если не обращать внимания на расплывание сигнала, его форма изменяется в силу различного просачивания разных частот, входящих в разложение сигнала в интеграл Фурье, и говорить о групповой скорости без дальнейшего анализа нельзя. Из рис. 33,3 явствует, что при отсутствии поглощения для слоя с $z_m = 120$ *км* и $\lambda_к = 30$ *м* коэффициент R сильно зависит от частоты в интервале ~ 200 *гц* вблизи $f_к$. Поэтому в нашем примере, когда

$\Delta f = f_к - f = 10^2$, где f — несущая частота сигнала, для того чтобы пользоваться формулами § 21 и обычным понятием групповой скорости, нужно во всяком случае, чтобы спектральная ширина сигнала δf была много меньше 200 *гц*, т. е. длительность $T \sim \frac{2\pi}{\delta f} \gg 3\cdot 10^{-2}$ *сек*; в этом случае одновременно $\tau_0 \ll T$.

Таким образом, в разбираемом примере определить на опыте высоту $z_д$, соответствующую (33,11) и кривым на рис. 33,5—33,8, можно, лишь работая с очень длительными сигналами $T \gtrsim \frac{1}{10}$ *сек* и приводя при этом измерения для середины сигнала (время установления при этом $\gtrsim 10^{-3}$ *сек*, что приводит к $\Delta z_д \gg 300$ *км*, так что пренебрегать временем установления нельзя и для длительных сигналов).

§ 34. Отражение при наклонном падении

Точка отражения. Критическая частота. Основываясь на результатах § 19, нетрудно рассмотреть вопрос об отражении радиоволн от ионосферного слоя при наклонном падении аналогично тому, как это было сделано в § 30 для нормального падения. Так, например, при отсутствии поглощения фаза отраженной волны при наклонном падении определяется формулой (19,15), где функцию $n(z)$ можно считать произвольной с теми же оговорками, как и в § 30. Отражение волны происходит при $z = z_{отр}$, причем (см. (19,12))

$$n(z_{отр}) = \sin\theta_0; \quad \varepsilon(z_{отр}) = n^2(z_{отр}) = \sin^2\theta_0 \tag{34,1}$$

(принято, что в начале слоя $n(0) = 1$; в (34,1) θ_0 — угол падения волны на слой, как это показано на рис. 19,1). При $z > z_{отр}$ волновое поле экспоненциально затухает, и сама точка $z = z_{отр}$ выделена тем, что в ней равен нулю коэффициент у функции F в волновом уравнении (19,6) (для волны, у которой вектор $\boldsymbol{E}$ лежит в плоскости падения, согласно (19,22) аналогичный коэффициент обращается в нуль при $z < z_{отр}$, но в условиях ионосферы соответствующее отличие обычно ничтожно). При нормальном падении $\sin\theta_0 = 0$ и отражение происходит при $n(z_{отр}) = 0$.

Если

$$n^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2},$$

то из (34,1) ясно, что на данной высоте z, где $N = N(z)$, при наклонном падении отражаются волны большей частоты, чем при нормальном падении; при этом

$$f_{накл} = \frac{f_{норм}}{\cos\theta_0}, \qquad n(f_{норм}) = 0, \qquad n(f_{накл}) = \sin\theta_0. \tag{34,2}$$

В соответствии с этим, если критическая частота слоя равна $f_\text{к}$ (т. е. при нормальном падении точка, где $n(f_\text{к}) = 0$, лежит в максимуме слоя), то критическая частота $f_{\text{к, накл}}$ при наклонном падении равна

$$f_{\text{к, накл}} = \frac{f_\text{к}}{\cos\theta_0}. \qquad (34,3)$$

Лучевая трактовка. Весьма большое значение, в частности практическое, имеет лучевая трактовка распространения и отражения радиоволн от ионосферных слоев при наклонном падении. Наиболее общее понятие о луче связано с рассмотрением распространения сигналов (другими словами, импульсов, волновых групп или волновых пакетов), ограниченных в пространстве и во времени. Траектория движения «центра тяжести» такого сигнала при условии, что он мало расплывается и искажается при прохождении среды, и есть траектория луча. В любой однородной среде и в среде неоднородной, но в приближении геометрической оптики касательная к траектории сигнала совпадает с вектором групповой скорости, как это было показано в § 24 (поглощение считается достаточно слабым). Далее, в однородной и квазиоднородной среде при отсутствии пространственной дисперсии направление вектора групповой скорости совпадает со средним по времени направлением вектора Пойнтинга $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]$ (см. § 24). В изотропной среде при отсутствии пространственной дисперсии направление вектора групповой скорости в свою очередь идентично с направлением волнового вектора $\boldsymbol{k}$, т. е. вектора, нормального к фронту волны и в интересующем нас случае равного (см. § 19)

$$\left.\begin{aligned} &k_x = 0, \qquad k_y = \frac{\omega}{c} n(0) \sin\theta_0 = \frac{\omega}{c} n(z) \sin\theta, \\ &k_z = \frac{\omega}{c}\sqrt{n^2(z) - n^2(0)\sin^2\theta_0} = \frac{\omega}{c} n(z)\cos\theta, \\ &k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(z). \end{aligned}\right\} \qquad (34,4)$$

Таким образом, в случае наклонного падения сигнала на плоский изотропный ионосферный слой с $\varepsilon = \varepsilon(z)$, при выборе плоскости yz за плоскость падения, направление луча в каждой точке определяется согласно (34,4). Это значит, что для угла θ между касательной к лучу и осью z имеем:

$$\sin\theta = \frac{n(0)\sin\theta_0}{n(z)}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{n^2(z) - n^2(0)\sin^2\theta_0}}{n(z)}. \qquad (34,5)$$

Уравнение траектории луча определяется выражением (19,17)

Вблизи точки отражения, где $\sin\theta \approx 1$ (при $z = z_{\text{отр}}$, согласно (34,1) и (34,5), $\sin\theta = 1$), геометрическая оптика неприменима, и поэтому использовать выражение (34,4) или (34,5) для определения направления луча уже нельзя. Для нахождения траектории луча в области, где происходит отражение, нужно исследовать движение в этой области волнового пакета, составленного из близких друг другу решений волнового уравнения (19,2)—(19,3); в случае линейного слоя соответствующие решения выражаются через функции Бесселя или функции Эйри. При этом в общем случае волновой пакет может сильно расплываться и искажаться и, таким образом, чисто лучевая трактовка в области, где неприменима геометрическая оптика, вообще говоря, непригодна.

Однако в условиях ионосферы окрестность «точки отражения», где нужно использовать строгое решение волнового уравнения, как это уже неоднократно указывалось, весьма невелика. Еще более существенно то обстоятельство, что направлением луча мы обычно интересуемся только по выходе импульса из слоя. В этом же случае, как сейчас будет видно, направление луча правильно определяется из приближения геометрической оптики при том единственном условии, что это приближение хорошо применимо для определения фазы отражающейся от слоя волны, что, как правило, имеет место.

Для доказательства сделанного утверждения и нахождения местоположения точки прихода на землю отраженного от ионосферы луча рассмотрим следующую задачу. В некоторой точке Q с координатами $(0,\ y_1,\ 0)$, лежащей на земле (при $z = 0$), в ионосферу излучается узкий пучок лучей, т. е. пакет волн с волновым вектором $\boldsymbol{k}$, близким к некоторому «несущему» волновому вектору $\boldsymbol{k}_0$. Протяженность этого импульса во времени будем для простоты считать бесконечной, т. е. примем, что для всех направлений $\frac{\boldsymbol{k}}{k}$ излучение является монохроматическим с частотой ω. Поле падающего сигнала (при $z = 0$) можно тогда представить в виде:

$$\boldsymbol{E}_1 = \int \boldsymbol{g}(\boldsymbol{k})\, e^{i(\omega t - k_y y_1)}\, d\boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{k})$ — «острая» функция, имеющая максимум при $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0$. Поле отраженного сигнала в точке P с координатами $(0,\ y,\ 0)$ будет таково:

$$\boldsymbol{E}_2 = \int \boldsymbol{g}(\boldsymbol{k})\, e^{i(\omega t - k_y y_1 - \varphi(k,\, y_1,\, y))}\, d\boldsymbol{k},$$

где φ — сдвиг фаз отраженной плоской монохроматической волны по сравнению с падающей (поглощение считаем отсутствующим;

плоскость, в которой распространяется сигнал, считаем плоскостью yz, в силу чего в точках Q и P можно положить не только $z = 0$, но и $x = 0$). Поле $\boldsymbol{E}_2$, очевидно, будет велико не при любом значении y, а только вблизи некоторой точки $y = y_2$, соответствующей месту прихода отраженного луча. Для нахождения этой точки разложим фазу φ в ряд по $\Delta \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0$:

$$\varphi(\boldsymbol{k}, y_1, y) = \varphi(\boldsymbol{k}_0, y_1, y) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{k}}\right)_{k_0} \Delta \boldsymbol{k} + \ldots,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{k}} = \frac{\partial \varphi}{\partial k_x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial k_y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial k_z}\boldsymbol{k}' \ (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}' \text{ — орты осей } x, y, z).$$

Из этого разложения ясно, что если $\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{k}} = 0$, то с точностью до членов более высокого порядка малости поле $\boldsymbol{E}_2 = e^{-i\varphi(k_0)}\boldsymbol{E}_1$,

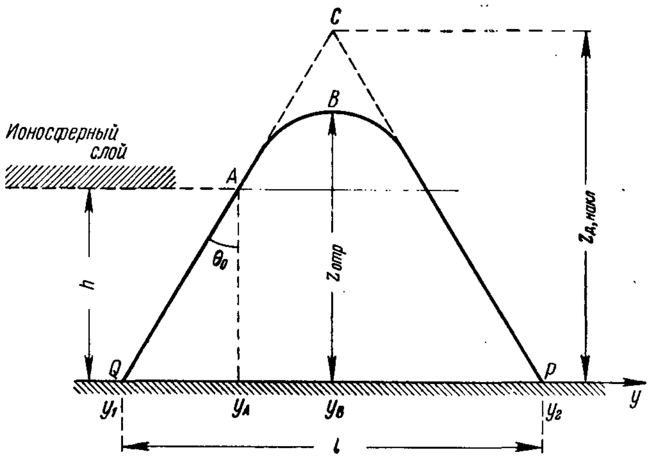


Рис. 34,1. Траектория луча при наклонном падении на плоский изотропный слой.

т. е. напряженность поля отраженного сигнала по своей абсолютной величине такая же, как для падающего сигнала. Отсюда следует, что местоположение точки y_2 определяется как раз из условия

$$\left(\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{k}, y_1, y_2)}{\partial \boldsymbol{k}}\right)_{k_0,\, z=0} = 0. \qquad (34{,}6)$$

Таким образом, если фаза φ с достаточной точностью определяется из приближения геометрической оптики, то и расстояние l между точками Q и P (рис. 34,1) также может определяться с помощью геометрикооптического приближения. В этом приближении имеем (см. § 19):

$$\varphi=\frac{2\omega}{c}\int\limits_0^{z_{\text{отр}}}\sqrt{n^2(z)-n^2(0)\sin^2\theta_0}\,dz+$$
$$+\frac{\omega}{c}n(0)\sin\theta_0(y_2-y_1)-\frac{\pi}{2},\qquad(34,7)$$

и в то же время при $z=0$:

$$k_y=\frac{\omega}{c}n(0)\sin\theta_0,\qquad k_z=\frac{\omega}{c}n(0)\cos\theta_0.$$

Поэтому, согласно (34,4),

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial k_y}&=\frac{1}{\frac{\omega}{c}n(0)}\frac{\partial\varphi}{\partial\sin\theta_0}=y_2-y_1-2\int\limits_0^{z_{\text{отр}}}\frac{n(0)\sin\theta_0\,dz}{\sqrt{n^2(z)-n^2(0)\sin^2\theta_0}}=0,\\ \frac{\partial\varphi}{\partial k_z}&=\frac{1}{\frac{\omega}{c}n(0)}\frac{\partial\varphi}{\partial\cos\theta_0}=\\ &=-(y_2-y_1)\operatorname{ctg}\theta_0+2\int\limits_0^{z_{\text{отр}}}\frac{n(0)\cos\theta_0\,dz}{\sqrt{n^2(z)-n^2(0)\sin^2\theta_0}}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(34,8)$$

Отсюда, полагая сразу $n(0)=1$, имеем $\left(\text{оба равенства } \frac{\partial\varphi}{\partial k_y}=0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial k_z}=0\right.$ в рассматриваемом случае приводят, очевидно, к одному и тому же соотношению$\left.\right)$:

$$l=y_2-y_1=2\int\limits_0^{z_{\text{отр}}}\frac{\sin\theta_0\,dz}{\sqrt{n^2(z)-\sin^2\theta_0}}=$$
$$=2\int\limits_0^{z_{\text{отр}}}\frac{\sin\theta_0\,dz}{n(z)\cos\theta}=2\sin\theta_0\int\limits_0^{z_{\text{отр}}}\frac{ds}{n(z)},\qquad(34,9)$$

где $ds=\frac{dz}{\cos\theta}$ — элемент длины вдоль траектории луча.

Если для вычисления фазы φ на земле геометрическая оптика неприменима, как это может иметь место для очень длинных волн или при углах θ_0, близких к $\frac{\pi}{2}$ (в обоих случаях волна отражается от самого начала слоя), то для нахождения расстояния l по-прежнему нужно использовать формулу (34,6), но с фазой

φ, определяемой на основе строгого решения волнового уравнения (см. [192, 309]).

В тех же случаях, которые нас в основном интересуют, когда геометрическая оптика применима, для нахождения расстояния l между корреспондирующими пунктами Q и P, а также для решения всех других вопросов нет особой нужды опираться на соотношение (34,6). Вместо этого удобнее с самого начала пользоваться понятием о траектории лучей и просто игнорировать неприменимость лучевой трактовки вблизи точки отражения (обоснование этого приема вытекает из совпадения формулы (34,9) с получаемыми ниже на основе чисто лучевой трактовки). Поступая таким образом, запишем изменение фазы отраженной волны по сравнению с падающей в виде (интегрирование ведется по траектории луча, изображенной на рис. 34,1; малым членом $-\frac{\pi}{2}$ в выражении для фазы пренебрегаем):

$$\varphi=\frac{2\omega h}{\cos\theta_0 c}+2\,\frac{\omega}{c}\int\limits_{AB} n(z)\,ds=\frac{2\omega h}{c\cos\theta_0}+2\omega\int\limits_{AB}\frac{ds}{v_{\text{ф}}(\omega, z)}, \qquad (34{,}10)$$

где $v_{\text{ф}}(\omega, z)=\frac{c}{n}$ — фазовая скорость (21,16), ds — элемент траектории луча, точка A находится в начале слоя и точка B — в вершине траектории (при $z=z_{\text{отр}}$). Время группового запаздывания равно

$$\Delta t_{\text{гр, накл}}=\varphi'(\omega)=\frac{2h}{c\cos\theta_0}+2\int\limits_{AB}\frac{ds}{v_{\text{гр}}(\omega, z)}, \qquad (34{,}11)$$

где $v_{\text{гр}}$ — групповая скорость (21,17), равная в нашем случае cn.

Теоремы, связывающие групповые пути при наклонном и нормальном падении. Длины оптического и группового пути при наклонном падении, очевидно, равны:

$$\left.\begin{aligned} L_{\text{о, накл}}&=\frac{c\varphi}{\omega}=\frac{2h}{\cos\theta_0}+2\int\limits_{AB} n(\omega, z)\,ds,\\ L_{\text{гр, накл}}&=c\Delta t_{\text{гр, накл}}=\frac{2h}{\cos\theta_0}+2\int\limits_{AB}\frac{ds}{n(\omega, z)}=2\int\limits_{0}^{z_{\text{отр}}}\frac{ds}{n(\omega, z)}.\end{aligned}\right\} \qquad (34{,}12)$$

Из рис. 34,1 ясно, что $ds=\frac{dz}{\cos\theta}=\frac{dy}{\sin\theta}$, и так как

$$n(z)\sin\theta=\sin\theta_0,$$

то

$$L_{\text{гр, накл}} = \frac{2h}{\cos\theta_0} + 2\int\limits_{y_A}^{y_B} \frac{dy}{\sin\theta_0} = 2\frac{(h+z_C-z_A)}{\cos\theta_0} = \\ = \frac{2z_{\text{д, накл}}}{\cos\theta_0} = 2QC = QCP. \qquad (34,13)$$

Таким образом, групповой путь равен сумме сторон равнобедренного треугольника, описанного около истинной траектории так, как показано на рис. 34,1. В соответствии с этим время группового запаздывания $\Delta t_{\text{гр, накл}} = c^{-1}L_{\text{гр, накл}}$ равно времени, необходимому волне для прохождения со скоростью света в вакууме пути QCP, т. е. двух сторон указанного треугольника (это положение называют иногда теоремой Брайта и Тюва). Высота $z_{\text{д, накл}}(\theta_0, f)$ называется действующей или кажущейся высотой при наклонном падении под углом θ_0.

Расстояние между точками QP, т. е. расстояние между корреспондирующими пунктами, равно (см. рис. 34,1)

$$l = 2z_{\text{д, накл}}\operatorname{tg}\theta_0 = L_{\text{гр, накл}}\sin\theta_0 = \Delta t_{\text{гр, накл}}c\sin\theta_0. \qquad (34,14)$$

Это выражение совпадает с получающимся на основе формулы (34,9).

Чем больше угол падения волны на слой θ_0, тем при больших значениях $n(z_{\text{отр}}) = \sin\theta_0$ происходит отражение, и, следовательно, волны некоторой частоты $f > f_{\text{к}}$ станут отражаться от слоя, начиная с некоторого угла $\theta_{0\,\min}$, который согласно (34,3) равен

$$\cos\theta_{0\,\min} = \frac{f_{\text{к}}}{f} \qquad (34,15)$$

(другими словами, по самому определению, углу $\theta_{0\,\min}$ отвечает частота $f = f_{\text{к, накл}}$). С увеличением угла (т. е. при $\theta_0 > \theta_{0\,\min}$) расстояние $l = QP$ вначале уменьшается до тех пор, пока при некотором угле $\theta_0 = \theta_0(l_{\min})$ это расстояние становится минимальным и равным $l_{\min}$. Область $l < l_{\min}$ называется мертвой зоной. Значение $l_{\min}$ определяется из условия (подробнее об этом [32, 43])

$$\frac{dl}{d\theta_0} = 0. \qquad (34,16)$$

Установим теперь связь между действующими высотами при наклонном падении $z_{\text{д, накл}}$ и при нормальном падении $z_{\text{д}}$. Согласно (34,12), (34,13) и (34,14)

$$z_{\text{д, накл}}(f,\ \theta_0)=h+\cos\theta_0\int\limits_{AB}\frac{ds}{n(f,\ z)}=h+\int\limits_{h}^{z_{\text{отр}}}\frac{\cos\theta_0\,dz}{n(f,\ z)\cos\theta}=$$

$$=h+\int\limits_{h}^{z_{\text{отр}}}\frac{dz}{n(f\cos\theta_0,\ z)}=z_{\text{д}}(f\cos\theta_0),\qquad(34,17)$$

так как

$$n^2(f\cos\theta_0,\ z)\cos^2\theta_0=\left(1-\frac{e^2N(z)}{\pi mf^2\cos^2\theta_0}\right)\cos^2\theta_0=$$

$$=n^2(f,\ z)-\sin^2\theta_0=n^2(f,\ z)\cos^2\theta\quad\text{и}\quad n(f\cos\theta_0,\ z_{\text{отр}})=0$$

(здесь учтено, что $n(z_{\text{отр}})=\sin\theta_0$ и $n(z)\sin\theta=n(0)\sin\theta_0$).

Из (34,17) ясно также, что если $f_1\cos\theta_{01}=f_2\cos\theta_{02}$, то

$$z_{\text{д, накл}}(f_1,\ \theta_{01})=z_{\text{д, накл}}(f_2,\ \theta_{02})=z_{\text{д}}(f_1\cos\theta_{01})=z_{\text{д}}(f_2\cos\theta_{02})$$

(здесь, очевидно, θ_{01} и θ_{02} — углы падения на слой волн с частотами f_1 и f_2). В этом случае, кроме того, равны истинные высоты $z_{\text{отр}}$ отражения волн обеих частот, так как

$$n(f_1,\ z^{(1)}_{\text{отр}})=\sin\theta_{01},\qquad n(f_2,\ z^{(2)}_{\text{отр}})=\sin\theta_{02},$$

$$f_1\cos\theta_{01}=f_2\cos\theta_{02}=f_1\sqrt{1-n^2(f_1,\ z^{(1)}_{\text{отр}})}=$$

$$=\sqrt{\frac{4\pi e^2}{m}N(z^{(1)}_{\text{отр}})}=f_2\sqrt{1-n^2(f_2,\ z^{(2)}_{\text{отр}})}=\sqrt{\frac{4\pi e^2}{m}N(z^{(2)}_{\text{отр}})},$$

т. е.

$$z^{(1)}_{\text{отр}}=z^{(2)}_{\text{отр}}=z_{\text{отр}}.$$

Далее, согласно (34,13) и (34,17)

$$L_{\text{гр, накл}}(f,\ \theta_0)\cos\theta_0=L_{\text{гр}}(f\cos\theta_0),\qquad(34,18)$$

где $L_{\text{гр}}=2z_{\text{д}}$ — групповой путь при нормальном падении.

Соотношения (34,17) и (34,18), которые иногда называют теоремой Мартина, позволяют определить $z_{\text{д, накл}}$, $L_{\text{гр, накл}}$, $\Delta t_{\text{гр, накл}}$ и расстояние l из высотно-частотной характеристики, снятой при нормальном падении в условиях, когда можно пренебречь влиянием земного магнитного поля. Так, например, согласно (34,14) и (34,18) имеем:

$$l(f,\ \theta_0)=2z_{\text{д}}(f\cos\theta_0)\operatorname{tg}\theta_0.\qquad(34,19)$$

Поглощение волны при прохождении ею пути $QABP$ приводит к уменьшению ее амплитуды в $R_{\text{накл}}$ раз, где

$$R_{\text{накл}}=e^{-2\frac{\omega}{c}\int\limits_{AB}\varkappa\,ds};\quad -\ln R_{\text{накл}}=2\frac{\omega}{c}\int\limits_{AB}\varkappa\,ds=\int\limits_{AB}\mu\,ds\approx$$

$$\approx\int\limits_{AB}\frac{\nu_{\text{эфф}}(1-n^2)}{cn}\,ds=\frac{\bar{\nu}_{\text{эфф}}}{c}\left(L_{\text{гр, накл}}-L_{\text{о, накл}}\right),\qquad(34,20)$$

причем использовано такое же приближение, как в (31,13).

Так же как это было сделано выше в отношении формулы (34,17), легко находим:

$$\ln R_{\text{накл}}(f,\ \theta_0,\ \bar{\nu}_{\text{эфф}})=\cos\theta_0\ln R(f\cos\theta_0,\ \bar{\nu}_{\text{эфф}}),\qquad(34,21)$$

где R — коэффициент отражения (31,13) при нормальном падении.

Отражение от сферического слоя. До сих пор ионосфера предполагалась плоской — ее свойства зависели только от координаты z. Однако в случае наклонного падения при средних и больших углах падения нужно учитывать сферичность Земли, причем в первом приближении можно считать, что $\varepsilon=\varepsilon(r)$, где r — расстояние от центра Земли. Мы не будем подробно разбирать этот случай — сделать это можно совершенно так же, как в § 19, но записав волновое уравнение в сферических или цилиндрических координатах. Укажем лишь, что для сферической Земли (при $\varepsilon=\varepsilon(r)$) траектория луча лежит в плоскости, проходящей через центр Земли и дугу большого круга, соединяющую корреспондирующие точки Q и P (рис. 34,2). Траектория луча определяется при этом из обобщенного закона преломления *):

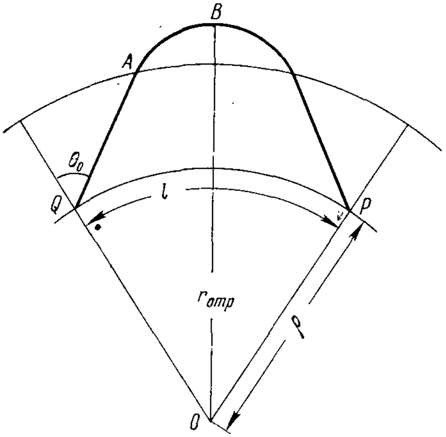


Рис. 34,2. Траектория луча при наклонном падении на сферический изотропный слой.

$$n(r)\,r\sin\theta=\text{const},\qquad(34,22)$$

где θ — угол между направлением луча и радиусом в данной точке.

---

*) Формулу (34,22) легко получить, рассматривая траекторию луча в среде, образованной концентрическими сферическими слоями с меняющимся от слоя к слою показателем преломления.

На поверхности Земли $r = \rho \approx 6360$ *км* (ρ есть радиус Земли), $n(r) = \sqrt{\varepsilon(r)} = 1$ и $\theta = \theta_0$ — углу между лучом и радиусом (направленным на центр Земли) в точке Q. Поэтому

$$n(r)\, r \sin\theta = \rho \sin\theta_0. \qquad (34{,}23)$$

В вершине траектории $\sin\theta = 1$ и

$$n(r_{\text{отр}}) = \frac{\rho \sin\theta_0}{r_{\text{отр}}}. \qquad (34{,}24)$$

При том же угле θ_0, но с учетом сферичности Земли, отражение происходит выше, чем для плоской земной поверхности и ионосферы, так как в этом последнем случае $n(z_{\text{отр}}) = \sin\theta_0$. Практически это отличие невелико, поскольку $r_{\text{отр}} - \rho \sim 100 \div 400$ *км* и $\frac{r_{\text{отр}} - \rho}{r_{\text{отр}}} < \frac{1}{15}$.

С необходимостью учета рефракции радиоволн в ионосфере приходится сталкиваться не только при расчете линий связи между наземными станциями, но и в радиоастрономических исследованиях, при локации Луны, а также локации и связи с ракетами и спутниками Земли. В основе соответствующих расчетов лежит закон преломления (34,22) (уравнение траектории и конкретные примеры можно найти в [43, 239, 310, 311]).

Напряженность поля отраженных от ионосферы сигналов. В реальных условиях распространения радиоволн в ионосфере имеют место различного типа многократные отражения волн от Земли и ионосферных слоев (см. схематические рис. 34,3, *а* и *б*). При этом необходимо иметь в виду, что на расстояниях, сравнимых с радиусом Земли ρ, считать свойства ионосферы одинаковыми нельзя, даже если отвлечься от спорадических явлений. Это понятно уже из того, что на подобных расстояниях высота Солнца в точках излучения, отражения и приема сигналов неодинакова.

В результате многократных отражений волновое поле в точке приема складывается из волн, пришедших по различным путям. Многократные отражения существенны и при нормальном падении или падении, близком к нормальному, так как коэффициент отражения волн от земной поверхности обычно велик и при малых углах падения. В согласии с этим при наблюдении отраженных от ионосферы импульсов при нормальном падении в ряде случаев наблюдаются многократно отраженные сигналы; отличить их легко, так как, например, для двукратно отраженного сигнала действующая высота вдвое больше, чем для однократно отраженного сигнала, и т. д. Наличие многократно отраженных сигналов может быть использовано для определения коэффициента отражения R радиоволн от ионосферы (см. [32], § 102).

В силу наличия многократных отражений и множественных путей лучей (рис. 34,3) вычисление напряженности поля в точке приема связано с большими затруднениями. Для изотропной ионосферы (т. е. пренебрегая влиянием земного магнитного поля) общее решение задачи, правда, получено, но в весьма

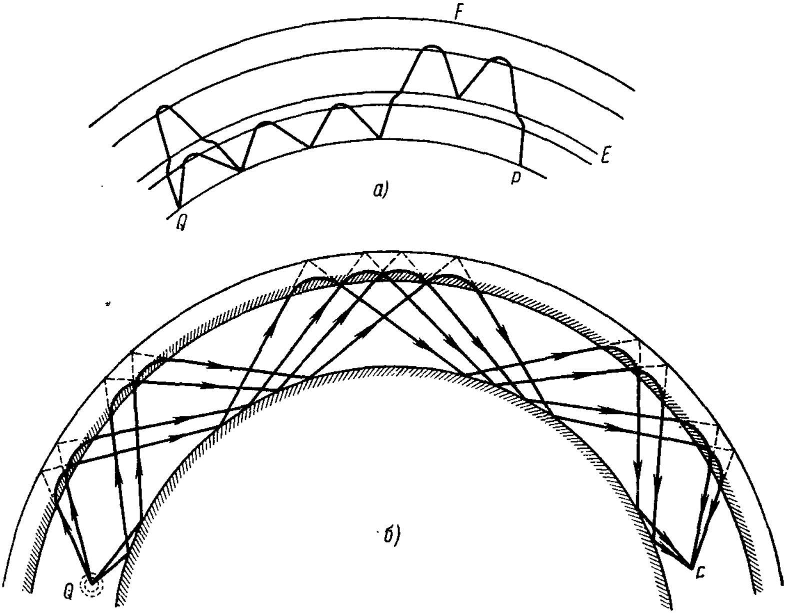


Рис. 34,3. Возможные пути лучей при отражении от ионосферы: *а*) в точке *P* показан луч лишь одного направления; *б*) принято во внимание отражение лишь от одного слоя.

сложном виде (см. [194, 201, 239, 312]). Громоздкость общих точных решений и одновременно сложность реальных условий распространения радиоволн, связанная с неоднородностью ионосферы и электрических свойств земной поверхности, наличием поглощения и т. п., приводят к тому, что вычисление напряженности поля отраженных волн производится обычно приближенно. При этом, особенно в случае коротких волн, использование приближенных методов диктуется и самим характером задачи. Именно возможность существенного упрощения расчетов связана с тем, что расстояние до ионосферы порядка 100 *км*, т. е. значительно больше длины радиоволн, в особенности коротких. Другими словами, ионосфера находится в волновой зоне наземных и самолетных излучателей, вследствие чего весь процесс распространения радиоволн в ионосфере можно рассматривать независимо от условий, в которых находятся передатчик и приемник. Эти условия существенны лишь с точки зрения нахождения волнового поля передатчика на большой высоте (у основания ионосферы) и для определения напряженности поля отраженного сигнала в месте нахождения приемника (учет отражения от Земли и т. п.).

Таким образом, вся задача как бы разделяется, и вопрос о распространении в ионосфере выступает как независимый; в случае необходимости найти напряженность поля, решения «внизу» (у Земли) и «наверху» (в ионосфере) могут быть известным образом соединены. Целесообразность такого разделения становится еще более ясной, если учесть, что само вычисление напряженности поля от сложного излучателя (передающая антенна и окружающие предметы) является весьма сложным делом. Подчеркнем, кроме того, что при исследовании ионосферы методом радиозондирования напряженность поля отраженной волны или сигнала обычно особого интереса не представляет, так как в этом методе измеряется лишь сдвиг фаз отраженной волны или время запаздывания отраженного сигнала по сравнению с падающим. Нужно также иметь в виду, что для достаточно коротких сигналов интерференция различных волн, многократно отраженных от ионосферы и поверхности Земли, не играет роли и, в общем, применима лучевая трактовка, при которой «отрыв» распространения в ионосфере от условий на Земле становится особенно ясным. О приближенных методах расчета напряженности поля см. [32, 313]. Здесь же сделаем еще лишь несколько простых замечаний, которые помогут ориентироваться в этом круге вопросов и производить простые оценки.

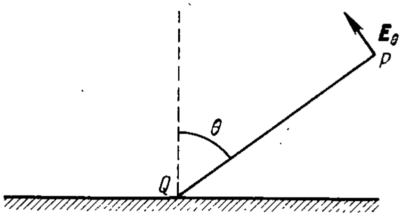


Рис. 34,4. Поле вертикального диполя, находящегося на земной поверхности в точке Q.

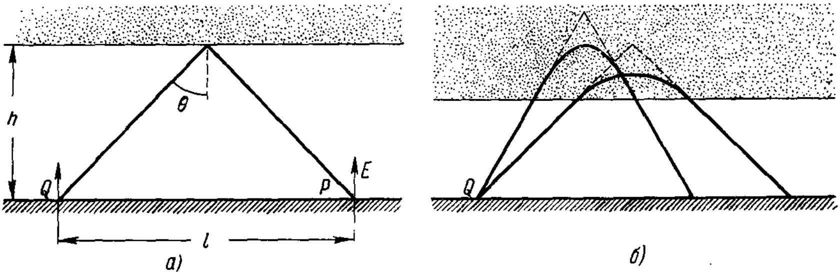
Как известно, напряженность электрического поля вертикального диполя (вибратора Герца), расположенного на поверхности идеально проводящей Земли, такова:

$$E_\theta = \frac{120\pi h_д I \sin\theta}{\lambda r}\,\frac{мв}{м} \approx \frac{300\sqrt{P}}{r}\sin\theta\,\frac{мв}{м}, \qquad (34,25)$$

где E_θ — напряженность поля при наблюдении в направлении, составляющем угол θ с осью вибратора (рис. 34,4), P — полная излучаемая мощность, $h_д$ — действующая высота вибратора, λ — длина волны в вакууме, r — расстояние от вибратора до точки наблюдения (расстояние QP) и I — сила тока у основания вибратора (в пучности тока). В (34,25) коэффициенты выбраны так, что поле измеряется в милливольтах на метр, P — в киловаттах, λ и $h_д$ — в метрах, r — в километрах и I — в амперах *). В случае произвольного излучателя поле удобно представить в виде:

$$E_\theta = \frac{60\pi h_д\,(м)\, I\,(а)}{\lambda\,(м)\, r\,(км)}\, \psi(\theta)\, \frac{мв}{м}, \qquad (34{,}26)$$

где функция $\psi(\theta)$ характеризует направленность антенного устройства (для вибратора в свободном пространстве $\psi(\theta) = \sin\theta$;



а) б)

Рис. 34,5. Отражение волн: *а*) при замене слоя зеркалом; *б*) для изотропного протяженного слоя.

в случае вибратора, расположенного над идеально проводящей землей, $\psi(\theta) = 2\sin\theta$, если $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\psi = 0$ при $\theta < 0$).

Простейшее предположение, при котором легко рассчитать напряженность поля отраженной от ионосферного слоя волны, состоит в замене слоя зеркалом с коэффициентом отражения R. Тогда, например, для плоского случая (рис. 34,5, *а*) напряженность поля отраженной волны в точке P равна

$$E \approx R\,\frac{300\sqrt{P}\sin^2\theta}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2}} = 300R\sqrt{P}\,\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\frac{мв}{м}, \qquad (34{,}27)$$

где для простоты излучатель считаем вертикальным вибратором, расположенным на идеально проводящей Земле; последнее приводит также к тому, что в точке P имеется лишь вертикальная слагающая поля, которая к тому же из-за отражения удваивается

---

*) Если пользоваться абсолютной гауссовой системой единиц, то в (34,25) нужно заменить коэффициенты 300 и 120 соответственно на 10^{-5} и $2/3\cdot 10^{-10} = \frac{2}{c}$.

(по сравнению с полем в свободном пространстве на таком же расстоянии). Это обстоятельство в (34,27) учтено. Обобщение этого результата на случай сферической Земли с конечной проводимостью и любого излучателя в принципиальном отношении не составляет труда. Вычисление коэффициента отражения R должно производиться из ионосферных данных. Если в точку P попадает несколько лучей, то поле можно найти, суммируя поля волн, приходящих по разным путям.

До тех пор, пока лучевая трактовка распространения применима, а в случае ионосферы это почти всегда имеет место, приведенный способ расчета напряженности поля страдает лишь следующим дефектом. При отражении волн от неоднородного слоя, в отличие от их отражения от зеркала (т. е. резкой границы раздела), убывание напряженности поля с расстоянием, строго говоря, не пропорционально $\frac{1}{r}$. В самом деле, при зеркальном отражении закон $\frac{1}{r}$ имеет место потому, что отраженная волна имеет такой же вид, как если бы она излучалась мнимым излучателем, расположенным в точке, в которую зеркально отражается реальный излучатель Q. В неоднородной среде действующие и истинные высоты отражения лучей разного направления неодинаковы (рис. 34,5, *б*) и, следовательно, отраженный пучок расходится не так, как при отражении от одного зеркала.

В рамках лучевой трактовки расхождение пучка при отражении от изотропного неоднородного слоя можно вычислить без особого труда (см., например, [314]). Однако для относительно тонких D- и E-слоев эффект расхождения невелик и поэтому маловажен, а для F-слоя нужно обычно учитывать анизотропию среды, вызванную земным магнитным полем. В анизотропном же случае путь луча весьма сложен (см. § 29) и рассчитать расхождение пучка нелегко. Останавливаться на этом вопросе подробнее мы не будем и ограничимся замечанием, что при грубых оценках напряженности поля, которыми пользуются обычно на практике, учитывать отличие характера отражения от ионосферы от зеркального отражения вряд ли имеет смысл, так как в обычных условиях это обстоятельство не может изменить результатов по порядку величины.

§ 35. Отражение волн при учете влияния магнитного поля

Влияние магнитного поля. Критические частоты. Как в земной ионосфере, так и в солнечной короне (и, вероятно, в ионосферах некоторых планет) существенное влияние на распространение и отражение радиоволн оказывает постоянное магнитное поле.

Влияние поля, вообще говоря, определяется значением параметров

$$\sqrt{u}=\frac{\omega_H}{\omega}=\frac{|e|H^{(0)}}{mc\omega} \quad \text{и} \quad \frac{\omega_H}{\omega_0}=\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}=\frac{|e|\,H^{(0)}}{mc\sqrt{\frac{4\pi e^2N}{m}}}.$$

В земной ионосфере на высоких и средних широтах $H^{(0)}\sim 0,5$ *эрст*; при $H^{(0)}=0,5$ *эрст* $\omega_H=8,82\cdot 10^6$, $f_H=\frac{\omega_H}{2\pi}=1,4\cdot 10^6$ и $\lambda_H=\frac{2\pi c}{\omega_H}=214$ *м*. В то же время в максимуме F-слоя $\omega_0\lesssim 8\cdot 10^7$ ($N_{\max}\lesssim 2\cdot 10^6$), и, следовательно, $\frac{\omega_H}{\omega_0}\gtrsim\frac{1}{10}$; в диапазоне метровых волн $\frac{\omega_H}{\omega}\sim 10^{-2}$, а для самых длинных используемых волн и «свистящих» атмосфериков $\frac{\omega_H}{\omega}\sim 10^2\div 10^3$. При распространении радиоволн в ионосфере приходится, таким образом, сталкиваться с весьма разнообразными условиями, и невозможно дать единый ответ на вопрос о роли земного магнитного поля. Ниже мы будем иметь в виду преимущественно диапазон коротких волн, для которого $\sqrt{u}=\frac{\omega_H}{\omega}\ll 1$. Если же речь будет идти о случае $\sqrt{u}>1$, то предполагается, что длина волны все же не очень велика, и поэтому в большей части слоя пригодно приближение геометрической оптики.

Общая картина распространения и отражения монохроматических волн и сигналов от неоднородного магнитоактивного слоя, по сути дела, уже выяснена в гл. V. При попадании на слой волна (или сигнал) разбивается на две: обыкновенную и необыкновенную. Обе эти волны в случае плавного слоя и не слишком малого угла α распространяются совершенно независимо. Если $u<1$, то волна 1 (необыкновенная) претерпевает отражение при $v=v_{10}^{(-)}=1-\sqrt{u}$ (везде предполагается, что речь идет о нормальном падении). При отсутствии поглощения и условии, что максимум концентрации в слое лежит значительно выше точки $v_{10}^{(-)}$, отражение является полным. Поэтому при бо́льших значениях v волны 1 нет, хотя при $v>v_{1\infty}$ она и могла бы в среде распространяться. Волна 2 отражается от точки $v=v_{20}=1$. Если $u>1$, то отражение волны 1 происходит в точке $v_{10}^{(+)}$, как это ясно, например, из рис. 11,3, *б*.

Итак, при зондировании ионосферы сигналом с несущей частотой ω отражение обыкновенной волны происходит от уровня, где электронная концентрация N равна

$$N_2=\frac{m\omega^2}{4\pi e^2}=1,24\cdot 10^{-8}f^2, \qquad (35,1)$$

так как

$$v_{20} = \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \quad \text{и} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}\,.$$

Отражение необыкновенной волны при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} < 1$ происходит от уровня

$$N_{1-} = \frac{m\omega}{4\pi e^2}(\omega - \omega_H) = 1{,}24\cdot 10^{-8} f\,(f - f_H), \tag{35,2}$$

а при $u > 1$ — от уровня

$$N_{1+} = \frac{m}{4\pi e^2}\,\omega\,(\omega + \omega_H) = 1{,}24\cdot 10^{-8} f\,(f + f_H), \tag{35,3}$$

где

$$f_H = \frac{\omega_H}{2\pi} = \frac{|e|\,H^{(0)}}{2\pi mc}\,.$$

Критической называется частота $f_{\text{к}}$, для которой точка отражения отвечает максимуму слоя, где $N = N_{\max}$. Из (35,1)—(35,3) ясно, что

$$f_{\text{к}2} \equiv f_{\text{к}0} = \sqrt{\frac{e^2 N_{\max}}{\pi m}} = 0{,}9\cdot 10^4 \sqrt{N_{\max}}\,, \tag{35,4}$$

$$f_{\text{к}1-} \equiv f_{\text{к}x} = \frac{f_H}{2} + \sqrt{\frac{f_H^2}{4} + 0{,}81\cdot 10^8 N_{\max}} = \frac{f_H}{2} + \sqrt{\frac{f_H^2}{4} + f_{\text{к}0}^2}\,, \tag{35,5}$$

$$f_{\text{к}1+} \equiv f_{\text{к}z} = -\frac{f_H}{2} + \sqrt{\frac{f_H^2}{4} + 0{,}81\cdot 10^8 N_{\max}} = -\frac{f_H}{2} + \sqrt{\frac{f_H^2}{4} + f_{\text{к}0}^2}\,. \tag{35,6}$$

Из этих формул следует соотношение

$$f_{\text{к}x} - f_{\text{к}z} = f_H = \frac{|e|\,H^{(0)}}{2\pi mc} = 2{,}8\cdot 10^6 H^{(0)}; \tag{35,7}$$

кроме того, если $f_{\text{к}0}^2 \gg \frac{f_H^2}{4}$, то

$$f_{\text{к}x} - f_{\text{к}0} \approx \frac{f_H}{2} = 1{,}4\cdot 10^6 H^{(0)}, \tag{35,8}$$

или в следующем приближении:

$$f_{\text{к}x} - f_{\text{к}0} \approx \frac{f_H}{2} + \frac{f_H^2}{8 f_{\text{к}0}}\,. \tag{35,9}$$

Фаза волны и коэффициент отражения. Ход лучей. В области вблизи точек отражения, где $n_{1,2} = 0$, геометрическая оптика неприменима, и для получения точного выражения для фазы отраженной волны нужно обратиться к уравнениям (23,2). Решение этих уравнений сложнее, чем при отсутствии магнитного поля. Однако, как показано в § 25, за исключением особых случаев (например, малых углов α), отражение радиоволн при учете влияния магнитного поля практически сводится к задаче об их отражении от некоторого изотропного слоя. Именно, если точки отражения $z\,(n_{1,2}=0)$ лежат достаточно далеко от максимума слоя, то фаза отраженной волны равна

$$\varphi_{1,2}=\frac{2\omega}{c}\int\limits_{0}^{z(n_{1,2}=0)} n_{1,2}(\omega, z)\,dz-\frac{\pi}{2}\,. \qquad (35,10)$$

Эта формула отличается от (30,6) лишь заменой n на $n_{1,2}$.

При наличии поглощения также получаются результаты, аналогичные имеющим место в изотропном случае. Опуская малые члены*), о которых была речь в § 31, для $\varphi_{1,2}$ получаем опять выражение (35,10), а для коэффициента отражения — формулу

$$-\ln R_{1,2}=\frac{2\omega}{c}\int\limits_{0}^{z(n^2_{1,2}-\varkappa^2_{1,2}=0)} \varkappa_{1,2}(\omega, z)\,dz, \qquad (35,11)$$

где точка $z\,(n^2_{1,2}-\varkappa^2_{1,2}=0)$ играет, очевидно, роль точки $z\,(\varepsilon=n^2-\varkappa^2=0)$ в изотропном случае (при наличии поглощения и в формуле (35,10) интегрирование нужно проводить до этой точки; $n_{1,2}$ в этом случае в нуль нигде не обращается).

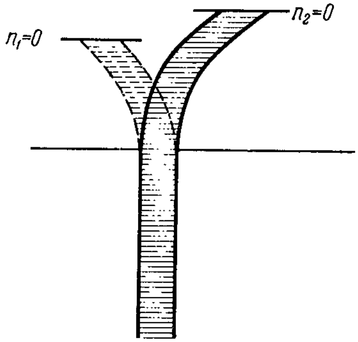


Рис. 35,1. Отражение обыкновенного и необыкновенного сигналов.

Точно так же остаются справедливыми при замене n и $\varkappa$ на $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ и все другие результаты §§ 30—33, в которых не использовался конкретный вид функций n и $\varkappa$. В силу (24,29) это относится и к времени группового запаздывания $\Delta t_{\text{гр}}$ $\left(\text{а следовательно, и к групповому пути } L_{\text{гр}}=c\,\Delta t_{\text{гр}} \text{ и действующей высоте } z_{\text{д}}=\frac{L_{\text{гр}}}{2}\right)$, несмотря на то, что в анизотропной среде направления луча и волновой нормали не совпадают. Последнее приводит, однако, к тому, что при нормальном зондировании ионосферы сигнал отражается не точно над местом его попадания на слой, а в стороне; при этом обыкновенный и необыкновенный сигналы отражаются от различных областей слоя в горизонтальной плоскости, не говоря уже о том, что эти области находятся на разной высоте (рис. 35,1).

---

*) Впрочем, малость поправки Δ ($-\ln R$) к нижеприводимому выражению (35,11) не так уж очевидна и в этой малости каждый раз нужно специально убеждаться (как следует, по-видимому, из расчетов [315], учет члена Δ ($-\ln R$) может иногда оказаться вполне существенным).

Подобное отклонение сигналов может быть существенно, если учитывать неоднородность ионосферы в горизонтальном направлении, что в действительности, в известной мере, имеет место, хотя и не соответствует принятой идеализированной регулярной картине. Расстояние, на которое смещаются области отражения обыкновенного и необыкновенного сигналов, зависит от угла α между полем $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и вертикалью, а также от характеристик соответствующего ионосферного слоя.

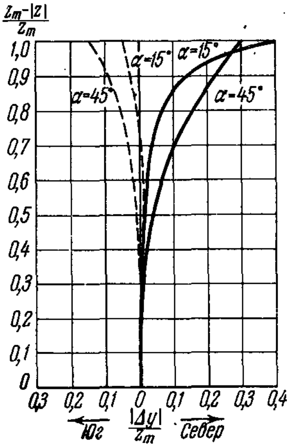


Рис. 35,2. Отклонение лучей от вертикали при нормальном падении для $\alpha = 15°$ и $\alpha = 45°$ при $f_H = 1,4$ *Мгц*. Обыкновенный луч (сплошные линии) $f = f_{к0} = 9$ *Мгц*, необыкновенный луч (пунктир) $f = f_{кх} \approx 9,75$ *Мгц*.

В качестве примера на рис. 35,2 приведены некоторые результаты вычислений, произведенных в [101] для параболического слоя $N = N_{\max}\left(1 - \frac{z^2}{z_m^2}\right)$. В начале слоя (при $z = -z_m$) на него нормально падает радиосигнал, который затем расщепляется на обыкновенный и необыкновенный. В северном полушарии обыкновенный сигнал отклоняется от вертикали на север и необыкновенный сигнал — на юг, а в южном полушарии наоборот.

На рис. 35,2 дана траектория сигналов, лежащая в плоскости yz, в которой находится магнитный вектор $\boldsymbol{H}^{(0)}$ (другими словами, плоскость yz есть плоскость магнитного меридиана). По оси ординат отложено расстояние от начала слоя $z_m - |z|$ в единицах z_m; по оси абсцисс отложено отклонение Δy сигнала от вертикали в тех же единицах z_m (z_m есть полутолщина слоя). При этом предполагается, что отражение происходит от максимума слоя, т. е. предполагается, что несущая частота сигнала f равна критической частоте $f_{к0} \equiv f_{к2}$ для обыкновенного луча и критической частоте $f_{кх} \equiv f_{к1}$ для необыкновенного луча. Частота $f_{к0}$ принята равной 9 *Мгц*, откуда в силу сказанного для обыкновенного луча $f = f_{к0} = 9$ *Мгц* и для необыкновенного луча $f = f_{кх} = \frac{f_H}{2} + \sqrt{\frac{f_H^2}{4} + f_{к0}^2} \approx 9,75$ *Мгц*, так как гиромагнитная частота f_H принята равной 1,4 *Мгц* ($H^{(0)} = 0,5$ *эрст*). Кроме того, при построении кривых, показанных на рис. 35,2, поглощение предполагается отсутствующим, а угол α положен равным 45 и 15°.

Существенное предположение, сделанное при расчетах, состоит в том, что они проведены полностью на базе приближения геометрической оптики и, таким образом, вблизи самой точки отражения (т. е. при $|z| \to 0$) неточны. В условиях ионосферы при не слишком малых углах α и нормальном зондировании неточность, связанная с этим обстоятельством, по-видимому, несущественна.

Обращаясь к рис. 35,2, мы видим, что, например, при $\alpha = 15°$ область отражения обыкновенного луча смещена от места, где сигнал входит в слой, примерно на расстояние $\sim \frac{z_m}{2}$, которое для F-слоя равно 50—100 *км*, т. е. довольно значительно. Обсуждаемое отклонение луча от направления нормали особенно ярко проявляется в случае наклонного падения волн на ионосферу, о чем уже говорилось в § 29.

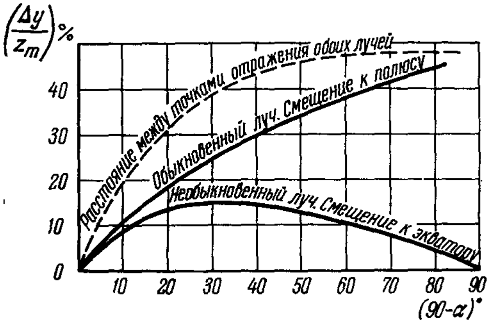


Рис. 35,3. Смещение точки отражения от вертикали в северном полушарии в зависимости от угла α между вертикалью (направлением волнового вектора) и направлением земного магнитного поля.

Смещение точки отражения от вертикали в зависимости от угла α ясно из рис. 35,3 (предполагается, что $f_{\text{к}0} = f_{\text{к}x} = 10$ *Мгц*, $f = 10$ *Мгц*, $f_H = 1{,}44$ *Мгц* и $\nu = 0$). При этом для обыкновенного луча приведенная на рисунке кривая при малых углах α неверна: она неверна там, где наступает эффект «утраивания» сигналов (см. § 28). При $\alpha = 0$ точка отражения обыкновенного луча, так же как и необыкновенного, от вертикали не отклоняется.

Заметим также, что угол θ между вектором групповой скорости $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и волновым вектором $\boldsymbol{k}$ стремится к $\pi/2$ вблизи точек, где $n^2_{1,2} \to \infty$. Для того чтобы в этом убедиться, проще всего воспользоваться формулой (24,16), согласно которой

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2n^2} \frac{dn^2}{d \cos \alpha} \sin \alpha.$$

Подставляя сюда выражение (11,6) для $n^2_{1,2}$, получаем довольно громоздкую формулу, но уже из ее общего вида ясно, что при $n^2_{1,2} \to \infty$ и $\alpha \neq 0$ мы имеем $\operatorname{tg} \theta \to \infty$ или $\theta \to \pi/2$.

Разумеется, в таких условиях, когда угол θ близок к $\pi/2$, смещение точки отражения может быть особенно значительным.

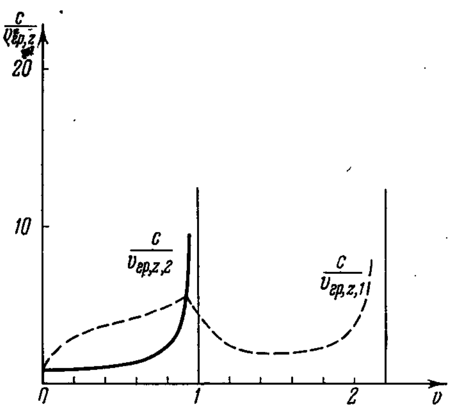


Рис. 35,4. Отношение скорости света к проекции групповой скорости на ось z (нормаль к слою) в зависимости от $v=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Значения α и $H^{(0)}$ указаны в тексте.

Время группового запаздывания сигнала, согласно (24,29), равно

$$\Delta t_{гр}=2\int_0^{z_и}\frac{dz}{v_{гр z1,2}}; \quad (35,12)$$

здесь $z_и=z_{и1,2}$ — точка отражения, в которой $n_{1,2}=0$ (другими словами, $z_и$ есть «истинная высота» отражения). Действующая высота, по определению, равна

$$z_{д1,2}=\frac{c\Delta t_{гр}}{2}=\int_0^{z_{и1,2}}\frac{c\,dz}{v_{гр z1,2}}=$$

$$=\int_0^{z_{и1,2}}\frac{\partial(n_{1,2}\omega)}{\partial\omega}dz. \quad (35,13)$$

Ввиду сложности функции $n_{1,2}(v, u, \alpha)$ анализ зависимости $z_{д1,2}$ от различных параметров обычно приходится производить графически [316]. В работе [317] указывается метод определения электронной концентрации из высотно-частотных характеристик при учете влияния магнитного поля. Мы ограничимся здесь тем, что приведем на рис. 35,4 графики функции $\frac{c}{v_{гр\,z1,2}}=\frac{\partial(\omega n_{1,2})}{\partial\omega}$ для $\lambda=250$ *м* ($\omega=0{,}756\cdot10^7$), $H^{(0)}\cos\alpha=0{,}447$ и $H^{(0)}\sin\alpha=0{,}218$ ($\alpha=25°50'$; $H^{(0)}=0{,}497$ *эрст*).

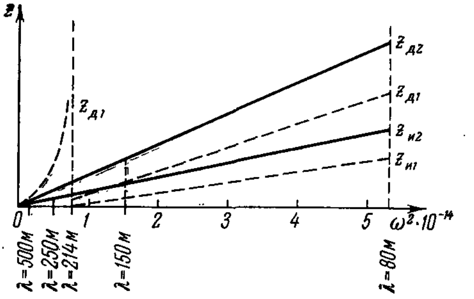


Рис. 35,5. Действующая высота отражения $z_д$ и истинная высота отражения $z_и$ для линейного ионосферного слоя в зависимости от частоты ω. Пунктир относится к волне типа 1, а сплошные линии — к волне типа 2.

На рис. 35,5 представлены высотно-частотные характеристики ионосферы для тех же значений α и $H^{(0)}$, вычисленные для линейного слоя ($z_д$ — действующая высота, $z_и$ — истинная высота отражения). На рис. 35,5 ясно выступает особенность кривой $z_д(\omega)$ для необыкновенной волны вблизи частоты $\omega = \omega_H$ ($\lambda_H \approx 214$ *м*). При $\omega \to \omega_H$, если не учитывать поглощения, в приближении геометрической оптики $z_д$ очень сильно возрастает; подробнее об этом см. [316, 318, 319] *).

Квазипродольное и квазипоперечное распространение. Сложность выражения для $n_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}$ заставляет широко использовать на практике приближенные формулы для «квазипродольного» и «квазипоперечного» распространения (см. § 11).

В так называемой «отклоняющей» области ионосферы, где $n_{1,2}$ заметно отличается от единицы, для обыкновенной волны часто справедливо квазипоперечное распространение, а для необыкновенной (при $u < 1$) — квазипродольное. В этом можно убедиться из рис. 11,2, 11,3 и 11,6, а также в результате оценок, использующих неравенства (11,36) и (11,39). При этом, например,

$$-\ln R_2 = \frac{\bar{\nu}_{эфф}}{2c}\left(L_{гр2} - L_{o2}\right), \tag{35,14}$$

так как в случае квазипоперечного распространения волна 2 не отличается от распространяющейся в изотропной среде; в последнем же случае при указанных в § 31 условиях справедлива формула (31,13), тождественная (35,14). Для волны 1 в квазипродольном случае обычно

$$-\ln R_1 \approx \frac{\bar{\nu}_{эфф}}{2c}\left(L_{гр1} - L_{o1}\right)\frac{\omega}{\omega - \omega_L}; \tag{35,15}$$

действительно, согласно (11,37), (24,18), (35,13) и при $v_{гр\,z1} \approx cn_1$ (условия справедливости этого последнего соотношения ясны из (24,18)) имеем:

$$-\ln R_1 = \frac{2\omega}{c}\int\limits_0^{z(n_1=0)} \varkappa_1\,dz = \frac{1}{c}\int \nu_{эфф}\,\frac{1 - n_1^2 + \varkappa_1^2}{n_1}\,\frac{\omega}{\omega - \omega_L}\,dz \approx$$

$$\approx \frac{\bar{\nu}_{эфф}}{2c}\left\{2\int \frac{dz}{n_1} - 2\int n_1\,dz\right\}\frac{\omega}{\omega - \omega_L} \approx \frac{\bar{\nu}_{эфф}}{2c}\left(L_{гр1} - L_{o1}\right)\frac{\omega}{\omega - \omega_L}.$$

Кроме того, при выводе приведенных формул для $\ln R_{1,2}$ делаются предположения, аналогичные подробно оговоренным в § 31, и нужно иметь в виду, что и в (35,14) и (35,15) под $R_{1,2}$ понимается только часть полного коэффициента отражения, связанная с прохождением волн в «отклоняющей» области.

---

*) Поведение действующей высоты $z_д$ для необыкновенного луча вблизи гирочастоты существенно зависит [318] от связи между действующим полем $E_д$ и средним макроскопическим полем E. Это обстоятельство и пытались использовать для экспериментального решения вопроса о необходимости введения «поляризационной поправки». Как было указано в § 3, вводить эту «поправку» не нужно и в плазме с большой точностью $E = E_д$, что и учитывается нами во всех случаях. Согласно [26] и [244], стр. 278, весьма сильным экспериментальным аргументом против введения «поляризационной поправки» являются результаты исследования «свистящих» атмосфериков [96].

В «неотклоняющей» области, где $n_{1,2} \approx 1$ и v мало (этот случай имеет место в D- и E-слоях для волн, отражающихся от F-слоя), для обеих волн обычно имеет место квазипродольное распространение (см. условие (11,36)). Поэтому согласно (11,37) имеем:

$$\varkappa_{1,2} = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \frac{2\pi e^2 N(z)}{(\omega \pm \omega_L)^2 + \nu_{\text{эфф}}^2}, \quad n_{1,2} \approx 1, \tag{35,16}$$

где знак плюс соответствует, очевидно, обыкновенной волне 2 и знак минус — необыкновенной волне 1.

На частных случаях, когда

$$\nu_{\text{эфф}}^2 \gtrless (\omega \pm \omega_L)^2 \quad \text{или} \quad \nu_{\text{эфф}} \approx \omega \pm \omega_L,$$

мы останавливаться не будем, — их стоит обсуждать лишь в связи с экспериментальным материалом.

Влияние магнитного поля на высотно-частотные характеристики в качественном отношении ясно из сказанного, а также рис. 30,5 и 35,5. В последнем случае типичный загиб характеристик при приближении к критическим частотам отсутствует просто потому, что слой считается линейным (другими словами, рис. 35,5 в какой-то мере передает ход $z_д(\omega)$ и $z_и(\omega)$ только для частот, существенно меньших критической). При нормальном зондировании, $u < 1$ и не слишком малых углах α регулярное отражение от слоя приводит — об этом уже много раз говорилось, — к появлению только двух сигналов. Соответствующие критические частоты для обыкновенной и необыкновенной волн $f_{к0}$ и $f_{кx}$ определяются формулами (35,4) и (35,5). При уменьшении угла α появится эффект «утраивания», причем третий сигнал, отражающийся от точки $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$ с ростом частоты, исчезает первым (рис. 35,6). Критическая частота для третьего сигнала $f_{кz} = f_{кx} - f_H$ (см. (35,7)), и, таким образом, измеряя частоты $f_{кx}$ и $f_{кz}$, можно определить поле $H^{(0)}$ в слое. То же, впрочем, достигается и по измерению частоты $f_{к0}$ и разности частот

$$f_{кx} - f_{к0} = \frac{f_H}{2} + \sqrt{\frac{f_H^2}{4} + f_{к0}^2} - f_{к0} \quad \text{(см. (35,5), (35,8) и (35,9)).}$$

Наклонное падение. Влияние земного магнитного поля на распространение и отражение радиоволн от ионосферы при наклонном падении рассмотрено в § 29. Здесь заметим лишь, что при наблюдении эффекта «утраивания», обусловленного наклонным падением и рассеянием волн (см. § 29), высотно-частотные характеристики отличаются от изображенных на рис. 35,6 в двух отношениях. Во-первых, интенсивность z-отражения (третьего сигнала) всегда заметно меньше интенсивности 0- и x-сигналов. Во-вторых, разность $f_{\text{к}x} - f_{\text{к}z}$ несколько меньше, чем при нормальном падении, и, следовательно, меньше гирочастоты f_H. Объясняется это тем, что при наблюдении обсуждаемого эффекта «утраивания» при наклонном падении за x-отражение ответственны в основном нормально отражающиеся волны. В то же время z-отражение по самой сущности эффекта происходит при наклонном падении, а значит, волна отражается от уровня, лежащего несколько ниже точки $v_{10}^{(+)} = 1 + \sqrt{u}$; в соответствии с этим

$$f_{\text{к}z\,\text{накл}} > f_{\text{к}z\,\text{норм}}$$

и

$$f_{\text{к}x\,\text{норм}} - f_{\text{к}z\,\text{накл}} < f_H.$$

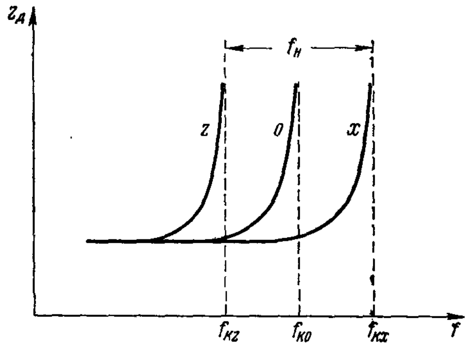


Рис. 35,6. Высотно-частотные характеристики при нормальном зондировании под малыми углами α.

Учет неоднородности земного магнитного поля. Во всех задачах и примерах, рассмотренных до сих пор, внешнее поле $H^{(0)}$ считалось однородным в пространстве. Такое предположение оказывается, однако, недопустимым не только при исследовании распространения радиоволн в солнечной короне (см. [73, 77, 148] и § 36), но иногда и в земной ионосфере.

Земное магнитное поле в первом приближении носит дипольный характер, и на высоте z над земной поверхностью

$$\left.\begin{aligned} H^{(0)}(\rho + z) &= \frac{H^{(0)}(\rho)\,\rho^3}{(\rho + z)^3}, \\ f_H(\rho + z) &= \frac{f_H(\rho)\,\rho^3}{(\rho + z)^3}, \end{aligned}\right\} \tag{35,17}$$

где $\rho \approx 6360$ *км* — радиус Земли, $H^{(0)}$ — поле на земной поверхности; кроме того, формула, строго говоря, относится только к полюсу или экватору, так как не учитывается угловая зависимость. Из (35,17) ясно, что при изменении z, например, на 200 *км* разность $f_H(\rho) - f_H(\rho + z) \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5} f_H(\rho)$. Поэтому при зондировании ионосферы, если не ставить цели специально измерять зависимость f_H от z, магнитное поле действительно можно считать однородным. Положение изменяется при исследованиях ионосферы и космического радиоизлучения с помощью искусственных спутников Земли или высотных ракет, а также при изучении свистящих атмосфериков и в некоторых других

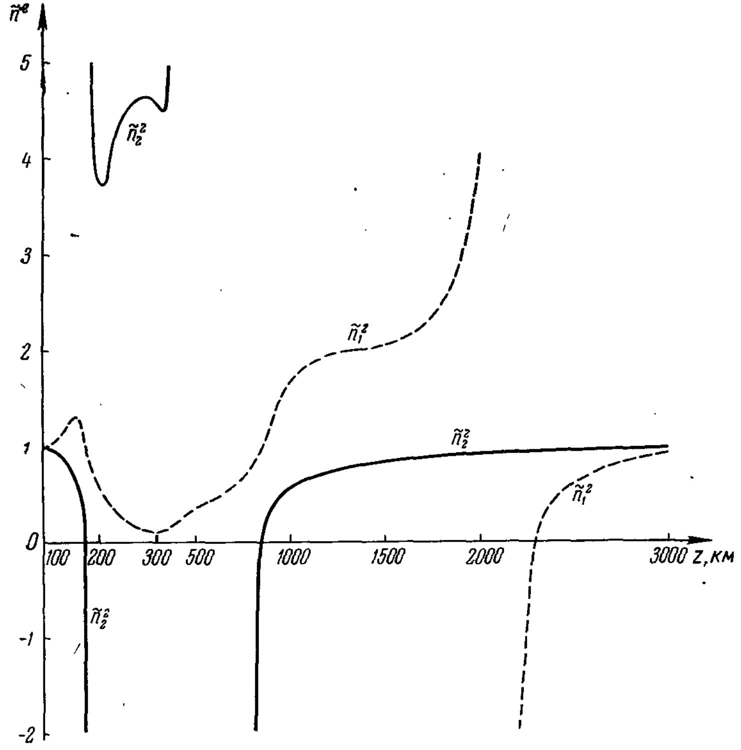


Рис. 35,7. Функции $\tilde{n}^2_{1,2}$ в зависимости от высоты над поверхностью Земли (при $z < 300$ *км* и $z > 300$ *км* масштабы по оси абсцисс различны).

случаях. Так, при приеме на Земле или на спутнике длинноволнового космического радиоизлучения [320, 321, 287] нужно считаться с влиянием на распространение этого излучения неоднородности земного магнитного поля. Достаточно сказать, что для данной частоты $f < f_H(\rho)$ с приближением к Земле на некоторой высоте произойдет переход от условий $u = \frac{f_H^2(\rho+z)}{f^2} < 1$ к условиям $u > 1$.

В качестве примера [321, 322] на рис. 35,7 приведена зависимость $\tilde{n}^2_{1,2}(z)$ при $f_H(\rho) = 1{,}4\cdot 10^6$, $f = 0{,}6\cdot 10^6$ и $\alpha = 20°$ для слоя с электронной концентрацией $N = N_{\max}\left[1-\left(\frac{z-300}{200}\right)^2\right]$ при $100 < z < 300$ *км* и $N = N_{\max}\, e^{-1{,}8\cdot 10^{-3}(z-300)}$ при $z > 300$ *км*; значение $N_{\max}$ выбрано равным $1{,}25\cdot 10^4$, что отвечает ночным часам (зависимость f_H от z находилась по формуле (35,17)). Из рис. 35,7 ясно, что при нормальном падении и выбранной частоте ни обыкновенная, ни необыкновенная волны внеземного происхождения достичь поверхности Земли не могут (эффект просачивания при нормальном падении в условиях, отвечающих рис. 35,7 совершенно ничтожен). При наклонном падении в определенных условиях обыкновенная волна уже сможет перейти в необыкновенную волну и достичь Земли в результате эффекта просачивания, обсуждавшегося в § 29.

Глава VII

Распространение радиоволн в космических условиях

§ 36. Распространение радиоволн в солнечной атмосфере

Введение. С развитием радиоастрономии земная ионосфера перестала служить основным объектом применения теории распространения электромагнитных волн в плазме. Более того, в настоящее время центр тяжести интересов в этой области все больше перемещается от ионосферы в сторону радиоастрономии, космической (магнитной) гидродинамики и исследований плазмы в лабораторных условиях.

Современная радиоастрономия, несмотря на свою сравнительную молодость, охватывает широкий круг проблем. Сюда относятся: радиоизлучение Галактики и Метагалактики (общее излучение и излучение дискретных источников), радиоизлучение Солнца, радиоизлучение планет (в особенности, излучение Юпитера), радиолокация метеоров, Луны, планет и Солнца, монохроматическое радиоизлучение межзвездного водорода и OH. Кроме того, нужно упомянуть теоретические вопросы, связанные с выяснением природы спорадического солнечного радиоизлучения и нетеплового космического радиоизлучения, а также радиоастрономическую теорию происхождения космических лучей. Далее, развились радиоастрономические методы изучения земной ионосферы и межпланетного пространства, не говоря уже о том, что радиоастрономия тесно переплелась с многими другими разделами астрономии.

Ниже не предполагается осветить даже часть перечисленных вопросов (см. [77, 135, 297, 323—328], а также [73, 147, 213, 295, 296, 306, 307, 320, 321, 329—344]). Цель последующего изложения состоит лишь в том, чтобы охарактеризовать некоторые особенности и специфику распространения радиоволн в солнечной атмосфере (§ 36) и в межзвездной ионизированной среде (§ 37).

Помимо распространения радиоволн большое внимание привлекает к себе распространение в космических условиях плазменных, акустических и, особенно, магнитогидродинамических волн и разрывов. В условиях, когда плазма может считаться однородной, распространение этих волн рассмотрено в гл. II и III. Что же касается распространения плазменных и низкочастотных волн в неоднородной среде, то сюда также относится ряд выводов, содержащихся в гл. IV — VI. В целом, однако, распространение плазменных и низкочастотных волн в неоднородной среде в различных мыслимых условиях изучено менее полно, чем это имеет место для радиоволн. Некоторые результаты в этом отношении имеются, например, в работах [334, 335]. Ниже рассматриваются только волны, лежащие в радиодиапазоне.

Солнечная корона. Солнечная корона представляет собой как бы гигантскую ионосферу. Если не говорить о масштабах и о количественном различии в значениях электронной концентрации и температуры, условия в солнечной хромосфере и короне отличаются от ионосферных в двух отношениях.

Во-первых, солнечная корона и верхняя часть хромосферы почти полностью ионизированы и практически состоят только из электронов и протонов. Из условия квазинейтральности следует поэтому, что электронная концентрация N равна концентрации протонов N_+. Во-вторых, при распространении радиоволн в хромосфере и короне нужно считаться с существованием неоднородных магнитных полей. Поскольку корона простирается на несколько солнечных радиусов, на пути волны не может считаться постоянным даже общее магнитное поле всего Солнца (в последние годы напряженность этого поля на уровне фотосферы порядка эрстеда, а по некоторым данным общее магнитное поле Солнца вообще отсутствует; в некоторые периоды оно бывает, возможно, значительно более сильным). Что же касается поля пятен, достигающего тысяч эрстед, то оно быстро убывает с удалением от фотосферы и не может считаться однородным уже на расстояниях, значительно меньших солнечного радиуса. Впрочем, в ряде случаев в существенной для распространения волн области поле слабо ($\omega_H \ll \omega$) и корональную плазму можно считать изотропной.

Электронная концентрация в короне определяется из оптических наблюдений (излучение короны в непрерывном спектре обусловлено рассеянием света фотосферы на корональных электронах). Соответствующие значения приведены в табл. 36,1 согласно [336] и часто используемой эмпирической формуле:

$$N(\eta) = 10^8(1{,}55\eta^{-6} + 2{,}99\eta^{-16})\ \textit{электронов}\cdot\textit{см}^{-3},\quad \eta = \frac{r}{r_\odot}, \qquad (36{,}1)$$

где r — расстояние от центра Солнца и $r_\odot = 6{,}96\cdot 10^{10}$ *см* — радиус фотосферы *).

---

*) Нужно иметь в виду, что сама корона и концентрация $N(\eta)$ в ней изменяются в течение цикла солнечной деятельности, а также в зависимости от отдельных спорадических процессов. Кроме того, корона в действи-

Таблица 36,1

Концентрация электронов в солнечной короне

$\eta=\frac{r}{r_\odot}$	N согласно [336]	N по формуле (36,1)	$\eta=\frac{r}{r_\odot}$	N согласно [336]	N по формуле (36,1)
1,03	$2{,}9\cdot10^8$	$3{,}2\cdot10^8$	2,2	$1{,}2\cdot10^6$	$1{,}4\cdot10^6$
1,06	$2{,}1\cdot10^8$	$2{,}3\cdot10^8$	2,4	$7{,}0\cdot10^5$	$8{,}1\cdot10^5$
1,10	$1{,}4\cdot10^8$	$1{,}5\cdot10^8$	2,6	$4{,}2\cdot10^5$	$5{,}0\cdot10^5$
1,2	$5{,}8\cdot10^7$	$6{,}8\cdot10^7$	2,8	$2{,}9\cdot10^5$	$3{,}2\cdot10^5$
1,3	$3{,}0\cdot10^7$	$3{,}7\cdot10^7$	3,0	$1{,}9\cdot10^5$	$2{,}1\cdot10^5$
1,4	$1{,}8\cdot10^7$	$2{,}2\cdot10^7$	3,5	$8\cdot10^4$	$8{,}4\cdot10^4$
1,6	$7{,}5\cdot10^6$	$9{,}4\cdot10^6$	4,0	$4\cdot10^4$	$3{,}8\cdot10^4$
1,8	$3{,}8\cdot10^6$	$4{,}6\cdot10^6$	5,0	$1\cdot10^4$	$1\cdot10^4$
2,0	$2{,}0\cdot10^6$	$2{,}4\cdot10^6$			

Основанию короны отвечает примерно значение $\eta=1{,}03$ ($r-r_\odot\approx20\,000$ *км*). Впрочем, часто для границы между хромосферой и короной принимают значение $r-r_\odot=10\,000$ *км* ($\eta=1{,}014$). Для хромосферы можно использовать эмпирическую формулу (см., например, [337]):

$$N=5{,}7\cdot10^{11}\exp\left[-7{,}7\cdot10^{-4}(h-500)\right];\quad 500<h<10\,000\ \text{км},\qquad(36{,}2)$$

где h — высота над фотосферой в километрах (более подробные сведения см. в [77]).

Температура в хромосфере возрастает от $T\approx5000^\circ$ у ее основания до значений $T\approx3\div5\cdot10^5$ при $h\approx10\,000$ *км* ($\eta=1{,}014$), в короне $T_{\text{к}}\approx10^6$ при $\eta\gg1{,}05$; с дальнейшим ростом η температура изменяется сравнительно мало *).

Из табл. 36,1 ясно, что при $\eta<2$ электронная концентрация в короне выше максимальной концентрации $N\leqslant2\cdot10^6$ в ионосферном F-слое. Еще более разительно различие в температурах. Корональная температура так велика, что корона является

тельности не является сферически симметричной. В связи с этим значения, приведенные в табл. 36,1, могут служить лишь для ориентировки, а различие между вторым и третьим столбцами невелико (оба ряда значений $N(\eta)$ приведены потому, что оба они использовались при конкретных расчетах). Отметим также, что в плоскости солнечного экватора по данным [329] $N(\eta=6)=4\cdot10^4$, $N(8)=1{,}8\cdot10^4$, $N(10)=1{,}0\cdot10^4$, $N(12)=6{,}6\cdot10^3$, $N(14)=4{,}8\cdot10^3$, $N(16)=3{,}7\cdot10^3$, $N(18)=3{,}0\cdot10^3$ и $N(20)=2{,}6\cdot10^3$ (измерения [329] проведены в период минимума солнечной активности; подробнее см. [77]).

*) Имеется в виду температура корональных электронов и ионов, которые при отсутствии потоков имеют практически максвелловское распределение скоростей. Тепловое излучение в оптической части спектра в силу малой оптической толщины короны не находится в равновесии с частицами и в большей части спектра имеет температуру порядка температуры фотосферы $T_\odot\approx6000^\circ$.

источником интенсивного теплового излучения, лежащего в радиодиапазоне. Большая интенсивность этого радиоизлучения связана с тем фактом, что в радиодиапазоне оптическая толщина короны не только не мала, но может быть весьма большой (см. [338—340] и ниже). Помимо теплового излучения солнечная атмосфера служит источником еще более мощного спорадического радиоизлучения.

Распространение радиоволн в короне. Для интерпретации экспериментальных данных о тепловом и спорадическом радиоизлучении Солнца необходимо рассмотреть характер распространения радиоволн в короне. Для этой цели можно воспользоваться теми же формулами, которые были установлены для ионосферы. Для удобства приведем их здесь вновь, причем сразу учтем, что в интересном с точки зрения эксперимента диапазоне всегда

$$\omega^2 \gg \nu_{эфф}^2. \tag{36,3}$$

В этом случае при отсутствии магнитного поля имеем:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \qquad \sigma = \frac{1-\varepsilon}{4\pi}\nu_{эфф} = \frac{e^2 N}{m\omega^2}\nu_{эфф}, \tag{36,4}$$

где N — концентрация электронов и влиянием ионов (протонов) всегда можно пренебречь, так как $N_+ = N$ и $\frac{m}{M} = \frac{1}{1836}$.

Для $\nu_{эфф}$ нужно использовать формулу (6,14):

$$\nu_{эфф} = \pi \frac{e^4}{(\varkappa T)^2} N\bar{v} \ln\left(0,37\frac{\varkappa T}{e^2 N^{1/3}}\right) = \frac{5,5}{T^{3/2}} N \ln\left(220\frac{T}{N^{1/3}}\right), \tag{36,5}$$

где предполагается, что $N_i = N_+ = N$ и T — электронная температура.

Как указано в §§ 4, 6, точность формулы (36,5) не превосходит 5%. Кроме того, выражение, стоящее в (36,5) под знаком логарифма, справедливо только при $T \ll 3\cdot 10^5$ (см. (4,28)). При $T \gg 3\cdot 10^5$ вместо $\ln\left(0,37\frac{\varkappa T}{e^2N^{1/3}}\right) = \ln\left(220\frac{T}{N^{1/3}}\right)$ нужно использовать значение $\ln\left[\gamma_1\left(\frac{me^4}{h^2\varkappa T}\right)^{1/3}\cdot\frac{\varkappa T}{e^2N^{1/3}}\right] = \ln\left(\gamma_2 10^4\frac{T^{2/3}}{N^{1/3}}\right)$, где γ_1 и γ_2 — множители порядка единицы. Эта замена ясна из сопоставления формул (4,19) и (4,19а) и расчетов, проведенных в § 6 (при этом численные множители γ_1 и γ_2 под знаком логарифма не уточнялись, так как, например, при $T \sim 10^6$ и $N \approx 10^6$ имеем $10^4\frac{T^{2/3}}{N^{1/3}} \approx 10^6$ и множителем $\gamma_2 \sim 1$ можно пренебречь). В области $T \sim 3\cdot 10^5$ обе формулы, относящиеся к предельным случаям, дают примерно один и тот же и довольно точный результат. В (36,5) предполагается, что электроны сталкиваются с протонами. Если же электрон сталкивается не с протонами, а с ионами с зарядом eZ и концентрацией N_i, то в (36,5) появляется множитель Z^2 и вместо N фигурирует концентрация N_i. В результате имеющиеся в короне высокоионизированные атомы железа, никеля и других элементов в Z раз эффективнее протонов (ион с зарядом eZ в Z^2 раз эффективнее протона, но в силу квазинейтральности короны при данной электронной концентрации N появление одного иона должно сопровождаться удалением Z протонов). В короне $Z \leqslant 20$ и, по-видимому, всегда $N_i Z \ll N$, т. е. влиянием ионов можно пренебречь.

В общем случае

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}, \quad \varkappa = \frac{2\pi\sigma}{n\omega}, \quad \mu = \frac{2\omega\varkappa}{c}, \tag{36,6}$$

но практически везде пригодны формулы, справедливые при условии

$$|\varepsilon| \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{36,7}$$

и имеющие вид:

$$\left.\begin{aligned} n &= \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}} = \sqrt{1 - 3{,}18\cdot 10^9 \frac{N}{\omega^2}}, \\ \varkappa &= \frac{2\pi\sigma}{n\omega} = \frac{1-n^2}{2n\omega}\cdot \nu_{\text{эфф}}, \\ \mu &= \frac{2\omega\varkappa}{c} = \frac{\nu_{\text{эфф}}(1-n^2)}{cn} = \frac{4\pi e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{mc\omega^2\sqrt{1 - 4\pi e^2 \dfrac{N}{m\omega^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{36,8}$$

Рассмотрим радиоволну, распространяющуюся по радиусу из внешнего пространства к Солнцу. Поток энергии излучения в случае плоской волны будет, очевидно, ослабевать по закону $S = S_0 e^{-\tau(\eta)}$, где S_0 — поток излучения вне короны и τ — так называемая «оптическая толщина» (термин, мало удачный в радиодиапазоне):

$$\tau = \int_r^\infty \mu\, dr = r_\odot \int_\eta^\infty \mu(\eta)\, d\eta = \frac{r_\odot}{c} \int_\eta^\infty \frac{\nu_{\text{эфф}}(\eta)\,[1 - n^2(\eta)]}{n(\eta)}\, d\eta. \tag{36,9}$$

Формула (36,9) записана в приближении геометрической оптики и при условии (36,7). Если волна не полностью затухает в короне и достигает точки, где $\varepsilon = 0$, то оба указанных предположения в некоторой области значений ε несправедливы.

Таблица 36,2

Квадрат показателя преломления n^2 в короне для волн различной длины

η	$\lambda = 50$ *м* $\omega = 3{,}76 \cdot 10^7$	$\lambda = 25$ *м* $\omega = 7{,}52 \cdot 10^7$	$\lambda = 15$ *м* $\omega = 12{,}5 \cdot 10^7$	$\lambda = 5$ *м* $\omega = 37{,}6 \cdot 10^7$	$\lambda = 3{,}76$ *м* $\omega = 5{,}0 \cdot 10^8$	$\lambda = 1{,}5$ *м* $\omega = 1{,}25 \cdot 10^9$	$\lambda = 1{,}0$ *м* $\omega = 1{,}88 \cdot 10^9$	$\lambda = 0{,}6$ *м* $\omega = 3{,}13 \cdot 10^9$
1,03	—	—	—	—	—	0,40	0,74	0,906
1,06	—	—	—	—	—	0,57	0,81	0,932
1,10	—	—	—	—	—	0,72	0,88	0,956
1,155	—	—	—	—	≈ 0	—	—	—
1,157	—	—	—	—	0,02	—	—	—
1,200	—	—	—	—	0,26	0,882	0,948	0,981
1,245	—	—	—	≈ 0	—	—	—	—
1,247	—	—	—	0,01	—	—	—	—
1,30	—	—	—	0,32	0,62	0,939	0,973	0,990
1,40	—	—	—	0,59	0,77	0,963	0,984	0,994
1,60	—	—	—	0,83	0,904	0,985	0,993	0,9986
1,723	—	—	≈ 0	—	—	—	—	—
1,726	—	—	0,01	—	—	—	—	—
1,80	—	—	0,22	0,915	0,952	0,9922	0,997	0,9988
2,040	—	≈ 0	—	—	—	—	—	—
2,043	—	0,01	—	—	—	—	—	—
2,20	—	0,33	0,76	0,973	0,985	0,9976	0,9989	0,9996
2,40	—	0,61	0,86	0,984	0,991	0,9986	0,9994	0,9998
2,580	≈ 0	—	—	—	—	—	—	—
2,584	0,01	—	—	—	—	—	—	—
2,60	0,06	—	—	—	—	—	—	—
2,80	0,35	0,84	0,941	0,993	0,996	0,9994	0,9997	0,9999
3,00	0,57	0,89	0,961	0,996	0,9976	0,9996	0,9998	—
3,20	0,71	0,928	0,973	0,997	0,9984	0,9997	0,9999	—
3,40	0,81	0,952	0,983	0,998	0,9989	0,9998	0,9999	—
3,60	0,85	0,963	0,987	0,9985	0,9992	0,9999	0,9999	—
3,80	0,89	0,972	0,990	0,9989	0,9994	0,9999	—	—
4,0	0,91	0,977	0,992	0,9991	0,9995	—	—	—

Коэффициент отражения $|R|^2$ в этом случае равен (см. (31,2))

$$\left.\begin{aligned} |R|^2 &= e^{-2\tau_0}, \\ \tau_0 &= \int\limits_{r(0)}^{\infty} \mu\, dr + \frac{2\sqrt{2}\,[\nu_{\text{эфф}}(0)]^{3/2}}{3c\omega^{1/2}\left|\frac{d\varepsilon}{dr}\right|_0} = \int\limits_{r(0)}^{\infty} \mu\, dr + \Delta\tau, \end{aligned}\right\} \qquad (36,10)$$

где $r(0)$, $\left|\frac{d\varepsilon}{dr}\right|_0$ и $\nu_{\text{эфф}}(0)$ — значения соответствующих величин в точке, где $\varepsilon = 0$; кроме того, под μ нужно понимать выражение (36,6), а не (36,8). Практически, однако, как будет показано ниже, значение τ_0 определяется формулой (36,9), где интегрирование нужно проводить до точки, очень близкой к $r(0)$, но все же такой, для которой условие (36,7) еще выполнено.

Приведем некоторые результаты вычислений [341], проведенных по указанным выше формулам и с использованием значений N из второго столбца табл. 36,1. В табл. 36,2 приведены для различных длин волн значений n^2 по формуле (36,8). Разумеется, соответствующие цифры не очень точны в силу приближенности значений концентрации N в табл. 36,1.

В табл. 36,3 приведены значения $\nu_{\text{эфф}}$ по формуле (36,5) для различных температур (значения $T = 6\cdot10^3$ и $T = 6\cdot10^4$ для

Таблица 36,3

Значения $\nu_{\text{эфф}}$ для различных температур

η	N	$T=6\cdot10^3$	$T=6\cdot10^4$	$T=3\cdot10^5$	$T=6\cdot10^5$	$T=10^6$
1,03	$290\cdot10^6$	$2,71\cdot10^4$	1103	115	43	21
1,06	210	$1,99\cdot10^4$	811	84	31	15
1,1	137	$1,32\cdot10^4$	537	55	20	10
1,2	58	$5,80\cdot10^3$	233	24	9,0	4,3
1,3	30	$3,10\cdot10^3$	124	12,7	4,7	2,3
1,4	18	$1,88\cdot10^3$	75	7,7	2,9	1,4
1,6	7,5	809	32	3,3	1,20	0,59
1,8	3,8	420	16	1,7	0,6	0,30
2,0	2,0	226	8,9	0,9	0,3	0,16
2,2	1,2	138	5,4	0,55	0,2	0,10
2,4	0,7	82	3,2	0,32	0,12	0,06
2,6	0,42	50	1,9	0,20	0,07	0,04
2,8	0,29	35	1,4	0,14	0,05	0,024
3,0	0,19	23	0,9	0,09	0,03	0,016
3,4	0,085	11	0,4	0,04	0,015	0,007
3,8	0,050	6,4	0,25	0,025	0,007	0,004
4,0	0,040	5,2	0,20	0,020	0,006	0,0035
4,4	0,025	3,3	0,12	0,012	0,0035	0,0022
4,8	0,014	1,8	0,07	0,007	0,0026	0,0013
5,0	0,010	1,3	0,05	0,005	0,0019	0,0009

короны нереальны и приведены только для иллюстрации). Грубо говоря, $\nu_{эфф} \sim T^{-3/2}$, но логарифмический член все же заметен.

Из табл. 36,3 ясно, что условие (36,3) в короне всегда выполнено с большим запасом. Так, даже в худшем случае, когда $\lambda = 50$ *м* и $T = 6 \cdot 10^3\,°\text{K}$, $\frac{\nu^2_{эфф}}{\omega^2} < 10^{-6}$; к тому же столь длинные волны в глубь короны проникнуть не могут (так как там $\varepsilon < 0$) и представляющие интерес значения $\frac{\nu^2_{эфф}}{\omega^2}$ порядка 10^{-11} и меньше $\left(\text{для } \lambda = 1{,}5 \text{ м и } T = 3 \cdot 10^5 \text{ имеем } \frac{\nu^2_{эфф}}{\omega^2} \leqslant 10^{-14}\right)$.

Малость отношения $\frac{\nu^2_{эфф}}{\omega^2}$ приводит также к уже отмеченной возможности использовать формулу (36,9) и при наличии отражения, пренебрегая малой областью, где вместо формул (36,8) нужно применять формулы (36,6). Например, при $T = 10^6$ и $\lambda = 50$ *м* в точке $r(0)$, где $\varepsilon = 0$, $n^2 = n\varkappa = \frac{2\pi\sigma}{\omega} = \frac{\nu_{эфф}}{2\omega} = 5{,}1 \cdot 10^{-10}$; поэтому $\varepsilon \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ уже на ничтожном расстоянии от точки $r(0)$ $\left(\text{так, } \varepsilon = 5{,}1 \cdot 10^{-10} \text{ при } \frac{r - r_\odot}{r_\odot} = \Delta\eta = 2{,}0 \cdot 10^{-10}\right)$ и изменение τ из-за учета отличия n^2 от ε порядка $3 \cdot 10^{-6}$, в то время как само значение $\tau = 0{,}0553$. При $\lambda = 5$ *м* и $T = 3 \cdot 10^5$ в точке $r(0)$значение $n^2(0) = 8{,}56 \cdot 10^{-9}$ и соответствующее изменение τ порядка 10^{-4} при $\tau = 2{,}037$.

По той же причине, в силу малости отношения $\frac{\nu^2_{эфф}}{\omega^2}$, незначительна также добавка $\Delta\tau \sim \nu^{3/2}_{эфф}$ в формуле (36,10). Так, при $\lambda = 50$ *м* и $T = 10^6$ имеем $\Delta\tau \approx 10^{-7}$; для $\lambda = 50$ *м* и $T = 6 \cdot 10^4$ получим $\Delta\tau \approx 5 \cdot 10^{-4}$.

В качестве примера в табл. 36,4 приведены результаты вычислений $\tau(\eta)$ для разных длин волн и $T = 6 \cdot 10^5$. В этой таблице приведены также значения $|R|^2$ по формуле (36,10) для тех случаев, когда коэффициент отражения не слишком мал *).

Приведенные в табл. 36,4 значения сильно округлены и могут служить лишь для самой грубой ориентировки. Поэтому на рис. 36,1 приведены также кривые $\tau(\eta)$ для короны с $T = 10^6$; эти данные [77] более точны (графики доведены до значений η, при которых $n^2 = 0$).

---

*) В таблицах имеются также значения τ при $\eta = 1{,}0$, носящие условный характер. Они получены путем экстраполяции концентрации N, приведенной во втором столбце табл. 36,1 до самой фотосферы (при этом для $\eta = 1{,}0$ получается значение $N = 4{,}3 \cdot 10^8$).

Как ясно из табл. 36,3, отношение $\frac{\nu_{\text{эфф}}(\eta, T_1)}{\nu_{\text{эфф}}(\eta, T_2)}$ практически не зависит от η. Поэтому согласно формуле (36,9) имеет место равенство $\frac{\tau(\eta, T_1)}{\tau(\eta, T_2)} = \frac{\nu_{\text{эфф}}(T_1)}{\nu_{\text{эфф}}(T_2)}$, и, таким образом, если оптическая толщина τ для одной температуры известна, ее легко найти и для других температур. Заметим также, что точность значений, приведенных в таблице, существенно меньше, чем это может показаться на основании числа значащих цифр (неточность связана с экстраполяцией значений N, графическим методом расчета и т. п.). Из табл. 36,4 и рис. 36,1 явствует, что даже при температуре $T = 6 \cdot 10^5$ или $T = 10^6$, одинаковой во всей короне, все волны длиннее 1 *м* практически полностью поглощаются в короне или отражаются от нее. Более короткие волны, особенно сантиметровые, заметно поглощаются уже только в хромосфере, расчетов для которой мы приводить не будем,— в принципе они вполне аналогичны проведенным вычислениям для короны или ионосферы.

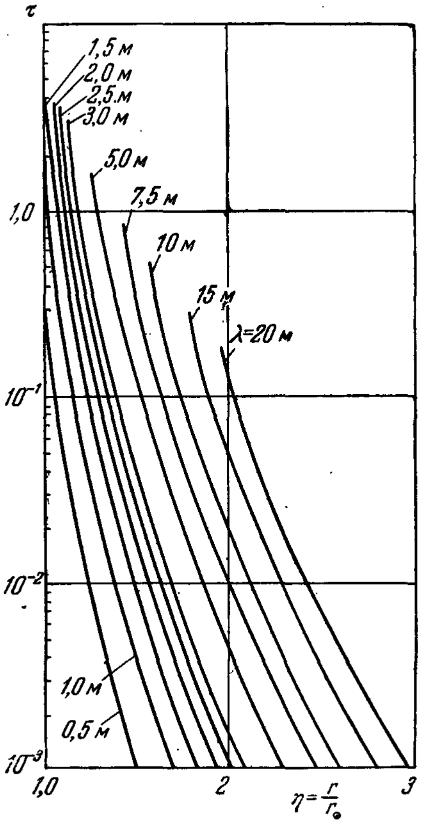


Рис. 36,1. Оптическая толщина короны для радиоволн, распространяющихся по радиусу в направлении к поверхности Солнца. Температура короны $T = 10^6$ °K. Электронная концентрация распределена согласно формуле (36,1).

Излучение радиоволн. Учет рефракции. Поскольку метровые волны поглощаются короной, то, очевидно, при любом механизме их генерации в солнечной атмосфере они должны исходить также из короны. Таким образом, источником радиоизлучения Солнца в метровом диапазоне является корона. При этом излучение с длиной волны λ исходит из области $\eta = \eta(\lambda)$, где $\tau(\lambda)$ порядка единицы (из области, для которой $\tau = 2{,}3$, наружу выходит лишь $^1/_{10}$ потока излучения).

Интенсивность излучения может быть сразу указана лишь в случае, если оно носит температурный характер (тепловое

Таблица 36,4

Оптическая толщина короны $\tau(\eta)$ для волн различной длины при $T = 6 \cdot 10^5$

η	$\lambda=50$ *м*	$\lambda=25$ *м*	$\lambda=15$ *м*	$\lambda=5$ *м*	$\lambda=3,76$ *м*	$\lambda=1,5$ *м*	$\lambda=1,0$ *м*	$\lambda=0,6$ *м*
4,0	0,0004	0,0001	0,00000	—	—	—	—	—
3,5	0,0016	0,0004	0,0001	—	—	—	—	—
3,0	0,010	0,002	0,002	—	0,00000	—	—	—
2,8	0,025	0,004	0,003	0,00000	—	—	—	—
2,6	0,087	0,010	0,005	0,0003	0,0003	—	—	—
2,580	0,116	—	—	—	—	—	—	—
2,4	—	0,026	0,01	0,0008	—	—	—	—
2,2	—	0,086	0,03	—	0,0007	0,00000	0,00000	—
2,043	—	0,245	—	—	—	—	—	—
2,040	—	0,335	—	—	—	—	—	—
2,0	—	—	0,07	0,018	0,003	0,0004	0,0001	0,00000
1,8	—	—	0,14	0,046	0,01	0,0018	0,0007	—
1,726	—	—	0,53	—	—	—	—	—
1,723	—	—	0,63	—	—	—	—	—
1,7	—	—	—	0,076	0,02	—	—	—
1,6	—	—	—	0,12	0,04	0,006	0,002	0,0008
1,5	—	—	—	0,19	0,08	—	—	—
1,4	—	—	—	0,40	0,20	0,029	0,012	0,004
1,3	—	—	—	1,04	0,50	0,068	0,028	0,01
1,247	—	—	—	4,18	—	—	—	—
1,20	—	—	—	—	1,85	0,20	0,07	0,03
1,17	—	—	—	—	4,17	—	—	—
1,10	—	—	—	—	—	0,89	0,37	0,14
1,05	—	—	—	—	—	2,22	0,89	0,31
1,02	—	—	—	—	—	4,72	1,77	0,56
1,00	—	—	—	—	—	9,18	2,87	0,90
	$\vert R\vert^2=0,79$	$\vert R\vert^2=0,51$	$\vert R\vert^2=0,28$	$\vert R\vert^2=0,00005$		—	—	—

излучение). В этом случае с единицы поверхности (черного тела) в единицу времени в интервале частот Δf излучается энергия

$$S\Delta f = \frac{2\pi f^2}{c^2}\varkappa T\Delta f = \frac{2\pi\varkappa T}{\lambda^2}\Delta f, \tag{36,11}$$

где $\varkappa = 1{,}38\cdot 10^{-16}$ *эрг/град* — постоянная Больцмана и использован закон Рэлея — Джинса, так как для Солнца в радиодиапазоне $\varkappa T \gg hf = \hbar\omega$.

Если считать корону сферически симметричной и полностью поглощающей волны с длиной λ, то на Земле поток теплового излучения равен $S\Delta f$, где

$$S = \frac{2\pi\varkappa T}{\lambda^2}\left(\frac{r_\odot}{R}\right)^2\eta^2(\lambda) = \frac{1{,}86\cdot 10^{-21}}{\lambda_м^2}T\eta^2(\lambda)\frac{вт}{м^2\cdot Мгц} =$$

$$= \frac{1{,}11\cdot 10^{-17}}{\lambda_м^2}\,\frac{T}{T_\odot}\,\eta^2(\lambda)\frac{вт}{м^2\cdot Мгц}; \tag{36,12}$$

здесь $\lambda_м$ — длина волны в метрах, $r_\odot = 6{,}965\cdot 10^{10}$ — радиус фотосферы, $R = 1{,}495\cdot 10^{13}$ *см* — расстояние от Земли до Солнца, $T_\odot = 6000$ — условная температура фотосферы и $\eta(\lambda)$ — значение η, при котором $\tau(\lambda) \approx 1$ и температура равна T.

В (36,12) предполагается, что значение $\eta(\lambda)$ одинаково как при радиальном, так и при нерадиальном распространении волн, т. е. что источником радиоизлучения является сферическая поверхность с радиусом $\eta(\lambda)\,r_\odot$. Это, конечно, строго говоря, неверно. Для лучей, идущих не по радиусу Солнца, должна наблюдаться рефракция и, кроме того, для этих лучей $\tau \approx 1$ на другом расстоянии от фотосферы, чем для радиальных лучей. Поэтому радиояркость диска в его центре и на краях будет неодинаковой, так же как это имеет место в оптической области.

Для количественного анализа этих вопросов нужно рассмотреть распространение в солнечной атмосфере радиоволн, попадающих затем на Землю. При этом имеются все основания воспользоваться лучевой (т. е. геометрикооптической) трактовкой задачи [77, 337, 342]).

Для лучей, распространяющихся в сферически симметричной преломляющей среде, закон преломления имеет вид:

$$n(r)\,r\sin\varphi(r) = r_\infty\sin\varphi(r_\infty) = p, \tag{36,13}$$

где $n(r)$ — показатель преломления в точке, находящейся на расстоянии r от центра Солнца, φ — угол между направлением луча и радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и p — расстояние входящего в атмосферу Солнца, еще не рефрагирующего луча от радиального луча (рис. 36,2); в (36,13) предполагается, очевидно, что $n(r_\infty) = 1$. Учитывая (36,13) и простые геометрические соображения, можно видеть, что элемент длины луча равен $ds = \frac{dr}{\cos\varphi} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{n^2 r^2}}}$ и оптическая толщина вдоль луча равна

$$\tau(r) = \int_r^\infty \mu \, ds = r_\odot \int_\eta^\infty \frac{\mu(\eta)\, d\eta}{\sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{n^2(\eta)\eta^2}}}, \tag{36,14}$$

где $\zeta = \frac{p}{r_\odot}$ и $\mu(\eta)$ — коэффициент поглощения (36,8).

Траектория луча в полярных координатах r и θ такова:

$$\theta = \theta_\infty + \int_r^{r_\infty} \frac{p\, dr}{r\sqrt{(rn)^2 - p^2}}, \tag{36,15}$$

где мы ограничиваемся рассмотрением лучей, падающих на Солнце параллельным пучком (поэтому $\theta_\infty = \varphi_\infty$ и $r_\infty \sin\varphi_\infty = p$).

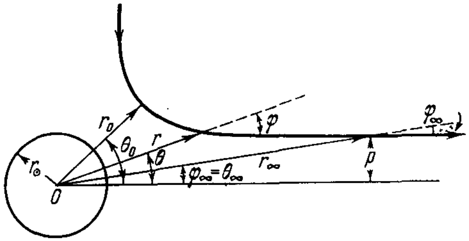


Рис. 36,2. Траектория луча в солнечной короне.

В точке отражения или, лучше, «точке поворота» $\varphi = \pi/2$, $r = r_0$ и $\theta = \theta_0$, причем

$$r_0 n(r_0) = p. \tag{36,16}$$

Траектория луча симметрична относительно прямой, проходящей через центр Солнца и точку поворота. В этой точке знаменатель в интегралах (36,14) и (36,15) обращается в нуль, но это обстоятельство несущественно ни при графическом построении, ни при расчетах, использующих линейную аппроксимацию функции $n^2(r)$ вблизи точки поворота (чтобы не заботиться о знаках, удобно применять выражения (36,14) и (36,15) только при $\theta < \theta_0$, поскольку в силу симметрии задачи значений τ при $\theta > \theta_0$ вычислять не нужно).

Траектории лучей в короне показаны на рис. 36,3 для излучения с частотой $f = 60$ *Мгц* ($\lambda = 5$ *м*). Все лучи приходят справа параллельно друг другу и, следовательно, отличаются лишь значениями «прицельного параметра» p (см. рис. 36,2).

Уравнение переноса. Эффективная температура радиоизлучения. Интенсивность радиоизлучения вдоль различных лучей определяется уравнением переноса, широко используемым в астрофизике. Отличие рассматриваемого случая от оптического состоит лишь в том, что в оптике обычно можно пренебречь отличием n от единицы. Кроме того, при учете влияния магнитного поля корона является двоякопреломляющей.

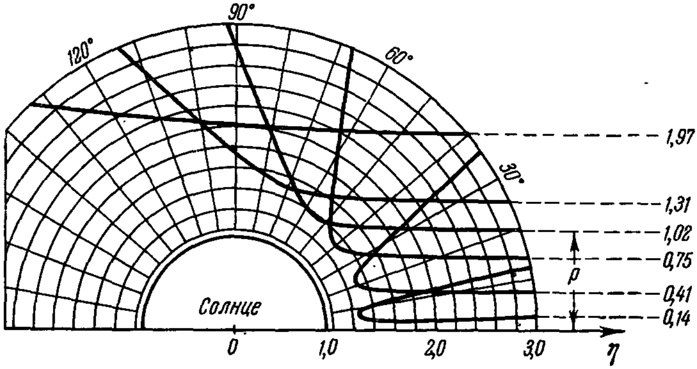


Рис. 36,3. Траектории лучей в солнечной короне для радиоизлучения с длиной $\lambda_0 = 5$ *м*. На рисунке указаны значения «прицельного параметра» p, выраженного в единицах радиуса фотосферы $r_\odot$.

Уравнение переноса для интенсивности (удельной интенсивности) I_l нормальной волны типа l имеет вид [77]

$$\frac{n_l^2}{|\cos\theta_l|}\frac{d}{ds}\left(\frac{I_l\,|\cos\theta_l|}{n_l^2}\right) = a_l - \mu_l I_l. \qquad (36,17)$$

Определение величин, входящих в уравнение переноса, уже было дано в § 12. Тем не менее повторим, что $I_l\,d\omega\,d\Omega$ есть поток энергии, приходящейся на интервалы частоты и телесного угла $d\omega$ и $d\Omega$ (поток энергии равен энергии протекающей в единицу времени через единичную площадку, нормальную к направлению потока). Далее, n_l, $\mu_l = \frac{2\omega}{c}\varkappa_l$ и θ_l соответственно показатель преломления, коэффициент поглощения и угол между $v_{\text{гр}}$ (лучем) и k в волне типа l. Наконец, a_l есть излучательная способность среды (a_l есть энергия, излучаемая в виде волны типа l единичным объемом среды и отнесенная к единичным интервалам времени, частоты и телесного угла).

При пренебрежении влиянием магнитного поля уравнение переноса (36,17) принимает вид

$$n^2\frac{d}{ds}\left(\frac{I}{n^2}\right) = a - \mu I. \qquad (36,18)$$

Если речь идет о поперечных волнах, то уравнение (36,18) относится к волнам с любой поляризацией и для корональной плазмы $n^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Уравнение переноса (36,18) применимо и для плазменных волн (при этом $n = n_3$, $a = a_3$ и $\mu = \mu_3$), но лишь, если поглощение этих волн достаточно слабое. Последнее условие относится, конечно, к любым случаям. Кроме того, уравнение переноса, в котором ds есть элемент пути вдоль луча (вдоль вектора $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$), пригодно только в пределах приближения геометрической оптики (в частности, отражение и взаимодействие волн разных типов предполагается отсутствующим). Отметим также, что в (36,17) и (36,18) производных по времени нет по той простой причине, что процесс считается стационарным во времени.

Если среда однородна, то уравнения (36,17), (36,18) принимают простой вид, который сразу можно написать из соображений о сохранении энергии (например, в случае (36,17) имеем $\frac{dI}{ds} = a - \mu I$). Для неоднородной среды в связи с учетом рефракции уравнения усложняются. При постоянстве потока энергии $I_l\, d\omega\, d\Omega$, $a_l = 0$ и $\mu_l = 0$ сохраняющейся является величина $\frac{I_l\,|\cos\theta_l|}{n_l^2}$. Учет этого обстоятельства и приводит к уравнению в форме (36,17), (36,18), как это детально обосновано в [344]. Останавливаться на использовании уравнения переноса мы не будем, в частности, потому, что в практически важнейшем случае постоянной температуры результат может быть получен непосредственно. Дело в том, что при современном уровне наших сведений о температуре и концентрации электронов в короне представляется часто целесообразным считать температуру короны постоянной, т. е. не зависящей от r. Резкое падение температуры при переходе к хромосфере в свою очередь удобно учитывать, считая, что на некоторой границе $r = r_{\text{х}}$ температура скачком меняется от значения $T_{\text{к}}$ до значения $T_{\text{х}}$ ($T_{\text{к}}$ и $T_{\text{х}}$ — температуры в короне и хромосфере).

Определение параметров $T_{\text{к}}$, $T_{\text{х}}$ и $r_{\text{х}}$ должно быть произведено из сравнения теоретически вычисленного распределения интенсивности радиоизлучения по солнечному диску с соответствующими опытными данными. Если же задаваться более сложным распределением температуры в солнечной атмосфере, то интерпретация ограниченных экспериментальных данных может оказаться неоднозначной.

Считая температуру короны постоянной, можно определить интенсивность радиоизлучения вдоль луча непосредственно с помощью теоремы Кирхгофа (12,16). Для лучей, не попадающих в хромосферу, удельная интенсивность теплового излучения

I_f вдоль данного луча, идущего на расстоянии p от радиального луча (см. рис. 36,2), равна

$$I_f(p) = \frac{2\varkappa f^2}{c^2} T_\text{к} \left(1 - e^{-2\tau_\text{к}(r_0)}\right). \tag{36,19}$$

Здесь I_f — интенсивность, отнесенная к интервалу частоты $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ и, кроме того, сразу для волн с двумя возможными состояниями поляризации (корона считается изотропной); учтено также, что на выходе из среды (короны) $n = 1$. Очевидно в таких условиях (изотропия, $n = 1$) равновесная интенсивность $I_l^{(0)}$, определенная формулой (12,16), принимает вид $I_l^{(0)} = \frac{\omega^2 \varkappa T}{8\pi^3 c^2} = \frac{f^2 \varkappa T}{2\pi c^2}$; далее, $I_f^{(0)} = 4\pi I_l^{(0)} = \frac{2 f^2 \varkappa T}{c^2}$, причем множитель 2 появляется в силу учета волн с разными поляризациями и множитель 2π в результате того, что интенсивность I_f относится к интервалу Δf, а интенсивность $I_l^{(0)}$ к интервалу $\Delta\omega$. Таким образом, в (36,19) величина $\frac{2\varkappa f^2}{c^2} T_\text{к}$ есть удельная интенсивность черного излучения с температурой $T_\text{к}$ и $2\tau_\text{к}(r_0)$ — оптическая толщина короны вдоль луча $\Big(\tau_\text{к}(r_0)$ есть оптическая толщина до точки поворота $r_0 = \frac{p}{n(r_0)}$; значение $\tau_\text{к}(r_0)$ определяется формулой (36,14) с $\eta = \eta_0 = \frac{r_0}{r_\odot}\Big)$. Для лучей, проникающих в хромосферу:

$$I_f(p) = \frac{2\varkappa f^2}{c^2} T_\text{к} \left(1 - e^{-\tau_\text{к}(r_\text{х})}\right) + \frac{2\varkappa f^2}{c^2} T_\text{х} e^{-\tau_\text{к}(r_\text{х})}, \tag{36,20}$$

где $\tau_\text{к}(r_\text{х})$ — оптическая толщина короны вдоль данного луча до точки $r_\text{х}$, где начинается хромосфера, и учтено, что в самой хромосфере луч всегда полностью поглощается (т. е. $\tau_\text{х} \gg 1$).

Интенсивность излучения (36,20) соответствует интенсивности излучения черного тела с эффективной температурой

$$T_\text{эфф} = T_\text{к} \left(1 - e^{-\tau_\text{к}(r_\text{х})}\right) + T_\text{х} e^{-\tau_\text{к}(r_\text{х})}. \tag{36,20а}$$

В случае (36,19), очевидно,

$$T_\text{эфф} = T_\text{к} \left(1 - e^{-2\tau_\text{к}(r_0)}\right). \tag{36,19а}$$

На Земле поток излучения $\Delta S \Delta f$, исходящий из кольцевой области на Солнце с площадью $2\pi p \Delta p$, и полный поток $S \Delta f$ равны:

$$\Delta S = \frac{2\pi p \Delta p}{R^2} I_f(p), \quad S\Delta f = \frac{2\pi}{R^2} \Delta f \int_0^\infty I_f(p)\, p\, dp. \tag{36,21}$$

Если излучающая поверхность есть черная сфера с радиусом $r = r_{\odot}\,\eta(\lambda)$, то $I_f = \frac{2\varkappa f^2}{c^2} T_{\text{к}}$ при $p \leqslant r$, $I_f = 0$ при $p > r$, и формула (36,21) для S переходит в (36,12).

Для характеристики интенсивности радиоизлучения Солнца как целого удобно пользоваться понятием эффективной температуры Солнца $T_{\text{эфф}}$, определяя $T_{\odot,\text{эфф}}$ как температуру, которую должна была бы иметь фотосфера для того, чтобы ее радиоизлучение равнялось наблюдаемому. Очевидно,

$$T_{\odot,\ \text{эфф}}(\lambda) = S\left(\frac{R}{r_{\odot}}\right)^2 \frac{\lambda^2}{2\pi\varkappa} = 5{,}4\cdot 10^{20} S\lambda^2, \qquad (36{,}22)$$

где $S\Delta f$ — наблюдаемый на Земле поток радиоизлучения от всего Солнца, отвечающий длине волны λ (в последнем выражении λ нужно брать в метрах и S — в *вт/м²·Мгц*).

С помощью приведенных формул вопрос о тепловом радиоизлучении Солнца для принятой модели может быть разобран без каких-либо трудностей принципиального характера. На соответствующих расчетах мы здесь останавливаться не будем (см. [77] и указанную там литературу). Отметим лишь, что одним из очевидных следствий принятой модели является эффект уярчения при приближении к краю солнечного диска. Этот эффект имеет место для волн, которые в центральных областях диска (т. е. при $r < 0{,}8 \div 0{,}9\, r_{\odot}$) сильно поглощаются только в хромосфере, где $T = T_{\text{х}} \ll T_{\text{к}}$.

Влияние магнитного поля. Спорадическое солнечное излучение в метровом диапазоне носит неравновесный (нетепловой) характер, причем его интенсивность достигает иногда огромных значений ($T_{\odot,\text{эфф}} \sim 10^{12} \div 10^{13}$ °К). Независимо от того, каков механизм спорадического радиоизлучения (см. [73, 77, 135, 343]), для вопроса о распространении и выходе этого излучения из короны все приведенные выше сведения сохраняют свое значение. Вместе с тем ограничиться рассмотрением изотропной корональной плазмы уже нельзя. Собственно, учет влияния магнитного поля может быть существен уже и в случае теплового радиоизлучения. Это влияние, однако, относительно невелико, потому что общее магнитное поле Солнца слабо (для теплового радиоизлучения Солнца как целого существенна величина именно общего магнитного поля). В тех случаях, когда спорадическое радиоизлучение не поляризовано или слабо поляризовано, корональную плазму также можно, вообще говоря, считать изотропной. Но спорадическое излучение часто сильно поляризовано, и тогда несомненно нужно считать корональную плазму магнитоактивной.

Все общие формулы, необходимые для соответствующих расчетов, уже были приведены в гл. III и V. Однако в отличие от ионосферы в короне магнитное поле обычно нельзя считать однородным. Кроме того, в связи со значительно более высокой температурой в короне сильнее сказывается влияние теплового движения (пространственной дисперсии).

В качестве примеров, позволяющих составить впечатление о роли магнитного поля, приведем результаты расчетов [147] показателей преломления $n_{1,2}$ над солнечным пятном (поглощением пренебрегается — в короне оно, вообще говоря, очень мало сказывается на виде функций $n_{1,2}(\eta)$). При этом источник поля считается протяженным магнитным полюсом, расположенным на уровне фотосферы *). Тогда поле на оси равно

$$H^{(0)}(r) = H_b\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}}\right),$$

$$h = r - r_\odot = r_\odot(\eta - 1). \qquad (36,23)$$

Здесь b — радиус магнитного полюса и H_b — поле на уровне фотосферы (рис. 36,4). Концентрация электронов определялась выражением (36,1). На рис. 36,5—36,7 приведены графики функций $\tilde{n}^2_{1,2}(\eta)$ при $\alpha = 0$, 15 и 90° и $H_b = 250$ и $H_b = 2500$ *эрст*; кроме того, положено $\omega = 2\pi\cdot 10^8$ $\left(\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega} = 3\text{ м}\right)$ и $b^2 = 10^{19}$ *см²*, т. е. порядка площади довольно большого пятна.

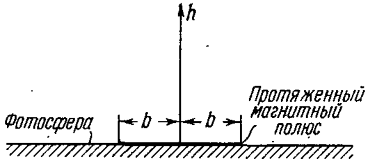


Рис. 36,4. Протяженный магнитный полюс, имеющий форму окружности с радиусом b и находящийся на уровне фотосферы.

Различие между случаями, изображенными на рис. 36,6, *а* и *б* заключается в том, что для $H_b = 2{,}5\cdot 10^3$ уровень $\omega_H = \omega$ (т. е. $u = 1$) лежит в короне выше слоя, где $\omega_0 = \omega$ (т. е. $v = 1$); в случае же $H_b = 2{,}5\cdot 10^2$ положение уровней обратное. Отсюда, в частности, следует, что в первом варианте (рис. 36,6, *а*) взаимодействие нормальных волн происходит в области, где $\omega_H > \omega$, тогда как во втором варианте (рис. 36,6, *б*) области взаимодействия расположены в слое, где $\omega_H < \omega$ (на рис. 36,6 области взаимодействия обведены кружками). Заметим, что указанное различие в ходе кривых для сильного и слабого поля возникает лишь для промежуточных значений угла α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; из рис. 36,5 и 36,7 ясно, что при $\alpha = 0$ и $\alpha = 90°$ изменение величины магнитного поля не приводит к резкому изменению кривых $\tilde{n}^2_{1,2}(\eta)$.

---

*) Такая модель позволяет хорошо аппроксимировать поля униполярных пятен, к числу которых принадлежит примерно 35% всех пятен; для биполярных групп пятен используемое приближение также в известных пределах пригодно в области над пятном с определенной полярностью.

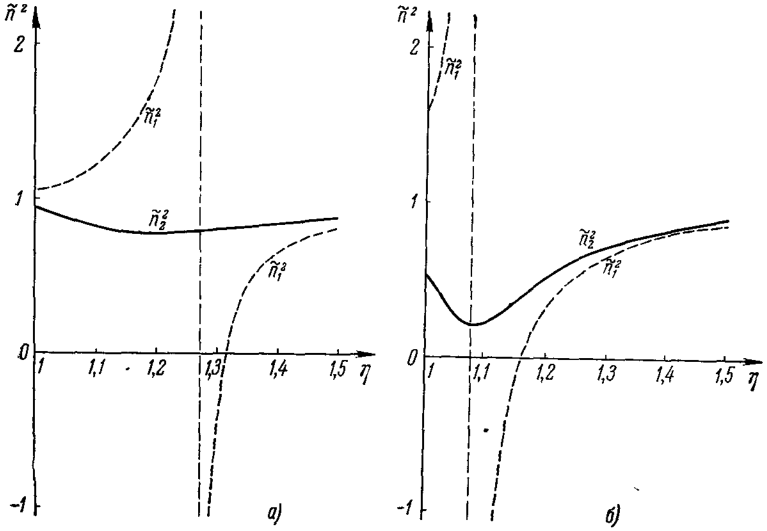


Рис. 36,5. Функции $\tilde{n}_{1,2}^2(\eta)$ в корональной плазме при $\alpha=0$ (вертикальные пунктирные линии отвечают точке $v_{1\infty}$): *а)* $H_b=2{,}5\cdot10^3$; *б)* $H_b=2{,}5\cdot10^2$.

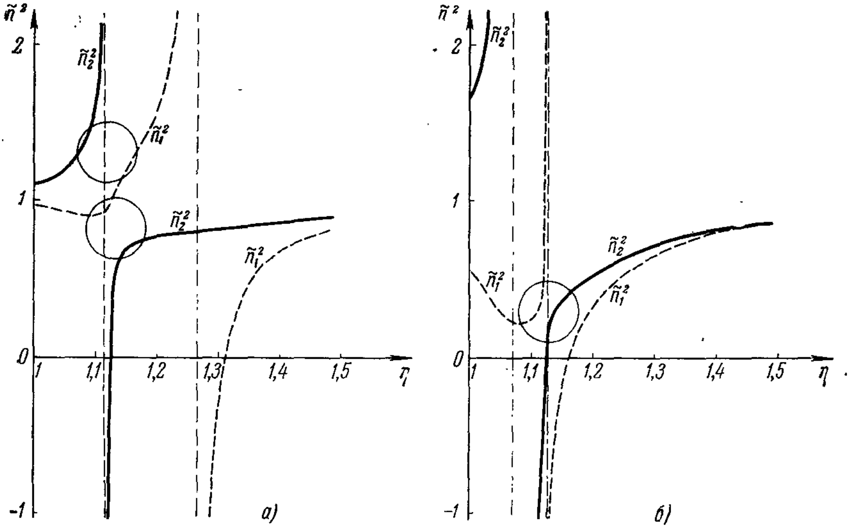


Рис. 36,6. Функции $\tilde{n}_{1,2}^2(\eta)$ в корональной плазме при $\alpha=15°$ (вертикальные пунктирные линии отвечают точкам $v_{1\infty}$ и $v_{2\infty}$): *а)* $H_b=2{,}5\cdot10^3$; *б)* $H_b=2{,}5\cdot10^2$.

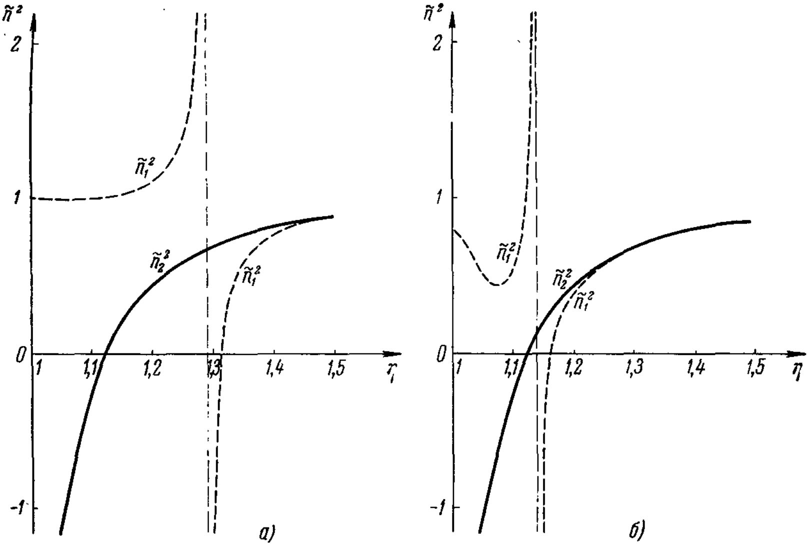


Рис. 36,7. Функции $\tilde{n}^2_{1,\,2}(\eta)$ в корональной плазме при $\alpha = 90°$; *а*) $H_b = 2{,}5\cdot 10^3$; *б*) $H_b = 2{,}5\cdot 10^2$.

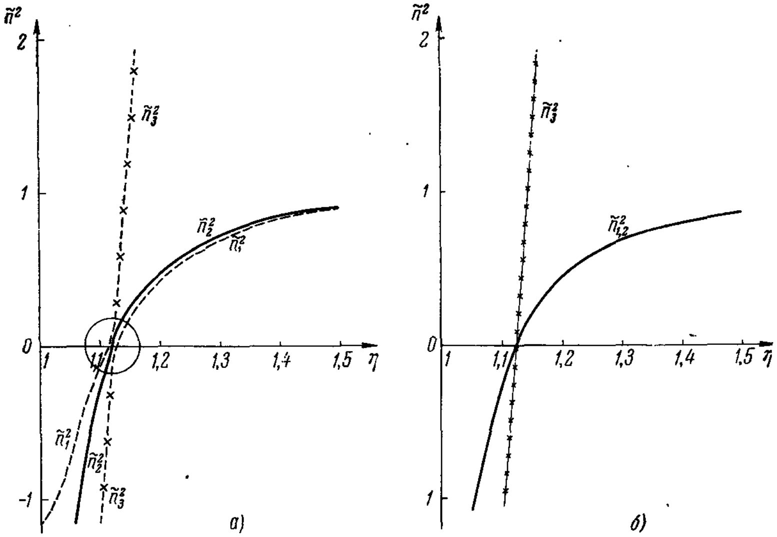


Рис. 36,8. Функции $\tilde{n}^2_{1,\,2,\,3}$ в корональной плазме при $\alpha = 15°$: *а*) $H_b = 25$ *эрст*; *б*) $H_b = 0$ (изотропная плазма).

На рис. 36,8, *а* показана зависимость $\tilde{n}^2_{1,2}(\eta)$ в слабом магнитном поле $H_b = 25$ *эрст* при $\alpha = 15°$ (при учете теплового движения в квазигидродинамическом приближении). На рис. 36,8, *б* приведены графики $\widetilde{n}^2_{1,2}$ и $\widetilde{n}^2_3$ в тех же условиях, но при отсутствии магнитного поля $\left(\tilde{n}^2_{1,2} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2},\ \tilde{n}^2_3 = \frac{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{\frac{v_T^2}{c^2}}\right)$. Существенно, что в достаточно слабом поле штрих-пунктирная часть кривых на рис. 36,8, *а* по всем своим свойствам соответствует штрих-пунктирной части кривой $\tilde{n}^2_3$ на рис. 36,8, *б*. Этот факт, находящийся в согласии со сказанным в § 12, позволяет при $u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2} \ll 1$ в ряде вопросов ограничиться рассмотрением поперечных и плазменных волн в изотропной плазме вместо исследования более сложной задачи о генерации и распространении волн в магнитоактивной плазме. Подробнее о влиянии магнитного поля на радиоизлучение Солнца см. [77, 135, 148, 343].

Трансформация плазменных волн в радиоволны. Потоки частиц генерируют в короне плазменные волны (в магнитоактивном случае это значит, что образуются волны в районе полюсов функций $\tilde{n}^2_{1,2}$). На «выходе» же — вне короны — с радиоастрономической точки зрения интерес представляют только радиоволны. Тем самым одно из центральных мест в теории спорадического солнечного радиоизлучения приобретает проблема трансформации и выхода волн из короны. Не останавливаясь на этом вопросе подробнее (см. [73, 77, 135, 147, 207, 207а, 208, 343]; см. также конец § 20 и указанную там литературу), подчеркнем несколько моментов.

В однородной плазме трансформация волн разного типа возможна только за счет рассеяния на неоднородностях (флуктуациях) как теплового, так и нетеплового происхождения *). При этом, например, в изотропной плазме имеются флуктуации двух типов: флуктуации плотности плазмы, практически не связанные с появлением пространственного заряда, и флуктуации с неизменной плотностью ионов, т. е. флуктуации плотности одних только электронов. Флуктуации последнего типа представляют собой, собственно, флуктуационные плазменные волны, на которых может рассеиваться рассматриваемая плазменная или поперечная волна. При рассеянии плазменных волн, созданных каким-либо способом в короне, на флуктуациях обоих типов образуются поперечные (радио) волны, которые затем при благоприятных условиях выходят из короны. Аналогичный механизм трансформации нормальных волн разного типа путем рассеяния имеет место и в магнитоактивной плазме.

---

*) Термин «однородная плазма» применяется здесь, конечно, в несколько условном смысле — речь идет об однородности «в среднем» (при отсутствии флуктуаций или локальных неоднородностей).

В дополнение к сказанному приведем здесь элементарные физические соображения, которые показывают, что при рассеянии волн данного типа на флуктуациях возникают также волны других типов. Рассеяние на флуктуациях можно описывать двумя, в известных пределах эквивалентными, способами — как рассеяние на совокупности волн (эти волны есть компоненты Фурье в разложении флуктуационного изменения диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon_{ij}$) или как рассеяние на флуктуациях $\Delta\varepsilon_{ij}$ в отдельных маленьких по сравнению с длиной волны объемах. Используя последнюю картину, мы видим, что рассеяние обусловлено появлением в среде флуктуационных дипольных моментов $p_i = \Delta\varepsilon_{ij}E_j^{(0)}$, где $\boldsymbol{E}^{(1)}$ — поле «падающей», рассеиваемой в среде волны какого-либо типа. Разумеется, дипольный момент $\boldsymbol{p}$ зависит от поля $\boldsymbol{E}^{(0)}$, но не от типа падающей волны, т. е., например, ориентации вектора $\boldsymbol{E}^{(0)}$ относительно волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Сказанное очевидно в связи с малостью рассматриваемого объема с моментом $\boldsymbol{p}$ по сравнению с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Таким образом, все волны, создающие данный момент $\boldsymbol{p}$, рассеиваются одинаково. Далее, диполь $\boldsymbol{p}$, находящийся в среде, вообще говоря, излучает волны разных типов (например, поперечные и продольные, если речь идет об изотропной плазме). Тем самым любая волна, создающая флуктуационные дипольные моменты $p_i = \Delta\varepsilon_{ij}E_j^{(0)}$, порождает рассеянные волны всех типов, которые только могут излучаться диполем, помещенным в рассматриваемую среду.

В неоднородной плазме трансформация волн может происходить не только на флуктуациях, но и регулярным образом, т. е. без учета процессов рассеяния. Именно в изотропной плазме в районе точки $\varepsilon(\omega, \eta) = 0$ плазменная волна может переходить в поперечную в результате взаимодействия, рассмотренного в § 20. В магнитоактивной плазме трансформация связана с взаимодействием волн, приводящим к эффекту «утраивания» (см. §§ 28, 29; соответствующие области взаимодействия обведены кружками на рис. 36,6).

О поглощении, не связанном с соударениями. В магнитоактивной корональной плазме в связи с ее высокой температурой нельзя ограничиться учетом только поглощения, обусловленного соударениями. Помимо этого механизма поглощение происходит также в результате процессов, обратных магнитотормозному и черенковскому излучению (см. § 12). Черенковское поглощение будет иметь место только в области, где $n_{1,2} > 1$. С точки зрения проблемы выхода излучения этот механизм поглощения имеет сравнительно небольшое значение (см. рис. 36,5—36,7; черенковское поглощение отлично от нуля для волн, которые могут выйти из короны только в результате взаимодействия). Магнитотормозное поглощение при $\alpha \neq 0$ будет наблюдаться и для обыкновенной и для необыкновенной волн на частотах $\omega = s\omega_H$ $(s = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Соответствующие значения коэффициентов поглощения $\mu = \frac{2\omega}{c}\varkappa$ уже были приведены в § 12 (см. формулы (12,36) — (12,46)).

В то время как при $s = 1$ и $s = 2$ коэффициент резонансного поглощения $\mu_1^{\text{рез}}(s = 1) \sim \mu_1^{\text{рез}}(s = 2) \sim \frac{\omega}{c}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\beta_T$, коэффициент поглощения из-за соударений $\mu_{1,2}^{\text{соуд}} \sim \frac{\nu_{\text{эфф}}}{c}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Отсюда $\frac{\mu_{1,2}^{\text{соуд}}}{\mu_{1,2}^{\text{рез}}} \sim \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega\beta_T} \sim 10^{-6}$ при $\nu_{\text{эфф}} \sim 10$, $\omega \sim 2\pi\cdot 10^8$ и $\beta_T \sim 10^{-2}$. Таким образом, резонансное поглощение весьма сильно. Некоторые грубые оценки показывают [77, 147], что в короне связанная с резонансным поглощением оптическая толщина для необыкновенной волны

$$\tau_1(s = 1) \sim \tau_1(s = 2) \sim 10^5,\ \ \tau_1(s = 3) \sim 60,\ \ \tau_1(s = 4) \sim 7\cdot 10^{-2} \tag{36,24}$$

при $\omega \sim 2\pi\cdot 10^8$, $\omega_0 \sim \omega$, $\beta_T = \sqrt{\frac{\varkappa T}{mc^2}} \sim 10^{-2}$, $T \sim 10^6$ и $L_H \sim 10^{10}$ *см* (L_H — характерное расстояние, на котором заметно изменяется поле $H^{(0)}$ и, следовательно, частота ω_H). Для обыкновенной волны значения $\tau = \tau_2$ в тех же условиях на один-два порядка меньше. Тем не менее $\tau_2(s = 1) \sim \tau_2(s = 2) \gg 10^3 \gg 1$.

Итак, резонансное поглощение при $\alpha \sim 1$ может резко ослаблять волны, проходящие через уровень $\omega \approx \omega_H$, $\omega \approx 2\omega_H$, а для необыкновенной волны также уровень $\omega \approx 3\omega_H$. Для модели короны над пятном, использованной при построении рис. 36,5—36,8, при $H_b = 2{,}5\cdot 10^3$ *эрст* уровни $\omega = \omega_H$, $\omega = 2\omega_H$ и $\omega = 3\omega_H$ расположены соответственно при $\eta = 1{,}27$, $\eta = 1{,}38$ и $\eta = 1{,}47$. Из рис. 36,6, *а* следует, что в этом случае резонансное поглощение резко меняет условия выхода волн из короны. Напротив, в поле $H_b = 2{,}5\cdot 10^2$ *эрст* влияние резонансного поглощения мало существенно, поскольку уровням $\omega = \omega_H$, $\omega = 2\omega_H$ и $\omega = 3\omega_H$ отвечают значения $\eta = 1{,}085$, $\eta = 1{,}121$ и $\eta = 1{,}148$.

Теорема Кирхгофа в магнитоактивной плазме. В заключение остановимся на вопросе об использовании теоремы Кирхгофа в магнитоактивной плазме (см., в частности, [111]).

Для удобства повторим вначале соответствующие рассуждения для изотропной среды.

Интенсивность излучения $I'_{0\omega}$, выходящего в вакуум из ограниченной изотропной среды, складывается из собственного излучения этой среды I_ω и падающего на среду излучения $I_{0\omega}$, уменьшенного на множитель $e^{-\tau}$:

$$I'_{0\omega} = I_\omega + I_{0\omega}e^{-\tau}, \quad \tau = 2\frac{\omega}{c}\int_a^b \varkappa\, ds = \int_a^b \mu\, ds \qquad (36,25)$$

(здесь μ — коэффициент поглощения и ds — элемент траектории луча, показанного на рис. 36,9; предполагается, что луч не расщепляется на отраженный и проходящий, т. е. отражение либо отсутствует, либо является полным). Соотношение (36,25) выражает закон сохранения энергии и, кроме того, основывается на использовании понятия о лучах, что отвечает слабому поглощению и приближению геометрической оптики.

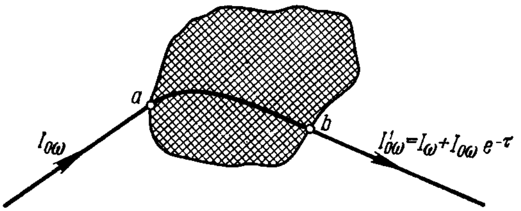


Рис. 36,9. Изменение интенсивности излучения при прохождении луча через слабо поглощающую среду.

В случае полного термодинамического равновесия (см. также § 12)

$$I_{0\omega} = I_\omega^{(0)}(T) = \frac{1}{2\pi} I_f^{(0)}(T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3c^2}\frac{T}{e^{\frac{\hbar\omega}{\varkappa T}}-1}; \quad I_\omega^{(0)} = \frac{\omega^2\varkappa T}{4\pi^3c^2} \text{ при } \frac{\hbar\omega}{\varkappa T} \ll 1, \qquad (36,26)$$

где учитываются обе поляризации и $I_f^{(0)}$ — использовавшаяся ранее интенсивность, отнесенная к интервалу частот $df = \frac{d\omega}{2\pi}$.

В вакууме равновесное излучение однородно и изотропно, в силу чего в равновесии $I'_{0\omega}(T) = I_{0\omega}(T) = I_\omega^{(0)}$ и выражение (36,25) принимает вид

$$I_\omega(T) = I_\omega^{(0)}(T)\,(1-e^{-\tau}). \qquad (36,27)$$

Интересно отметить, что по самому характеру вывода I_ω есть излучение, выходящее из среды направо (см. рис. 36,9), а τ есть оптическая толщина также при прохождении волновой среды слева направо. Однако вследствие обычной теоремы взаимности, справедливой в немагнитоактивных средах, оптическая толщина τ при прохождении среды в противоположных направлениях одинакова. Только поэтому теорема Кирхгофа, т. е. соотношение (36,27), может формулироваться без указания на направление распространения волны.

Переходя к излучению в вакуум, исходящему из магнитоактивной плазмы, заметим, что это излучение при термодинамическом равновесии должно быть неполяризованным. (Магнитное поле не выводит плазму из состояния термодинамического равновесия, а равновесное излучение в вакууме неполяризовано.) Далее, равновесное излучение в вакууме можно представить в виде суммы двух некогерентных волн, эллипсы поляризации которых взаимно-перпендикулярны и имеют одинаковое отношение осей (см. [345], § 50). Интенсивность каждой из этих волн, очевидно, равна $\frac{I_\omega^{(0)}(T)}{2}$. С другой стороны, эллипсы поляризации нормальных волн при выходе из магнитоактивной плазмы также взаимно-перпендикулярны и имеют одинаковое отношение осей (см. § 11). Отсюда следует, что интенсивность равновесного излучения в вакууме может быть представлена как сумма интенсивностей нормальных волн, соответствующих рассматриваемой магнитоактивной среде. При этом каждой из нормальных волн отвечает интенсивность $\frac{I_\omega^{(0)}(T)}{2}$.

Предполагая, что нормальные волны в плазме не претерпевают частичного отражения и не взаимодействуют между собой (т. е. отвлекаясь от эффектов типа «утраивания» и вопроса о предельной поляризации; см. §§ 26, 28 и 29), приходим в результате к такой форме теоремы Кирхгофа для магнитоактивной среды:

$$I_{\omega 1,2}(T) = \frac{I_\omega^{(0)}(T)}{2}\left(1 - e^{-\tau_{1,2}}\right), \tag{36,28}$$

причем

$$\tau_{1,2} = \int \mu_{1,2}\cos\theta\, ds, \quad \mu_{1,2} = \frac{2\omega}{c}\varkappa_{1,2}, \tag{36,29}$$

где θ — угол между $\boldsymbol{v}_{\text{гр}}$ и $\boldsymbol{k}$.

Разумеется, при $\tau_1 \gg 1$ и $\tau_2 \gg 1$ имеем $I_\omega(T) = I_{\omega 1}(T) + I_{\omega 2}(T) = I_\omega^{(0)}(T)$, как это и должно быть. В выражении (36,29) появляется косинус угла θ между волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и направлением луча (вектором групповой скорости) $\boldsymbol{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$, потому что $\varkappa_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ характеризует поглощение вдоль направления $\boldsymbol{k}$, а при вычислении $\tau_{1,2}$ нужно знать поглощение вдоль луча (элемент траектории вдоль нормали $ds' = \cos\theta\, ds$, где ds — элемент траектории луча).

Поскольку в магнитоактивной плазме обычная теорема взаимности, вообще говоря, несправедлива, в (36,28) интенсивность излучения $I_{\omega 1,2}$ в каком-либо направлении определяется значением $\tau_{1,2}$ для волны того же направления. Поэтому, например, система типа оптического или радиовентиля будет сильно излучать в данном направлении только те волны, которые она сильно поглощает при их прохождении через вентиль именно в этом же направлении.

С помощью формулы (36,28) может быть выяснен вопрос о тепловом излучении изотермической короны при учете влияния магнитного поля. Кроме того, как и в изотропном случае, легко получить более общие выражения, относящиеся к слоистой среде с различными температурами в разных слоях (см., например, (36,20)).

§ 37. Распространение радиоволн в межзвездной среде

Поглощение радиоволн в межзвездном газе (замечания общего характера). Космическое радиоизлучение, если не говорить об излучении Солнца, планет и комет, генерируется в межзвездном пространстве, в отдельных галактических и внегалактических туманностях, а также в межгалактическом пространстве. Некоторая доля этого излучения носит тепловой характер, но основная его часть имеет неравновесное происхождение и образуется при ускорении входящих в состав космических лучей релятивистских электронов в слабых магнитных полях [297, 324—326, 346]. Кроме того, наблюдается монохроматическое космическое радиоизлучение атомов водорода и молекул OH.

Независимо от того, какова природа космического радиоизлучения, важно, что межзвездный электронный газ, несмотря на его разреженность, уже заметно поглощает радиоволны интересующего нас диапазона (космическое радиоизлучение наблюдается в диапазоне от сантиметровых волн до волн с длиной в сотни метров). Именно на этом вопросе мы здесь и остановимся, оставляя в стороне поглощение в атомарном водороде и OH (см. [324]), а также поглощение в межзвездной среде низкочастотных (магнитогидродинамических) волн (см. § 14).

Плотность электронов в межзвездном газе колеблется в широких пределах, но обычно не превосходит значения $N = 10$ *электронов*$\cdot$*см*$^{-3}$, а в большинстве областей Галактики значительно меньше этой величины (см. [325, 327]). Поэтому даже для самых длинных волн, о которых идет речь ($\lambda \sim 1$ *км*, $\omega \sim 2\cdot 10^6$), $1 - n^2 = 3{,}18\cdot 10^9 \frac{N}{\omega^2} \leqslant 10^{-2}$, т. е. при определении поглощения всегда можно считать, что $n = 1$. Поэтому, казалось бы, в качестве коэффициента поглощения μ нужно взять выражение (36,8) с $n = 1$, т. е. выражение *)

$$\mu = \frac{4\pi e^2 N \nu_{\text{эфф}}}{mc\omega^2} = \frac{4\pi e^6 N^2}{(\varkappa T)^2 mc\omega^2} \sqrt{\frac{8\varkappa T}{\pi m}} \ln\left(0,37\frac{\varkappa T}{e^2 N^{1/3}}\right) = \\ = \frac{0,58 N^2}{T^{3/2}\omega^2} \ln\left(220\frac{T}{N^{1/3}}\right) = \frac{1,46\cdot 10^{-2} N^2}{T^{3/2} f^2} \ln\left(220\frac{T}{N^{1/3}}\right). \quad (37,1)$$

Однако эта формула в случае сильно разреженного газа оказывается обычно неприменимой.

На первый взгляд может показаться, что такая неприменимость связана с несоблюдением условия $\lambda^3 \gg N^{-1}$ (другими словами, межзвездный газ настолько разрежен, что для коротких радиоволн в объемах $\sim \lambda^3$ имеется лишь небольшое количество электронов).

Такое заключение было бы, однако, неверно. Достаточно сказать, что и при несоблюдении неравенства $\lambda \gg N^{-1/3}$ проводимость σ и диэлектрическая постоянная ε также имеют смысл, поскольку при вычислении этих величин в § 6 методом кинетического уравнения никаких допущений о значении концентрации N не делалось и предполагалось лишь, что рассматривается область среды с размерами, значительно меньшими длины волны λ (поле в этой связи считалось однородным). Поэтому если в объеме $\sim \lambda^3$ мало частиц, т. е. $\lambda^3 N \lesssim 1$, то вычисляемые методом кинетического уравнения значения σ и ε имеют характер величин, усредненных по большому числу рассматриваемых маленьких объемов или же усредненных за длительное время $\Delta t \gg \frac{2\pi}{\omega}$ (иными словами, как это было указано в § 2, используются средние в статистическом смысле величины, что означает пренебрежение флуктуациями). Таким образом, если нас интересует поглощение волн на пути $L \gg \lambda$, то коэффициент поглощения μ, вычисленный из значений σ и ε, усредненных указанным образом, приобретает такой же смысл, как обычно. Таким образом, с этой точки зрения формула (37,1) сохраняется, если понимать под μ средний коэффициент поглощения, применимый для вычисления поглощения волны при прохождении ею достаточно большого пути. К такому же выводу можно прийти, не вводя вообще величин σ и ε, а оставаясь с самого начала на базе микроскопической теории и вычисляя коэффициент поглощения как среднее значение энергии, передаваемое волной отдельным электронам. Разумеется, здесь нет двух постановок вопроса, а лишь несколько различное освещение одной и той же задачи.

---

*) Температура межзвездного электронного газа, даже в наиболее горячих сильно ионизированных областях, порядка 10 000°, и, таким образом, условие (4,28) может считаться выполненным.

Итак, если бы формула (37,1) была сама по себе правильной, у нас не было бы основания проводить еще какие-либо вычисления. Однако, как это было указано в §§ 4, 6, формула (37,1), строго говоря, справедлива только, если

$$\left(\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\right)^{1/2} \gg 1. \qquad (37,2)$$

В случае же межзвездного газа имеет место обратное неравенство:

$$\left(\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\right)^{1/2} \ll 1, \qquad (37,3)$$

так как $N \leqslant 10$ и в интересных случаях $\omega > 2\cdot 10^6$ $\left(\text{при } N=1 \text{ и } \omega = 2\cdot 10^6 \text{ параметр } \left(\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\right)^{1/2} \approx 3\cdot 10^{-2}\right)$.

Проведем здесь поэтому вывод формулы для μ именно в случае (37,3). Смысл этого неравенства (37,3), как ясно из сказанного в § 4, состоит в том, что при его соблюдении путь, проходимый электроном за один период высокочастотного поля (поля радиоволны), много меньше дебаевского радиуса D. В силу этого, как подтверждается дальнейшими результатами, экранировка поля иона другими ионами и электронами несущественна и роль максимального параметра удара p_m играет расстояние, проходимое электроном за один период, т. е.

$$p_m \sim \frac{2\pi \bar{v}}{\omega} \sim \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}.$$

Вычисление коэффициента поглощения в сильно разреженной плазме. Задача состоит, таким образом, в вычислении коэффициента поглощения радиоволн, связанного с движением электронов в поле кулоновского центра. Вычислить коэффициент поглощения μ проще всего, воспользовавшись соотношениями Эйнштейна между вероятностью излучения и поглощения света. Действительно, с квантовой точки зрения поглощение радиоволн при соударениях есть процесс поглощения фотонов, сопровождающийся переходом электрона из данного состояния в непрерывном спектре в другое состояние, также принадлежащее непрерывному спектру, но отвечающее большей энергии. При переходе же из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией имеет место спонтанное и индуцированное излучение радиации. При этом спонтанное излучение такого типа есть не что иное, как известное тормозное излучение.

Метод коэффициентов Эйнштейна уже был изложен в § 12. Однако для удобства мы вновь приведем основные соотношения, причем в несколько иной форме.

Для любой системы число поглощаемых в единицу времени фотонов при переходе из состояния 1 в состояние 2 равно $Z_п = B_{12}N_1\rho_\omega$, где B_{12} — постоянный коэффициент, N_1 — число атомов в состоянии 1 и ρ_ω — плотность энергии излучения, отнесенная к интервалу частот $d\omega$. Число испускаемых фотонов при переходе из состояния 2 в состояние 1, равно $Z_и = (A_{21} + B_{21}\rho_\omega) N_2$, где A_{21} — вероятность спонтанного испускания в единицу времени и $B_{21}N_2\rho_\omega$ — число актов индуцированного испускания. Если статистические веса состояний 1 и 2 одинаковы, то справедливы соотношения Эйнштейна в виде:

$$B_{12} = B_{21}, \quad \frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}. \tag{37,4}$$

Отношение $\frac{A_{21}}{B_{12}}$ выписано здесь сразу для изотропного излучения в вакууме, причем A_{21} есть полная вероятность спонтанного перехода, уже не зависящая от направления фотона и двух состояний поляризации. Именно поэтому отношение $\frac{A_{21}}{B_{12}}$ согласно (37,4) в 8π раз больше, чем по формуле (12,19а), причем множитель 4π связан с переходом ко всем направлениям и множитель 2 появляется в силу учета двух состояний поляризации.

В случае тормозного излучения с частотой ω переход происходит между двумя состояниями непрерывного спектра, отличающимися на энергию $\hbar\omega$. При этом, если соблюдаются неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &\hbar\omega \ll \frac{mv^2}{2} \sim \varkappa T, \\ &\frac{e^2}{\hbar v} \gg 1 \left(\text{т. е. } T \sim \frac{mv^2}{\varkappa} \ll \frac{me^4}{\hbar^2\varkappa} \sim 3\cdot 10^5\right), \end{aligned}\right\} \tag{37,5}$$

для вычисления энергии, излучаемой электроном, движущимся в кулоновском поле, можно применять классическую теорию. При классическом расчете (см. [345], § 70) сначала вычисляется энергия $d\varepsilon_\omega$, излучаемая электроном, движущимся с определенным прицельным параметром p, а затем получается интересующая нас величина $2\pi \int d\varepsilon_\omega p\, dp = dq_\omega \hbar\omega$, равная энергии, излучаемой в интервале частот $d\omega$ электроном, движущимся с любым прицельным параметром. Общее выражение для $dq_\omega\hbar\omega$ довольно сложно, но оно сильно упрощается, если речь идет об излучении достаточно малых или достаточно больших частот. В нашем случае интерес представляет случай малых частот, когда соблюдается неравенство

$$\omega \ll \frac{mv^3}{e^2} \sim \frac{\varkappa T}{e^2}\sqrt{\frac{\varkappa T}{m}} \sim 10^8 T^{3/2}. \tag{37,6}$$

Даже при $T \sim 10^2$ (а меньшие температуры не представляют интереса) условие (37,6) означает, что $\omega \ll 10^{11}$, т. е. выполняется в радиодиапазоне.

При условии (37,6) имеем *):

$$dq_\omega \hbar\omega = \frac{16e^6}{3v^2c^3m^2} \ln \frac{2v^3m}{\gamma e^2\omega}\, d\omega, \qquad (37,7)$$

где v — скорость электрона на бесконечности, $\gamma = 1{,}781 = e^C = e^{0{,}577}$; написанное выражение обозначено через $dq_\omega \hbar\omega$, так как здесь dq_ω — эффективное сечение для тормозного излучения (по определению, dq_ω есть число излучаемых фотонов с частотой в интервале $\omega + d\omega$, ω вне зависимости от значения p и в условиях, когда поток падающих частиц равен единице). Число фотонов, испускаемых в единицу времени из-за тормозного излучения, равно $dq_\omega N_2 v$, где $N_2 v$ — поток падающих частиц. Если, кроме того, учесть, что в единице объема содержится N ионов, то полное число актов спонтанного излучения, отнесенное к единице объема газа, равно

$$Z_{\text{и, сп}} = \frac{16e^6NN_2}{3vc^3m^2\hbar\omega} \ln \frac{2v^3m}{\gamma e^2\omega}\, d\omega. \qquad (37,8)$$

Считая распределение скоростей электронов максвелловским $\left(f_{00}\, d\mathbf{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2\varkappa T}} v^2\, dv\right)$, для среднего значения $\overline{Z}_{\text{и, сп}} = \int Z_{\text{и, сп}} f_{00}\, d\mathbf{v}$ получаем:

$$\overline{Z}_{\text{и, сп}} = \frac{32e^6NN_2 \ln\left[\dfrac{2(\varkappa T)^{3/2}}{\gamma^{5/2}e^2m^{1/2}\omega}\right]}{3\sqrt{2\pi}\,(\varkappa T)^{1/2}m^{3/2}c^3\hbar\omega}\, d\omega. \qquad (37,9)$$

---

*) Заметим, что при соблюдении неравенства, обратного (37,6) имеем:

$$dq_\omega \hbar\omega = \frac{16\pi e^6}{3\sqrt{3}v^2c^3m^2}\, d\omega; \qquad (37,7\text{а})$$

в этой формуле, так же как в (37,7), предполагается, что электрон сталкивается с однократным ионом, движением которого пренебрегается. Если ион имеет заряд eZ, то в (37,7) и (37,7а) появляется множитель Z^2 $\left(\text{в (37,7) под логарифмом прибавляется также множитель } \frac{1}{Z}\right)$. Кроме того, в то время как формула (37,7) справедлива для ионов любого знака, формула (37,7а) относится лишь к случаю положительных ионов (при столкновении с отрицательным ионом в выражение (37,7а) нужно ввести множитель $e^{-\frac{2\pi e^2\omega}{mv^3}}$; см. [345], § 70).

Зная $\overline{Z}_{\text{и, сп}}$, с помощью (37,4) можно найти и полное число актов испускания:

$$\overline{Z}_{\text{и}} = \overline{Z}_{\text{и, сп}} + \overline{Z}_{\text{и, инд}} = \overline{(A_{21} + B_{21}\rho_\omega) N_2}.$$

Измеряемое на опыте поглощение равно, очевидно, разности между «истинным» поглощением и индуцированным испусканием. Если число электронов с энергиями 1 и 2 было бы одинаково, то, как ясно из предыдущего, поглощение полностью исчезает (в этом случае $B_{12}N_1\rho_\omega = B_{21}N_2\rho_\omega$, поскольку $B_{12} = B_{21}$ и $N_1 = N_2$). В состоянии теплового равновесия или если хотя бы одни электроны имеют максвелловское распределение скоростей, $N_2 - N_1 = N\frac{\hbar\omega}{\varkappa T}$ (предполагается выполненным первое условие (37,5); N — среднее число частиц в состояниях 1 и 2, которое в нашем случае в связи с осуществлением интегрирования по скоростям равно концентрации ионов или электронов N; см. также § 12). Учитывая сказанное и равенство (37,4), для числа актов измеряемого поглощения получаем:

$$\overline{Z}_{\text{п, эфф}} = \overline{Z}_{\text{п}} - \overline{Z}_{\text{и, инд}} = \overline{Z}_{\text{и, сп}} \frac{\pi^2 c^3 \hbar\omega}{\hbar\omega^3 \varkappa T}\rho_\omega.$$

Поглощаемая в единице объема энергия (для волны, распространяющейся по оси z) равна $\frac{dS}{dz} = -\overline{Z}_{\text{п, эфф}}\,\hbar\omega$, а поток падающего излучения есть $S = c\rho_\omega d\omega$, так как скорость излучения считается равной скорости света (показатель преломления $n = 1$). Отсюда находим окончательную формулу для коэффициента поглощения $\mu = -\frac{1}{S}\frac{dS}{dz}$:

$$\mu = \frac{32\pi^2 e^6 N^2 \ln\left[\frac{(2\varkappa T)^{3/2}}{2{,}115 e^2 m^{1/2}\omega}\right]}{3\sqrt{2\pi}(\varkappa Tm)^{3/2} c\omega^2} =$$

$$= \frac{0{,}58 N^2}{T^{3/2}\omega^2}\ln\left(\frac{4{,}6\cdot 10^5 T}{\omega^{2/3}}\right) \approx \frac{10^{-2}N^2}{T^{3/2} f^2}\left[17{,}7 + \ln\left(\frac{T^{3/2}}{f}\right)\right]. \quad (37{,}10)$$

Заметим, что эта формула, приведенная еще, например, в [19], тождественна с формулой, которая имеется в [135] и послужила объектом специального обсуждения в ряде статей.

Формулу (37,10) можно получить таким же методом, как в § 6, если положить в формуле (6,12) максимальный параметр удара p_m равным

$$p_{m0} = \frac{1}{15}\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{8\varkappa T}{\pi m}}, \quad (37{,}11)$$

т. е. равным $^{1}/_{15}$ пути, проходимого электроном, движущимся со средней тепловой скоростью, за один период изменения поля. Разумеется, получить этот результат с коэффициентом без проведенного исследования было бы невозможно. Отношение $\frac{p_{m0}}{D} \sim \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$, и, таким образом, в согласии с (37,2) и (37,3) именно значение параметра $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$ определяет области применимости формул (37,1) и (37,10). Эти формулы приводят к одному результату при

$$\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \sim 1. \qquad (37,12)$$

Однако не следует забывать, что формулы (37,1) и (37,10) относятся к предельным случаям $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \genfrac{}{}{0pt}{}{\gg}{\ll} 1$; поэтому сравнение их между собой при $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \sim 1$ имеет характер экстраполяции, которая показывает, что при $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \sim 1$ формулы практически совпадают. Появление параметров p_{m0} или D только под логарифмом приводит к тому, что при $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \sim 0{,}1 \div 10$ можно с достаточной точностью пользоваться любой из формул (37,1) и (37,10), так как в этом случае величина

$$\Delta = \frac{\mu\,(37{,}10) - \mu\,(37{,}1)}{\mu\,(37{,}1)} \approx \frac{\ln \frac{3\cdot 4\pi e^2 N}{m\omega^2}}{3\ln\left(220\,\frac{T}{N^{1/3}}\right)} \qquad (37,13)$$

весьма мала. Так, например, даже при $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1 - \varepsilon \sim 10^{-2}$ имеем $|\,\Delta\,| \approx 15\%$ только при $T = 10^4$ и $N = 10^9$; поскольку в короне $T \sim 10^6$ и $N < 10^9$, значения Δ фактически меньше. В ионосфере при $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \sim 10^{-2}$ и $T \sim 300$ получим $|\,\Delta\,| \approx 15\%$ при $N \sim 3\cdot 10^4$ (в этом примере $\omega \sim 10^8$, т. е. этот случай также «неблагоприятный», поскольку при меньшей частоте ω и таком же значении $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$ величина $|\,\Delta\,|$ будет меньше). Таким образом, использование везде, кроме настоящего параграфа, величины μ с $p_m = D$ (т. е. формулы (37,1) и ей аналогичных) не могло привести к ошибке, большей 5—10%. И только в случае межзвездного газа, как уже отмечалось, использование формулы (37,1) недопустимо.

Формула (37,10) относится к области температур $T \ll 3\cdot 10^5$ °K (см. (37,5)). На основе общих квантовомеханических выражений для μ, имеющихся в [347], легко получить выражение, пригодное в другом (квантовом) случае:

$$\frac{e^2}{\hbar v} \ll 1, \quad T \sim \frac{mv^2}{\varkappa} \gg \frac{me^4}{\hbar^2 \varkappa} \sim 3 \cdot 10^5\,^\circ\mathrm{K}. \tag{37,5a}$$

Именно, при этом условии (37,5а), но еще в нерелятивисткой области $\left(T \sim \frac{mv^2}{\varkappa} \ll \frac{me^2}{\varkappa} \sim 10^{10}\,^\circ\mathrm{K}\right)$

$$\mu = \frac{32\pi^2 e^6 N}{3\sqrt{2\pi}\,(\varkappa T m)^{3/2} c\omega^2} \ln \frac{4\varkappa T}{1{,}781 \cdot \hbar\omega} \approx \frac{10^{-2} N^2}{T^{3/2} f^2}\left[17{,}7 + \ln \frac{10^3 T}{f}\right]. \tag{37,10a}$$

Вся разница между выражениями (37,10) и (37,10а) сводится к замене под знаком логарифма выражения $\frac{(2\varkappa T)^{3/2}}{2{,}115 e^2 m^{1/2} \omega}$ на $\frac{4\varkappa T}{1{,}781 \hbar\omega}$.

Зная коэффициент поглощения μ, определяемый выражением (37,10) или (37,10а) можно вычислить оптическую толщину газа в любом направлении. Если вдоль всего пути N и T постоянны, то, разумеется,

$$\tau = \mu L = \frac{10^{-2} N^2}{T^{3/2} f^2}\left[17{,}7 + \ln \frac{T^{3/2}}{f}\right] L, \tag{37,14}$$

где L — длина пути и для определенности использовано выражение (37,10).

Электронная температура в сильно ионизированных областях межзвездного газа $T \sim 10^4$. Поэтому, если $\tau \geqslant 1$, Галактика должна быть источником теплового радиоизлучения с заметной интенсивностью. Эффективная температура этого излучения в некотором направлении согласно теореме Кирхгофа равна

$$T_{\text{эфф}} = T\left(1 - e^{-\tau(\lambda)}\right), \tag{37,15}$$

где $\tau(\lambda)$ — оптическая толщина в рассматриваемом направлении для интересующей нас длины волны λ. Удельная интенсивность этого излучения есть интенсивность черного излучения с температурой $T_{\text{эфф}}$, т. е.

$$I_f = \frac{2f^2}{c^2} \varkappa T_{\text{эфф}} = \frac{2}{\lambda^2} \varkappa T_{\text{эфф}} = \frac{2{,}76 \cdot 10^{-16}}{\lambda^2} T_{\text{эфф}} \frac{\textit{эрг}}{\textit{см}^2 \cdot \textit{стерад} \cdot \textit{гц} \cdot \textit{сек}} =$$
$$= \frac{2{,}76 \cdot 10^{-17}}{\lambda_{\textit{м}}^2} T_{\text{эфф}} \frac{\textit{вт}}{\textit{м}^2 \cdot \textit{стерад} \cdot \textit{Мгц}}. \tag{37,16}$$

Очевидно, при $\tau \gg 1$ имеем $T_{\text{эфф}} = T$, т. е. эффективная температура не может быть выше температуры T. Между тем на опыте для длинных волн ($\lambda \geqslant 10$ *м*) $T_{\text{эфф}} \geqslant 10^5$, и к тому же в большинстве случаев оптическая толщина Галактики $\tau < 1$. Поэтому тепловое излучение межзвездного электронного газа заведомо не может быть ответственно за все галактическое радиоизлучение. Как уже упоминалось, нетепловая составляющая космического радиоизлучения имеет магнитотормозную (синхротронную) природу, т. е. связана с ускорением релятивистских электронов в межзвездных полях.

Вращение плоскости поляризации радиоволн в межзвездной среде. Межзвездные магнитные поля $H^{(0)} \lesssim 10^{-5}$ *эрст* настолько слабы, что учет их влияния на распространение радиоволн кажется совершенно излишним (при $H^{(0)} \sim 10^{-5}$, гирочастота $\omega_H \sim 200$ и для волн с длиной $\lambda \sim 1 \div 10$ *м* имеем $\sqrt{u} = \frac{\omega_H}{\omega} \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$). Такое заключение действительно справедливо, если речь идет о вычислении оптической толщины или показателя преломления межзвездной плазмы. Но в одном вопросе даже слабое поле $H^{(0)} \lesssim 10^{-5}$ оказывается существенным. Именно это поле приводит к вращению плоскости поляризации и процессу деполяризации космического радиоизлучения.

Магнитотормозное радиоизлучение, возникающее в однородном магнитном поле, сильно поляризовано [325—327, 346]. Можно было бы ожидать поэтому заметной поляризации галактического радиоизлучения, принимаемого на земной поверхности. Фактически же поляризация хотя и наблюдается, но весьма невелика [348, 349]. Объясняется это двумя обстоятельствами: во-первых, в различных областях межзвездного пространства магнитные поля имеют различные направления и, таким образом, поляризованным должно быть излучение только от одного «облака» (области с квазиоднородным полем); во-вторых, вращение плоскости поляризации излучения в межзвездной среде приводит к деполяризации излучения в пределах каждого «облака» (для немонохроматического радиоизлучения, с которым и приходится иметь в данном случае дело, наблюдается также деполяризация, обусловленная дисперсией вращения плоскости поляризации, т. е. зависимостью угла поворота плоскости поляризации от длины волны) *).

Для распространяющихся в межзвездной среде радиоволн получим:

$$\sqrt{u} = \frac{\omega_H}{\omega} \ll 1, \quad v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ll 1, \quad s = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \ll 1, \qquad (37{,}17)$$

---

*) Плоскость поляризации космического радиоизлучения поворачивается также в земной ионосфере. На этом эффекте, как и вообще на влиянии ионосферы и межпланетной среды на космическое радиоизлучение, мы здесь останавливаться не будем (см. [332, 333, 306, 307]).

и, следовательно, условия «квазипродольного» распространения (11,36) принимают вид:

$$\frac{u\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha} \ll 1,\quad u\sin^2\alpha \ll 1. \tag{37,18}$$

Выше уже указывалось, что при $\lambda = 10$ *м* и $H^{(0)} \sim 10^{-5}$ параметр $u \sim 10^{-12}$ (даже при $\lambda = 1$ *км* $u \sim 10^{-8}$). Таким образом, условие «квазипродольности» в межзвездной среде соблюдается практически при всех углах α между $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и волновым вектором $\boldsymbol{k}$. Применяя поэтому формулу (11,37) и учитывая, что $u \ll 1$, $s \ll 1$, и $n \approx 1$, имеем:

$$n_2 - n_1 = n_- - n_+ \approx \sqrt{u}\, v\cos\alpha = \frac{\omega_H\omega_0^2}{\omega^3}\cos\alpha =$$
$$= \frac{4\pi e^3 NH^{(0)}}{m^2c\omega^3}\cos\alpha = 5{,}6\cdot 10^{16}\,\frac{NH^{(0)}\cos\alpha}{\omega^3}\,. \tag{37,19}$$

Отсюда следует, что по прохождении пути L плоскость поляризации волны поворачивается на угол

$$\Psi = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}(n_2 - n_1)\,L \approx 0{,}93\cdot 10^{6}\,\frac{NH^{(0)}\cos\alpha}{\omega^2}\,L \approx$$
$$\approx 2{,}35\cdot 10^{4}\,\frac{NH^{(0)}\cos\alpha}{f^2}\,. \tag{37,20}$$

К этой формуле легко прийти из (11,10), (11,12) с переходом к вещественным выражениям для полей E_x и E_y, представляющих собой сумму волн 1 и 2 с равными амплитудами.

Кроме того, разумеется, формула (37,20) получается из более общей формулы (11,40д) для вращения плоскости поляризации при квазипродольном распространении (в применении к межзвездной и межгалактической среде в формуле (11,40д) можно положить $n_1 + n_2 = 2$).

В неоднородной среде, в условиях применимости приближения геометрической оптики, в формулах (11,40в) — (11,40д) и (37,20) произведение $(n_2 - n_1)\,L$ нужно заменить на $\int\limits_0^L (n_2 - n_1)\,ds$. Таким образом, в (37,20) фактически фигурирует среднее значение величины $NH^{(0)}\cos\alpha$ вдоль луча зрения. При $H^{(0)} \sim 10^{-5}$, $N \sim 1$, $\cos\alpha \sim 1$ и $\omega \sim 6\cdot 10^{8}$ ($\lambda \sim 3$ *м*) имеем $\Psi \sim 3\cdot 10^{-17}L$, т. е. $\Psi \sim 1$ для $L \sim 3\cdot 10^{16}$ *см*; если же $N \sim 10^{-2}$ и $H^{(0)} \sim 3\cdot 10^{-6}$, то $\Psi \sim 1$ для $L \sim 10^{19} \approx 3$ парсека. Между тем области с квазиоднородным магнитным полем в Галактике, по-видимому, обычно больше 10^{19} *см* и, следовательно, даже при $N \sim 10^{-2}$ будет наблюдаться деполяризация излучения, идущего от одной области («облака»). Совершенно аналогичная ситуация имеет место в дискретных источниках (галактических и внегалактических туманностях). Например, поляризация длинноволнового радиоизлучения Крабовидной туманности практически равна нулю; в то же время магнитотормозное излучение этой туманности, лежащее в оптической части спектра и в диапазоне сантиметровых волн, частично поляризовано. Различие связано с тем, что угол Ψ обратно пропорционален ω^2 (см. (37,20)). Таким образом, наблюдаемая поляризация космического излучения в результате вращения плоскости поляризации в межгалактической, межзвездной и межпланетной среде, а также солнечной короне оказывается зависящей от среднего на луче зрения значения $NH^{(0)}\cos\alpha$. Тем самым появляется известная возможность оценивать N или $NH^{(0)}$ из поляризационных наблюдений (см., в частности, [350, 351]).

Рассмотренный эффект вращения представляет собой типичный пример, показывающий, что влиянием магнитного поля на свойства плазмы иногда нельзя пренебрегать даже в случае очень слабого поля.

Глава VIII

Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле

§ 38. Введение. Плазма в сильном однородном электрическом поле

О нелинейных эффектах в плазме со столкновениями и без столкновений. Одной из характерных особенностей плазмы, упомянутой в § 1, является появление нелинейных эффектов уже в сравнительно небольших и легко достижимых электрических полях. Более того, если подходить к электродинамике плазмы с достаточно общей точки зрения, то нелинейность процессов можно считать не исключением, а правилом. В самом деле, исходная система уравнений, включающая в себя кинетическое уравнение и уравнения поля, является нелинейной. Линеаризация этих уравнений, вообще говоря, возможна, но область применимости соответствующих линеаризованных уравнений не всегда является широкой. Эта область зависит от вида функции распределения при отсутствии поля, от числа соударений и т. д.

В плазме, которая при отсутствии поля была равновесной, различные возмущения, создаваемые внешним полем (например, полем волны), не имеют тенденции к нарастанию. Кроме того, при учете соударений все возмущения в такой плазме, если поле отсутствует (например, волна уже прошла рассматриваемую область плазмы), затухают со временем. Поэтому, как мы уже видели в § 4, а также убедимся ниже, в условиях, когда столкновения существенны, нелинейные эффекты в плазме связаны в первую очередь с ее разогревом.

Отметим, что разогрев плазмы полем облегчен ввиду медленности передачи энергии от электронов к тяжелым частицам (атомам, молекулам, ионам). Последнее обстоятельство в свою очередь обусловлено малостью отношения $\frac{m}{M}$ и вообще малостью коэффициента δ — средней относительной доли энергии, передаваемой электроном тяжелой частице при одном соударении. Вместе с тем электроны в плазме могут получать от поля большую энергию, поскольку длина свободного пробега и период колебаний поля могут быть значительны. Нагревание плазмы в электрическом поле приводит к изменению числа соударений $\nu_{\text{эфф}}(T)$, а значит, и проницаемости ε' или ε'_{ij}. В результате проницаемость начинает зависеть от напряженности поля. Тем самым ток проводимости $\boldsymbol{j}$ и поляризация $\boldsymbol{P}$ уже не пропорциональны полю $\boldsymbol{E}$, а это и отвечает нелинейности электродинамических процессов в среде (в частности, при этом нарушается принцип суперпозиции при распространении различных волн).

Значительно сложнее и многообразнее картина для неравновесной и бесстолкновительной плазмы. С одним примером такого типа мы уже столкнулись в § 8, когда речь шла о бесстолкновительном затухании плазменных волн.

Столкновениями можно обычно пренебречь, а формально даже считать их отсутствующими («бесстолкновительная» плазма), если частота соударений $\nu_{\text{эфф}}$ достаточно мала по сравнению с инкрементом нарастания колебаний или другим параметром, имеющим размерность частоты, характеризующим изменение состояния плазмы. При отсутствии или несущественности соударений нелинейность электромагнитных процессов в плазме в простейшем случае связана с изменением электронной концентрации. Например, в изотропной плазме для довольно широкого класса условий $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$. В продольных волнах $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho' = 4\pi e(N - N_i)$ и, очевидно, концентрация N изменяется в зависимости от поля волны $\boldsymbol{E}$. Тем самым изменяется и проницаемость $\varepsilon(N)$, т. е. возникает нелинейность; например, распространение продольной волны влияет на распространение поперечных волн.

В условиях, когда плазма неравновесна, а также учитывается влияние магнитного поля и пространственной дисперсии, открываются еще более широкие возможности для появления зависимости тензора ε'_{ij} от напряженности поля даже при отсутствии соударений. С эффектом изменения электронной концентрации под влиянием поля волны тесно связан (а по сути дела является его частным случаем) стрикционный эффект, возникающий в неоднородном электрическом поле. Мы имеем в виду воздействие на электрон средней силы $\boldsymbol{F} = \frac{\varepsilon - 1}{16\omega N} \nabla |\boldsymbol{E}|^2 = -\frac{e^2}{4\pi\omega^2} \nabla |\boldsymbol{E}|^2$ (см. (20,25) и [210, 211]), приводящей к перераспределению электронной концентрации в неоднородной плазме.

Нижеследующее изложение по существу ограничено случаем нелинейных эффектов, связанных с нагреванием плазмы. В применении к земной ионосфере, а также в некоторых других случаях именно такие эффекты особенно интересны. Что же касается нелинейных эффектов в бесстолкновительной плазме, то на них мы останавливаться не будем, за исключением обсуждения некоторых относящихся сюда вопросов в последнем разделе § 39.

С проблемами нелинейной электродинамики бесстолкновительной плазмы можно познакомиться по обзорам [79, 80, 82, 86, 174] и указанной там литературе (см. также дополнительную литературу в конце настоящей книги).

Условие слабости поля в плазме. Примеры. Обращаясь к плазме со столкновениями, с самого начала укажем, что влиянием поля на электромагнитные процессы в плазме можно в первом приближении пренебречь, если напряженность поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ удовлетворяет условию

$$E_0 \ll E_p = \sqrt{\frac{3m\varkappa}{e^2} T\delta\left(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф},\,0}\right)} = \\ = 4{,}2\cdot 10^{-10}\sqrt{\delta T\left(\omega^2 + \nu^2_{\text{эфф},\,0}\right)}\,\frac{в}{см}. \qquad (38.1)$$

Здесь $\nu_{\text{эфф},\,0}(T)$ — эффективное число соударений в равновесной плазме, которое использовалось везде в предыдущих главах, δ — эффективная (средняя) относительная доля энергии, передаваемой электроном при соударении с тяжелыми частицами (см. § 5; при упругих соударениях $\delta = \delta_{\text{уп}} = \frac{2m}{M}\Big)$; в (38,1) внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ считается для простоты отсутствующим.

Характерное поле E_p называют иногда «плазменным полем». В этом поле средняя энергия электронов изменяется на величину порядка $\varkappa T$ (см. ниже, а также § 4).

Поле, удовлетворяющее условию (38,1), называется слабым. В сильном поле ($E_0 \gtrsim E_p$) и, особенно, в очень сильном поле ($E_0 \gg E_p$) свойства плазмы уже существенно изменяются.

Для низких частот (при условии $\omega^2 \ll \nu^2_{\text{эфф},\,0}$) в ионосфере $E_p \sim 10^{-5} \div 10^{-7}$ *в/см*, поскольку $\nu_{\text{эфф},\,0} \sim 10^5$, $T \sim 300$, $\delta \sim 10^{-3}$ (в E-слое) и $\nu_{\text{эфф},\,0} \sim 10^3$, $T \sim 10^3$, $\delta \sim 10^{-4}$ (в F-слое). В солнечной короне, как и любой полностью ионизированной водородной плазме, $\delta = \delta_{\text{уп}} = \frac{1}{918}$. Поэтому в короне для низких частот при $\nu \sim 10$ и $T \sim 10^6$ поле $E_p \sim 10^{-7}$ *в/см*.

Для более плотной плазмы, или в области высоких частот $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф},\,0}$, «плазменное поле» E_p уже значительно больше. Так, в ионосфере при $\omega = 2\cdot 10^6$ ($\lambda_0 \sim 1$ *км*) $E_p \sim 10^{-3}$ *в/см* и при $\omega \sim 2\cdot 10^7$ ($\lambda_0 \sim 100$ *м*) $E_p \sim 10^{-2}$ *в/см*. В короне в диапазоне метровых волн $E_p \sim 10$ *в/см*, а при $\lambda_0 \sim 1$ *см* уже $E_p \sim 10^4$ *в/см*. Наконец, в лабораторных установках ($\nu_{\text{эфф},\,0} \sim 10^6 \div 10^9$, $T \sim 10^4$, $\delta \sim 10^{-1} \div 10^{-3}$) в поле низкой частоты $E_p \sim 10^{-3} \div 10$ *в/см*, а при высоких частотах $E_p \sim (10^{-11} - 10^{-10})\sqrt{T}\omega$ *в/см*.

Таким образом, в плазме, действительно, нелинейность может проявиться в полях, которые не представляются особенно большими с точки зрения значений, обычных для лабораторных условий или в волновой зоне мощных радиопередатчиков. В непроводящих чистых жидкостях и твердых телах (кроме сегнетоэлектриков) положение иное: здесь влиянием поля на свойства среды можно пренебречь вплоть до полей порядка $10^5 \div 10^7$ *в/см*, которые уже приближаются к полям атомного масштаба $E_a \sim \frac{e}{d^2} \sim$ $\sim 10^8$ *в/см* (d — размер атомов или постоянная решетки).

Лишь в последние годы в связи с созданием и усовершенствованием квантовых оптических генераторов (лазеров) широко развернулись исследования в области нелинейной оптики в применении к жидкостям и кристаллам (см. [352, 353]).

В металлах и полупроводниках электроны проводимости могут в известных пределах быть уподоблены электронам в рассматриваемой нами газообразной плазме (об этом уже упоминалось ранее). Однако область нелинейности в металлах практически трудно достижима, так как созданию в металле достаточно сильного поля препятствует большая электропроводность $\Big($кроме того, нелинейность уменьшается в связи с вырождением электронов, когда роль температуры T играет температура вырождения $T_0 \sim$ $\sim \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{m\varkappa}\Big)$. В полупроводниках нелинейность наблюдается без особого труда, и в качественном отношении здесь справедливы многие выводы, получающиеся при исследовании нелинейных явлений в газообразной плазме. Останавливаться на полупроводниках мы тем не менее не будем *).

Постановка задачи в случае сильного поля. Уравнения динамики плазмы сами являются нелинейными (см., например, уравнения (13,1) — (13,4) или (13,15) — (13,19)), и, таким образом, в широком плане, даже для плазмы со столкновениями, теория нелинейных явлений охватывает весьма значительную область физики плазмы. Ниже имеется в виду осветить существенно более узкий, но довольно ясно очерченный круг вопросов. Именно в настоящем параграфе будет рассмотрено влияние на нерелятивистскую и невырожденную плазму однородного электрического поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ с произвольными $\boldsymbol{E}_0$ и ω. Плазма может при этом находиться также во внешнем постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$. Макроскопические (гидродинамические) движения в плазме считаются отсутствующими.

---

*) Ссылки на некоторые работы, посвященные нелинейным эффектам в металлах и полупроводниках, можно найти в обзоре [31]; см. также [25, 352, 353]. В [31, 86] и дополнительной литературе, помещенной в конце книги, указаны многочисленные статьи, в которых рассматриваются нелинейные эффекты в плазме. В этой связи ниже будут даны ссылки лишь на сравнительно небольшое число работ.

Влияние поля на плазму в такой постановке задачи сводится к изменению функции распределения плазменных электронов по скоростям (эту функцию нужно найти в зависимости от $\boldsymbol{E}_0$, ω, $\boldsymbol{H}^{(0)}$ и параметров плазмы). Функция распределения тяжелых частиц будет считаться максвелловской с температурой T; в стационарном режиме, которым ограничимся, последнее предположение обычно оправдано.

Зная функцию распределения электронов по скоростям, можно найти среднюю кинетическую энергию электронов (или в случае максвелловского распределения — их температуру T_e) и плотность полного тока $\boldsymbol{j}'$. В частном случае слабого поля $T_e = T$, а ток $\boldsymbol{j}'$ пропорционален полю $\boldsymbol{E}$.

Выяснение свойств плазмы в однородном поле любой силы представляет интерес при анализе ряда вопросов физики газового разряда, проблемы разогрева плазмы и т. п. Вычисление тока $\boldsymbol{j}'$ является, кроме того, необходимым предварительным этапом при решении электродинамических задач. Сюда относятся, в частности, задачи о распространении в плазме электромагнитных волн. Нелинейные эффекты, возникающие при распространении волн, рассмотрены в § 39 в применении главным образом к ионосфере. Что же касается газового разряда (в том числе разряда на высоких и сверхвысоких частотах [355]), разогревания плазмы в неоднородном поле, теории нестационарных процессов (в том числе вопроса об «убегающих электронах») и некоторых других проблем, то их мы здесь касаться не будем.

Элементарная теория. В общем случае для решения поставленной задачи необходимо использовать кинетическое уравнение для электронной функции распределения. Об этом еще пойдет речь, но начать целесообразно с «элементарной теории», которая и в сильном поле часто оказывается достаточной не только для выяснения сути дела, но даже и для получения практически пригодных количественных формул.

В элементарной теории состояние плазмы характеризуется двумя величинами: средней скоростью направленного движения электронов $\dot{\boldsymbol{r}}$ и эффективной электронной температурой T_e. По определению скорости $\dot{\boldsymbol{r}}$ она связана с плотностью полного тока $\boldsymbol{j}'$ (см. (3.1)):

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = eN\dot{\boldsymbol{r}}. \qquad (38,2)$$

Что касается электронной температуры T_e, то она в элементарной теории определяется соотношением

$$\frac{3}{2}\varkappa T_e = \overline{K} = \frac{\overline{mv^2}}{2} \qquad (38,3)$$

(здесь усреднение ведется по всем электронам). Поскольку распределение электронов по скоростям далеко не всегда является максвелловским, введенная температура T_e имеет, вообще говоря, смысл некоторой эффективной электронной температуры.

Уравнение для $\dot{\boldsymbol r}$ уже было получено в § 3 и имеет вид:

$$m\frac{d\dot{\boldsymbol r}}{dt}=e\boldsymbol E+\frac{e}{c}[\dot{\boldsymbol r}\boldsymbol H^{(0)}]-m\nu_{\text{эфф}}(T_e)\,\dot{\boldsymbol r}. \qquad (38,4)$$

Это уравнение можно использовать в любом поле с той разницей, что в сильном поле $\nu_{\text{эфф}}$ уже зависит от поля. Действительно, $\nu_{\text{эфф}}=q_{\text{эфф}}(\bar v)\,N_{m,i}\bar v$ и, таким образом, эффективное число соударений зависит от средней скорости электронов $\bar v$ или, если угодно, температуры T_e. Так, при соударениях с молекулами (см. (6,10))

$$\nu_{\text{эфф}}=\nu_{m,0}\sqrt{\frac{T_e}{T}}, \qquad (38,5)$$

а при соударениях с ионами в первом приближении (см. (6,14))

$$\nu_{\text{эфф}}=\nu_{i,0}\left(\frac{T}{T_e}\right)^{3/2}, \qquad (38,6)$$

причем $\nu_{m,i,0}\equiv\nu_{\text{эфф},m,i,0}$ — эффективные числа соударений при столкновениях с молекулами (m) или ионами (i) в условиях, когда $T_e=T$.

В слабом поле как раз $T_e=T$ и величина $\nu_{\text{эфф}}$ в (38,4) является независимым параметром. В сильном поле плазма разогревается, причем, очевидно, T_e зависит от силы поля. В результате необходимо решать уравнение (38,4) совместно с уравнением для T_e. Последнее уравнение в рамках элементарных представлений получается просто из соображений о балансе энергии.

Электрическое поле производит над плазмой в единицу времени работу $\boldsymbol j'\boldsymbol E=eN\dot{\boldsymbol r}\boldsymbol E$. С другой стороны, электрон теряет при соударениях с тяжелыми частицами в единицу времени в среднем энергию $\delta\nu_{\text{эфф}}\left(\bar K-\frac{3}{2}\varkappa T\right)=\frac{3}{2}\varkappa\delta\nu_{\text{эфф}}(T_e-T)$; выбор именно такого выражения был обоснован в § 4 (см. (4,5)), причем в общем случае $\delta=\delta_{\text{эфф}}(T_e)\equiv\delta(T_e)$ и $\nu_{\text{эфф}}=\nu_{\text{эфф}}(T_e)$. Баланс энергии можно, следовательно, записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\varkappa NT_e\right)=\boldsymbol j'\boldsymbol E-\frac{3}{2}\varkappa\delta\nu_{\text{эфф}}N(T_e-T),$$

или

$$\frac{dT_e}{dt}=\frac{2e}{3\varkappa}\dot{\boldsymbol r}\boldsymbol E-\delta(T_e)\,\nu_{\text{эфф}}(T_e)\,(T_e-T). \qquad (38,7)$$

Совместное решение уравнений (38,4) и (38,7) и должно послужить для определения $\dot{\boldsymbol{r}}$ и T_e в зависимости от поля $\boldsymbol{E}$.

Успешное использование этих уравнений тесно связано с тем фактом, что в стационарных условиях $\delta \ll 1$. Благодаря этому даже в сильном электрическом поле хаотическая скорость электрона $\bar{v}$ много больше величины его направленной скорости $|\dot{\boldsymbol{r}}|$ (см. ниже, а также § 4). Именно по этой причине можно считать, что δ и $\nu_{\text{эфф}}$ в (38,4) зависят только от $T_e = \frac{\overline{mv^2}}{2}$, но не от $\dot{\boldsymbol{r}}$ *).

При отсутствии поля $\boldsymbol{E}$, если $\delta = \text{const}$ и $\nu_{\text{эфф}} = \text{const}$ (т. е. δ и $\nu_{\text{эфф}}$ не зависят от T_e), получим:

$$(T_e - T) = (T_e - T)_{t=0} e^{-\delta\nu_{\text{эфф}} t} \tag{38,8}$$

и

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(0)\, e^{-\nu_{\text{эфф}} t}, \tag{38,9}$$

причем в последнем случае для простоты принято также, что $\boldsymbol{H}^{(0)} = 0$ (с другой стороны, в (38,9) условие $\nu_{\text{эфф}} = \text{const}$ не обязательно и можно считать, что $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф}}(T_e)$, если только T_e не зависит от времени).

Из этих соотношений ясно видно, что время релаксации для температуры (энергии) $\tau_k = \frac{1}{\delta\nu_{\text{эфф}}}$ в $\frac{1}{\delta} \gg 1$ раз больше времени релаксации для направленной скорости (импульса) $\tau = \frac{1}{\nu_{\text{эфф}}}$. Ниже в связи с ограничением стационарными или квазистационарными процессами релаксационные решения (38,8) и (38,9) учитываться не будут. Поэтому в поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t$ при $\boldsymbol{H}^{(0)} = 0$, $\delta = \text{const}$ и $\nu_{\text{эфф}} = \text{const}$ получаем:

$$m \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}}{dt} = e\boldsymbol{E}_0 \cos \omega t - m\nu\dot{\boldsymbol{r}}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{e\boldsymbol{E}_0}{m(\omega^2 + \nu^2)} (\nu \cos \omega t + \omega \sin \omega t), \tag{38,10}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dT_e}{dt} &= \frac{e^2 E_0^2}{3m\varkappa(\omega^2 + \nu^2)} (\nu + \nu \cos 2\omega t + \omega \sin 2\omega t) - \delta\nu (T_e - T), \\ T_e - T &= \frac{e^2 E_0^2}{3m\varkappa\delta(\omega^2 + \nu^2)} \left\{ 1 + \frac{(\delta\nu^2 - 2\omega^2)\delta}{4\omega^2 + \delta^2\nu^2} \cos 2\omega t + \frac{\omega\nu(2 + \delta)\delta}{4\omega^2 + \delta^2\nu^2} \sin 2\omega t \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{38,11}$$

Здесь и во многих случаях ниже индекс «эфф» опускается, т. е. $\nu_{\text{эфф}} \equiv \nu$ и $\nu_{\text{эфф},0} \equiv \nu_0$.

---

*) Речь идет о стационарных или квазистационарных условиях. Если же процесс существенно нестационарен, то скорость $|\dot{r}|$ может быть сравнима или больше $\bar{v}$ (последнее имеет, например, место в течение некоторого времени после включения достаточно сильного постоянного электрического поля).

Для очень низких частот, когда

$$\omega \ll \delta\nu, \tag{38,12}$$

с точностью до малого члена порядка $\frac{\omega}{\delta\nu}$ получим:

$$T_e - T = \frac{2e^2E_0^2}{3m\varkappa\delta\nu^2}\cos^2\omega t = \frac{2e^2E^2(t)}{3m\varkappa\delta\nu^2}, \tag{38,13}$$

где учтено, что при условии (38,12) заведомо $\omega \ll \nu$, поскольку $\delta \ll 1$.

В другом предельном случае, когда

$$\omega \gg \delta\nu, \tag{38,14}$$

с точностью до членов порядка $\frac{\delta\nu}{\omega}$ и δ, имеем:

$$T_e - T \doteq \frac{e^2E_0^2}{3m\varkappa\delta(\omega^2+\nu^2)} = \frac{2\overline{E^2}}{3m\varkappa\delta(\omega^2+\nu^2)} \tag{38,15}$$

($\overline{E^2}$ — среднее значение величины $E^2 = E_0^2\cos^2\omega t$ по времени).

Таким образом, в случае (38,14) температура T_e в первом приближении постоянна; переменная составляющая T_e имеет частоту 2ω и малую амплитуду порядка $\frac{\delta\nu}{\omega}$ или δ. Факт приближенного постоянства электронной температуры (средней энергии) в переменном электрическом поле с частотой $\omega \gg \delta\nu$ вполне понятен. Дело просто в том, что время релаксации для температуры $\tau_k = \frac{1}{\delta\nu} \gg \frac{2\pi}{\omega}$, и поэтому температура не может существенно измениться за период колебаний поля $\frac{2\pi}{\omega}$. В результате температура и устанавливается на некотором среднем уровне (38,15), отклонения от которого малы.

Весьма существенно, что картина не изменяется и при учете зависимости δ и $\nu \equiv \nu_{\text{эфф}}$ от T_e. В этом случае уравнения (38,4) и (38,7) можно при условии (38,14) и $\delta \ll 1$ решать с помощью разложения в ряд по параметрам $\frac{\delta\nu}{\omega}$ и δ. Однако и без этого сразу ясно, что в первом приближении температура T_e постоянна и равна

$$T_e - T = \frac{e^2E_0^2}{3m\varkappa\delta(T_e)(\omega^2+\nu^2(T_e))}. \tag{38,16}$$

Это решение получается, очевидно, из (38,7) и (38,10) при пренебрежении членом $\frac{dT_e}{dt}$, который мал в силу условий $\delta \ll 1$ и $\frac{\delta\nu}{\omega} \ll 1$ (см. (38,14); в сказанном легко убедиться, вычисляя зависящую от времени часть T_e в первом приближении, причем выражение (38,16) играет роль нулевого приближения).

В постоянном поле $\boldsymbol{E} = \mathrm{const}$ в стационарном состоянии

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m\nu(T_e)}, \quad T_e = T + \frac{2e^2E^2}{3m\varkappa\delta(T_e)\,\nu^2(T_e)}, \tag{38,17}$$

т. е. температура T_e такая же, как средняя температура (38,16) при $\omega = 0$ и с заменой E_0 на $\sqrt{2}E$; это вполне понятно, поскольку при $\omega \ll \nu_{\text{эфф}}$ переменное поле в среднем действует как постоянное поле $E = E_{\text{эфф}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$.

Из (38,16) и (38,17) сразу же видно, что в стационарном поле любой частоты средняя скорость хаотического движения $v \sim \sqrt{\frac{\varkappa T_e}{m}}$ значительно больше $|\dot{r}|$. Действительно, согласно (38,16) даже при $T_e \gg T$

$$v \sim \sqrt{\frac{\varkappa T_e}{m}} \sim \frac{eE_0}{m\sqrt{\delta}\sqrt{\omega^2+\nu^2}}, \tag{38,18}$$

в то время как

$$|\dot{\boldsymbol{r}}| \leqslant \frac{eE_0}{m\sqrt{\omega^2+\nu^2}} \sim \sqrt{\delta}\,\bar{v} \tag{38,19}$$

(см. (38,10); сделанная оценка, разумеется, эквивалентна приведенной в § 4). В постоянном поле или в тех случаях, когда можно ограничиться приближением (38,16), т. е. считать температуру T_e постоянной, уравнение (38,4) может быть решено независимо от (38,7). При этом для поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$ получаем:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m}\left[\frac{\nu(T_e)}{\omega^2+\nu^2(T_e)} - i\,\frac{\omega}{\omega^2+\nu^2(T_e)}\right] = \frac{\boldsymbol{j}'}{eN}. \tag{38,20}$$

В подобных условиях, как и в § 3, удобно вместо $\boldsymbol{j}'$ или $\dot{\boldsymbol{r}}$ пользоваться диэлектрической проницаемостью ε и проводимостью σ, которые определяются соотношением (3,1) : $\boldsymbol{j}' = \left(\sigma + i\,\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\,\omega\right)\boldsymbol{E}$. Для ε и σ тогда получаются формулы (3,7), где $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф}}(T_e) \equiv \nu(T_e)$. В сильном поле при этом T_e зависит от E_0^2 и задача о распространении волн становится нелинейной.

Выражения (38,16) и (38,17), если зависимость δ и ν от T_e существенна, определяют T_e лишь неявным образом. Прежде чем получить отсюда окончательную формулу для T_e, запишем выражение (38,16) в виде:

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2 \frac{\omega^2+\nu_0^2}{\omega^2+\nu^2(T_e)}, \tag{38,21}$$

где введено «плазменное поле» E_p (см. (38,1)), $\nu_0 \equiv \nu_{\text{эфф},\,0}(T)$ и для простоты величина δ считается постоянной; последнее предположение принимается также ниже, поскольку оно часто вполне оправдано $\left(\text{например, для упругих ударов } \delta = \delta_{\text{уп}} = \frac{2m}{M}\right)$. Отсюда (из (38,21)) сразу же очевиден смысл критерия (38,1): в поле с амплитудой $E_0 \ll E_p$ плазма слабо возмущается и $T_e \approx T$.

Для соударений с молекулами воспользуемся выражением (38,5), которое подставим в (38,21). В результате (здесь $\nu_0 \equiv \equiv \nu_{\text{эфф}, m, 0}(T)$) получаем:

$$T_e = T\left[1 + \frac{\omega^2 + \nu_0^2}{2\nu_0^2}\left(\sqrt{1 + \frac{4\nu_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2}\left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2} - 1\right)\right]. \quad (38,22)$$

Зависимость T_e от $\frac{E_0}{E_p}$ при $\omega^2 \gg \nu_0^2$ и $\omega^2 \ll \nu_0^2$ изображена на рис. 38,1. Электронная температура при соударениях с молекулами монотонно возрастает с ростом поля.

При высоких частотах $\omega^2 \gg \gg \nu^2(T_e)$, как ясно из (38,16),

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \frac{e^2 E_0^2}{3m\varkappa\delta T\omega^2}. \quad (38,23)$$

Это выражение не зависит от ν и ν_0 и, следовательно, справедливо и при соударениях с ионами.

При частотах $\omega^2 \ll \nu_{0,i}^2$ в случае соударений с ионами возникает интересная особенность: связь T_e с $\frac{E_0}{E_p}$ перестает быть однозначной [30]. В результате в области $E_k^{\text{II}} \leqslant E_0 \leqslant E_k^{\text{I}}$ данному значению E_0 отвечают три значения стационарной температуры T_e (рис. 38,2). Устойчивыми являются, однако, только два из них: нижнее и верхнее. Отсутствие стационарного состояния при $E_0 > E_k^{\text{I}} = 0{,}28E_p$ ($\omega = 0$) обусловлено тем, что энергия, сообщаемая электронам полем, резко растет с ростом T_e $\left(\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E} \sim \frac{1}{\nu} \sim T_e^{3/2}\right)$, в то время как передаваемая ионам энергия падает $(\delta\nu T_e \sim T_e^{-1/2})$. Поэтому в достаточно сильном поле температура T_e

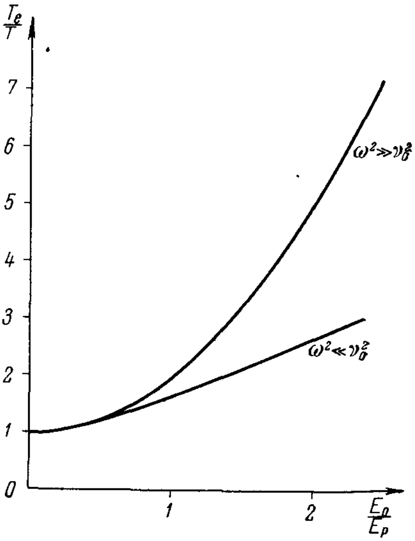


Рис. 38,1. Зависимость электронной температуры от напряженности электрического поля в случае слабоионизированной плазмы (электроны соударяются с молекулами).

должна начать расти до тех пор, пока число соударений $\nu(T_e)$ не станет меньше ω и появится возможность существования второго «высокотемпературного» стационарного состояния (38,23). Переход из низкотемпературного состояния в высокотемпературное показан на рис. 38,2 стрелкой. Обратный переход происходит в поле $E_k^{\rm II} \approx 1{,}7\left(\frac{\omega}{\nu_0}\right)^{2/3} E_p\,(\omega = 0) < E_k^{\rm I}$, т. е. должен наблюдаться гистерезис зависимости T_e от E_0. Неустойчивость низкотемпературного состояния плазмы (в случае соударений с ионами) имеет место и в постоянном поле $E > E_k = \frac{E_k^{\rm I}}{\sqrt{2}} = 0{,}2\,E_p\,(\omega = 0)$. Второе устойчивое состояние при этом, конечно, отсутствует. Кроме того, в некотором поле, еще большем E_k, перестает существовать стационарное состояние и для средней направленной скорости электронов $\dot{\mathbf{r}}$, с чем связана также проблема «убегающих» (runaway) электронов (подробнее см. [31, 34]).

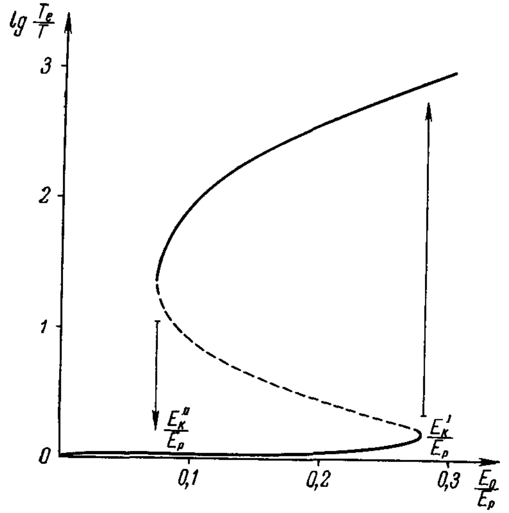


Рис. 38,2. Зависимость электронной температуры от напряженности электрического поля в случае соударений электронов с ионами ($\omega = 0{,}01\nu_0$).

Подчеркнем, что при анализе поведения электронного газа в плазме, находящейся в переменном электрическом поле, выше пренебрегалось нагревом нейтральных молекул и ионов. В адиабатически изолированной плазме ионы и молекулы, разумеется, всегда нагреваются; однако если их суммарная концентрация $N_i + N_m \gg N$, то нагрев этот медленный (квазистационарный), что обеспечивает справедливость проведенного рассмотрения. В полностью ионизированной плазме $N_m = 0$, $N_i = N$ (считаем ионы однократными) и ионы нагреваются вместе с электронами. Таким образом, в сильно ионизированной плазме область существования указанного выше эффекта нестационарности электронной температуры оказывается ограниченной (см. [356]).

При наличии внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ температура T_e в области (38,14) в первом приближении также оказывается постоянной, причем

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2 (\omega^2 + \nu^2) \left\{ \frac{\cos^2\beta}{\omega^2 + \nu^2(T_e)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin^2\beta}{2\left[(\omega - \omega_H)^2 + \nu^2(T_e)\right]} + \frac{\sin^2\beta}{2\left[(\omega + \omega_H)^2 + \nu^2(T_e)\right]} \right\}. \quad (38,24)$$

К этому результату приходим из (38,7) при $\frac{dT_e}{dt} = 0$ путем подстановки для $\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{j}'}{eN}$ выражения (10,9), которое при $T_e = \mathrm{const}$ сохраняется и для $\nu_{эфф} = \nu\,(T_e)$. В (38,24) β есть угол между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)}$; при $\omega_H = \frac{|e|H^{(0)}}{mc} \to 0$ формула (38,24) переходит, конечно, в (38,21). При $\omega \to \omega_H$ электронная температура резонансным образом возрастает (при $\beta \neq 0$), что связано просто с соответствующим возрастанием проводимости (см. (10,12) или (10,32)).

В рамках элементарной теории уравнения (38,4) и (38,7) являются исходными при анализе поведения плазмы в произвольном поле, в том числе при любой частоте ω или в случае более сложной зависимости от времени (например, если переменное поле промодулировано по амплитуде низкой частотой Ω). Именно эти уравнения обычно и используются в теории нелинейных эффектов в ионосфере (см. § 39), а также в ряде других случаев.

Точность результатов элементарной теории. Элементарная теория строго справедлива, только когда δ и ν одинаковы для всех электронов, т. е. не зависят от их скорости. В плазме же фактически $\nu = \nu\,(v)$ и $\delta = \delta\,(v)$. Замена ν и δ их эффективными значениями $\delta\,(T_e)$ и $\nu_{эфф}\,(T_e)$, как и само использование этих величин в уравнениях (38,4) и (38,7), не являются последовательными. Ясно, таким образом, что точность полученных результатов должна контролироваться на основе кинетической теории. Для слабого поля это и было сделано в §§ 6, 10. Из табл. 6,2 и 6,3, а также рис. 6,1 и 6,2 явствует, что неточность элементарных формул является наибольшей для постоянного поля ($\omega = 0$) и исчезает при $\omega^2 \gg \nu^2_{эфф}$ (последнее связано с тем, что в формулах элементарной теории число соударений $\nu_{эфф}$ выбирается как раз таким, каким оно получается в кинетической теории при $\omega^2 \gg \nu^2_{эфф}$). При $\omega = 0$ и соударениях с молекулами — твердыми шариками — элементарная теория при вычислении σ обладает точностью 13%, а при вычислении ε — точностью 51%. Для соударений с ионами при учете междуэлектронных соударений кинетический расчет приводит уже к появлению в выражениях для σ и ε множителей 1,95 и 4,59.

В сильном поле в условиях, когда $T_e = \text{const}$, точность элементарной теории в большинстве случаев такая же, как в слабом поле (конечно, при том же самом значении $\nu_{\text{эфф}}\,(T_e)$). Этот вывод связан прежде всего с возможностью и в сильном поле считать максвелловской симметричную часть функции распределения сильно ионизированной плазмы. При этом плазма в данном случае называется сильно ионизированной, если

$$\nu_{ee} \sim \nu_i \gg \delta\nu_m. \tag{38,25}$$

Здесь ν_m — число соударений электронов с молекулами и ν_{ee} — число междуэлектронных столкновений, которое одного порядка с числом столкновений электронов с ионами ν_i (ионы считаются положительными и однократными). При междуэлектронных ударах передача энергии и импульса происходит с одинаковой скоростью и, таким образом, условие (38,25) имеет простой смысл: время релаксации для перераспределения энергии между электронами $\tau_{ee} \sim \frac{1}{\nu_{ee}}$ меньше времени релаксации для передачи энергии электронами молекулам $\tau_k = \frac{1}{\delta\nu_m}$. Итак, при условии (38,25) величина T_e представляет собой не некоторую эффективную величину, равную $\frac{2}{3\varkappa}\overline{K}$, а действительно является кинетической температурой электронов.

В слабо ионизированной плазме, когда $\nu_{ee} \ll \delta\nu_m$, а также в промежуточном случае электронная функция распределения отлична от максвелловской. Но при этом $\nu_i \ll \nu_m$ и соударения происходят в основном с молекулами, т. е. сечение обычно слабо зависит от скорости; поэтому изменение функции распределения мало меняет эффективное число столкновений $\nu_{\text{эфф}}$ (при той же средней энергии $\overline{K} = \frac{3}{2}\varkappa T_e$, что и для максвелловского распределения скоростей).

Кинетическая теория. Помимо количественных уточнений, ясных из сказанного, кинетическая теория в стационарных условиях не вносит ничего качественно нового, пока мы интересуемся такими средними величинами как ток $\boldsymbol{j}' = eN\dot{\boldsymbol{r}}$ или температура $T_e = \frac{2}{3\varkappa}\overline{K}$. Положение, вообще говоря, изменяется для нестационарных процессов. Кроме того, интерес представляют не только средние величины, но и сама функция распределения. Наконец, кинетическую теорию, вообще говоря, нужно использовать, если нужно учитывать пространственную дисперсию, или, более общо, в случае существенной зависимости состояния плазмы от координат.

Кинетическое уравнение, служащее для определения функции распределения электронов $f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$, имеет вид (4,2):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\nabla_r f+\frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)\nabla_v f+S=0,$$

$$N=\int f\,d\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{j}'=e\int \boldsymbol{v}f\,d\boldsymbol{v},\quad \overline{K}=\frac{1}{N}\int\frac{mv^2}{2}f\,d\boldsymbol{v}. \qquad (38,26)$$

Кинетическое уравнение можно обычно существенно упростить. Для этой цели рассмотрим вначале изотропную плазму ($\boldsymbol{H}^{(0)}=0$), причем пространственный градиент параллелен полю $\boldsymbol{E}$. Тогда имеется лишь одно выделенное направление $\boldsymbol{E}$ (ось z), и функцию распределения можно разложить в ряд по полиномам Лежандра $P_k(\cos\alpha)$, где α — угол между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{v}$:

$$f(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(\cos\alpha)\,f_k(t, \boldsymbol{r}, v). \qquad (38,27)$$

Подставляя разложение (38,27) в уравнение (38,26), умножая на $P_{k'}(\cos\alpha)$ и интегрируя по углам с использованием соотношения $\boldsymbol{E}\nabla_v f=E\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{E\sin^2\alpha}{v}\frac{\partial f}{\partial(\cos\alpha)}$, получаем систему зацепляющихся уравнений для функций $f_0, f_1, f_2, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f_0}{\partial t}+\frac{v}{3}\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{eE}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 f_1)+S_0=0,\\
&\frac{\partial f_1}{\partial t}+v\left(\frac{\partial f_0}{\partial z}+\frac{2}{5}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+\\
&\qquad+\frac{eE}{m}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial v}+\frac{2}{5v^3}\frac{\partial}{\partial v}(v^3 f_2)\right\}+S_1=0,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial t}+v\left(\frac{2}{3}\frac{\partial f_1}{\partial z}+\frac{3}{7}\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)+\\
&\qquad+\frac{eE}{m}\left\{\frac{2}{3}v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f_1}{v}\right)+\frac{3}{7v^4}\frac{\partial}{\partial v}(v^4 f_3)\right\}+S_2=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (38,28)$$

Здесь $S_k=\frac{2k+1}{4\pi}\int P_k(\cos\alpha)\,S\,d\Omega$.

Переход к функциям f_k приводит к упрощениям, разумеется, только в случае, когда можно ограничиться немногими такими функциями. Конкретно, двумя функциями f_0 и f_1 можно ограничиться, если $\left|\frac{\partial f_0}{\partial z}\right|\gg\left|\frac{\partial f_2}{\partial z}\right|$ и $\left|\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|\gg\frac{1}{v^3}\left|\frac{\partial}{\partial v}(v^3 f_2)\right|$. В пространственно однородной плазме $\left(\text{при } \frac{\partial f}{\partial z}=0\right)$ в стационарных условиях $\frac{\partial f_1}{\partial t}=i\omega f_1$, $\frac{\partial f_2}{\partial t}\sim i\omega f_2$ и при предполагаемой малости функции f_2 имеем:

$$f_1=\frac{eE}{m(i\omega+\nu)}\frac{\partial f_0}{\partial v}$$

и

$$|f_2|\sim\left|\frac{eE}{m(i\omega+\nu)}v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}f_1\right)\right|\sim\left|\frac{e^2E^2}{m^2(i\omega+\nu)^2}v\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)\right|$$

(здесь учтено также, что $S_1=\nu f_1$ и $S_2\sim\nu f_2$ (см. ниже)). В результате необходимое условие $\left|\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|\gg\frac{1}{v^3}\left|\frac{\partial}{\partial v}(v^3f_2)\right|$ принимает вид $\left|\frac{e^2E^2}{m^2(\omega^2+\nu^2)}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(v^2\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)\right|\ll f_0$. Если ограничиться использованием этого условия для средней скорости $\bar{v}\sim\sqrt{\frac{\varkappa T_e}{m}}$ и положить $\frac{\partial f_0}{\partial v}\sim\frac{f_0}{\bar{v}}$, то приходим к требованию

$$\frac{e^2E_0^2}{m\varkappa T_e(\omega^2+\nu^2(T_e))}\ll 1. \tag{38,29}$$

В то же время условие слабости поля (38,1) отличается от (38,29) появлением в знаменателе величины δ. Поэтому поле может быть сильным, а условие (38,29) выполняться. Выражая в (38,29) T_e с помощью (38,16), приходим практически к условию $\delta\ll 1$. Это неравенство в интересующих нас случаях можно считать всегда выполненным. При наличии пространственных неоднородностей существенно также упомянутое условие $\left|\frac{\partial f_0}{\partial z}\right|\gg\left|\frac{\partial f_2}{\partial z}\right|$; считая для простоты поле отсутствующим или несущественным, из уравнения (38,28) для f_2 имеем $(i\omega+\nu)f_2\sim v\frac{\partial f_1}{\partial z}$, откуда получаем необходимое условие малости функции f_2 в виде:

$$\frac{\bar{v}}{\sqrt{\omega^2+\nu^2(T_e)}}\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right|\ll\left|\frac{\partial f_0}{\partial z}\right|. \tag{38,30}$$

Это условие уже приводилось в § 4. С ним связано еще одно условие, существенное для нестационарных процессов. Именно из первого уравнения (38,28) ясно, что в некоторых случаях $\frac{\partial f_0}{\partial t}\sim v\frac{\partial f_1}{\partial z}$ (это имеет место, например, при отсутствии поля и большом значении $\partial f_0/\partial t$, поскольку интеграл $S_0\sim\delta\nu f_0$ невелик). В подобных условиях из (38,30) приходим к условию

$$\left|\frac{\partial f_0}{\partial t}\right|\ll\sqrt{\omega^2+\nu^2(T_e)}\,f_0. \tag{38,31}$$

Здесь и в (38,30) частота ω, по существу, определяется как отношение $\omega\sim\left|\frac{\partial f_2}{\partial t}\right|\Big/f_2$. Для того чтобы можно было пренебречь функцией f_2, условие (38,31) должно выполняться и в пространственно однородном, но нестационарном случае при наличии электрического поля $\Big($в этом можно убедиться, оставляя в (38,28) только члены типа $\frac{\partial f_i}{\partial t}$, S_1, S_2 и члены с полем $E\Big)$.

При получении всех этих условий (38,29) — (38,31) не было проявлено большой тщательности, так как производилась замена величин на средние и т. п. Тем не менее вполне отчетливо видна весьма широкая область, в которой можно ограничиться двумя первыми уравнениями (38,28), отбросив члены, содержащие функцию f_2 *).

При наличии магнитного поля и любом направлении пространственного градиента эти уравнения записываются так [29, 31]:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\frac{v}{3}\operatorname{div}_r \boldsymbol{f}_1+\frac{e}{3mv^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2\boldsymbol{E}\boldsymbol{f}_1)+S_0=0, \tag{38,32}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial t}+v\nabla_r f_0+\frac{e\boldsymbol{E}}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}+\frac{e}{mc}[\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}_1]+\boldsymbol{S}_1=0. \tag{38,33}$$

Функция распределения f имеет при этом вид:

$$f(t,\ \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v})=f_0(t,\ \boldsymbol{r},\ v)+\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{f}_1(t,\ \boldsymbol{r},\ v)}{v}. \tag{38,34}$$

В слабом поле можно считать, что симметричная часть f, т. е. функция f_0, полем не возмущается и в однородном случае является максвелловской функцией f_{00} (см. (4,16)). Уравнение (38,33) становится тогда не зависимым от уравнения (38,32) и в форме (4,17) или (6,1) использовалось в §§ 4, 6, 10 и др.

Выше оставался нераскрытым явный вид интеграла столкновений S и его «моментов» S_k. Этот вопрос подробно освещен в статье [31], и здесь будет приведен только результат.

В силу того, что при каждом соударении электрона с тяжелой частицей $\delta \ll 1$, модуль скорости изменяется лишь незначительно, и в хорошем приближении

$$\boldsymbol{S}_1=\nu(v)\boldsymbol{f}_1,\quad \nu_{i,m}(v)=N_{i,m}v\int q(v,\ \theta)(1-\cos\theta)\,d\Omega \tag{38,35}$$

(этот результат уже приводился и комментировался в § 4, где указаны также все обозначения). Заметим, что с той же точностью

---

*) Говоря о возможности отбросить функцию f_2, мы имеем в виду вычисление основных («больших») членов. При вычислении же малых поправок порядка $\frac{\delta\nu}{\omega}$ отбросить функцию f_2 можно только, если $\frac{\delta\nu}{\omega} \gg \delta$ (см. [31]).

$$S_2 = \nu_2(v) f_2, \qquad \nu_2(v) = N_{i,m} v \int q(v, \theta)\,[1 - P_2(\cos\theta)]\,d\Omega;$$

очевидно, $\nu_2(v) \sim \nu(v)$ — это обстоятельство уже использовалось при получении условия (38,29).

В присутствии только упругих соударений $\left(\delta = \delta_{\text{уп}} = \frac{2m}{M}\right)$

$$S_0 = -\frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2 \delta_{\text{уп}} \nu(v)\left[\frac{\varkappa T}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_0\right]\right\}. \tag{38,36}$$

Здесь $\nu(v)$ — то же выражение, что и в (38,35), а T — температура тяжелых частиц, которые по предположению имеют максвелловское распределение скоростей. Как в (38,35), так и в (38,36) междуэлектронные соударения не учитываются (последнее законно при достаточно большом числе нейтральных частиц). Выражение (38,36) имеет ясный физический смысл. Во-первых, при пренебрежении обменом энергией с тяжелыми частицами соударения с этими частицами не могут изменить распределения электронов по модулю скорости. Поэтому понятна пропорциональность S_0 фактору δ. Во-вторых, если перейти к средним величинам и заменить $\frac{\partial}{\partial v}$ на $\frac{1}{v}$, то

$$S_0 \sim \delta_{\text{уп}} \nu \left(1 + \frac{T}{T_e}\right) f_0 \sim \delta_{\text{уп}} \nu f_0 = \frac{f_0}{\tau_k},$$

где τ_k — время релаксации для энергии. Временем $\tau_k = \frac{1}{\delta\nu}$ и должна определяться скорость изменения $f_0(v)$ из-за столкновений с тяжелыми частицами (более детальную интерпретацию выражения для S_0 и отдельных его частей можно найти в [31].

Сильно ионизированная плазма. В сильно ионизированной плазме, когда выполнено условие (38,25), а также в промежуточном случае пренебречь междуэлектронными соударениями, вообще говоря, уже нельзя, и в (38,32) и (38,33) нужно, помимо членов (38,35) и (38,36), внести соответствующие вклады $S_{1,ee}$ и $S_{0,ee}$, обусловленные междуэлектронными соударениями (см. [31]). О роли таких соударений при определении ε и σ, т. е. влиянии члена $S_{1,ee}$, речь уже была в § 6. Влияние междуэлектронных соударений на функцию f_0 несравненно сильнее. Дело в том, что $S_{0,ee} \sim \frac{f_0}{\tau_{ee}} \sim \nu_{ee} f_0$, поскольку при соударении между электронами энергия передается столь же эффективно, как и импульс. В связи со сказанным ясно, что в сильно ионизированной плазме (см. условие (38,25)) междуэлектронные соударения обеспечивают близость функции f_0 к максвелловской функции f_{00} с электронной температурой T_e. Сама эта температура определяется из того же уравнения (38,32), которое приводит к соотношению

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dT_e}{dt}=\frac{2}{3\varkappa N}\boldsymbol{j}'\boldsymbol{E}-\delta(T_e)\,\nu_{\text{эфф}}(T_e)(T_e-T),\\ &\nu_{\text{эфф}}(T_e)=\frac{2}{3\sqrt{2\pi}}\left(\frac{m}{\varkappa T_e}\right)^{5/2}\int\limits_0^\infty \nu(v)\,v^4\exp\left\{-\frac{mv^2}{2\varkappa T_e}\right\}dv,\\ &\delta(T_e)\equiv\delta_{\text{эфф}}(T_e)=\delta_{\text{уп}}+\delta_{\text{неуп}},\quad \delta_{\text{уп}}=\frac{2m}{M}.\end{aligned}\right\}\qquad(38{,}37)$$

Здесь $\delta_{\text{неуп}}$ — вклад в δ, связанный с неупругими соударениями. Соответствующее выражение, как и вывод уравнения (38,37), можно найти в [31]. На последнем моменте — выводе уравнения (38,37) — мы не останавливаемся, поскольку это уравнение совпадает с (38,7) и имеет очевидный смысл закона сохранения энергии. Единственное уточнение здесь связано со значением $\nu_{\text{эфф}}(T_e)$, которое теперь вполне определено и равно в точности выражению (6,9), конечно, с заменой T на T_e.

Плотность тока $\boldsymbol{j}'$ определяется асимметричной частью функции распределения:

$$\boldsymbol{j}'=e\int\boldsymbol{v}f\,d\boldsymbol{v}=e\int\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{f}_1)}{v}\,d\boldsymbol{v}=\frac{4\pi e}{3}\int v^3\boldsymbol{f}_1(v)\,dv.\qquad(38{,}38)$$

В сильно ионизированной плазме в однородном случае уравнение (38,33) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\boldsymbol{f}_1}{\partial t}+\frac{e\boldsymbol{E}}{m}\frac{\partial f_{00}(v)}{\partial v}+\frac{e}{mc}[\boldsymbol{H}\boldsymbol{f}_1]+\nu(v)\boldsymbol{f}_1=0,\\ &f_{00}=N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2\varkappa T_e}},\end{aligned}\right\}\qquad(38{,}39)$$

где не учитываются междуэлектронные соударения (при $\omega^2\gg\nu^2$ это законно; при $\omega^2\leqslant\nu^2$, таким образом, вносится ошибка порядка единицы; см. § 6).

При обсуждении уравнения (38,7) уже было выяснено, что в наиболее интересной области температура T_e постоянна с точностью до малых членов. В приближении, в котором $T_e=\text{const}$, очевидно, $\frac{\partial f_{00}}{\partial t}=0$, и легко видеть, что решение уравнения (38,39) можно записать в форме

$$\boldsymbol{f}_1=-\dot{\boldsymbol{r}}\frac{\partial f_{00}}{\partial v},\quad m\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}}{dt}=e\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{H}]-m\nu(v)\,\dot{\boldsymbol{r}},\qquad \boldsymbol{j}'=eN\dot{\boldsymbol{r}}.\qquad(38{,}40)$$

Отличие между этим уравнением для вводимой таким путем величины $\dot{\boldsymbol{r}}$ и уравнением (38,4) состоит в замене $\nu_{\text{эфф}}(T_e)$ на $\nu(v)$. В случае постоянства ν оба уравнения совпадают; тем самым доказывается сделанное ранее утверждение о том, что элементарная теория дает точный результат при $\nu(v) = \text{const}$.

При $T_e = \text{const}$ вычисление тока j' в сильном поле формально совпадает с его вычислением в слабом поле. Другими словами, для ε'_{ij} получаются выражения (10,32), но с $\nu_{эфф} = \nu_{эфф}(T_e)$, причем T_e зависит от E_0^2. Само стационарное значение T_e, согласно (38,37), пропорционально j', и, следовательно, учет распределения по скоростям приводит к появлению множителя $K_\sigma\left(\frac{\omega}{\nu_{эфф}(T_e)}\right)$, введенного в § 6 (см. (6,25)). В результате, например, выражение (38,21) заменяется следующим:

$$\frac{T_e}{T} = 1 + \left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2 \frac{\delta(T)}{\delta(T_e)} \frac{\omega^2+\nu_0^2}{\omega^2+\nu^2(T_e)} K_\sigma\left(\frac{\omega}{\nu}\right). \tag{38,41}$$

Здесь E_p — плазменное поле (см. (38,1)), $\nu_0 \equiv \nu_{эфф}(T)$ и $\nu(T_e) \equiv \equiv \nu_{эфф}(T_e)$, причем $\nu_{эфф}(T_e)$ определяется формулой (38,37). При переходе к (38,21) нужно положить $K_\sigma = 1$ и $\delta = \text{const}$ (последнее было предположено при переходе от (38,16) к (38,21)).

Слабо ионизированная плазма. В слабо ионизированной плазме, когда

$$\nu_{ee} \ll \delta\nu \approx \delta\nu_m \tag{38,42}$$

($\nu_m \equiv \nu_{эфф,\,m}(T_e)$ — эффективное число соударений электронов с молекулами), междуэлектронными соударениями можно пренебречь даже в уравнении (38,32) для f_0. При $T_e \approx \text{const}$ (т. е. $\frac{\partial f_0}{\partial t} \approx 0$) решение уравнения (38,33) имеет вид (38,40) с $\frac{\partial f_0}{\partial v}$ вместо $\frac{\partial f_{00}}{\partial v}$. Подставляя это решение в (38,32), получаем *):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\left[\left(\delta_{уп}\nu(v)\frac{\varkappa T}{m} + \frac{2e\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}}{3m}\right)\frac{\partial f_0}{\partial v} + \delta_{уп}v\nu(v)f_0\right]\right\} = 0, \tag{38,43}$$

где учитываются только упругие соударения (использовано выражение (38,36)).

Как в постоянном или квазистационарном электрическом поле, когда $\omega \ll \delta\nu$, так и в быстропеременном поле (при $\omega \gg \delta\nu$) в первом приближении $\frac{\partial f_0}{\partial t} = 0$ и, кроме того, в (38,43) можно положить $\dot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{E}=\frac{eE_0^2\nu}{2m(\omega^2+\nu^2)}$. В результате в этом приближении получаем:

---

*) В условиях, когда $T_e \approx \text{const}$, как указано, можно пренебречь производной $\frac{\partial f_0}{\partial t}$ при переходе от (38,39) к (38,40). Однако в уравнении для самой функции f_0, которая медленно изменяется во времени, производную $\frac{\partial f_0}{\partial t}$ в общем случае нужно оставить. Заметим также, что для немаксвелловского распределения, конечно, под T_e понимается величина, пропорциональная средней энергии $\overline{K}$.

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{v^2\left[\left(\delta_{\text{уп}}\nu\frac{\varkappa T}{m}+\frac{e^2E_0^2\nu}{3m^2(\omega^2+\nu^2)}\right)\frac{\partial f_0}{\partial v}+\delta_{\text{уп}}v\nu f_0\right]\right\}\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}(v^2 j_v)\equiv 0. \qquad (38{,}43\text{а})$$

Умножая это уравнение на v^2dv и интегрируя его от нуля до v, убеждаемся, что $v^2 j_v(v)=0$, поскольку при отсутствии источников $[v^2 j_v(v)]_{v=0}=0$. Интегрируя теперь по скоростям уравнение $j_v(v)=0$, находим функцию f_0:

$$f_0=C\exp\left\{-\int_0^v\frac{mv\,dv}{\left\{\varkappa T+\frac{e^2E_0^2}{3m\delta_{\text{уп}}(\omega^2+\nu^2(v))}\right\}}\right\}. \qquad (38{,}44)$$

Здесь C — постоянная, определяемая из условия нормировки:

$$\int f_0\,d\boldsymbol{v}=N.$$

В очень сильном постоянном поле из (38,44), заменяя также E_0^2 на $2E^2$, получаем распределение

$$f_0=C\exp\left\{-\int_0^v\frac{3m^2\delta_{\text{уп}}\nu^2(v)\,v\,dv}{2e^2E^2}\right\}=C\exp\left\{-\frac{3m^3v^4}{4e^2Ml^2E^2}\right\}, \qquad (38{,}45)$$

где при переходе к последнему выражению положено $\delta_{\text{уп}}=\frac{2m}{M}$ и $\nu=\nu_m=\pi a^2N_m v=\frac{v}{l}$ (соударения с молекулами). Полученное распределение Дрювестейна (38,45) при больших скоростях электронов сильно отличается от максвелловского. При учете неупругих соударений в (38,44) нужно заменить $\delta_{\text{уп}}$ на $\delta(v)$ (подробнее см. [31]).

Зная функцию f_0, уже легко найти функцию f_1 с помощью уравнений (38,39) и (38,40) (с заменой f_{00} на f_0). Представляющие интерес при решении электродинамических задач величины $\overline{K}$, ε и σ выражаются при этом так:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{K}=\frac{2\pi m}{N}\int_0^\infty v^4 f_0\,dv,\quad \varepsilon=1+\frac{(4\pi e)^2}{3}\int_0^\infty\frac{v^3}{\omega^2+\nu^2(v)}\frac{\partial f_0}{\partial v}\,dv,\\&\sigma=-\frac{4\pi e^2}{3}\int_0^\infty\frac{\nu(v)\,v^3}{\omega^2+\nu^2(v)}\frac{\partial f_0}{\partial v}\,dv.\end{aligned}\right\} \qquad (38{,}46)$$

Все эти величины являются интегральными и поэтому сравнительно слабо зависят от вида функции f_0 и, в частности, от зависимости f_0 от скорости в «хвосте» распределения. Понятно поэтому, что $\overline{K}$, ε и σ в слабо ионизированной плазме обычно мало отличаются от соответствующих значений, вычисленных с помощью максвелловской функции $f_{00}(T_e)$ с $T_e = \frac{2}{3\varkappa}\overline{K}$. Например, в сильном постоянном поле при упругих соударениях с молекулами для слабо ионизированной плазмы $\overline{K} = 0{,}604\,\frac{elE}{\sqrt{\delta_{\text{уп}}}}$, а для сильно ионизированной плазмы $\overline{K} = 0{,}613\,\frac{elE}{\sqrt{\delta_{\text{уп}}}}$. В подобных условиях вполне естественно, что и для промежуточного случая $\nu_{ee} \sim \delta\nu$ также получаются результаты, близкие к имеющим место для сильно ионизированной плазмы, когда $\nu_{ee} \gg \delta\nu$. Итак, мы пришли к тем же выводам, которые уже были сделаны несколько раньше при обсуждении вопроса о границах применимости элементарной теории.

В заключение заметим, что соблюдение критерия слабости поля (38,1) гарантирует возможность считать возмущение функции распределения малым *), но, разумеется, не обеспечивает полного отсутствия нелинейных эффектов. Дело в том, что эти эффекты в силу их качественной специфики могут быть замечены и в условиях, когда функция f_0 мало отличается от максвелловской (другими словами, условие (38,1) обеспечивает малость нелинейных эффектов, а возможность полностью ими пренебречь определяется постановкой задачи и точностью измерений). В подобных условиях — в слабом поле, но при необходимости учитывать начинающие появляться нелинейные эффекты, весьма удобным и эффективным иногда оказывается метод возмущений (последовательных приближений). В этом методе полагают $f_0 = f_{00} + f_{01}$, причем $|f_{01}| \ll f_{00}$, где f_{00} — максвелловское распределение. Такой подход подробно изложен в [32], § 64 (см. также [357, 358]).

Изменение концентрации электронов в результате нагрева плазмы в неоднородном поле. Выше рассматривалось воздействие на плазму однородного переменного электрического поля. Предположим теперь, что поле слабо неоднородно, т. е. что амплитуда переменного электрического поля E_0 мало меняется на длине свободного пробега электронов l:

$$l\,|\operatorname{grad} E_0| \ll E_0. \tag{38,47}$$

Частоту поля ω будем предполагать достаточно высокой, так что выполнено условие $\omega \gg \delta\nu$ (см. (38,14)).

---

*) Речь идет о возмущении основной части функции распределения $\left(\text{область скоростей } v \lesssim \sqrt{\frac{\varkappa T}{m}}\right)$.

При выполнении условий (38,4) и (38,14) для описания среднего во времени (усредненного по частоте ω) распределения концентрации и температуры электронов и ионов можно воспользоваться квазигидродинамическими уравнениями (13,15) — (13,18) *).

. Не останавливаясь на соответствующих вычислениях [359], поясним лишь, в чем состоит указанная особенность обсуждаемого случая.

В неоднородном поле нагрев также неоднороден — электронная температура $T_e(\boldsymbol{r})$ зависит, в частности, от $E_0^2(\boldsymbol{r})$, где поле $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cos\omega t$. Но в гидродинамическом приближении давление электронов $P_e=\varkappa NT_e$, и таким образом, при неизменной концентрации N неоднородный разогрев плазмы привел бы к появлению градиента давления.

При соблюдении условия квазинейтральности, которое обычно очень хорошо выполняется в ионосферных условиях, $N_i=N$ и условие равновесия плазмы имеет вид

$$\nabla(P_e+P_i)=0,\quad P_e=\varkappa NT_e,\quad P_i=\varkappa NT_i. \tag{38,48}$$

Отсюда

$$N=\frac{N_0(T_{e,0}+T_{i,0})}{T_e+T_i}, \tag{38,49}$$

где N_0, $T_{e,0}$ и $T_{i,0}$ — значения концентрации и температуры в невозмущенной плазме.

Таким образом, в неоднородном электрическом поле в результате разогрева плазмы происходит перераспределение электронной концентрации. Поскольку изменение концентрации N зависит от поля волны $E_0(\boldsymbol{r})$, само это поле определяется уже из нелинейных уравнений (эффект самовоздействия; см. § 39). Кроме того, разумеется, рассматриваемое поле $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cos\omega t$ через изменение концентрации $N(\boldsymbol{r})$ влияет на распространение в плазме и других волн, в том числе слабых.

Отметим, что обсуждаемый нелинейный эффект, возникающий лишь при учете соударений (см., в частности, условие (38, 47)), может значительно превосходить, так сказать, бесстолкновительный стрикционный эффект, связанный с действием силы $\boldsymbol{F}=\frac{\varepsilon-1}{16\pi N}\nabla|\boldsymbol{E}|^2$ (см. § 20 и, в особенности, [211]).

---

*) Выше было показано, что хотя функция распределения электронов в электрическом поле в слабо ионизированной плазме может существенно отличаться от максвелловской, при вычислении средних величин (таких, как температура или ток) с хорошей точностью можно пользоваться максвелловской функцией распределения.

§ 39. Нелинейные эффекты при распространении радиоволн в плазме (ионосфере)

Введение. Нелинейность электромагнитных процессов в плазме ярко проявляется, в частности, при распространении достаточно мощных радиоволн. Так, при распространении одной волны вследствие влияния ее на плазму имеет место нелинейный эффект «самовоздействия», состоящий в изменении поглощения и фазы волны, а также появления обертонов основной частоты. При распространении нескольких волн нарушается принцип суперпозиции: падающая и отраженная, обыкновенная и необыкновенная и вообще любые две волны перестают быть независимыми — они нелинейным образом взаимодействуют в силу того, что сами меняют свойства среды (плазмы), в которой распространяются. Подобное нелинейное взаимодействие, имеющее место уже в однородной среде, разумеется, совершенно отлично от «взаимодействия» нормальных волн, обсуждавшегося в § 20 и др.

В слабом поле (при условии (38,1)) влиянием поля на плазму обычно пренебрегают, как мы и поступали в гл. I — VII. Важно, однако, еще раз подчеркнуть, что даже в слабом поле могут наблюдаться некоторые небольшие нелинейные эффекты, которые выделяются в силу своей качественной специфики. Для выявления таких слабых нелинейных эффектов естественно воспользоваться методом последовательных приближений (см. [32], § 64). С другой стороны, нелинейные эффекты в слабом поле могут, конечно, быть рассмотрены и на основе общих выражений, справедливых при любом значении отношения $\frac{E_0}{E_p}$. При этом для сильных $\left(\frac{E_0}{E_p} \gtrsim 1\right)$ и, особенно, для очень сильных полей $\left(\frac{E_0}{E_p} \gg 1\right)$ нелинейные явления уже ярко выражены, и обычной линейной теорией распространения радиоволн, вообще говоря, нельзя пользоваться даже в первом приближении.

Основные результаты нелинейной теории распространения радиоволн в плазме кратко излагаются ниже в применении преимущественно в земной ионосфере. Поэтому в дополнение к сказанному в начале § 38 приведем в табл. 39,1 значения «плазменного поля» E_p для ионосферы, а также максимальные изменения электронной температуры в поле станций разной мощности (учитываются только столкновения электронов с молекулами, поле E_0 на границе ионосферы определяется по формуле (34,22) с $\sin\theta = 1$; $\delta = 2\cdot 10^{-3}$ для D- и E-слоев и $\delta = 10^{-4}$ для F-слоя). Из таблицы видно, что мощные волны средне- и длинноволнового диапазонов могут существенно изменить энергию (температуру) электронов в нижней части E-слоя. Напротив, воздействие на ионосферу

Таблица 39,1

Электронная температура T_e в поле станций различной мощности

Ионосферный слой	ω	E_p, $\frac{мв}{м}$	Значения $\frac{T_e}{T}$						
			мощность 10 *квт*	100 *квт*	500 *квт*	1000 *квт*	5000 *квт*	10^5 *квт*	10^6 *квт*
D-слой (днем; высота 60 *км*)	$\leqslant 3\cdot 10^6$	325	1,002	1,02	1,1	1,2	1,7	4	15
$\nu_0 = 10^7$ *сек*$^{-1}$	10^7	470	1,001	1,01	1,05	1,1	1,4	—	—
$T = 300$	10^8	3200	1,00002	1,0002	1,001	1,002	1,01	—	—
Нижняя часть E-слоя (ночью; высота 90 *км*)	$\leqslant 10^5$	19	1,3	2,4	4,6	6,7	13	55	170
	10^6	32	1,1	1,8	3,7	5,3	12	—	—
$\nu_0 = 7\cdot 10^5$	$2\cdot 10^6$	56	1,04	1,3	2,5	3,7	10	—	—
$T = 200$	$5\cdot 10^6$	130	1,006	1,06	1,3	1,6	3,8	—	—
	10^7	270	1,002	1,02	1,08	1,2	1,8	—	—
	10^8	2700	1,00002	1,0002	1,0008	1,002	1,008	—	—
F-слой (высота 300 *км*)	$\leqslant 3\cdot 10^2$	0,02	—	—	—	—	—	—	—
$\nu_0 = 10^3$	10^8	1900	1,000004	1,00004	1,0002	1,0004	1,002	—	—
$T = 2000$									

коротких волн, а также средних и длинных волн небольшой мощности незначительно.

Основные соотношения. Имея в виду произвольную немагнитную среду, запишем уравнения поля в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}'+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\\&\operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho,\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0;\end{aligned}\right\}\qquad(39{,}1)$$

здесь $\boldsymbol{D}=\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{j}=\hat{\sigma}\boldsymbol{E}$, причем $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ — некоторые операторы, зависящие от свойств среды и являющиеся линейными операторами лишь в достаточно слабом поле. В плазме

$$\boldsymbol{j}'=\hat{\sigma}\boldsymbol{E}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\hat{\varepsilon}-1}{4\pi}\boldsymbol{E}\right]=e\int\boldsymbol{v}f(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{v}.\qquad(39{,}2)$$

Несмотря на то, что поле волны неоднородно в пространстве, при определении функции f, а значит, и $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$, эту неоднородность обычно можно не учитывать, т. е. пренебречь членом $\boldsymbol{v}\nabla_r f$ в уравнении (38.26). Тем самым предполагается, что операторы $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ локальны, т. е. плотность тока $\boldsymbol{j}'$ в данной точке определяется полем $\boldsymbol{E}$ в той же точке. В слабом поле такое предположение отвечает пренебрежению пространственной дисперсией *). В сильном поле локальное приближение справедливо, если амплитуда поля слабо изменяется не только на длине свободного пробега $l=\frac{\bar{v}}{\nu_{\text{эфф}}}$, но и на большей длине релаксации для энергии $\frac{l}{\sqrt{\delta}}=\frac{\bar{v}}{\nu_{\text{эфф}}\sqrt{\delta}}$ $\Bigl($длина $\frac{l}{\sqrt{\delta}}=\sqrt{\frac{l\bar{v}}{\delta\nu_{\text{эфф}}}}\sim\sqrt{D\tau_k}$ — диффузионный путь, проходимый электроном за время $\tau_k=\frac{1}{\delta\nu_{\text{эфф}}}$; см. также [359]$\Bigr)$.

При распространении волн радиодиапазона поле можно считать быстропеременным в том смысле, что выполняется условие

$$\frac{\delta\nu_{\text{эфф}}}{\omega}\ll 1.\qquad(39{,}3)$$

В ионосфере это условие выполнено для волн с длиной $\lambda<100\div1000$ *км*, в солнечной короне при $\lambda<10^5$ *км*, а в электронных приборах и экспериментальных установках обычно при $\lambda < 10 \div 100$ *м*.

---

*) Термин «пространственная дисперсия» связан с возможностью введения величин $\varepsilon_{ij}(\omega,\boldsymbol{k})$ и $\sigma_{ij}(\omega,\boldsymbol{k})$, зависящих не только от ω (временная дисперсия), но и от волнового вектора k. В нелинейной теории использование метода Фурье ограничено и, вообще говоря, $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\sigma}$ являются сложными операторами, в применении к которым термин «дисперсия», по крайней мере, нуждается в уточнении.

При соблюдении неравенства (39,3), как мы видели в § 38, электронная температура T_e в поле любой напряженности (в стационарном состоянии) в первом приближении постоянна и плотность тока $\boldsymbol{j}'$ изменяется с частотой поля $\boldsymbol{E}$. Поэтому при выполнении также упомянутого условия локальности задача о распространении волн может быть разделена на две. Во-первых, как и в слабом поле при отсутствии пространственной дисперсии, находится ток $\boldsymbol{j}'$ в зависимости от $\boldsymbol{E}$; во-вторых, решаются уравнения поля с полученным ранее током.

Именно в таком приближении и будет ниже проведено рассмотрение эффекта самовоздействия и кроссмодуляции радиоволн. И только при обсуждении вопроса о «боковых» волнах с комбинационными частотами, когда вычисляются не основные величины, а малые поправки к ним, членами порядка $\frac{\delta\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$ пренебрегать нельзя, и задача усложняется.

Эффект самовоздействия. Остановимся теперь на нелинейном эффекте самовоздействия радиоволн (см. [360]). Для этой цели рассмотрим распространение в изотропной плазме волны, поле которой на границе среды (в плоскости $z = 0$) равно $\boldsymbol{E}_0(0) \cos \omega t$. В стационарном состоянии (т. е. через достаточно большой промежуток времени $\Delta t \gg \frac{1}{\delta\nu_{\text{эфф}}}$ после включения поля) электронная температура T_e устанавливается на некотором постоянном значении (малые члены порядка $\frac{\delta\nu_{\text{эфф}}}{\omega}$ не учитываются). В соответствии с этим волна распространяется с неизменной частотой ω в среде с постоянными во времени ε и σ, которые зависят от амплитуды поля волны E_0. Из уравнений поля (39,1) обычным образом (см. § 2) получается уравнение

$$\Delta \boldsymbol{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' (\omega, \boldsymbol{r}, E_0(\boldsymbol{r})) \boldsymbol{E} = 0. \tag{39,4}$$

Выражение для $\varepsilon' = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ было получено в § 38 и имеет вид:

$$\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N(\boldsymbol{r})}{m\omega\,[\omega - i\nu_{\text{эфф}}(T_e)]} \tag{39,5}$$

(здесь и везде ниже используются формулы элементарной теории; температура T_e является функцией $E_0(\boldsymbol{r})$, которая определяется из (38.16)).

В связи со сложностью нелинейного уравнения (39,4) остановимся на его решении только при ряде упрощающих предположений. Именно, будем считать плазму не только изотропной, но и плоскослоистой с медленно меняющимися свойствами, так что обеспечена применимость приближения геометрической оптики. Уравнение (39,4) принимает тогда вид $\frac{d^2E}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(\omega, z, E_0)E=0$, а его приближенное решение можно записать в форме (см. § 16)

$$\left.\begin{aligned} &E=Ce^{i\left(\omega t-\frac{\omega}{c}\int n\,dz\right)}e^{-\frac{\omega}{c}\int \varkappa\,dz},\\ &\varepsilon'(\omega, z, E_0(z))=(n-i\varkappa)^2, \end{aligned}\right\} \qquad (39,6)$$

где в нулевом приближении $C=\text{const}$ и рассматривается лишь волна, бегущая в одном направлении (по оси z). В силу зависимости n и $\varkappa$ от E_0 формальное решение (39,6) является по существу интегральным уравнением, которое для амплитуды можно записать в форме

$$\left.\begin{aligned} &E_0=Ce^{-\frac{\omega}{c}\int\limits_0^z \varkappa(\omega, z, E_0)\,dz},\\ &\frac{dE_0}{dz}+\frac{\omega}{c}\varkappa(\omega, z, E_0)E_0=0. \end{aligned}\right\} \qquad (39,7)$$

В предположении, что $|\varepsilon|\gg\frac{4\pi\sigma}{\omega}$, показатель поглощения равен $\varkappa=\frac{2\pi\sigma}{\omega n}\approx\frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon}}$ и в слабом поле (см. (7.17))

$$\varkappa=\varkappa_0(\omega, z)=\frac{2\pi e^2N\nu_0}{m\omega(\omega^2+\nu_0^2)\sqrt{1-\frac{4\pi e^2N}{m(\omega^2+\nu_0^2)}}}. \qquad (39,8)$$

В сильном поле в рассматриваемых условиях выражения для ε и σ такие же, как в слабом поле, но с заменой $\nu_0\equiv\nu_{\text{эфф}}(T)$ на $\nu_{\text{эфф}}(T_e)\equiv\nu(T_e)$. Поэтому

$$\varkappa(\omega, z, E_0)=\varkappa_0(\omega, z)\frac{\frac{\nu(T_e)}{\nu_0}\left(\frac{\omega^2}{\nu_0^2}+1\right)}{\frac{\omega^2}{\nu_0^2}+\frac{\nu^2(T_e)}{\nu_0^2}}, \qquad (39,9)$$

где для простоты не учитывается зависимость $n\approx\sqrt{\varepsilon}$ от T_e (это верно, если $n\approx1$, а также всегда при $\omega^2\gg\nu^2$).

Для нахождения поля $E_0(z)$ нужно, очевидно, решить уравнение (39,7) учитывая выражение (39,9) и связь между T_e и E_0.

В случае соударений с молекулами $\frac{\nu(T_e)}{\nu_0}=\sqrt{\frac{T_e(E_0)}{T}}$ и, вводя переменную $\tau=\sqrt{\frac{T_e(E_0)}{T}}$, можно переписать соотношение (38,21) и уравнение (39,7) в виде:

$$\left(\frac{E_0}{E_p}\right)^2=(\tau^2-1)\frac{\omega^2+\nu_0^2\tau^2}{\omega^2+\nu_0^2}, \quad \tau=\sqrt{\frac{T_e(E_0)}{T}}=\frac{\nu(T_e)}{\nu_0}, \tag{39,10}$$

$$\frac{d\tau}{dz}\left(\frac{1}{\tau^2-1}+\frac{2\nu_0^2}{\omega^2+\nu_0^2}\right)+\frac{\omega}{c}\varkappa_0(z)=0 \tag{39,11}$$

(при переходе от (39,7) и (39,9) к (39,11) амплитуда E_0 выражена через τ с помощью (39,10)).

Из (39,11) в результате интегрирования получаем следующее выражение для τ:

$$\left.\begin{gathered}\frac{\tau-1}{\tau+1}\exp\left\{\frac{4\nu_0^2}{\omega^2+\nu_0^2}\tau\right\}=\frac{\tau_0-1}{\tau_0+1}\exp\left\{\frac{4\nu_0^2}{\omega^2+\nu_0^2}\tau_0\right\}\exp\{-2\mathcal{K}(z)\},\\ \mathcal{K}(z)=\frac{\omega}{c}\int\limits_0^z\varkappa_0(z)\,dz, \quad \tau_0\equiv\tau(0)=\sqrt{\frac{T_e(E_0(0))}{T}},\\ \tau=\tau(z)=\sqrt{\frac{T_e(E_0(z))}{T}}\end{gathered}\right\} \tag{39,12}$$

(везде предполагается, что T и ν_0 от z не зависят; напомним также, что $E_0(0)$ — амплитуда поля при $z=0$ и $\mathcal{K}=\frac{\omega}{c}\int\limits_0^z\varkappa_0(z)\,dz$ — величина, определяющая поглощение слабой волны на пути z).

Используя выражения (39,10) и (39,12), можно определить амплитуду поля $E_0(z)$, которую удобно записать так:

$$E_0(z)=E_0(0)\,e^{-\mathcal{K}(z)}P\left(\frac{E_0(0)}{E_p}, \frac{\omega}{\nu_0}, \mathcal{K}(z)\right). \tag{39,13}$$

Множитель P (в слабом поле он, очевидно, равен единице) характеризует эффект самовоздействия волны при ее распространении.

В глубине плазмы при $\mathcal{K}(z)\gg 1$ волна всегда становится слабой и $\tau\to 1$. В этой области [31, 360]

$$P=2\frac{E_p}{E_0(0)}\sqrt{\frac{\tau_0-1}{\tau_0+1}}\exp\left\{\frac{2\nu_0^2}{\omega^2+\nu_0^2}(\tau_0-1)\right\}. \tag{39,14}$$

В предельном случае $\omega^2\gg\nu_0^2\tau_0$ и $\tau_0\gg 1$ множитель P не зависит от τ_0 и

$$E_0(z)=2E_p\exp\{-\mathcal{K}(z)\}. \tag{39,15}$$

В этом случае амплитуда волны, проходящей в глубину плазмы, не растет с ростом $E_0(0)$, а стремится к постоянной, не зависящей от $E_0(0)$ величине, т. е. имеет место эффект «насыщения» (рис. 39,1).

При соблюдении обратного неравенства $\omega^2 \ll \nu_0^2\tau_0$ множитель P растет с ростом τ_0 (т. е. с ростом $E_0(0)$), поскольку коэффициент поглощения на низкой частоте падает с возрастанием T_e. В результате получим:

$$E_0(z) = 2E_p \exp\left\{\sqrt{4\left(\frac{\nu_0^2}{\omega^2+\nu_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{E_0(0)}{E_p}}\right\} \exp\{-\mathscr{K}(z)\}. \qquad (39,16)$$

Зависимость отношения $\frac{E_0(z)\,e^{\mathscr{K}(z)}}{E_p}$ в глубине плазмы от $\frac{E_0(0)}{E_p}$ (в обоих предельных случаях) ясна из рис. 39,1.

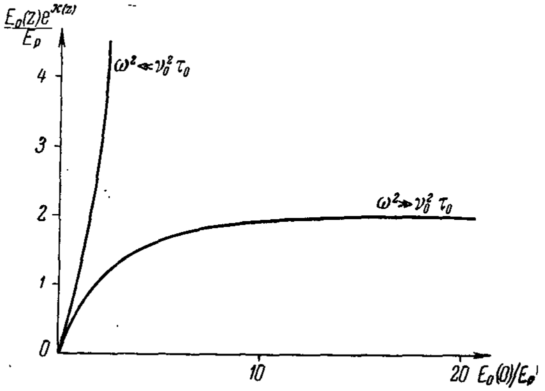


Рис. 39,1. Зависимость $\frac{E_0(z)\,e^{\mathscr{K}(z)}}{E_p}$ от $\frac{E_0(0)}{E_p}$ (соударения с молекулами).

При произвольном $\mathscr{K}(z)$, т. е. при любом расстоянии от начала слоя плазмы, простое выражение для поля $E_0(z)$ получается лишь при высоких частотах $\omega^2 \gg \nu_0^2\tau$, когда

$$E_0(z) = 2E_p\sqrt{\frac{\tau_0-1}{\tau_0+1}}\,\frac{\exp\{-\mathscr{K}(z)\}}{\left[1-\frac{\tau_0-1}{\tau_0+1}\exp\{-2\mathscr{K}(z)\}\right]}. \qquad (39,17)$$

Очевидно, независимо от значения $E_0(0) \gg E_p$, поле $E_0(z)$ остается сильным только при $\mathscr{K}(z) \leqslant 1$.

В случае соударений с ионами достаточно рассматривать только волны высокой частоты. Действительно, условие справедливости газового приближения *) $\frac{e^2N^{1/3}}{\varkappa T} \ll 1$ приводит к неравенству

---

*) Это условие означает, что кинетическая энергия электрона $\varkappa T$ велика по сравнению с потенциальной $\frac{e^2}{r} \sim e^2N^{1/3}$.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} \gg \nu_{0i} \sim \frac{e^4 N}{(\varkappa T)^{3/2} m^{1/2}}$. Отсюда $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu_{0i}^2} > 0$, т. е. волны могут распространяться только при $\omega \gtrsim \omega_0 \gg \nu_{0i}$ (высокочастотный случай). При этом коэффициент поглощения волн высокой частоты, как ясно из (39,9), резко падает с ростом температуры T_e (так как $\nu_i \sim T_e^{-3/2}$). В результате фактор самовоздействия P резко возрастает с ростом $E_0(0)$, и волна как бы сама прокладывает себе дорогу в плазме; при $E_0(0) > 2\sqrt[3]{\mathscr{K}(z)}E_p$ волна практически не поглощается в слое данной толщины z ($\mathscr{K}(z) = \frac{\omega}{c}\int\limits_0^z \varkappa_0(z)dz$; зависимость $E_0(z)/E_p$ от $E_0(0)/E_p$ при двух значениях $\mathscr{K}(z)$ ясна из рис. 39,2).

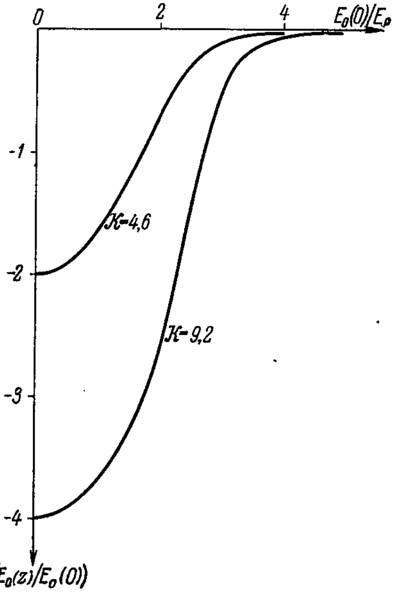


Рис. 39,2. Зависимость $E_0(z)/E_p$ от $E_0(0)/E_p$ (соударения с ионами).

Воздействие волны на плазму приводит, помимо рассмотренного изменения амплитуды, также к изменению фазы волны (имеется в виду отклонение фазы от значения $\frac{\omega}{c}\int\limits_0^z n_0(z)\,dz$, отвечающего случаю слабой волны). Соответствующее изменение фазы невелико. Больший интерес представляет изменение модуляции волны в результате ее самовоздействия. Если частота модуляции $\Omega \ll \delta\nu_0$, то процесс можно считать квазистационарным. Это значит, что задача решается так же, как для поля с постоянной амплитудой, но в окончательные формулы вместо $E_0(0)$ подставляется промодулированное поле $E_0(0, t) = E_0(0)(1 + \mu_0 \cos \Omega t)$. Выражение (39.13) принимает тогда вид

$$\left.\begin{aligned} E_0(z, t) &= E_0(0, t)\, e^{-\mathscr{K}(z)} P\left(\frac{E_0(0, t)}{E_p}, \frac{\omega}{\nu_0}, \mathscr{K}(z)\right), \\ E_0(0, t) &= E_0(0)\,(1 + \mu_0 \cos \Omega t). \end{aligned}\right\} \qquad (39,18)$$

Поскольку фактор самовоздействия P нелинейным образом зависит от $E_0(0, t)/E_p$, уже из (39,18) ясно, что самовоздействие приведет к изменению глубины модуляции, а также появлению обертонов 2Ω, 3Ω и т. д.

Если же $\Omega \gg \delta\nu_0$, то задачу считать квазистационарной нельзя и нужно совместно решать уравнение для поля (39,7) и уравнение (38,7) для температуры T_e.

Мы рассмотрели здесь изотропную плазму. Эффекты самовоздействия волн в анизотропной плазме (при наличии магнитного поля) рассматривались в [361, 362].

На всех перечисленных эффектах самовоздействия (изменение фазы, глубины модуляции и частотного спектра), а также на выяснении роли самовоздействия при распространении радиоволн в ионосфере останавливаться здесь не будем, отсылая к обзору [31].

Укажем, однако, на новые экспериментальные работы, в которых исследовались эффекты самовоздействия сильных радиоволн [363]. В них наблюдалась автодемодуляция радиоволн и «эффект насыщения» проходящей в ионосферу сильной волны (см. формулу (39,15) и рис. 39.1). Численные расчеты эффекта самовоздействия радиоволн в ионосфере проведены в [364]. Наконец, отметим существенную роль, которую может играть изменение электронной концентрации в ионосфере в результате разогрева плазмы в неоднородном электрическом поле (см. [359] и конец § 38). В результате такого изменения электронной концентрации под действием поля волны возникают различные нелинейные эффекты [352, 353], в частности, может иметь место фокусировка и дефокусировка падающих на плазму лучей [365], а также сдвиг точки (области) отражения радиоволн от ионосферного слоя [366]. В последнем случае весьма существенно, что амплитуда поля волны возрастает в области отражения (см. §§ 17, 35), что приводит к усилению нелинейных эффектов в этой области.

Нелинейное взаимодействие волн. Кроссмодуляция. Возмущения, вызываемые в плазме мощной волной, не только влияют на характер ее распространения, но должны сказываться и на других волнах, проходящих через возмущенную область.

Здесь можно указать на эффекты трех типов.

Если мощная волна промодулирована по амплитуде низкой частотой Ω, то промодулированными оказываются и возмущения, вызываемые ею в плазме, и, следовательно, другие волны, проходящие через возмущенную область. Это явление называется перекрестной или кроссмодуляцией, а также люксембург-горьковским эффектом. Оно без особого труда наблюдается при распространении радиоволн в ионосфере и имеет практическое значение для радиовещания в диапазоне средних волн.

Если же распространяются мощные немодулированные волны, то, возмущая плазму, они, во-первых, вызывают постоянные во времени изменения электронной температуры, а, значит, также проводимости и диэлектрической проницаемости среды. Поэтому в возмущенной области меняются условия распространения (поглощение, рефракция) всех других волн. Во-вторых, помимо постоянных возмущений ε и σ, возникают еще и слабые переменные возмущения с частотами, кратными частоте возмущающей волны. Такие возмущения приводят (при распространении в плазме других волн) к появлению волн с комбинационными частотами *).

Чтобы рассчитать глубину и фазу кроссмодуляции, нужно сначала определить величину низкочастотных возмущений, вызываемых в плазме мощной волной 1 (волной с полем E_1), а затем найти, как эти возмущения скажутся на другой волне с полем E_2. Если хотя бы одна из волн 1 и 2 является сильной, то расчет нужно проводить с учетом самовоздействия. Мы, однако, ограничимся случаем, когда не только волна 2 является слабой, но и возмущающая волна 1 может считаться слабой с точки зрения критерия (38,1). Вместе с тем, возмущения плазмы, обусловленные распространением волны 1, будут, разумеется, учитываться и могут оказаться заметными. Дело здесь в том (как это уже упоминалось), что специфические нелинейные эффекты (в особенности, кроссмодуляция) могут без труда наблюдаться и в условиях, когда $\frac{\Delta T_e}{T} \ll 1$. Более того, в земной ионосфере именно этот случай и осуществляется для волн короче 1 *км* и станций с мощностью, меньшей 500 *квт* (см. табл. 39,1).

Амплитуда электрического поля промодулированной слабой волны 1 с частотой ω_1 в приближении геометрической оптики имеет вид:

$$E_{01}(z, t) = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_1(z)}}\, E_{01}(0, 0)\,(1 + \mu_0 \cos \Omega t) \exp\{-\mathscr{K}_1(z)\}; \qquad (39,19)$$

здесь $\varepsilon_1(0)$ и $\varepsilon_1(z)$ — значения $\varepsilon(z, \omega_1) \equiv \varepsilon_1(z)$ в точках $z = 0$ и z, $\mathscr{K}_1(z) = \frac{\omega_1}{c}\int\limits_0^z \varkappa_1\, dz$, $\varkappa_1 \equiv \varkappa_0(\omega_1)$ и поглощение считается слабым (поэтому в амплитуде (39,19) величина ε' заменена на ε; подробнее см. § 16).

Поле волны 1 с учетом временного множителя равно

$$E_1 = E_{01}(z, t) \cos(\omega_1 t - \varphi_1),$$

где φ_1 — некоторая фаза и E_{01} определяется выражением (39,19). Обычно при этом

$$\omega_1 \gg \Omega, \qquad (39,20)$$

---

*) Волны с комбинационными частотами появляются, конечно, и при взаимодействии модулированных волн, но наличие модуляции здесь принципиальной роли не играет. Поэтому, естественно, вопрос о комбинационных частотах будет обсуждаться именно для немодулированных волн.

и можно считать, что при нахождении упорядоченной скорости $\dot{\mathbf{r}}$ процесс является квазистационарным. Другими словами, для скорости $\dot{\mathbf{r}}$ используем выражение (38,10) с заменой E_0 на E_{01} и ωt на $\omega_1 t - \varphi_1$. В отношении температуры T_e, которая меняется медленно, поступать точно так же нельзя, но в уравнении (38,11), как указано в § 38, можно отбросить члены с $\cos\omega t$ и $\cos 2\omega t$. В результате это уравнение в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\frac{dT_e}{dt}=\frac{e^2E_{01}^2(z,\,t)\,\nu_0}{3m\varkappa\,(\omega_1^2+\nu_0^2)}-\delta\nu_0\,(T_e-T). \tag{39,21}$$

Подставляя сюда выражение (39,19), для части возмущения температуры $\Delta T_e=T_e-T$, изменяющейся с частотами Ω и 2Ω, получаем:

$$\frac{\Delta_\Omega T_e}{T}=\frac{2\mu_0e^2E_{01}^2(0,\,0)}{3\varkappa Tm\delta\,(\omega_1^2+\nu_0^2)}\sqrt{\frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_1(z)}}\exp\{-2\mathcal{K}_1(z)\}\times$$
$$\times\left\{\frac{\delta\nu_0\cos(\Omega t-\varphi_\Omega)}{\sqrt{(\delta\nu_0)^2+\Omega^2}}+\frac{\mu_0\delta\nu_0\cos(2\Omega t-\varphi_{2\Omega})}{4\sqrt{(\delta\nu_0)^2+4\Omega^2}}\right\}, \tag{39,22}$$
$$\varphi_\Omega=\operatorname{arctg}\frac{\Omega}{\delta\nu_0},\quad \varphi_{2\Omega}=\operatorname{arctg}\frac{2\Omega}{\delta\nu_0}.$$

Изменение температуры приводит к соответствующему изменению числа столкновений, так что $\nu=\nu_0+\Delta\nu$. Ограничиваясь рассмотрением соударений с молекулами, имеем *):

$$\nu=\nu_0\sqrt{\frac{T_e}{T}},\quad \Delta_\Omega\nu=\frac{\nu_0\Delta_\Omega T_e}{2T}. \tag{39,23}$$

Амплитуда любой другой слабой волны 2 (считаем ее немодулированной) также, конечно, имеет вид (39,19):

$$E_{02}(s)=\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2(0)}{\varepsilon_2(s)}}\,E_{02}(0)\exp\{-\mathcal{K}_2(s)\},$$
$$\mathcal{K}_2(s)=\frac{\omega_2}{c}\int^{s}\varkappa_2(s)\,ds, \tag{39,24}$$

где интегрирование ведется по траектории луча.

Показатель поглощения $\varkappa$ зависит от числа соударений, и, таким образом, возмущающее действие волны 1, изменяя ν,

---

*) При соударениях с ионами в неплохом приближении $\nu=\nu_0\left(\frac{T}{T_e}\right)^{3/2}$ и $\Delta_\Omega\nu=-\frac{3\nu_0}{2}\left(\frac{T}{T_e}\right)^{3/2}\frac{\Delta_\Omega T_e}{T_e}$, т. е. изменения $\Delta_\Omega\nu$ и $\Delta_\Omega T$ имеют разный знак. В соответствии с этим характеризующие глубину кроссмодуляции коэффициенты μ_Ω и $\mu_{2\Omega}$ (см. ниже) при соударениях с молекулами и ионами имеют разные знаки.

приведет к появлению амплитудной модуляции волны 2. Действительно, $\varkappa_2(\nu) = \varkappa_2(\nu_0) + \frac{\partial \varkappa_2}{\partial \nu_0} \Delta_\Omega \nu$ и амплитуда (39,24) волны 2 по прохождении возмущенной области может быть записана так:

$$E_{02} = \doteq E_{02}(0) \exp\left\{-\frac{\omega_2}{c} \int\limits_s \varkappa_2(\nu_0)\, ds\right\} = \left\{1 - \frac{\omega_2}{2c} \int\limits_s \nu_0 \frac{\partial \varkappa_2(\nu_0)}{\partial \nu_0} \frac{\Delta_\Omega T_e}{T}\, ds\right\}, \tag{39,25}$$

где использованы соотношения (39,23) и (39,24), опущен член $\sqrt[4]{\frac{\varepsilon_2(0)}{\varepsilon_2(z)}}$ и глубина кроссмодуляции считается малой; по последней причине произведена замена $\exp\left\{-\frac{\omega_2}{c} \int\limits_s \nu_0 \frac{\partial \varkappa_2(\nu_0)}{\partial \nu_0} \frac{\Delta_\Omega T_e}{T}\, ds\right\}$ на первые два члена разложения экспоненты в ряд.

Сопоставление выражений (39,22) и (39,25) показывает, что поле равно

$$E_{02} = \mathrm{const}\, \{1 - \mu_\Omega \cos(\Omega t - \varphi_\Omega) - \mu_{2\Omega} \cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega})\},$$

причем глубина кроссмодуляции равна

$$\left.\begin{aligned}
\mu_\Omega &= \frac{\mu_0 e^2 E_{01}^2(0, 0)}{3\varkappa T m \delta} \frac{\omega_2}{c} \int\limits_s \frac{\nu_0 \frac{\partial \varkappa_2(\nu_0)}{\partial \nu_0}}{\omega_1^2 + \nu_0^2} \frac{\delta \nu_0}{\sqrt{(\delta \nu_0)^2 + \Omega^2}} \times \\
&\qquad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_1(s)}} \exp\{-2\mathscr{K}_1(s)\}\, ds, \\
\mu_{2\Omega} &= \frac{\mu_0^2 e^2 E_{01}^2(0, 0)}{12\varkappa T m \delta} \frac{\omega_2}{c} \int\limits_s \frac{\nu_0 \frac{\partial \varkappa_2(\nu_0)}{\partial \nu_0}}{\omega_1^2 + \nu_0^2} \frac{\delta \nu_0}{\sqrt{(\delta \nu_0)^2 + 4\Omega^2}} \times \\
&\qquad \times \sqrt{\frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_1(s)}} \exp\{-2\mathscr{K}_1(s)\}\, ds.
\end{aligned}\right\} \tag{39,26}$$

Чтобы найти окончательные выражения для глубины кроссмодуляции, нужно еще провести интегрирование по пути s, а также использовать выражение (39,8) для $\varkappa_2$ ($\varkappa_2 = \varkappa_0(\omega_2)$). Получающиеся формулы (см. [31]) зависят, конечно, от геометрии задачи: взаимного расположения точек отражения волн 1 и 2, углов падения обеих волн на слой и т. п. Отметим здесь лишь наличие характерного множителя $\frac{\delta \nu_0}{\sqrt{(\delta \nu_0)^2 + \Omega^2}}$, свидетельствующего об уменьшении глубины кроссмодуляции с ростом частоты Ω (в области $\Omega \gg \delta \nu_0$). Кроме того, в рассмотренном приближении при $\mu_0 \ll 1$, очевидно, $\mu_{2\Omega} \sim \frac{\mu_\Omega \mu_0}{4} \mu_\Omega \ll \mu_\Omega$.

Заметим, что вычисления с использованием не уравнения (39,21), а точных уравнений кинетической теории приводят для зависимости глубины и фазы кроссмодуляции от частоты модуляции Ω к близким результатам. Имеет место, однако, заметная зависимость амплитуды и фазы кроссмодуляции от вида функции $\nu(v)$ (см. [367, 368]).

При учете влияния постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}^{(0)}$ получаются результаты, аналогичные приведенным: в принципиальном отношении вся разница сводится к замене в выражениях (39,22) и (39,26):

$$\frac{E_{01}^2(0,\,0)}{\omega_1^2+\nu_0^2} \to \frac{E_{01}^2(0,\,0)\cos^2\beta}{\omega_1^2+\nu_0^2} + \frac{E_{01}^2(0,\,0)\sin^2\beta}{2[(\omega_1-\omega_H)^2+\nu_0^2]} + \frac{E_{01}^2(0,\,0)\sin^2\beta}{2[(\omega_1+\omega_H)^2+\nu_0^2]}, \quad (39,27)$$

где β — угол между $\boldsymbol{E}_{01}$ и $\boldsymbol{H}^{(0)}$. Если угол $\beta \neq 0$, то возмущения в плазме могут сильно возрастать вблизи гирорезонанса, когда $\omega_1 \to \omega_H$. Отсюда, однако, еще нельзя в общем случае сделать вывода о резонансном поведении кроссмодуляции (т. е. о возрастании μ_Ω и $\mu_{2\Omega}$ при $\omega_1 \to \omega_H$). Дело в том, что, помимо величины возмущений $\Delta_\Omega T$ и $\Delta_\Omega \nu$, глубина кроссмодуляции зависит, очевидно, от размеров возмущенной области. В то же время вблизи резонанса эта область уменьшается, поскольку волны сильно затухают и, например, в условиях ионосферы просто не проникают в ее толщу. Поэтому кроссмодуляция в условиях ионосферы не носит, вообще говоря, ярко выраженного резонансного характера. В некоторых случаях тем не менее резонанс может быть выражен достаточно отчетливо. Заметим в этой связи, что выражения типа (39,27) нужно использовать с известной осторожностью еще и в связи с необходимостью учитывать изменение поляризации волн, распространяющихся в магнитоактивной плазме. В результате, как об этом подробно говорилось в § 11, резонанс на частоте $\omega = \omega_H$ имеет место только при $\alpha = 0$ (продольное распространение), в то время как при других углах α резонансная частота отлична от ω_H и определяется формулой (12,2а). В применении к нелинейным эффектам смещение резонансной частоты рассмотрено в [369]; в условиях земной ионосферы это смещение невелико [367], так как волны с частотами, близкими к резонансной, проникают лишь в нижнюю часть слоя, где плазменная частота ω_0 невелика и, следовательно, $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_H$.

Следует отметить также новый эффект резонансной кроссмодуляции вблизи гирочастоты, наблюдавшийся впервые в работе [372]. Мощная высокочастотная волна с частотой ω_1 модулировалась частотой Ω, близкой к ω_H. Эта модуляция оказывается переданной другой волне частоты ω_2, распространяющейся в той же области ионосферы. Взаимодействие волн 1 и 2 наиболее эффективно на высотах порядка 150 ÷ 200 *км*. Оно носит ярко выраженный резонансный характер, когда частота модуляции Ω близка к гирочастоте ω_H. Если Ω значительно отличается от ω_H, то заметной кроссмодуляции нет. Теория этого эффекта еще не построена (см. [373]).

Характер кроссмодуляции в ионосфере в зависимости от ряда условий и значений параметров (μ_0, Ω, $\delta\nu_0$, ω_1, ω_2 и т. д.) исследовался в работах, результаты которых сопоставлены в [31].

Нелинейное взаимодействие немодулированных волн. Комбинационные частоты. Нелинейное взаимодействие немодулированных радиоволн, как уже упоминалось, приводит прежде всего к изменению поглощения и рефракции слабой волны, проходящей через возмущенную область плазмы. Заметить этот эффект для монохроматических волн, вообще говоря, довольно трудно. Если же на волну «наносятся» какие-то «метки», то дело, по существу, опять сводится к модуляции и кроссмодуляции. Особо здесь нужно отметить только нелинейное взаимодействие коротких импульсов [370, 371].

Мощная немодулированная волна E_1 с частотой ω_1 вызывает в плазме помимо постоянного возмущения также возмущения с частотами, кратными ω_1. Если при этом волну 1 все же можно считать слабой (т. е. $E_{01} \ll E_p$), то появляются практически только изменения температуры T_e, происходящие с частотой $2\omega_1$ (см. (38,11)) *). Такие обертоны возникают и для модулированных волн, но при условии (39,20) наличие модуляции не вносит здесь ничего принципиально нового, поэтому ниже мы и считаем для простоты мощную волну немодулированной. Ограничимся, кроме того, простейшим случаем, когда справедливо решение (38,11) для T_e и, следовательно, изменения T_e и σ можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} \Delta T &= T_e - T = T_{e,\,0} + \Delta T_{e,\,+} e^{2i\omega_1 t} + \Delta T_{e,\,-} e^{-2i\omega_1 t}, \\ \sigma &= \sigma_0 + \Delta\sigma_+ e^{2i\omega_1 t} + \Delta\sigma_- e^{-2i\omega_1 t} \end{aligned}\right\} \qquad (39,28)$$

(изменение ε не учитываем, что законно в однородной и изотропной плазме при $\omega^2 \gg \nu_0^2$). Таким образом, свойства среды становятся непостоянными во времени и распространение в этой среде других волн (поле E_2, частота ω_2) будет сопровождаться появлением «боковых» волн с комбинационными частотами $\omega_2 \pm 2\omega_1$. Действительно, при наличии полей E_1 и E_2 плотность тока, вызванного достаточно слабым полем $E_2 = E_{02} e^{i\omega_2 t}$, равна

---

*) Для сильной волны 1 появляются также более высокие обертоны, но и в этом случае напряженность поля убывает с ростом номера обертона $\left(\text{здесь сказывается роль параметра } \frac{\delta\nu}{\omega} \ll 1\right)$.

$$j_2(E_1,\ E_2) = \sigma_0 E_{02} e^{i\omega_2 t} + \Delta\sigma_+ E_{02} e^{i(\omega_2+2\omega_1)t} + \Delta\sigma_- E_{02} e^{i(\omega_2-2\omega_1)t}. \qquad (39{,}29)$$

Расчеты с помощью кинетического уравнения, на которых не будем останавливаться [31], приводят при высокой частоте ($\omega_1^2 \gg \nu_0^2$, $\omega_2^2 \gg \nu_0^2$, $(\omega_2 - 2\omega_1)^2 \gg \nu_0^2$) к выражениям:

$$\Delta\sigma_+ = \Delta\sigma_- = -\frac{3e^4 N E_{01}^2(z)\,\nu_0}{80 m^2 \varkappa T \omega_1^2} \left\{ \frac{1}{(\omega_2+2\omega_1)^2} + \frac{1}{(\omega_2-2\omega_1)^2} \right\}, \qquad (39{,}30)$$

где поле 1 с амплитудой $E_{01}(z) = E_{01}(0) \exp\{-\mathscr{K}_1(z)\}$ считаем для простоты слабым.

С приближением частоты ω_2 к $2\omega_1$ имеет место резонансное возрастание величин $\Delta\sigma_\pm$, которые достигают при $\omega_2 = 2\omega_1$ максимального значения:

$$\Delta\sigma_+ = \Delta\sigma_- = \frac{2e^4 N E_{01}^2(z)}{15\pi m^2 \varkappa T \nu_0 \omega_1^2}. \qquad (39{,}31)$$

Существенно, что амплитуды $\Delta\sigma_\pm$ малы по сравнению с σ_0 не только в слабом, но и в сильном поле, если только выполнено условие $\frac{\delta\nu_0}{\omega_1} \ll 1$ (см. § 38).

В отличие от случая кроссмодуляции, когда соблюдение условия $\omega \gg \Omega$ (см. (39,20)) обеспечивало возможность использования квазистационарного приближения, вопрос о распространении «боковых» волн нуждается в более подробном рассмотрении (см. [32], § 64 и [31], § 3,5б). Смысл соответствующих вычислений состоит в решении уравнений поля или, конкретно в данном случае, вытекающего из них уравнения $\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial j_2}{\partial t}$ с током j_2, определяемым выражением (39,29). Поскольку в правой части этого уравнения присутствуют члены с частотами ω_2 и $\omega_2 \pm 2\omega_1$, очевидно, что и поле E_2 не может обладать только исходной частотой ω_2. Подстановка решения в виде

$$E_2 = E_{02} e^{i\omega_2 t} + E_{02,\,+} e^{i(\omega_2+2\omega_1)t} + E_{02,\,-} e^{i(\omega_2-2\omega_1)t}, \qquad (39{,}32)$$

$$|E_{02,\,\pm}| \ll |E_{02}|,$$

приводит к результату ([32], § 64):

$$E_{02}(z) = E_{02}(0)\, e^{-i\frac{\omega_2}{c}\sqrt{\varepsilon'(\omega_2)}\,z},$$

$$E_{02,\,\pm} = E_{02}(z) \times$$

$$\times \left[\frac{4\pi i\,(\omega_2 \pm 2\omega_1)\,\Delta\sigma_\pm \left\{ 1 - \exp\left[-i\left(\frac{\omega_2 \pm 2\omega_1}{c}\sqrt{\varepsilon'(\omega_2 \pm 2\omega_1)} - \frac{\omega_2}{c}\sqrt{\varepsilon'(\omega_2)} \right) z \right] \right\}}{(\omega_2 \pm 2\omega_1)^2\,\varepsilon'(\omega_2 \pm 2\omega_1) - \omega_2^2\,\varepsilon'(\omega_2)} \right]. \qquad (39{,}33)$$

Здесь плазма считается однородной и предполагается, что при $z=0$ (начало слоя) амплитуда «боковых» волн $E_{02,\pm}=0$, т. е. все поле E_2 имеет вид $E_{02}(0)e^{i\omega_2 t}$. Что же касается поля 1, то оно предполагается не зависящим от z (поле в конденсаторе). Если же, как это имеет место при распространении радиоволн в ионосфере, поле E_1 зависит от z, то на результате существенно сказываются размеры области взаимодействия [31].

По мере прохождения волной 2 слоя плазмы, возмущаемой более или менее мощным полем 1, амплитуды $E_{02\pm}$ сначала возрастают, затем они убывают лишь по мере поглощения всего поля 2; достаточно далеко от границы $z=0$:

$$\eta=\left|\frac{E_{02,\pm}}{E_{02}}\right|=\left|\frac{4\pi(\omega_2\pm 2\omega_1)\,\Delta\sigma_{\pm}}{(\omega_2\pm 2\omega_1)^2\,\varepsilon(\omega_2\pm 2\omega_1)-\omega_2^2\varepsilon(\omega_2)}\right|, \qquad (39{,}34)$$

где в знаменателе произведена также замена ε' на ε $\left(\text{это законно при } |\varepsilon|\gg\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)$. В условиях ионосферы при учете неоднородности поля $E_1(z)$, как показывают оценки [31], $\eta\sim 10^{-5}\div 10^{-8}$ при $\omega_1\approx\omega_2\sim 10^6\div 10^7$ и мощности станции 100 *квт*. При той же мощности в резонансе $\eta\approx 3\cdot 10^{-5}$ (при $\omega_2=2\omega_1=4\cdot 10^6$), в то время как при $\omega_1=\omega_2=2\cdot 10^6$ будет $\eta\approx 10^{-6}$. Малость отношения η в ионосфере объясняет, почему появление комбинационных частот не играет практической роли при радиосвязи и еще, по-видимому, даже не наблюдалось. Тем не менее этот эффект довольно своеобразен и несомненно может быть обнаружен при специальном исследовании. Главное же, появление комбинационных частот может оказаться интересным в условиях, отличных от имеющих обычно место при распространении радиоволн в ионосфере.

О воздействии радиоволн на ионосферу. Мощные радиоволны, разогревая ионосферную плазму, могут вызвать искусственное свечение и искусственную ионизацию (пробой) ионосферы, а также привести к «обратному» явлению значительного понижения концентрации электронов. Все эти вопросы обсуждались как в работах, указанных в [31], так и в ряде последующих статей [374—381].

Искусственную ионизацию с помощью мощных радиоволн, посылаемых с Земли, можно осуществить в области слоя D и нижней части ионосферного слоя E (см. [376, 378]). С повышением мощности волн температура электронов в поле волны нарастает, что в конце концов приводит к пробою плазмы. Мощность излучателя, необходимая для осуществления пробоя, сильно увеличивается с высотой [376]. Так, для пробоя на высоте 60 *км* необходима мощность излучения в 70 *Мгв*, на высоте 70 *км* —340 *Мгв*, а на высоте 80 *км* уже 1200 *Мгв*. Важно отметить, что резкий рост поглощения волны с увеличением концентрации электронов ограничивает максимальную величину электронной концентрации $N_{\max}$, которую можно достигнуть в результате пробоя. Расчет показывает, что на высоте 60 *км* $N_{\max}$ не может превзойти 10^6 *см*$^{-3}$, а на высоте 80 *км* $N_{\max} \lesssim 5 \cdot 10^4$ *см*$^{-3}$.

Разогревание плазмы полем мощной радиоволны в более высоких слоях ионосферы может привести к понижению концентрации электронов за счет выталкивания плазмы из нагретой области [379—381]. Важную роль в нагреве плазмы в верхних слоях ионосферы играют магнитное поле Земли и столкновения между частицами всех сортов (электронами, ионами, молекулами). Возмущения концентрации, электронов в верхней ионосфере с учетом всех этих факторов определяются выражением, приведенным в [381].

Нагрев плазмы, особенно разреженной, может происходить, разумеется, не только под влиянием поля радиоволн. Так, к нагреванию приводит, в конечном счете, развитие различных плазменных неустойчивостей. В частности, плазму можно нагреть пучками частиц, которые генерируют плазменные волны (пучковая неустойчивость). В дальнейшем, под влиянием соударений энергия плазменных волн переходит в тепло, т. е. температура плазмы повышается. Такой механизм представляет интерес как в лабораторных установках [1], так и в межгалактическом пространстве, где газ нагревается, по-видимому, пучками космических лучей (см. [326, 382]).

Нелинейность, связанная с изменением электронной концентрации. Нелинейные явления, рассмотренные выше, в конечном счете все обусловлены изменением скорости электрона под действием поля: именно в силу изменения скорости меняются также такие величины, как T_e, $\nu_{\text{эфф}} \equiv \nu$, ε и σ. Вместе с тем нелинейное взаимодействие волн в плазме (и вообще нелинейная зависимость тока j' от поля E) может иметь и совершенно другую природу. Именно нелинейность может быть вызвана изменением не скорости, а электронной концентрации. При этом мы имеем сейчас в виду не изменение концентрации, обусловленное нагревом плазмы в неоднородном поле (см. конец § 38), а изменение N, обусловленное отличной от нуля дивергенцией электрического поля E. Такое изменение N возможно, конечно, и при полном отсутствии соударений. О нелинейных эффектах, не связанных с соударениями, уже было упомянуто ранее, но в основном мы ограничились ссылками на литературу (см. начало § 38). Ниже также не предполагается сколько-нибудь подробно останавливаться на «бесстолкновительных» нелинейных эффектах и будет сделано лишь несколько замечаний (см. [383], а также [31])

Поясним еще раз природу обсуждаемого эффекта на примере изотропной плазмы, когда тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega) = \varepsilon'\delta_{ij} = \left(1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega(\omega - i\nu_{\text{эфф}})}\right)\delta_{ij}$. Поскольку ε' зависит от N, изменение концентрации ΔN под действием электрического поля приводит к тому, что свойства плазмы также начинают зависеть от поля и, таким образом, среда становится нелинейной.

При пренебрежении движением ионов, которые лишь компенсируют средний заряд электронов eN, очевидно, имеем:

$$\Delta N = \frac{\rho'}{e} = \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{E}}{4\pi e}, \qquad (39{,}35)$$

и обсуждаемый нелинейный эффект существует, если $\operatorname{div} \boldsymbol{E} \neq 0$.

При распространении поперечных (электромагнитных) волн в однородной и изотропной плазме $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$. То же, конечно, имеет место в однородном поле. Но уже в плазменных продольных волнах в однородной и изотропной плазме, как известно, $\operatorname{div} \boldsymbol{E} \neq 0$. В результате происходит, например, рассеяние электромагнитных волн на плазменных и, вообще говоря, нелинейное взаимодействие волн этих двух типов (см. §§ 20, 36). В изотропной, но неоднородной плазме при отсутствии «сторонних» токов $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{i\omega}{c}\varepsilon'\boldsymbol{E}$ и, следовательно, $\operatorname{div}(\varepsilon'\boldsymbol{E}) = 0$. Отсюда и из (39,35) находим:

$$\Delta N = -\frac{\boldsymbol{E}\operatorname{grad}\varepsilon'}{4\pi e\varepsilon'}. \qquad (39{,}36)$$

В магнитоактивной плазме, вообще говоря, $\operatorname{div} \boldsymbol{E} \neq 0$ даже для однородной среды $\left(\text{см. гл. III; условие } \operatorname{div}\left(\boldsymbol{D} - i\frac{4\pi}{\omega}\boldsymbol{j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon'_{ij}E_j = 0 \text{ в общем случае означает, что } \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_i}{\partial x_i} \neq 0 \text{ уже при } \varepsilon'_{ij} = \text{const}\right)$.

Для плоской монохроматической волны в однородной магнитоактивной среде эллиптически поляризованное поле имеет вид $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{0a}\cos\varphi + \boldsymbol{E}_{0b}\sin\varphi$ и

$$\Delta N = \frac{\operatorname{div}\boldsymbol{E}}{4\pi e} = -\frac{\omega n}{4\pi e c N}\{E_{0a}\cos\theta_a\sin\varphi + E_{0b}\cos\theta_b\cos\varphi\}. \qquad (39{,}37)$$

Здесь $\varphi = \omega - \boldsymbol{kr}$, $n = n_{1,2} = \frac{ck}{\omega}$ — показатель преломления для рассматриваемой обыкновенной или необыкновенной волны (поглощением для простоты пренебрегаем), θ_a, θ_b — углы между $\boldsymbol{E}_{0a}$, $\boldsymbol{E}_{0b}$ и $\boldsymbol{k}$. Если внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}^{(0)}$ не является слишком слабым или не рассматриваются исключительные направления $\left(\text{т. е. углы } \alpha \text{ между } \boldsymbol{k} \text{ и } \boldsymbol{H}^{(0)}\text{, близкие к } \alpha = 0 \text{ или } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\theta_a$ и $\cos\theta_b$ являются величинами порядка единицы (углы θ_a и θ_b легко вычисляются по формулам, приведенным в § 10). В подобных условиях эффект (39,37) больше эффекта (39,36), если длина $\lambda = \frac{cn}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$ меньше характерной длины L, на которой существенно изменяются свойства плазмы $\left(\text{другими словами, } L \sim \left|\frac{\varepsilon'}{\operatorname{grad}\varepsilon'}\right|\right)$.

Итак, под действием поля $\boldsymbol{E}_1$ с частотой ω_1 в плазме возникают изменения ε и σ порядка $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim \frac{\Delta N}{N} \sim \frac{E_1}{4\pi eNL}$, или изменения $\frac{\Delta\sigma_{ij}}{\sigma_{ij}} \sim \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{ij}} \sim \frac{\omega nE_1}{4\pi ecN}$ (для простоты принимается, что $\varepsilon \sim \varepsilon_{ij} \sim 1$). Частота этих изменений совпадает, разумеется, с частотой поля E_1. При распространении в среде, возмущенной волной E_1, другой волны E_2 с частотой ω_2 возникают «боковые» волны с частотами $\omega_2 \pm \omega_1$. В то же время частота «боковых» волн, появление которых обсуждалось раньше и связано с влиянием поля на скорость электронов, равна $\omega_2 \pm 2\omega_1$. Это различие обусловлено тем, что изменение ΔN пропорционально полю E_1 (см. (39,36) и (39,37)), а изменение хаотической скорости, T_e, $\nu_{\text{эфф}}(T_e)$, ε и σ пропорционально E_1^2 или в более общем случае также другим четным степеням E_1.

Для эффекта (39,30) при $\omega_2 \sim \omega_1$, грубо говоря, $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim \frac{e^2E_1^2}{m\varkappa T\omega_1^2}$, $\sigma \approx \sigma_0 \sim \frac{e^2N\nu_0}{m\omega_1^2}$. Поэтому отношение амплитуды «боковых» волн, связанных с изменением электронной концентрации $\left(\text{как указывалось, при этом } \frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim \frac{\omega_1 nE_1}{4\pi ecN}\right)$, к амплитуде «боковых» волн первого типа будет

$$\xi \sim \frac{\varkappa Tm\omega_1^3 n}{e^3cNE_{01}(z)} \sim \frac{\omega_1^2 n}{\omega_0^2}\sqrt{\frac{\varkappa T_e}{mc^2\delta}}\,\frac{E_{p,1}}{E_{01}(z)}, \tag{39,38}$$

где опущен численный множитель (он оказывается близким к единице), n — показатель преломления для волны с полем E_1, $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2N}{m}$ и $E_{p,1}$ — «плазменное поле» (38,1) для волны 1. При $\sqrt{\frac{\varkappa T_e}{mc^2\delta}} \sim 10^{-2}$ $(T_e \sim 500,\ \delta \sim 10^{-3})$, $\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \sim 1 \div 10$ и $\frac{E_{p,1}}{E_{01}(z)} \sim 1$, параметр $\xi \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$. Таким образом, в данном случае в ионосфере амплитуда «боковых» волн с частотами $\omega_2 \pm \omega_1$

в $10 \div 100$ раз меньше амплитуды волн с частотами $\omega_2 \pm 2\omega_1$. Вместе с тем, при $\xi > 1$ сильнее во́лны с частотами $\omega_2 \pm \omega_1$. Условие $\xi \approx 1$ отвечает отношению $\frac{E_{p,1}}{E_{01}(z)} \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$ $\left(\text{при } \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \sim \sim 1 \div 10 \text{ и } \sqrt{\frac{\varkappa T_e}{mc^2\delta}} \sim 10^{-2}\right)$. Если волна E_1 промодулирована по амплитуде, то возникающая за счет эффекта (39,37) дополнительная кроссмодуляция волны E_2 очень мала — ее глубина порядка отношения амплитуды «боковой» волны с частотой $\omega_2 \pm \omega_1$ к амплитуде самой волны E_2. Этот результат вполне понятен, поскольку изменение концентрации с полем, в отличие от изменения электронной температуры, не имеет постоянной (или медленно меняющейся) составляющей.

Цитированная литература *)

1. Л. А. Арцимович, Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, 1963.
2. Л. Спитцер, Физика полностью ионизированного газа, «Мир», 1965.
3. В. П. Силин и А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, 1961.
4. Вопросы теории плазмы, Сб. статей, вып. I-IV, Атомиздат, 1963, 1964.
5. Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, 1965.
6. Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, «Мир», 1967.
7. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд-во МГУ, 1964.
8. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко и К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, 1964.
9. А. А. Веденов, Е. П. Велихов и Р. З. Сагдеев, Устойчивость плазмы, УФН **73**, 701 (1961).
10. В. М. Агранович и В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, «Наука», 1965.
11. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.
12. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
13. В. Л. Гинзбург, Об электромагнитных волнах в изотропных и кристаллических средах при учете пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости, ЖЭТФ **34**, 1593 (1958).
14. Л. М. Коврижных, А. А. Рухадзе и В. П. Силин, О колебаниях неоднородной плазмы низкого давления, ЖЭТФ **44**, 1953 (1963).
15. А. А. Рухадзе и В. П. Силин, Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы, УФН **82**, 499 (1964).
16. Л. И. Мандельштам, О показателе преломления среды со связанными и со свободными электронами, J. Phys. USSR 4, 9 (1941).
17. C. G. Darwin, The refractive index of an ionized medium, Proc. Roy. Soc. **182**, 152 (1943), см. также Proc. Roy. Soc. **146**, 17 (1934).
18. В. Л. Гинзбург, К вопросу о показателе преломления для ионизированного газа, Изв. АН СССР, сер. физ. 8, 76 (1944).
19. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, 1949.
20. G. Burkhardt, Dispersionvermögen und Eigenschwingung eines ionisierten Gases, Ann. Physik **5**, 373 (1950).
21. Б. Б. Кадомцев, О действующем поле в плазме, ЖЭТФ **33**, 151 (1957).
22. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.
23. Д. Пайнс, Элементарные возбуждения в твердых телах, «Мир», 1965.

---

*) Укажем, что, помимо общепринятых сокращений, журнал «Радиофизика» (Изв. вузов) указывается просто как «Радиофизика».

24. S. Raimes, The theory of plasma oscillations in metals, Reps. Progr. Phys. **20**, 1 (1957).
25. А. А. Веденов, Плазма твердых тел, УФН **84**, 533 (1964).
26. Б. Н. Гершман и В. А. Угаров, Распространение и генерация низкочастотных электромагнитных волн в верхней атмосфере, УФН **72**, 235 (1960).
27. Ф. Блох, Молекулярная теория магнетизма, ОНТИ, 1936.
28. С. Чепмен и Т. Коулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.
29. Б. И. Давыдов, К теории движения электронов в газах и полупроводниках, ЖЭТФ **7**, 1069 (1937).
30. А. В. Гуревич, О температуре электронов в плазме в переменном электрическом поле, ЖЭТФ **35**, 392 (1958).
31. В. Л. Гинзбург и А. В. Гуревич, Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле, УФН **70**, 201, 393 (1960); Fortschr. Phys. **8**, 97 (1960).
32. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург и Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, 1953.
33. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика. Нерелятивистская теория, Физматгиз, 1963.
34. Д. В. Сивухин, Кулоновские столкновения в полностью ионизированной плазме. Вопросы теории плазмы, вып. IV, Атомиздат, 1964, стр. 81.
35. В. П. Силин, Кинетическое уравнение для быстропеременных процессов, ЖЭТФ **38**, 1771 (1960).
36. В. П. Силин и А. Р. Шистер, К теории поперечной диффузии, статической и высокочастотной проводимости плазмы, находящейся в сильном магнитном поле, ЖЭТФ **49**, 193 (1965).
37. М. Николе, Аэрономия, «Мир», 1964.
38. А. Д. Данилов и Г. С. Иванов-Холодный, Исследование ионно-молекулярных реакций и диссоциативной рекомбинации в верхней атмосфере и в лаборатории, УФН 85, 259 (1965).
39. M. H. Johnson a. E. O. Hulburt, Diffusion in the ionosphere, Phys. Rev. **79**, 802 (1950).
40. Б. Н. Гершман, О диффузии в ионосфере, Радиотехника и электроника **1**, 720 (1956).
41. С. К. Митра, Верхняя атмосфера, ИЛ, 1955.
42. Г. Месси и Е. Бархоп, Электронные и ионные соударения, ИЛ, 1958.
43. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, Изд-во АН СССР, 1960.
44. Дж. Хастед, Физика атомных столкновений, «Мир», 1965.
45. A. von Engel, Ionized gases, Clarendon Press, Oxford, 1965.
46. Распределение электронной концентрации в ионосфере и экзосфере, «Мир», 1964.
47. Физика верхней атмосферы, Сб. статей, под ред. Дж. А. Ратклиф, Физматгиз, 1963.
48. А. В. Гуревич, Влияние электрического поля на распределение по скоростям электронов в молекулярной плазме (ионосфере), Радиофизика **2**, 355 (1959).
49. R. H. Healey a. J. W. Reed, The behaviour of slow electrons in gases, Sydney, 1941.
50. L. G. H. Huxley a. A. A. Zaazou, Experimental and theoretical studies of the behaviour of slow electrons in air, Proc. Roy. Soc. **196**, 402, 427 (1949); см. также Proc. Roy. Soc. **218**, 507 (1953); Nuovo Cimento, Suppl. **9**, 59 (1952).

51. Л. Д. Ландау, Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия ЖЭТФ **7**, 203 (1937); Phys. Z. Sowjet **10**, 154 (1936).
52. A. Delgarno, M. B. McElroy a. R. J. Moffett, Electron temperatures in the ionosphere, Planet. Space Sci. **11**, 463 (1963).
53. L. A. Maynard a. E. D. DuCharme, A new technique for the measurement of the electron/ion temperature ratio at high altitudes, Canad. J. Phys. **43**, 2088 (1965).
54. А. В. Гуревич, О влиянии радиоволн на свойства плазмы (ионосферы), ЖЭТФ **30**, 1112 (1956).
55. В. Л. Гинзбург, О поглощении радиоволн и числе соударений в ионосфере, J. Phys. USSR **8**, 253 (1944).
56. R. C. Majumdar, Die Theorie der Ionosphäre, Z. Phys. **107**, 599 (1937).
57. В. Л. Гинзбург, О влиянии междуэлектронных соударений на поглощение радиоволн в F-слое и солнечной короне, ЖТФ **21**, 943 (1951).
58. R. Landshoff, Transport phenomena in a completely ionized gas in presense of a magnetic field, Phys. Rev. **76**, 904 (1949); **82**, 442 (1951).
59. I. P. Shkarofsky, Values of the transport coefficients in a plasma for any degree of ionization, Canad. J. Phys. **39**, 1619 (1961).
60. R. C. Hwa, Effects of electron-electron interactions on cyclotron resonances in gaseous plasmas, Phys. Rev. **110**, 307 (1958).
61. A. R. Hochstim, Convergence of transport coefficients in plasma, Rep. Belgrade Conference, preprint (1965).
62. А. А. Власов, О вибрационных свойствах электронного газа, ЖЭТФ **8**, 291 (1938).
63. Л. Д. Ландау, О колебаниях электронной плазмы, ЖЭТФ **16**, 574 (1946); J. Phys. USSR **10**, 25 (1946).
64. N. G. van Kampen, On the theory of stationary waves in plasmas, Physica **21**, 949 (1955).
65. I. Bernstein, J. M. Greene a. M. D. Kruskal, Exact nonlinear plasma oscillations, Phys. Rev. **108**, 546 (1957).
66. F. Berz, On the theory of plasma waves, Proc. Phys. Soc. **69B**, 939(1956).
67. P. C. Clemmow a. A. J. Willson, The dispersion equation in plasma oscillations, Proc. Roy. Soc. **237**, 117 (1956); см. также Cambr. Phil. Soc. **53**, 222 (1958).
68. D. Bohm a. E. P. Gross, Theory of plasma oscillations, Phys. Rev. **75**, 1851 (1949); **82**, 232 (1951); см. также «Электромагнитные волны в плазме», сб. переводов из серии «Проблемы современной физики», вып. 11, ИЛ, 1952.
69. Б. Н. Гершман, К вопросу о распространении электромагнитных волн в слаборелятивистской магнитоактивной плазме, Радиофизика **3**, 534 (1960).
70. В. Д. Шафранов, Распространение электромагнитного поля в среде с пространственной дисперсией, ЖЭТФ **34**, 1475 (1958).
71. Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958), т. I, Главатомиздат, 1959.
72. В. Д. Шафранов, Электромагнитные волны в плазме. Вопросы теории плазмы, вып. III, Атомиздат, 1963, стр. 3.
73. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, О возможных механизмах спорадического радиоизлучения Солнца (излучение в изотропной плазме), Астрон. ж. **35**, 694 (1958).
74. В. Л. Гинзбург, Некоторые вопросы теории излучения при сверхсветовом движении в среде, УФН **69**, 537 (1959); Fortschr. Phys. **8**,295 (1960).
75. А. А. Андронов, К вопросу о нарастании и затухании плазменных волн, Радиофизика **4**, 861 (1961).
76. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков и В. Я. Эйдман, Излучение электромагнитных волн и неустойчивость при сверхсветовом

движении в среде, Phil. Mag. **7**, 451 (1962); см. также Phil. Mag. **11**, 197, 876 (1965).

77. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, «Наука», 1964.
78. В. Л. Гинзбург, Квантовая теория светового излучения электрона, равномерно движущегося в среде, ЖЭТФ **10**, 589 (1940); J. Phys. USSR **2**, 441 (1940).
79. А. А. Веденов, Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. Вопросы теории плазмы, вып. III, Атомиздат, 1963, стр. 203; см. также Атомная энергия **13**, 5 (1962).
80. А. А. Веденов, Е. П. Велихов и Р. З. Сагдеев, Нелинейные колебания разреженной плазмы. Ядерный синтез (Nucl. Fusion) **1**, 82 (1961).
81. В. Е. Захаров и В. И. Карпман, О нелинейной теории затухания плазменных волн, ЖЭТФ **43**, 490 (1962); см. также Журнал прикладной механики и технической физики, Новосибирск, № 4, 3 (1964).
82. Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы. Вопросы теории плазмы, вып. IV, Атомиздат, 1964, стр. 188.
83. Ю. А. Романов и Г. Ф. Филиппов, Взаимодействие потоков быстрых электронов с продольными плазменными волнами, ЖЭТФ **40**, 123 (1961).
84. W. E. Drummond a. D. Pines, Non-linear stability of plasma oscillations, Ядерный синтез (Nucl. Fusion), Suppl., p. **3**, 1049 (1962).
85. Л. М. Альтшуль и В. И. Карпман, Кинетика волн в слаботурбулентной плазме, ЖЭТФ **47**, 1552 (1964); см. также ДАН СССР **152**, 587 (1963).
86. В. Н. Цитович, Нелинейные эффекты в плазме, «Наука», 1966.
87. В. П. Силин, Исследование спектра системы многих частиц методом квантового кинетического уравнения, Тр. ФИАН СССР **6**, 199 (1955); ЖЭТФ, **23**, 649 (1952).
88. G. Dresselhaus, A. F. Kip a. C. Kittel, Plasma resonance in crystals, Phys. Rev. **100**, 618 (1955); см. также Phys. Rev. **98**, 368, 556 (1955).
89. Д. Пайнс, Коллективные потери в твердых телах, УФН **62**, 399 (1957); Revs. Mod. Phys. **28**, 184 (1956); см. также Nuovo Cimento., Suppl., № 2, 329 (1958).
90. Е. Л. Фейнберг, Коллективные колебания электронов в кристалле, ЖЭТФ **34**, 1125 (1958).
91. Б. Н. Гершман, О продольных волнах в неизотермической плазме, Радиофизика **2**, 654 (1959).
92. Г. В. Гордеев, Низкочастотные колебания плазмы, ЖЭТФ **27**, 19 (1954).
93. I. Bernstein, Waves in a plasma in a magnetic field, Phys. Rev. **109**, 10 (1958).
94. К. Н. Степанов, Низкочастотные колебания плазмы в магнитном поле, ЖЭТФ **35**, 1155 (1958).
95. Л. М. Коврижных, О колебаниях электронно-ионной плазмы, ЖЭТФ **37**, 1692 (1959).
96. L. R. O. Storey, An investigation of whistling atmospherics, Phil. Trans. Roy. Soc. **246**, 113 (1953); см. также Canad. J. Phys. **34**, 1153 (1956); **35**, 1107 (1957).
97. Геофизика. Околоземное космическое пространство, «Мир», Москва, 1964.
98. E. V. Appleton a. G. Builder, The ionosphere as a doublyrefracting medium, Proc. Phys. Soc. **45**, 208 (1933).

99. H. G. Booker, Some general properties of the formulae of the magneto-ionic theory, Proc. Roy. Soc. **147**, 352 (1934); см. также **150**, 267 (1935).
100. G. Goubau, Zur Dispersionstheorie der Ionosphere. Hochfre-quenztechn. u. Elektroakust. **45**, 179 (1935); **46**, 37 (1935).
101. J. Scott, The Poynting vector in the ionosphere, Proc. JRE **38**, 1057 (1950).
102. K. C. Westfold, The interpretation of the magneto-ionic theory, J. Atmos. a Terr. Phys. **1**, 152 (1951).
103. V. A. Bailey, Some methods for studying wave-propagation in a uniform magneto-ionic medium, J. Atmos. a Terr. Phys. **12**, 118 (1958).
104. В. Эллис, С. Буксбаум, Л. Берс, Волны в анизотропной плазме, Атомиздат, 1966.
105. K. G. Budden, Radio waves in the ionosphere, University Press, Cambridge, 1961.
106. K. Rawer a. K. Suchy, Radio-observations of the ionosphere. Handbuch d. Physik **49/2** (1967).
107. Е. А. Бенедиктов, О квазипродольном распространении радиоволн в ионосфере, Уч. зап. Горьковск. ун-та **27**, 43 (1954).
108. H. Poeverlein, Propagation of electromagnetic waves in a plasma with strong magnetic field, Phys. Fluids **4**, 397 (1961).
109. Б. Н. Гершман, Об одном приближении в теории распространения обыкновенных волн в плазме, находящейся в сильном магнитном поле, ЖТФ **34**, 1351 (1964).
110. В. Л. Гинзбург и Н. Н. Мейман, О дисперсионных соотношениях для показателей преломления и поглощения, ЖЭТФ **46**, 243 (1964).
111. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, О поглощении и излучении электромагнитных волн магнитоактивной плазмой, Радиофизика **1**, № 2, 59 (1958).
112. В. Я. Эйдман, Излучение электрона, движущегося в магнитоактивной плазме, ЖЭТФ **34**, 131 (1958); **36**, 1335 (1959); Радиофизика **3**, 192 (1960).
113. В. А. Трубников, Излучение плазмы в магнитном поле, ДАН СССР **118**, 913 (1958); см. также Phys. Fluids **4**, 195 (1961).
114. А. Е. Бажанова и В. Д. Шафранов, Об излучении заряда, движущегося в плазме, вблизи циклотронного резонанса, ДАН СССР **149**, 1049 (1963).
115. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, вып. I-IV, Изд-во АН СССР, 1958.
116. А. И. Ахиезер и Л. Э. Паргаманик, Свободные колебания электронной плазмы в магнитном поле, Уч. зап. Харьковск. ун-та **27**, 75 (1948).
117. Б. Н. Гершман, О распространении электромагнитных волн в плазме, находящейся в магнитном поле, при учете теплового движения электронов, ЖЭТФ **24**, 659 (1953).
118. Г. В. Гордеев, Колебания плазмы в магнитном поле, ЖЭТФ **23**, 660 (1952); **27**, 24 (1954).
119. А. Г. Ситенко и К. Н. Степанов, О колебаниях электронной плазмы в магнитном поле, ЖЭТФ **31**, 642 (1956); см. также ЖТФ **28**, 1789 (1958); ЖЭТФ **35**, 283 (1958).
120. T. Pradhan, Plasma oscillations in steady magnetic field: circularly polarized electromagnetic modes, Phys. Rev. **107**, 1222 (1957).
121. Б. Н. Гершман, О нормальных волнах в однородной плазме, находящейся в магнитном поле, Сб. памяти А. А. Андронова, Изд-во АН СССР, 1955, стр. 599; см. также ЖЭТФ **31**, 707 (1956).

122. Б. Н. **Гершман**, В. Л. **Гинзбург** и Н. Г. **Денисов**, Распространение электромагнитных волн в плазме (ионосфере), УФН **61**, 561 (1957).
123. В. Л. **Гинзбург**, О магнитогидродинамических волнах в газе, ЖЭТФ **21**, 788 (1951).
124. J. H. **Piddington**, Hydromagnetic waves in ionized gas, Monthly Notices. Roy. Astron. Soc. **115**, 671 (1955); см. также Phil. Mag. **46**, 1037 (1955).
125. В. Л. **Гинзбург**, Об электродинамике анизотропной среды, ЖЭТФ **10**, 601 (1940).
126. Ю. А. **Рыжов**, Метод Гамильтона в электродинамике анизотропных поглощающих сред, Радиофизика **2**, 869 (1959).
127. В. Л. **Гинзбург** и В. Я. **Эйдман**, О силе реакции излучения при движении заряда в среде, ЖЭТФ **36**, 1823 (1959).
128. В. В.] **Железняков**, О магнитотормозном излучении и неустойчивости системы заряженных частиц в плазме, Радиофизика **2**, 14 (1959); **3**, 57 (1960).
129. В. Л. **Гинзбург** и В. Я. **Эйдман**, О реакции излучения в случае сред с отрицательным поглощением, ЖЭТФ **43**, 1865 (1962).
130. В. Л. **Гинзбург**, К квантовой электродинамике. III, ДАН СССР **24**, 130 (1939).
131. И. М. **Франк**, Эффект Доплера в преломляющей среде, Изв. АН СССР, сер. физ., **6**, 3 (1942).
132. В. Л. **Гинзбург** и И. М. **Франк**, Об эффекте Доплера при сверхсветовой скорости, ДАН СССР **56**, 583 (1947); см. также ЖЭТФ **35**, 817 (1958).
133. М. Е. **Герценштейн**, Диэлектрическая проницаемость плазмы, находящейся в стационарном магнитном поле, ЖЭТФ **27**, 180 (1954).
134. В. В. **Железняков**, О гирорезонансном излучении и поглощении в равновесной магнитоактивной плазме, Радиофизика **7**, 67 (1964).
135. J. P. **Wild**, S. F. **Smerd** a. A. A. **Weiss**, Solar bursts, Annual Rev. Astron. a. Astrophys. **1**, 291 (1963); русский перевод: УФН **84**, 99 (1964).
136. R. Q. **Twiss**, Radiation transfer and the possibility of negative absorption in radio astronomy. Austral. J. Phys. **11**, 564 (1958).
137. В. В. **Железняков**, О магнитотормозном излучении и неустойчивости системы заряженных частиц в плазме, Радиофизика **2**, 14 (1959).
138. А. А. **Андронов**, В. В. **Железняков** и М. И. **Петелин**, О кинетической неустойчивости однородной магнитоактивной плазмы, Радиофизика **7**, 251 (1964).
139. J. E. **Drummond**, Microwave propagation in hot magnetoplasmas, Phys. Rev. **112**, 1460 (1958).
140. А. И. **Ахиезер** и Р. В. **Половин**, К теории волновых движений релятивистской плазмы, ЖЭТФ **30**, 915 (1956).
141. D. B. **Beard**, Relativistic calculation for cyclotron radiation from hot plasmas, Phys. Fluids **3**, 324 (1960); см. также **2**, 379 (1959).
142. A. **Einstein**, Zur Quantentheorie der Strahlung, Phys. Z. **18**, 121 (1917); русский перевод: УФН **86**, 371 (1965).
143. Б. Н. **Гершман**, О нерезонансном поглощении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, ЖЭТФ **37**, 695 (1959).
144. Б. Н. **Гершман**, О гирорезонансном поглощении электромагнитных волн в плазме, ЖЭТФ **38**, 912 (1960).
145. Б. Н. **Гершман**, О некоторых особенностях поперечного распространения высокочастотных волн в магнитоактивной плазме, ДАН СССР **137**, 822 (1961).

146. Б. Н. Гершман, К вопросу о распространении свистящих атмосфериков в верхней атмосфере, Радиофизика 1, № 5—6, 49 (1958).
147. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, О распространении электромагнитных волн в солнечной короне при учете влияния магнитного поля, Астрон. ж. 36, 233 (1959).
148. В. В. Железняков и Е. Я. Златник, О поляризации радиоволн, прошедших через область поперечного магнитного поля в солнечной короне, Астрон. ж. 40, 633 (1963).
149. Б. Н. Гершман, О групповой скорости плазменных волн при наличии магнитного поля, Радиофизика 3, 146 (1960).
150. Б. Н. Гершман и М. С. Ковнер, О некоторых, связанных с учетом соударений особенностях распространения волн в магнитоактивной плазме, Радиофизика 2, 28 (1959).
151. Х. Альфвен, Космическая электродинамика, ИЛ, 1952.
152. С. И. Сыроватский, Магнитная гидродинамика, УФН 62, 247 (1957).
153. D. Montgomery, Development of hydromagnetic shocks from large amplitude Alfven waves, Phys. Rev. Letters 2, 36 (1959).
154. J. Bazer a. W. B. Ericson, Hydromagnetic shocks, Astrophys. J. 129, 758 (1959).
155. «Динамика плазмы», сб. переводов из серии «Проблемы современной физики», вып. 2. 1956; см. также сб. «Магнитная гидродинамика» той же серии, вып. 2, 1954; вып. 7, 1957.
156. А. Г. Куликовский и Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, Физматгиз, 1962.
157. Т. Каулинг, Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1959.
158. С. Б. Пикельнер, Основы космической электродинамики, «Наука», 1966.
159. Дж. Данжи, Космическая электродинамика, Атомиздат, 1961.
160. С. И. Брагинский, Явления переноса в плазме. Вопросы теории плазмы, вып. I, Атомиздат, 1963, стр. 191.
161. Т. Ф. Волков, Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы. Вопросы теории плазмы, вып. IV, Атомиздат, 1964, стр. 3.
162. Б. Н. Гершман и В. Л. Гинзбург, О влиянии магнитного поля на конвективную неустойчивость в атмосферах звезд и в земной ионосфере, Астрон. ж. 32, 201 (1955); Уч. зап. Горьковск. Гос. ун-та 30, 3 (1956).
163. S. Chandrasekhar, A. N. Kaufman a. K. W. Watson, Properties of an ionized gas of low density in a magnetic field, Ann. Physics 2, 435 (1957); 5, 1 (1958).
164. G. F. Chew, M. L. Goldberger a. F. E. Low, The Boltzmann equation and the one fluid hydromagnetic equations in the absence of the particle collisions, Proc. Roy. Soc. 236, 112 (1956).
165. В. В. Рыбин, Замечания об электропроводности верхней атмосферы, Геомагн. и аэрон. 6, 395 (1966).
166. Б. Н. Гершман и В. Л. Гинзбург, Об образовании ионосферных неоднородностей, Радиофизика 2, 8 (1959).
167. В. П. Докучаев, Движение ионизированного газа в верхней атмосфере, Радиофизика 4, 5 (1961).
168. S. Kato, Theory of movement of irregularities in the ionosphere, Space Sci. Revs. 4, 223 (1965).
169. А. В. Гуревич, Расплывание неоднородностей в слабоионизированной плазме в магнитном поле, ЖЭТФ, 44, 1302 (1963).
170. Г. И. Григорьев, Влияние соударений электронов с ионами на диффузию неоднородностей в ионосфере, Геомагн. и аэрон. 4, 183 (1964); см. также 4, 246 (1966).

171. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, О диффузионном расплывании неоднородностей в слабоионизированной плазме, Геомагн. и аэрон. 5, 251, 1965; см. также 6, 255 (1966).
172. Е. Е. Цедилина, О движении неоднородностей в плазме (ионосфере), Геомагн. и аэрон. 5, 679 (1965).
173. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Движение и расплывание неоднородностей в плазме, УФН 91, 609 (1966).
174. Р. З. Сагдеев, Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, Вопросы физики плазмы, вып. IV, Атомиздат, 1964, стр. 20.
175. E. Aström, On waves in an ionized gas, Arkiv fys. **2**, 443 (1951).
176. С. И. Брагинский, О типах колебаний плазмы в магнитном поле, ДАН СССР **115**, 475 (1957).
177. Б. Н. Гершман и М. С. Ковнер, Об особенности квазипоперечного распространения магнитогидродинамических волн в плазме, Радиофизика 1, № 3, 19 (1958).
178. Б. Н. Гершман, Кинетическая теория магнитогидродинамических волн, ЖЭТФ **24**, 453 (1953).
179. К. Н. Степанов, Кинетическая теория магнитогидродинамических волн, ЖЭТФ **34**, 1292 (1958).
180. Б. Н. Гершман, К кинетической теории распространения магнитогидродинамических волн в плазме, Радиофизика 1, № 4, 3 (1958); Астрон. ж. **36**, 190 (1959).
181. R. Gans, Fortpflanzung des Lichtes durch ein inhomogenes Medium, Ann. Physik **47**, 709 (1915).
182. D. R. Hartree, Optical and equivalent paths in a stratified medium treated from a wave standpoint, Proc. Roy. Soc. **131**, 428 (1931).
183. Л. А. Жекулин, Исследование распространения электромагнитной волны в негомогенной ионизированной среде, ЖЭТФ **4**, 76 (1934).
184. Я. Л. Альперт и В. Л. Гинзбург, О поглощении радиоволн в ионосфере, Изв. АН СССР, сер. физ., 8, 42 (1944).
185. O. Rydbeck, The reflection of electromagnetic waves from a parabolic ionized layer, Phil. Mag. **34** 342 (1943); Phil. Mag. **30**, 282 (1940).
186. P. Epstein, Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **16**, 627 (1930).
187. K. Rawer, Elektrische Wellen in einem geschichteten Medium, Ann. Physik **35**, 385 (1939); **42**, 294 (1942).
188. J. Wallot, Der senkrechte Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Schicht räumlich veränderlicher Dielektrizitäts Konstante, Ann. Physik **60**, 734 (1919).
189. K. Försterling, Uber die Ausbreitung des Lichtes in inhomogenen Medien, Ann. Physik **11**, 1 (1931).
190. G. J. Elias, Reflection of electromagnetic waves at ionized media with variable conductivity and dielectric constant, Proc. IRE **19**, 891 (1931).
191. С. М. Рытов и Ф. С. Юдневич, Об отражении электромагнитных волн от слоя отрицательной диэлектрической постоянной, ЖЭТФ **10**, 887 (1940).
192. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, Изд-во АН СССР, 1957.
193. H. Bremmer, Propagation of electromagnetic waves. Handbuch d. Physik **16**, 423 (1958).
194. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, Изд-во АН СССР, 1961.
195. W. Kofink, Reflexion electromagnetischer Wellen an einer inhomogenen Schicht, Ann. Physik **1**, 119 (1948).

196. Л. П. Пресняков и И. И. Собельман, О распространении электромагнитных волн в среде с переменным показателем преломления, Радиофизика 8, 57 (1965).

197. Н. Г. Денисов, К теории распространения радиоволн в ионосфере, Уч. зап. Горьк. гос. ун-та **35**, 3 (1957).

198. K. G. Budden, Lectures on magnetoionic theory, Blackie, London, 1964.

199. Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.

200. В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, Изд-ие Информационного отдела НИИ 108, Москва, 1946.

201. O. Rydbeck, On the propagation of radio waves, Trans. Chalmers Univ., Sweden, № 34, 1944.

202. Е. Т. Уиттакер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, Гостехиздат, 1934.

203. Дж. В. Стретт (лорд Рэлей), Теория звука, I, § 148б, Гостехиздат, 1955.

204. K. Försterling, Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem geschichteten Medium unter der Mitwirkung eines Magnetfeldes bei schiefer Inzidenz, Arch. elektr. Ubertrag. 3, 115 (1949); 5, 209 (1950).

205. K. Försterling u. H. O. Wüster, Entstehung von Oberwellen in der Ionosphäre, J. Atmos. a. Terr. Phys. **2**, 22 (1951).

206. Н. Г. Денисов, Об одной особенности поля электромагнитной волны, распространяющейся в неоднородной плазме, ЖЭТФ **31**, 609 (1956).

207. В. В. Железняков, К теории спорадического радиоизлучения Солнца, Радиотехника и электроника **1**, 840 (1956).

207a. D. A. Tidman, Radio emission by plasma oscillations in non-uniform plasmas, Phys. Rev. **117**, 366 (1960).

208. В. В. Железняков и Е. Я. Злотник, О переходе плазменных волн в электромагнитные в неоднородной изотропной плазме, Радиофизика 5, 644 (1962).

209. В. А. Фок, Приближенное представление волновых функций проникающих орбит, ДАН СССР **1**, 241 (1934).

210. А. В. Гапонов и М. А. Миллер, О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле, ЖЭТФ **34**, 242 (1958).

211. В. Б. Гильденбург, О нелинейных эффектах в неоднородной плазме, ЖЭТФ **46**, 2156 (1964).

212. В. Л. Гинзбург и Г. П. Мотулевич, Оптические свойства металлов, УФН 55, 469 (1955).

213. В. Л. Гинзбург и Л. М. Озерной, О роли когерентного плазменного радиоизлучения для квазаров и остатков сверхновых звезд, Радиофизика **9**, 221 (1966); см. также Astrophys. J. **144**, 599 (1966).

214. E. E. Salpeter, Electron density fluctuations in a plasma, Phys. Rev. **120**, 1528 (1960); см. также Phys. Rev. **122**, 1663 (1961); J. Geophys. Res. **68**, 1321 (1963).

215. F. Perkins a. E. E. Salpeter, Enhancement of plasma density fluctuation by nonthermal electrons, Phys. Rev. **139A**, 55 (1965).

216. F. W. Perkins, E. E. Salpeter a. K. O. Yngvesson, Incoherent scatter from plasma oscillations in the ionosphere, Phys. Rev. Letters **14**, 579 (1965).

217. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, Изд-во Харьковск. гос. ун-та, 1965.

218. В. Л. Гинзбург, Об отражении электромагнитного импульса от ионосферы, ЖЭТФ **12**, 449 (1942); J. Phys. USSR **6**, 167 (1942); см. также УФН 28, 155 (1946).

219. A. Sommerfeld a. L. Brillouin, Über die Fortpflanzug des Lichtes in dispergierenden Medien, Ann. Physik 44, 177, 203 (1914).
220. L. Brillouin, Wave propagation and group velocity, N. Y. a. London, 1960.
221. Н. Г. Денисов, Распространение электромагнитных сигналов в ионизированном газе, ЖЭТФ 21, 1354 (1951).
222. Л. А. Жекулин, Отражение импульса от неоднородного ионизированного слоя, Изв. АН СССР, сер. физ. 4, 409(1940).
223. Б. Н. Гершман, О расплывании электромагнитных импульсов, распространяющихся в ионосфере, ЖТФ 22, 101 (1952).
224. С. М. Рытов, Некоторые теоремы о групповой скорости электромагнитных волн, ЖЭТФ 17, 930 (1947).
225. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, «Сов. радио», 1957.
226. Л. А. Вайнштейн, Групповая скорость затухающих волн, ЖТФ 27, 2606 (1957).
227. В. Л. Гинзбург, О законе сохранения и выражении для плотности энергии в электродинамике поглощающей диспергирующей среды, Радиофизика 4, 75 (1961).
228. Б. Б. Кадомцев, А. Б. Михайловский и А. В. Тимофеев, Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах, ЖЭТФ 47, 2266 (1964).
229. Б. Н. Гершман и В. Л. Гинзбург, Несколько замечаний о распространении волн в анизотропной, диспергирующей среде, Радиофизика 5, 31 (1962).
230. В. Л. Гинзбург, О законе сохранения энергии в электродинамике сред с пространственной дисперсией, Радиофизика 5, 473 (1962).
231. М. Е. Герценштейн, Энергетические соотношения в пространственно-диспергирующих средах, ЖЭТФ 26, 680 (1954).
232. К. А. Барсуков и В. Л. Гинзбург, О направлении луча и групповой скорости в поглощающей анизотропной среде, Радиофизика 7, 1187 (1964).
233. В. М. Агранович и В. Л. Гинзбург, Некоторые вопросы кристаллооптики с учетом пространственной дисперсии и теории экситонов, Fortschr. Phys. 13, 175 (1965).
234. В. Л. Гинзбург, О влиянии земного магнитного поля на отражение радиоволн от ионосферы, J. Phys. USSR 7, 289 (1943).
235. В. Л. Гинзбург, Об исследовании напряжений оптическим методом, ЖТФ 14, 181 (1944).
236. Я. Л. Альперт, О траектории лучей в магнитоактивной ионизированной среде — ионосфере, Изв. АН СССР, сер. физ., 12, 241, 267 (1948).
237. В. Л. Гинзбург, К теории распространения электромагнитных волн в магнитоактивной среде, ЖЭТФ 18, 487 (1948).
238. K. Försterling, Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem magnetisierten Medium bei senkrechter Inzidenz, Hochfrequentech. u. Elektroakust. 59, 10 (1942).
239. H. Bremmer, Terrestrial radio waves. Theory of propagation, Amsterdam, 1949.
240. J. Shmoys, Long-range propagation of low-frequency radio waves between the earth and the ionosphere, Proc. IRE 44, 163 (1956).
241. W. O. Schuman, Der Einfluss des Erdmagnetfeldes auf die Ausbreitung elektrischer Längstwellen, Z. angew. Phys. 7, 284 (1955).
242. J. Heading, The reflexion of vertically-incident long radio waves from the Ionosphere when the earth's magnetic field is oblique, Proc. Roy. Soc. 231, 414 (1955).

243. K. G. Budden, The numerical solution of differential equations governing reflection of long radio waves from the ionosphere, Proc. Roy. Soc. **227**, 516 (1955).

244. Physics of the ionosphere (Report of the Physical Soc. conference at Cambridge), London, 1955.

245. H. Poeverlein, Low-frequency reflection in the ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. **12**, 126 (1958).

246. H. G. Booker, Oblique propagation of electromagnetic waves in a slowly-varying non-isotropic medium, Proc. Soc. **155**, 235 (1936).

247. J. J. Gibbons a. R. J. Nertney, Wave solutions, including coupling of ionospherically reflected long radio waves for a particular E-region model, J. Geophys. Res. **57**, 323 (1952).

248. K. G. Budden, The theory of the limiting polarization of radio waves reflected from the ionosphere, Proc. Roy. Soc. **215**, 215 (1952).

249. N. Davids a. R. W. Parkinson, Wave solutions for critical and non-critical coupling conditions in the ionosphere. J. Atmos. a. Terr. Phys. **7**, 173 (1955).

250. R. Roy a. J. K. D. Verma, Polarization of electromagnetic waves for vertical propagation in the ionosphere, J. Geophys. Res. **60**, 457 (1955).

251. O. Rydbeck, On the propagation of radio waves, Trans. Chalmers Univ., Sweden, № 34 (1944).

252. K. G. Budden, The non-existence of «fourth-reflection condition» for radio waves in the ionosphere, Physics of the Ionosphere (Report of the Physical Soc. conference at Cambridge), London, 1955, стр. 320.

253. Н. Г. Денисов, Влияние постоянного магнитного поля на резонансный эффект, наблюдающийся при отражении электромагнитной волны от неоднородной плазмы, Радиотехника и электроника **1**, 732 (1956).

254. Н. Г. Денисов, О поглощении радиоволн в резонансных областях неоднородной плазмы, Радиотехника и электроника **4**, 388 (1959); краткое сообщ. см. ЖЭТФ **34**, 528 (1958).

255. O. Rydbeck, Magneto-ionic triple spliting of ionospheric waves, J. Appl. Phys. **21**, 1205 (1950); см. также сб. «The theory of electromagnetic waves», Interscience Publishers, 1951, 193.

256. T. L. Eckersley, Coupling of the ordinary and extraordinary rays in the ionosphere, Proc. Phys. Soc. **63B**, 49 (1950).

257. W. Becker, Ein Beitrag zur Frage der Dreifachaufspaltung in die Ionosphäre, Z. angew. Phys. **3**, 83 (1951).

258. W. Pfister, Magneto-ionic multiple splitting determined with the method of phase integration. J. Geophys. Res. **58**, 29 (1953).

259. Н. Г. Денисов, О взаимодействии необыкновенной и обыкновенной волн в ионосфере и эффекте умножения отраженных сигналов, ЖЭТФ **29**, 380 (1955).

260. В. В. Железняков, О взаимодействии электромагнитных волн в плазме. I и II, Радиофизика **1**, 32 (1958); **2**, 858 (1959).

261. Н. Д. Булатов, Об ионосферно-магнитных возмущениях. Тр. Сибирск. физ.-техн. ин-та при Томском ун-те **6**, 122 (1940).

262. В. М. Дриацкий, О магнитоионном расщеплении в спорадическом *E*-слое, ДАН СССР **58**, 775 (1947).

263. G. R. Ellis, *F*-region triple splitting, J. Atmos. a. Terr. Phys. **3**, 263 (1953).

264. G. R. Ellis, The *Z*-propagation hole in the ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. 8, 43 (1956).

265. T. C. W. Scott, Longitudinal and transverse propagation in Ganada, J. Geophys. Res. 55, 65 (1950).

266. H. Poeverlein, Strahlwege von Radiowelled in der Ionosphäre, Z. angew. Phys. **1**, 517 (1949); **2**, 152 (1950).

267. J. E. Titheridge, Ray-paths in the ionosphere. Approximate calculations in the presence of the earth's magnetic field, J. Atmos. a. Terr. Phys. **14**, 50 (1959).
268. G. Millington, Ray-path characteristics in the ionosphere, Proc. IEE **101**, p. III, 193; p. IV, 235 (1954).
269. Н. А. Митяков, О наклонном падении радиоволн на анизотропную ионосферу, Радиофизика **2**, 159 (1959).
270. Ю. С. Коробков и В. В. Писарева, Наблюдения ионосферного триплета на низких широтах, Геомагн. и аэрон. **5**, 580 (1965).
271. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, ГТТИ, 1934, гл. IV.
272. E. C. G. Stueckelberg, Theorie der unelastischen Stösse zwischen Atomen, Helv. Phys. Acta **5**, 369 (1932).
273. W. H. Furry, Two notes on phase-integral methods, Phys. Rev. **71**, 360 (1947).
274. «Распространение ультракоротких радиоволн», «Сов. радио», 1954, стр. 73.
275. P. C. Clemmow a. J. Heading, Coupled forms of the differential equations governing radio propagation in the ionosphere, Proc. Cambr. Phil. Soc. **50**, 319 (1954); **53**, 669 (1956).
276. Л. А. Жекулин, Распространение электромагнитных волн в ионизированной магнитоактивной среде, Вестник электротехники **2**, 63 (1930).
277. H. G. Booker, Propagation of wave-packets incident obliquely upon a stratified doubly refracting ionosphere, Phil. Trans. Roy. Soc. **237**, 411 (1938); см. также J. Geophys. Res. **54**, 243 (1949).
278. Распространение радиоволн и физика ионосферы, Сб. переводов из серии «Проблемы современной физики», вып. 6 (1950); вып. 12 (1952); вып. 5 (1953); вып. 4 (1954); вып. 10 (1957).
279. R. F. Mullaly, Ray paths in inhomogeneous anisotropic media, Austral. J. Phys. **15**, 96 (1962).
280. R. F. Mullaly, The ray paths of whistling atmospherics: differential geometry, Austral, J. Phys. **15**, 106 (1962).
281. K. G. Budden a. G. J. Daniell, Rays in magnetoionic theory, J. Atmos. a. Terr. Phys. **27**, 395 (1965).
282. Ю. Я. Яшин, О методе приближения геометрической оптики в теории распространения электромагнитных волн в гиротропной среде, Радиофизика **9**, 1108 (1966).
283. Л. И. Мандельштам, Лекции по избранным вопросам оптики. Полное собр. тр., т. 5, Изд-во АН СССР, 1950, стр. 87.
284. G. Goubau, Reziprozität der Wellenausbreitung durch magnetisch doppelbrechende Medien, Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. **60**, 155(1942).
285. K. G. Budden, A reciprocity theorem on the propagation of radio waves via the ionosphere, Proc. Cambr. Phil. Soc. **50**, 604 (1954).
286. K. G. Budden a. G. W. Jull, Reciprocity and nonreciprocity with magnetoionic rays, Canad. J. Phys. **42**, 113 (1964).
287. Сб. «Исследования космического пространства», «Наука», 1965.
288. А. Н. Казанцев, Исследование ионосферного распространения радиоволн в СССР, Радиотехника и электроника **2**, 1360 (1957).
289. К. И. Грингауз, Некоторые результаты советских экспериментов в ионосфере и межпланетном пространстве, Progr. Radio Sci., v. III, p. 65, Amsterdam, 1965.
290. J. A. Ratcliffe, Some aspects of diffraction theory and their application to the ionosphere, Repts. Progr. Phys. **19**, 188 (1956).
291. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд-во АН СССР, 1958.
292. Д. И. Высоковский, Некоторые вопросы дальнего тропосферного распространения ультракоротких радиоволн, Изд-во АН СССР, 1958.

293. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, Изд-во АН СССР, 1959.

294. В. Л. Гинзбург и В. В. Писарева, О природе колебаний интенсивности солнечного радиоизлучения и неоднородностях в солнечной короне, Тр. 5-го совещания по вопросам космогонии, Изд-во АН СССР, 1956, стр. 229.

295. В. В. Виткевич, Наблюдение рассеяния радиоволн на электронных неоднородностях солнечной короны, Тр. 5-го совещания по вопросам космогонии, Изд-во АН СССР, 1956, стр. 203; см. также Радиотехника и электроника **3**, 478 (1958).

296. A. Hewish, The scattering of radio waves in the solar corona, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **118**, 534 (1958).

297. Paris Symposium on Radio Astronomy, Ed. R. N. Bracewell, Stanford. 1959; русский перевод «Радиоастрономия», ИЛ, 1961.

298. H. Scheffler, Streuung von Radiowellen in der Sonnen Korona, Z. Astrophys. **45**, 113 (1958); см. также Astron. Nachr. **282**, 193 (1955).

299. В. В. Писарева, О дифракции радиоволн на хаотических неоднородностях и колебания интенсивности солнечного и космического радиоизлучения, Астрон. ж. **35**, 112 (1958); Акуст. ж. **6**, 87 (1960).

300. M. L. Pitteway, The reflection of radio waves from a stratified ionosphere modified by weak irregularities, Proc. Roy. Soc. **246**, 556 (1958); **254**, 86 (1959).

301. Н. Г. Денисов и В. А. Зверев, Некоторые вопросы теории распространения волн в средах со случайными неоднородностями, Радиофизика **2**, 521 (1959).

302. Н. Г. Денисов, О распространении волн в плоскослоистой среде, содержащей статистические неоднородности, Радиофизика **1**, № 5—6, 34 (1958).

303. Н. Г. Денисов, Рассеяние волн в плоскослоистой среде, Радиофизика **1**, № 5—6, 41 (1958); **3**, 208 (1960); **4**, 630 (1961).

304. Н. Г. Денисов, О флуктуациях амплитуды и фазы волны, прошедшей через слой со случайными неоднородностями, Радиофизика **2**, 316 (1959); см. также **3**, 393 (1960).

305. Е. А. Бенедиктов и Н. А. Митяков, О рассеянии радиоволн в ионосфере, Радиофизика **2**, 344 (1959).

306. В. Л. Гинзбург, О неионосферных колебаниях интенсивности радиоизлучения туманностей, ДАН СССР **109**, 61 (1956).

307. A. Hewish, P. F. Scott a. D. Wills, Interplanetary scintillation of small diametr radio sources, Nature **203**, 1214 (1964).

307a. K. Rawer, Erforschung der Ionosphäre mit Radiowellen von Satelliten und Raketen. Phasen-Verfahren, Space Sci. Rev. **3**, 380 (1964).

308. В. Л. Покровский, С. К. Саввиных и Ф. Р. Улинич, Надбарьерное отражение в квазиклассическом приближении, ЖЭТФ **34**, 1272, 1629 (1958).

309. K. Artmann, Berechnung der Seitenversetzung des totalreflektierten Strahles, Ann. Physik. **2**, 87 (1948); см. также C. Fragstein, Ann. Physik. **4**, 271 (1949).

310. E. Chvojkova, Refraction of radiowaves in an ionised medium, Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia 5, 104 (1954); **9**, 1 (1958); Nature 181, 105 (1958); J. Atoms. a. Terr. Phys. **16**, 124 (1959).

311. M. M. Komesaroff a. C. A. Shain, Refraction of extraterrestrial radio waves in the ionosphere, Nature 183, 1584 (1959).

312. Г. А. Гринберг, О распространении радиоволн от вертикального излучателя в атмосфере с меняющимися по высоте диэлектрической постоянной и проводимостью, Изв. АН СССР, сер. физ., **4**, 401 (1940); **7**, 99 (1943).

313. А. Н. Щукин, Распространение радиоволн, Связьиздат, 1940.
314. С. П. Целищев, Отражение радиоволн от ионосферы, Тр. Сибирск. физ.-тех. ин-та при Томском ун-те 6, вып. I, 105 (1941).
315. J. A. Fejer a. R. W. Vice, The use of full-wave solutions in the interpretation of ionospheric absorption measurements. J. Atmos. a. Terr. Phys. 16, 307 (1959).
316. G. Goubau, Zusammenhang zwischen scheinbarer und wahrer Höhe der Ionosphäre unter Berücksichtigung der magnetischen Doppelbrechung, Hochfrequenztechn. und Elektroakust. 44, 17, 138 (1934).
317. K. G. Budden, A method for determining the variation of electron density with height from curves of equivalent height against frequency, «Physics of the Ionosphere» (Report of the Physikal Soc. conference at Cambridge), Лондон, 1955, стр. 332.
318. H. G. Booker a. L. V. Berkner, An ionospheric investigation concerning the Lorentz polarisation correction, Terr. Mag. **43**, 427 (1938).
319. Е. А. Бенедиктов, О некоторых особенностях высотно-частотных характеристик ионосферы вблизи гиромагнитной частоты, Уч. зап. Горьковск. гос. ун-та **27**, 32 (1954).
320. Г. Г. Гетманцев, В. Л. Гинзбург и И. С. Шкловский, Радиоастрономические исследования с помощью искусственных спутников Земли, УФН **66**, 157 (1958).
321 Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев и В. Л. Гинзбург, Радиоастрономические исследования с помощью искусственных спутников и космических ракет, Сб. «Искусств. спутники Земли», вып. 7, 3 (1961); Planet. a Space Sci. **9**, 109 (1962).
322. Е. А. Бенедиктов, О прохождении радиоволн через ионосферу, Радиофизика 3, 33 (1960).
323. Ш. Стейнберг и Ш. Леку, Радиоастрономия, ИЛ, 1963.
324. И. С. Шкловский, Космическое радиоизлучение, Гостехиздат, 1956.
325. В. Л. Гинзбург и С. И. Сыроватский, Происхождение космических лучей, Изд-во АН СССР, 1963. Дополненное англ. изд. Pergamon Press, 1964.
326. В. Л. Гинзбург и С. И. Сыроватский, Происхождение космических лучей, УФН 88, 485 (1966).
327. С. А. Каплан и С. Б. Пикельнер, Межзвездная среда, Физматгиз, 1963.
328. Annual Rev. Astron. a. Astroph., v. 1—4, 1963—1966.
329. D. E. Blackwell, A study of the outher solar corona, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 116, 56 (1956).
330. K. L. Franklin a. B. F. Burke, Radio observations of the planet Jupiter, J. Geophys. Res. **63**, 807 (1958).
331. H. G. Booker, The use of radio stars to study irregular refraction of radio waves in the ionosphere, Proc. IRE 46, 298 (1958).
332. Е. А. Бенедиктов, Об одном радиоастрономическом методе определения поглощения радиоволн в ионосфере, Радиотехника и электроника 4, 1201 (1959).
333. C. G. Little a. H. Leinbach, Some measurements of high-latitude ionospheric absorption using extraterrestrial radio waves, Proc. IRE **46**, 334 (1958).
334. R. Hide, Waves in a heavy, viscous, incompressible, electrically conducting fluid of variable density in the presence of a magnetic field, Proc. Roy. Soc. **233**, 376 (1955).
335. V. C. Ferraro a. C. Plumpton, Hydromagnetic waves in a horizontally stratified atmosphere, Astrophys. J. **127**, 459 (1958); см. также **129**, 752 (1959).

336. H. C. van de Hulst, Zodiacal light in the solar corona. Astrophys. J. 105, 471 (1945); русский перевод: Астрофиз. сб., ИЛ, 1949, стр. 90.
337. S. F. Smerd, Radio-frequency radiation from the quiet sun, Austr. J. Sci. Res. 3, 34 (1950).
338. В. Л. Гинзбург, Об излучении Солнца в области радиочастот, ДАН СССР 52, 491 (1946).
339. И. С. Шкловский, Об излучении радиоволн Галактикой и верхними слоями атмосферы Солнца, Астрон. ж. 23, 333 (1946).
340. D. F. Martyn, Temperature radiation from the quiet sun in the radio spectrum, Nature 158, 632 (1946); Proc. Roy. Soc. 193, 44 (1948).
341. В. Л. Гинзбург, О поглощении радиоволн в солнечной короне. Астрон. ж. 26, 84 (1949).
342. М. Я. Атлас, Распространение радиоволн в атмосфере Солнца, Уч. зап. Горьковск. гос. ун-та 21, 69 (1951).
343. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, О некогерентных механизмах спорадического радиоизлучения Солнца в случае магнитоактивной корональной плазмы, Астрон. ж. 38, 3 (1961).
344. В. В. Железняков, К теории переноса излучения в неоднородной среде, Радиофизика 9, 1057 (1966).
345. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, «Наука», 1967.
346. В. Л. Гинзбург и С. И. Сыроватский, Космическое магнитотормозное (синхротронное) излучение, УФН 87, 65 (1965). Ann. Rev. Astron. a. Astrophys. 3, 297 (1965).
347. G. Elwert, Der Absorbtionkoeffizient an der langwelligen Grenze des Kontinuierlichen Röntgenspekrums. Z. Naturforsch. 3a, 477 (1948).
348. В. А. Разин, Поляризация космического радиоизлучения на волнах 1,45 и 3,3 метра, Астрон. ж. 35, 241 (1958).
349. G. Westerhout, Ch. L. Seeger, W. N. Brouw a. J. Tinbergen, Polarization of the 75-cm galactic radiation, Bull. Astron. Inst. Nederl. (BAN) 16, 187, 213 (1962).
350. В. Л. Гинзбург, О возможности определения напряженности магнитного поля во внешней солнечной короне при ее просвечивании поляризованным радиоизлучением дискретных источников, Радиофизика 3, 341 (1960).
351. В. Л. Гинзбург и В. В. Писарева, Поляризация радиоизлучения дискретных источников и изучение метагалактического, галактического и околосолнечного пространства, Радиофизика 6, 877 (1963).
352. С. А. Ахманов и Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, Изд-во АН СССР, 1964.
353. В. М. Файн и Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, «Сов. радио», 1965, гл. IX.
354. А. А. Галиев, В. И. Карпман и Р. З. Сагдеев, Многочастичные аспекты теории турбулентной плазмы. Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 5, 20 (1965).
355. В. Е. Голант, Газовый разряд на сверхвысоких частотах, УФН 65, 39 (1958).
356. А. Г. Литвак, М. И. Петелин и Е. И. Якубович, Об омическом нагревании частично ионизованной плазмы однородным высокочастотным полем, ЖТФ 35, 168 (1965).
357. В. Л. Гинзбург, К теории люксембург-горьковского эффекта, Изв. АН СССР, сер. физ., 12, 293 (1948).
358. И. М. Виленский, К теории взаимодействия радиоволн в ионосфере, ЖЭТФ 22, 545 (1952); 26, 42 (1954); см. также Радиофизика 3, 367 (1960).
359. А. В. Гуревич, К теории нелинейных эффектов при распространении радиоволн в ионосфере, Геомагн. и аэрон. 5, 70 (1965).

360. А. В. Гуревич, К вопросу о распространении сильных электромагнитных волн в плазме, Радиотехника и электроника 1, 706 (1956).
361. Ф. Г. Басс, Кинетическая теория распространения сильных электромагнитных волн в полупроводниках и в плазме, ЖЭТФ 47, 1322 (1964).
362. M. S. Sodha a. C. J. Palumbo, Nonlinear propagation of electromagnetic waves in magnetoplasmas, Canad. J. Phys. 41, 1702 (1963); 42, 349 (1964).
363. И. М. Виленский, Об искажении модуляции мощных радиоволн при их распространении в ионосфере, Радиофизика 5, 221 (1962); 9, 649 (1966).
364. Э. И. Гинзбург, К вопросу о распространении сильных радиоволн в ионосфере, Радиофизика 7, 1041 (1964).
365. В. И. Таланов, О самофокусировании волновых пучков в нелинейных средах, Письма в редакцию ЖЭТФ 2, 218 (1965).
366. А. В. Гуревич, Проникновение электромагнитной волны в плазму при учете нелинейности, ЖЭТФ 48, 701 (1965).
367. А. В. Гуревич, К теории кроссмодуляции радиоволн, Радиофизика 1, № 5—6, 17 (1958).
368. D. Layzer a. D. H. Menzel, Ionospheric cross modulation: a microscopic theory, Rad. Sci. 69D, 59 (1965).
369. В. В. Железняков, К вопросу о нелинейных эффектах в магнитоактивной плазме, Радиофизика 1, № 5—6, 29 (1958).
370. J. A. Fejer, The interaction of pulsed radio waves in the ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. 7, 322 (1955).
371. L. Goldstein a. J. M. Anderson, Interaction of microwaves, propagated through a gaseous discharge plasmas, Phys. Rev. 90, 151, 486 (1953); см. также J. Atmos. a. Terr. Phys. 12, 216 (1958).
372. M. Cutolo, On some resonance phenomena near the gyrofrequency obtained during the propogation of a radiowave in plasma (ionosphere), Nat. Bur. Standards Techn. Notes 2, № 211 (1964).
373. D. H. Menzel, Some problems of ionospheric nonlinearities, Radio Sci. 69D, 1 (1965).
374. V. A. Bailey, Some possible effects caused by strong gyrowaves in the ionosphere J. Atmos. a. Terr. Phys. 14, 299 (1959).
375. L. R. Megill, Excitation of optical radiation by high power density radio beams, Radio Sci. 69D, 77 (1965).
376. P. P. Lombardini, Alteration of the electron density of the lower ionosphere with ground based transmitters, Radio Sci. 69D, 83 (1965).
377. P. Caldirola, O. De Barbieri, On some nonlinear phenomena in the ionospheric plasma. Radio Sci. 69D, 33 (1965).
378. Э. И. Гинзбург, Возмущения нижней ионосферы радиоимпульсом, Геомагн. и аэрон. 7, 104 (1967).
379. P. Malmud, Use of radio transmitters to decrease *D*-region electron density, NBS Techn. Note 6, № 211, 1 (1964).
380. D. T. Farley, Artificial heating of the electrons in the *F*-region of the ionosphere, J. Geophys. Res. 68, 401 (1963).
381. А. В. Гуревич, Воздействие радиоволн на ионосферу в области *F*-слоя, Геомагн. и аэрон. 7, 291 (1967).
382. В. Л. Гинзбург и Л. М. Озерной, О температуре межгалактического газа, Астрон. ж. 42, 943 (1965).
383. В. Л. Гинзбург, О нелинейном взаимодействии радиоволн, распространяющихся в плазме, ЖЭТФ 35, 1573 (1958).

Дополнительная литература *)

384. P. A. Sturrock, Kinematics of growing waves, Phys. Rev. **112**, 1488 (1958).
385. A. J. Dessler, Ionospheric heating by hydromagnetic waves, J. Geophys. Res. **64**, 397 (1959).
386. J. A. Ratcliffe, The magneto-ionic theory and its applications to the atmosphere, Cambridge, 1959; русский перевод: Дж. А. Ратклиф, Магнито-ионная теория и ее приложения к ионосфере, ИЛ, 1962.
387. L. M. Tannenwald, Coulomb scattering in a very strong magnetic field, Phys. Rev. **113**, 1396 (1959).
388. Т. Ф. Волков, О ионных колебаниях в плазме, ЖЭТФ **37**, 422 (1959).
389. К. А. Барсуков и А. А. Коломенский, Эффект Доплера в электронной плазме с магнитным полем, ЖТФ **29**, 954 (1959).
390. С. Браун, Использование высокочастотных электромагнитных полей для исследования плазмы, Радиотехника и электроника **4**, 1244 (1959).
391. В. П. Силин, Об электромагнитных свойствах релятивистской плазмы ЖЭТФ **38**, 1577 (1960); см. также ЖЭТФ **38**, 645 (1960); **40**, 616 (1961); **41**, 159 (1961).
392. R. Lüst, Uber die Ausbreitung von Wellen in einem Plasma, Fortschr. Phys. **7**, 503 (1959).
393. H. Dreicer, Electron and ion runaway in a fully ionized gas, Phys. Rev. **115**, 238 (1959); **117**, 329 (1960).
394. S. A. Colgate, Collisionless plasma shock, Phys. Fluids **2**, 485 (1959).
395. D. W. Barron, The «waveguide mode» theory of radio wave propagation when the ionosphere is not sharply bounded, Phil. Mag. **4**, 1068 (1959).
396. International Symposium on fluid mechanics in the ionospere, J. Geophys. Res. **64**, № 12 (1959).
397. L. Oster, Spectral and angular distribution of cyclotron radiation emitted by colliding particles, Phys. Rev. **116**, 474 (1959).
398. M. S. Sodha, Transport phenomena in slightly ionized gases, Phys. Rev. **116**, 486 (1959); **118**, 378 (1960); **119**, 882 (1960).
399. L. Mower, Conductivity of warm plasma, Phys. Rev. **116**, 16 (1959).
400. Л. М. Коврижных и А. А. Рухадзе, О неустойчивости продольных колебаний электронно-ионной плазмы, ЖЭТФ **38**, 850 (1960).
401. C. B. Wharton a. D. M. Slager, Microwave determination of plasma density profiles, J. Appl. Phys. **31**, 428 (1960).
402. С. В. Бородина, Ю. К. Калинин, Г. А. Михайлова и Д. С. Флигель, Обзор современного состояния исследований распространения сверхдлинных электромагнитных волн, Радиофизика **3**, 3 (1960).

---

*) Дополнительная литература, указанная ниже, не использована в тексте. Ее назначение состоит лишь в том, чтобы облегчить читателям ознакомление с текущими публикациями. Список не претендует на полноту и составлялся постепенно до марта 1967 г. при ознакомлении с литературой, поступающей в библиотеку ФИАН СССР.

403. Proceedings of the fourth international conference on ionization phenomena in gases, Ed. N. R. Nilsson, Amsterdam, 1960.
404. C. B. Haselgrove a. J. Haselgrove, Twisted ray paths in the ionosphere, Proc. Phys. Soc. **75**, 357 (1960).
405. Распространение длинных и сверхдлинных радиоволн, Сб. статей, ИЛ, 1960.
406. K. M. Case, Plasma oscillations, Ann. Phys. **7**, 349 (1959).
407. G. H. Millman, The geometry of Earth's magnetic field at ionospheric heights, J. Geophys. Res. **64**, 717 (1959).
408. Ю. Д. Кокурин, Интерференция между магнито-ионными компонентами сигнала, отраженного от ионосферы, Радиотехника и электроника **4**, 1434 (1959).
409. О. М. Атаев, Определение числа соударений в ионосфере, Радиотехника и электроника **4**, 1439 (1959).
410. С. Б. Пикельнер, Структура магнитогидродинамической ударной волны в частично ионизованном газе, ЖЭТФ **36**, 1536 (1959).
411. J. Bazer a. O. Fleischman, Propagation of weak hydromagnetic discontinuities, Phys. Fluids **2**, 366 (1959).
412. P. H. Doyle a. J. Neufeld, On the behavior of plasma at ionic resonance, Phys. Fluids **2**, 390 (1959).
413. H. S. Green, Ionic theory of plasmas and magneto-hydrodynamics, Phys. Fluids **2**, 341 (1959).
414. K. D. Cole, Electro-hydromagnetic waves in a fully ionized gas, Planet. a. Space Sci. **1**, 319 (1959); **5**, 292 (1961).
415. Труды Всесоюзного межвузовского совещания по радиофизическим методам исследования ионосферы, Тр. Сибирск. физ.-тех. ин-та при Томском ун-те, вып. 37 (1959).
416. Proceedings of fifth meeting of the mixed commission on the ionosphere J. Atmos. a. Terr. Phys. **15**, № 1—2 (1959).
417. P. A. Sweet, Coulomb scattering in a magnetic field, Phil. Mag. **4**, 1155 (1959).
418. B. Lax a. G. B. Wright, Magnetoplasma reflection in solids, Phys. Rev. Letters **4**, 16 (1960).
419. H. Dreicer, Electron velocity distributions in a partly ionized gas, Phys. Rev. **117**, 343 (1960).
420. A. H. Kritz a D. Mintzer, Propagation of plasma waves across a density discontinuity, Phys. Rev. **117**, 382 (1960).
421. W. E. Drummond a. M. N. Rosenbluth, Cyclotron radiation from a hot plasma, Phys. Fluids **3**, 45 (1960); **4**, 277 (1961); **6**, 276 (1963).
422. Ф. Г. Басс и С. И. Ханкина, К теории распространения электромагнитных волн в неоднородной среде с флуктуациями диэлектрической проницаемости, Радиофизика **3**, 216, 384 (1960).
423. O. K. Garriott, The determination of ionospheric content and distribution from satellite observations, J. Geophys. Res. **65**, 1139, 1151 (1960).
424. К. Н. Степанов и В. И. Пахомов, О магнитотормозном излучении ограниченной плазмы, ЖЭТФ **38**, 1564 (1960).
425. М. Д. Райзер и И. С. Шпигель, Исследование плазмы при помощи микрорадиоволн, УФН **64**, 641 (1958).
426. D. Montgomery, Stability of large amplitude waves in the one-dimensional plasma, Phys. Fluids **3**, 274 (1960).
427. P. A. G. Scheuer, The absorption coefficient of a plasma at radio frequencies, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **120**, 231 (1960).
428. В. В. Писарева, К вопросу о поляризации нетеплового радиоизлучения Галактики и радиоизлучения Крабовидной туманности, Радиофизика **3**, 165 (1960).

429. G. Kalman, Nonlinear oscillations and nonstationary flow in a zero temperature plasma, Ann. Phys. **10**, 1, 29 (1960).
430. N. Anderson, Compression waves in a plasma in a static magnetic field, Proc. Phys. Soc. **75**, 905 (1960).
431. S. L. Kahalas, Magnetohydrodynamic wave propagation in the ionosphere, Phys. Fluids **3**, 372 (1960).
432. H. W. Wyld, Radiation by plasma oscillations in a bounded plasma in a magnetic field, Phys. Fluids **3**, 408 (1960).
433. Д. А. Франк-Каменецкий, Магнитный звук в трехкомпонентной плазме, ЖТФ **30**, 893 (1960).
434. D. C. Kelly, Microwave conductivity of a plasma in a magnetic field, Phys. Rev. **119**, 27 (1960).
435. J. D. Craggs a. H. S. W. Massey, The collisions of electrons with molecules, Handbuch d. Physik **37/1**, 314 (1959).
436. W. C. Hoffman, Conditions for the persistence of purely longitudinal or purely transverse propagation, J. Atmos. a. Terr. Phys. 18, 1 (1960).
437. G. R. A. Ellis, Gyro spliting of ionospheric echoes, J. Atmos. a. Terr. Phys. 18, 20 (1960).
438. Е. П. Сиротина и С. И. Сыроватский, Структура ударных волн слабой интенсивности в магнитной гидродинамике, ЖЭТФ **39**, 746 (1960).
439. J. P. Dougherty, A statistical theory of ionospheric drifts, Phil. Mag. 5, 553 (1960).
440. A. N. Kaufman, Plasma viscosity in a magnetic field, Phys. Fluids **3**, 610 (1960).
441. W. B. Ericson a. J. Bazer, On certain properties of hydromagnetic shocks, Phys. Fluids **3**, 631 (1960).
442. J. A. Fejer, Scattering of radio waves by an ionized gaz in thermal equilibrium, Canad. J. Phys. **38**, 1114 (1960).
443. J. D. Jackson, Longitudinal plasma oscillations, J. Nucl. Energy, p. C. **1**, 171 (1960).
444. B. D. Fried, M. Gell-Mann, J. D. Jackson a. H. W. Wyld, Longitudinal plasma oscillations in an electric field, J. Nucl. Energy, p. C. **1**, 190 (1960).
445. J. A. Fejer, Hydromagnetic wave propagation in the ionosphere. J. Atmos. a. Terr. Phys. 18, 135 (1960).
446. В. И. Татарский, Радиофизические методы изучения атмосферной турбулентности, Радиофизика **3**, 551 (1960).
447. Н. Г. Денисов, Статистические параметры электромагнитной волны, прошедшей через неоднородный слой магнитоактивной плазмы, Радиофизика **3**, 619 (1960).
448. О. В. Константинов и В. И. Перель, Столкновения частиц в высокотемпературной плазме, ЖЭТФ **39**, 861 (1960).
449. S. J. Buchsbaum, Resonance in a plasma with two ion species, Phys. Fluids **3**, 418 (1960).
450. G. Backus, Linearized plasma oscillations in arbitrary electron velocity distributions, J. Math. Phys. **1**, 178 (1960).
451. O. W. Greenberg a. Y. M. Treve, Shock wave and solitary wave structure in a plasma, Phys. Fluids **3**, 769 (1960).
452. E. A. Jackson, Nonlinear oscillations in a cold plasma, Phys. Fluids **3**, 831 (1960).
453. В. Е. Голант, Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы, ЖТФ **30**, 1265 (1960).
454. Л. М. Коврижных, О неустойчивости продольных колебаний электронно-ионной плазмы, находящейся во внешнем электрическом поле, ЖТФ **30**, 1186 (1960).

455. А. В. Гуревич, К теории эффекта убегающих электронов, ЖЭТФ **39**, 1296 (1960).
456. Л. П. Питаевский, Электрические силы в прозрачной среде с дисперсией, ЖЭТФ **39**, 1450 (1960).
457. J. P. Dougherty a. D. T. Farley, A theory of incoherent scattering of radio waves by a plasma, Proc. Roy. Soc. **259**, 79 (1960); **263**, 238 (1961), J. Geophys. Res. **68**, 5473 (1963).
458. W. E. Francis a. R. Karplus, Hydromagnetic waves in the ionosphere, J. Geophys. Res. **65**, 3593 (1960).
459. J. Renau, Scattering of electromagnetic waves from a nondegenerate ionized gas, J. Geophys. Res. **65**, 3631 (1960).
460. Electromagnetic wave propagation, Ed. M. Desirant a. J. L. Michiels, N.Y. a. London, 1960.
461. M. Husikuni, The dispersion relation of plasma oscillations J. Sci. Hiroshima Univ. **24A**, 23 (1960).
462. I. B. Bernstein, E. Frieman, R. Kulsrud a. M. Rosenbluth, Ion wave instabilities, Phys. Fluids **3**, 136, 937 (1960).
463. Radiation and waves in plasmas, Ed. M. Mitchner, Stanford, 1961.
464. O. Theimer a. L. S. Taylor, The dependence of the plasma conductivity on frequency and collision time, Ann. Phys. **11**, 377 (1960).
465. Л. В. Иогансен, Резонансная дифракция волн в слоисто-неоднородных средах, ЖЭТФ **40**, 1838 (1961); ЖТФ **32**, 406 (1962); Оптика и спектроскопия **14**, 131 (1963); ЖТФ **36**, 2056 (1966).
466. В. Л. Покровский и И. М. Халатников, К вопросу о надбарьерном отражении частиц высокой энергии, ЖЭТФ **40**, 1713 (1961).
467. N. Rostoker, Kinetic equation with a constant magnetic field, Phys. Fluids **3**, 922 (1960).
468. Г. И. Фрейдман, Отражение электромагнитных волн в гиротропных средах от волны магнитного поля, ЖЭТФ **41**, 226 (1961).
469. Proceedings of the International Symposium on Magneto-Fluid Dynamics, Rev. Mod. Phys. **32**, № 4, (1960).
470. J. M. Kelso, Doppler shifts and Faraday rotation of radio signals in a time-varying, inhomogeneous ionosphere, J. Geophys. Res. **65**, 3909 (1960).
471. H. K. Sen a. A. A. Wyller, On the generalization of the Appleton-Hartree magnetoionic formulas, J. Geophys. Res. **65**, 3931 (1960).
472. Y. H. Ichikawa, On the kinetic equation for high temperature plasma, Progr. Theor. Phys. **24**, 1083 (1960).
473. B. D. Fried a. R. W. Gould, Longitudinal ion oscillations in a hot plasma, Phys. Fluids **4**, 139 (1961).
474. A. C. Pipkin, Electrical conductivity of partially ionized gases, Phys. Fluids. **4**, 154 (1961).
475. G. R. A. Ellis, Spaced observations of the low-frequency radiation from the Earth's upper atmosphere, J. Geophys. Res. **66**, 19 (1961).
476. Ю. Л. Климонтович и В. П. Силин, О магнитной гидродинамике для неизотермической плазмы без столкновений, ЖЭТФ **40**, 1213 (1961).
477. В. П. Силин, Релятивистское кинетическое уравнение для быстропеременных процессов в ионизированном газе, Радиофизика **4**, 1029 (1961).
478. А. А. Рухадзе и В. П. Силин, Форма линий магнитотормозного поглощения в плазме, ЖТФ **32**, 423 (1962).
479. J. D. Jukes, Plasma cyclotron radiation and fusion reactors, J. Nucl. Energy, p. C. **3**, 1 (1961).
480. В. П. Силин, О высокочастотной диэлектрической проницаемости плазмы, ЖЭТФ **41**, 861 (1961); см. также ЖЭТФ **40**, 1768 (1961).

481. J. F. Denisse a. J. L. Delcroix, Theorie des ondes dans les plasmas, Paris, 1961.
482. А. Б. Киценко и К. Н. Степанов, О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов и электронов, ЖЭТФ 38, 1840 (1960).
483. R. F. Whitmer a. E. B. Barrett, Nonlinear interaction of an electromagnetic wave with a plasma layer in the presence of a static magnetic field, Phys. Rev. **121**, 661 (1961); **125**, 1478 (1962).
484. Е. А. Бенедиктов и Н. А. Митяков, О поглощении космического радиоизлучения в ионосфере, Радиофизика **4**, 44 (1961).
485. N. A. Krall a. M. N. Rosenbluth, Stability of a slightly inhomogenous plasma, Phys. Fluids. **4**, 163 (1961).
486. G. Bekefi, J. L. Hirshfield a. S. C. Brown, Kirchhoff's radiation law for plasmas with non-maxwellian distributions, Phys. Fluids **4**, 173 (1961); см. также Rhys. Rev. **122**, 719, 1037 (1961).
487. J. L. Hirshfield, D. E. Baldwin a. S. C. Brown, Cyclotron radiation from a hot plasma, Phys. Fluids **4**, 198 (1961).
488. K. L. Bowles, Incoherent scattering by free electrons as a technique for studying the ionosphere and exosphere Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **65D**, 1 (1961).
489. I. R. Johler, Magneto-ionic propagation in low- and verylow-radio-frequency waves reflected by the ionosphere, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **65D**, 53 (1961).
490. Н. П. Бенькова, Ионосферные исследования в СССР, Геомагн. и аэрон. **1**, 4 (1961).
491. А. В. Гуревич и Е. Е. Цедилина, Влияние постоянного электрического поля на температуру электронов в ионосфере, Геомагн. и аэрон. **1**, 34 (1961); **2**, 242 (1962).
492. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский и Р. В. Половин, Об условиях устойчивости функции распределения электронов в плазме, ЖЭТФ **40**, 963 (1961).
493. Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский и Л. П. Питаевский, Вычисление флуктуаций величин, описываемых кинетическими уравнениями. Сб. «Распространение радиоволн и ионосфера», Изд-во АН СССР, 1960, стр. 203.
494. М. А. Гинцбург, Поверхностные волны на границе плазмы в магнитном поле, Сб. «Распространение радиоволн и ионосфера», Изд-во АН СССР, 1960, стр. 208.
495. Л. С. Соловьев, Магнитогидродинамические поверхностные волны, ЖЭТФ **31**, 407 (1961).
496. I. B. Bernstein a. S. K. Trehan, Plasma oscillations Nucl. Fusion (Ядерный синтез) **1**, 3 (1960).
497. P. Rosen, Generation of the third harmonic by an electromagnetic signal in a plasma, Phys. Fluids **4**, 341 (1961).
498. S. F. Edwards, The charge correlation function of a plasma in a magnetic field, Phil. Mag. **6**, 61 (1961).
499. S. F. Edwards a. J. J. Sanderson, A new approach to transport problems in fully ionized plasmas, Phil. Mag. **6**, 71 (1961); Plasma Physics, **4**, 409 (1962).
500. J. Hubbard, The friction and diffusion coefficients of the Fokker-Planck equation in a plasma, Proc. Roy. Soc. **260**, 114, 371 (1961).
501. B. D. Fried a. H. W. Wyld, Solution for the two-electron correlation function in a plasma, Phys. Rev. **122**, 1 (1961).
502. A. Kildal, On plasma oscillations with special emphasis on the Landau damping and the Gross gaps in the frequency spectrum, Nuovo Cimento **20**, 104 (1961).

503. E. E. Salpeter, Scattering of radio waves by electrons above the ionosphere, J. Geophys. Res. **65**, 1851 (1960); **66**, 982 (1961).
504. Y. S. N. Murty a. S. R. Khastgir, General expression for the group refractive index of the ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. **21**, 65 (1961).
565. H. Gerstenkorn, Über die Entstehung von Plasmawellen in stark ionisierten Gasen, Z. Phys. **162**, 363 (1961).
506. D. W. Barron, The numerical solution of differential equations governing the reflexion of long radio waves from the ionosphere, IV, Proc. Roy. Soc. **260**, 393 (1961).
507. Ю. Н. Днестровский и Д. П. Костомаров, О дисперсионном уравнении для обыкновенной волны, распространяющейся в плазме поперек внешнего магнитного поля, ЖЭТФ **40**, 1404 (1961); **41**, 1527 (1961).
508. A. Simon, Exact relativistic Fokker—Planck coefficients for a plasma, Phys. Fluids **4**, 586 (1961).
509. J. A. Fejer, Scattering of radio waves by an ionized gas in thermal equilibrium in the presence of a uniform magnetic field, Canad. J. Phys. **39**, 716 (1961).
510. K. Hain, R. Lust u. A. Schluter, Hydromagnetic waves of finite amplitude in a plasma with isotropic and nonisotropic pressure perpendicular to a magnetic field, Rev. Mod. Phys. **32**, 967 (1960).
511. В. Н. Цитович, О пространственной дисперсии в релятивистской плазме, ЖЭТФ **40**, 1775 (1961).
512. А. В. Гуревич, Об особенностях поведения многозарядных ионов в плазме, ЖЭТФ **40**, 1825 (1961).
513. P. D. Noerdlinger, Concerning certain collisionless plasmashock wave models, Astrophys. J. **133**, 1034 (1961).
514. J. Neufeld, Space dispersive properties of plasma, Phys. Rev. **123**, 1 (1961).
515. T. Hagfors, Density fluctuations in a plasma in a magnetic field, with applications to the ionosphere, J. Geophys. Res. **66**, 1699 (1961).
516. J. R. Wait, A diffraction theory for low frequencies sky-wave propagation, J. Geophys. Res. **66**, 1712 (1961).
517. G. Bekefi a. S. C. Brown, Emission of radio-frequency waves from plasmas, Amer. J. Phys. **29**, 404 (1961).
518. М. С. Ковнер, О неустойчивости низкочастотных электромагнитных волн в плазме, пронизываемой потоком заряженных частиц (распространение под произвольным углом к направлению магнитного поля), Радиофизика **4**, 444 (1961).
519. М. И. Петелин, К вопросу о распространении электромагнитных волн в неравновесной магнитоактивной плазме, Радиофизика **4**, 455 (1961).
520. Ф. Г. Басс, Флуктуации параметров электромагнитного поля, распространяющегося в магнитоактивной плазме со случайными изменениями концентрации электронов и магнитного поля, Радиофизика **4**, 465 (1961).
521. J. R. Wait, Some boundary value problems involving plasma media, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **65B**, 137 (1961).
522. D. A. Tidman a. G. H. Weiss, Radiation by a large-amplitude Plasma oscillation, Phys. Fluids **4**, 866 (1961).
523. J. Dawson, On Landau damping, Phys. Fluids **4**, 869 (1961).
524. Е. А. Новиков, О флуктуациях электронной плотности в ионосфере, ДАН СССР **139**, 587 (1961).
525. Ф. В. Бункин, К теории электромагнитных флуктуаций в неравновесной плазме, ЖЭТФ **41**, 288 (1961); см. также ЖЭТФ **41**, 1859 (1961).

526. А. П. Казанцев и И. А. Гилинский, О взаимодействии поперечных колебаний в плазме, ЖЭТФ **41**, 154 (1961).
527. P. G. Saffman, Propagation of a solitary wave along a magnetic field in a cold collision-free plasma, J. Fluid Mech. **11**, 16 (1961).
528. T. Namikawa, On the reflection and refraction of hydromagnetic waves in ionised gas, J. Geomagn. a. Geoelectr. **12**, 117 (1961).
529. M. H. Cohen, Radiation in a plasma, Phys. Rev. **123**, 711 (1961); **126**, **389**, 398 (1962).
530. L. Wetzel, Electric-field—induced anisotropies in an inhomogeneous plasma, Phys. Rev. **123**, 722 (1961).
531. В. П. Демидов, Поперечный показатель преломления плазмы вблизи циклотронных частот и их гармоник, ДАН СССР **139**, 1342 (1961).
532. T. Watanabe, Alfven waves in partially ionized gases, Canad. J. Phys. **39**, 1197 (1961).
533. C. S. Morawetz, Magnetohydrodynamic shock structure without collisions, Phys. Fluids **4**, 988 (1961).
534. K. Davies a. G. King, On the validity of some approximations to the Appleton—Hartree formula, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **65D**, 323 (1961).
535. В. И. Перель и Г. М. Элиашберг, Поглощение электромагнитых волн в плазме, ЖЭТФ **41**, 886 (1961).
536. E. Cooper, The properties of low frequency radio waves reflected from the ionosphere, calculated by the phaseintegral method, J. Atmos. a. Terr. Phys. **22**, 122 (1961).
537. Ю. В. Кушнеревский и С. Ф. Миркотан, Движение неоднородностей в ионосфере, Геомагн. и аэроп. **1**, 453 (1961).
538. I. P. French, G. G. Cloutier a. M. P. Bachynski, The absorptivity spectrum of a uniform, anisotropic plasma slab, Canad. J. Phys. **39**, 1273 (1961).
539. В. П. Силин, К теории электромагнитных флуктуаций в плазме, ЖЭТФ **41**, 969 (1961); см. также Радиофизика **5**, 1093 (1962).
540. В. М. Конторович и А. М. Глуцюк, Преобразование звуковых и электромагнитных волн на границе проводника в магнитном поле, ЖЭТФ **41**, 1195 (1961).
541. О. В. Константинов и В. И. Перель, Уточнение кинетических коэффициентов плазмы, ЖЭТФ **41**, 1328 (1961).
542. В. Д. Шапиро, В влиянии электростатических неустойчивостей на электропроводность и температуру плазмы, Радиофизика **4**, 867 (1961).
543. P. M. Platzman a. S. J. Buchsbaum, Effect of collisions on the Landau damping of plasma oscillations, Phys. Fluids **4**, 1288 (1961).
544. J. R. Johler, On the analysis of low frequencies ionospheric radio propagation phenomena, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stad.) **65D**, 507 (1961).
545. Л. В. Дубовой и А. Г. Пономарев, К измерению параметров плазмы в магнитном поле, ЖТФ **31**, 1302 (1961).
546. L. H. Heisler a. J. D. Whitehead, The interpretation of F2-critical frequency measurements, J. Atmos. a. Terr. Phys. **22**, 186 (1961).
547. J. E. Titheridge, The effect of collisions on the propagation of radio waves in the ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. **22**, 200 (1961).
548. K. G. Budden, The edge focusing of a radio signal received from outside the earth by an aerial within the ionosphere, Proc. Roy. Soc. **263**, 552 (1961).
549. В. Н. Луговой, О циклотронном резонансе в переменном магнитном поле, ЖЭТФ **41**, 1562 (1961).
550. J. N. Hayes, Damping of plasma oscillations in the linear theory, Phys. Fluids. **4**, 1387 (1961).

551. Д. К. Воденеева и Н. А. Митяков, Результаты экспериментального исследования эффекта «утраивания» в слое *F* ионосферы, Радиофизика **4**, 1013 (1961).
552. A. Hruska, Propagation of magnetohydrodynamic waves in an inviscid nonuniform plasma with infinite conductivity, Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia 12, 224 (1961).
553. H. Poeverlein, Resonance of the space between earth and ionosphere, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **65D**, 465 (1961).
554. I. Yabroff, Computation of whistler ray paths, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **65D**, 485 (1961).
555. L. S. Wagner, Diffraction by thin phase — changing ionospheric layer with application to radio star scintillation, J. Geophys. Res. **67**, 4195 (1962).
556. Б. Н. Гершман и В. Ю. Трахтенберг, О влиянии ионов на характер распространения свистящих атмосфериков, Геомагн. и аэрон. **1**, 671 (1961).
557. J. S. Zmuidzinas a. Ching-Sheng Wu, Electron distribution function of a weakly ionized gas in magnetic and timedependent electric fields, Ann. Phys. **15**, 387 (1961).
558. L. Oster, Emission, absorption and conductivity of a fully ionized gas at radio-frequencies, Rev. Mod. Phys. **33**, 525 (1961).
559. K. A. Graf a. M. P. Bachynski, Transmission and reflection of electromagnetic waves at a plasma boundary for arbitrary angles of incidence, Canad. J. Phys. **39**, 1544 (1961); **40**, 887 (1962).
560. A. A. Wyller, Magneto-ionic theory for a fully ionized hydrogen plasma, Astrophys. J. **134**, 718 (1961).
561. G. J. F. MacDonald, Spectrum of hydromagnetic waves in the exosphere, J. Geophys. Res. **66**, 3639 (1961).
562. В. Я. Эйдман, Излучение плазменной волны зарядом, движущимся в магнитоактивной плазме, ЖЭТФ **41**, 1971 (1961).
563. G. W. Ford, Electromagnetic radiation from a source in a plasma, Ann. Phys. **16**, 185 (1961).
564. А. А. Андронов и Г. В. Городинский, Дипольное излучение продольных волн, Радиофизика 5, 234 (1962).
565. Н. А. Митянов и В. О. Раппопорт, О возможности измерения электронной концентрации в верхней ионосфере и межпланетном пространстве по излучению плазменных волн, Радиофизика 5, 464 (1962).
566. Е. Е. Ловецкий и А. А. Рухадзе, О гидродинамике неизотермической плазмы, ЖЭТФ **41**, 1845 (1961).
567. Plasma, Proc. IRE **49**, № 12 (1961).
568. D. Pines a. J. R. Schrieffer, Collective behavior in solidstate plasmas, Phys. Rev. **124**, 1387 (1961).
569. D. Montgomery a. D. Gorman, Landau damping to all orders, Phys. Rev. **124**, 1309 (1961).
570. В. С. Имшенник, О структуре ударных волн в высокотемпературной плотной плазме, ЖЭТФ **42**, 236 (1962).
571. J. Heading, The nonsingular embedding of transition processes within a more general framework of coupled variables, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **65D**, 595 (1961).
572. L. S. Taylor, Conductivity of slightly ionized gases, Phys. Fluids **4**, 1499 (1961).
573. А. Д. Патарая, Распространение нелинейных колебаний плазмы вдоль магнитного поля, ЖТФ **32**, 139, 584 (1962).
574. В. С. Барсуков, О некоторых особенностях эффекта Доплера в анизотропных средах, ЖТФ **32**, 161 (1962).

575. К. А. Ткалич и Н. В. Салтанов, О нелинейных ленгмюровских колебаниях, ЖТФ **32**, 156 (1962).
576. В. Л. Якименко, Колебания холодной плазмы, содержащей ионы двух сортов, ЖТФ **32**, 168 (1962).
577. K. G. Budden, The influence of earth's magnetic field on radio propagation by waveguide modes. Proc. Roy. Soc. **265**, 538 (1962).
578. Проблемы дифракции и распространения волн. I, Распространение радиоволн, Изд-во ЛГУ, 1962.
579. Э. Канер и Ю. А. Белов, О проникновении электромагнитного поля в магнито-активную плазму, Радиофизика 5, 47 (1962).
580. В. Ф. Алексин и К. Н. Степанов, К теории электромагнитных флуктуаций в плазме, Радиофизика 5, 61 (1962); см. также **6**, 480 (1963).
581. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Г. Барьяхтар и С. В. Пелетминский, Влияние радиационных эффектов на релаксацию электронов и электропроводность плазмы в сильном магнитном поле, ЖЭТФ **42**, 552 (1962); **43**, 1743 (1962).
582. Я. Б. Файнберг, Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой, Атомная энергия **11**, 313 (1961).
583. Б. А. Тверской, Об одномерных автомодельных волнах, распространяющихся в плазме вдоль магнитного поля, ЖЭТФ **42**, 833 (1962).
584. T. Pradhan, Causality and the dispersion formulas for waves in a plasma, Ann. Phys. **17**, 418 (1962).
585. Radio wave absorption in the ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. **23**, December 1961.
586. S. A. Bowhill a. E. R. Schmerling, The distribution of electrons in the ionosphere, Adv. Electronics a. Electron Phys. **15**, 265 (1961).
587. Yun-Chow Whang a. Chien-Chien Chang, Structure of weak shock wave in a plasma, Phys. Fluids 5, 228 (1962).
588. A. G. Engelhardt a. A. A. Dougal, Dispersion of ion cyclotron waves in magnetoplasmas, Phys. Fluids 5, 29 (1962).
589. G. Ellis, Use of Z-Mode propagation for observing cosmic radio noise from earth satellites, Nature **193**, 862 (1962).
590. S. Ichimaru, D. Pines a. N. Rostoker, Observation of critical fluctuations associated with plasma-wave instabilities, Phys. Rev. Letters 8, 231 (1962).
591. J. E. Willett, Effect of electron random motion on microwave propagation through a plasma parallel to a magnetic field, J. Appl. Phys. **33**, 898 (1962).
592. А. М. Федоренко, Преобразование поперечной электромагнитной волны в продольную на границе диэлектрик — плазма, ЖТФ **32**, 589 (1962).
593. Р. Р. Рамазашвили и А. А. Рухадзе, Об электромагнитных волнах в магнитоактивной плазме в области больших показателей преломления, ЖТФ **32**, 644 (1962).
594. В. В. Арсенин, Распространение электромагнитных возмущений вдоль магнитного поля в разреженной плазме, Радиофизика 5, 240 (1962).
595. J. Berghammer, Landau damping of space-charge waves, J. Appl. Phys. **33**, 1499 (1962).
596. B. B. Robinson a. I. B. Bernstein, A variational description of transport phenomena in a plasma, Ann. Phys. 18, 110 (1962).
597. В. Л. Гинзбург, Исследование работы магнитного термоядерного реактора, Тр. ФИАН СССР 18, 55 (1962).
598. T. R. Wait, Electromagnetic waves in stratified media, Pergamon Press, 1962.

599. Magnetofluiddynamics (current papers and abstracts), Ed. L. G. Napolitano a. G. Contursi, Pergamon Press, 1962.
600. Р. В. Половин и К. П. Черкасова, О магнитогидродинамическом описании плазмы, ЖТФ **32**, 649 (1962).
601. Plasma physics and controlled nuclear fusion research, Nucl. Fusion (Ядерный синтез), Suppl. 1, 11 (1962).
602. K. Imre, Oscillations in a relativistic plasma, Phys. Fluids 5, 459 (1962).
603. J. Enoch, Nonlinearized theory of transverse plasma oscillations Phys. Fluids 5, 467 (1962).
604. M. Epstein, Electromagnetic-wave propagation in a plasma with nonlinear electric conductivity, Phys. Fluids 5, 492 (1962).
605. R. K. Jaggi, Wave motion in a two-component plasma with anisotropic pressure, Phys. Fluids 5, 497 (1962); 5, 949 (1962).
606. G. Knorr, Numerische Integration der nichtlinearen Vlasov-Gleichung, Z. Naturforsch. **16a**, 1320 (1961).
607. J. A. Jacobs a. T. Watanabe, Propagation of hydromagnetic waves in the lower exosphere and the origin of short period geomagnetic pulsations, J. Atmos. a. Terr. Phys. **24**, 413 (1962).
608. J. Danson a. C. Oberman, High-frequency conductivity and the emission and absorption coefficients of a fully ionized plasma, Phys. Fluids 5, 517 (1962); 5, 1514 (1962).
609. В. Д. Шапиро и В. И. Шевченко, К нелинейной теории взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой в магнитном поле, ЖЭТФ, **42**, 1515 (1962).
610. G. G. Bowman, Some aspects of gyro-splitting in the ionosphere, Austral. J. Phys. **15**, 25 (1962).
611. В. И. Курилко и В. И. Мирошниченко, Отражение электромагнитных волн движущейся плазмой, ЖТФ **32**, 803 (1962).
612. A. Kildal, Some comments on the Landau damping, Nuovo Cimento **24**, 1107 (1962).
613. T. Koga, Kinetic equations for plasmas, Phys. Fluids 5, 705 (1962).
614. H. A. Whale, Ionospheric irregularities and long-distance radio propagation, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **66D**, 265 (1962).
615. K. G. Budden a. E. Cooper, Ionospheric equivalent heights of reflection calculated by a full wave method and by the phase integral method, J. Atmos. a. Terr. Phys. **24**, 609 (1962).
616. M. D. Grossi, K. M. Strom a. S. E. Strom, Ionospherinc focusing of cosmic radio sources, J. Geophys. Res. **67**, 1672 (1962).
617. J. Carstoin, Magnetohydrodynamic waves in a constant dipole magnetic field, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **48**, 990 (1962).
618. S. Weinberg, Eiconal method in magnetohydrodynamics, Phys. Rev. **126**, 1899 (1962).
619. И. М. Виленский, К вопросу о взаимодействии радиоволн в ионосфере, Радиофизика 5, 468 (1962).
620. В. И. Татарский, Второе приближение в задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями, Радиофизика 5, 490 (1962).
621. S. Zivanovic a. M. S. Sodha, Transport phenomena in a nonuniform slightly ionized gas, Prog. Theor. Phys. **27**, 1128 (1962).
622. M. N. Rosenbluth a. N. Rostoker, Scattering of electromagnetic waves by a nonequilibrium plasmas, Phys. Fluids 5, 776 (1962).
623. M. J. Harrison, Collective excitation of degenerate plasmas in solids, Phys. a. Chem. Solids **23**, 1079 (1962).
624. Ф. М. Некрасов, О начальной стадии развития возмущений в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, ЖЭТФ **43**, 483 (1962).

625. М. Е. Герценштейн и В. И. Пустовойт, О высокочастотной проводимости плазмы при наличии постоянного тока, ЖЭТФ **43**, 536 (1962).
626. Р. В. Дойч, Структура слабых ударных волн в плазме, ЖЭТФ **43**, 667 (1962).
627. G. F. Miller, Propagation of electromagnetic waves in a nonuniformly ionized medium, Phys. Fluids **5**, 899 (1962).
628. R. L. Liboff, Long-wavelength phenomena in a plasma, Phys. Fluids **5**, 963 (1962).
629. E. R. Harrison, Ion oscillations in multistream plasmas, Proc. Phys. Soc. **80**, 432 (1962).
630. K. Rawer, Propagation problems with space radio communications, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **66D**, 375 (1962).
631. K. L. Bowles, G. R. Ochs a. J. L. Green, On the absolute intensity of incoherent scatter echoes from the ionosphere, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **66D**, 395 (1962).
632. T. Hagfors, On the forward scattering of radio waves in the lower ionosphere, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **66D**, 409 (1962).
633. R. S. Zelazny, The general solution of the initial value problem for longitudinal plasma oscillations, Ann. Phys. **19**, 177 (1962).
634. Г. И. Святозарова и В. Н. Цытович, О пространственной дисперсии релятивистской плазмы в магнитном поле, Радиофизика **5**, 658 (1962).
635. Ф. В. Бункин, К электродинамике сред с периодическими по времени свойствами, Радиофизика **5**, 714 (1962).
636. Е. Е. Ловецкий, О высокочастотной диэлектрической проницаемости неизотермической плазмы, Радиофизика **5**, 813 (1962).
637. В. Я. Эйдман, О связанном с переходным излучением затухании электромагнитных волн в неоднородной среде, ЖЭТФ **43**, 1419 (1962); см. также Радиофизика **6**, 852 (1963).
638. Ф. Г. Басс и Л. Я. Бланк, К теории трансформации и рассеяния волн на флуктуациях в плазме, ЖЭТФ **43**, 1479 (1962).
639. Р. Р. Рамазашвили, А. А. Рухадзе и В. П. Силин, О скорости выравнивания температуры заряженных частиц в плазме, ЖЭТФ **43**, 1323 (1962).
640. F. H. Hibberd, W. L. a. Q. T. approximations to the magneto-ionic equations and their validity, J. Atmos. a. Terr. Phys. **24**, 843 (1962).
641. H. Volland, The propagation of plane electromagnetic waves in a horizontally stratified ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. **24**, 853 (1962).
642. J. R. Melcher, Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic Nonlinear surface waves, Phys. Fluids **5**, 1037 (1962).
643. B. D. Fried a. S. D. Cone, The plasma dispersion formula (The Hilbert transform of the gaussian), Academic Press, 1961.
644. H. W. Wyld a. D. Pines, Kinetic equation for plasma, Phys. Rev. **127**, 185 (1962).
645. C. S. Wu, Landau damping and resonant energy absorption, Phys. Rev. **127**, 1419 (1962).
646. Е. Е. Цедилина, Эффект Доплера в магнитоактивной ионосфере, Геомагн. и аэрон. **2**, 865 (1962).
647. Д. С. Флигель, Свойства коэффициентов преломления, затухания и коэффициента пропускания ионосферы на низких и сверхнизких частотах, Геомагн. и аэрон. **2**, 866 (1962).
648. В. Н. Луговой, Распространение плоских электромагнитных волн в периодически нестационарной магнитоактивной плазме, Радиофизика **5**, 901 (1962).

649. В. И. Татарский, К теории рефракции в слоисто-неоднородной среде, Радиофизика 5, 923 (1962).
650. T. Tsuda, A theory of the turbulent electric field fluctuations in electron plasma, Prog. Teor. Phys. 28, 489 (1962).
651. B. S. Tanenbaum a. D. Mintzer, Wave propagation in partly ionized gas, Phys. Fluids 5, 1226 (1962).
652. S. Rand, Absorption of radiation by the ionosphere, Phys. Fluids 5, 1237 (1962).
653. R. M. Lewis a. J. B. Keller, Conductivity tensor and dispersion equation for a plasma, Phys. Fluids 5, 1248 (1962).
654. S. Ichimaru, Wave properties of a plasma with a doubly damped velocity distribution, Phys. Fluids 5, 1264 (1962).
655. S. Yoshikawa, Electrical conductivity of a turbulent plasma, Phys. Fluids 5, 1272 (1962).
656. T. Musha, Some remarks on negative absorption, Phys. Fluids 5, 1310 (1962).
657. S. Ichimaru, Theory of fluctuations in plasma, Ann. Phys. **20**, 78 (1962).
658. В. Н. Ораевский и Р. З. Сагдеев, Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы ЖТФ **32**, 1291 (1962); см. также ДАН СССР **147**, 71 (1962).
659. F. D. Kahn, Transverse plasma waves and their instability, J. Fluid Mechanics. **14**, 321 (1962).
660. P. Weissglas, Longitudinal plasma oscillations, Plasma Physics (J. Nucl. Energy. P. C) **4**, 329 (1962).
661. V. Bevc a. T. E. Everhart, Fast-wave propagation in plasma-field waveguides, J. Electronics a. Control **13**, 185 (1962).
662. T. Nami Kawa, On the Reflection and refraction of hydromagnetic waves in ionized gas, J. Geomagn. a. Geoelectr. **12**, 117 (1961); **14**, 41 (1962).
663. H. Poeverlein, Sommerfeld-Runge law in three and four dimensions, Phys. Rev. **128**, 956 (1962).
664. R. Karplus, W. E. Francis a. A. J. Dragt, The attenuation of hydromagnetic waves in the ionosphere, Planet. a. Space Sci. **9**, 771 (1962).
665. J. P. Klozenberg, Energy equipartition in an electromagnetic wave propagating through a fully ionized gas in a uniform magnetic field, Planet. a. Space Sci. **9**, 795 (1962).
666. T. A. Wilson, Structure of collision-free magnetohydrodynamic waves, Phys. Fluids 5, 1451 (1962).
667. I. O. Bohachevsky, Simple waves and shocks in magnetohydrodynamics, Phys. Fluids 5, 1456 (1962).
668. J. F. Morris, Damping of quantized longitudinal electron oscillations in a nondegenerate plasma, Phys. Fluids 5, 1480 (1962).
669. M. K. Sundaresan a. Ta-Yau Wu, Kinetic equation of a plasma in static electric and magnetic fields, Canad. J. Phys. **40**, 1499, 1537 (1962).
670. R. S. Zelazny, The unitial value problem for longitudinal and transversal plasma oscillations, Ann. Phys. **20**, 261 (1962).
671. В. И. Пустовойт, О проводимости плазменных сред при наличии дрейфа, ЖЭТФ **43**, 228 (1962).
672. K. Yamada, General expressions of absorption coefficient and radiation intensity in plasma and Kirchhoff's low, Progr. Theor. Phys. 28, 599 (1962).
673. J. A. Fejer, Hydromagnetic reflection and refraction at a fluid velocity discontinuity, Phys Fluids 6, 508 (1963).

674. W. P. Allis a. S. J. Buchsbaum, Coupliung between electromagnetic and electron waves in a plasma, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) **2**, 49 (1962).
675. F. A. Haas, A physical derivation of Landau damping, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) **2**, 105 (1962).
676. S. C. Bloch a. E. A. Desloge, The interaction of electromagnetic waves in plasma, J. Atmos. a. Terr. Phys. **24**, 1011 (1962).
677. J. Renan, The cross section for scattering of electromagnetic waves from ionized gas in thermal nonequilibrium, J. Geophys. Soc. **67**, 3624 (1962).
678. D. W. Swift, Very-low-frequency radio propagation in the ionosphere, Radio Propagation (J. Res Nat. Bur. Stand.) **66D**, 663 (1962).
679. J. R. Wait, On the propagation of VLF and ELF radio waves when the ionosphere is not sharply bounded, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **66D**, 53 (1962).
680. F. H. Forthover, Reflection of electromagnetic waves from thin ionized gaseous layers, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **66D**, 73 (1962).
681. J. R. Johler a. J. D. Harper, Reflection and transmission of radio waves at a continuously stratified plasma with arbitrary magnetic induction, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **66D**, 81 (1962).
682. W. C. Hoffman, An approximate full wave solution for low frequency electro-magnetic waves in an unbounded magneto-ionic medium, Radio Propagation (J. Res. Nat. Bur. Stand.) **66D**, 107 (1962).
683. Ф. В. Бункин, Излучение неравновесной плазмы, Радиофизика **5**, 1062 (1962).
684. M. S. Sodha a. C. J. Palumbo, Non-linear propagation of an amplitude modulated electromatnetic wave in a plasma, Proc. Phys. Soc. **80**, 1155 (1962).
685. K. Matsuura a. K. Ogawa, On the mode-coupling damping of plasma oscillations, Progr. Theor. Phys. **28**, 946 (1962).
686. L. S. Taylor, The index of refraction of an irregular ionized gas, J. Geophys. Res. **67**, 3843 (1962).
687. C. Altman a. H. Cory, The transmission of audio-frequency electromagnetic waves through the terrestrial ionosphere in the magnetoionic mode, J. Geophys. Res. **67**, 4086 (1962).
688. К. Н. Степанов, О нелинейных продольных колебаниях плазмы в магнитном поле, ЖТФ **23**, 246 (1963).
689. Р. В. Половин, О применимости критериев Стэррока, ЖТФ **23**, 255 (1963).
690. T. Koga, Interaction between radio wave and a high-temperature plasma, Phys. Fluids **5**, 1552 (1962).
691. D. B. Chang, Bremsstrahlung from a plasma, Phys. Fluids. **5**, 1558 (1962).
692. D. B. Chang, Plasma correction to single-particle cyclortron radiation, Phys. Fluids **5**, 1564 (1962).
693. M. S. Sodha a. C. J. Palumbo, Nonlinear propagation of electromagnetic waves in a plasma, Phys. Fluids **5**, 1664 (1962).
694. В. И. Татарский и М. Е. Герценштейн, Распространение волн в среде с сильными флуктуациями показателя преломления, ЖЭТФ **44**, 676 (1963).
695. H. Holweger, Ausbreitung magnetohydrodynamischer Wellen, Z. Astrophys. **56**, 269 (1963).
696. M. S. V. Gopal Rao a. H. G. Booker, Guiding of electromagnetic waves along a magnetic field in a plasma, J. Geophys. Res. **68**, 387 (1963).

697. H. Fields, G. Bekefi a. S. C. Brown, Microwave emission from non-maxwellian plasma, Phys. Rev. **129**, 506 (1963).
698. J. R. Wait, The mode theory of VLF radio propagation for a spherical Earth and a concentric anisotropic ionosphere, Canad. J. Phys. **41**, 299 (1963).
699. D. S. Jones, High-frequency refraction and diffraction in general media, Phil. Trans. Roy. Soc. **255**, 1058, 341, 1963.
700. H. G. Booker, Guidance of radio and hydromagnetic waves in the magnetosphere, J. Geophys. Res. **67**, 4135 (1962).
701. J. A. Fejer, Resonance effects of electrostatic oscillations in the ionosphere, J. Geophys. Res. **69**, 5049 (1964).
702. В. П. Силин, К теории колебаний слабонеоднородной плазмы, ЖЭТФ **45**, 1060 (1963).
703. W. N. Brouw a. E. M. Berkhuisen, A new method of determining the electron content of the ionosphere, Nature **196**, 757 (1962).
704. M. Feix, Propagation of a double-stream instability in a plasma, Nuovo Cimento **27**, 1130 (1963).
705. D. H. Sampson a. J. Enoch, Electron distribution function and electrical conductivity of a slightly ionized gas, Phys. Fluids **6**, 28 (1963).
706. I. R. Shkarofsky, I. B. Bernstein a. B. B. Robinson, Condensed presentation of transport coefficients in a fully ionized plasma, Phys. Fluids **6**, 40 (1963).
707. G. Ecker a. J. Holling, Limits of collective description and their consequences for Landau damping, Phys Fluids **6**, 70 (1963).
708. G. G. Comisar, Collisional damping of plasma oscillations, Phys. Fluids **6**, 76 (1963).
709. B. Buti, Relativistic effects on plasma oscillations and two-stream instability, Phys. Fluids **6**, 89, 100 (1963).
710. Conference on developments in wave propagation, J. Geophys. Res. **68**, 1181 (1963).
711. В. Е. Голант, Диффузия заряженных частиц плазмы в магнитном поле, УФН **79**, 377 (1963).
712. S. K. Kundu, Resistivity in a fully ionized gas, Proc. Phys. Soc. **81**, 233 (1963).
713. M. S. Sodha a. C. J. Palumbo, Non-linear interaction of oppositely propagating electromagnetic waves at a plasmafree space interface, Proc. Phys. Soc. **81**, 473 (1963).
714. G. H. Bryant a. R. N. Franklin, The scattering of a plane wave by a bounded plasma, Proc. Phys. Soc. **81**, 531 (1963).
715. Y. S. N. Murty a. S. R. Khastgir, The refractive index and the absorption index of the ionosphere, J. Atmos. a. Terr Phys. **25**, 102 (1963).
716. N. Ullah a. S. L. Kahalas, Coupling of magnetohydrodynamic to electromagnetic waves at a plasma discontinuity, Phys. Fluids **6**, 284 (1963).
717. J. W. Dungey, Resonant effect of plasma waves on charged particles in a magnetic field, J. Fluid Mechanics **15**, 74 (1963).
718. J. Neufeld a. H. Wright, Instabilities in a plasma-beam system immersed in a magnetic field, Phys. Rev. **129**, 1489 (1963).
719. С. Н. Столяров, Отражение и преломление электромагнитных волн на движущейся границе раздела двух сред, ЖТФ **33**, 565 (1963).
720. К. Н. Степанов, О поглощении электромагнитных волн при квазипродольном распространении, Радиофизика **6**, 403 (1963).
721. А. Б. Михайловский, Диэлектрические свойства неоднородной плазмы, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) **2**, 162 (1962); см. также ЖТФ **44**, 1552 (1963).

722. N. D'Angelo, Ion waves in an inhomogeneous plasma, Phys. Fluids **6**, 592 (1963).

723. D. F. DuBois, V. Gilinsky a. M. G. Kivelson, Propagation of electromagnetic waves in plasmas, Phys. Rev. **129**, 2376 (1963).

724. В. Л. Якименко, Поглощение волн в плазме (квазилинейное приближение), ЖЭТФ **44**, 1534 (1963).

725. Л. А. Островский, Об одном типе магнитогидродинамических волн, ЖЭТФ **44**, 1587 (1963).

726. Р. В. Дойч, О затухании магнитозвуковых волн и ширине ударных волн в анизотропной релятивистской магнитной гидродинамике, ЖЭТФ **44**, 1640 (1963).

727. A. J. Willson, The propagation of magneto-thermo-elastic plane waves, Cambr. Phil. Soc. **59**, 483 (1963).

728. J. P. Dougherty, The conductivity of a partially ionized gas in alternating electric fields, J. Fluid Mech. **16**, 126 (1963).

729. P. D. Noerdlinger, Growing transverse waves in a plasma in a magnetic field, Ann. Phys. **22**, 12 (1963).

730. O. Theimer, Collective aspects of bremsstrahlung emission and electrical conductivity in a plasma, Ann. Phys. **22**, 102 (1963).

731. Г. Л. Гдалевич, К. И. Грингауз, В. А. Рудаков и С. М. Рытов, К вопросу о влиянии ионосферы на определение положения космических ракет, Радиотехника и электроника **8**, 942 (1963).

732. Е. Е. Лавецкий и А. А. Рухадзе, Колебания холодной неоднородной плазмы в поле тяжести, ЖТФ **33**, 652, 660 (1963); см. также Радиофизика **6**, 715, 928 (1963).

733. В. П. Демидов и Д. А. Франк-Каменецкий, Диссипация посредством столкновений на циклотронных обертонах в плазме, ЖТФ **33**, 703, 915 (1963).

734. H. Falkenhagen u. W. Ebeling, Zur Kinetischen Theorie schwach ionisierter Plasmen in Magnetfeld, Ann. Physik **10**, 347 (1963).

735. B. U. Felderhof, Theory of transverse waves in Vlasov-plasmas, Physica **29**, 286, 293 (1963).

736. H. Unz, The magneto-ionic theory for bound electrons, J. Atmos. a. Terr. Phys. **25**, 281 (1963).

737. P. G. Drazin, On one-dimensional propagation of long waves, Proc. Roy. Soc. **273**, 400 (1963).

738. A. G. Pacholczyk, Theory of shapes of hydromagnetic wave-fronts, Acta Astronomica **13**, 55 (1963).

739. P. J. Lynch, Backscatter from inhomogeneous media, Phys. Rev. **130**, 1235 (1963).

740. T. E. Stringer, Low-frequency waves in an unbounded plasma, Plasma Physics (J. Nucl. Energy, p. C) 5, 89 (1963).

741. Я. Л. Альперт, О рефракции и доплеровском смещении частоты радиоволн, излучаемых ИСЗ в трехмерно-неоднородной ионосфере, Геомагн. и аэрон. **3**, 626 (1963).

742. М. А. Гинцбург, Низкочастотные волны в многокомпонентной плазме, Геомагн. и аэрон. **3**, 757 (1963).

743. А. В. Гульельми, О групповой скорости медленных волн в дрейфующей магнитоактивной плазме, Геомагн. и Аэрон. **3**, 754 (1963).

744. В. В. Арсенин, О поглощении электромагнитной волны, падающей на полупространство, заполненное плазмой, Радиофизика **6**, 457 (1963).

745. Н. С. Степанов, О параметрическом усилении поперечных электромагнитных волн в плазме с периодически изменяющейся электронной концентрацией, Радиофизика **6**, 461 (1963).

746. В. В. Железняков и Е. А. Злотник, О роли статического электрического поля при распространении электромагнитных волн в плазме, Радиофизика **6**, 634 (1963).
747. D. Gorman a. D. Montgomery, Collision damping of plasma oscillations, Phys. Rev. **131**, 7 (1963).
748. G. Schmidt a. G. Halpern, Cerenkov-like radiation by plasma oscillations, Phys. Rev. **131**, 217 (1963).
749. R. K. Osborn, Kinetic equations for fully ionized, inhomogeneous plasmas, Phys. Rev. **130**, 2142 (1963).
750. D. J. Ben Daniel, H. Hurwitz a. G. W. Sutten, Electron conductivity at cyclotron resonance, Phys. Fluids **6**, 884 (1963).
751. C. Oberman a. A. F. Shure, High-Frequency plasma conductivity in a magnetic field, Phys. Fluids **6**, 834 (1963).
752. Л. А. Островский, Электромагнитные волны в нелинейных средах с дисперсией, ЖТФ **33**, 905 (1963).
753. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костоморов и Н. В. Скрыдлов, Волны в плазме в окрестности циклотронных резонансов, ЖТФ **33**, 922 (1963).
754. У. Д. Лоладзе и Н. Л. Цинуадзе, Отражение и преломление магнитогидродинамических волн на границе раздела двух анизотропных плазменных сред, ЖТФ **33**, 929 (1963); **34**, 1380 (1964).
755. И. А. Ахиезер, К теории отражения электромагнитных волн от плазмы, ЖТФ **33**, 935 (1963).
756. В. И. Карпман, О структуре фронта ударной волны, распространяющейся под углом к магнитному полю в разреженной плазме, ЖТФ **33**, 959 (1963); см. также ЖЭТФ **46**, 1880 (1964).
757. J. M. Burgers, Application of the two-particle distribution function to estimate the collisional damping of plasma oscillations, Phys. Fluids **6**, 889 (1963).
758. P. Mallozzi a. H. Margenau, Absorption coefficient and microwave conductivity of plasmas, Astrophys. J. **137**, 851 (1963).
759. M. S. Grewal a. L. Talbot, Shock wave structure in a partly ionized gas, J. Fluid Mech. **16**, 573 (1963).
760. A. Legatowicz, Heating of plasma in a circularly polarized electromagnetic wave nuclear fusion, 3/1 (1963).
761. M. Ogasawara, Collisional damping of plasma oscillation, J. Phys. Soc. Japan **18**, 1066 (1963).
762. Э. А. Канер и В. Г. Скобов, Теория резонансного возбуждения слабо затухающих электромагнитных сил в металлах, ЖЭТФ **45**, 610 (1963); **46**, 273 (1964).
763. Ф. Т. Бакшт, Об устойчивости максвелловской плазмы, ЖТТ **33**, 1173 (1963).
764. R. Burman a. R. N. Gould, On the propagation of vertically polarised electromagnetic waves in a horizontally stratified medium, J. Atmos. a. Terr. Phys. **25**, 543 (1963).
765. D. Montgomery, Nonlinear Landau damping of oscillations in a bounded plasma, Phys. Fluids **6**, 1109 (1963).
766. H. S. C. Wang, Nonlinear stationary waves in relativistic plasma, Phys. Fluids **6**, 1115 (1963).
767. H. Weitzner, Plasma oscillations and Landau damping, Phys. Fluids **6**, 1123 (1963).
768. B. D. Fried a. G. J. Culler, Plasma oscillations in an external electric field, Phys. Fluids **6**, 1128 (1963).
769. R. L. Liboff, Relaxation phenomena in plasmas, Phys. Fluids **6**, 1145 (1963).

770. P. D. Noerdlinger, Quasi-linear theory of plasma oscillations in an electric field, Phys. Fluids 6, 1196 (1963).
771. В. Н. Силин, Об интеграле столкновений в плазме, Радиофизика 6, 709 (1963).
772. В. Н. Луговой, Об электродинамических свойствах нестационарной плазмы, Радиофизика 6, 695 (1963).
773. H. Motz, Note on the relative importance of collision and temperature effects on wave propagation in a plasma, Phys. Fluids 6, 1358 (1963).
774. К. Н. Степанов, К теории высокочастотного нагрева плазмы, ЖЭТФ 45, 1190 (1963).
775. А. В. Гуревич и Л. П. Питаевский, Нелинейные явления в плазменном резонансе, ЖЭТФ 45, 1243 (1963).
776. C. A. Reddy, A quantitative study of the limiting polarization of high-frequency radio waves, Canad. J. Phys. 41, 1614 (1963).
777. M. H. Cohen, Hydrodynamic theory of plasma density fluctuation, J. Geophys. Rev. 68, 5675 (1963).
778. R. A. Pappert, Incoherent scatter from a hot plasma, Phys. Fluids 6, 1452 (1963).
779. H. S. C. Wang a. M. S. Lojko, Nonlinear transverse waves in plasmas, Phys. Fluids 6, 1458 (1963).
780. А. Г. Ситенко и Ю. А. Кирочкин, О рассеянии и трансформации волн на флуктуациях в магнитной гидродинамике, ЖТФ **23**, 1354 (1963).
781. Л. А. Островский и Н. С. Степанов, Параметрическая генерация электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, ЖЭТФ 45, 1473 (1963).
782. P. M. Platzman a. S. J. Buchsbaum, Transmission of electromagnetic waves through plasma slabs, Phys. Rev. **132**, 2 (1963).
783. A. Jeffrey a. T. Taniuti, Nonlinear wave propagation, Academic Press, 1964.
784. Г. И. Сурамлишвили, О кинетике волн в плазме, ДАН СССР **153**, 317 (1963).
785. R. Leven, Zur nichtlinearen Theorie longitudinaler Elektronenschwingungen im Plasma, Plasma Physik 3, 169 (1963).
786. J. Techmann, Zur Kraftwirkung des Hochfrequenz feldes auf das Plasma, Plasma Physik 3, 189 (1963).
787. I. Fidone, A note on wave propagation in plasma, Nuovo Cimento **30**, 666 (1963).
788. A. Bourne, C. Setty a. R. A. Smith, Gyro-splitting in the ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. 25, 687 (1963).
789. T. Okuda a. K. Yamamoto, Low frequency wave propagation in a drifting plasma, Memoirs Faculty Eng. Nagoya Univ. **14**, №1—2, 160 (1962).
790. V. Sips, Longitudinal oscillations in plasma, Nuovo Cimento **30**, 947 (1963).
791. Ю. Ф. Филиппов, Взаимодействие звуковых волн, Радиофизика 6, 932 (1963).
792. I. P. Shkarofsky, Calculation of the pressure tensor in a fully ionized plasma, Canad. J. Phys. 41, 1787 (1963).
793. E. C. Taylor a. G. G. Comisar, Frequency Spectrum of thermal fluctuations in plasmas, Phys. Rev. **132**, 2379 (1963).
794. M. S. Sodha a. C. J. Palumbo, Nonlinear growth of third harmonic of an electromagnetic waves in a plasma, Canad. J. Phys. **42**, 1236 (1964).
795. S. K. Banerjee a. S. R. Khastgir, On the polarization of radiowave travelling through the ionosphere, Ind. J. Phys. **37**, 473 (1963).

796. К. Н. Степанов, Распространение ионно-циклотронных волн в плазме, находящейся в слабо неоднородном магнитном поле, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 3, 154 (1963).

797. В. В. Арсенин, Колебания разреженной плазмы с произвольной степенью неоднородности, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 3, 190 (1963).

798. Е. П. Фетисов, Взаимодействие электромагнитной волны с ограниченной плазмой, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 3, 208 (1963).

799. R. Jancel a. Th. Kahan, Electrodynamique des Plasmas, Paris, 1963.

800. А. В. Богданов, Магнитозвуковые волны в неизотермической плазме, ЖТФ 34, 154 (1964).

801. И. А. Ахиезер, И. А. Данелия и Н. Л. Цинцадзе, К теории трансформации и рассеяния электромагнитных волн в неравновесной плазме, ЖЭТФ 46, 300 (1964).

802. Р. Я. Кучеров, Затухание продольной волны в слабоионизированной плазме, ЖЭТФ 46, 368 (1964).

803. D. Lepechinsky a. P. Rolland, On plasma instabilities and their role in ionospheric phenomena, J. Atmos. a. Terr. Phys. 26, 31 (1964).

804. S. Chandra, Plasma diffusion in the ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. 26, 113 (1964).

805. T. H. Dupree, Kinetic theory of plasma and the electromagnetic field, Phys. Fluids 6, 1714 (1964).

806. В. П. Силин, О слабозатухающих плазменных волнах, ЖТФ 34, 236 (1964).

807. В. Г. Барьяхтар и С. В. Пелетминский, Кинетические уравнения для электронов плазмы и излучаемых ими фотонов в сильном магнитном поле, Радиофизика 6, 1115 (1963).

808. В. М. Конторович и И. Н. Кутик, Преобразование волн на границе плазмы в магнитном поле, Радиофизика 6, 1129 (1963).

809. Д. С. Фогель и Г. Д. Кремлева, О свойствах коэффициентов преломления, затухания и пропускания ионосферы на низких и сверхнизких частотах в ночное время, Геомагн. и аэрон. 4, 41 (1964).

810. K. G. Budden a. J. Hugill, The theory of cosmic background radio signal received within the ionosphere, Proc. Roy. Soc. 277, 365 (1964).

811. F. Winterberg, Plasma heating by anomalous dissipation of Alfven waves propagating in inhomogeneous magnetic fields, Ann. Phys. 25, 135 (1963).

812. J. Renau, Notes on number density fluctuation and the scattering cross section for electromagnetic waves scattered from a thermal nonequilibrium plasma, Z. Phys. 177, 458 (1964).

813. K. Terashima a. N. Yajima, Radiation by plasma waves in a homogeneous plasma, Progr. Theoret. Phys. 30, 443 (1963).

814. J. Wilhelm, Zur magnetohydrodinamischen Beschreibung von Plasmawellen kleiner Amplitude, Plasma Physik 4, 111 (1964).

815. С. Б. Бирагов, О комплексной диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы на низких частотах, Радиофизика 7, 58 (1964).

816. И. А. Данелия и Н. Л. Цинцадзе, К теории взаимодействия волн в плазме, Радиофизика 7, 94 (1964); см. также 9, 489 (1966).

817. И. Г. Кондратьев и М. А. Миллер, Двухмерные электромагнитные поля, направляемые плазменными слоями, Радиофизика 7, 124 (1964); 8, 34 (1965).

818. А. А. Андронов и В. Ю. Трахтенгерц, Неустойчивость одномерных пакетов и поглощение электромагнитных волн в плазме, ЖЭТФ 45, 1009 (1963).

819. Г. М. Филиппов, О распространении электромагнитных волн через слоистую среду, Радиотехника и электроника **9**, 547 (1964).
820. М. А. Савченко, Связанные магнитоупругие волны в антиферромагнетиках, ФТТ **6**, 864 (1964).
821. R. Burman a. R. N. Gould, On the reflection of vertically polarised electromagnetic waves from a horizontally stratified medium, J. Atmos. a. Terr. Phys. **26**, 319 (1964).
822. K. Mitoni, H. Kubo, S. Tanaka a. Y. Terumichi, Microwave radiation from a plasma in a magnetic field, J. Phys. Soc. Japan **19**, 211, 221 (1964).
823. A. Pytte a. R. Blanken, Effect of collisions on electron waves in a plasma in a magnetic field, Phys. Rev. **133**, A668 (1964).
824. R. N. Gould a. R. Burman, Some electromagnetic wave functions for propagation in stratified media, J. Atmos. a. Terr. Phys. **26**, 335 (1964).
825. E. E. Salpeter a. S. B. Treiman, Backscatter of electromagnetic radiation from a turbulent plasma, J. Geophys. Res. **69**, 869 (1964).
826. J. E. Allen a. S. E. Segre, Strong ionizing front in a magnetic field, Plasma Phys., Accelerators, Thermonucl. Res. **6**, 147 (1964).
827. B. S. Westcott, Ionospheric reflection processes for long radio waves, J. Atmos. a. Terr. Phys. **26**, 341 (1964).
828. В. И. Татарский, Распространение электромагнитных волн в среде с сильными флуктуациями диэлектрической проницаемости, ЖЭТФ **46**, 1399 (1964).
829. Т. Л. Винникова и М. А. Гинцбург, Спектр поверхностных волн на границе вакуум-магнитоактивная плазма, ЖТФ **34**, 818 (1964).
830. M. S. Grewal, Effects of collisions on electron density fluctuations in plasmas, Phys. Rev. **134**, A86 (1964).
831. L. Oster, Bremsstrahlung cross sections in the neighborhood of the plasma frequency, Phys. Fluids **7**, 263 (1964).
832. R. R. Gold, Analysis of electromagnetic wave propagation through magnetoactive plasmas, Phys. Fluids **7**, 446 (1964).
833. H. Weitzner, Long-wavelength plasma oscillations, Phys. Fluids **7**, 446 (1964).
834. T. J. Boyd, Emission of radio noise by plasmas, Phys. Fluids **7**, 59 (1964).
835. G. M. Sessler, Propagation of longitudinal waves in a weakly ionized gas, Phys. Fluids **7**, 90 (1964).
836. R. P. Mercier, The radio-frequency emission coefficient of a hot plasma, Proc. Phys. Soc. 83, 819 (1964).
837. R. P. Mercier, Thermal radiation in anisotropic media, Proc. Phys. Soc. 83, 811 (1964).
838. Ю. Б. Иванов и А. А. Рухадзе, О высокочастотной проводимости магнитоактивной плазмы, Радиофизика **7**, 232 (1964).
839. Ю. А. Романов, Электромагнитные волны в полуограниченной плазме, Радиофизика **7**, 242 (1964).
840. Н. П. Георгадзе и Н. Л. Цинцадзе. О нелинейных колебаниях двухкомпонентной плазмы, Радиофизика **7**, 1262 (1964).
841. О. П. Погуце, Кинетическая теория рассеяния электромагнитных волн в плазме, Радиофизика **7**, 280 (1964).
842. A. G. Chynoweth a. S. J. Buchsbaum, Solide-state plasma, Phys. Today № 11, 26 (1965); русский перевод: УФН **90**, 179 (1966).
843. Ю. А. Березин и В. И. Карпман, К теории нестационарных волн конечной амплитуды в разреженной плазме, ЖЭТФ **46**, 1880 (1964).
844. W. F. Hughes a. F. J. Young, The interaction of transverse electromagnetic plane waves and a moving ionizing shock wave in the presence of a magnetic field, J. Fluid Mech. **19**, 11 (1964).

845. Y. Ozawa, I. Kaji a. M. Kito, Detailed solutions of periodic waves for nonlinear stationary plasma waves with small amplitude, Plasma Phys., Accelerators, Thermonucl. Res. 6, 227 (1964); см. также J. Phys. Soc. Japan 19, 555 (1964).
846. A. F. Kuckes, Effect of collision upon plasma ion oscillations, Phys. Fluids 7, 511 (1964); см. также J. Phys. Soc. Japan 19, 567 (1964).
847. G. Convert, Interpretation des equations de dispersion, Ann. Radioelectr. 19, 300 (1964).
848. R. E. Burgess a. J. G. Cook, Transverse waves propagating along an applied magnetic field in a plasma, Canad. J. Phys. 42, 906 (1964).
849. А. Б. Киценко и К. Н. Степанов, Распространение волн в плазме поперек магнитного поля, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 4, 272 (1964); см. также 4, 281 (1964).
850. Meteorological and astronomical influences on radio wave propagations. Ed. B. Landmark, Pergamon Press, 1963.
851. A. Hruska, Propagation of radio waves across a velocity discontinuity in a zero temperature plasma, Чехословацкий физ. ж. 6, 417 (1956).
852. Л. М. Горбунов и В. П. Силин, Нелинейное взаимодействие плазменных волн, ЖЭТФ 47, 200 (1964).
853. Л. М. Коврижных и В. Н. Цитович, О взаимодействии продольных и поперечных волн в плазме, ЖЭТФ 46, 2212 (1964); 47, 1454 (1964).
854. M. Yokota, Effects of gravitational force on collective motions in plasma, Progr. Theor. Phys. 32, 478 (1964).
855. J. F. McKenzie, Electromagnetic radiation generated by a current source in an anisotropic medium, Proc. Phys. Soc. 84, 269 (1964).
856. Е. Н. Васильев, Ю. И. Орлов и В. А. Пермяков, Граничные условия на поверхности плазмы с резко меняющимися параметрами, ЖТФ 34, 1341 (1964).
857. А. М. Глуцюк, Отражение и преломление электромагнитной волны движущимся в нелинейной среде слоем поля, ЖЭТФ 34, 1345 (1964).
858. E. B. Barrett, R. F. Whitmer a. S. J. Tetenbaum, Nonlinear interaction of an electromagnetic wave with a plasma layer in the presence of a static magnetic field, Phys. Rev. 135, A369 (1964).
859. П. В. Блиох, Сжатие импульса, излучения в диспергирующей среде со случайными неоднородностями, Радиофизика 7, 452 (1964).
860. Л. И. Гудзенко и Л. А. Шелепин, Отрицательное поглощение в неравновесной водородной плазме, ЖЭТФ 45, 1445 (1963).
861. T. H. Dupree, Theory of radiation emission and absorption in plasma, Phys. Fluids 7, 923 (1964).
862. R. Fante, Kinetic equations for a plasma including radiation in the presence of an external magnetic field, Phys. Fluids 7, 940 (1964).
863. F. F. Chen, Normal modes for electrostatic ion waves in an inhomogeneous plasma, Phys. Fluids 7, 940 (1964).
864. B. Wieder, Microwave propagation in an overdense bounded magnetoplasma, Phys. Fluids 7, 964 (1964).
865. D. Bhadra a. R. K. Varma, Collisional damping of ion waves in a plasma, Phys. Fluids 7, 1091 (1964).
866. M. S. Sodha a. C. J. Palumbo, Modulation of electromagnetic waves by acoustic waves in plasma, Canad. J. Phys. 42, 1635 (1964).
867. W. E. Drummond a. D. Pines, Nonlinear plasma oscillations, Ann. Phys. 28, 478 (1964).
868. A. Skorupski, Alfvén waves in inhomogeneous plasmas, Bull. Acad. Polon, Sci. 12, 329 (1964).

869. А. Д. Патарая, Распространение волн конечной амплитуды в плазме вдоль магнитного поля, ЖЭТФ 34, 1593 (1964), см. также Радиофизика 8, 27 (1965).
870. В. Н. Цитович, К теории циклотронного излучения ионов в плазме, ЖТФ 34, 1701 (1964).
871. S. L. Kahalas a. D. A. McNeill, Coupling of magnetohydrodynamic to electromagnetic and acoustic waves at a plasma-neutral gas interface, Phys. Fluids 7, 1321 (1964).
872. Н. Л. Цинцадзе, О конверсии волн в магнитоактивной плазме, ЖТФ 39, 1807 (1964).
873. Д. П. Костомаров, Влияние дрейфа частиц на распределение обыкновенной волны в неоднородной плазме, ЖТФ 34, 1835 (1964).
874. О. П. Погуце, Циклотронная неустойчивость плазмы со столкновениями, ЖЭТФ 47, 941 (1964).
875. U. Frisch, Couplage des ondes magnetodynamiques en milieu stratifié, Ann. astrophys. 27, 224 (1964).
876. Г. Х. Каменецкая и М. С. Ковнер, О высокочастотных волнах в плазме, дрейфующей в магнитном поле, Радиофизика 7, 596 (1964).
877. Ю. А. Рыжов и В. В. Тамойкин, О тензоре эффективной диэлектрической проницаемости неоднородной магнитоактивной плазмы, Радиофизика 7, 605 (1964).
878. В. В. Арсенин, О потенциальных колебаниях сильно неоднородной разреженной плазмы, Радиофизика 7, 611 (1964).
879. Ю. А. Кравцов, Об одной модификации метода геометрической оптики, Радиофизика 7, 664 (1964); 8, 659, 876 (1965).
880. F. Winterberg, Dispersion relations and Landau damping for transverse and longitudinal Alfvén waves propagating through a gas of infinite conductivity, Ann. Phys. 29, 259 (1964).
881. E. M. Barston, Electrostatic oscillations in inhomogeneous cold plasmas, Ann. Phys. 29, 282 (1964).
882. I. B. Bernstein, S. K. Trehan a. M. P. H. Weenink, Plasma oscillation: II Kinetic theory of waves in plasmas, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 4, 61 (1964).
883. C. Brossier, Modèle non linéaire d'ondes électromagnétiques progressives en présence d'un champ magnétique, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 4, 137 (1964).
884. J. M. Kalso, Radio ray propagation in the ionosphere, Mc. Graw-Hill, 1964.
885. Ф. Г. Басс, Кинетическая теория распространения сильных электромагнитных волн в полупроводниках и в плазме, ЖЭТФ 47, 1322 (1964).
886. Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов и В. П. Силин, О нелинейном взаимодействии электромагнитных волн в плазме, ЖЭТФ 47, 1437 (1964).
887. M. J. Haggerty a. L. G. de Sobrino, Kinetic equation for a homogeneous plasma in a uniform magnetic field, Canad. J. of Phys. 42, 1969 (1964).
888. P. J. Kellogg, Solitary waves in cold collisionless plasma, Phys. Fluids 7, 1555 (1964).
889. M. G. Kivelson a. D. F. DuBois, Plasma conductivity at low frequencies and wave numbers, Phys. Fluids 7, 1578 (1964).
890. A. Hasegawa a. C. K. Birdsall, Sheet-current plasma model for ion-cyclotron waves, Phys. Fluids. 7, 1590 (1964).
891. M. Y. Jaffrin a. R. F. Probstein, Structure of a plasma shock wave, Phys. Fluids 7, 1658 (1964).
892. A. Yildiz, Light and sound emissions from nonlinear plasma fluctuations, Phys. Rev. 136, A393 (1964).

893. E. W. McDaniel, Collision phenomena in ionized gases, John Wiley, 1964.
894. J. Musil, Propagation of electromagnetic waves in hot magnetoactive plasma, Czechoslovak J. Phys. **14B**, 831 (1964).
895. U. Furukane, Influence of a weak magnetic field on the collision damping of waves in a plasma, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-11, **28**, 1 (1964).
896. Ю. Н. Днестровский, Циклотронная неустойчивость плазменных волн в неоднородной плазме, ЖТФ **34**, 2140 (1964).
897. К. Н. Степанов, О неустойчивости ионных циклотронных волн в плазме, ЖТФ **34**, 2146 (1964).
898. Л. Э. Гуревич и Б. Л. Гельмант, Термомагнитные волны в твердом теле, ЖЭТФ **47**, 1806 (1964).
899. В. А. Головко, Нелинейные эффекты при распространении волн в статистических средах, ЖЭТФ **47**, 1765 (1964).
900. P. R. Wallace, Classical theory of plasma and helicon resonances in solids, Canadian J. Phys. **42**, 2129 (1964).
901. F. W. Sluijter, Nonlinear effects in the reflection and refraction on a cold magnetoplasma, Physica **30**, 1817 (1964).
902. M. A. Heald, Microwave propagation in a plasma with a sheared magnetic field, Plasma Physics, Accelerators, Thermonucl. Res. **6**, 617 (1964).
903. R. K. Luneberg, Mathematical theory of optics, Univ. Calif. Press, 1964.
904. V. Celli a. N. D. Mernin, Long wavelength oscillations of a quantum plasma in a uniform magnetic field, Ann. Phys. **26**, 247; **30**, 249 (1964).
905. А. А. Веденов и Л. И. Рудаков, О взаимодействии волн в сплошных средах, ДАН СССР **159**, 767 (1964).
906. В. П. Силин, Нелинейная высокочастотная проводимость плазмы, ЖЭТФ **47**, 2254 (1964).
907. И. Г. Кондратьев, Поверхностные волны в гиротропном плазменном слое, Радиофизика **7**, 987 (1964).
908. H. Poeverlein, Coupling of magnetohydrodynamic waves in stratified medium, Phys. Rev. **136**, A1605 (1964).
909. K. W. Morton, Finite amplitude compression wave in a collision—free plasma, Phys. Fluids **7**, 1800 (1964).
910. R. L. Smith a. N. Brice, Propagation in multi-component plasmas, J. Geophys. Res. **69**, 5029 (1964).
911. G. B. Whitham, Non-linear dispersive waves, Proc. Roy. Soc. **283**, 238 (1965).
912. J. Basu, Reflection and transmission properties of a stratified plasma, Ind J. Phys. 38, 435 (1964).
913. P. J. Gething, Relationship between phase path and effective path for oblique ionospheric propagation, J. Atmos. a. Terr. Phys. **27**, 57 (1965).
914. R. J. Papa, The nonlinear interaction of an electromagnetic wave with a time-dependent plasma medium, Canad. J. Phys. **43**, 38 (1965).
915. D. B. Chang, Landau damping and related phenomena, Phys. Fluids **7**, 1980 (1964).
916. L. C. Woods, Finite amplitude effects on hydromagnetic waves, Phys. Fluids **7**, 1987 (1964).
917. А. Гайлитис и В. Н. Цитович, К теории нелинейного взаимодействия поперечных и продольных плазменных волн, Радиофизика **7**, 1190 (1964).
918. Ф. Г. Басс и С. И. Ханкина, К нелинейной теории электромагнитных волн в полупроводниках и плазме, Радиофизика **7**, 1195 (1964); см. также **9**, 207 (1966).

919. R. Burman, First-order coupled wave equations for propagation in stratified compressible plasmas, Austral. J. Physics **19**, 747 (1966).
920. Ц. Д. Лоладзе, Преобразование волн на границе плазма—вакуум, ЖТФ **35**, 582 (1965).
921. A.D.M. Walker, The theory of guiding of radio waves in the exosphere. I Guiding of wistlers, J. Atmos. a. Terr. Phys. **28**, 807 (1966).
922. A. D. M. Walker, The theory of guiding of radio waves in the exosphere. II Waves propagating with small dispersion, J. Atmos. a. Terr. Phys. **28**, 1039 (1966).
923. Ю. М. Алиев и В. П. Силин, Теория колебаний плазмы, находящейся в высокочастотном электрическом поле, ЖЭТФ **48**, 901 (1965).
924. N. Rostoker, R. Aamodt a. O. Eldridge, Kinetic theory of plasma and electromagnetic fields, Ann. Phys. **31**, 243 (1965).
925. R. E. Aamodt, Nonlinear dynamics of longitudinal oscillations in a homogeneous collisionless plasma with an external magnetic field, Phys. Rev. **138**, A45 (1965).
926. И. С. Данилкин, Конверсия двух поперечных волн в продольную в бесстолкновительной плазме, ЖТФ **35**, 667 (1965).
927. Ю. А. Романов, Низкочастотные поверхностные волны в двухкомпонентной плазме, Физика твердого тела, **7**, 970 (1965).
928. И. А. Ахиезер, Рассеяние и трансформация электромагнитных волн в турбулентной плазме, ЖЭТФ **48**, 1159 (1965).
929. L. B. Felsen, On the use of refractive index diagrams for source-excited anisotropic regions, Rad. Sci. **69D**, 155 (1965).
930. R. Tsu a. D. L. White, Interaction of optical and acoustic phonons with longitudinal plasma waves, Ann. Phys. **32**, 100 (1965).
931. E. Gerjuoy, Multiple-wave propagation and causality, Ann. Phys. **32**, 1 (1965).
932. В. Н. Цитович, Нелинейная генерация плазменных волн пучком поперечных волн, ЖТФ **35**, 773 (1965).
933. Р. Р. Рамазашвили и Н. Л. Цинцадзе, Нелинейное затухание низкочастотных плазменных волн, ЖТФ **35**, 788 (1965).
934. А. Н. Кондратенко, О затухании волн с фазовой скоростью больше скорости света, ЖТФ **35**, 961 (1965).
935. Some nonlinear phenomena in the ionosphere, Rad. Sci. **69D**, № 1 (1965).
936. S. H. Gross a. L. B. Felsen, Propagation in nonuniform gyrotropic media, Rad. Sci. **69D**, 333 (1965).
937. W. C. Y. Lee, L. Peters a. C. H. Walter, Geometrical optics for gyrotropic bodies, Rad. Sci. **69D**, 349 (1965).
938. S. I. Akasofu, Attenuation of hydromagnetic waves in the ionosphere, Rad. Sci. **69D**, 361 (1965).
939. R. E. Burgess, Electromagnetic fluctuations in an equilibrium plasma, Rad. Sci. **69D**, 381 (1965).
940. G. A. Deschamps, Angular dependence of the refractive index in the ionosphere, Rad. Sci. **69D**, 395 (1965).
941. C. T. Tai, Electrodynamics of moving anisotropic media, Rad. Sci. **69D**, 401 (1965).
942. J. P. Klozenberg a. J. A. Lehane, Anomalous damping of helicon waves in a hot plasma, Plasma Physics, Accelerators, Thermonucl. Res. **7**, 277 (1965).
943. L. Bednar, Contribution to problem of interaction between H—F electromagnetic field and plasma, Чехословацкий физ. ж. **15**, 333 (1965).
944. F. Santini a. G. Szamosi, Linear oscillations in relativistic plasmas, Nuovo Cimento **37**, 685 (1965).
945. R. E. Bourdeau, Research within the ionosphere, Science **148**, 585 (1965).

946. C. P. Yu, Magneto-atmospheric waves in a horizontally stratified conductting medium, Phys. Fluids 8, 650 (1965).
947. H. H. Kuehl, G. E. Stewart a. C. Yen, Wave propagation in hot plasma waveguides with infinite magnetostatic fields, Phys. Fluids 8, 723 (1965).
948. H. Momota, Excitation of plasma waves propagating transverse to the uniform external magnetic field, Progr. Theoret. Phys. 33, 394 (1965).
949. K. Mishikawa a. Y. Osaka, On the kinetic theory of unstable plasmas, Progr. Theoret. Phys. 33, 402 (1965).
950. T. Shimazaki, On the continuity equation for electron density in the ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. 27, 593 (1965).
951. S. R. Seshardi, The magnetoionic theory at hydromagnetic frequencies, J. Atmos. a. Terr. Phys. 27, 617 (1965).
952. K. S. Mendelson a. H. N. Spector, Interaction of magnetoplasma waves with spin waves in a transverse magnetic field, Physica Status Solidi. 9, 787 (1965).
953. F. W. Crawford, A review of cyclotron harmonic phenomena in plasmas, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 5, 73 (1965).
954. P. M. Stone a. P. L. Auer, Excitation of electrostatic waves near electron cyclotron harmonic frequencies, Phys. Rev. 138, A695 (1965).
955. S. K. Benerjee, On the derivation of the coupled wave equations in the magneto-ionic theory, Ind. J. Phys. 39, 17 (1965).
956. R. Barman a. R. N. Gould, The reflection of waves in a generalized Epstein profile, Canad. J. Phys. 43, 921 (1965).
957. К. Н. Степанов, О влиянии плазменного резонанса на распространение поверхностных волн в неоднородной плазме, ЖТФ 35, 1002 (1965).
958. А. Н. Кондратенко, О затухании волн, распространяющихся в ограниченной плазме поперек магнитного поля, ЖТФ 35, 1015 (1965).
959. Ф. Г. Басс, Я. Б. Файнберг и В. Д. Шапиро, Квазилинейная теория слаботурбулентной плазмы с учетом корреляции электрических полей, ЖЭТФ 49, 329 (1965).
960. Л. М. Коврижных, Об эффектах взаимодействия плазмонов, ЖЭТФ 49, 237 (1965).
961. S. P. Talwar, Hydromagnetic waves in a plasma with finite Larmor radius, Phys. Fluids. 8, 1134 (1965).
962. C. S. Wa, E. H. Klevans a. J. R. Primack, Temperature relaxation in a fully ionized plasma, Phys. Fluids 8, 1126 (1965).
963. C. H. Sa, Some remarks on plasma oscillations and the kinetic theory of plasmas, Phys. Fluids 8, 1115 (1965).
964. T. L. Thourson a. M. B. Lewis, High-frequency conductivity of a plasma, Phys. Fluids 8, 1119 (1965).
965. F. W. Crawford, Cyclotron harmonic waves in warm plasmas, Rad. Sci. 69D, 789 (1965).
966. R. L. Gallawa, Propagation of waves across a magnetoplasma-vacuum-boundary, Rad. Sci. 69D, 807 (1965).
967. D. R. Croley a. B. S. Tanenbaum, Phase velocities and attenuation distances in the ionosphere, Rad. Sci. 69D, 819 (1965).
968. J. R. Wait, Concerning the mechanism of reflection of electromagnetic waves from an inhomogeneous lossy plasma, Rad. Sci. 69D, 865 (1965).
969. А. Г. Ситенко и В. Н. Радзиевский, О флуктуациях в неравновесной плазме, ЖТФ 35, 1165 (1965).
970. W. Sollfrey a. H. T. Yura, Cerenkov radiation from charged particles in a plasma in a magnetic field, Phys. Rev. 139, A48 (1965).
971. R. N. Sudan, Whistler (or helicon) instability in plasmas with electron beams, Phys. Rev. 139, A78 (1965).

972. R. D. Engel, Nonlinear stability of the extraordinary wave in a plasma, Physics Fluids 8, 939 (1965).

973. J. R. Wait, Theory of radiation from sources immersed in anisotropic media, Math. a. Math. Phys. **68B**, 119 (1965).

974. К. Н. Степанов, О распространении поверхностных волн в магнитоактивной плазме, ЖТФ 35, 1349 (1965).

975. Г. И. Сурамлишвили, О трансформации продольных волн в поперечные в слаботурбулентной плазме, ЖЭТФ 48, 1732 (1965).

976. А. Б. Михайловский и Э. А. Пашицкий, Поверхностные волны в плазме с током, ЖЭТФ 48, 1787 (1965).

977. Y. Farutani a. G. Kalman, High refractive index at electron cyclotron harmonics in a plasma, Plasma Physics (J. Nucl. Energy, p. C) 7, 381 (1965).

978. Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов и В. П. Силин, О рассеянии электромагнитных волн в плазме, Радиофизика 8, 461 (1965).

979. И. А. Данелия и Н. Л. Цинцадзе, Трансформация электромагнитных волн в неравновесной плазме, Радиофизика 8, 469 (1965).

980. Г. И. Скрынник, К теории рефракции в слоисто неоднородной среде, Радиофизика 8, 485 (1965).

981. Л. М. Альтшуль и В. И. Карпман, К теории нелинейных колебаний в плазме без столкновений, ЖЭТФ 49, 361 (1965).

982. В. Я. Эйдман, К вопросу о затухании продольной волны в неоднородной плазме, ЖЭТФ 49, 529 (1965).

983. E. Brookner, Effect of ionosphere on radar wave forms. J. Franklin Inst, **280**, 1 (1965).

984. А. А. Веденов, Теория турбулентной плазмы, Ин-т научной информации АН СССР, Москва, 1965.

985. Ю. Р. Аланакян, Удвоение частоты при отражении волны от границы плазмы, ЖТФ 35, 1552 (1965).

986. А. Г. Ситенко и Ю. А. Кирочкин, Рассеяние и трансформация волн в магнитоактивной плазме, УФН 89, 227 (1966).

987. В. Я. Эйдман, О связи излучения ускоренно движущихся зарядов в среде с затуханием волн в неоднородной плазме, Радиофизика 8, 655 (1965).

988. Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмахов и Ю. А. Розенблюм, О распространении электромагнитных пучков в гиротропных средах, Радиофизика, 8, 725 (1965).

989. Б. Н. Гершман и Г. И. Григорьев, К теории перемещающихся ионосферных возмущений (магнитогидродинамическое поглощение), Геомагн. и аэрон. 5, 843 (1965).

990. Н. И. Будько, Затухание ионных продольных волн в плазме, Геомагн. и аэрон. 5, 927 (1965).

991. А. П. Кропоткин и В. В. Пустовалов, Слияние электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме, Радиофизика 8, 886 (1965).

992. В. А. Пермяков и В. В. Солодухов, Поверхностный импеданс неоднородной плазмы с резко меняющимися параметрами, Радиофизика 8, 893 (1965).

993. G. Kantor, Whistler-hydromagnetic extension of magnetoionic theory, J. Geophys. Res. **70**, 4823 (1965).

994. Ultra low frequency electromagnetic fields, Papers. Rad. Sci. **69D**, № 8 (1965).

995. D. Basu, R. Jancel et T. Kahan, Calcul des effets non linéaires liés à la propagation d'ondes electromagnétiques dans un plasma lorentzien homogéne et isotrope, C. R. (Paris) **261**, 2302 (1965).

996. Д. П. Костомаров, О дрейфовых плазменных волнах, распространяющихся поперек магнитного поля, ЖТФ 35, 1713 (1965).
997. В. Я. Эйдман, О продольных колебаниях неоднородной плазмы, ЖТФ 35, 1730 (1965).
998. В. И. Курдюмов, К теории черенковского излучения заряда в холодной плазме, ЖТФ 35, 1771 (1965).
999. P. A. Sturrock, R. H. Ball a. D. E. Baldwin, Radiation at the plasma frequency and its harmonics from a turbulent plasma, Phys. Fluids 8, 150 (1965).
1000. D. L. Sachs, Effect of collisions on ion cyclotron waves, Phys. Fluids 8, 1520 (1965).
1001. J. D. Jukes, Stability of finite amplitude ion cyclotron waves in plasma, Phys. Fluids 8, 1531 (1965).
1002. M. R. Feix a. K. Hagenow, Connection between correlations and fluctuations in plasma, Phys. Fluids 8, 1565 (1965).
1003. H. Dreicer, Gaps in the spectrum of electrostatic plasma waves, Phys. Fluids 8, 1568 (1965).
1004. K. A. Hagnes a. D. Kahn, Wave propagation across a twofluid plasma density discontinuity, Phys. Fluids 8, 1681 (1965).
1005. F. Hertweck, Allgemeine 13-Momenten Näherung zur Fokker—Planck Gleichung eines Plasmas, Z. Naturforsch. **20a**, 1243, 1256, 1259 (1965).
1006. В. Л. Сизоненко и К. Н. Степанов, О квазилинейной релаксации продольных колебаний плазмы, ЖЭТФ 49, 1197 (1965).
1007. А. А. Андронов, О циклотронном поглощении и нагреве плазмы, ЖЭТФ 49, 1284 (1965).
1008. Л. П. Коврижных, О взаимодействии поперечных волн с плазмой, ЖЭТФ 49, 1332 (1965).
1009. А. П. Кропоткин и В. В. Пустовалов, Индуцированное комбинационное рассеяние продольных волн в магнитоактивной плазме, ЖЭТФ 49, 1345 (1965).
1010. B. K. Banerjea, Magneto-ionic propagation in inhomogeneous media, Rad. Sci. 69D, 1285, 1297 (1965).
1011. W. E. Smith, Energy and dispersion in electromagnetic systems, Austral. J. Phys. 18, 287 (1965).
1012. H. Volland, Plasma wellen im inhomogenen medium, Z. Naturforsch. **20a**, 1143 (1965).
1013. В. Н. Цитович и А. Б. Шварцбург, К теории нелинейного взаимодействия волн в магнитоактивной анизотропной плазме, ЖЭТФ 49, 797 (1965).
1014. K. Yamada, M. Watabe a. Y. Ichikawa, Remark on the kinetic equation in an unstable plasma, Progr. Theor. Phys. **34**, 383 (1965).
1015. R. N. Sudan, Classification of instabilities from their dispersion relations, Phys. Fluids 8, 1899 (1965).
1016. A. H. Nayfeh, Nonlinear oscillations in a hot electron plasma, Phys. Fluids. 8, 1896 (1965).
1017. T. F. Bell, Nonlinear Alfvén waves in a Vlasov-Plasma, Phys. Fluids 8, 1829 (1965).
1018. K. J. Harker, Longitudinal oscillations in unbouded onedimensional nonuniform plasmas, Phys. Fluids 8, 1846 (1965).
1019. F. B. Malik a. S. K. Trehan, Effect of transport coefficients on the damping of hydromagnetic waves, Ann. Phys. 34, 1 (1965).
1020. Y. Itikawa, High-frequency conductivity of a plasma in a magnetic field, J. Phys. Soc. Japan **20**, 1921 (1965).

1021. P. Rolland, Instabilities and growing waves, Phys. Rev. **140**, B776 (1965).

1022. R. Leven, Zur nichtlinearen Kopplung zwischen longitudinalen und transversalen Wellen in einem Plasma, Ann. Physik. **16**, 235 (1965).

1023. E. Woyk (Chvojkova), Analytical formulas for radio paths in sperically stratified ionospheres, Rad. Sci. **60D**, 453 (1965).

1024. R. J. Papa a. C. T. Case, The nonlinear interaction of a radiofrequency wave with an inhomogeneous plasma slab, Canad. J. Phys. **43**, 2021, 2036 (1965).

1025. А. Г. Ситенко и А. А. Гурин, О влиянии столкновений между частицами на флуктуации в плазме, ЖЭТФ **49**, 1591 (1965).

1026. Т. К. Бреус и Г. Д. Гдалевич, Электронная и ионная температура в ионосфере, Ж. «Космические исследования» **3**, 877 (1965).

1027. И. В. Андреев, Среднее поле волны в среде со случайными неоднородностями, Радиофизика **8**, 1069 (1965).

1028. И. М. Фукс, Отражение и преломление волны произвольной формы на криволинейной границе раздела, Радиофизика **8**, 1078 (1965).

1029. Р. Ф. Бойкова и Э. Е. Фрадкин, Распространение сильного монохроматического излучения в средах с различными типами уширения спектральной линии, Радиофизика **8**, 1089 (1965).

1030. А. Е. Бажова, Сложный Доплер-эффект в плазме, Радиофизика **8**, 1110 (1965).

1031. В. Ф. Алексин, В. И. Пахомов и К. Н. Степанов, О некоторых особенностях излучения электромагнитных волн в анизотропных средах с дисперсией, Радиофизика **8**, 1135 (1965).

1032. А. Г. Литвок, О самофокусировке электромагнитных волн в плазме в сильном магнитном поле, Радиофизика **8**, 1148 (1965); см. также **9**, 629, 900 (1966).

1033. В. Н. Сошников и Е. С. Трехов, Об удельной мощности гармонии поля в высокочастотном разряде при учете их нелинейного взаимодействия, Радиофизика **8**, 1196 (1965).

1034. Ю. А. Романов, Коллективные потери в анизотропных кристаллах, Радиофизика **8**, 1203 (1965).

1035. В. М. Конторович, Рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях скорости и изучение флуктуирующих сред во внешних полях, Радиофизика **8**, 1244 (1965).

1036. Ю. А. Березин, О волнах конечной амплитуды в горячей плазме, ПМТФ (Журнал прикладной механики и технической физики, Новосибирск) № 6, 26 (1965).

1037. В. М. Коровин, О возможных упрощениях уравнений двухтемпературной частично ионизованной плазмы, ПМТФ № 6, 33 (1965).

1038. А. А. Рухадзе, В. С. Саводченко и С. А. Тригер, Метод геометрической оптики для дифференциальных уравнений четвертого порядка в приложениях к низкочастотным колебаниям плазмы, ПМТФ № 6, 58 (1965).

1039. B. Buti a. R. K. Jain, Collisional damping of transverse plasma oscillations, Phys. Fluids **8**, 2080 (1965).

1040. R. K. Khosla a. M. P. Murgai, Small amplitude wave propagation in hot ionized gases, Phys. Fluids **8**, 2087 (1965).

1041. Г. И. Сурамлишвили, Лагранжева формулировка кинетики волн в слаботурбулентной плазме, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) **5**, 210 (1965).

1042. E. N. Parker, Suprathermal hydromagnetic waves, Astrophys. J. 142, 1086 (1965).
1043. А. Н. Кондратенко и В. И. Мирошниченко, Кинетическая теория прохождения электромагнитных волн через плазменный слой, ЖТФ 35, 2154 (1965).
1044. I. Kimura, R. L. Smith a. N. M. Brice, An interpretation of transverse whistlers, J. Geophys. Res. 70, 5961 (1965).
1045. T. Watanabe, Determination of the electron distribution in the magnetosphere using hydromagnetic whistlers, J. Geophys. Res. 70, 5839 (1965).
1046. J. Teichmann, On the propagation of electromagnetic waves in a plasma with heavy positive and negative ions, Physics Letters 19, 534 (1965).
1047. A. J. Turski, Transient and oscillating solution of Boltzmann—Vlasov equation in linearized plasma, Ann. Phys. 35, 240 (1965).
1048. J. R. Wait, Propagation of pulses in dispersive media, Rad. Sci. 69D, 1387 (1965).
1049. H. Guthart, An anisotropic electron velocity distribution for the cyclotron absorption of whistlers and VLF emissions, Rad. Sci. 69D, 1403 (1965).
1050. H. Guthart, Nose whistler dispersion as a measure of magnetosphere electron temperature, Rad. Sci. 69D, 1417 (1965).
1051. Т. В. Казачевская и Г. С. Иванов-Холодный, Ракетные данные о поведении электронной концентрации в ионосфере на высотах 100—300 *км*, Геомагн. и аэрон. 5, 1009 (1965).
1052. T. Yonezawa, Theory of the formation of the ionosphere, Space Sci. Revs. 5, 3 (1966).
1053. K. Maeda a. S. Kato, Electrodynamics of the ionosphere, Space Sci. Revs. 5, 57 (1966).
1054. T. Takakura, Implications of solar radio bursts for the study of the solar corona, Space Sci. Revs. 5, 80 (1966).
1055. В. Н. Цитович и А. Б. Шварцбург, Нелинейная поляризация излучения, проходящего через плазму, Письма в редакцию ЖЭТФ, 3, 105 (1966).
1056. J. T. Verdeyen, Lineary polarized characteristic waves in a magnetoplasma, Radio Sci. 1, 37 (1966).
1057. A. J. Willson, The propagation of magneto-elastic waves, Proc. Cambr. Phil. Soc. 62, 91 (1966).
1058. J. E. McKenzie, Cerenkov radiation in a warm plasma under the action of an infinite magnetostatic field, Proc. Phys. Soc. 87, 349 (1966).
1059. А. Н. Кондратенко, Кинетическая теория электромагнитных волн в ограниченной плазме, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 5, 267 (1965); см. также ЖТФ 36, 398 (1966), Радиофизика 9, 261, 272, 1065 (1966).
1060. В. В. Долгополов и К. Н. Степанов, Черенковское поглощение альфеновской и быстрой магнитозвуковой волн в неоднородной плазме, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 5, 276 (1965).
1061. M. Trocheris, Sur les modes normaux des oscillations de plasma, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 5, 299 (1965).
1062. И. С. Байков, Л. С. Богданкевич и А. А. Рухадзе, Влияние электрического поля на спектр колебаний неоднородной плазмы, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 5, 318 (1965).
1063. А. Б. Михайловский и О. П. Погуце, Кинетическая теория колебаний неоднородной плазмы со столкновениями, ЖТФ 36, 205 (1966).

1064. Н. С. Репалов и Н. А. Хижняк, К теории возбуждения ионных плазменных колебаний электронными ленгмюровскими волнами, ЖТФ **36**, 219 (1966).

1065. Ю. Р. Алапакян, О взаимодействии плоской и поверхностной электромагнитных волн в плазме, ЖТФ **36**, 258 (1966).

1066. И. С. Данилкин, О взаимодействии интенсивной высокочастотной электромагнитной волны с ленгмюровскими электронными колебаниями в однородной изотропной плазме, ЖТФ **36**, 266 (1966).

1067. В. В. Долгополов, Об особенностях электромагнитного поля в неоднородной магнитоактивной плазме, ЖТФ **36**, 273 (1966).

1068. Ю. А. Рыжов, Тензор эффективной диэлектрической проницаемости сильно неоднородной анизотропной среды, Радиофизика **9**, 39 (1966), см. также Радиофизика **9**, 205 (1966).

1069. В. В. Шевченко, Электромагнитные волны в изотропном слоистом плазменном волноводе, Радиофизика 9, 110 (1966).

1070. D. Walsh a. F. T. Haddok, Antenna impedance in a plasma, Ann. astrophys. **28**, 605 (1965).

1071. Ю. Н. Днестровский и Д. П. Костомаров, Определение плотности ионосферной плазмы с помощью фазового метода, Геомагн. и аэрон. 6, 138 (1966).

1072. Некогерентное рассеяние радиоволн, Сб. статей, «Мир», 1965.

1073. Дж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ), «Мир», 1965.

1074. Y. H. Ichikawa, Dielectric properties of a weakly turbulent plasma, Phys. Fluids **9**, 111 (1966).

1075. E. L. Woollett, Kinetic equation for a warm plasma, Phys. Fluids **9**, 118 (1966).

1076. J. Denavit, Landau damping and the velocity Fourier transform of the initial perturbation, Phys. Fluids 9, 134 (1966).

1077. M. E. Oakes a. H. Schlüter, Damping at the lower hybrid resonance in a warm partially ionized plasma, Ann. Phys. **35**, 396 (1965).

1078. M. S. Sodha a. P. K. Kaw, Non-linear generation of third harmonic in magnetoplasma, Progr. Theor. Phys. 34, 557 (1965).

1079. D. A. Gurnett a. S. D. Shauhan, Determination of hydrogen ion concentration, electron density and proton gyrofrequency from the dispersion of proton whistlers, J. Geophys. Res. **71**, 741 (1966).

1080. G. G. Comisar, Theory of the Raman effect in plasmas, Phys. Rev. **141**, 200 (1966).

1081. В. Л. Грановский, Диффузия и время жизни свободных электронов и ионов в низкотемпературной плазме в однородном магнитном поле, Радиотехника и электроника **11**, 371 (1966).

1082. М. Е. Герценштейн и М. Ф. Бахарова, К вопросу о фазовых соотношениях при усилении в активной среде, Радиотехника и электроника 11, 526 (1966).

1083. J. R. Wait, On the theory of wave propagation in a bounded compressible plasma, Canad. J. Phys. **44**, 293 (1966).

1084. Н. П. Георгадзе, О нелинейных колебаниях магнитоактивной плазмы, Радиофизика **9**, 241 (1966).

1085. В. Г. Барьяхтар, М. А. Савченко и К. Н. Степанов, О взаимодействии плазменных и спиновых волн в ферромагнитных полупроводниках и металлах, ЖЭТФ **50**, 576 (1966).

1086. P. Caldirola, O. De Barbieri a. C. Maroli, Electromagnetic wave propagation in a weakly ionized plasma, Nuovo Cimento **42B**, 266 (1966).

1087. H. H. Chen a. D. K. Cheng, General characterization of a two-fluid anisotropic warm plasma in principal coordinates, Phys. Rev. **144**, 177 (1966).
1088. S. C. Bloch, Nonlinear microwave conductivity of a slightly ionized gas for arbitrary collision cross sections, Phys. Rev. **144**, 181 (1966).
1089. J. Mertsching, Theorie electromagnetischer Wellen in Metallen und ihrer Wechselwirkung mit Ultraschallwellen, Physica Status Solidi. **14**, 3 (1966).
1090. L. W. Parker, Longitudinal plasma waves in the low-frequency limit, Phys. Fluids 9, 274 (1966).
1091. B. D. Fried, A. N. Kaufman a. D. L. Sachs, Low-frequency spatial response of a collisinal electron plasma, Phys. Fluids 9, 292 (1966).
1092. Ю. М. Алиев, В. П. Силин и Х. Уотсон, Параметрический резонанс в плазме, находящейся в магнитном поле, ЖЭТФ **50**, 943 (1966).
1093. Дж. Роуландс, В. Л. Сизоненко и К. Н. Степанов, К квазилинейной теории затухания электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, ЖЭТФ **50**, 994 (1966).
1094. А. Б. Михайловский и К. Юнгвирт, Квазилинейная трансформация волн в неоднородной плазме, ЖЭТФ **50**, 1036 (1966).
1095. И. Б. Левинсон и Г. Э. Мажуолите, Влияние межэлектронных столкновений на функцию распределения электронов в сильном электрическом поле, ЖЭТФ **50**, 1048 (1966).
1096. Л. М. Горбунов и В. П. Силин, О рассеянии волн в плазме, ЖЭТФ **50**, 1095 (1966).
1097. T. Kakutani, Non-linear hydromagnetic waves propagation along a magnetic field in a cold collision—free plasma, J. Phys. Soc. Japan **21**, 385 (1966).
1098. M. Y. Fitremann, Etude de la propagation d'une onde de Alfven dans un milieu lentement variable avec le temps, Ann. astrophys. **29**, 143 (1966).
1099. R. Jacobsson, Optical properties of periodically stratified media with continuously varying refractive index, Arkiv fysik **31**, 191 (1966).
1100. K. Davies, Ionospheric Radio Propagation, Nat. Bur. Standarts Monograph 80, 1965.
1101. P. S. Pershan, Non-linear optics. Progress in optics Ed. E. Wolf. 5, 85 (1966).
1102. R. Jacobsson, Light reflection from films of continuously varying refractive index, Progr. optics. Ed. E. Wolf 5, 249 (1966).
1103. F. W. Sluijter a. M. Weenink, Wave propagation through an Epstein density profile across an inhomogeneous magnetic field, Physica 32, 741 (1966).
1104. E. Canobbio a. R. Croci, Harmonics of the electron gyro-frequency in plasmas, Phys. Fluids. 9, 549 (1966).
1105. I. P. Shkarofsky, Dispersion of waves in cyclotron harmonic resonance regions in plasmas, Phys. Fluids 9, 570 (1966).
1106. А. Н. Кондратенко, Кинетическая теория электромагнитных волн в ограниченной магнитоактивной плазме, ЖТФ 36, 763 (1966).
1107. Ю. Р. Аланакян, К взаимодействию электромагнитных волн на границе плазмы, ЖТФ 36, 806 (1966).
1108. И. С. Данилкин, Трансформация поперечной электромагнитной волны в ионно-звуковые колебания плазмы с образованием промежуточной ленгмюровской электронной волны, ЖТФ 36, 813 (1966).

1109. А. Д. Пилия, О трансформации волн в неоднородной плазме, ЖТФ **36**, 818 (1966).
1110. Y. Kato, M. Tajiri a. T. Taniuti. Propagation of hydromagnetic waves in collisionless plasma, J. Phys. Soc. **21**, 765 (1966).
1111. C. W. Horton, Coupling of transverse and longitudinal waves at the upper hybrid frequency, Phys. Fluids **9**, 815 (1966).
1112. G. Allcock, The propagation of whistlers underneath the ionosphere, J. Geophys. Res. **71**, 2279 (1966).
1113. В. И. Аксенов, О прохождении электромагнитных волн сверхнизкой частоты через ионосферную плазму, Радиотехника и электроника 11, 1030 (1966).
1114. Ю. В. Богомолов, О проникновении электромагнитного поля в магнитоактивную плазму, Радиофизика **9**, 462 (1966).
1115. В. А. Липеровский и В. Н. Цитович, Нелинейное взаимодействие волн в плазме при наличии интенсивных поперечных волн, Радиофизика **9**, 469 (1966).
1116. Б. Т. Кормилицын, К теории распространения электромагнитных волн в ограниченной плазме, Радиофизика **9**, 479 (1966).
1117. Ю. И. Орлов, О некоторых особенностях лучевой теории распространения цилиндрических и сферических волн в слабо неоднородной плазме, Радиофизика **9**, 497 (1966); **9**, 657 (1966).
1118. J. N. Tandon a. N. K. Bajaj, Wave propagation in rarefied plasma under the action of the Coriolis force, Monthly Notices **132**, 285 (1966).
1119. H. R. Raemer, A matematical model for analysis of wave propagation in a linearized vertically nonuniform partially ionized gas, Canad. J. Phys. **44**, 1047 (1966).
1120. M. S. Sodha a. P. K. Kaw, Non-linear generation of combination frequencies in a plasma, Proc. Phys. Soc. 88, 373 (1966).
1121. J. Wilhelm a. J. Wisliceny, Zur Ausbreitung von Wellen Kleiner Amplitude in einem unvollständig ionisierten Plasma, Beiträge aus der Plasma Physics 6, 89 (1966).
1122. H. Unz, Relativistic magneto-ionic theory for drifting plasma in longitudinal direction, Phys. Rev. **146**, 92 (1966).
1123. I. B. Bernstein a. F. Engelmann, Quasi-linear theory of plasma waves, Phys. Fluids **9**, 937 (1966).
1124. E. A. Desloge, Velocity distribution of the electrons in an ionized gas in the presence of a homogeneous alternating electric field, Phys. Fluids **9**, 982 (1966).
1125. В. В. Долгополов, Тепловое излучение неоднородного слоя плазмы, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 6, 1 (1966).
1126. Ю. Н. Днестровский и Д. П. Костомаров, Зондирование плазмы электромагнитными волнами, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 6, 35 (1966).
1127. G. Bardotti, A. Cavaliere a. F. Engelmann, Hydromagnetic shock fronts with collisionless dissipation, Ядерный синтез (Nucl. Fusion) 6, 46 (1966).
1128. F. L. Scarf, Effect of coherent density fluctuations on the radar determination of total electron content, J. Geophys. Res. **71**, 2709 (1966).
1129. B. Kursunoglu, Relativistic plasma in a magnetic field, Nuovo Cimento **43B**, 209 (1966).
1130. С. С. Моисеев, Об одной возможности аномальной трансформации волн в плазме, Журнал прикладной механики и технической физики (ПМТФ) № 3, 3 (1966).
1131. А. Г. Литвак, О самофокусировке электромагнитных волн в изотропной плазме, Радиофизика 9, 675 (1966).

1132. В. И. Мирошниченко, Кинетическая теория отражения электромагнитной волны от движущейся плазмы, Радиофизика 9, 666 (1966).
1133. В. К. Полищук, Использование поверхностных волн для измерения диэлектрической проницаемости неоднородных сред, Радиофизика 9, 681 (1966).
1134. Ф. Г. Басс и Ю. Г. Гуревич, Нелинейная теория распространения электромагнитных волн в полупроводниках, ЖЭТФ 51, 536 (1966).
1135. А. М. Федорченко, Преобразование поперечной электромагнитной волны в продольную на границе диэлектрик—плазма, ЖТФ 36, 1327 (1966).
1136. D. Montgomery a. I. Alexeff, Paramagnetic exitation of transverse waves in a plasma, Phys. Fluids 9, 1362 (1966).
1137. E. A. Desloge a. D. J. Coleman, Harmonic generation in an ionized gas, Phys. Fluids 9, 1389 (1966).
1138. R. Aaron a. D. Currie, Relativistic contribution to Landau damping, Phys. Fluids 9, 1423 (1966).
1139. G. J. Daniell, The effect of the curvature of the Earth on radioastronomical observations from satellites, J. Atmos. Terr. Phys. 28, 1 (1966).
1140. A. D. M. Walker, The theory of guiding of radiowaves in the upper ionosphere, J. Atmos. a. Terr. Phys. 28, 747 (1966).
1141. R. F. Lutomirski a. R. N. Sudan, Exact nonlinear electromagnetic whistler modes, Phys. Rev. 147, 156 (1966).
1142. C. F. Kennel a. J. M. Greene, Finite Larmor radius hydromagnetics, Ann. Phys. 38, 63 (1966).
1143. I. Lerche, Transverse waves in a relativistic plasma, Phys. Fluids 9, 1073 (1966).
1144. Л. А. Шишимов, Резонансное рассеяние электромагнитных волн малыми возущениями в разреженной плазме, Геомагн. и аэрон. 6, 670 (1966).
1145. Н. Г. Денисов и Л. М. Ерухимов, Статистические свойства фазовых флуктуаций при полном отражении волн от ионосферного слоя, Геомагн. и аэрон. 6, 695 (1966).
1146. А. В. Гульельми, К теории диагностики концентрации плазмы к экзосфере по данным свистящих атмосфериков, Геомагн. и аэрон. 6, 778 (1966).
1147. Ю. Г. Павленко, О допплеровском смещении частоты излучателя, движущегося в ионосфере, Геомагн. и аэрон. 6, 790 (1966).
1148. B. Hultqvist, Ionospheric absorption of radio noise, Space Sci. Rev. 5, 771 (1966).
1149. В. И. Мирошниченко, Электромагнитные свойства полуограниченной плазмы при диффузном отражении электронов от границы, ЖЭТФ 36, 1008 (1966).
1150. В. Н. Цитович и В. Д. Шапиро, К нелинейной теории прохождения импульсов электромагнитных волн через границу плазмы. Журнал прикладной механики и технической физики (ПМТФ) № 4, 48 (1966).
1151. D. T. Farley, A theory of incoherent scattering of radio waves by a plasma, J. Geophys. Res. 71, 4091 (1966).
1152. Б. Н. Гершман и В. Ю. Трахтенгерц, Ультранизкочастотное радиоизлучение верхней атмосферы и его связь с другими геофизическими явлениями, УФН 89, 201 (1966).
1153. D. A. Tidman, Damping of interstellar plasma waves by the cosmic ray gas, Astrophys. J. 144, 615 (1966).
1154. Э. А. Канер и В. Г. Скобов, Электромагнитные волны в металлах в магнитном поле, УФН 89, 367 (1966).

1155. I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston a. M. P. Bachynski, The particle kinetics of plasmas, Addison—Wesley Publ. Co., 1966.

1156. В. Л. Сазоненко и К. Н. Степанов, К квазилинейной теории черенковского и циклотронного затухания электромагнитных волн в плазме, ЖЭТФ 51, 858 (1966).

1157. В. И. Карпман, Об «особых» решениях уравнений для плазменных колебаний, ЖЭТФ **51**, 907 (1966).

1158. Л. М. Коврижных, О квазилинейной теории ионнозвуковых волн, ЖЭТФ **51**, 915 (1966).

1159. A. Barnes, Collisionless damping of hydromagnetic waves, Phys. Fluids 9, 1483 (1966).

1160. C. Comstock, Transmission and reflection of electromagnetic waves normally incident on a warm plasma, Phys. Fluids 9, 1514 (1966).

1161. L. S. Hall a. W. Heckrotte, Interaction models, negative energy waves and electrostatic instabilities, Phys. Fluids 9, 1496 (1966).

1162. N. D'Angelo, S. v. Goeler a. T. Ohe, Propagation and damping of ion waves in a plasma with negative ions, Phys. Fluids **9**, 1605 (1966).

1163. H. L. Berk, M. N. Rosenbluth a. R. N. Sudan, Plasma wave propagation in hot inhomogeneous media, Phys. Fluids 9, 1606 (1966).

1164. U. Ingard a. W. M. Manheimer, Energy density in a plasma oscillation, Phys. Fluids 9, 1608 (1966).

1165. P. Bachmann, Zur Frage der Landau-Dämpfung im anisotropen Plasma, Beiträge aus der Plasma Physics 6, 227 (1966).

1166. Ю. А. Чернов, Влияние магнитного поля Земли на сигнал возвратно-наклонного зондирования, Геомагн. и аэрон. **5**, 881 (1966).

1167. В. А. Попов, К кинетической теории отражения электромагнитных волн плазмой, Радиотехника и электроника **11**, 1878 (1966).

1168. F. Winterberg, Anomalous collisionless damping of Alfvén waves in inhomogeneous plasmas, Zs. Naturforschung **21a**, 1270 (1966).

1169. И. Г. Кондратьев и М. А. Миллер, Об использовании решений некоторых нелинейных уравнений для изучения волн в линейных неоднородных средах, Радиофизика 9, 910 (1966).

1170. Ю. И. Орлов, К вопросу о просачивании волн через акустику в параболическом плазменном слое, Радиофизика 9, 1036 (1966); **10**, 30 (1967).

1171. Г. И. Сурамлишвили, О взаимодействии фотонов в плазме, Радиофизика **9**, 1038 (1966).

1772. В. И. Петвиашвили, Об ионозвуковых колебаниях в плотной плазме, ЖТФ, **36**, 1737 (1966).

1173. В. Н. Цитович и А. Б. Шварцбург, К теории возбуждения и распространения электромагнитных волн в слабо турбулентной плазме, ЖТФ **36**, 1896 (1966).

1174. М. А. Савченко и К. Н. Степанов, Связанные спиновые, электромагнитные и плазменные волны в ферритах, Физика металлов и металловедение **22**, 498 (1966).

1175. В. Н. Цитович и А. Б. Шварцбург, Нелинейное взаимодействие волн в плазме, находящейся в сильном внешнем магнитном поле, ЖТФ **36**, 1915 (1966).

1176. А. Д. Пилия, О трансформации волн в слабо неоднородной плазме, ЖТФ **36**, 2103 (1966).

1177. В. Н. Цитович, Нелинейные эффекты в плазме, УФН **90**, 435 (1966).

1178. Ю. А. Березин и В. И. Карпман, О нелинейной эволюции возмущений в плазме и других диспергирующих средах, ЖЭТФ **51**, 1557 (1966).

1179. А. И. Алексеев и В. В. Якимец, Электромагнитное излучение в поглощающей среде, ЖЭТФ **51**, 1589 (1966).
1180. N. Yajima, The effect of finite Larmor radius on the propogation of magnetoacoustic waves, Progr. Theoret. Phys. 36, 1 (1966).
1181. A. Hruska, Amplification of electromagnetic disturbances in the non-uniform ionosphere, Planet. a. Space Sci. **14**, 1077 (1966).
1182. P. Banks, Collision freguencies and energy transfer, Planet. a. Space Sci. **14**, 1085, 1105 (1966).
1183. М. А. Савченко и К. Н. Степанов, К теории связанных электромагнитных и спиновых волн в геликоидальных магнитных структурах, ФТТ 8, 3574 (1966).
1184. В. Г. Веселаго, О свойствах веществ с одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной восприимчивостей, ФТТ 8, 3571 (1966); УФН **91**, в. 4 (1967).
1185. Л. А. Жекулин, С. А. Намазов и Ф. Ф. Добрякова, Отражение импульсных сигналов от неоднородной ионосферы при зондировании ее с внешней стороны, Геомагн. и Аэрон. 6, 1019 (1966).
1186. E. H. Klevans a. J. R. Primak, Analysis of the dielectric constant of a two-temperature plasma, Phys. Fluids 9, 1805 (1966).
1187. Н. Я. Коцаренко и А. М. Федорченко, К вопросу о стационарном распределении плазмы в поле сильной электромагнитной волны, ЖТФ 36, 2107 (1966).
1188. А. Д. Пилия, Рассеяние волн в плазме при наличии трансформации, ЖТФ 36, 2195 (1966).
1189. H. Unz, Oblique incidence on plane boundary between two general gyrotropic plasma media, J. Mat. Phys. 6, 1813 (1965).
1190. В. И. Татарский, О сильных флуктуациях амплитуды волны, распространяющейся в среде со слабыми случайными неоднородностями, Радиофизика **10**, 48 (1967).
1191. M. S. Sodha a. B. L. Kaw, Nonlinear second harmonic generation in an inhomogeneous magnetoplasma, J. Phys. Soc. Japan **21**, 2674, 2684 (1966).
1192. H. Kever a. G. K. Morikawa, Steady, oblique, nonlinear waves in a warm collision—free plasma, Phys. Fluids 9, 2180 (1966).
1193. C. Kennel, Low-frequency whistler mode, Phys. Fluids 9, 2190 (1966).
1194. D. B. Chang a. W. E. Drummond, Interaction of plasmons, Phys. Fluids 9, 2254 (1966).
1195. J. Teichmann, On the propagation of electromagnetic waves in a plasma with negative ions, Canad. J. Phys. **44**, 2973 (1966).
1196. Г. И. Сурамлашвили, О кинетике волн в анизотропной плазме, ЖЭТФ 52, 255 (1967).
1197. И. С. Веселовский, Распространение звука в частично ионизованной плазме, Геомагн. и аэрон. **7**, 45 (1967).
1198. Э. И. Гинзбург, Возмущение нижней ионосферы радиоимпульсом, Геомагн. и аэрон. **7**, 104 (1967).
1199. М. Д. Флигель, Пересчет величины поглощения радиоволн с вертикального на наклонное падение, Геомагн. и Аэрон. **7**, 193 (1967).
1200. H. B. Liemohon, Cyclotron-resonance amplification of VLF and ULF whistlers, J. Geophys. Res. **72**, 39 (1967).
1201. А. П. Кондратенко и И. Н. Онищенко, Кинетическая теория прохождения электромагнитных волн через магнитоактивный слой плазмы, Радиофизика **10**, 175 (1967).
1202. J. T. Anderson, Oscillations of a magnetized plasma with anisotropic initial distribution, Proc. Phys. Soc. **90**, 715 (1967).

1203. J. G. Codrey a. P. G. Saffman, The structure of quasishockes in a collision-free plasma in a magnetic field, J. Plasma Physics 1, 129 (1967).
1204. F. W. Sluijter, Wave propagation through an Epstein profile with a local resonance in the presence of a static magnetic field, Proc. of the Seventh Inter. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Beograd, 1966, v. 11, стр. 264.
1205. D. E. Baldwin a G. Rowlands, Plasma oscillations perpindicular to a weak magnetic field, Phys. Fluids 9, 2444 (1967).
1206. G. A. Pearson, Wave propagation near electron cyclotron harmonics in nonuniform plasmas, Phys. Fulids 9, 2454 (1967).
1207. В. Л. Гинзбург и А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, Handbuch d. Physic 49/4 (в печати).

Предметный указатель

Акустические волны 125—127

Бесстолкновительная плазма 123, 237, 589

Взаимодействие плазменных и электромагнитных волн 321—344, 572, 573
Волна необыкновенная 157—160, 167, 169, 173, 174, 193, 208, 209, 374
— обыкновенная 157—160, 167, 169, 173, 176, 193, 208, 232, 233, 374
Волновой вектор 24
— — несущий 385
Волны высокочастотные 76—84, 154—234
— магнитогидродинамические 248—256
— магнитозвуковые 250
— низкочастотные 84—86, 235, 247—271
— нормальные 158, 169—175, 334—340, 384
— плазменные 33, 34, 98—125, 194—196, 334—340
— плоские 32 и д., 155 и д.
— — неоднородные 93
— — однородные 93
— промежуточной частоты 86—89
Вращение плоскости поляризации 176—179, 382, 585—587
Время группового запаздывания 347, 390
— замедления неравновесных электронов 68—73
— установления амплитуды сигнала 505, 527, 528
— фазового запаздывания 347
Высотно-частотные характеристики 499—502, 525—527, 547—550

Геомагнитное поле, дипольный характер 550—552
Геометрикооптическое приближение в среде изотропной 280—297
— — — — магнитоактивной 374—383
— — при наклонном падении 315—317, 467—475
— — — отражении от ионосферы 515—517
«Гибридный» резонанс 262
Гиромагнитный резонанс 149—154, 186—188, 233, 234, 262—264
Гиротропная среда 144, 395
Групповая скорость 347—349
— — в среде магнитоактивной 383—396
— — — — поглощающей 370—372

Движение однородной плазмы 244—247
Двухтемпературная плазма 127—131
Дебая радиус 26, 58, 102, 109, 111
— экранирование 57—61
Действующая высота отражения 499—502, 524—528
Действующее поле 40—44
Диспергирующая среда, плотность энергии 359—370
Дисперсионное уравнение 92, 100—109, 128—131, 157, 179—181, 193, 197, 208, 225—227, 250
Дисперсия пространственная 24—28
— — в плазме неоднородной изотропной 329—334
— — — — — магнитоактивной 434, 489, 490
— — — — однородной изотропной 47, 48, 95, 98—104
— — — — — магнитоактивной 191—192
— —, кинетическая теория 104—109
— частотная 24, 25
Длина пути группового 347
— — оптического 347
Доплеровское уширение 212, 214, 219

Естественноактивная среда 144, 395, 490

Закон Кирхгофа 113, 203, 204, 207, 574—577
Затухание волн 95—96, 110—125, 210, 211, 223, 224
— — в отсутствие соударений 110, 123

Излучение магнитотормозное (синхротронное) 197—199, 210
— тормозное 187, 197
— Черенкова 109—116, 197—200
Импульсы в среде изотропной 344—359, 370—372
— — — магнитоактивной 383—402
—, поле, Фурье-представление 344—346
—, расплывание 349—356, 385, 398, 400
Ионосфера, параметры 181—183, 492—505

Кинетические уравнения 48, 49, 61, 62, 75, 104, 237—240
Концентрация нейтральных частиц 18
— электронов 18
Коэффициент затухания плазменных волн 97, 98, 117
— отражения 310
— поглощения 94, 203—207
— поляризации 167
— пропускания 311
Критический параметр 179
Критическое число соударений 179
Кроссмодуляция 618—623
Кулоновский логарифм 56

Ландау затухание 123
Линейный слой 298—304
Лучевая трактовка 316, 317, 384, 391, 392, 529—541
Лучи, траектории 475—482, 529, 543—548

Магнитное наклонение 145
— поле, влияние на плазму 139 и д., 184, 541—552, 568—572
Магнитогидродинамическое приближение 234—237
Мертвая зона 534
Метод вариационный 444—452
— Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна (см. также Геометрико-оптическое приближение) 280
— квазигидродинамический 127—131, 192—196, 237—247, 256—262, 338
— кинетического уравнения 200, 201, 207
— коэффициентов Эйнштейна 113, 192, 200, 204—207
— теории возмущений 292, 437—443
— фазовых интегралов 452—456
Микропроцессы в плазме 63—68

Наклонное падение волн на слой 312—321, 323—329, 466—490, 528—537, 549—552

Одномерные задачи 31—33
Отклоняющая область 511, 549
Отражение волн, действующая высота 499—502, 524—528
— — от слоя ионосферного 290, 291, 491—552
— — — — неоднородного 402—410
— — — — произвольного 519—523

Плазма в сильном электрическом поле 49—51
—, динамика 234—247
—, колебания 33, 34
—, нелинейные явления 588—629
— неоднородная изотропная 278—372
— — магнитоактивная 373—491
— однородная изотропная 37—138
— — магнитоактивная 139—277
—, особенности 20, 21
—, параметры 18—20
—, распространение 17 и д.
Плазменное поле 55, 590
Плазменный резонанс 233
Плоскослоистая среда 278—280
Плотность «свободных» зарядов 29
— энергии в диспергирующей среде 359—370
Поглощение магнитотормозное 210, 211
—, не связанное с соударениями 197—203, 573, 574
— резонансное 201—203, 214—222
—, учет 508—513
— Черенкова 202, 222—232
Показатель поглощения 92—98, 154—162, 181—183
— преломления 92—98, 102, 154—162, 181—183
— — мнимый 96, 102, 103
— —, особенности 419—434
Поле действующее 40—44
—, уравнения 21 и д.
Поляризационная поправка Лоренца 41, 172, 548
Поляризационное вырождение 381, 382, 410
Поляризация необыкновенной и обыкновенной волн 167—169, 171, 172, 374—377
— предельная 410—419
— при продольном и поперечном распространении 157—162
Поток энергии вектор 392—396
«Предвестник» и «хвост» сигнала 349, 355—358
Проводимость (см. также Проницаемость диэлектрическая) 30, 75—77, 86—92
—, тензор 24, 29, 30
—, элементарный вывод 37—40
Проницаемость диэлектрическая 20, 37—40, 75—77, 86—92
— — комплексная 30 и д.
— — —, высокочастотный случай 16—84, 154—188
— — —, кинетическая теория 75—77, 147—150
— — —, низкочастотный случай 84—86, 257
— — —, общий случай 86—90
— — —, тензор 24, 27—31, 48, 141—154
— — —, элементарная теория 37—40, 141—147, 150—154, 592—600
— — —, — —, применение 44—47, 141, 150, 154, 174, 175
— —, тензор 24, 28, 29, 31, 142, 143
— магнитная 28, 47, 48
Просачивание волн 482—486

Распределения функция 9, 52—55
— — Максвелла 49, 102
— —, отклонение от равновесной 73—75
Распространение волн в короне 553—577
— — — межзвездной среде 577—587
— — — плазме неоднородной изотропной 278—372
— — — — — магнитоактивной 373—491
— — — — однородной и изотропной 37—138
— — — — — магнитоактивной 139—277
— — — — — — высокочастотных 154 и д.
— — — — — — низкочастотных 247 и д.
— — квазипродольное и квазипоперечное 175, 176, 178, 391, 548, 549
— — под произвольным углом к магнитному полю 162—165, 174, 404—410
— — поперечное 159, 173, 178, 193, 202, 402—404, 419
— — продольное 158, 173, 178, 193, 207—214, 256—259, 402—404
— — разных типов 34—36
Резонанс «гибридный» 262
— гиромагнитный 149—154, 186—188, 233, 234, 262—264
Резонансное поглощение 201—203, 214—222
Рекомбинация диссоциативная 64
— электронная 64

Свистящие атмосферики, распространение в металлах 165, 166
Сводка основных формул 131—138, 272—277
Сечение дифференциальное эффективное 69

Сечение отлипания 64
— прилипания 64
— рекомбинации 64
— транспортное 54, 56, 76
Скин-слой, глубина 97
Скорость фазовая 94, 347—349, 384
Слой неоднородный 402—419
— параболический 304—306, 502—505, 518, 519
— переходный 311—312
— симметричный 309—311
Солнечная корона 554—556
Соударений интеграл 49, 53
— число 151
— — критическое 179—181
— — эффективное 39, 40, 48, 70, 76—92, 121, 122
— — — дифференциальное 69
Спиральные волны в металлах 165, 166
Степень ионизации 18

Температура плазмы 19
Теорема Брайта и Тюва 534
— взаимности 486—490
— Мартина 535
Теория кинетическая 48, 61—62, 75—77, 104—109, 147—150, 196—197, 207—214, 265—271, 600—609
— классическая, применимость к движению электронов и ионов 44—47
— плазменных волн квазилинейная 116—125
Тепловое движение, учет 192, 193, 201, 265—271, 337—340
Трансформация волн 340—344, 572—573

Уравнение поля 21 и д.

Фазовая скорость 94, 347—349, 384

Частота комбинационная 623—626
— лэнгмюровская 25
— плазменная 25
— резонансная 222—232
— циклическая, вещественное значение 97, 98
— —, комплексное значение 97, 98

Элементарная теория диэлектрической проницаемости 37—40, 141—147, 150—154, 592—600
Эффект Вавилова — Черенкова 109—116, 197—200
— Доплера 200, 505—507
— люксембург-горьковский 618
— разбухания поля 430—433
— самовоздействия 613—618
— утраивания сигналов 434—466, 482—485
— Фарадея 176—179

Виталий Лазаревич Гинзбург
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ
Москва, 1967 г., 684 стр. с илл.

Редактор *Д. А. Миртова*
Техн. редактор *Л. Ю. Плакше*
Корректор *А. С. Бакулова*

Сдано в набор 6/XII 1966 г. Подписано к печати 30/V 1967 г. Бумага 60 × 90/16. Физ. печ. л. 42,75. Условн. печ. л. 42,75. Уч.-изд. л. 43,81
Тираж 7000 экз. Т-06949. Цена книги 3 р. 01 к. Заказ № 774.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9.