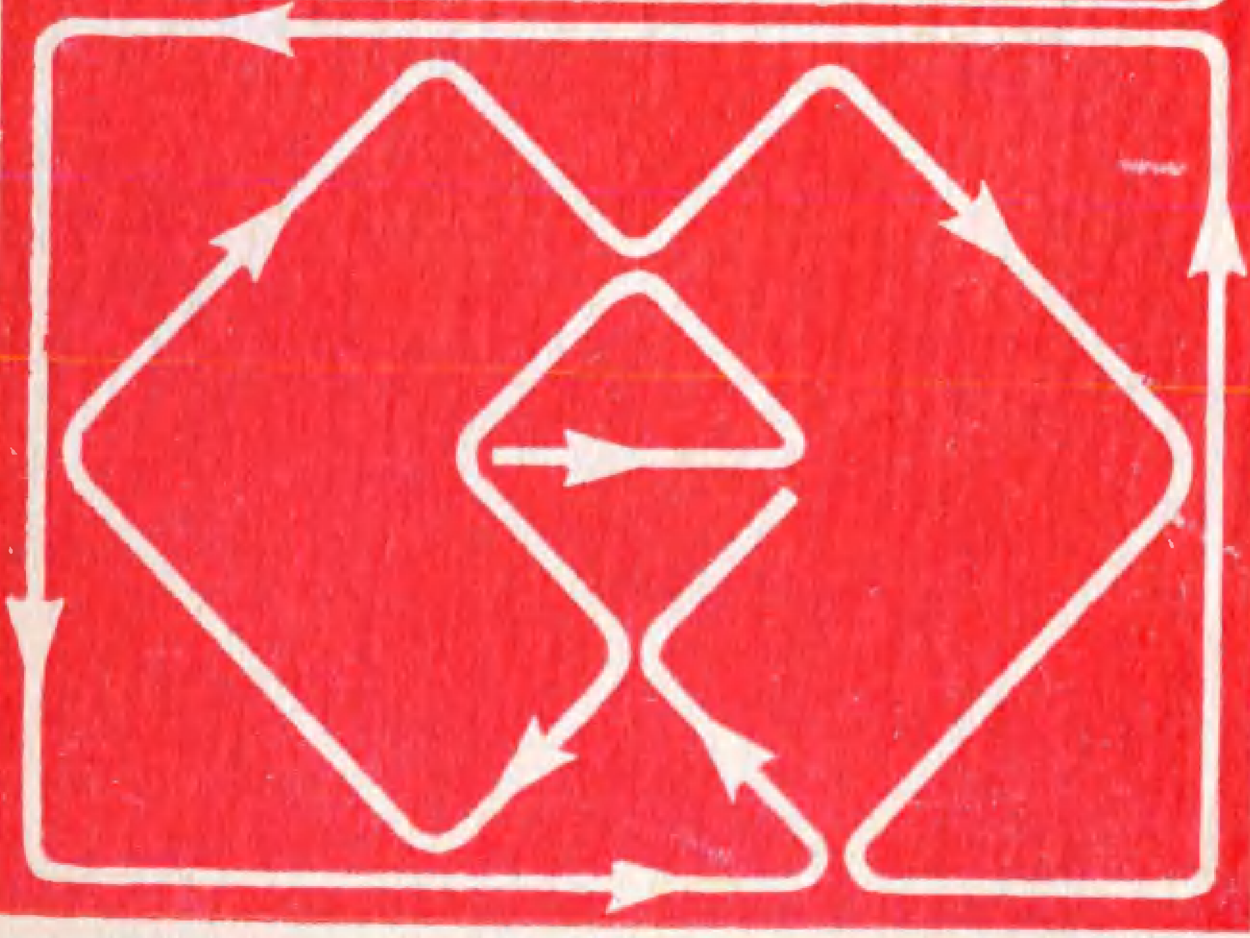
В. А. ГУСЕВ, А. И. ОРЛОВ, А. Л. РОЗЕНТАЛЬ

ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ В 6-8 КЛАССАХ



В. А. ГУСЕВ, А. И. ОРЛОВ, А. Л. РОЗЕНТАЛЬ

ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ В 6-8 КЛАССАХ

КНИГА
ДЛЯ
УЧИТЕЛЯ

Под редакцией С. И. Шварцбурда

Издание второе,
переработанное

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1984

ББК 74.262
Г96

Р е ц е н з е н т ы:
зам. директора Всесоюзной заочной математической школы АПН СССР
при МГУ *Ж. М. Раббот*,
ст. научный сотрудник МГУ, кандидат физ.-мат. наук *В. Л. Гутенмахер*

Г $\frac{4306030400-771}{103(03)-84}$ 139—84

ББК 74.262
51(07)

© Издательство «Просвещение», 1977 г.
© Издательство «Просвещение», 1984 г., с изменениями.

Предисловие

В течение последних лет наша школа переживает период совершенствования математического образования. За это время в содержание школьной математики вошли новые разделы, изменилось взаимное расположение некоторых тем, которые традиционно входили в школьный курс, а потому изменилась методика их изложения. Современный школьный курс математики потребует еще немало усилий ученых, методистов и учителей, прежде чем он сложится окончательно.

В процессе перестройки школьного математического образования многие вопросы, которые ранее входили в факультативные курсы или внеклассную работу, теперь включены в обязательный курс математики. В связи с этим некоторые темы, которые служили содержанием внеклассных занятий по математике, уже больше не используются на таких занятиях или методика их изучения сильно изменилась, например: пределы, производная, интеграл, геометрические преобразования, векторы и др.

Встает проблема обновления тематики внеклассной работы по математике. Для этого новые темы должны пройти соответствующую «методическую обработку». К таким темам относятся в книге прежде всего элементы теории вероятностей, композиции движений, машина Поста, управление запасами и др.

Другая часть содержания книги тесно связана с традиционной факультативной тематикой, но изложение, которое здесь предлагается, отличается от принятого в других пособиях (например, темы: «Круги Эйлера», «Графы», «Симметрии и повороты» и др.).

Наконец, третья часть тесно примыкает к основному курсу математики, углубляет его изучение, развивает умения и навыки учащихся и повышает их интерес к предмету. К этим темам относятся «Многоугольники», «Площади» и др.

Упрощение изложения материала — одна из первоочередных задач методики преподавания. Именно упрощение изложения дает возможность ряд вопросов излагать раньше, переносить в младшие классы. Такой «сдвиг», естественно, при достаточном его обосновании является основным резервом совершенствования математического образования. Примером служит содержание учебников I—V классов массовой школы. При общей доступности они намного больше дают, чем прежние учебники, в которых излагалась лишь одна арифметика. В нашей книге такой пример — изложение комбинаторики.

В наше время, время эффективности и качества, профессия «математик» становится массовой. Эффективное управление народным хозяйством, успешное проведение научных исследований и конструкторских разработок невозможно без широкого привлечения математики. Поэтому в настоящей книге рассматривается ряд примеров приложений математики. К ним относятся применения математики в экономических задачах, в разработке оптимальной стратегии игры и др. На этих примерах школьники обучаются построению математических моделей реальных явлений.

Методической особенностью данной книги является такое изложение материала, при котором новое содержание изучается на задачах. Большое внимание уделяется овладению учащимися математическими методами поиска решений, логическими рассуждениями, построению и изучению математических моделей. Примерами таких методов служат «правило крайнего», принцип Дирихле, круги Эйлера, графики движения и др.

Многие темы написаны в виде беседы. Это сделано с целью приблизить изложение к реальному ведению кружка. Иногда изложение представляет собой своеобразный сценарий занятия. Особенно это относится к тексту, озаглавленному «Обсуждение».

Содержание книги излагается по темам, а не по занятиям. Предполагается, что в VI—VIII классах учитель сам определит место и время изложения каждой темы. Вместе с тем материал расположен по возрастающей трудности и учитывает уровень подготовки и возрастные особенности учащихся. Завершают книгу список рекомендуемой литературы и «Дополнительные задачи», в основном повышенной трудности, для конкурсов и олимпиад. Каждая задача сопровождается комментарием.

Книга делится на две части: содержание внеклассных занятий и методические указания к ним. В методической части рассматривается собственно методика ведения занятий, приводятся решения задач или ответы. К этой же части относится важный раздел «Учебно-воспитательные цели». В нем отражена педагогическая цель и направленность рассматриваемой темы.

Темы *5, 7, 10, 13, 16, 19, 23* написаны В. А. Гусевым.

Темы *3, 6, 14, 15, 18, 20, 22, 24, 25* —А. И. Орловым.

Темы *1, 2, 4, 8, 9, 11, 12, 17, 21* и раздел «Дополнительные задачи» — А. Л. Розенталем.

Тема *26* написана авторами совместно.

Член-корреспондент АПН СССР, доктор педагогических наук, профессор

С. И. ШВАРЦБУРД

Часть I

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ВНЕКЛАССНОЙ РАБОТЫ

Тема 1. КАК ИГРАТЬ, ЧТОБЫ НЕ ПРОИГРАТЬ

1.1. «Кто раньше назовет число 100?» Играют двое. Один называет любое целое число от 1 до 9 включительно. Второй прибавляет к названному числу любое целое число от 1 до 9, какое захочет, и называет сумму. К этой сумме первый снова прибавляет любое целое число от 1 до 9 и называет новую сумму и т. д. Выигрывает тот, кто раньше назовет число 100.

Обсуждение. В этой игре начинающий, будем так и называть его: «Начинающий», всегда проигрывает, если его партнер, которого условимся называть «Второй», играет правильно. Нетрудно обнаружить способ игры Второго, иначе говоря, стратегию Второго, которая обеспечивает ему победу: «Добавляй до числа, кратного 10!» Если, например, начинающий назвал 4, Второй прибавляет 6 и называет сумму 10. Если начинающий прибавит теперь 9 и назовет сумму 19, то Второй прибавит 1 и назовет сумму 20. Ясно, что, как бы ни играл Начинающий, Второй при такой стратегии раньше доберется до суммы 100 и выиграет. Разумеется, если он хоть раз ошибется, то этой же стратегией сможет воспользоваться Начинающий и одержит победу.

Способ игры, обеспечивающий выигрыш одному из игроков в любом случае, как бы ни играл его противник, называется «выигрышной стратегией». В рассмотренной игре выигрышная стратегия имеется у второго из партнеров, а начинающий всегда проигрывает. Выигрышная стратегия — это и есть тот секрет успеха, тот «ключ к победе», обладая которым вы можете выиграть у любого, сколь угодно сильного противника. Цель занятия — научиться находить этот ключ в различных играх.

1.2. «Поставь на ноль». Возьмем полоску клетчатой бумаги и занумеруем клетки числами 0, 1, 2, 3, ..., как показано на рисунке 1. На одной из клеток стоит фишка. Двое играющих по очереди передвигают фишку влево на одну, две, три или четыре клетки.

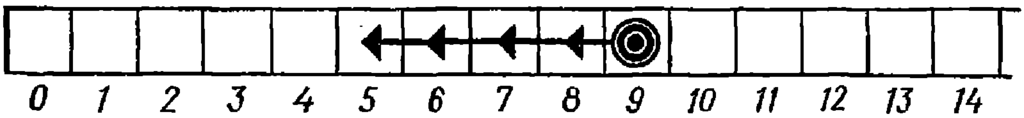


Рис. 1

−	+	+	+	+	−	+	+	+	+	−	+	+	+	+	−	+
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Рис. 2

Проигрывает тот, кому некуда ходить (значит, выигрывает тот, кто поставил фишку на ноль). При каком начальном положении фишки выигрывает начинающий, а при каком его партнер?

Обсуждение. Прежде всего договоримся (и сохраним этот уговор в дальнейшем):

1) начальные положения фишки, при которых начинающий выигрывает, называть выигрышными и соответствующие им клетки отмечать знаком плюс;

2) остальные клетки называть проигрышными для начинающего и соответственно отмечать минусами.

Расставлять плюсы и минусы начнем с конца — с клетки 0. В этой клетке ставим минус — если фишка стоит на нуле, начинающему некуда ходить. Клетки 1, 2, 3, 4 отмечаем плюсами — если фишка стоит на этих клетках, начинающий одним ходом выигрывает, ставя фишку на 0.

Рассмотрим теперь клетку 5. Если фишка стоит в этой клетке, то, как бы ни пошел начинающий, фишка после его хода окажется в клетках 1, 2, 3 или 4. Его партнер пойдет в 0 и выиграет. Значит, клетка 5 проигрышная (для того, кто должен из нее ходить), и мы ее отметим знаком минус. Клетки 6, 7, 8 и 9 выигрышные: начинающий может передвинуть фишку в клетку 5 и тем поставить своего противника в проигрышное положение. Точно так же клетка 10 проигрышная: из нее начинающий может попасть лишь в положения 6, 7, 8 и 9, выигрышные для противника; клетки 11, 12, 13 и 14 выигрышные, клетка 15 проигрышная и т. д. (рис. 2).

Ясно, что начинающий в любом случае выиграет, если каждый раз будет ставить фишку на клетку с номером, делящимся на 5. Он сможет это сделать, если вначале фишка стоит на клетке с номером, не кратным 5. В противном случае той же стратегией может воспользоваться противник.

1.3. Контрольная задача. Условия игры те же, что и в игре «Поставь на ноль», но передвигать фишку можно лишь:

а) на 2 или 5 клеток;

б) на 1, 2 или 4 клетки;

в) на 2, 4 или 7 клеток.

Расставьте плюсы и минусы в каждой из этих трех игр.

1.4. «Последний камень». Из кучи камней двое играющих по очереди берут 1, 2, 3 или 4 камня (каждый раз сколько кому нравится, но не меньше одного и не больше четырех). Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. При каком начальном количестве камней выигрывает начинающий, а при каком его партнер?

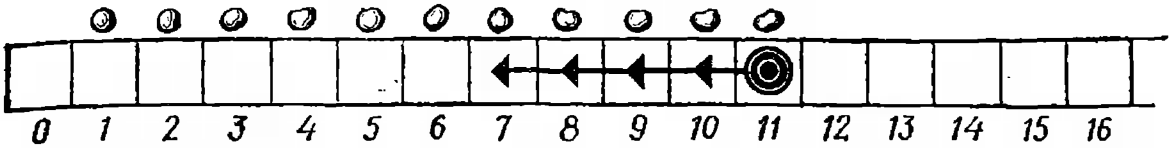


Рис. 3

Разумеется, вместо камней можно использовать карандаши, резинки, пуговицы и т. д.

Обсуждение. Возьмем полоску клетчатой бумаги, о которой рассказывалось в предыдущей игре, и разложим вдоль нее камни, как на рисунке 3. Фишку положим на клетку, номер которой равен числу камней в куче. При каждом ходе играющих фишку будем передвигать на столько клеток влево, сколько взято камней, т. е. на 1, 2, 3 или 4 клетки.

Будем отмечать плюсами клетки, соответствующие числу камешков, при которых выиграет начинающий. Это будут выигрышные клетки. Минусами обозначим клетки, проигрышные для начинающего. Повторяя рассуждения из обсуждения задачи 1, 2, убедимся, что кучи, в которых число камней не делится на 5, выигрышные; остальные проигрышные.

Чтобы выиграть, начинающий должен оставлять каждый раз в куче число камней, делящееся на 5.

Из предыдущего ясно, что различие между играми «Поставь на ноль» и «Последний камень» чисто внешнее. С точки зрения теории игр различие между этими играми не более, чем между игрой в шахматы с деревянными фигурами или с фигурами, изготовленными из пластмассы. Тот, кто научился побеждать в игре «Поставь на ноль», сможет победить и в игре «Последний камень», пользуясь, по сути дела, той же самой стратегией. Такие игры принято называть изоморфными.

Слово «изоморфизм» происходит от греческих слов «изос» (постоянный, неизменный) и «морфе», что значит «форма». В математике слово «изоморфизм» применяют по отношению к объектам, различие между которыми чисто внешнее, как между нашими двумя играми.

1.5. «Одинокий ферзь». Правила игры таковы. На поле $f8$ стоит ферзь. Играют двое и ходят по очереди. Каждый из игроков за один ход может передвинуть ферзя либо на несколько клеток вниз по вертикали (на сколько угодно), либо на несколько клеток влево по горизонтали, либо на несколько клеток влево — вниз по диагонали. На рисунке 4 стрелками обозначены возможные ходы с клетки $f8$, а клетки, на которые можно попасть, помечены кружками. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Значит, выигрывает тот, кому удастся загнать ферзя в левый нижний угол — на поле $a1$.

В этой игре начинающий, если он играет правильно, всегда выигрывает, как бы хорошо ни играл его партнер. Как должен играть начинающий?

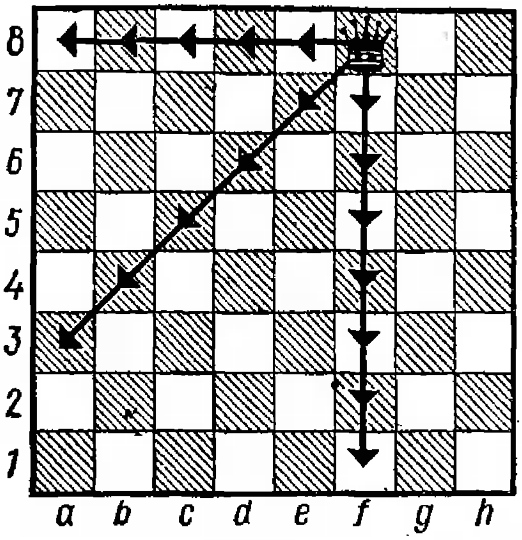


Рис. 4

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	+	+	+	+	−	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	−	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	−
4	+	+	+	+	+	−	+	+
3	+	−	+	+	+	+	+	+
2	+	+	−	+	+	+	+	+
1	−	+	+	+	+	+	+	+

Рис. 5

А кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер, если вначале ферзь стоял на поле $e8$?

Обсуждение. В этой игре поле $a1$ является, очевидно, проигрышным. Поставим на нем минус. Значит, все поля, из которых одним ходом ферзя можно попасть на $a1$, являются выигрышными — их отметим плюсами. С полей $b3$ и $c2$ все ходы, дозволенные условиями игры, ведут на плюс, значит, эти поля проигрышные. А поля, из которых можно попасть одним ходом ферзя на $b3$ и $c2$, выигрышные. Продолжая рассуждать таким образом, получим расстановку плюсов и минусов, показанную на рисунке 5.

Делаем выводы:

1) выигрышные поля (плюсы) — те, из которых *хотя бы один* ход ведет на проигрышное поле;

2) проигрышные поля — те, из которых *любой* ход ведет на одно из выигрышных полей;

3) если фишка (или ферзь, как в последней игре) стоит на выигрышном поле, то игрок, совершающий очередной ход, непременно выиграет, если он будет пользоваться стратегией, которую можно выразить тремя словами: *ставь на минус*.

В самом деле, фишка стоит на плюсе, и, значит, согласно выводу 1) хотя бы один из ходов ведет на минус. Второй игрок вынужден будет поставить фишку на плюс, ведь согласно выводу 2) все ходы с минуса ведут на плюсы — выигрышные поля. Первый снова поставит фишку на минус и так далее до тех пор, пока Первый не загонит фишку в тупик, и Второму некуда будет ходить. Заметьте, что в этом доказательстве использован тот факт, что каждый ход приближает фишку к «тупиковому» положению. Все рассмотренные игры этому условию удовлетворяли.

1.6. «Две кучи камней». В двух кучках лежат камни (карандаши, пуговицы, спички — все равно): в первой — 7, во второй 5.

Играют двое, ходят по очереди. Каждый из игроков при своем ходе может взять любое число камней из первой кучки, или из второй, или из обеих сразу, но тогда обязательно поровну. Выигрывает тот, кто взял последний камень.

Кто победит в этой игре: начинающий или его противник? Какой будет ответ, если вначале в первой кучке было 7 камней, а во второй — 4?

О б с у ж д е н и е. Разложим камни первой кучки по одному у каждой вертикали шахматной доски, начиная с *b*, а второй кучки — по одному у каждой горизонтали, начиная со второй. Договоримся из первой кучки убирать самые правые камни, а из второй — самые верхние. Пусть ферзь стоит на одной горизонтали с самым верхним камнем и на одной вертикали с самым правым.

Из рисунка 6 понятно, что если убирается камень из первой кучки, то ферзь сдвигается на одно поле влево, если из второй — на одно поле вниз. Отсюда следует, что эта игра изоморфна предыдущей. Остается расставить на рисунке 6 плюсы и минусы, начиная с левого нижнего поля *a*1 (это соответствует положению, когда в обеих кучках по 0 камней). При этом получится, конечно, та же расстановка, что и на предыдущем рисунке.

1.7. «Одинокий король». Король может пойти на одну клетку вниз, или влево, или влево — вниз по диагонали. Остальные условия, как в игре «Одинокий ферзь». При каких начальных положениях короля выигрывает начинающий, а при каких — его партнер? В чем состоит выигрышная стратегия? Какая игра с камнями соответствует этой?

1.8. «Ход конем». Ходить конем можно на две клетки вниз и потом на одну клетку вправо или влево или на две клетки влево и потом на одну клетку вверх или вниз (рис. 7). Остальные условия аналогичны условиям игры «Одинокий ферзь». И вопросы те же.

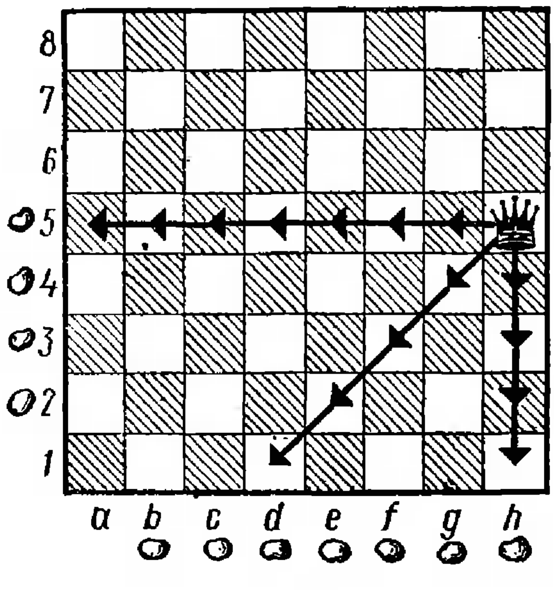


Рис. 6

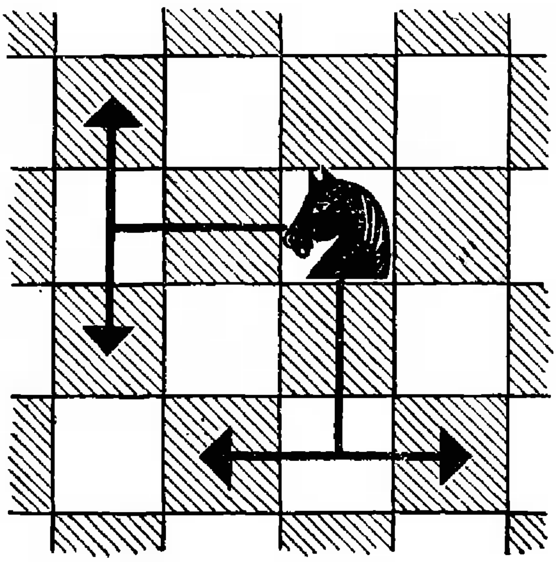


Рис. 7

Тема 2. КРУГИ ЭЙЛЕРА

2.1. Пересчитай математиков. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?

Обсуждение. Изобразим эти кружки на рисунке 8. Можем, например, начертить в школьном дворе большой круг, а в нем два поменьше, как на рисунке 8. В левый круг, обозначенный буквой *М*, поместим всех математиков, а в правый, обозначенный буквой *Б*, всех биологов. Очевидно, в общей части кругов, обозначенной буквами *МБ*, окажутся те самые биологи-математики, которые нас интересуют. Остальных ребят класса, а их 10, попросим не выходить из внешнего круга, самого большого. Теперь посчитаем: всего внутри большого круга 35 ребят, внутри двух меньших $35-10=25$ ребят. Внутри «математического» круга *М* находятся 20 ребят, значит, в той части «биологического» круга, которая расположена вне круга *М*, находятся $25-20=5$ биологов, не посещающих математический кружок. Остальные биологи, их $11-5=6$ человек, находятся в общей части кругов *МБ*. Таким образом, 6 биологов увлекаются математикой.

Вопросы для проверки

1. Сколько ребят занимаются только в математическом кружке и как это показано на рисунке?

2. Сколько ребят посещают только один какой-нибудь кружок?

Рисунки, подобные приведенному в решении, обычно называют «кругами Эйлера».

Один из величайших математиков петербургский академик Леонард Эйлер за свою долгую жизнь (он родился в 1707 г., а умер в 1783 г.) написал более 850 научных работ. В одной из них и появились эти круги. Эйлер писал тогда, что «они очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления». Наряду с кругами в подобных задачах применяют прямоугольники и другие фигуры.

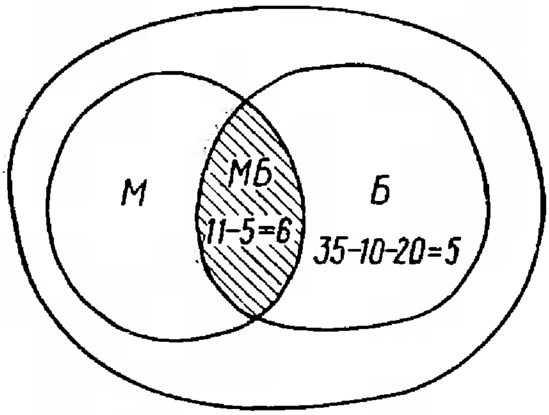


Рис. 8

2.2. В пионерском лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

Сколько ребят заняты только спортом?

Обсуждение. Изобразим на рисунке круги Эйлера подобно тому, как это было сделано в предыдущей задаче. В большом круге, изображающем всех пионеров, поместим три меньших круга *Д*, *Х* и *С*, изображающих драмкружок, хор и спортсменов. Представим себе, что все 70 ребят расположились внутри большого круга (рис. 9), а драмкружок, хор и спортсмены расположились в кругах *Д*, *Х* и *С* соответственно. В круге *Д* по условию 27 ребят из драмкружка, в круге *Х* — 32 певца, а в круге *С* — 22 спортсмена. Те 10 ребят из драмкружка, которые поют в хоре, окажутся в общей части *ДХ* кругов *Д* и *Х*. Трое из них еще и спортсмены, они окажутся в общей части всех трех кругов *ДХС*. Остальные семеро из десяти спортом не увлекаются, они расположатся внутри фигуры *ДХ*, но вне круга *С*. Если договориться обозначать внешность круга *С* через $\overline{С}$, то эти семеро окажутся внутри фигуры $ДХ\overline{С}$. Точно так же найдем, что имеются 8 — 3 = 5 спортсменов драмкружка, не поющих в хоре, — фигура $Д\overline{Х}С$ и 6 — 3 = 3 поющих спортсмена, не посещающих драмкружок, их место — фигура $\overline{Д}ХС$, представляющая собой общую часть *ХС* кругов *Х* и *С*, за вычетом фигуры *ДХС*. Здесь как и ранее, $\overline{Д}$ обозначает внешность круга *Д*.

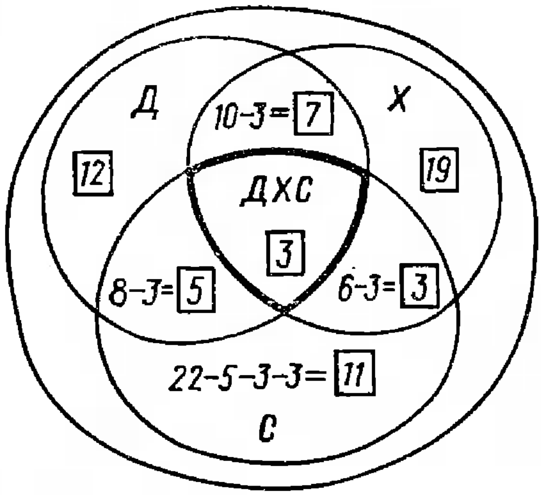


Рис. 9

Из рис. 9 видно, что 5 + 3 + 3 = 11 спортсменов посещают хор или драмкружок. Остальные 22 — 11 = 11 увлекаются только спортом, они расположатся внутри фигуры $\overline{Д}\overline{Х}С$, т. е. в круге *С*, но вне кругов *Д* и *Х*. Аналогично этому найдем, что внутри фигуры $Д\overline{Х}\overline{С}$ находятся 12 ребят из драмкружка, а внутри фигуры $\overline{Д}Х\overline{С}$ — 19 ребят из хора. Вычитая из общего числа ребят 70 числа, обведенные на рисунке квадратными рамочками, найдем число ребят вне кругов *Д*, *Х* и *С*. Их оказалось 10, т. е. 10 ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке.

2.3. Задача про ковры. Пол комнаты площадью 12 $м^2$ покрыт тремя коврами: площадь одного ковра 5 $м^2$, другого — 4 $м^2$ и третьего — 3 $м^2$. Каждые два ковра перекрываются на площади 1,5 $м^2$, причем 0,5 $м^2$ из этих полутора квадратных метров приходится на участок пола, где перекрываются все три ковра.

а) Какова площадь пола, не покрытая коврами?

б) Какова площадь участка, покрытого одним только первым ковром?

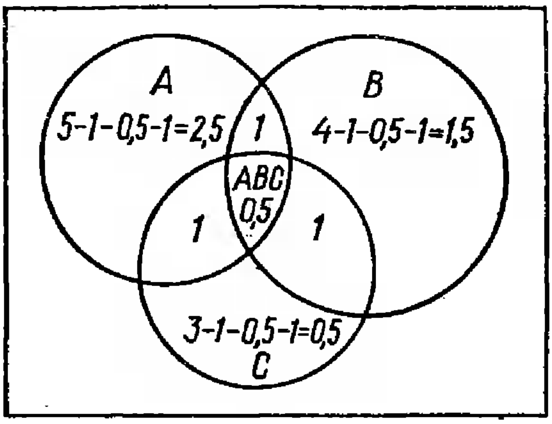


Рис. 10

Обсуждение. Изобразим на рисунке 10 пол комнаты в виде прямоугольника. Так как форма ковров в данной задаче роли не играет, будем изображать ковры в виде кругов Эйлера: круг A изображает больший ковер, круг B — средний и круг C — меньший. Пользуясь обозначениями предыдущей задачи, общую часть ковров A и B будем обозначать AB, общую часть трех ковров — ABC, часть пола, покрытую только двумя коврами A и B, — $AB\bar{C}$, часть пола, не покрытую коврами, — $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и т. д. Очевидно, часть $A\bar{B}C$ имеет площадь $1{,}5 - 0{,}5 = 1$ м^2. Такова же площадь участка $AB\bar{C}$ и участка $\bar{A}BC$. Дальнейшие расчеты, как в предыдущей задаче. Ответ на первый вопрос задачи — 4 м^2, такова площадь участка $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Ответ на второй вопрос задачи — площадь участка $A\bar{B}\bar{C}$ равна $5 - 0{,}5 - 1 - 1 = 2{,}5$ м^2.

2.4. В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 — в хоккей, 18 — в волейбол. Увлекаются двумя видами спорта — баскетболом и хоккеем — четверо, баскетболом и волейболом — трое, волейболом и хоккеем — пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни волейболом.

а) Сколько ребят увлекается одновременно тремя видами спорта?

б) Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?

Обсуждение. Воспользуемся кругами Эйлера. Пусть, как и в задаче 2.2, большой круг на рисунке 11 изображает всех учащихся класса, а три меньших круга $Б$, X и $В$ изображают соответственно баскетболистов, хоккеистов и волейболистов. Тогда фигура $БXВ$, общая часть кругов $Б$, X и $В$, изображает ребят, увлекающихся всеми тремя видами спорта. Обозначим их число через z. Из рассмотрения кругов Эйлера видно, что одним лишь видом спорта — баскетболом занимаются $16 - (4 + z + 3) = 9 - z$ ребят, одним лишь хоккеем $8 - z$, одним лишь волейболом $10 - z$. Составляем уравнение, пользуясь тем, что класс разбился на отдельные группы ребят; количества ребят

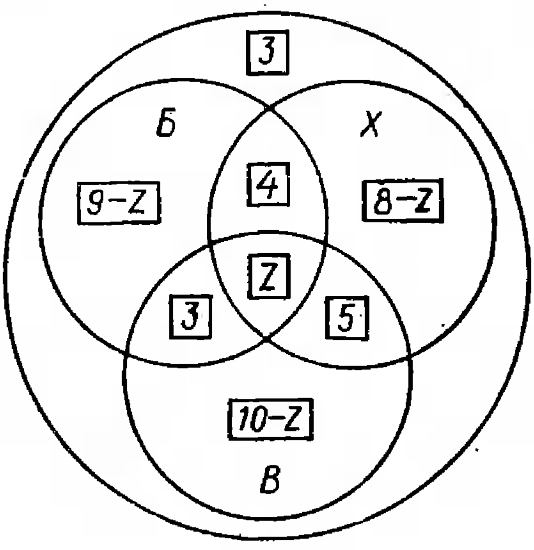


Рис. 11

в каждой группе обведены на рисунке рамочками:

$$38 = 3 + (9 - z) + (8 - z) + (10 - z) + 4 + 3 + 5 + z,$$

откуда $z = 2$. Таким образом, двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта. Складывая количества ребят, увлекающихся лишь одним видом спорта, т. е. числа $9 - z$, $8 - z$ и $10 - z$, где z, как мы теперь знаем, равно 2, найдем ответ на второй вопрос задачи: 21 человек.

2.5. В классе учатся 40 человек. Из них по русскому языку имеют «тройки» 19 человек, по математике — 17 человек и по физике — 22 человека. Только по одному предмету имеют «тройки»: по русскому языку — 4 человека, по математике — 4 человека и по физике — 11 человек. Семь человек имеют «тройки» и по математике, и по физике, из них пятеро имеют «тройки» и по русскому языку.

а) Сколько человек учатся без «троек»?

б) Сколько человек имеют «тройки» по двум из трех предметов?

2.6. Удивительный класс. В этом классе учатся 35 человек, и все они либо играют на скрипке, либо разводят хомяков, либо плавают в бассейне «Москва». Многие успевают заниматься и тем, и другим. Больше всего пловцов-хомяководов — 25, пятеро из них еще и на скрипке играют. Чемпион класса по плаванию на скрипке не играет и хомяков не разводит, а два его друга-хомяковода плавать не умеют, зато скрипачи превосходные. Среди скрипачей есть семеро, которые не плавают и хомяков не разводят.

а) Сколько в классе скрипачей?

б) Сколько человек посещают бассейн «Москва»?

в) Сколько хомяководов не увлекаются ни плаванием, ни музыкой?

2.7. В одной экскурсии участвовали семиклассники и восьмиклассники. Все они были либо с комсомольскими значками, либо в пионерских галстуках. Мальчиков было 16, комсомольцев и комсомолок всего 24. Пионерок столько, сколько мальчиков, вступивших в комсомол. Сколько всего ребят участвовало в экскурсии?

Тема 3. ЛИСТ МЁБИУСА

Смотрите, я беру бумажную ленту $ABCD$, разделенную по ширине пополам пунктирной линией (рис. 12), прикладываю ее концы AB и CD друг к другу и склеиваю. Но не как попало, а так, чтобы точка A совпала с точкой D, а точка B — с точкой C. Для этого перед склейкой я перекрутил ленту один раз. Получилось знаменитое в математике бумажное кольцо. У него есть даже особое название — лист Мёбиуса. А теперь я режу ножницами склеенную ленту посередине,

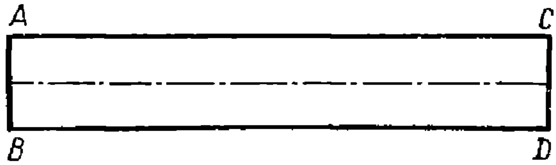


Рис. 12

вдоль пунктирной линии. Как вы думаете, что у меня получится? Конечно, если бы я не перекрутил ленту перед склейкой, все было бы просто: из одного широкого кольца получилось бы два узких. А что сейчас?

Возьмите бумажные ленты, клей и ножницы. Приготовьте листы Мёбиуса и проведите эксперимент, о котором я вам рассказал. Получилось не два кольца, а одно, вдвое уже, но зато вдвое длиннее. К тому же перекручено оно не один раз, а два. А ну-ка, разрежем это кольцо еще раз посередине. Получится два сцепленных друг с другом кольца, каждое из которых дважды перекручено.

Вот какие неожиданные вещи происходят с простой бумажной полоской, если склеить из нее лист Мёбиуса. У этого листа масса удивительных свойств. Сейчас вы в этом убедитесь.

Сколько сторон у листа Мёбиуса? У ленты, из которой сделан лист Мёбиуса, имеется две стороны. А у него самого, оказывается, есть только о д н а с т о р о н а!

Проведите опыт. Возьмите лист Мёбиуса, обмакните кисть в зеленую краску и начинайте красить, кладя каждый новый мазок так, чтобы он прилегал к прежним. Только не переходите через край ленты! Если бы лента не была перекручена, то через некоторое время одна сторона кольца оказалась бы полностью зеленой, а другая осталась белой. А как с листом Мёбиуса? Вы закрасите его весь! «Если кто-нибудь вздумает раскрасить «только одну» сторону поверхности мёбиусовой ленты, пусть лучше сразу погрузит ее всю в ведро с краской», — пишут Рихард Курант и Герберт Роббинс в превосходной книге «Что такое математика».

Если на внутреннюю сторону обычного кольца посадить паука, а на наружную — муху и разрешить им ползать как угодно, запретив лишь перелезать через края кольца, то паук не сможет добраться до мухи, не так ли? А если их обоих посадить на лист Мёбиуса, то бедная муха будет съедена (если, конечно, паук ползает быстрее мухи!).

Солдатик-перевертыш. Я вырезал бумажного солдатика и отправил его вдоль пунктира, идущего посередине листа Мёбиуса. И вот он вернулся к месту старта. Но в каком виде! В перевернутом! А чтобы он вернулся к старту в нормальном положении, ему нужно совершить еще одно «круголистное» путешествие. Проверьте!

Мёбиус и топология. Таинственный и знаменитый лист Мёбиуса (иногда говорят: лента Мёбиуса) придумал в 1858 г. немецкий геометр Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868), ученик «короля математиков» Гаусса. Мёбиус был первоначально астрономом, как Гаусс и многие другие из тех, кому математика обязана своим развитием. В те времена занятия математикой не встречали поддержки, а астрономия давала достаточно денег, чтобы не думать о них, и оставляла время для собственных размышлений. И Мёбиус стал одним из крупнейших геометров XIX в. В возрасте 68 лет ему удалось сделать открытие поразительной красоты. Это открытие односторонних поверхностей, одна из которых — лист Мёбиуса.

Лист Мёбиуса — один из объектов области математики под названием топология (т. е. «геометрия положения»). Удивительные свойства листа Мёбиуса — он имеет один край, одну сторону — не связаны с его положением в пространстве, с понятиями расстояния, угла и тем не менее имеют вполне геометрический характер. Изучением таких свойств занимается топология. Оказывается, свойства такого типа, несмотря на кажущуюся их непривычность, связаны как раз с наиболее абстрактными математическими дисциплинами, именно с алгеброй и теорией функций.

В топологии изучаются свойства фигур и тел, которые не меняются при их непрерывных деформациях (как если бы они были сделаны из резины).

С точки зрения топологии баранка и кружка — это одно и то же. Сжимая и растягивая кусок резины, можно перейти от одного из этих тел ко второму. А вот баранка и шар — разные объекты: чтобы сделать отверстие, надо разорвать резину.

Понятия и теоремы топологии полезны математикам почти всех специальностей. Она используется и при применении математики в технике, экономике, психологии, других прикладных областях.

Эксперименты для всех. Возьмем ленту $ABCD$ (рис. 12) и разделим ее по ширине на 3 одинаковые части двумя пунктирными линиями (параллельными сторонами AC и BD). Склеим, перекрутив один раз, лист Мёбиуса. Будем резать по пунктирной линии. Если бы лента не была перекручена, то сначала мы бы отрезали одно кольцо, а потом разделили два остальных. Всего три кольца, каждое той же длины, что и первоначальное, но втрое меньшей ширины. Но у нас лист Мёбиуса. И, оказывается, мы, «не отрывая» ножниц от бумаги, разрежем по всем пунктирным линиям сразу и получим два сцепленных кольца. Одно из них вдвое длиннее исходного и перекручено два раза. Второе — лист Мёбиуса, ширина которого втрое меньше, чем у исходного.

Вот еще несколько экспериментов, которые предлагаю провести самостоятельно.

3.1. Приготовьте два листа Мёбиуса, перед склейкой разделив ленту на четыре и пять равных полос. Разрежьте по пунктирным линиям. Что получится? Можно ли высказать какое-нибудь утверждение о поведении листа Мёбиуса при отрезании от него полоски?

Что будет, если перед склейкой перекрутить ленту дважды, а потом разрезать посередине?

А если перед склейкой перекрутить ленту трижды?

Можно ставить еще немало экспериментов по разрезанию лент. Придумайте и поставьте.

Тема 4. ЗАДАЧА ПУАССОНА

4.1. Задача Пуассона. Некто имеет двенадцать пинт вина (пинта — старинная мера жидкости, равная примерно 0,568 л) и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в шесть пинт; у него два сосуда: один в восемь, а другой в пять пинт. Спрашивается, каким образом налить шесть пинт в сосуд восьми пинт?

Обсуждение. Эту задачу недаром связывают с именем знаменитого французского математика, механика и физика Симеона Дени Пуассона (1781—1840). Когда Пуассон был еще очень молод и колебался в выборе жизненного пути, приятель показал ему тексты нескольких задач, с которыми никак не мог справиться сам. Пуассон менее чем за час решил их все до одной. Но особенно ему понравилась задача про два сосуда.

— Эта задача определила мою судьбу, — говорил он впоследствии. — Я решил, что непременно буду математиком.

Прежде чем решать задачу Пуассона, стоит решить несколько более простых задач.

4.2. У нас имеется два сосуда — трехлитровый и пятилитровый. Нужно, пользуясь этими сосудами, получить один литр воды. В нашем распоряжении водопроводный кран и раковина, куда можно сливать воду.

Обсуждение. Эту задачу можно решить устно. Наполним трехлитровый сосуд, перельем из него воду в пятилитровый. Вновь наполним трехлитровый сосуд и будем переливать воду оттуда в пятилитровый сосуд до тех пор, пока он не наполнится до краев. При этом в трехлитровом сосуде останется 1 л воды.

4.3. В условиях предыдущей задачи получить 2 л воды; 3; 4; 5; 6; 7; 8 л.

Обсуждение. Вот одно из возможных решений. Легче всего получить 3, 5 или 8 л. Для этого достаточно наполнить один из сосудов или оба. Чтобы получить 2 л, надо наполнить пятилитровый сосуд и затем отлить 3 л в трехлитровый. Если теперь трехлитровый сосуд опорожнить и перелить туда 2 л из большего сосуда, а затем наполнить большой сосуд до краев, то будем иметь 7 л. При этом в малом сосуде есть еще место для одного литра. Перельем туда воду из большого сосуда. Тогда в большом сосуде останется 4 л воды. Отмерить 6 л совсем просто: наполним малый сосуд, перельем воду в большой, затем снова наполним малый.

Конечно, это не очень удачное решение. В нем трудно усмотреть какой-нибудь общий подход к другим подобным задачам. Постараемся действовать более систематически. Посмотрим сначала, какие операции позволяют нам отмерять воду точно, а не на глазок. Эти операции будем называть «командами» и введем для них сокращенные обозначения:

НБ — наполнить больший сосуд водой из-под крана;
НМ — наполнить меньший » »;
ОБ — опорожнить больший сосуд, вылив воду в раковину;
ОМ — опорожнить меньший » »;
ПБМ — переливать из большего в меньший, пока больший сосуд не опустеет или меньший сосуд не наполнится;
ПМБ — переливать из меньшего в больший сосуд.

Теперь поставим такой вопрос: какие количества воды удастся отмерить, если выполнять лишь операции *НМ*, *ОБ* и *ПМБ*, причем после *ПМБ* выполнять *ОБ* всякий раз, как больший сосуд наполнится, и *НМ* всякий раз, как меньший опорожнится (если и то, и другое, то сначала следует *ОБ*)? Последовательность операций можно изобразить в виде схемы (рис. 13). Подобные же схемы, называемые «блок-схемами», широко используются в программировании. В схеме имеются еще две вспомогательные команды:

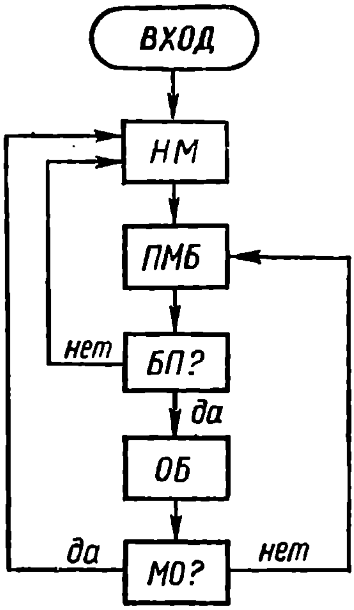


Рис. 13

БП? — посмотреть, наполнен ли больший сосуд;

МО? — посмотреть, опорожнен ли меньший сосуд.

В зависимости от результата этого осмотра мы переходим к выполнению той или иной команды. Такие команды в программировании принято называть командами «условного перехода».

Введем еще одно, последнее сокращение. Условимся количества воды в сосудах записывать в виде $x : y$, где x — количество воды в меньшем сосуде в литрах, y — в большем. Так, например, запись 2 : 5 означает, что в меньшем сосуде 2 л воды, а в большем — 5 л. Запишем, как меняется количество воды в сосудах, если действовать по приведенной схеме:

$$0:0 — 3:0 — 0:3 — 3:3 — 1:5 — 1:0 — 0:1 — 3:1 —$$
$$— 0:4 — 3:4 — 2:5 — 2:0 — 0:2 — 3:2 — 0:5 — 0:0.$$

И далее эта последовательность полностью повторится. Количества воды в обоих сосудах вместе образуют при этом такую последовательность: 0, 3, 6 ,1, 4, 7, 2, 5, 0, 3, 6 и т. д. Таким образом, действуя по приведенной схеме, можно отмерить любое количество литров от 1 до 7. Чтобы отмерить еще и 8 л, надо наполнить оба сосуда.

4.4. Можно ли, пользуясь девятилитровым и двенадцатилитровым сосудами, отмерить 4 л воды?

Обсуждение. Заметим, что емкости сосудов —9 л и 12 л— имеют общий делитель, равный 3. Остается доказать, что любая емкость, которую можно отмерить при помощи этих сосудов, делится на 3. Любой способ измерения емкостей при помощи данных сосудов представляет собой некоторую последовательность простейших операций, описанных в предыдущем обсуждении. Остается проверить, что после каждой такой операции емкости жидкости, находящиеся в каждом сосуде, выраженные в литрах, делятся на 3, если только соответствующие емкости до начала операции делились на 3. Это сделать совсем просто. Так как в самом начале оба сосуда были пусты и содержащиеся в них емкости (равные нулю) делились на 3, то и далее они будут кратны 3 л.

Дословно повторяя эти рассуждения, можно убедиться, что если емкости сосудов имеют общий делитель, то и любая емкость, которую можно точно измерить этими сосудами, имеет тот же делитель.

4.5. Контрольная задача. Решите задачу 4.3, если из крана разрешается наполнять лишь больший сосуд, а в раковину сливать воду только из меньшего. Составьте соответствующую схему.

4.6. Как, пользуясь двумя сосудами — семи- и двенадцатилитровым, получить 1 л воды?

4.7. Решите задачу Пуассона (задачу **4.1**), совершив возможно меньшее число переливаний.

Тема 5. РАССТОЯНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

В нашей повседневной практике мы постоянно пользуемся понятием «расстояние». Когда мы решали различные арифметические или физические задачи, где требуется найти какое-нибудь расстояние, или путь, или длину (это все синонимы в случае прямолинейного движения), мы не задумывались о свойствах расстояния и решали конкретную задачу. Например:

5.1. Расстояние от деревни A до деревни B по шоссе равно 3 км. В деревне A 100 школьников, в деревне B 50 школьников. На каком расстоянии от деревни A надо построить школу, чтобы общее расстояние, которое придется пройти всем 150 школьникам, было наименьшим?

Ответ. Школу надо построить в деревне A.

5.2. Иванов мчался на своей машине по шоссе с постоянной скоростью. Рядом с ним в кабине сидела его дочь. «Ты заметила, — спросил он, — что деревья вдоль шоссе посажены на одинаковом расстоянии друг от друга? Хотелось бы знать, на каком именно?»

Дочь посмотрела на часы и сосчитала, сколько деревьев промелькнуло за окном в течение одной минуты. «Какое странное совпадение! — воскликнул Иванов. — Если это число умножить на 10, то получится в точности численное значение скорости нашей машины в километрах в час».

Предположим, что скорость машины постоянна, деревья посажены через одинаковые промежутки, а минута, отмеренная дочкой, начинается и кончается в моменты, когда машина находится как раз посреди расстояния, отдаляющего одно дерево от другого. Спрашивается, чему равно это расстояние?

5.3. Марширующие курсанты и беспокойный терьер. Курсанты военного училища построены в каре (квадрат со стороной 15 м) и маршируют с постоянной скоростью (рис. 14). Небольшой терьер, любимец роты, выбегает из середины последней шеренги (из точки A на рисунке 14) и устремляется по прямой к середине первой шеренги (к точке B). Достигнув цели, он поворачивается и снова бежит по прямой к середине последней шеренги. К моменту его возвращения в точку A курсанты успевают пройти ровно 15 м. Какое расстояние пробежал терьер, если предположить, что он двигался с постоянной скоростью, и пренебречь потерей времени при повороте?

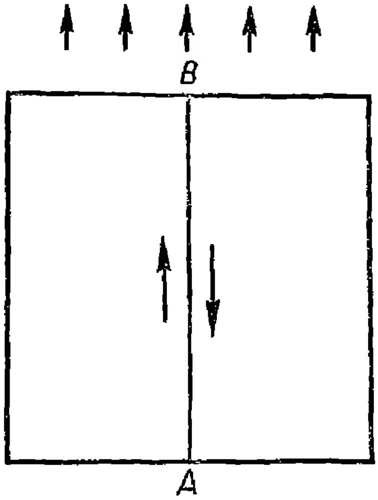


Рис. 14

5.4. Две точки P и Q движутся по двум пересекающимся прямым с одинаковой постоянной скоростью v. Докажите, что в плоскости существует такая неподвижная точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

5.5. Столкнутся ли платформы? Из города A в город B ведут две дороги, каждая из которых не имеет самопересечений. Докажите, что если две машины M_1 и M_2 могут выехать одновременно из A по этим дорогам и проехать в B так, что расстояние между машинами ни в какой момент движения не будет превосходить 20 м (рис. 15), то две круглые платформы радиусом 11 м не смогут выехать одновременно из A в B и из B в A и проехать по этим дорогам не столкнувшись (рис. 16).

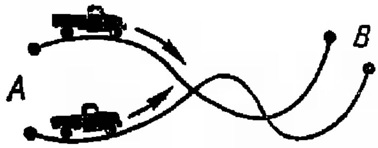


Рис. 15

Рис. 16

Обсуждение. Рассмотрим прямоугольную систему координат и будем на осях Ox и Oy откладывать соответственно пути, пройденные первой и второй машинами в данный момент времени. Так, OX — путь, пройденный первой машиной от пункта A, а OB_1—длина первой дороги. Аналогичный смысл имеют величины OY и OB_2. Пусть в некоторый момент времени положение машины на первой дороге l_1 изображается точкой X оси Ox, а положение машины на второй дороге l_2 — точкой Y оси Oy (OX — путь, пройденный точкой, считая от A, OB_1 — длина первой дороги; аналогичный смысл имеют OY и OB_2). Тогда положение этих двух машин (одной на l_1, другой на l_2) изобразится точкой Z прямоугольника OB_1CB_2 (рис. 17). Все точки Z, изображающие положения машин M_1 и M_2 в каждый момент t движения, образуют некоторую непрерывную кривую, которая проходит через точки O и C. Вопреки условию задачи предположим,

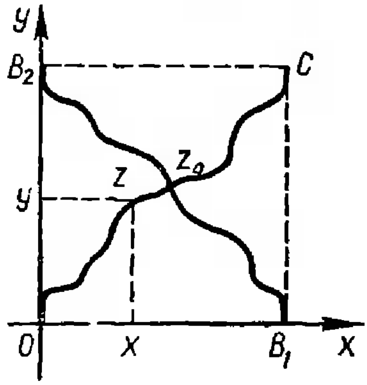


Рис. 17

Рис. 18

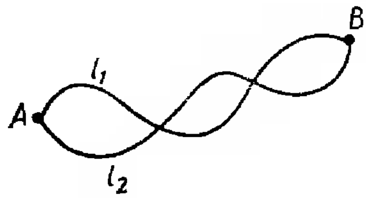


Рис. 19

что каким-то образом можно осуществить указанное передвижение платформ. Тогда аналогично получим еще одну кривую, соединяющую B_2 и B_1. Но непрерывные кривые OC и B_1B_2, соединяющие противоположные вершины прямоугольника OB_1CB_2, обязательно должны пересечься в некоторой точке Z (это непосредственное следствие непрерывности наших кривых). Точке Z отвечают такие точки на дорогах l_1 и l_2, что расстояние между этими точками не превосходит 20 м (ибо эта точка принадлежит линии OC, изображающей траекторию движения машин). Но это значит, что еще до того, как платформы (движение которых изображается линией B_1B_2) достигнут положения, изображаемого точкой Z, они неминуемо столкнутся (ибо расстояние между центрами платформ должно превышать 22 м).

Расстояние между точками A и B есть длина отрезка AB. Это так в учебном пособии «Геометрия, 6—10» А. В. Погорелова. Но расстояние, например, может измеряться по кривой, соединяющей точки A и B (рис. 18). Однако в этом случае, говоря о расстоянии, неясно, о какой величине идет речь (рис. 19) или это l_1, или l_2. Во всех задачах мы, говоря о расстоянии[1] от точки A до точки B, имеем в виду длину отрезка AB.

В курсе геометрии мы пользуемся некоторыми свойствами измерения отрезков. Два из них являются аксиомами геометрии:

1. *Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.*

2. *Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.*

Еще одно очень важное свойство расстояний, называемое неравенством треугольника, доказывается на с. 88 учебного пособия А. В. Погорелова:

3. *Каковы бы ни были три точки, расстояние между двумя из этих точек не больше суммы расстояний от них до третьей точки.*

5.6. Тысяча точек. Пусть A_1, A_2, ..., A_{1000} — какие угодно 1000 точек плоскости. Докажите, что на любой окружности радиуса 1 найдется точка M, сумма расстояний от которой до точек A_1, A_2,..., ..., A_{1000} не меньше 1000.

5.7. На плоскости даны 25 точек: известно, что из любых трех точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Докажите, что среди этих точек найдутся 13, которые можно покрыть кругом радиуса 1.

Обсуждение. Пусть A — какая-то одна (безразлично какая!) из данных точек. Если все точки находятся от A на расстоянии меньше 1, то их все можно покрыть кругом радиуса 1 (с центром

[1] Иногда в записи расстояний мы не будем указывать единицу измерения. Например, запись $AB = 3$ означает, что численное значение расстояния — число 3.

A); поэтому предположим, что существует среди наших точек такая точка B, что $AB \geqslant 1$. Для каждой третьей точки M из нашей системы точек по условию задачи либо $AM < 1$, либо $BC < 1$; поэтому все оставшиеся 23 точки можно разбить на два класса: такие точки C, что $AC < 1$, и такие точки D, что $AD \geqslant 1$, но $BD < 1$. Если мы имеем 12 (или больше) точек C, то круг радиуса 1 с центром A покрывает 13 (или больше) точек; если число точек C меньше 12, то мы имеем 12 (или больше) точек D, и круг с центром B и радиусом 1 покрывает 13 (или больше) точек.

5.8. Тропинка в лесу. На квадратном участке со стороной 100 м растут (цилиндрические) деревья радиуса 1. Докажите, что если на этом участке нельзя проложить (сколько угодно тонкую!) прямолинейную тропинку длиной 10, не задевающую ни одного дерева, то число деревьев на участке не менее 400.

5.9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите в плоскости этого четырехугольника точку X, сумма расстояний от которой до вершины четырехугольника является наименьшей.

5.10. Может ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до всех его вершин быть больше его периметра?

5.11. На плоскости расположено N точек. Отметим все середины отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее количество точек плоскости может оказаться отмеченным?

Тема 6. „ВСЕ“, „НЕКОТОРЫЕ“ И ОТРИЦАНИЕ

Был у меня недавно интересный разговор с шестиклассником Аликом, центральным нападающим дворовой команды «Дзиньбеги».

— Что, Алик, бежишь на тренировку? Зимой, небось, сменишь свой футбол на хоккей?

— Ни за что на свете! — воскликнул Алик обиженно. — Зимой надо заниматься, а не бегать за шайбой. Все хоккеисты плохо учатся, а вот футболисты учатся гораздо лучше!

— Почему ты так решил?

— А что? Все так говорят в нашей команде, не я один.

— А не кажется ли тебе, что ты рассуждаешь сейчас, как печально известные обезьяны из книги Киплинга «Маугли»? Помнишь, они кричали на весь лес: «Мы велики! Мы свободны! Мы достойны восхищения! Мы все так говорим, значит, это правда!..»

— Это кто же обезьяна? — не выдержал Алик.

— Я не хотел обидеть тебя, Алик, но ссылкой на мнение многих нельзя ничего доказать. Земля круглая, хотя в древности почти все думали, что она плоская. Индейцы племени сиу, как пишет их вождь Мато Нажин, считали даже, что Земля четырехугольная, а было это уже в XIX веке... Так почему же ты думаешь, что все хоккеисты плохо учатся?

— Ну-у, вот в моем классе есть Сережа Петров. Он все время играет в хоккей и все время получает двойки.

— Ты рассуждаешь, как один француз, который говорил: «Все англичане низенькие, толстенькие и чернявые», только потому, что так выглядел единственный англичанин, с которым он встречался. И ты, и этот француз нарушаете законы логики.

Алик задумался, и я решил помочь ему. Для начала рассказал такую историю:

— В одном городе я видел на доме табличку: «В нашем доме нет двоечников». На соседнем доме такой таблички не было. Как, по-твоему, Алик, значит ли это, что в соседнем доме все были двоечниками?

— Н-нет, — пробормотал Алик неуверенно. — Не обязательно. Это значит только, что там есть двоечники... Хотя бы один двоечник... А может быть, и все там учатся на двойки. Нет, не знаю, я ведь там не был!

— А что же означает такая фраза: «Неверно, что среди ребят есть двоечники»?

— Это, как в первом доме, — все учатся без двоек.

— Значит, одно из двух, — сказал я удовлетворенно. — Либо все учатся без двоек, либо в доме есть хотя бы один двоечник. А что можно сказать о любителях шайбы?

И тут выяснилось, что Алик, может подумавши, рассуждать логически правильно.

— Верно одно из двух: либо все хоккеисты плохо учатся, либо не все, значит, есть хоккеисты, которые учатся хорошо.

Но даже в твоем классе, Алик, я знаю нескольких отличников, которые любят гонять шайбу. Значит, верно второе: бывают хоккеисты, которые хорошо учатся.

— Ну, конечно!

— А что же тогда показывает твой пример с Сережей Петровым?

Алик задумывается.

— Не все хоккеисты хорошо учатся...

Вот что значит попробовать рассуждать логично, а не повторять чужие глупые слова. Алик сейчас сам пришел к правильному выводу, а ведь это ему никак не удавалось в начале спора.

С двоечниками и хоккеистами мы разобрались сравнительно быстро. Попробуем понять, как следует рассуждать в более сложных случаях. Первый пример — с разноцветными шарами. Представим себе, что в урне (небольшом ящике) могут лежать шары разных цветов (скажем, белые и красные). Все шары одинакового размера и неразличимы на ощупь. Кто-то опускает руку в урну и вынимает шар. Шар оказывается, к примеру, красным, и мы кладем его обратно. Что можно сказать о цвете шаров в урне?

Некоторые скажут: «Все шары красные». На самом деле можно утверждать лишь, что некоторые (не обязательно все) шары красные. Возможно, имеются и белые шары. Может быть и так, что вынутый шар — единственный красный среди шаров в урне.

Был вынут красный шар. Значит, неверно утверждение: «Все шары белые». А что верно? «Некоторые (по крайней мере один) шары красные».

Давайте потренируемся. Пусть каждое из следующих утверждений неверно. Сформулируйте верные утверждения.

6.1. Все шары в урне красные.

6.2. Некоторые шары в урне красные.

6.3. Некоторые шары в урне белые.

6.4. Все равнобедренные треугольники являются прямоугольными.

6.5. Все ученики класса были на собрании.

6.6. Некоторые девочки были на собрании.

А вот общее решение всех подобных задач: наше «волшебное средство». Пусть у нас есть множество M каких-то объектов (это может быть несколько шаров, или несколько книг, или все ученики некоторого класса). Каждый из элементов этого множества может обладать, а может и не обладать некоторым свойством A. Например, шар может быть красным, а может и не быть, хоккеист может быть или не быть двоечником.

Закон такой: верно может быть либо утверждение, либо его отрицание. Одно и только одно из двух! (В логике этот закон называется законом исключенного третьего.) То есть каждое утверждение, которое мы используем, либо верно, либо неверно.

Либо верно утверждение B, либо его отрицание (т. е. утверждение: «Утверждение B неверно»).

Либо все хоккеисты плохо учатся (обладают свойством A). Если же это утверждение неверно, то хотя бы один хоккеист учится хорошо (не обладает свойством A).

В результате можно составить вот такую т а б л и ц у или с х е м у:

Утверждение	*Его отрицание*
Все предметы из M обладают свойством A. (Любой предмет из M обладает свойством A.)	Хотя бы один предмет из M не обладает свойством A. (Существует предмет из M, не обладающий свойством A.)
Некоторые предметы из M обладают свойством A. (Существует предмет из M, обладающий свойством A.)	Все предметы из M не обладают свойством A. (Любой предмет из M не обладает свойством A.)

Обратите внимание на то, что утверждения «некоторые предметы обладают свойством A» и «хотя бы один предмет (а может быть, и все) обладает свойством A» означают в нашей таблице одно и то же.

До сих пор мы рассматривали утверждения, про которые можно установить, справедливы они или нет. Однако таблица позволяет нам формулировать отрицание утверждения и в том случае, когда неизвестно, справедливо утверждение или нет.

Французский математик Пьер Ферма (1601—1665) сформулировал теорему, которую до сих пор не удалось ни доказать, ни опровергнуть. Ее называют «великой теоремой Ферма». Сформулирована она была на полях перевода книги древнегреческого математика Диофанта следующим образом: «Разделить куб на два других куба, четвертую степень или вообще какую-нибудь степень выше второй на две степени с тем же обозначением невозможно, и я нашел воистину замечательное доказательство этого, однако поля слишком узки, чтобы поместить его». И с тех пор найти доказательство не удалось. Скорее всего, доказательство Ферма было ошибочным. На современном языке теорема Ферма формулируется так.

Великая теорема Ферма. *Для любых натуральных чисел x, y, z и n $(n > 2)$*

$$x^n + y^n \neq z^n.$$

С помощью таблицы можно сформулировать отрицание теоремы Ферма.

Отрицание великой теоремы Ферма. *Существуют натуральные числа n, x, y, z такие, что n больше 2 и*

$$x^n + y^n = z^n.$$

Почему вводится условие: n больше 2? Да потому, что при $n = 1$ или $n = 2$ существует сколько угодно троек чисел x, y, z таких, что $x^n + y^n = z^n$. Например, $3 + 4 = 7$ $(n = 1)$, $3^2 + 4^2 = 5^2$ $(n = 2)$.

Постройте отрицания следующих утверждений.

6.7. Все углы данного шестиугольника тупые.

6.8. Для любого x из множества M выполнено неравенство $x^2 > 4$.

6.9. Некоторые люди — дети.

6.10. Все люди смертны.

6.11. По крайней мере для одного x из множества M справедливо равенство $x^2 - 2x + 1 = 0$.

6.12. Все мужчины выше 5 футов[1].

6.13. Все простые числа нечетны.

6.14. Существует натуральное число, квадрат которого имеет четное число делителей.

Вернемся к задачам с разноцветными шарами в урне. Шары неразличимы на ощупь. Они могут быть белого, красного, синего, черного цвета.

6.15. Известно, что не все шары в урне белые. Верно ли, что там есть красный шар?

---

[1] Один ф у т = 0,3048 м = 304,8 мм.

6.16. Известно, что не все шары одного цвета. Верно ли, что в урне есть хотя бы один не белый шар?

6.17. В урне 10 белых, 8 красных, 11 черных шаров. Сколько из них надо вынуть, чтобы наверняка попался белый шар? Чтобы попались шары всех трех цветов?

6.18. В классе 5 отличников, 20 хорошистов и 10 троечников. Отличник может получить за ответ только 5, хорошист — 4 или 5, троечник — 3, 4 или 5. В класс пришел новый учитель, он не знает никого из учеников. Сколько человек ему достаточно вызвать к доске, чтобы н а в е р н я к а была поставлена хотя бы одна пятерка?

Вот две более трудные з а д а ч и.

6.19. Найдите все натуральные числа n, для которых справедливы неравенства: $486 < n \leqslant 501$ — и, кроме того, верно одно и только одно из следующих условий:

а) число n четное;

б) n делится на 3;

в) n делится на 2 или на 3;

г) n не делится на 3, но делится на 4;

д) n не делится ни на 3, ни на 4;

е) n делится на 3, но не делится на 6;

ж) n делится на 8 или на 9;

з) n делится и на 3, и на 4;

и) n делится на 11.

Иначе говоря, для каждого числа n из искомого множества должно быть верно только одно из этих девяти условий.

6.20. Соревнования по плаванию были в самом разгаре, когда стало ясно, что первые четыре места займут мальчики из пятерки лидеров. Их имена: Валерик, Коля, Миша, Игорь, Эдик, фамилии: Симаков, Чигрин, Зимин, Копылов, Блинов (имена и фамилии названы в различном порядке).

Нашлись знатоки, которые предсказали, что первое место займет Копылов, второе — Валерик, третье — Чигрин, четвертое— Эдик. Но, как это часто бывает, знатоки попали впросак: ни один из ребят не занял того места, какое ему предсказывали. На самом деле первое место завоевал Миша, второе — Симаков, третье — Коля, четвертое — Блинов, а Чигрин не попал в четверку сильнейших.

Назовите имя и фамилию каждого из лидеров.

Тема 7. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Понятие многоугольников тесно связано с понятием ломаной. Как вы знаете, л о м а н ы е бывают разные, примеры их помещены на рисунках 20—23. На рисунках 20 и 21 изображены ломаные н е з а м к н у т ы е, а на рисунках 22 и 23 — з а м к н у т ы е. В случае, изображенном на рисунке 21, ломаная называется с а м о п е р е с е к а ю щ е й с я.

Решим з а д а ч у:

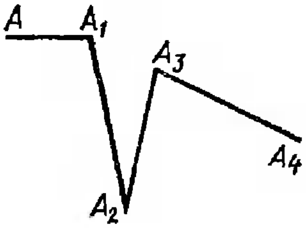


Рис. 20

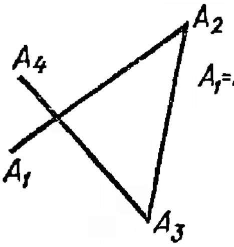


Рис. 21

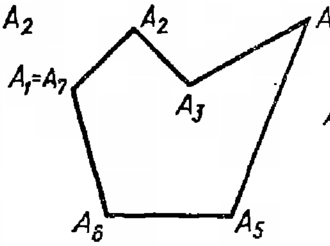


Рис. 22

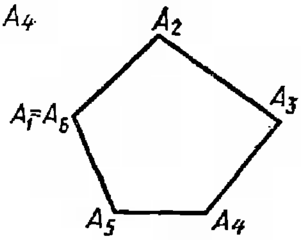


Рис. 23

7.1. Известно, что замкнутая ломаная линия состоит из 203 звеньев, причем никакие два звена не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число точек самопересечения возможно для такой линии?

Обсуждение. Заметим сначала, что каждое звено ломаной может пересекать не более чем 200 звеньев (заведомо исключается оно само и два соседних звена). Поэтому общее число точек самопересечения не может превосходить $\frac{203 \cdot 200}{2} = 20\,300$. Ровно 20 300 точек пересечения имеется, например, у правильного звездчатого 203-угольника. Как его построить, станет понятно, если взглянуть на рисунок 24, где изображен правильный звездчатый 7-угольник. Убедитесь сами, что никакие три звена правильного звездчатого 203-угольника не пересекаются в одной точке.

Мы знаем, что сумма длин звеньев ломаной называется длиной ломаной и длина ломаной больше расстояния между ее концами.

Решим такую задачу:

7.2. На плоскости даны n точек. Докажите, что кратчайшая ломаная с вершинами в этих точках не имеет самопересечений.

Обсуждение. Предположим, что кратчайшая ломаная $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ имеет два пересекающихся звена A_kA_{k+1} и A_lA_{l+1}, где $k+1<l$ (в частности, может случиться, что отрезок A_kA_{k+1} проходит через точку A_l или отрезок A_lA_{l+1} — через точку A_k). Докажите, что если отрезки A_kA_{k+1} и A_lA_{l+1} ломаной заменить отрезками A_kA_l и $A_{k+1}A_{l+1}$, то получится ломаная с вершинами в данных точках, имеющая меньшую длину, чем та, которую мы считали кратчайшей.

Замечание. Заменить звенья A_kA_{k+1} и A_lA_{l+1} на A_kA_l и $A_{k+1}A_l$ нельзя; хотя при этом сумма длин звеньев также умень-

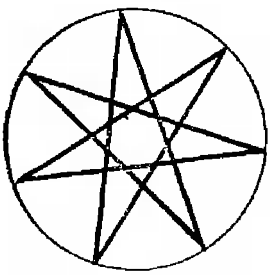


Рис. 24

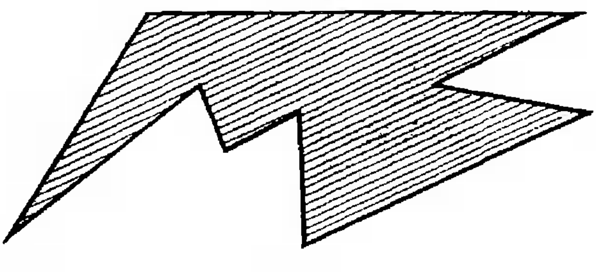


Рис. 25

шится, но ломаная распадется на две: замкнутую $A_{k+1}A_{k+2} \dots A_l A_{k+1}$ и незамкнутую $A_1 \dots A_k A_{k+1} \dots A_n$ (убедитесь в этом).

Плоским многоугольником или многоугольной областью называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником (рис. 25). При этом получаются **выпуклые** многоугольники и **невыпуклые**. Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости. Определение выпуклой фигуры может быть и таким. Фигура называется выпуклой, если ей принадлежит отрезок, соединяющий две любые ее точки.

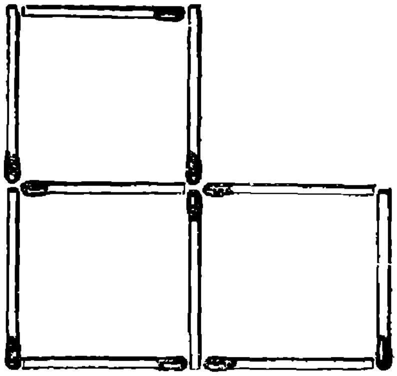


Рис. 26

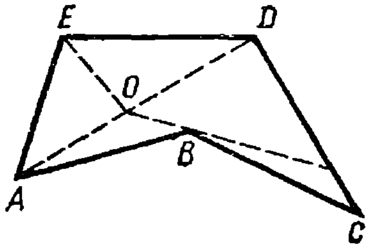


Рис. 27

7.3. Постройте два таких невыпуклых многоугольника, чтобы пересечением их было:

а) три, б) четыре выпуклых четырехугольника.

7.4. а) Из 10 спичек выложить 3 квадрата (рис. 26). Затем отнять одну спичку и сделать из оставшихся спичек один квадрат и два ромба.

б) Восемь спичек уложить так, чтобы образовались один восьмиугольник, два квадрата и восемь треугольников — все в одной фигуре.

7.5. На рисунке 27 изображен многоугольник $ABCDE$. Из точки O видны полностью стороны AB, DE и EA и лишь частично сторона CD.

а) Нарисовать какой-нибудь многоугольник и точку O внутри него так, чтобы ни одна сторона не была видна из нее полностью.

б) Нарисовать многоугольник и точку O вне его так, чтобы ни одна сторона не была видна из нее полностью.

7.6. Докажите, что нельзя провести прямую так, чтобы она пересекала все стороны 1001-угольника.

7.7. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, длины которых равны длине наибольшей диагонали?

7.8. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковую длину?

7.9. Из пяти точек никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать из них четыре точки, которые являются вершинами выпуклого четырехугольника.

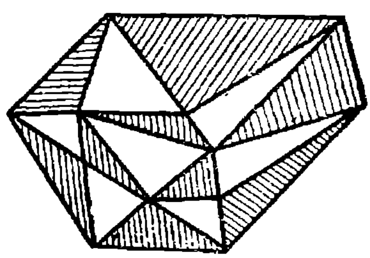


Рис. 28

7.10. На рисунке 28 изображен шестиугольник, разбитый на черные и белые треугольники так, что:

а) два треугольника либо имеют общую сторону (тогда они раскрашены в разные цвета), либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек;

б) каждая сторона шестиугольника является в то же время стороной одного из черных треугольников.

Докажите, что десятиугольник разбить таким образом невозможно.

7.11. Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как $2:3$. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

Для выпуклого многоугольника в курсе геометрии доказано, что сумма его внутренних углов равна $2d\,(n-2)$, где n — число сторон многоугольника, а сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна $4d$.

Используя эти теоремы, можно решить много интересных задач.

7.12. На плоскости даны шесть точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что среди них есть три точки, которые образуют треугольник с углом, не меньшим $120°$.

Обсуждение. Пусть данные точки лежат в вершинах выпуклого шестиугольника. В этом случае решение легко получить, если заметить, что сумма углов выпуклого шестиугольника равна $720°$ и, следовательно, хотя бы один из этих углов не меньше $120°$. Остается рассмотреть случай, когда какие-нибудь 5, 4 или 3 из данных точек лежат в вершинах выпуклого многоугольника, а остальные точки лежат внутри этого многоугольника. Проведем из какой-нибудь вершины этого многоугольника диагонали. Они разобьют многоугольник на треугольники. Внутри какого-то из полученных треугольников будет находиться одна из заданных точек. Соединив ее с вершинами треугольника, получим три угла, в сумме равные $360°$. Поэтому хотя бы один из них не меньше $120°$.

7.13. Внутри выпуклого 100-угольника выбрано 30 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой: 100-угольник разрезан на треугольники так, что совокупность вершин всех этих треугольников состоит из 30 выбранных точек и 100 вершин первоначального многоугольника. Сколько имеется треугольников?

7.14. На плоскости даны 1000 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Мы последовательно соединим точки непересекающимися отрезками и продолжим этот процесс до тех пор, пока уже больше не останется ни одной пары точек, которые можно было бы соединить отрезком, не пересекающим проведенные ранее.

Докажите, что число проведенных отрезков не зависит от порядка, в котором мы соединяем наши точки.

В каких пределах может изменяться число отрезков в зависимости от расположения 1000 точек на плоскости?

Обсуждение. Наши 1000 точек лежат внутри и в вершинах некоторого выпуклого r-угольника, где $r \leqslant 1000$. Ясно, что проведенные отрезки составят сеть линий, совпадающих со сторонами r-угольника и дополнительно разбивающих его на ряд треугольников. В самом деле, никакая часть, на которую разбивают r-угольник проведенные отрезки, не может представлять собой многоугольник с числом сторон, большим трех, ибо иначе этот многоугольник можно было бы продолжать разбивать на меньшие части непересекающимися диагоналями, далее каждая точка внутри треугольника обязательно будет соединена со всеми его вершинами, что задает разбиение этого треугольника на три меньших. При этом число внутренних вершин разбиения r-угольника на треугольники будет, очевидно, равно $1000 - r$.

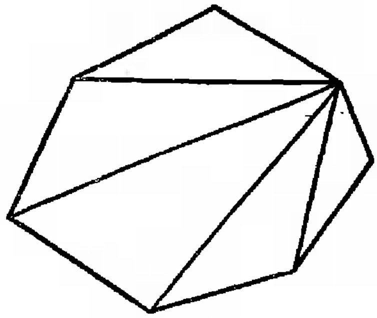


Рис. 29

Общее число всех треугольников разбиения нетрудно подсчитать, найдя общую сумму всех их углов; эта сумма равна

$$180° (r - 2) + 360° (1000 - r)$$

(первый член отвечает внутренним углам r-угольника, второй — углам, сходящимся во «внутренних» вершинах разбиения). Поэтому число треугольников разбиения будет равно $(r - 2) + 2 (1000-r) = 1998 - r$, а общее число их сторон $3 (1988 - r) = 5994 - 3r$.

Теперь, для того чтобы найти общее число проведенных отрезков, остается только заметить, что в последнем выражении r отрезков — стороны r-угольника — фигурируют один раз, а все остальные отрезки — два раза (они являются сторонами двух треугольников). Поэтому общее число n отрезков равно $r + \frac{1}{2} (5994-4r) = 2997 - r$, т. е. не зависит от порядка, в котором мы соединяли между собой точки, так как $1000 \geqslant r \geqslant 3$, то $1997 \leqslant n \leqslant 2994$.

7.15. а) Докажите, что замкнутая самопересекающаяся ломаная, пересекающая каждое свое звено ровно один раз, не может иметь меньше 6 звеньев. Постройте шестизвенную ломаную, пересекающую каждое свое звено ровно один раз.

б) Докажите, что общее число звеньев самопересекающейся ломаной, пересекающей каждое свое звено ровно один раз, обязательно четно.

7.16. В многоугольнике M проведены непересекающиеся диагонали, разбивающие его на треугольники (рис. 29). Докажите, что найдутся две такие вершины многоугольника M, из которых не исходит ни одна из проведенных диагоналей.

7.17. а) Докажите, что к конечному множеству точек на плоскости, обладающему тем свойством, что любые три точки из этого множества являются вершинами невырожденного тупоугольного треугольника, всегда можно добавить еще одну точку так, что это свойство сохранится.

б) Справедливо ли аналогичное утверждение для бесконечного множества точек на плоскости?

Тема 8. ГРАФЫ

Рассмотрим сначала следующие три з а д а ч и:

8.1. Кто играет Ляпкина-Тяпкина? В школьном драмкружке решили ставить гоголевского «Ревизора». И тут разгорелся жаркий спор. Все началось с Ляпкина-Тяпкина.

— Ляпкиным-Тяпкиным буду я! — решительно заявил Гена.

— Нет, я буду Ляпкиным-Тяпкиным, — возразил Дима. — С раннего детства мечтал воплотить этот образ на сцене.

— Ну, хорошо, согласен уступить эту роль, если мне дадут сыграть Хлестакова, — проявил великодушие Гена.

— ...А мне — Осипа, — не уступил ему в великодушии Дима.

— Хочу быть Земляникой или Городничим, — сказал Вова.

— Нет, Городничим буду я, — хором закричали Алик и Боря. — Или Хлестаковым, — добавили они одновременно.

Удастся ли распределить роли так, чтобы исполнители были довольны? (Мы не спрашиваем, будут ли довольны зрители.)

8.2. Сварливые соседи. Жители пяти домов поссорились друг с другом (рис. 30) и, чтобы не встречаться у колодцев, решили поделить их (колодцы) так, чтобы хозяин каждого дома ходил к «своему» колодцу по «своей» тропинке. Удастся ли им это сделать?

8.3. Корзины, полные яблок. В пяти корзинах лежат яблоки пяти разных сортов (рис. 31). Яблоки первого сорта лежат в корзинах *Г* и *Д*; яблоки второго сорта — в корзинах *А*, *Б* и *Г*; в корзинах *А*, *Б* и *В* имеются яблоки пятого сорта, в корзине *В* имеются к тому же яблоки четвертого сорта, а в корзине *Д* — третьего. Требуется дать каждой корзине номер, но так, чтобы в корзине № 1 были яблоки первого сорта (хотя бы одно), в корзине № 2 — второго и т. д.

О б с у ж д е н и е. Эти задачи довольно простые. Достойно удивления другое — хотя на первый взгляд эти задачи довольно различны — в одной говорится о распределении ролей, в другой — о тропинках от домов к колодцам, в третьей — о нумерации корзин

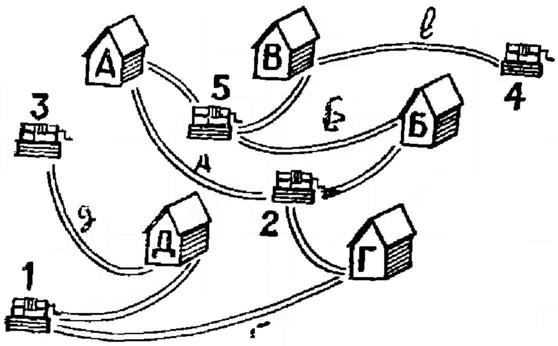


Рис. 30

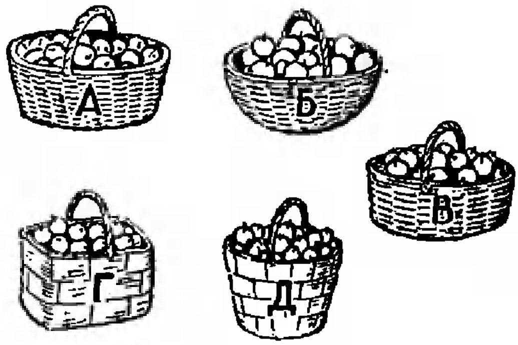


Рис. 31

с яблоками, существует е д и н ы й подход к их решению, связанный с так называемой т е о р и е й г р а ф о в.

Переведя эти задачи на язык теории графов, вы увидите, что все три задачи превратятся в одну простенькую задачу «на графы», решив которую вы тем самым решите все три поставленные выше задачи.

Познакомимся с основными понятиями теории графов. Прежде всего стоит сказать о том, что графы, о которых пойдет речь, к аристократам былых времен никакого отношения не имеют. Наши «графы» имеют корнем греческое слово «графо», что значит «пишу». Тот же корень в словах «график», «биография», «голография».

Понятие графа проще всего выяснить на п р и м е р е.

8.4. Первенство класса. В первенстве класса по настольному теннису 6 участников: Андрей, Борис, Виктор, Галина, Дмитрий и Елена. Первенство проводится по круговой системе — каждый из участников играет с каждым из остальных один раз. К настоящему моменту некоторые игры уже проведены: Андрей сыграл с Борисом, Галиной и Еленой; Борис, как уже говорилось, с Андреем и еще с Галиной; Виктор — с Галиной, Дмитрием и Еленой; Галина — с Андреем и Борисом; Дмитрий — с Виктором и Елена — с Андреем и Виктором. Сколько игр проведено к настоящему моменту и сколько еще осталось?

О б с у ж д е н и е. Изобразим данные задачи в виде схемы (рис. 32). Участников будем изображать точками: Андрея — точкой *А*, Бориса — точкой *Б* и т. д. Если двое участников уже сыграли между собой, то будем соединять изображающие их точки отрезками. Получается схема, показанная на рисунке 32.

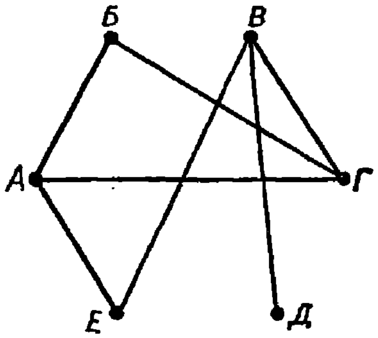


Рис. 32

Такие схемы называются г р а ф а м и. Точки *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, *Е* называются в е р ш и н а м и г р а ф а, соединяющие их отрезки—р е б р а м и г р а ф а. Заметьте, что точки пересечения ребер графа не являются его вершинами. Во избежание путаницы вершины графа часто изображают не точками, а маленькими кружочками. Ребра зачастую оказываются удобнее изображать не прямолинейными отрезками, а криволинейными — «дугами».

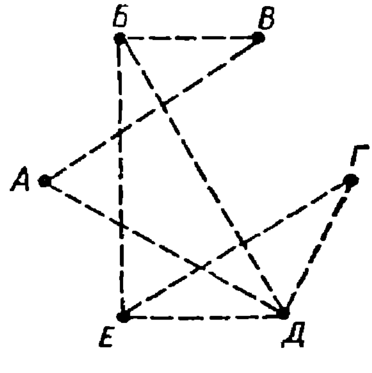


Рис. 33

Но вернемся к нашей задаче. Число игр, проведенных к настоящему моменту, равно числу ребер, т. е. 7. Чтобы найти число игр, которые осталось провести, построим еще один граф с теми же вершинами, но ребрами будем соединять тех участников, которые еще не играли друг с другом (рис. 33). Ребер у этого графа оказалось 8, значит, осталось провести 8 игр: Андрей

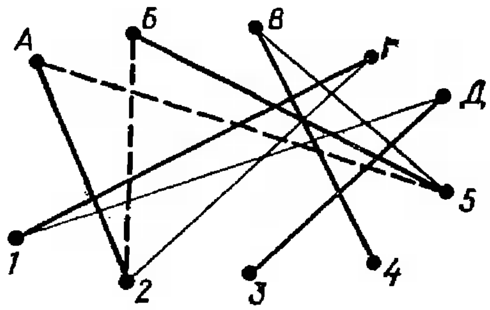


Рис. 34

должен сыграть в теннис с Виктором и Дмитрием; Борис — с Виктором, Дмитрием и Еленой и т. д.

Графами мы пользуемся довольно часто. Возьмите схему железных дорог: здесь станции — это вершины графа, перегоны (участки пути между станциями) — ребра графа. Вершины и ребра многогранника (куба, пирамиды и т. д.) тоже образуют граф.

О б с у ж д е н и е задач **8.1, 8.2** и **8.3.**

Попробуем построить граф для ситуации, описанной в задаче 8.1: «Кто играет Ляпкина-Тяпкина?» Изобразим юных актеров кружками верхнего ряда: *А* — Алик, *Б* — Боря, *В* — Вова, *Г* — Гена, *Д* — Дима, а роли, которые они собираются играть, — кружками второго ряда (*1* — Ляпкин-Тяпкин, *2* — Хлестаков, *3* — Осип, *4* — Земляника, *5* — Городничий). Затем от каждого участника проведем отрезки, т. е. ребра, к ролям, которые он хотел бы сыграть. У нас получится граф с десятью вершинами и десятью ребрами (рис. 34).

Чтобы решить задачу, нужно из десяти выбрать пять ребер, не имеющих общих вершин. Сделать это легко. Достаточно заметить, что в вершины *3* и *4* ведет по одному ребру, из вершин *Д* и *В* соответственно. Это означает, что Осипа (вершина *3*) должен играть Дима (кто же еще?), а Землянику — Вова. Вершина *1* — Ляпкин-Тяпкин — соединена ребрами с *Г* и *Д*. Ребро *1* — *Д* отпадает, так как Дима уже занят, остается ребро *1* — *Г*, Ляпкина-Тяпкина должен играть Гена. Остается соединить вершины *А* и *Б* с вершинами *2* и *5*, соответствующими ролям Хлестакова и Городничего. Это можно сделать двумя способами: либо выбрать ребра *А* — *5* и *Б* — *2*, либо ребра *А* — *2* и *Б* — *5*. В первом случае Алик будет играть Городничего, а Боря — Хлестакова, во втором случае наоборот. Как показывает наш граф, других решений задача не имеет.

Постройте теперь графы для второй и третьей задач. У вас получились те же графы! Теперь вы видите, что вторая и третья задачи по сути ничем не отличаются от первой. Отметив на этих графах по пять ребер, не имеющих общих вершин, вы тем самым решите данные задачи. Ясно, что это те же самые ребра, что и на рисунке 34, где они выделены жирной линией (второе решение показано пунктирной линией).

Возникает вопрос: так ли уж нужны были графы в разобранных задачах? Разве нельзя прийти к решению чисто л о г и ч е с к и м путем? Да, можно. Но графы придали условиям наглядность, упростили решение и выявили сходство задач, превратив три задачи в одну, а это не так уж мало. А теперь представьте себе задачи, графы которых имеют 100 или более вершин. А ведь именно такие задачи приходится решать современным инженерам и экономистам. Тут уж без графов не обойтись.

Сейчас почти в любой отрасли науки и техники встречаешься с графами: в электротехнике — при построении электрических схем, в химии и биологии — при изучении молекул и их цепочек, в экономике — при решении задач о выборе оптимального пути для потоков грузового транспорта и во многих других задачах. О математике и говорить не приходится. С теорией графов связаны не только математические развлечения и головоломки, но и такие серьезные науки, как теория отношений и теория групп.

И все же теория графов — наука сравнительно молодая: во времена Ньютона такой науки еще не было, хотя и были в ходу «генеалогические деревья», представляющие собой разновидности графов. Первая работа по теории графов принадлежит Леонарду Эйлеру, и появилась она в 1736 году в публикациях Петербургской Академии наук. Начиналась эта работа с рассмотрения следующей задачи:

8.5. Задача о кенигсбергских мостах. Город Кенигсберг (ныне Калининград) расположен на берегах и двух островах реки Прегель (Преголи). Различные части города были соединены семью мостами, как показано на рисунке 35. В воскресные дни горожане совершают прогулки по городу. Можно ли выбрать такой маршрут, чтобы пройти один и только один раз по каждому мосту и потом вернуться в начальную точку пути?

Обсуждение. Обозначим различные части города буквами A, B, C, D, а мосты — буквами a, b, c, d, e, f, g. В этой задаче существенны лишь переходы через мосты: переходя через любой мост, мы всегда из одной части города попадаем в другую, и, наоборот, переходя из одной части города в другую, мы непременно пройдем по мосту. Поэтому изобразим план города в виде графа, вершины которого A, B, C и D (рис. 36) изображают отдельные части города, а ребра a, b, c, d, e, f, g — мосты, соединяющие соответствующие части города. Если бы существовал маршрут, удовлетворяющий условию задачи, то существовал бы замкнутый и непрерывный обход этого графа, проходящий один раз по каждому

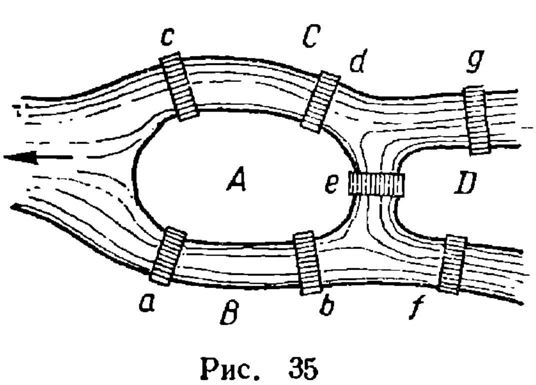


Рис. 35

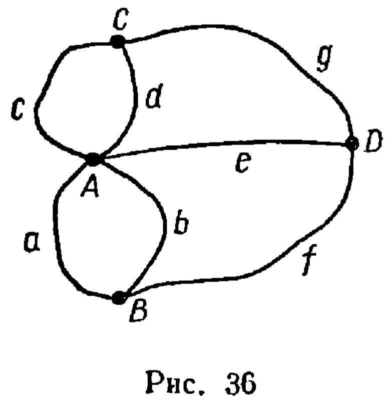


Рис. 36

ребру. Иными словами, этот граф можно было бы вычертить, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя дважды по одному и тому же ребру. Но это невозможно — какую бы вершину мы ни выбрали за исходную, нам придется проходить через остальные вершины, и при этом каждому «входящему» ребру (мосту, по которому мы вошли в эту часть города) будет соответствовать «выходящее» ребро (мост, которым мы воспользуемся затем, чтобы покинуть эту часть города): число ребер, входящих в каждую вершину, будет равно числу ребер, выходящих из нее, т. е. общее число ребер, сходящихся в каждой вершине, должно быть четным. Наш граф этому условию не удовлетворяет, и поэтому требуемого маршрута не существует.

Если в каждой вершине связного[1] графа сходится четное число ребер, то такой граф называется «эйлеров». Можно доказать, что всякий эйлеров граф допускает непрерывный замкнутый обход (такой путь в теории графов называется *циклом*), проходящий по каждому ребру ровно один раз. Из предыдущих рассуждений следует, что граф, не являющийся эйлеровым, такого обхода не допускает.

8.6. Не отрывая карандаша от бумаги и не проводя ни по какому ребру дважды, нарисуйте граф, изображенный на рисунке 37. Занумеруйте ребра в той последовательности, в которой вы их проходили.

Обсуждение. Если требуемый условием обход графа существует, то все вершины разбиваются на два класса: вершины, в которых начинается или заканчивается обход — таких вершин может быть не более двух, и все прочие вершины. Из обсуждения задачи 8.5 следует, что в каждой из вершин второго класса должно сходиться *четное* число ребер. Значит, вершины, в которых сходится *нечетное* число ребер, «годятся» только на то, чтобы служить начальной или конечной точкой обхода. Это замечание облегчает решение.

Между прочим, мы доказали, что невозможно начертить граф по правилам задачи 8.6, если у него более двух вершин нечетной кратности (*кратностью вершины* называют число ребер, сходящихся в этой вершине).

8.7. Муха в банке. Муха забралась в банку из-под сахара. Банка имеет форму куба. Сможет ли муха последовательно обойти все 12 ребер куба, не проходя дважды по одному ребру. Подпрыгивать и перелетать с места на место не разрешается.

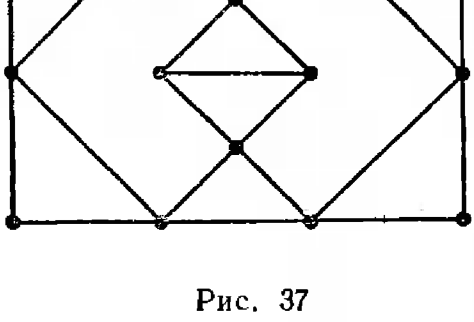


Рис. 37

[1] Граф называется *связным*, если, двигаясь вдоль ребер, можно из любой его вершины попасть в любую другую.

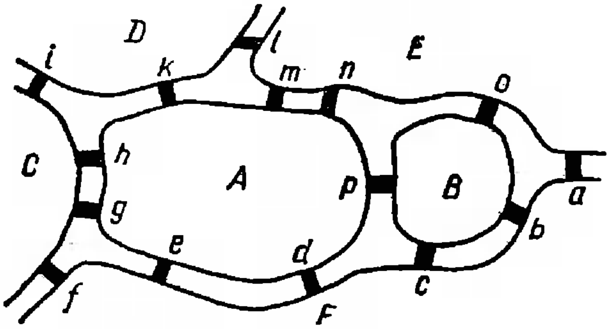


Рис. 38

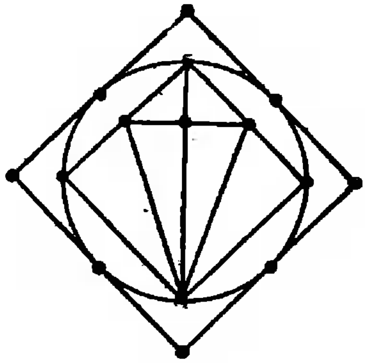


Рис. 39

8.8. Задача Леонарда Эйлера. Можно ли совершить прогулку по городу, план которого показан на рисунке 38, пройдя в точности один раз по каждому из пятнадцати мостов? Возвращаться в начальную точку пути необязательно. Если такой обход существует, найти его, указав мосты в той последовательности, в которой вы их проходите. Если же такого обхода не может существовать, объясните, почему не может. Изобразите план города в виде графа, как в обсуждении задачи 8.5.

8.9. Не отрывая карандаша от бумаги. При тех же условиях, что и в задаче 8.6, начертите граф, показанный на рисунке 39.

8.10. Кто с кем знаком? Докажите, что среди любых шести человек найдутся либо трое, друг с другом знакомых, либо трое, друг с другом не знакомых.

Если эта задача покажется вам трудной, решите сначала следующую.

8.11. Красное и синее. Каждая вершина правильного шестиугольника соединяется с каждой из остальных вершин красным или синим отрезком. Докажите, что всегда найдется треугольник со сторонами одного цвета.

Подсказка. Из первой вершины выходят пять отрезков. Из них хотя бы три одного цвета. Рассмотрите эти отрезки.

8.12. В чем сходство? Докажите, что задача 8.10 сводится к задаче 8.11.

Тема 9. АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ

9.1. Со скоростью ЭВМ. Каков будет остаток от деления числа $7778 \times 7779 \times 7780 \times 7781 \times 7782 \times 7783$ на 7?

Обсуждение. Для решения этой задачи нам не понадобится ЭВМ. Немного терпения, и каждый из вас научится решать такие задачи в уме. Надо только знать немного арифметику, но не обычную арифметику, которую учат в школе, а так называемую «арифметику остатков» или «арифметику сравнений». Так называется глава серьезной математической науки — «теории чисел», которую иногда называют «высшей арифметикой».

С арифметикой остатков мы сталкиваемся буквально на каждом шагу. Вот несколько п р и м е р о в.

П р и м е р п е р в ы й. В коридоре висит счетчик. Взгляните на него. Он показывает, предположим, 0729 киловатт-часов. А на самом деле сколько электроэнергии израсходовано с момента установки счетчика? 729 кВт·ч? Или 10 729? Или, может быть, 30 729? По показанию счетчика этого не скажешь. Ведь после 9999 на счетчике будет 0000, и счет начнется сначала. Счетчик так задуман, что указывает не полный расход электроэнергии, а только остаток от деления израсходованного числа киловатт-часов на 10 000.

П р и м е р в т о р о й. Когда вы пошли в школу, на часах было ровно восемь. Когда вы ложились спать, часы показывали десять, а $10 - 8 = 2$. Но разве прошло два часа с того момента, как вы ушли в школу? Нет, не два, а целых четырнадцать. Дело в том, что стрелки, дойдя до показания 12—00, каждый раз начинают отсчет времени заново, с нуля, часы нам показывают не полное время, прошедшее с момента, когда они показывали 0—00, а лишь остаток от деления его на 12 ч.

В качестве т р е т ь е г о п р и м е р а рассмотрим следующую задачу:

9.2. В 1984 г. 1 января приходится на воскресенье. А каким днем недели будет 1 января 1988 г.?

О б с у ж д е н и е. Если бы число дней в году делилось на 7, то 1 января всегда приходилось бы на один и тот же день недели, скажем на воскресенье, как в 1984 г. Но в високосном 1984 г. 366 дней. Деля 366 на 7, получаем 52 полные недели и еще 2 дня в остатке. Значит, 1985 г. начнется не с воскресенья, а со вторника. В 1985 г. 365 дней, и остаток от деления 365 на 7, равный 1, приведет к «сдвигу» Нового года еще на 1 день недели; то же самое произойдет в 1986 и 1987 гг. Значит, 1 января 1988 г. будет пятница.

Можно и еще много привести примеров и задач, в которых основную роль играет не частное от деления одного целого числа на другое, а остаток. Для решения такого рода задач была создана «арифметика остатков». Познакомимся с ней поближе.

Для начала займемся арифметикой остатков от деления на 7. Делитель в теории чисел называют «модулем», а числа, дающие при делении на модуль 7 одинаковые остатки, называются «равноостаточными» или «сравнимыми по модулю 7». Тот факт, что два числа A и B при делении на некоторый модуль M дают одинаковые остатки, т. е. сравнимы по модулю M, записывается так:

$$A \equiv B \pmod{M}.$$

То, что знак сравнения $\equiv$ напоминает по своему виду знак равенства, не случайно, как будет видно из дальнейшего.

9.3. Скажите, по какому принципу построена т а б л и ц а на с. 37:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34
35	36	37	38	39	40	41
42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

Точки, как обычно в математике, означают, что по этому же принципу расположены в таблице и все прочие натуральные числа.

Обсуждение. Этот принцип весьма прост. Все целые неотрицательные числа выписаны подряд: в первой строке — первые семь, во второй — семь последующих и т. д. — семерка за семеркой. Какие же числа оказались при этом в одном столбце? Это тоже ясно. Соседние числа столбца отличаются на 7, так что в третий слева столбец попали числа 2, $2 + 7 = 9$, $9 + 7 = 16$ и т. д. При делении на 7 все они дают в остатке 2. Числа четвертого слева столбца при делении на 7 дают в остатке 3, числа седьмого столбца — 6, числа первого столбца — 0, т. е. делятся на 7 без остатка. Остатки в таблице выделены жирным шрифтом — это первые, верхние числа каждого столбца. Применяя введенную выше терминологию, можно сказать, что в один столбец попали те и только те числа, которые при делении на 7 равноостаточны, т. е. сравнимы друг с другом по модулю 7.

Итак, все целые неотрицательные числа разбились на 7 классов: в класс с индексом 0 попали все числа, которые при делении на 7 дают в остатке 0 (делятся на 7 без остатка) — это числа левого столбца таблицы. В класс с индексом 1 попадают числа следующего столбца, дающие при делении на 7 в остатке 1, и т. д. Отсюда вытекает:

Правило определения класса. *Чтобы узнать, в каком классе находится некоторое число, надо найти остаток от деления этого числа на 7. Этот остаток равен индексу класса.*

Заметьте еще, что если разность двух чисел делится на 7 без остатка, то оба числа попадают в один столбец, в один класс. Делаем выводы.

В ы в о д п е р в ы й. *В один класс попадают все числа, дающие при делении на модуль один и тот же остаток.*

В ы в о д в т о р о й. *Два числа принадлежат к одному классу тогда и только тогда, когда их разность делится без остатка на модуль.*

Теперь я попрошу каждого из вас выбрать любое число класса «3». (т. е. из четвертого столбца) и прибавить к нему любое число класса «5» (из шестого столбца). Если вы всё правильно сделали, то сумма оказалась в классе «1» (во втором столбце). Как мне удалось это узнать? Дело в том, что сумма числа из класса «3» с числом из класса «5» всегда оказывается в классе «1». В самом деле, если какое-нибудь слагаемое в сумме заменить числом того же класса, то и это слагаемое, и вся сумма увеличатся или уменьшатся на несколько семерок, т. е. останутся в том же классе. Мне было достаточно, не зная задуманных вами чисел, сложить 3 и 5 и определить, что 8 попадает в класс «1». Отсюда получаем:

В ы в о д т р е т и й. *Остаток от деления суммы на модуль не изменится, если одно из слагаемых или каждое слагаемое заменить другим числом того же класса (в частности, индексом этого класса).*

Используя этот вывод, нетрудно решить следующую з а д а ч у:

9.4. Не проводя обычных вычислений, найти остаток от деления на 7 следующей суммы:

$$8 + 79 + 780 + 7\,781 + 77\,782 + 777\,783.$$

О б с у ж д е н и е. Как легко заметить, остатки от деления слагаемых на 7 равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6; например, $77\,782 = 77\,777 + 5$, а $777\,783 = 777\,777 + 6$. Таким образом, индексы классов, в которых находятся слагаемые, равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Воспользуемся выводом третьим и заменим в данной сумме каждое слагаемое индексом его класса — индекс суммы от этого не изменится. Остается найти остаток от деления суммы

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

на 7. Эта сумма делится на 7 без остатка, значит, и данная в условии сумма делится на 7 без остатка.

Пользуясь обозначениями теории чисел, можно так сформулировать вывод третий:

Если $A \equiv B \pmod{M}$ и $C \equiv D \pmod{M}$, то $A + C \equiv B + D \pmod{M}$. Другими словами, *сравнения по одному и тому же модулю можно складывать.* Таким же свойством обладают, как мы знаем, и обычные равенства.

Используя эти обозначения, можно решение задачи 4 записать так: $8 \equiv 1$, $79 \equiv 2$, $780 \equiv 3$, $7781 \equiv 4$, $77782 \equiv 5$, $777783 \equiv 6$ (все сравнения даны по модулю 7), откуда

$$8 + 79 + 780 + 7781 + 77782 + 777783 \equiv$$
$$\equiv 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \equiv 21 \equiv 0 \pmod{7},$$

а это как раз и означает, что данная в условии задачи 4 сумма делится на 7 без остатка.

Обсуждение задачи 1. Теперь мы уже можем попытаться решить задачу, с которой начали. Она несколько напоминает задачу 4, но вместо суммы там стоит произведение. Посмотрим, не обладает ли произведение таким же свойством, как и сумма. Рассмотрим произведение нескольких, скажем, трех чисел: A, B и C. Что произойдет, если в произведении ABC число A заменить другим числом того же класса A_1? Так как A_1 отличается от A на число, кратное 7, то $A_1 = A + 7K$, где K — некоторое целое число. Значит, $A_1BC = (A + 7K)\,BC = ABC + 7KBC$. Отсюда видно, что ABC и A_1BC принадлежат к одному классу (отличаются на число, кратное 7). Следовательно, справедлив следующий вывод.

Вывод четвертый. *Остаток от деления произведения нескольких чисел на модуль M не изменится, если один из сомножителей (или даже каждый из сомножителей) заменить числом того же класса.*

В частности, мы можем заменить каждое число индексом его класса. Пользуясь обозначениями теории чисел, можно записать: если $A \equiv B \pmod M$, $C \equiv D \pmod M$, то $AC \equiv BD \pmod M$, т. е. сравнения по одному и тому же модулю можно перемножить. И это свойство тоже аналогично свойству обычного равенства.

Теперь нам нетрудно решить задачу 9.1 («Со скоростью ЭВМ»). Интересующий нас остаток не изменится, если мы все сомножители заменим индексами их классов, равными 1, 2, 3, 4, 5 и 6 соответственно. Так как $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \equiv 20 \equiv 6 \pmod 7$, то искомый остаток равен 6.

Все наши рассуждения применимы и в том случае, когда вместо модуля 7 используется любое другое натуральное число M, отличное от единицы. В этом случае, вместо таблицы из семи столбцов придется рассматривать таблицу, содержащую M столбцов.

9.5. Число 137 возвели в сотую степень. Какова последняя цифра десятичной записи результата?

Обсуждение. Прежде всего заметим, что последняя цифра натурального числа есть остаток от деления этого числа на 10. Поэтому вместо арифметики сравнений по модулю 7 воспользуемся арифметикой сравнений по модулю 10. Согласно выводу 4 нам достаточно найти остаток от деления на 10 числа 7^{100}. Но в арифметике сравнений по модулю 10 всякое натуральное число и его последняя цифра находятся в одном классе, поэтому при возведении 7 в степень нам достаточно следить лишь за последней цифрой степени:

$7^1 \equiv 7$, $7^2 \equiv 9$, $7^3 \equiv 7^2 \times 7 \equiv 9 \times 7 \equiv 3$, аналогично $7^4 \equiv 1$, $7^5 \equiv 7$, и дальше вся последовательность 7, 9, 3, 1 будет периодически повторяться (все сравнения здесь даны по модулю 10). Отсюда видно, что на 4-м, 8-м, 12-м, 16-м и т. д., вообще на любом месте, кратном 4, в этой последовательности стоит 1. Значит, и на сотом месте стоит 1, т. е. 137^{100} оканчивается цифрой 1.

9.6. Не пользуясь вечным календарем, определите, каким днем недели будет 1 января 2000 года.

9.7. Какой цифрой оканчивается десятичная запись числа 333^{333}?

9.8. Число 7 возвели в степень 7^7. Какова последняя цифра результата? От полученного числа отняли 4^{444}. Какова последняя цифра этого результата?

9.9. Найдите остаток от деления числа 2^{1000} на 7.

9.10. Сколькими нулями оканчивается десятичная запись числа $9^{999}+1$?

9.11. Докажите, что $776^{776}+777^{777}+778^{778}$ не делится на 3.

Тема 10. ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

При построениях мы пользуемся многими инструментами: ц и р к у л е м, л и н е й к о й (с параллельными краями, ее называют двусторонней и односторонней, которая позволяет вычерчивать прямые, но не позволяет строить параллельные прямые), у г о л ь н и к о м. Нередко считают, что древние греки производили геометрические построения только с использованием циркуля и линейки. Это неверно, греческие математики пользовались и многими другими инструментами, правда, построения с помощью циркуля и линейки считались более изящными и ценились выше, чем построения другими инструментами. Геометры часто накладывали ограничения на инструменты. Так родилась теория построений циркулем с фиксированным раствором. В XIX в. французский математик Жан Понселе высказал основные идеи доказательства, проведенного впоследствии швейцарским геометром Якобом Штейнером, того, что все построения, осуществимые с помощью циркуля и линейки, осуществимы и с помощью циркуля с фиксированным раствором и линейки.

Таким образом, вопрос геометрических построений с использованием тех или иных инструментов совсем не прост. Мы не сможем изучать теорию этого вопроса. Нам будет интересно попробовать свои силы при решении конкретных з а д а ч.

10.1. В треугольнике проведена средняя линия. Найдите середину основания этого треугольника, пользуясь только односторонней линейкой (без делений).

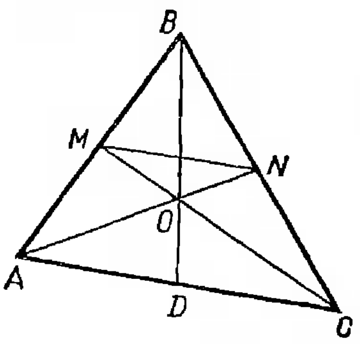


Рис. 40

О б с у ж д е н и е.

Мы располагаем только односторонней линейкой, а значит, можем только проводить прямые через две точки. M и N — середины сторон AB и BC, а это значит, что отрезки AN и CM — медианы (рис. 40). Проведя их, получаем точку их пересечения — O. А что из себя представляет отрезок BD? Это тоже медиана, так как медианы треугольника пересекаются в одной точке. D — искомая точка.

10.2. С помощью циркуля и линейки разделите угол величиной 54° на три равные части.

10.3. Даны концы отрезка AB. Пользуясь только циркулем, постройте отрезок, длина которого вдвое больше длины данного.

10.4. Пользуясь только циркулем, постройте три точки, лежащие на одной прямой.

10.5. Пользуясь только циркулем, постройте точку, симметричную точке A относительно прямой, проходящей через две данные точки.

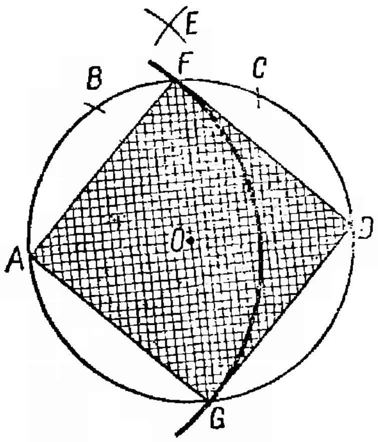


Рис. 41

10.6. Постройте на данном отрезке AB как на основании равносторонний треугольник, если размах циркуля постоянный и меньше, чем $\frac{1}{2}AB$ (линейкой можно пользоваться).

10.7. Решите задачу 10.6, если размах циркуля больше AB.

Указание. Постройте угол в 60° с вершиной A и стороной AB.

Рассмотрим теперь несколько более трудных задач, их интересную историю.

Одна из них носит название «задачи Наполеона». По преданию, Наполеон Бонапарт предложил ее автору трактата «Геометрия циркуля» итальянскому геометру Лоренцо Маскерони. Известно, что Наполеон был большим любителем математики, особенно геометрии, и с уважением относился к ведущим французским математикам того времени.

10.8. Задача Наполеона. Пользуясь только циркулем, разделите окружность с заданным центром на четыре равные дуги.

Обсуждение. На рисунке 41 изображено изящное решение задачи Наполеона, предложенное Маскерони. Для отыскания вершин вписанного квадрата требуется провести 6 дуг. С центром в произвольной точке окружности A и радиусом, равным радиусу окружности, отметим на окружности точку B. Тем же радиусом из точки B отметим точку C и из точки C отметим точку D. С центром в точках A и D проведем две дуги радиуса AC, пересекающиеся в точке E. С центром в точке A проведем дугу радиусом OE, пересекающую данную окружность в точках F и G. Точки A, F, D и G служат вершинами квадрата, вписанного в исходную окружность.

(Проведите самостоятельно необходимое доказательство.)

10.9. Даны две смежные вершины квадрата. Требуется построить две другие вершины.

10.10. Даны две вершины квадрата, расположенные на концах одной диагонали. Найдите две другие вершины квадрата.

Обсуждение. Решение этой задачи, изображенное на

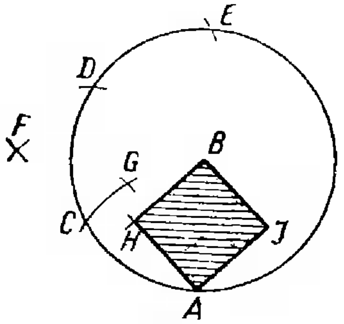


Рис. 42

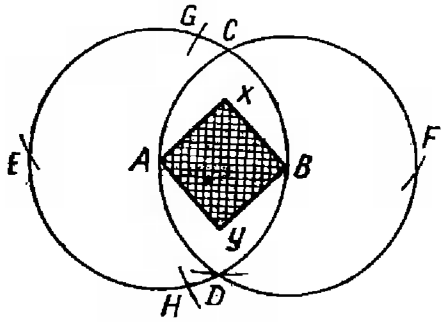


Рис. 43

рисунке 42, сводится к проведению 9 дуг. Пусть A и B — заданные вершины квадрата, расположенные на концах диагонали. С центром в точке B проведем окружность радиусом AB. Тем же радиусом из точки A отметим точку C, из C — точку D, из D — точку E с центрами соответственно в точках A и E и радиусом CE проведем две дуги, пересекающиеся в точке F. С центром в точке E и радиусом BF проведем дугу, пересекающуюся с предыдущей дугой в точке G. С центрами в точках A и B и радиусом BG проведем две дуги, пересекающиеся в точках H и I. Точки A, H, B и I — вершины искомого квадрата.

Другое, более изящное решение той же задачи требует проведения лишь 6 дуг. (Первое решение этой задачи (рис. 43) сводится к проведению 9 дуг.) Пусть A и B — заданные вершины квадрата. Радиусом AB проведем две окружности: одну с центром в вершине A, другую с центром в вершине B. С центром в точке C и радиусом CD проведем дугу EDF. С центром в точке F и радиусом AF проведем дугу GAH. Приняв точки E, F за центры окружностей, проведем две дуги радиусом EG, пересекающиеся в точках X и Y. Нетрудно доказать, что A, X, B, Y — вершины искомого квадрата (рис. 43).

Решив «задачу Наполеона», мы познакомились с возможностью построения правильного четырехугольника, вписанного в окружность, или деления окружности на четыре равные дуги. Однако далеко не любое геометрическое построение можно выполнить, пользуясь циркулем и линейкой. Существуют три классические задачи, которые неразрешимы с помощью циркуля и линейки:

1. Трисекция угла (разделить угол на три равных угла).

2. Удвоение куба (построить сторону куба, объем которого вдвое больше куба, сторона которого задана).

3. Квадратура круга (построить квадрат, имеющий площадь, равную площади данного круга).

Все эти задачи тщетно решались веками многими математиками, только в XIX в. была доказана невозможность этих построений. Это было достигнуто сведением этих задач к оперированию с алгебраическими понятиями.

Мы остановимся несколько подробнее на возможности построения с помощью циркуля и линейки правильного n-угольника. Еще в древности было известно, что в случае $n = 3$, 4, 5, 6 решение возможно (решите самостоятельно эти задачи, заметьте, что в случае $n = 4$ мы получили решение только с помощью циркуля).

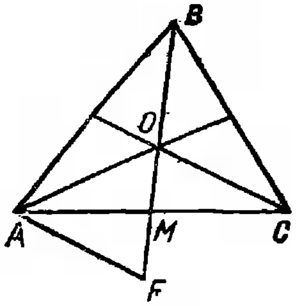


Рис. 44

А вот как быть, если $n = 7$?

В возрасте 17 лет Гаусс исследовал возможность построения правильного p-угольника, где p — простое число. В то время были известны построения только для $p = 3$ и $p = 5$. Гаусс установил, что построения возможны в том и только в том случае, если p есть простое число, имеющее вид: $p = 2^{2^n} + 1$ ($n \in N$).

Первые такие числа есть 3, 5, 17, 257, 65537... Эти числа называют числами Ферма. Так, в частности, было доказано, что с помощью циркуля и линейки нельзя построить правильный семиугольник.

Решим некоторые задачи на построения:

10.11. Постройте треугольник по трем медианам.

Обсуждение. Допустим, что задача уже решена и $\triangle ABC$ — искомый треугольник. Продолжим медиану BM на расстояние $MF = OM$ (рис. 44). Далее можно использовать пропорциональность сторон треугольника AOF медианам треугольника ABC (медианы в точке пересечения делятся в отношении 1 : 2).

10.12. Постройте окружность, равноудаленную от четырех данных точек A, B, C, D. Найдите все решения.

10.13. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам и углу между сторонами AB и CD.

10.14. Постройте треугольник, середины сторон которого находились бы в данных точках.

10.15. На местности отмечены два направления (непараллельные), на которых находятся пункты C и D. Точка пересечения этих направлений недоступна. Из этой точки опустить перпендикуляр на прямую CD.

Тема 11. ГРАФИКИ ДВИЖЕНИЯ

11.1. «Из Ливерпульской гавани». Задача эта навеяна вот какими стихами Р. Киплинга (в вольном переводе С. Я. Маршака):

Из Ливерпульской гавани
Всегда по четвергам
Суда уходят в плаванье
К далеким берегам.
Плывут они в Бразилию,
Бразилию,
Бразилию,.
И я хочу в Бразилию,
К далеким берегам.

Итак, из Ливерпульской гавани всегда по четвергам суда уходят в плаванье к далеким берегам. Плывут они в Бразилию..., в город Рио-де-Жанейро. Ровно за 14 суток судно покрывает весь путь — 9800 км (по 700 км в сутки) и прибывает в Рио-де-Жанейро в четверг в 12 ч дня. После стоянки (она длится 4 суток) судно идет обратным курсом, и через 14 суток, в понедельник, в полдень, оно прибывает в Ливерпуль. Еще через 3 суток оно снова уходит в Бразилию. Учитывая, что суда отплывают из Ливерпуля каждый четверг, ответьте на следующие вопросы:

За время пути судна от Ливерпуля до Рио-де-Жанейро сколько оно встретит в открытом океане судов, идущих обратным рейсом?

В какие дни недели произойдут встречи?

На каком расстоянии от Ливерпуля?

Обсуждение. На примере решения этой задачи познакомимся с одним способом решения широкого круга задач, включающего, в частности, так называемые «задачи на движение». Можно назвать этот способ графическим.

Изобразим на графике движение судов между двумя портами. Такой график будет похож на графики движения поездов, с которыми многие, вероятно, знакомы.

Начинаем строить график. Через точку O проводим вертикальную и горизонтальную прямые. На вертикальной (от точки O вверх) будем откладывать равные отрезки, каждый из которых изображает путь, пройденный судном за сутки и равный 700 км (рис. 45).

На горизонтальной прямой последовательно отмечены дни недели — эту ось называют осью времени; *Пн* обозначает понедельник, *Вт* — вторник и т. д.

Как будет выглядеть на графике движение судов? В полдень пятницы судно будет находиться в 700 км от Ливерпуля. Ставим точку A на пересечении вертикали, проходящей через «*Пт*», и горизонтали, идущей на высоте «700». К субботнему полудню судно

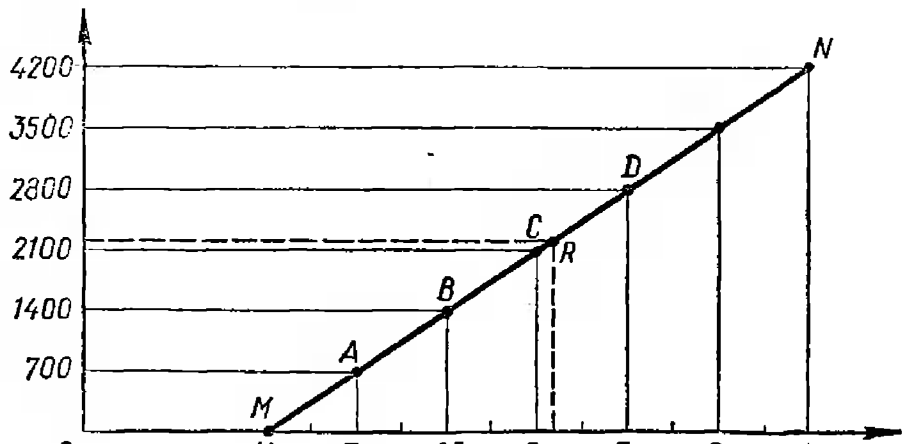


Рис. 45

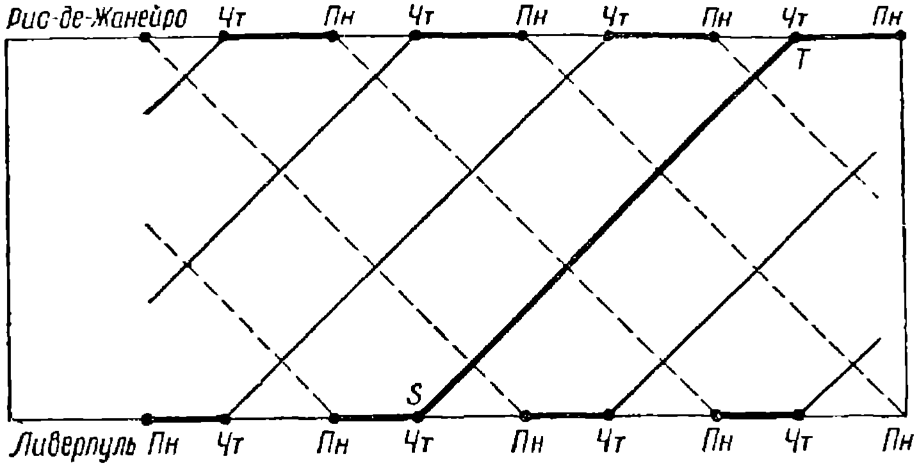


Рис. 46

пройдет уже 1400 км. Это изображается точкой B, находящейся на вертикали «Сб» и горизонтали «1400». Аналогично строятся точки C, D и т. д. Они показывают положение судна в последующие дни (в полдень). Судно движется равномерно, и все эти точки оказались на одной прямой MN. Вообще каждая точка этой прямой изображает положение судна в некоторый момент времени. Например, точка R показывает, что на расстоянии 2200 км судно будет в воскресенье после полудня.

Точно так же строятся графики движения судов, выходящих по понедельникам из Рио-де-Жанейро.

Изобразим теперь на одном графике движение всех судов. Каждая точка пересечения двух прямых на графике соответствует встрече двух судов (рис. 46).

Рассмотрим рейс из Ливерпуля в Рио-де-Жанейро. Он изображается отрезком ST. Этот отрезок 4 раза встречается с отрезками, изображающими движение встречных судов. Значит, ответ на первый вопрос задачи — 4 судна.

Далее, из графика видно, что до первой встречи пройдет столько же времени, сколько понадобится встречному судну, чтобы проплыть от места встречи до Ливерпуля. Отсюда следует: первая встреча произойдет в полдень в субботу, вторая — в полночь со вторника на среду. Ответы на остальные вопросы задачи см. в разделе «Методические указания и решения».

11.2. При тех же условиях, что и в задаче **11.1**, докажите, что если в некоторый момент встретились два судна, то в тот же момент в другой части океана встречаются еще два судна. На каком расстоянии друг от друга происходят две встречи?

11.3. Встречи в океане. Ответьте на первый вопрос задачи **11.1** («Из Ливерпульской гавани»), если известно, что суда отправляются не еженедельно, а ежедневно.

11.4 Стрелки обходят циферблат. Ровно в 12 ч дня минутная и часовая стрелки часов совпадают. Затем минутная стрелка вы-вается вперед и через некоторое время, обойдя часовую на целый круг, вновь накрывает ее. В какой момент это происходит?

11.5. В какие моменты между 12 ч дня и 12 ч ночи стрелки образуют: а) развернутый угол; б) прямой угол; в) угол в 20°?

11.6. Джентльмены на прогулке. Два джентльмена одновременно отправились на прогулку по аллее длиной 100 м. Мистер Смит за час проходит 1 км, мистер Джонс идет помедленнее — всего 600 м в час. Дойдя до конца аллеи, каждый поворачивает и с прежней скоростью идет обратно. Встречаясь, они каждый раз раскланиваются. Сколько раз они раскланиваются на протяжении первых 25 мин прогулки? Сколько времени из этих 25 мин они шли в одном направлении?

11.7. Задача Исаака Ньютона. Два почтальона A и B, которых разделяет расстояние в 59 миль, выезжают утром навстречу друг другу: A делает за 2 ч 7 миль, а B — за 3 ч 8 миль; при этом B отправляется в путь часом позже A. Требуется найти, сколько миль проедет A до встречи с B.

Тема 12. МАШИНА ПОСТА

Введение

Кто не знает в наше время, что такое ЭВМ? Умные машины складывают, вычитают, умножают и делят в тысячи, в миллионы раз быстрее человека. Электронные вычислительные машины нужны и ученым, и инженерам, и рабочим — без них уже нельзя представить нашей жизни. Чем только не заняты ЭВМ! Они решают сложнейшие системы уравнений, описывающие движение планет и спутников, управляют производством, переводят с одного языка на другой, сочиняют стихи и музыку и даже играют друг с другом в шахматы. А задумывались ли вы, что ЭВМ — это и ваша будущая работа? Не кому-нибудь, а вам, нынешним школьникам, предстоит работать на этих машинах, составлять для них программы.

Научиться программировать не просто, и этим мы будем сегодня заниматься. Мы будем составлять программы не для какой-нибудь реальной вычислительной машины, а для некоторой воображаемой «абстрактной» конструкции—машины Поста. Она была придумана около пятидесяти лет назад американским математиком Эмилем Л. Постом с целью изучения и уточнения одного из центральных понятий современной математики—понятия «алгоритм». В том же 1936 г. была «изобретена» еще одна подобная абстрактная машина — машина Тьюринга. Когда несколько лет спустя появились на свет ЭВМ, оказалось, что основные принципиальные черты этих машин были предвосхищены в конструкциях Тьюринга и Поста. Поэтому пусть вас не смущает, что машина, на которой вы будете обучаться программированию, воображаемая, реально не существующая, более простая, чем «настоящие» ЭВМ, — принципы программирования одни и те же.

Устройство машины Поста

Машина Поста состоит из очень длинной ленты (математики говорят — из «бесконечной» ленты), разделенной на секции одинакового размера, и каретки (рис. 47). В каждой секции ленты либо ничего не записано — секция пуста, либо записана метка (галочка) «V» — секция «помечена».

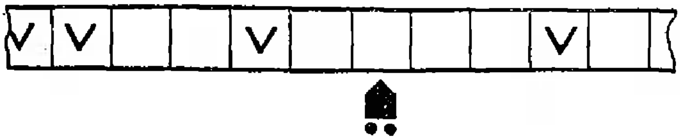


Рис. 47

Каретка стоит против одной из секций ленты и, как мы будем говорить, «обозревает» ее. За единицу времени — 1 шаг — каретка может совершить одно из следующих действий: сдвинуться влево на одну секцию, сдвинуться вправо на одну секцию, стереть метку в обозреваемой секции, если, конечно, там была метка, поставить метку в обозреваемой секции, если эта секция была пуста.

Работа машины Поста

Машина Поста работает по составленной нами инструкции, называемой п р о г р а м м о й. Программа записывается на специальной карточке, вкладываемой в каретку, и состоит из отдельных «команд», а команда в свою очередь состоит из *номера команды*, *приказа* и *отсылки*. Приказы бывают такие:

1. Приказ «V» — читается «Поставь галочку». По этому приказу каретка ставит метку — галочку в обозреваемой секции.

2. Приказ «С» — читается «Сотри галочку». По этому приказу каретка стирает галочку в обозреваемой секции.

3. Приказ «→» — читается «Сдвинься вправо». По этому приказу каретка сдвигается на одну секцию вправо.

4. Приказ «←» — читается «Сдвинься влево». По этому приказу каретка сдвигается на одну секцию влево.

5. Приказ «СТОП». По этому приказу каретка останавливается у обозреваемой секции и машина прекращает работу.

6. Приказ «?» — читается «Смотри!». Этот приказ особый, и о нем речь пойдет чуть позже.

Третья часть команды — отсылка — представляет собой номер той команды, которая должна быть выполнена сразу вслед за данной командой. Исключение составляет команда остановки — в ней отсылка отсутствует.

Например, команда

17) → 14

будет «прочитана» машиной так: «Команда № 17: Сдвинься вправо и переходи к выполнению команды № 14». В программе мы будем

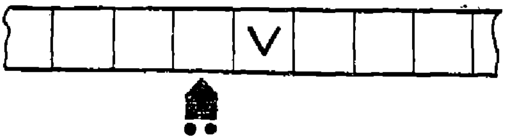


Рис. 48

отделять команды друг от друга знаком ■(впрочем, это делать не обязательно, если команды выписываются в столбик).

Для того чтобы определить, как будет работать машина по вашей программе, надо еще знать «начальное состояние» машины: ч т о перед началом работы было записано на ленте, где, против какой секции стояла каретка.

Первые программы

12.1. Пусть начальное состояние машины таково, как показано на рисунке 48. Как выполнит машина следующую программу:

«1) ∨2 ■ 2) → 3 ■ 3) С 4 ■ 4) СТОП»?

Р е ш е н и е. По первой команде каретка поставит метку в обозреваемой секции, затем по второй команде сдвинется вправо, затем сотрет метку и, наконец, остановится по команде «СТОП».

12.2. Пусть в начале все секции пусты — лента «чистая». Как будет выполняться программа:

«1) ∨2 ■ 2) → 3 ■ 3) → 1»?

О б с у ж д е н и е. По этой программе каретка поставит метку в секции, против которой она расположена вначале, сдвинется на две секции вправо (команды 2 и 3), поставит метку — ведь команда 3 снова отсылает к команде 1, снова сдвинется на две секции вправо, опять поставит метку и т. д. до бесконечности. При этом лента приобретет вид, показанный на рисунке 49.

Рис. 49

12.3. Составьте программу, в результате выполнения которой машина примет вид, показанный на рисунке 50. Перед началом работы все секции были пусты, а каретка располагалась против секции, отмеченной звездочкой.

О б с у ж д е н и е. Одно из возможных решений таково:

1) ← 2 ■ 2) ∨3 ■ 3) → 4 ■ 4) → 5 ■ 5) → 6 ■ 6) ∨7 ■
7) ← 8 ■ 8) СТОП.

12.4. Начальное состояние машины показано на рисунке 51. Составьте программу, в результате выполнения которой все метки оказались бы стертыми.

О б с у ж д е н и е. Вот одно из возможных решений:

1) С 2 ■ 2) → 3 ■
3) С 4 ■ 4) → 5 ■
5) С 6 ■ 6) → 7 ■
7) С 8 ■ 8) → 9 ■
9) С 10 ■ 10) → 11 ■
11) С 12 ■ 12) СТОП.

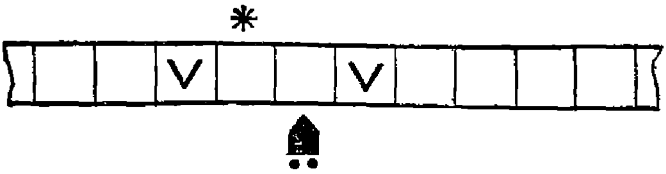


Рис. 50

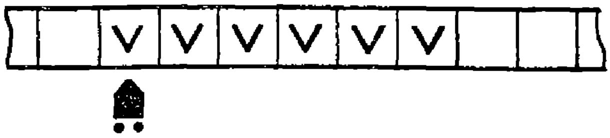


Рис. 51

А что, если воспользоваться такой программой: «1) С 2■ 2) → 1»? Эта программа намного короче и, как кажется на первый взгляд, приводит к той же цели: каретка стирает метку, сдвигается вправо на одну секцию, стирает вторую метку и так далее, пока не сотрет все метки. Но посмотрим, что произойдет дальше.

После того как самая правая метка будет стерта, каретка по второй команде сдвинется вправо и перейдет к выполнению команды № 1, т. е. к стиранию очередной метки. Однако эта команда не может быть выполнена, ведь секция пуста, стирать нечего. И машина выходит из строя, наступает так называемая «безрезультатная остановка». В этом случае мы не можем считать, что решили задачу. В каком же случае можно считать, что машина Поста решила задачу?

Результативная остановка

Как мы видели в предыдущем примере, машина Поста выходит из строя, т. е. наступает безрезультатная остановка, если программа требует от машины выполнения действий, которые машина выполнить не может, например стереть метку в пустой секции. То же самое произойдет, если программа предписывает машине пометить секцию, в которой уже есть метка. Может возникнуть и такая ситуация: машина справилась с заданием, но не остановилась, а продолжает работать. Так, например, если в приведенной выше программе из двенадцати команд заменить последнюю команду такими двумя:

«12) → 13 ■ 13) ← 12»,

то каретка, стерев самую правую метку, не остановится, а будет продолжать перемещаться вправо-влево, пока машина не выйдет из строя. Такое окончание работы нас тоже устроить не может.

Поэтому договоримся, что программа решает поставленную задачу, если каретка, совершив конечное число шагов и преобразовав ленту требуемым образом, выполнит затем команду «СТОП». Такая остановка называется *результативной*. Составив какую-либо программу, вы должны каждый раз проверить, приводит ли ваша программа к результативной остановке.

12.5. Как изменится решение задачи 12.4, если на ленте вначале имеются не 6, а 100 меток, расположенных подряд?

О б с у ж д е н и е. Программу, составленную для решения задачи 12.4, нетрудно изменить таким образом, чтобы она решала задачу 12.5, но при этом число команд придется увеличить с 12 до 200. Проще стереть метки «вручную», чем составить такую программу.

Но оказывается, что нет необходимости составлять столь длинные программы, если удается воспользоваться командой условного перехода, рассмотрением которой мы сейчас и займемся.

Команда условного перехода имеет следующий вид:

N_1)? П N_2 ИНАЧЕ N_3.

Здесь N_1 обозначает номер команды, N_2, N_3 — номера команд-отсылки. Читается эта команда так: «Команда № N_1. Смотри: если пусто, N_2, иначе N_3». По этой команде каретка стоит на месте и «обозревает» секцию. Если секция пуста, то машина переходит к выполнению команды с номером N_2, а в противном случае, если эта секция помечена, к команде с номером N_3.

Например, команда

«4)? П 11 ИНАЧЕ 3» будет прочитана машиной так: «Команда № 4. Посмотри, что находится в обозреваемой секции. Если она пуста, переходи к выполнению команды № 11. Если она помечена, переходи к выполнению команды № 3». Мы видим, что в команде условного перехода не одна, а две отсылки и машина выбирает одну из них в зависимости от того, выполнено ли условие «Обозреваемая секция пуста» или нет. Поэтому она и называется к о м а н д о й у с л о в н о г о п е р е х о д а.

12.6. Решите задачи 12.4 и 12.5, пользуясь командами условного перехода.

О б с у ж д е н и е. Решает обе задачи следующая программа из четырех команд:

«1) ? П 4 ИНАЧЕ 2 ■ 2) С 3 ■ 3) → 1 ■ 4) СТОП».

В самом деле, по команде № 1 каретка «обнаружит» метку в обозреваемой секции и, следовательно, должна будет перейти к выполнению команды № 2 — стиранию. Затем выполняется команда № 3 «Сдвиг вправо» и снова команда № 1, все начинается сначала. Так будет повторяться до тех пор, пока каретка, выполняя команду № 1, не обнаружит пустую секцию. В этом случае отсылка «4» приведет к выполнению команды № 4 «СТОП», т. е. к результативной остановке.

Преимущества новой программы перед прежними очевидны: краткость и универсальность. Наша новая программа решает задачу стирания подряд идущих меток вне зависимости от того, сколько их, шесть, сто или тысяча, если только каретка вначале стоит у самой левой метки.

Если одна или несколько рядом стоящих меток расположены между двумя пустыми секциями, то говорят, что они образуют м а с с и в, а число этих меток называется д л и н о й м а с с и в а. На ленте, показанной на рисунке 52, расположены 3 массива: длина левого массива — 2, длина среднего — 3, правого — 1.

Рис. 52

12.7. На ленте расположены два массива, разделенные одной (пустой) секцией. Каретка находится между массивами, т. е. обозревает эту пустую секцию. Составьте программу «объединения» массивов — в результате ее выполнения на ленте должен остаться один массив, длина которого равна сумме длин данных массивов.

О б с у ж д е н и е. Можно «предложить» каретке поставить метку в обозреваемой секции, при этом два данных массива сольются в один, но его длина будет на 1 больше, чем нужно. Задача будет решена, если каретка отыщет крайнюю слева (или крайнюю справа) метку и сотрет ее, после чего выполнит команду результативной остановки «СТОП». Написать требуемую программу нетрудно, если воспользоваться командой условного перехода:

«1) V 2 ■ 2) ? П 4 ИНАЧЕ 3 ■ 3) → 2 ■ 4) ← 5 ■ 5) С 6 ■
6) СТОП».

Переходим теперь к вопросу об изображении на ленте чисел. Речь здесь и далее пойдет о целых неотрицательных числах: 0, 1, 2, ..., никакие другие числа рассматриваться не будут. Договоримся число n изображать на ленте массивом длины $n + 1$. Так, например, число 0 записывается посредством массива длины 1, т. е. при помощи одной «изолированной» метки, ограниченной слева и справа пустыми секциями, число 1 — посредством массива длины 2, число 100 — посредством массива длины 101 и т. д. Договорившись об изображении чисел на машине Поста, можно приступить, наконец, и к арифметическим действиям. Начнем с самого простого.

Прибавление единицы

Эту задачу — задачу прибавления единицы — мы будем понимать так. На ленте содержится запись числа n, т. е. массив длины $n + 1$. Остальные секции ленты пусты. Требуется составить программу, выполнив которую, машина остановится по команде «СТОП», а на ленте окажется записанным число $n + 1$, т. е. массив длины $n + 2$. Не будем накладывать никаких условий на расположение нового массива по отношению к прежнему, а также на конечное положение каретки. Рассмотрим решение задачи прибавления единицы при различных начальных состояниях машины.

12.8. Составьте программу прибавления единицы, если вначале каретка расположена у самой левой метки массива.

Обсуждение. В этом случае программа очень проста:

«1) ← 2 ■ 2) $\vee$ 3 ■ 3) СТОП».

12.9. Составьте программу прибавления единицы для случая, когда каретка вначале расположена у одной из помеченных секций, но не обязательно у крайней (программа должна приводить к решению независимо от того, в каком месте массива расположена каретка вначале).

Обсуждение. Сначала каретка должна найти одну из пустых секций — левую или правую, а затем поставить там метку:

«1) ? П 3 ИНАЧЕ 2 ■ 2) → 1 ■ 3) $\vee$ 4 ■ 4) СТОП».

Нельзя придумать более короткой программы, решающей задачу **12.9**: команды сдвига, помечивания и остановки необходимы, без команды условного перехода тоже не обойдешься, «слепая» каретка пустую секцию не отыщет. Вместе с тем возможны и другие решения, например такое:

«1) ← 2 ■ 2) ? П 3 ИНАЧЕ 1 ■ 3) $\vee$ 4 ■ 4) СТОП».

12.10. Составьте программу, приводящую к прибавлению единицы, если заранее известно, что вначале каретка находится справа от массива, но неизвестно, на каком расстоянии.

Обсуждение. Каретка должна сначала найти массив: «1) ? П 2 ИНАЧЕ 3 ■ 2) ← 1 ■ 3) → 4 ■ 4) $\vee$ 5 ■ 5) СТОП». Докажем, что в этой задаче нельзя обойтись менее чем пятью командами. Для этого воспользуемся понятием «блок». Блоком в программировании называют одну команду или несколько связанных между собой команд. Так вот: «блок обнаружения массива», без которого в этой программе не обойтись, состоит не менее чем из двух команд — «смотри» и «двигайся», в нашем решении это команды № 1 и № 2. Обнаружив массив, нельзя сразу ставить метку, надо сначала сойти с массива. Если в «блоке обнаружения массива» всего две команды, как в нашем решении, то командой движения из этого блока пользоваться для ухода с массива нельзя — это команда вместе с командой «СМОТРИ» из того же блока снова приведет нас на массив. Значит, для ухода с массива потребуется еще одна команда сдвига — в нашем решении команда № 3, итого вместе с командами помечивания и остановки имеем 5 команд. Если же в «блоке обнаружения массива» более двух команд, то предыдущего рассуждения не понадобится — вместе с командами помечивания и остановки получаем не менее пяти команд. Следует еще уточнить, что мы понимаем под «блоком обнаружения массива». Договоримся включать в этот блок те и только те команды, которые будет выполнять машина до того, как она впервые обнаружит массив.

12.11. Составьте программу прибавления единицы, которая приводила бы к решению независимо от того, стоит вначале каретка у массива или где-то справа от него. (Самая короткая программа содержит 6 команд.)

Обсуждение. Легко видеть, что программа, решающая эту задачу, является одновременно решением задач **12.8**, **12.9** и **12.10**. Мы получим эту программу, если слегка усложним предыдущую:

«1) ? П 2 ИНАЧЕ 3 ■ 2) ← 1 ■ 3) ? П 4 ИНАЧЕ 5 ■ 4) $\vee$ 6 ■ ■ 5) → 3 ■ 6) СТОП».

Возникает естественный вопрос: можно ли составить программу прибавления единицы, которая приводила бы к решению в любом случае — стоит ли каретка у массива, слева от него или справа. Оказывается, что и эта задача имеет решение, но довольно сложное— самая короткая из известных программ содержит 23 команды. Поэтому мы не будем ее здесь обсуждать и перейдем к действию сложения.

Сложение

Сложить два числа не совсем то же самое, что «объединить» два массива (см. задачу 12.7), так как числа m и n изображаются массивами длины $m + 1$ и $n + 1$, а их сумма $m + n$ массивом длины $m + n + 1$, т. е. на единицу короче «объединения» массивов.

12 12. Сложите два числа, если изображающие их массивы разделены одной пустой секцией, а каретка вначале обозревает эту секцию.

Обсуждение. Эта задача мало отличается от задачи «объединения» массивов (задача 12.7):

«1) $\vee$2 ■ 2) ? П 4 ИНАЧЕ 3 ■ 3) ← 2 ■ 4) → 5 ■ 5) С 6 ■ 6) → 7 ■ 7) С 8 ■ 8) СТОП».

Здесь мы разнообразия ради «ищем» левый конец массива, а не правый, как в решении задачи 12.7.

12.13. Составьте программу сложения двух чисел в случае, когда изображающие их массивы расположены на произвольном расстоянии друг от друга, а каретка стоит где-то между ними. (Другими словами, надо составить программу, которая приводила бы к решению независимо от того, находятся ли массивы на расстоянии 1 друг от друга, как в предыдущем случае, или на большем расстоянии.)

Обсуждение. Вот один из возможных подходов к решению: пусть каретка «разгуливает» себе между массивами — подойдя к правому массиву, стирает метку, потом, подойдя к левому, «пририсовывает» метку, опять отправляется к правому массиву, стирает

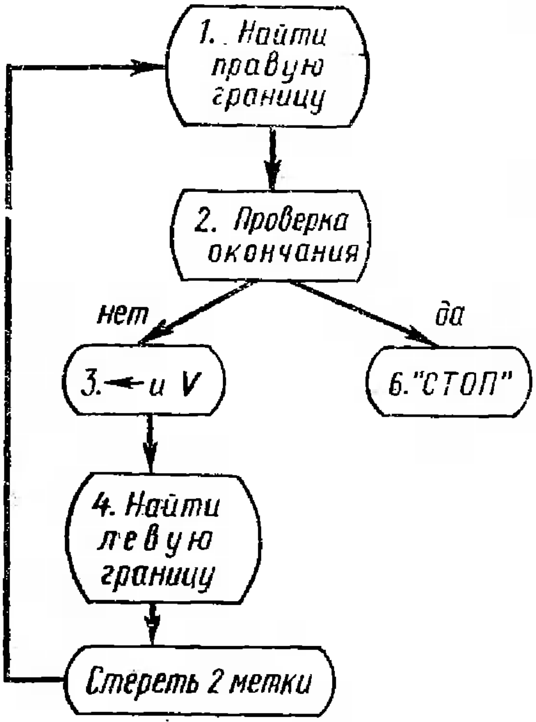


Рис. 53

метку и т. д. Но в этой программе действий таится вот какая опасность: стерев последнюю метку правого массива, каретка отправится налево, «нарисует» еще одну метку у левого массива (в этот момент левый массив станет «объединением» исходных массивов), отправится к правому массиву и... «уйдет в бесконечность», так как правого массива уже нет. Как же быть с нашим требованием, что всякое решение должно приводить к результативной остановке? Надо еще предусмотреть, чтобы, стерев метку у правого массива, каретка проверяла бы: «Не последняя ли?», есть ли еще метки у правого массива. Такую проверку принято называть «проверка окончания». Если меток больше нет, каретка выполняет команду «СТОП», задача решена:

«1) → 2 ■ 2) ? П 1 ИНАЧЕ 3 ■ 3) С 4 ■ 4) → 5 ■
5) ? П 10 ИНАЧЕ 6 ■ 6) ← 7 ■ 7) ? П 6 ИНАЧЕ 8 ■
8) → 9 ■ 9) $\vee$ 1 ■ 10) СТОП».

12.14. Напишите программу сложения нескольких, двух или более, чисел, если изображающие их массивы находятся на расстоянии 1 друг от друга, а каретка вначале стоит у одной из меток самого левого массива. (Эта программа должна приводить к решению независимо от того, сколько чисел складывается.)

Обсуждение. Возможен такой путь решения: сольем воедино два левых массива, поставив метку между ними, затем сотрем две левые метки получившегося массива. Получится массив, изображающий сумму «левых» двух слагаемых, а третье слагаемое, если оно есть, находится на расстоянии 1 от этого массива. Поэтому всю процедуру можно повторить и так делать до тех пор, пока все слагаемые не «сольются» в сумму. Здесь, разумеется, тоже надо делать «проверку окончания», чтобы уловить момент, когда все слагаемые будут исчерпаны.

При составлении программы удобно бывает разбить ее на отдельные части — блоки, например, так:

1) Найти правую границу левого массива.
2) Сдвинуться вправо и сделать «проверку окончания».
3) Сдвинуться влево и поставить метку.
4) Найти левую границу массива.

5) Стереть две метки.

6) Выполнить команду «СТОП».

Последняя команда выполняется в том случае, если «проверка окончания» показала, что все массивы уже «слились» в один массив, изображающий сумму.

Связь между отдельными блоками изображают в виде геометрической схемы (графа), называемой «блок-схемой». В нашем случае блок-схема выглядит так, как показано на рисунке 53.

Имея блок-схему, составить программу не представляет большого труда:

«1) → 2 ■ 2) ? П 3 ИНАЧЕ 1 ■ 3) → 4 ■ 4) ? П 5 ИНАЧЕ 6 ■ 5) СТОП ■ 6) ← 7 ■ 7) V 8 ■ 8) ← 9 ■ 9) ? П 10 ИНАЧЕ 8 ■ 10) → 11 ■ 11) С 12 ■ 12) → 13 ■ 13) С 1».

В этой программе команды 1 и 2 относятся к первому блоку, команды 3 и 4 — ко второму, команды 6 и 7 — к третьему, команды 8 и 9 — к четвертому, команды 10, 11, 12 и 13 — к пятому и, наконец, команда 5 составляет шестой блок.

Вычитание

Рассмотрим теперь действие вычитания. Пусть на ленте содержатся два массива: массив длиной $m + 1$, изображающий уменьшаемое m, и массив длиной $n + 1$, изображающий вычитаемое — число n. Предполагается, что $m \geqslant n$. Требуется составить программу, после выполнения которой на ленте останется только один массив длиной $m - n + 1$, изображающий разность данных чисел $m - n$.

12.15. Составьте программу вычитания в случае, когда массив-вычитаемое расположен справа от массива-уменьшаемого, а каретка вначале располагается где-то между ними.

Обсуждение. Здесь можно идти тем же путем, что и в задаче 12.13, — каретка «разгуливает» между массивами, стирая попеременно слева и справа по одной метке. Стерев метку у правого массива, каретка совершает всякий раз «проверку окончания», чтобы не пропустить момента, когда правый массив будет исчерпан:

«1) ? П 2 ИНАЧЕ 3 ■ 2)→1 ■ 3) С 4 ■ 4) → 5 ■ 5) П 6 ИНАЧЕ 7 ■ 6) СТОП ■ 7) ← 8 ■ 8) ? П 7 ИНАЧЕ 9 ■ 9) С 1».

На машине Поста можно производить и другие арифметические действия над целыми неотрицательными числами: умножение и деление с остатком (за исключением, разумеется, деления на нуль), но соответствующие программы достаточно сложны, и мы их рассматривать не будем.

Для упрощения записи договоримся в дальнейшем не писать отсылку, если она совпадает с номером следующей команды. Так, например, вместо «7) С 8» будем писать просто «7) С».

Рассмотрим две вспомогательные задачи:

12.16. На ленте расположены два массива. У одной из меток первого массива стоит каретка. Составить программу, в результате выполнения которой первый массив будет стерт, а второй удлинится на единицу, если заранее известно,что второй массив расположен справа от первого.

Обсуждение. Выбираем такую последовательность действий: отыскиваем левый край первого массива; стираем первый массив; двигаемся по пустым секциям вправо, отыскиваем второй массив; удлиняем его на единицу. Получаем следующую программу:

«1) ← ■2) ? П 3 ИНАЧЕ 1 ■ 3) → ■4) ? П 6 ИНАЧЕ 5■
5) С 3 ■ 6) → ■ 7) ? П 6 ИНАЧЕ 8 ■ 8) ← ■
9) V ■ 10) СТОП».

12.17. Решите предыдущую задачу в случае, когда заранее неизвестно, с какой стороны находится второй массив — справа или слева и на каком расстоянии.

Обсуждение. Предыдущее решение здесь не годится: если второй массив левее первого, каретка не сможет его отыскать, так как команды 6 и 7 будут уводить каретку вправо, все более и более удаляя ее от второго массива. Наша программа должна быть такова, чтобы, руководствуясь ею, каретка смогла достичь второго массива, с какой бы стороны и на каком бы расстоянии он ни находился.

Поэтому план действий должен быть иным. Пусть каретка «разгуливает» вдоль первого массива, прибавляя попеременно слева и справа по одной метке (см. решения задач 12.13 и 12.15). При этом первый массив «раздувается» в обе стороны и рано или поздно приблизится ко второму массиву. Поэтому, поставив метку, каретка должна сделать еще один шаг и «посмотреть», пуста ли соседняя секция или там находится метка второго массива. Когда второй массив будет таким образом обнаружен, каретка сделает два шага назад, в направлении первого массива, и сотрет его. Программа, реализующая этот план, такова:

«1) → ■2) ? П 3 ИНАЧЕ 1■3) V ■4) → ■ 5) ? П 6 ИНАЧЕ 11■
6) ← ■ 7) ? П 8 ИНАЧЕ 6 ■8) V■9) ← ■10) ? П 1 ИНАЧЕ 15 ■
11) ← ■ 12) ← ■ 13) ? П 19 ИНАЧЕ 14 ■ 14) С 12 ■
15) → ■ 16) → ■ 17)? П 19 ИНАЧЕ 18 ■ 18) С 16 ■ 19) СТОП».

По командам 1 — 5 каретка совершает прогулку по массиву направо, по командам 6 — 10 — налево, по командам 11 — 14 стирает первый массив, если второй массив был обнаружен справа, а по командам 15 — 18 — если слева.

Теперь переходим к основной задаче этого пункта.

12.18. Составьте программу прибавления единицы, которая приводила бы к решению в любом случае — стоит ли вначале каретка слева от массива, изображающего данное число, справа от массива или на самом массиве.

Обсуждение. Если каретка расположена на некотором расстоянии от массива (отделена от него одной или несколькими пустыми секциями), то, пометив секцию, против которой стоит каретка, мы придем к предыдущей задаче в случае, когда первый массив состоит из единственной метки. Решение этой задачи нами уже найдено. Если же каретка стоит на массиве или рядом с ним (у одной из пустых секций, ограничивающих массив), то можно предложить каретке сначала «сойти с массива и отойти от него на шаг», а потом уже воспользоваться решением предыдущей задачи. Разумеется, программу, составленную выше, придется немного переделать — изменить нумерацию команд и их последовательность.

В результате получим следующую программу:

«1) ? П 3 ИНАЧЕ 2 ■ 2) → 1■ 3) → 4) ? П 5 ИНАЧЕ 1 ■
5) V ■ 6) → ■ 7) ? П 8 ИНАЧЕ 15 ■ 8) ← ■ 9) ? 10 ИНАЧЕ 8 ■
10) V ■ 11) ← ■ 12) ? П 13 ИНАЧЕ 19 ■ 13) → ■
14) ? П 5 ИНАЧЕ 13 ■ 15) ← ■ 16) ← ■17) ? П 23 ИНАЧЕ 18 ■
18) С 16 ■ 19) → ■ 20) → ■ 21)? П 23 ИНАЧЕ 22 ■
22) С 20 ■ 23) СТОП».

Команды 3—10 из предыдущей программы получили здесь номера 5—12, команды 1 и 2 превратились в команды 13 и 14, а команды 11—19 из предыдущей программы получили у нас новые номера 15—23. Соответственно изменились и номера отсылок.

Остается разобраться в назначении команд 1—4, которых нет в предыдущей программе. Они служат для приведения машины в такое состояние, в котором можно было бы воспользоваться предыдущим решением. Если вначале каретка стоит у массива или рядом с ним (у его левого или правого края), то эти команды уведут каретку от массива вправо на один шаг — между кареткой и массивом одна пустая секция. После выполнения команды 5 наша задача сведется к предыдущей (первый массив состоит из одной метки, а второй массив в этом случае находится слева через одну пустую секцию от первого). Если вначале каретка стоит слева от массива и отделена от него одной пустой секцией, то команды 1—5 приблизят ее на один шаг к массиву. После выполнения команды 5 машина Поста окажется в положении, которое по сути не отличается от положения машины в предыдущей задаче в момент, предшествующий обнаружению второго массива (в случае, когда он находится справа от первого). Значит, и здесь можно воспользоваться предыдущей программой. И при любом другом начальном состоянии машины команды 1—5 сводят нашу задачу к предыдущей.

Легко видеть, что положение машины Поста после выполнения команды № 5 совпадает с положением машины Поста в предыдущей задаче после выполнения команды № 3. Вот почему нам пришлось изменить последовательность команд — команды с 3-й по 10-ю из предыдущей задачи превратились в команды 5—12, а команды 1 и 2 — в команды 13 и 14.

В командах с 5-й по 23-ю отсутствуют отсылки к командам 1, 2, 3 и 4. Поэтому часть программы, состоящая из команд 5—23, является самостоятельной программой — то, что нумерация команд начинается не с 1, а с 5, не столь уж важно. Такую самостоятельную часть программы естественно называть «подпрограммой». В рассматриваемом случае подпрограмма, состоящая из команд 5—23, приводит к решению следующей задачи:

12.19. Составьте программу прибавления единицы в случае, когда каретка вначале стоит у пустой секции, слева от которой также находится пустая секция.

Построенная выше программа прибавления единицы состоит из 23 команд. До сих пор не найдено более короткой программы, решающей эту задачу, а с другой стороны, не доказано, что более короткой программы не существует.

Тема 13. ПЛОЩАДИ

Задачи на вычисление площадей являются чуть ли не источником возникновения самой геометрии. С понятием площади связаны такие имена, как Герон, Пифагор и др. Говоря о задачах на нахождение площадей и на применение площадей фигур для решения задач, прежде всего следует помнить о самом понятии площади и его свойствах. Однако при решении задач этим свойствам мало уделяется внимания. В курсе геометрии свойства площадей не доказываются.

Перечислим эти свойства.

1. *Каждая фигура имеет определенную площадь.*
2. *Площади равных фигур равны.*
3. *Если фигуру разбить на неперекрывающиеся части, то площадь фигуры равна сумме площадей этих частей.*

В этой теме мы не будем заниматься построением каких-либо теорий площадей, а лишь порешаем различные задачи на нахождение площадей. Наиболее распространены задачи на нахождение площадей многоугольников.

13.1. Через середину высоты равнобедренного треугольника проведены две прямые, соединяющие ее с вершинами основания (рис. 54). Какую часть площади треугольника составляет каждая из частей, на которые эти две прямые разрезают треугольник?

13.2. Дан треугольник ABC. Продолжим его сторону AB за вершину B так, что $BP = AB$, сторону AC — за вершину A

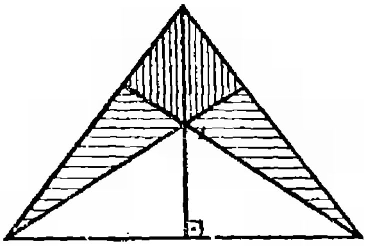


Рис. 54

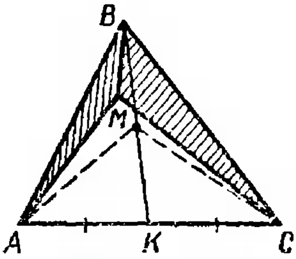


Рис. 55

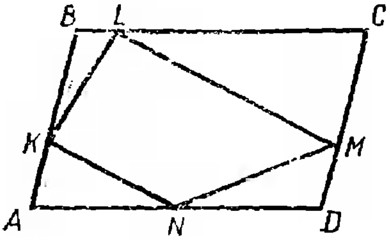


Рис. 56

так, что $AM = CA$, сторону BC — за вершину C так, что $KC = BC$. Во сколько раз площадь треугольника PKM больше площади треугольника ABC?

13.3. Внутри треугольника ABC лежит точка M. Докажите, что площади треугольников ABM и CBM равны тогда и только тогда, когда точка M находится на медиане BK (рис. 55).

Обсуждение. Если точка M находится на медиане, то $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle CBK}$, $S_{\triangle AMK} = S_{\triangle CMK}$ и поэтому $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$. В одну сторону утверждение задачи доказано. Осталось доказать обратное: если $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}$, то точка M лежит на медиане BK. Предположим, что M не лежит на BK. Тогда один из отрезков MA или MC пересекает BK (см. рис. 55).

Пусть это будет MC (если медиану пересекает MA, то рассуждение аналогично). N есть точка пересечения отрезков MC и BK. Тогда $S_{\triangle ABM} < S_{\triangle ABN}$, поскольку треугольник ABM лежит внутри треугольника ABN, и $S_{\triangle CBM} > S_{\triangle CBN}$, поскольку треугольник CBN лежит внутри треугольника CBM. Но $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle CBK}$: ведь точка N лежит на медиане.

Следовательно, $S_{\triangle ABM} < S_{\triangle CBM}$. А мы предположили, что

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle CBM}.$$

Получили противоречие. Задача полностью решена.

13.4. На каждой стороне параллелограмма взято по точке (рис. 56). Докажите, что если площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма, то одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

13.5. В данной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC = a$, $AD = b$, проведена диагональ AC (рис. 57). На какой высоте нужно пересечь трапецию прямой, параллельной основаниям, чтобы сумма площадей треугольников AKL и LMC была наименьшей (K, L и M — точки пересечения прямой с отрезками AB, AC и CD соответственно)?

13.6. Площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на длину отрезка перпендикуляра, проведенного через середину другой боковой стороны. Доказать.

Обсуждение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция; $AD \parallel$

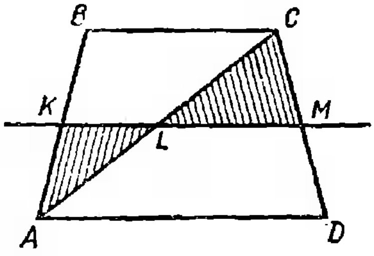


Рис. 57

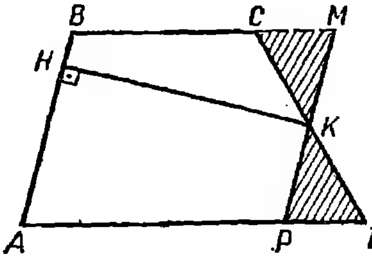


Рис. 58

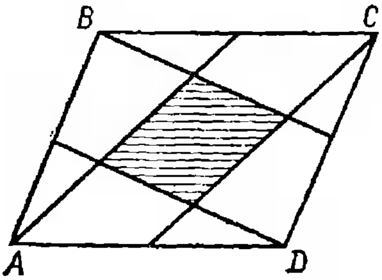


Рис. 59

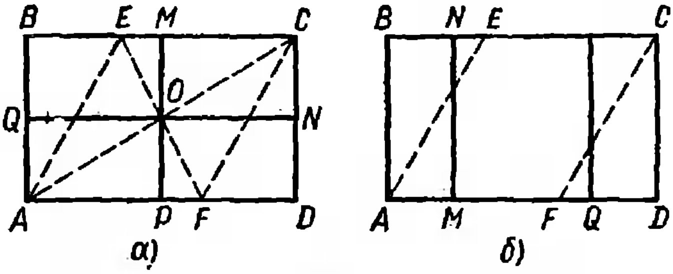


Рис. 60

|| BC, K — середина стороны CD, KH — перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую AB. Проведем через точку K прямую, параллельную прямой AB. Пусть M и P — точки ее пересечения с прямыми BC и AD (рис. 58).

Параллелограмм $ABMP$ равновелик данной трапеции, так как пятиугольник $ABCKP$ является для них общим, а треугольник CMK равен треугольнику KPD, т. е. трапеция и параллелограмм составлены из одинаковых частей. Поскольку площадь параллелограмма равна произведению его основания AB на высоту KH, утверждение доказано.

13.7. Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится ими на четыре параллелограмма. Два из них пересекаются диагональю AC. Докажите, что два других равновелики.

13.8. В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка: вершина B соединена с серединой стороны DC, вершина A — с серединой стороны BC, вершина D — с серединой стороны AB и вершина C — с серединой AD (рис. 59). Докажите, что четырехугольник, образуемый этими четырьмя отрезками, — параллелограмм и что его площадь в пять раз меньше площади параллелограмма $ABCD$.

13.9. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

13.10. Как из прямоугольника вырезать ромб наибольшей площади?

О б с у ж д е н и е. Наибольшую площадь имеет ромб, одна а диагоналей которого совпадает с диагональю прямоугольника, концы другой лежат на сторонах прямоугольника.

Докажем, что всякий другой ромб имеет меньшую площадь. Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник (см. рис. 60), AD и BC — его большие стороны, и пусть в прямоугольник помещен некоторый ромб. Через центр прямоугольника проведем прямые, параллельные диагоналям ромба, до пересечения со сторонами прямоугольника в точках M, N, P, Q. Получим новый ромб $MNPQ$, площадь которого не меньше площади исходного ромба (докажите это) и вершины которого лежат на сторонах $ABCD$.

Пусть $AECF$ — ромб, описанный в ответе. Докажем, что площадь ромба $MNPQ$ не больше площади ромба $AECF$. Когда все вершины ромба $MNPQ$ лежат на больших сторонах прямоугольника, это верно, поскольку ромбы имеют одинаковую высоту AB (рис. 60, *б*), а сторона $MN < AE$ (докажите это!). Когда все вершины этого ромба лежат на разных сторонах прямоугольника, это верно потому, что диагонали ромба соответственно меньше диагоналей ромба $AECF$ (на рис. 60, *а* $MO < EO$, $PO < CO$).

13.11. Дан выпуклый четырехугольник. Найдите внутри него такую точку, чтобы отрезки, соединяющие эту точку с серединами сторон, делили четырехугольник на четыре части с равными площадями.

13.12. Каждая диагональ четырехугольника делит его на треугольники с равной площадью. Докажите, что этот четырехугольник — параллелограмм.

Обсуждение. Так как $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD}$, то высоты BE и DF этих треугольников равны. Значит, четырехугольник $BEDF$ — параллелограмм и его диагонали делятся в точке пересечения O пополам, т. е. $BO = OD$. Точно так же доказывается, что $AO = OC$. Таким образом, диагонали четырехугольника $ABCD$ делятся в точке пересечения пополам, т. е. $ABCD$ — параллелограмм.

13.13. На продолжении стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ найдите такую точку O, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ равнялась площади треугольника ABO.

13.14. Пусть M и N — середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$. Докажите, что площадь четырехугольника $MQNP$ равна сумме площадей треугольников ABP и CDQ (рис. 61).

13.15. Через вершину A выпуклого четырехугольника $ABCD$ провести прямую, разбивающую четырехугольник на две фигуры одинаковой площади.

13.16. На плоскости расположены n точек так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше 1. Докажите, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.

Обсуждение. Среди всех треуголь-

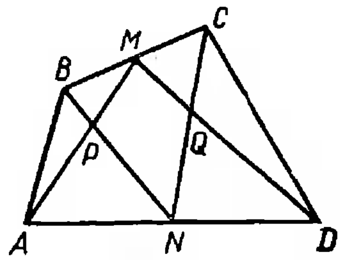


Рис. 61

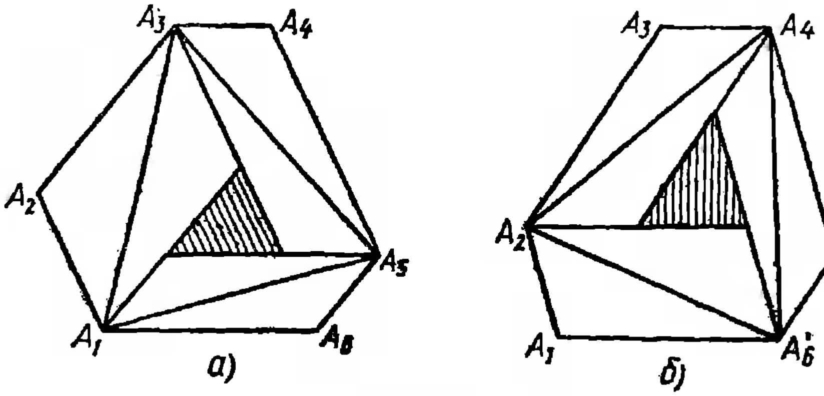


Рис. 62

ников с вершинами в данных точках выберем треугольник наибольшей площади: $S \leqslant 1$. Через каждую его вершину проведем прямую, параллельную противоположной стороне. Площадь треугольника, образованного этими прямыми, как легко видеть, равна $4S \leqslant 4$.

Докажите, что этот треугольник накрывает все n точек. При доказательстве можно воспользоваться тем, что все треугольники с заданным на плоскости основанием a, имеющие площадь S (или меньшую площадь), заключены в полосе между двумя прямыми, параллельными основанию a и отстоящими от него на расстоянии $h = 2S/a$.

13.17. В выпуклом шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ противоположные стороны параллельны. Докажите, что площади треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ равны.

О б с у ж д е н и е. Площадь каждого из двух треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ (рис. 62, *а*, *б*) равна $(S_ш + S_т)2$, где $S_ш$ — площадь данного шестиугольника, $S_т$ — площадь треугольника T, стороны которого равны разностям противоположных сторон шестиугольника и соответственно параллельны этим сторонам. Для доказательства нужно разрезать данный шестиугольник на три параллелограмма и треугольник T, как показано на рисунке 62, *а*, *б* (треугольник T заштрихован).

13.18. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Докажите, что площадь треугольника ACE составляет не менее половины площади шестиугольника.

13.19. Десантник находился где-то в лесу площади S. Форма леса ему неизвестна, однако он знает, что в лесу нет полян. Докажите, что он может выйти из леса, пройдя путь не более $2\sqrt{2\pi S}$ (считается, что десантник может двигаться по пути заранее намеченной формы).

Тема 14. КОЗА НА ПРИВЯЗИ

Послушайте одну историю. Как известно, козы прожорливы и съедают все, до чего могут дотянуться. Мой приятель ловко использовал это обстоятельство. Он жил в деревне и хорошо знал грибные места. Но когда приходили друзья и спрашивали, куда пойти завтра за грибами, он отвечал: «Коза покажет» В самом деле, к вечеру его коза съедала траву на участке в форме стрелки, направленной к самому грибному месту (рис. 63). Мне стало интересно, как это у него получается. Давайте попробуем разобраться вместе. Построим математическую модель поведения козы.

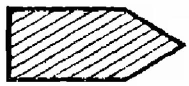


Рис. 63

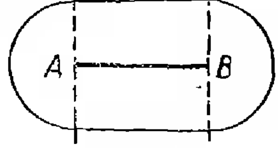


Рис. 64

Если в поле привязать козу к колышку десятиметровой веревкой, то она съест траву, конечно, в круге радиусом 10 м. Попробуем привязать ее по-другому. В точках A и B вобьем колышки, между ними натянем веревку. На рисунке 64 отрезок AB — это и есть натянутая веревка. На козу наденем «ошейник». (Не все ли равно, как он устроен?) У второй веревки один конец закрепим на «ошейнике» козы, а на другом конце сделаем петлю, которая будет скользить по первой веревке — по отрезку AB. Теперь коза сможет съесть траву на участке, состоящем из прямоугольника и двух полукругов с центрами в точках A и B (см. рис. 64). Расстояние от точки границы «выеденного» участка до первой веревки всегда равно длине второй веревки.

Все ли понятно? Конечно, кто-нибудь из вас спросит: «А что такое «расстояние от точки до веревки»? Точнее, что такое расстояние от точки до отрезка? Ведь можно измерять расстояние от точки M до точки A, или до точки B, или до какой-нибудь внутренней точки E отрезка AB (рис. 65). Все время мы будем получать разные результаты.

Нас интересует, до какого места может дотянуться коза. Она доберется до травинки в точке M, если на AB есть хоть одна точка D такая, что расстояние между M и D меньше длины веревки, привязанной к ее ошейнику. Поэтому в разрабатываемой нами «теории голодной козы» необходимо следующее определение:

Определение 1. *Расстоянием от точки M до отрезка AB называется наименьшее из расстояний от точки M до точек отрезка AB.*

Как известно, из двух наклонных та меньше по длине, у которой проекция короче (рассматриваются наклонные, проведенные из одной и той же точки к одной и той же прямой). Поэтому для таких точек, как K на рисунке 65, для которых основание E перпендикуляра KE, опущенного на прямую AB из точки K, попадает в отрезок AB, расстоянием от K до AB является длина этого перпендикуляра KE. Для точки M (рис. 65) основание C перпендикуляра, опущенного на прямую AB, попадает вне отрезка AB, поэтому расстоянием от M до AB является длина отрезка MA, поскольку A — ближайшая к C точка отрезка AB.

14.1. Докажите утверждения предыдущего абзаца с помощью теорем из курса геометрии.

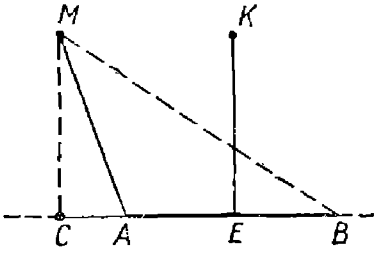


Рис. 65

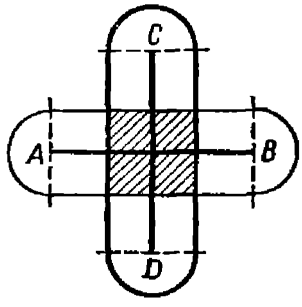


Рис. 66

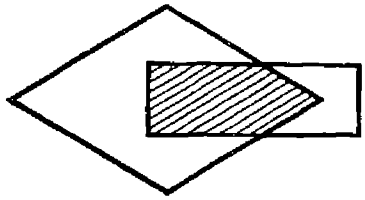


Рис. 67

Теперь попробуем «ограничить» козу квадратным участком. Постараемся использовать предыдущий результат, изображенный на рисунке 64. Вбив колышки в точках A и B и привязав козу, как мы делали раньше, ограничим ее уже знакомой фигурой, границу которой обведем тонкой линией (рис. 66). Если вбить колышки в точках C и D, то козе придется питаться внутри фигуры, обведенной толстой линией. Как вы думаете, что будет, если мы к ошейнику козы привяжем две веревки, по одной «от каждой фигуры»? То есть привяжем две веревки, вторые концы которых могут свободно скользить вдоль отрезков AB и CD.

Ну, конечно, коза сможет есть траву только внутри пересечения фигур, обведенных тонкой и толстой линиями, т. е. внутри квадрата.

Всегда, когда мы сумеем при помощи веревок и колышков ограничить козу какими-то двумя фигурами, мы сможем ограничить ее и пересечением этих фигур. Просто надо к ошейнику козы привязать веревки и «от первой», и «от второй» фигур.

Стрелка, о которой шла речь в самом начале, — это пересечение параллелограмма и прямоугольника (рис. 67), так что ничего удивительного в поведении козы моего приятеля нет, она может «построить» и более интересные фигуры.

14.2. Попробуйте ограничить козу параллелограммом. (Другими словами, с помощью веревок и колышков привяжите козу так, чтобы она могла есть траву только внутри данного параллелограмма.)

14.3. «Ограничьте» ее треугольником.

14.4. «Выдайте» козе во владение правильный шестиугольник. Каким наименьшим числом колышков вам удастся обойтись?

14.5. Подумайте, как действовать, чтобы «ограничить» козу заданным выпуклым многоугольником.

Математическая модель и реальная коза

При развитии «теории голодной козы» мы сделали много предположений, упрощающих дело. Так, если реальную козу привязать к колышку десятиметровой веревкой, то она, вытянув шею, доберется до травы, которая растет дальше, чем в десяти метрах. Шея-то у нее длинная!

Мы упрощаем дело — строим математическую модель. Например, мы считаем, что земля ровная, что коза съедает всю траву, до которой может дотянуться, причем коза маленькая, а веревки длинные, и изображаем козу точкой. Предполагаем, что веревки не растягиваются и скользят друг по другу. И еще очень важно, что коза не запутывается в веревках и может перепрыгнуть через них. Вот как много предположений!

Математические понятия в „теории голодной козы"

В «теории голодной козы» уже использовались различные математические понятия — расстояние от точки до отрезка, пересечение фигур. Но, возможно, самое полезное математическое понятие в этой теории — это понятие «окрестности фигуры радиуса R». Здесь R — неотрицательное число.

Определение 2. *Окрестностью радиуса R фигуры Φ называется множество всех тех точек, расстояние от которых до фигуры Φ не превосходит R.*

Здесь используется понятие «расстояние от точки до фигуры». Оно является естественным обобщением понятия «расстояние от точки до отрезка» (см. определение 1). Попробуйте сами придумать определение этому понятию!

Определение 3. *Расстоянием от точки M до фигуры Φ называется наименьшее из расстояний от точки M до точек фигуры Φ.*

Значит, если Φ — отрезок, то определение 3 совпадает с определением 1.

Окрестность радиуса R точки — это круг радиуса R. Окрестность радиуса R отрезка AB — та самая фигура, с которой началось развитие «теории голодной козы». Здесь R — длина веревки, привязанной к ошейнику козы (см. рис. 64).

А что такое окрестность радиуса 0? Сама фигура Φ. Вообще, если $R_1 < R_2$, то окрестность радиуса R_1 фигуры содержится в окрестности радиуса R_2 этой фигуры.

Заметим также, что окрестность радиуса R фигуры Φ состоит из тех и только тех точек плоскости, что лежат в окрестности радиуса R хотя бы одной из точек Φ, т. е. лежат в одном из кругов радиуса R с центрами в Φ.

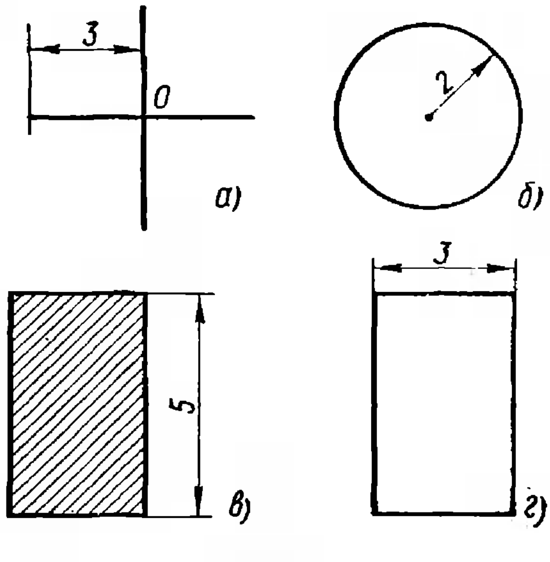


Рис. 68

14.6. Что является окрестностями радиуса 1 следующих фигур (рис. 68):

а) креста;

б) окружности;

в) прямоугольника;

г) границы этого прямоугольника?

14.7. Какова площадь окрестности радиуса R выпуклого многоугольника площадью S и с периметром P?

З а м е ч а н и е. Определение 3 понятия «расстояние от точки до множества» является наиболее распространенным, однако иногда пользуются другими определениями (например, при классификации многомерных наблюдений — см., скажем, монографию С. А. Айвазяна, З. И. Бежаевой, О. В. Староверова «Классификация многомерных наблюдений». — М.: Статистика, 1974).

Вернемся, однако, к «теории голодной козы». Мы научились предоставлять козе для пропитания участки различной формы, используя пересечения окрестностей отрезков. Далее, мы умеем получать треугольник (задача 14.3) и круг, а потому сумеем ограничить козу сектором: ведь сектор — это пересечение треугольника с кругом. Для получения треугольника нужно 6 колышков и 3 веревки, закрепленные на ошейнике, для получения круга — 1 колышек и 1 веревка, значит, для сектора хватит 7 колышков, а к ошейнику «бедной козы» будет привязано 4 веревки.

14.8. Как заставить козу «съесть» сектор, используя не более 5 колышков (угол сектора меньше развернутого)?

14.9. Как ограничить козу полукругом, привязав к ошейнику не более двух веревок?

Попробуем использовать понятие «окрестности радиуса R» в «теории голодной козы». Если у нас есть проволочный контур, можно петлю веревки длиной R надевать на него. Тогда коза съест окрестность радиуса R проволочного контура. Будем считать, что контур приварен к вбитому в землю единственному металлическому колышку и неподвижен, а петля свободно скользит по всему контуру. Значит, с помощью проволочного контура можно заставить козу «съесть» окрестности окружности и границы прямоугольника.

14.10. Подумайте, какой участок съест коза, если проволочный контур — граница окрестности креста (см. задачу 14.6, *а*).

Можно ли использовать в «теории голодной козы» окрестность самого прямоугольника, а не его границы? Да, можно. Построим низкую загородку по границе прямоугольника так, чтобы коза могла легко перепрыгнуть через нее. Один конец веревки привяжем к ошейнику, а второй — к рогульке — «якорю», который может двигаться только внутри прямоугольника. Перетащить его через загородку коза не может. Если длина веревки R, то коза будет питаться в окрестности радиуса R прямоугольника.

В «теории голодной козы» можно использовать и понятие разности множеств (вы помните, что разностью множеств M и N назы-

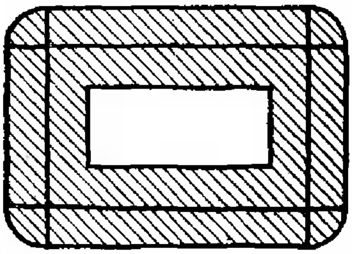


Рис. 69

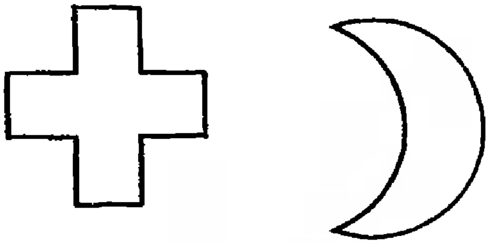


Рис. 70

вают множество, состоящее из всех тех точек M, которые не лежат в N).

Разностью прямоугольника и окрестности его границы (она заштрихована на рис. 69) является белый прямоугольник. В «теории голодной козы» это можно использовать так. К прямоугольному проволочному контуру привяжем цепью собаку. Она будет бегать по окрестности границы этого прямоугольника и не пускать козу за пределы белого прямоугольника. Вот похожая задача.

14.11. Как одной собакой удержать непривязанную козу в полукруге?

14.12. Как с помощью собак удержать козу в кресте или в полумесяце (рис. 70)? (Полумесяц — разность двух пересекающихся кругов.)

14.13. Подумайте, как действовать, чтобы ограничить козу с помощью собак заданным многоугольником (не обязательно выпуклым).

«Теорию голодной козы» можно развивать во многих направлениях. Например, можно пользоваться только колышками и веревками и требовать, чтобы все веревки были постоянно натянуты. Тогда заставить козу ограничиться прямоугольником $ABCD$ можно так: вбить колышки в вершинах прямоугольника, натянуть веревки между A и B и между C и D, набросить веревочное кольцо на веревки AB и CD, натянуть его до отказа и привязать козу к кольцу. Ведь для точек прямоугольника сумма расстояний до двух противоположных сторон постоянна! Теперь вы сможете заставить козу «съесть» треугольник и при новых ограничениях...

«Козу» можно использовать для введения новых кривых. Так, эллипс получается, если пропущенная через кольцо на ошейнике веревка прикреплена концами к двум столбикам. Затем можно получать пересечения эллипсов, окрестности эллипсов и т. д.

Попробуйте и вы предложить свои варианты «теории голодной козы».

Тема 15. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

«Клетки» и «зайцы». При решении задач на «доказательство» часто бывает полезен так называемый «принцип Дирихле»[1]. В са-

[1] Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859) — известный немецкий математик.

мой простой и несерьезной форме он выглядит так: «Нельзя посадить семерых зайцев в три клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не больше двух зайцев». Действительно, если в каждой клетке не больше двух зайцев, то всего зайцев не больше чем $2 \times 3 = 6$, что противоречит условию. Сейчас мы решим несколько задач, выбирая каждый раз подходящих «зайцев» и строя соответствующие «клетки».

15.1. В классе 30 человек. Саша Иванов в диктанте сделал 13 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что по крайней мере 3 ученика сделали ошибок поровну (может быть, по 0 ошибок).

Обсуждение. Здесь «зайцы» — ученики, «клетки» — число сделанных ошибок. В клетку 0 «посадим» всех, кто не сделал ни одной ошибки, в клетку 1 — тех, у кого одна ошибка, в клетку 2 — две... и так до клетки 13, куда попал один Саша Иванов.

Теперь применим принцип Дирихле (обратите внимание, это очень важное место).

Докажем утверждение задачи от противного. Предположим, никакие три ученика не сделали по одинаковому числу ошибок, т. е. в каждую из «клеток» 0, 1, 2, ..., 12 попало меньше 3 школьников. Тогда в каждой из них два человека или меньше, а всего в этих 13 клетках не более $2 \times 13 = 26$ человек. Добавив Сашу Иванова, все равно не наберем 30 ребят. Противоречие.

Следовательно, утверждение задачи верно, по крайней мере трое учеников сделали поровну ошибок.

15.2. Пусть в классе 41 человек, а не 30, а все остальные условия, как в задаче 15.1. Докажите, что найдутся четверо, сделавшие одинаковое число ошибок.

15.3. В Москве живет около 8,3 миллиона жителей, на голове у каждого не более 100 000 волос. Докажите, что в Москве есть по крайней мере 80 человек с одинаковым числом волос на голове.

15.4. На Земле живет более 4 миллиардов человек. Известно, что среди них не более 1% людей старше 100 лет. Докажите, что найдутся два человека, которые родились в одну и ту же секунду.

15.5. В хвойном лесу 800 000 елей, и ни на одной из них не более 500 000 игл. Докажите, что по крайней мере у двух елей число игл одинаково.

Вернемся к задаче 15.1. Можно ли утверждать, что ровно трое сделали поровну ошибок? Нет, конечно. Возможно, все ребята, кроме Саши Иванова, написали диктант без единой ошибки, т. е. сделали все по 0 ошибок.

Можно ли надеяться, что по крайней мере четверо попали в одну клетку, т. е. сделали поровну ошибок? Нет, и этого предполагать нельзя. Условию задачи удовлетворяет класс, в котором ученики распределились по числу сделанных ошибок так: по 3 человека сделали 0, 1, 2 ошибки, по 2 человека — 3, 4, ..., 12 ошибок и один (Саша Иванов) — 13 ошибок.

Знакомства

Будем считать, что знакомство — «симметричное» отношение между людьми: если Иванов знаком с Петровым, то и Петров знаком с Ивановым.

15.6. Выберем любым способом 5 человек. Докажите, что по крайней мере двое из них имеют одинаковое число знакомых среди выбранных.

О б с у ж д е н и е. Построим 5 «клеток» с номерами 0, 1, 2, 3, 4. Пусть номер «клетки» равняется числу знакомых у «содержащихся» в ней людей. Возможны два случая: есть человек, ни с кем из остальных не знакомый, или же такого человека нет. В первом случае в «клетке» 4 никого нет (иначе сидящие в 4 и 0 были бы знакомы между собой), и 5 человек размещены по 4 «клеткам». Во втором случае «клетка» 0 пуста, и снова 5 человек размещены по 4 «клеткам». По принципу Дирихле хотя бы двое находятся в одной «клетке».

Можно ли ожидать, что в какой-то «клетке» находятся ровно двое? Нет, конечно. Может быть, все друг друга знают, т. е. все находятся в «клетке» 4. Может быть, можно ожидать, что ровно трое или же по крайней мере трое находятся в одной «клетке»? Нет, и это не обязательно.

Рассмотрим п р и м е р. Пусть выбрана группа из 5 человек: Васильев, Орлов, Кукушкин, Уткин, Петров. Петров никого не знает и знать не желает. Он подлежит заключению в «клетку» 0. Кукушкин знает только Орлова. Орлов знает Васильева, Кукушкина и Уткина. Васильев знает Орлова и Уткина. Уткин знает Орлова и Васильева. Таким образом, в «клетку» 1 попадает Кукушкин, в «клетку» 2 отправляются Васильев и Уткин, а в «клетку» 3 — Орлов. Как и в задаче 15.1, видим, что результат, полученный с помощью принципа Дирихле, улучшить не удается.

15.7. Докажите то же, что в предыдущей задаче, если выбрано не 5, а 100 человек; n человек.

15.8. В первенстве по футболу участвуют 10 команд. Каждые две из них должны сыграть между собой один матч. Докажите, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

15.9. Числа от 1 до 10 записали в строчку в произвольном порядке и каждое из них сложили с номером места, на котором оно стоит. Докажите, что хотя бы у двух сумм стоит на конце одна и та же цифра.

Делимость

15.10. Докажите, что из любых 12 натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 11.

О б с у ж д е н и е. При делении на 11 получается один из 11 остатков: 0, 1, 2, ..., 10. Нам же дано 12 чисел, и по принципу Дирихле остатки от деления на 11 у каких-то двух из них совпадают. Разность этих двух чисел делится на 11.

15.11. Сформулируйте и докажите общую теорему, частным случаем которой является задача 15.10, а решение этой задачи является частным случаем доказательства теоремы.

15.12. В строку выписано 5 натуральных чисел:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.$$

Докажите, что либо одно из них делится на 5, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 5.

Обсуждение. Рассмотрим 5 чисел:

$$\begin{aligned}&a_1,\\ &a_1+a_2,\\ &a_1+a_2+a_3,\\ &a_1+a_2+a_3+a_4,\\ &a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.\end{aligned}$$

Если одно из них делится на 5, то все в порядке, утверждение справедливо. В противном случае при делении на 5 они дают в остатке какие-то из четырех чисел: 1, 2, 3, 4. По принципу Дирихле остатки по крайней мере двух из выписанных 5 чисел совпадают. Разность их делится на 5. Но разность эта — одно из чисел, данных в задаче, или сумма нескольких из них, стоящих рядом.

15.13. Алик сформулировал теорему: «В строку выписано 5 натуральных чисел. Тогда сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 5 (несколько — это 2 или больше)». Докажите, что эта теорема неверна.

15.14. В строку выписано n чисел. Докажите, что либо одно из них делится на n, либо сумма нескольких рядом стоящих делится на n.

15.15. Докажите, что из любых 52 натуральных чисел можно выбрать два числа так, чтобы либо их сумма, либо их разность делилась на 100. Верно ли это утверждение для 51 числа?

С простыми задачами на принцип Дирихле мы уже знакомы. Займемся более сложными!

Геометрия

15.16. В квадрат со стороной 1 м бросили произвольным способом 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратиком со стороной 0,2 м.

Обсуждение. Разобьем квадрат на 25 равных квадратиков со стороной 0,2 м. Докажем, что в каком-то из них находятся по крайней мере 3 из данных точек. Применим принцип Дирихле: если бы в каждом квадратике (внутри или на сторонах) было не больше 2-х точек, то всего их было бы не больше 50 ($2 \times 25 = 50$).

15.17. В квадрат со стороной 1 м бросили 51 точку. Докажите, что какие-то 3 из них можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{7}$ м.

15.18. В квадрате со стороной длины 1 произвольно берут 101 точку (не обязательно внутри квадрата, возможно, часть на сторонах), причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $\frac{1}{100}$.

15.19. В квадрате со стороной длины 1 содержится выпуклый 100-угольник. Докажите, что существует треугольник с вершинами в вершинах 100-угольника, площадь которого не больше 0,0008.

15.20. Обобщите задачи 15.18 и 15.19 на случай n брошенных точек и n-угольника, содержащегося внутри квадрата.

А теперь несколько задач, для решения которых принцип Дирихле придется переделать на геометрический лад.

15.21. Несколько дуг окружности покрашены в черный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

Обсуждение. Покрасим в синий цвет дуги, симметричные черным относительно центра окружности. Поскольку сумма длин синих дуг равна сумме длин черных, то общая длина окрашенных дуг меньше длины окружности. Значит (принцип Дирихле!), найдется неокрашенная точка. Диаметр, проходящий через нее, и будет искомым.

«Рассмотрим отрезок AB. Пусть на нем лежат несколько черных отрезков общей длиной 1,5 AB. Тогда какая-то точка AB принадлежит по крайней мере двум черным отрезкам». Подобное рассуждение помогает в следующей задаче.

15.22. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 м расположено несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,6 м. (Окружности могут пересекаться или совпадать.) Докажите, что найдется прямая, параллельная AB, имеющая общие точки по крайней мере с двумя окружностями.

15.23. Докажите, что у любого дерева можно оборвать 8/15 его листьев, оставив при этом не менее 7/15 тени (по площади), которую давало дерево. (Тенью от ствола и веток пренебречь; число листьев считать делящимся на 15.)

15.24. Директор завода, большой любитель цветов, хочет разбить клумбу радиуса 5 м на прямоугольном заводском дворе 150×110 м, загроможденном строениями. Там стоят 10 складов 20×20 м, 4 цеха 40×10 м и круглое бензохранилище радиуса 10 м. Докажите, что цветоводу-директору удастся разбить клумбу.

15.25. Дан ряд (его называют рядом Фибоначчи[1]):

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89\ldots,$$

в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Найдется ли среди 100 000 000 первых членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями?

Обсуждение. Рассмотрим ряд остатков от деления данных чисел на 10 000. Остаток, стоящий на n-м месте, обозначим символом a_n, тогда $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_6 = 8$, $a_{10} = 55$ и т. д. Различных остатков существует 10 000, различных пар остатков, естественно, $10\,000^2 = 100\,000\,000$. Рассмотрим 100 000 001 пару остатков: (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), ..., $(a_{100\,000\,001}, a_{100\,000\,002})$. По принципу Дирихле из этих пар остатков по крайней мере две совпадают, т. е. существуют n и p такие, что $a_n = a_p$, $a_{n+1} = a_{p+1}$, причем n и p меньше 100 000 002, n меньше p. По остатку суммы и одного из слагаемых однозначно определяется остаток второго слагаемого (см. тему 9 об арифметике остатков), поэтому $a_{n-1} = a_{p-1}$, $a_{n-2} = a_{p-2}$ и так далее вплоть до $a_2 = 1 = a_{p-n+2}$, $a_1 = 1 = a_{p-n+1}$. Теперь ясно, что $a_{p-n} = 0$, причем $p - n \leqslant 100\,000\,001 - 1 = 100\,000\,000$.

15.26. Докажите, что для любого натурального n в ряду из условия предыдущей задачи найдется число, оканчивающееся на n нулей.

15.27. Докажите, что существует степень числа 29, оканчивающаяся цифрами 00 001.

15.28. Пусть число A не делится на 2 и 5. Докажите, что существует степень числа A, при делении на 10^n дающая в остатке 1 (n — фиксированное натуральное число).

15.29. Докажите, что существует кратное 1984 число, в десятичной записи которого участвуют только нули и единицы.

Дополнительные задачи

15.30. В доме 123 жильца, им вместе 3813 лет. Можно ли выбрать 100 из них, которым вместе не меньше 3100 лет?

15.31. На плоскости даны 7 прямых, никакие две из них не параллельны. Докажите, что найдутся две из них, угол между которыми меньше 26°. Верно ли аналогичное утверждение, если 26° заменить на 25°?

15.32. Двадцати одному мальчику дали 200 орехов. Докажите, что, как бы они их ни разделили, найдутся два мальчика, которым досталось поровну орехов (может быть, по 0 орехов).

---

[1] Итальянец Леонардо Фибоначчи (около 1170—1250), которого называют также Леонардо из Пизы (город в Италии) — первый известный европейский математик со времен античности.

15.33. Даны 7 отрезков. Длина каждого больше 10 см и меньше 1 м. Докажите, что из каких-то трех можно составить треугольник.

15.34. Из ряда 1, 2, ..., 200 каким-то способом выбрано 101 число. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

15.35. Докажите, что среди 986 различных натуральных чисел, не превосходящих 1969, наибольшее из которых нечетно, всегда можно найти три таких числа, что сумма двух из них равна третьему. Останется ли в силе это утверждение, если заменить число 986 на 985?

15.36. В таблице $n \times n$ клеток расставлены целые числа от 1 до n^2. Нас будет интересовать следующее утверждение: «При любой расстановке найдутся две клетки, имеющие общую сторону, такие, что разность между числами, стоящими в этих клетках, больше 5». Докажите это утверждение:

а) для $n = 10$;

б) для всех n, больших 10;

в) для $n = 9$. Опровергните его для $n = 5$. Попробуйте разобрать случаи: $n = 6, 7, 8$.

Тема 16. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Вам хорошо известно, что понятие параллельности играет очень важную роль в построении курса геометрии. В истории геометрии происходило очень много событий вокруг так называемого «пятого постулата» Евклида или аксиомы параллельных, которая в ваших учебниках сформулирована так:

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

Еще геометры древности пытались доказать единственность параллельной. Эти попытки продолжались вплоть до XIX столетия, но оставались бесплодными. В верности же этой аксиомы никто, однако, не сомневался, так крепко укоренилась уверенность в правильности геометрии Евклида.

Можно попытаться доказать от противного аксиому о параллельных. Тогда нужно путем вывода логических следствий из допущения, что через точку можно провести несколько прямых, параллельных данной, прийти к абсурду. Когда Ламберт, а затем Гаусс пошли этим путем, то они не получили ожидаемого логического противоречия. Великий русский математик Н. И. Лобачевский и независимо от него венгерский математик Я. Бояи показали, что говорить о доказательстве этой аксиомы бессмысленно и что, приняв допущение о возможности провести через точку несколько прямых, параллельных данной, можно построить другую, «неевклидову геометрию». Так родилась геометрия Лобачевского, в которой аксиома параллельных звучит так:

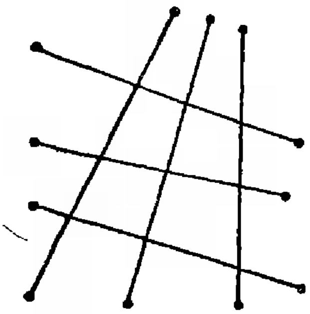


Рис. 71

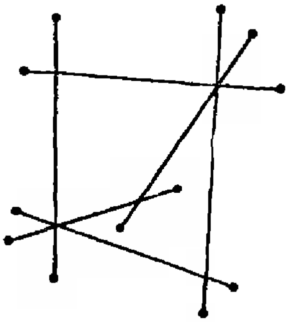


Рис. 72

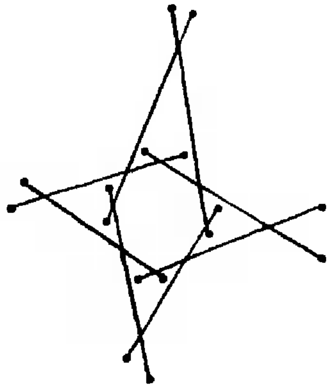


Рис. 73

Через точку A проходят по крайней мере две прямые, параллельные данной прямой p.

В этой удивительной геометрии доказываются теоремы, некоторые из которых являются отрицанием известных нам теорем, например: *Сумма углов в треугольнике непостоянна и всегда меньше* 180°. Или: *Не вокруг всякого треугольника можно описать окружность*. И т. д. В этой теме мы не затрагиваем вопросов изучения геометрии Лобачевского, а занимаемся лишь привычной нам геометрией, где выполняется аксиома параллельных Евклида.

Начнем с решения задач о возможных расположениях прямых и отрезков.

16.1. Можно ли расположить на плоскости 8 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими? Тот же вопрос для 7 отрезков. (На рисунках 71, 72 показано, что 6 отрезков так расположить можно.)

Обсуждение. На плоскости 8 отрезков так расположить можно (рис. 73), а 7 нельзя. Докажем это. Предположим, что такое расположение 7 отрезков возможно. Занумеруем отрезки и составим такую таблицу 7×7: в клетке (i, j) на пересечении i-й строки и j-го столбца поставим «+», если i-й отрезок пересекается с j-м, и «—», если не пересекается. Если $i = j$, то тоже ставим «—». Подсчитаем двумя способами, сколько плюсов в таблице.

С одной стороны, в каждой строке их 3, поэтому всего — $3 \cdot 7 = 21$. С другой стороны, таблица заполнена симметрично относительно диагонали: если в клетке (i, j) стоит «+», то в клетке (j, i) тоже. Значит, общее количество плюсов должно быть четным. Получили противоречие.

16.2. Могут ли 7 прямых пересекаться в 8 точках? Сколько вообще может быть точек пересечения у 7 прямых (перечислить все возможные случаи)?

Обсуждение. Докажем, что если точек пересечения две, то прямых может быть только три. Пусть имеется всего две точки пересечения A и B, и пусть l_1 и l_2 — прямые, пересекающиеся в точке A, а l_3 — прямая, не проходящая через A (такая есть, иначе все прямые пересекались бы в A). Прямая l_3 пересекает лишь одну из прямых l_1 и l_2, скажем l_1, в точке B, другой прямой l_2 она параллельна. Проверьте, что больше нельзя провести ни одной прямой, не увеличивая числа точек пересечения.

Заметьте, что в доказательстве используется «пятый постулат» Евклида — аксиома, гласящая, что через точку нельзя провести более одной прямой, параллельной данной.

16.3. Поставьте вместо многоточия такое натуральное число p, чтобы ответ на следующий вопрос был однозначным: сколько прямых проведено на плоскости, если известно, что они пересекаются в ... различных точках.

Обсуждение. Докажем, что на месте многоточия не может стоять число, отличное от 2. Если точка пересечения одна, то прямых может быть любое число, начиная с 2, надо лишь, чтобы все они проходили через эту точку. Если число точек пересечения $n > 2$, то число прямых не определено однозначно. Пример: пусть прямые $l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}$ проходят через точку A и пересекают l_n; можно провести прямую l_{n+1} параллельно l_n, а можно не проводить, на число точек пересечения это не влияет.

Ответ. $p = 2$.

16.4. Докажите, что 7 прямых и 7 точек нельзя расположить на плоскости так, чтобы через каждую точку проходили ровно 3 прямые и на каждой прямой лежали ровно 3 точки.

Обсуждение. Предположим, что такое расположение 7 точек и 7 прямых существует. Будем называть эти прямые и эти точки «отмеченными». Прежде всего докажем, что прямая, проходящая через любые две отмеченные точки M и N, является отмеченной. На каждой из трех прямых, проходящих через M, есть еще по 2 отмеченные точки, и одной из этих шести точек должна быть N, так как отмеченных точек всего 7.

Так же доказывается, что любые две отмеченные прямые пересекаются в отмеченной точке.

Пусть теперь A, B, C — отмеченные точки, лежащие на отмеченной прямой l так, что B лежит между A и C, D — та из остальных отмеченных точек, которая ближе к l (рис. 74). По доказанному прямые AD, BD и CD отмеченные.

По условию через B проходит еще одна отмеченная прямая, отличная от l и от BD. Она пересечет отрезок AD или отрезок CD в отмеченной точке[1] E, которая ближе к прямой l, чем точка D. Противоречие.

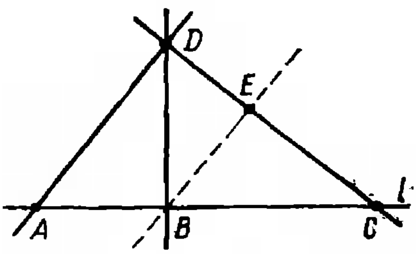


Рис. 74

---

[1] Здесь мы пользуемся таким утверждением: если прямая пересекает одну из сторон треугольника и не проходит через его вершины, то она должна пересечь одну из двух других сторон этого треугольника. Это очевидное утверждение эквивалентно аксиоме параллельных.

16.5. На плоскости проведен 1 000 000 попарно не параллельных прямых. Через точку пересечения любых двух из этих прямых проходит по меньшей мере еще одна из проведенных прямых. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

Свойства параллельности прямых наиболее широко используются при изучении многоугольников, многие из которых характеризуются числом параллельных сторон. Среди этих многоугольников наиболее часто рассматриваются параллелограммы. Решим задачу.

16.6. Докажите, что в произвольном треугольнике сумма длин трех медиан меньше периметра.

16.7. На доске был нарисован параллелограмм $ABCD$ и в нем отмечены точка E — середина стороны BC и точка F — середина стороны CD. Дежурный стер параллелограмм, остались только точки A, E и F. Как по этим данным восстановить чертеж?

16.8. Вершина A параллелограмма $ABCD$ соединена прямыми с серединами E и F противоположных сторон BC и CD. Эти прямые пересекают диагональ BD в точках M и N. Докажите, что точки M и N делят отрезок BD на три равных отрезка.

16.9. Дан треугольник ABC, в котором $AC = 0{,}5\ (AB + BC)$. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и точку пересечения биссектрис, параллельна прямой AC.

16.10. Точка внутри равнобедренной трапеции соединена со всеми вершинами. Докажите, что из четырех получившихся отрезков можно сложить четырехугольник, вписанный в эту трапецию (так, что на каждой стороне трапеции лежит по одной вершине четырехугольника).

16.11. Середины сторон AB и CD, BC и ED выпуклого пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками. Середины H и K полученных отрезков снова соединены. Докажите, что отрезок HK параллелен отрезку AE и равен $\frac{1}{4}\,AE$.

Изучение параллельности тесно связано с изучением движений, и в частности с **параллельным переносом**. В определении параллельного переноса участвует понятие **направления на плоскости**. Хорошо известно, что направление на плоскости задается лучом. С понятием направления тесно связаны многие задачи на **отражение**. Вот, например, две из них.

16.12. Какое наибольшее число раз может отразиться луч от сторон угла в 1°? (При каждом отражении угол падения равен углу отражения.)

Обсуждение. Воспользуемся тем, что после отражения от прямой луч движется так, что его зеркальное изображение лежит на продолжении пути луча до отражения. Решение для случая угла 60° показано на рисунке 75. От сторон угла в 1° луч может отразиться 180 раз.

16.13. Луч света отражается многократно от сторон равностороннего треугольника ABC. Предположим, что в течение некоторого времени он отразился 4 раза от стороны AB, x раз от стороны AC и y раз от стороны BC. Какие значения могут принимать x и y (указать все возможные значения)?

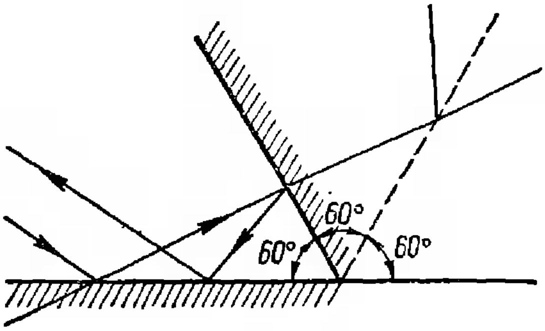


Рис. 75

Использование параллельного переноса при решении задач чаще всего связано с тем, что при параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую. Рассмотрим несколько задач на применение параллельного переноса.

16.14. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60°. Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

16.15. Постройте трапецию: а) по разности оснований, боковым сторонам и одной диагонали; б) по ее основаниям и диагоналям.

16.16. Постройте треугольник по двум его сторонам и разности противолежащих им углов.

16.17. Постройте трапецию по разности ее оснований, двум ее острым углам и диагонали.

16.18. На стороне угла, вершина O которого исключена, дана точка M. Постройте отрезок, равный отрезку OM.

16.19. Даны две пересекающиеся прямые a и b. Постройте прямую c, параллельную третьей данной прямой, так, чтобы данные две прямые отсекали на прямой c отрезок, равный данному отрезку.

16.20. Даны две прямые и окружность. Постройте отрезок данной длины, чтобы его концы лежали на одной прямой и окружности и чтобы он был параллелен другой данной прямой.

16.21. Даны две окружности. Постройте отрезок данной длины так, чтобы его концы лежали на данных окружностях и чтобы он был параллелен данной прямой.

16.22. а) В каком месте следует построить мост длиной MN через реку, разделяющую две данные деревни A и B (рис. 76, *а*, *б*), чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был кратчайшим (берега реки считаются параллельными прямыми, мост предполагается перпендикулярным к берегам реки)?

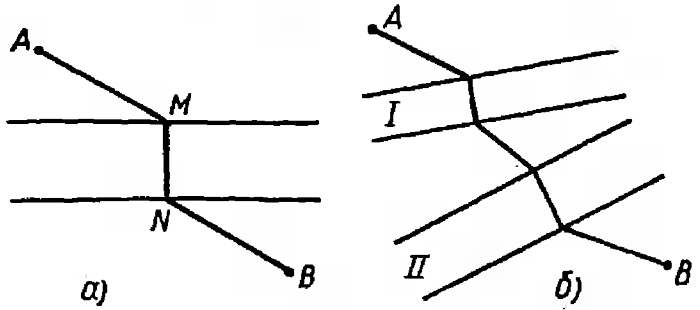


Рис. 76

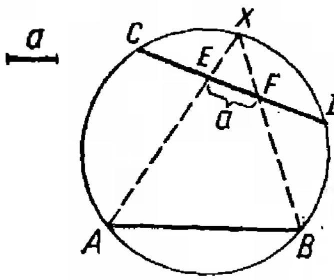


Рис. 77

б) Решите ту же задачу, если деревни A и B разделяются несколькими реками, через которые надо построить мосты (рис. 76, *б*).

16.23. а) Найдите все точки M, сумма расстояний которых до двух данных прямых l_1 и l_2 имеет данную величину a.

б) Найдите все точки M, разность расстояний которых до двух данных прямых l_1 и l_2 имеет данную величину a.

16.24. Даны хорды AB и CD окружности. Найдите на ней такую точку X, чтобы хорды AX и BX образовывали на отрезке CD отрезок EF, имеющий данную длину a (рис. 77).

16.25. а) Даны две окружности S_1 и S_2, пересекающиеся в точках A и B. Проведите через точку A прямую l, отрезок которой, заключенный внутри окружностей S_1 и S_2, имеет данную длину a.

б) Постройте треугольник, который равен данному и стороны которого проходят через три заданные точки.

16.26. Даны две окружности S_1 и S_2. Проведите прямую l:

а) параллельную данной прямой l_1 и такую, что S_1 и S_2 отсекают на l хорды равной длины;

б) параллельную данной прямой l_1 и такую, что S_1 и S_2 отсекают на l хорды, сумма (или разность) длин которых равна данной величине a;

в) проходящую через данную точку A и такую, что S_1 и S_2 отсекают на l хорды равной длины.

Тема 17. КОМБИНАТОРИКА

17.1. Сколько существует различных трехзначных чисел, в записи которых участвуют лишь цифры 1, 2, 3 и 4?

Обсуждение. Можно попытаться выписать все такие числа, но это не лучший способ. Его не удалось бы применить, если бы в условии шла речь, скажем, о восьмизначных числах. Поэтому поступим по-другому. Представим себе, что у нас есть 4 больших ящика, занумерованных числами 1, 2, 3 и 4. В каждом из больших ящиков помещаются по 4 ящика средней величины, и на каждом таком ящике написан его «адрес» — двузначное число, первая цифра которого — номер большого ящика, в котором находится данный ящик; вторая — номер ящика средней величины в его «четверке» (рис. 78). Очевидно, число ящиков средней величины равно $4 \times 4 = 16$. Наконец, в каждом ящике средней величины помещаются 4 маленьких ящичка, и на каждом маленьком ящичке написан его «адрес» — трехзначное число: первая цифра — номер содержащего его большого ящика, вторая цифра — номер соответствующего «среднего» ящика в его «четверке», наконец, третья цифра — порядковый номер маленького ящичка в «четверке» маленьких ящичков. Трехзначные номера маленьких ящичков образуют то множество трехзначных чисел, о котором говорится в условии задачи. Но таких трехзначных чисел-«адресов» столько же, сколько и самих ящичков, т. е. $4 \times 4 \times 4 = 64$.

17.2. Среди чисел, о которых говорится в задаче 1, сколько существует таких, в записи которых цифры не повторяются?

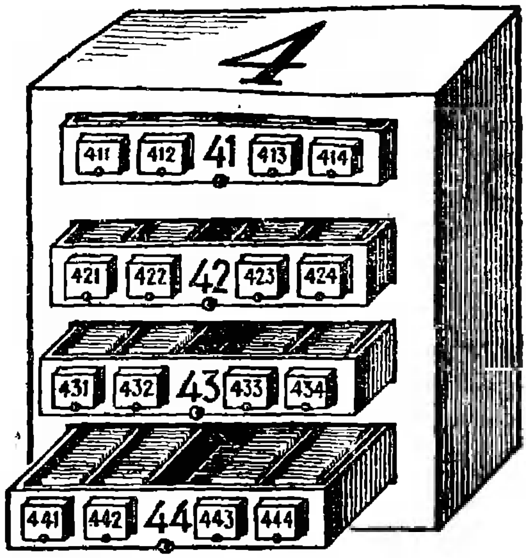


Рис. 78

Обсуждение. Снова используем модель из ящиков, рассмотренную в предыдущей задаче. Из каждого большого ящика вынем и отставим в сторону тот ящик средней величины, номер которого в «четверке» равен номеру соответствующего большого ящика. Так, из большого ящика № 1 вынем ящик средней величины с адресом «11», из большого ящика № 2 — ящик с адресом «22» и т. д. Останется $3 \times 4 = 12$ ящиков средней величины. Теперь из каждого из оставшихся ящиков средней величины вынем и отставим в сторону по два маленьких ящичка, у которых третья цифра адреса совпадает с первой или второй. Останется $2 \times 3 \times 4 = 24$ маленьких ящичка. Трехзначные «адреса» маленьких ящичков, отставленных в сторону, условию задачи не удовлетворяют, а номера оставшихся 24 ящичков удовлетворяют. Таким образом, ответ — 24 числа.

Можно рассуждать и по-другому. Первая цифра трехзначного числа, о котором говорится в условии, — это 1, 2, 3 или 4. Значит, для выбора первой цифры имеются 4 возможности. После того как первая цифра выбрана, для выбора второй цифры остаются лишь три возможности — одна из цифр уже использована. Так, если первая цифра 3, то второй может быть лишь 1, 2 или 4. Каждый способ выбора первой цифры можно скомбинировать с любым (из трех допустимых условием) способом выбора второй, значит, первые две цифры можно выбрать $4 \times 3 = 12$ способами. Для выбора третьей цифры остаются только две возможности, а всего получается $4 \times 3 \times 2 = 24$ способа составить число, удовлетворяющее условию задачи, т. е. существует 24 таких числа.

Примененный в последнем решении прием называется правилом (или принципом) перемножения возможностей. Продемонстрируем его на одном простом примере. Пусть с вершины горы к подножию спускаются три тропинки, каждая из которых разветвляется еще на две, как показано на рисунке 79. Спрашивается, сколько су-

Рис. 79

ществует способов спуститься с горы. Таких способов имеется шесть: сначала выбираем одну из трех тропинок на вершине (3 возможности), а дойдя до развилки, выбираем одну тропинку из двух — левую или правую (2 возможности) и продолжаем спуск по ней. Умножая возможности, как раз и получаем $3 \times 2 = 6$ способов. Применим тот же прием в следующих задачах.

17.3. Флажки на мачте. В нашем распоряжении имеется 5 флажков: синий, белый, красный, оранжевый и зеленый. Для передачи некоторого сообщения на мачте вывешивают три флажка, причем имеют значение не только цвета флажков, но и порядок, в котором они вывешены: если сверху находится красный флажок, ниже — синий, еще ниже — зеленый, это одно сообщение, а если сверху синий, потом красный, а затем зеленый — совсем другое. Сколько различных сообщений можно закодировать таким образом?

Обсуждение. Будем обозначать цвета первыми буквами: синий — *С*, белый *Б* — и т. д. Тогда задача примет такой вид: «Сколько трехбуквенных «слов» можно составить из букв *С*, *Б*, *К*, *О*, *З* (буквы в слове не повторяются)». Применим «правило перемножения возможностей». Первую букву можно выбрать пятью способами. Каждому способу выбора первой буквы соответствуют 4 возможности выбора второй. Если, например, первая буква — *Б*, то вторая — *С*, *К*, *О* или *З*. Пусть первая и вторая буквы уже выбраны. Тогда третью можно выбрать тремя способами — две буквы уже заняты. Всего получим $5 \times 4 \times 3 = 60$ комбинаций трех флажков.

Мы обозначали различные цвета различными буквами. Если бы мы обозначили цвета цифрами — 1, 2, 3, 4 и 5, то сразу заметили бы, что эта задача свелась к предыдущей.

17.4. Выборы. В пионерском звене 12 человек. Требуется вы брать звеньевого, санитара, а также редактора стенной газеты. Сколькими способами это можно сделать?

Обсуждение. Выборы организуем так: сначала выберем звеньевого, потом санитара, потом редактора стенной газеты. Каждый из пионеров может быть выбран звеньевым, поэтому существует 12 возможностей для выбора звеньевого. После того как звеньевой уже выбран, остается 11 возможностей для выбора санитара (звеньевой отпадает), а всего $12 \times 11 = 132$ способа выбрать пару «звеньевой — санитар». И наконец, выберем редактора стенгазеты. Это можно сделать 10 способами — редактором может быть выбран любой пионер, только не звеньевой и не санитар. Всего получается $12 \times 11 \times 10 = 1320$ способов выбрать трех пионеров из 12 на три должности.

17.5. Сколько существует способов выбрать из n лиц:

а) троих на 3 должности;

б) пятерых на 5 должностей;

в) m лиц на m должностей ($m \leqslant n$)?

Обсуждение. а) Рассуждаем, как в предыдущей задаче. На первую должность можно выбрать любого из n человек — n

возможностей, на вторую должность — любого среди $(n-1)$ оставшихся — $(n-1)$ возможностей, а всего $n \cdot (n-1)$ возможностей выбрать двух лиц на 2 места, затем $(n-2)$ возможностей выбрать третье лицо на третью должность, а всего $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ способов выбора трех лиц.

б) Продолжая предыдущие рассуждения, получим $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)$ способов выбрать пятерых на 5 мест.

в) Рассуждая, как в предыдущих случаях, получим $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)]$ способов, т. е. число, равное произведению m последовательных натуральных чисел, большее из которых равно n.

Рассмотрим более о б щ и й с л у ч а й. Пусть M — произвольное множество, содержащее n элементов. Это может быть, например, множество из пяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, как в задаче 2, или множество пяти флажков из задачи 3, или множество, состоящее из 12 пионеров одного звена, и т. д. Допустим, нам надо выбрать из элементов этого множества m элементов, для того чтобы расположить их на m местах. Например, в задаче 17.3 нам надо было выбрать и расположить на мачте в определенном порядке 3 флажка, а в задаче 17.5б пять человек из данного множества n лиц для занятия пяти должностей. Каждое такое расположение называется «размещением из n элементов по m». Общее число всех таких расположений называется «числом размещений из n элементов по m» и обозначается A_n^m (здесь A — первая буква французского слова «arrangement», что означает «размещение»). В наших предыдущих рассуждениях природа элементов, из которых составлено рассматриваемое множество, не играла никакой роли (сравните, например, решение задач 17.2 и 17.3), поэтому результат вычисления A_n^m не зависит от природы элементов множества M, а только от их числа n и числа выбираемых элементов m. Таким образом, решение задачи 17.5в приводит к следующему общему результату:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(m-1)],$$

т. е. число размещений из n элементов по m равно произведению m последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых n.

17.6. Сколькими способами можно разместить 5 человек за столом, на котором поставлено 5 приборов?

О б с у ж д е н и е. Легко понять, что эта задача эквивалентна задаче 17.5б в случае, когда $n = 5$, т. е. число элементов множества равно числу мест, на которых мы хотим их расположить, т. е. A_5^5. Но $A_5^5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ — произведению всех натуральных чисел от 1 до 5.

Вообще, число размещений n элементов множества на n местах называется «числом перестановок из n элементов». Число перестановок из n элементов обозначается P_n, где P — первая буква французского слова «permutation», что значит «перестановка».

Так как $P_n = A_n^n$, то $P_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$, другими словами, число перестановок из n элементов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n включительно. Такое произведение принято обозначать сокращенно $n!$ (читается: «эн факториал»). Число перестановок P_n растет очень быстро с ростом n:

$P_1 = 1! = 1 \quad P_3 = 3! = 6 \quad P_5 = 5! = 120 \quad P_7 = 7! = 5040$

$P_2 = 2! = 2 \quad P_4 = 4! = 24 \quad P_6 = 6! = 720 \quad P_8 = 8! = 40320$

и т. д.

17.7. Сколькими способами можно разместить за столом, на котором поставлено 10 приборов, 10 человек — 5 юношей и 5 девушек так, чтобы девушки чередовались с юношами?

17.8. Условие то же, что и в задаче 17.3 «Флажки на мачте», но вывешивается не три, а четыре флажка.

а) Сколько различных сообщений можно передать в этом случае?

б) Сколько раз из этих сообщений используют синий флажок?

17.9. Используя 30 букв русского алфавита, 10 гласных и 20 согласных (т. е. все буквы, кроме *й*, *ъ*, *ь*), сколько можно составить различных пятибуквенных «слов», если в каждом «слове» 2 гласные — на втором и на четвертом месте? (Многие «слова» совершенно бессмысленны: шыцэщ, пяфес, рюпюж и т. д.)

17.10. Некто забыл последние четыре цифры телефонного номера, помнит только, что все цифры разные и среди них есть девятка. Какое максимальное число номеров ему придется набрать, если он попытается дозвониться до абонента? (Минимальное число — единица, если очень повезет, можно сразу «напасть» на нужный номер.)

Тема 18. ПОИСК ПРЕДМЕТА

18.1. Послушайте, какую историю рассказала мне моя соседка Люся. Я ее записал и прочитаю вам сейчас.

«В нашем новом восьмиэтажном доме два подъезда. На каждую лестничную клетку выходят двери четырех квартир...»

Тут я попросил Люсю на минутку остановиться и быстро подсчитал: в доме 64 квартиры.

«...Вчера во дворе меня встретили ребята и спросили, в какой квартире я живу. Я ответила:

— А вы отгадайте. Можете задавать мне вопросы, только имейте в виду, я буду отвечать лишь «да» или «нет». Поэтому каждый ваш вопрос должен начинаться словами «верно ли, что...».

Один мальчишка (он стоял с велосипедом) сразу сказал:

— Нет ничего проще. Я буду тебя спрашивать, верно ли, что ты живешь в 1-й квартире, во 2-й, в 3-й, в 4-й, ..., в 63-й, пока ты не скажешь «да». А если ты все время будешь говорить «нет», то ты живешь в 64-й квартире. Мне понадобится самое большее шестьдесят три вопроса.

Но тут его перебила девочка:

— Подумаешь, шестьдесят три вопроса! Мне хватит и тридцати двух. Сначала я узнаю, в каком подъезде ты живешь. Я спрошу: «Ты живешь в первом подъезде?» Ответишь «да» — значит, в первом, ответишь «нет» — так во втором. А затем переберу по порядку все квартиры в подъезде.

— А мне хватит и четырнадцати вопросов! — радостно закричал самый маленький из всей компании. — Этаж я узнаю за семь вопросов: «Верно ли, что ты живешь на 1-м этаже? На втором?.. На седьмом?», а квартиру на этаже — еще за семь!»

— А как вы думаете, — спросила Люся меня, — сколько вопросов понадобится, чтобы угадать номер моей квартиры?

Я сразу ответил Люсе: понадобится шесть вопросов. Подумайте, какие это должны быть вопросы. А нельзя ли наверняка уложиться в пять вопросов?

Обсуждение. Сначала я спросил:

— Верно ли, что ты живешь в первом подъезде?

Люся ответила: «Нет».

И я понял, что ее квартира находится во втором подъезде (подъездов-то всего два!). Второй вопрос был хитрее:

— Верно ли, что ты живешь ниже пятого этажа?

— Да.

— А верно ли, что ниже третьего?

— Нет.

— На третьем?

— Нет.

Значит, Люся живет во втором подъезде на четвертом этаже. У меня осталось два вопроса на четыре «подозрительные» квартиры — 45-ю, 46-ю, 47-ю, 48-ю (легко подсчитать, что на площадку четвертого этажа во втором подъезде выходят двери этих четырех квартир).

— Верно ли, что номер твоей квартиры больше 46?

— Нет.

— ...Ты живешь в 45-й?

— Нет.

— Значит, ты живешь в 46-й, — сказал я с торжеством.

Поняли ли вы, почему понадобилось так мало вопросов? Каждый мой вопрос делил номера «подозрительных» квартир (тех, среди которых находится Люсина) на две равные части: те номера, для которых верно то, о чем говорится в вопросе (для них ответом будет «да»), и те, для которых это неверно (ответ «нет»). Узнав ответ, в любом случае уменьшаешь число «подозрительных» квартир ровно вдвое. Если вопрос делит «подозрительные» квартиры на две неравные по числу квартир части, то в лучшем случае число «подозрительных» квартир уменьшится более чем вдвое, а в худшем — менее чем вдвое. Но ведь надо угадать номер за наименьшее число вопросов в любом случае — как в лучшем, так и в худшем!

Можно доказать (совершенно строго!), что в пять вопросов нельзя уложиться наверняка. Здесь нам поможет таблица на рис. 80.

1	1	1	1	1
1	1	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1

Рис. 80

Люсины ответы мы запишем с помощью набора пяти цифр. Если она ответила «да», будем писать «1», а если «нет», то «0». Ответы будем записывать по строчкам, слева направо: сначала ответ на первый вопрос, потом рядом — ответ на второй и т. д. Тогда мы сможем единицами и нулями записать любое сочетание из пяти ответов. Оно будет пятизначным числом, каждая цифра которого — нуль или единица. Из этих чисел и составлена таблица на рис. 80. Допишите таблицу до конца — всего в ней 32 числа.

Допустим, нам всегда удается угадать квартиру за 5 вопросов. Это означает следующее. Зная, какое получилось пятизначное число из нулей и единиц, мы можем точно назвать номер квартиры. Но так как пятизначных чисел у нас 32, то и квартир мы можем назвать лишь 32, а не 64, как в условии.

Кто-нибудь может спросить: «Хорошо, что квартир ровно $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, и вы могли каждый раз уменьшать число «подозрительных» квартир ровно вдвое. А как решать задачу, если бы квартир в этом доме было не 64, а, скажем, 63?» О т в е т: я старался бы делить их на такие части, которые по числу квартир как можно меньше отличаются одна от другой. Подумайте, какими должны быть вопросы в случае 63 квартир.

18.2. Имеются 26 одинаковых по виду монет. Среди них одна фальшивая, она легче остальных. Есть чашечные весы (без стрелки и гирь). Надо за наименьшее число взвешиваний найти фальшивую монету.

О б с у ж д е н и е. Достаточно трех взвешиваний. Эту задачу можно решать точно так же, как и предыдущую. Только число «подозрительных» монет надо пытаться уменьшать не в два раза, как там, а в три: ведь у каждого взвешивания три возможных результата: левая чашка перевесила, правая чашка перевесила, чашки уравновесились. Поэтому сначала я положу на каждую чашку по 9 монет. Если левая чашка перевесила, то фальшивая монета на правой чашке, если правая чашка перевесила, то фальшивая монета на левой чашке, если чашки уравновесились, то фальшивая монета — среди восьми монет, не положенных на весы. Значит, после первого взвешивания у меня останется 9 или даже 8 «подозрительных» монет. Потом я положу на чашки по 3 из них. После второго взвешивания останутся 3 или 2 «подозрительные» монеты. Положив по одной из них на чашки, выясним, какая монета фальшивая.

Теперь наступил момент задать каверзный вопрос: почему не может существовать способ, при котором фальшивая монета наверняка обнаружилась бы за два взвешивания? О т в е т: да потому, что фальшивой может оказаться любая из 26 монет, а возможных исходов двух взвешиваний всего 9 (каждый из трех исходов первого взвешивания может комбинироваться с каждым из трех исходов второго), и 9 меньше, чем 26.

18.3. Вы хотите узнать номер моего телефона, задавая мне вопросы, на которые я буду отвечать только «да» или «нет». Придумайте способ, гарантирующий успех за наименьшее число вопросов (считать, что номер состоит из семи цифр).

18.4. Шесть одинаковых по виду монет разложены в две кучки, по три монеты в каждой. Известно, что в каждой кучке две монеты настоящие, а одна — фальшивая. Все настоящие монеты имеют один вес, обе фальшивые — другой вес, меньший. Есть так же чашечные весы без стрелок и гирь. Какое наименьшее число взвешиваний вам понадобится, чтобы определить обе фальшивые монеты?

I	II	III	IV
1	2	4	8
3	3	5	9
5	6	6	10
7	7	7	11
9	10	12	12
11	11	13	13
13	14	14	14
15	15	15	15

Рис. 81

Интересно, понимаете ли вы, что общего в рассмотренных нами задачах 18.1 и 18.2? Ведь там квартира, а здесь монеты, там вопросы, а здесь взвешивания.

И все же в них много общего. Мы задаем вопросы: в одном случае — Люсе, в другом — весам, и получаем ответы: в одном случае — от Люси, а в другом — от весов. В первом случае ответы двух типов: либо «да», либо «нет», а во втором—трех: либо «первая чашка перевесила», либо «вторая чашка перевесила», либо «чашки в равновесии». А ведь когда ученые ставят опыты, они делают то же самое — задают вопросы. Известно выражение, что физический эксперимент — это вопрос, который мы задаем природе. Конечно, так могут сказать о своих опытах и химики, и биологи — все, кто изучает природу. Если хотите быть настоящими математиками, вам надо уметь задавать вопросы. Решая любую задачу, вы сначала продумываете вопросы, а потом ищете на них ответы. Верно? Часто надо спланировать работу так, чтобы за наименьшее число вопросов узнать необходимую информацию. Например, за наименьшее число вопросов узнать номер телефона. Наши задачи связаны с одним из современных разделов математики — теорией информации. Как быстрее всего передать сообщение о номере телефона, если в нашем распоряжении имеются только сигналы двух видов: один соответствует ответу «да», а другой — ответу «нет»? Это типичная задача теории информации (точнее, начал этой теории). Ответ вы получите, решив задачу 18.3.

18.5. Я вам прочту небольшой рассказик. В нем участвуют Икс, Игрек и Зет.

— Посмотрите на мое великое изобретение, — гордо произнес Икс, показывая на доску (рис. 81). Задумайте число и скажите, в каких столбцах оно стоит, и я отгадаю его.

— Мое число в четвертом столбце, — сказал Зет.

— Восемь! — мгновенно ответил Икс.

— Нечестно, ты просто видел, куда глядит Зет! — закричал Игрек.

— Не верите, так завяжите мне глаза!

Игрек вытащил носовой платок и тщательно выполнил просьбу Икса.

— Вот теперь отгадывай. Мое число стоит во втором и четвертом столбцах.

— Десять!

— Да... Правильно... А теперь в первом, третьем и четвертом.

— Тринадцать! А теперь давай по-другому: назови число, и я скажу, в каких столбцах оно стоит.

— Дай, я попробую, — вмешался Зет. — Число «девять».

— В первом и четвертом.

— Четырнадцать?

— Во всех, кроме первого.

— Все правильно, — сокрушенно пробормотал Игрек. — Но как он это делает?

— Пожалуй, я догадался, — отозвался Зет. — Но пусть наши читатели подумают сами.

— А я прошу читателей, — сказал Икс, снимая повязку, — сделать самим похожие таблицы и выступить с ними в пионерском лагере или во дворе. Я дам им только один совет: таблица эта особенная. Она составлена не с помощью нашей обычной десятичной системы счисления. Ее легко разгадает тот, кто знаком с двоичной системой. Для нас с вами она непривычна, а вот любая ЭВМ с ней справилась бы мгновенно.

Так в чем же секрет таблицы Икса? И при чем тут двоичная система счисления?

О б с у ж д е н и е. Предположим, у нас есть такая запись: «111».

В нашей обычной десятичной системе счисления так обозначается число, в котором одна сотня, один десяток и одна единица: $111 = 1 \times 100 + 1 \times 10 + 1$. Но для современных электронных вычислительных машин (ЭВМ) здесь написано всего лишь число 7— с помощью двоичной системы счисления. В этой системе всего две цифры — 0 и 1, вместо д е с я т к о в используется 2, вместо с о т е н — $2 \times 2 = 4$, вместо т ы с я ч — $2 \times 2 \times 2 = 8$, ... (вспомним, что $100 = 10 \times 10$, $1000 = 10 \times 10 \times 10$). В числе 7 содержится один раз 2×2, один раз 2 и один раз 1 — получается запись: «111». В числе 17 содержится один раз $2 \times 2 \times 2 \times 2$, ни одного раза $2 \times 2 \times 2$, 2×2 и 2 и один раз 1 — получается запись: «10001». Единица следующего разряда в двоичной системе счисления вдвое больше единицы предыдущего, поэтому в каждом разряде стоит либо 0, либо 1.

Таблица составлена так: если в двоичной записи к р а й н я я с п р а в а цифра — это 1 (например, 9 — 1001), то число записывается в первом столбце. Если вторая справа цифра — единица (например, 14 — 1110), то оно есть во втором, если третья справа единица (13 — 1101), то в третьем, если первая слева, она же четвертая справа, является единицей, то в четвертом. Так, число 9, в двоичной записи которого (1001) единицы стоят на первом и четвертом справа местах, содержится в первом и четвертом столбцах.

Ключевое число первого столбца —1, второго —2, третьего — $2 \times 2 = 4$, четвертого —$2 \times 2 \times 2 = 8$. Они стоят в первых клетках столбцов. Чтобы найти загаданное число, нужно сложить вот эти самые числа, соответствующие тем столбцам, которые называет играющий.

Конечно, все эти премудрости не понадобятся тем, кто будет загадывать числа. Наше объяснение важно для тех, кто будет выступать с таблицей и поражать всех быстрыми отгадками. О системах счисления можно почитать брошюру С. В. Фомина «Системы счисления» из серии «Популярные лекции по математике».

18.6. Перед вами лежат шесть монет, две из которых фальшивые (масса фальшивой монеты больше массы настоящей на 0,1 г). Кроме того, у вас есть чашечные весы без стрелки и гирь. Весы эти, правда, не очень чувствительны и реагируют на разность грузов не менее 0,2 г.

Попробуйте за четыре взвешивания найти обе фальшивые монеты.

18.7. Имеются 6 одинаковых по виду монет. Четыре из них настоящие, по 4 г каждая, а две фальшивые общей массой 8 г, одна чуть более тяжелая, другая чуть более легкая. За наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без стрелки и гирь найдите обе фальшивые монеты.

18.8. Подберите массы четырех гирь так, чтобы ими можно было отмерить на чашечных весах любое целое число килограммов от 1 до 40. Гири можно класть на обе чашки.

18.9. Придумайте сами несколько задач на взвешивание монет, поиск номера телефона и т. д. Решите их.

Вот более трудная задача.

18.10. Вы отгадываете номер телефона в условиях задачи 18.3. Предположим теперь, что на один из ваших вопросов я могу дать неправильный ответ. Какие тогда вопросы вы будете задавать и какое наименьшее число вопросов вам понадобится, чтобы отгадать номер?

Тема 19. СИММЕТРИИ И ПОВОРОТЫ

Важное место в изучении геометрии играют движения. Одним из наиболее важных и часто применяемых в практической жизни является симметрия относительно прямой или осевая симметрия. При этом движении точки оси симметрии переходят в себя, а точки одной полуплоскости — в точки другой, и наоборот. При решении многих задач нас может интересовать лишь образ какой-нибудь точ-

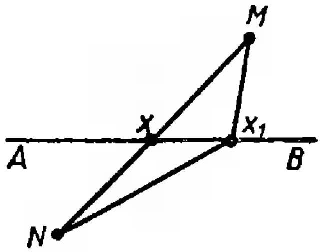


Рис. 82

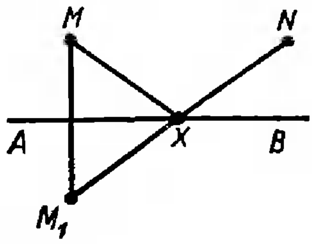


Рис. 83

ки или некоторой фигуры при осевой симметрии относительно данной прямой.

Начнем с решения такой з а д а ч и:

19.1. На прямой AB найдите точку, сумма расстояний от которой до двух данных точек M и N была бы наименьшей.

О б с у ж д е н и е.

I с л у ч а й. Пусть M и N лежат по разные стороны от прямой AB, кратчайшее расстояние между ними есть MN, следовательно, искомая точка X лежит на пересечении прямой AB с MN (рис. 82).

Всякая другая точка X_1 прямой AB не обладает этим свойством, так как $MX_1 + X_1N > MN$.

II с л у ч а й. M и N лежат по одну сторону прямой AB (рис. 83). Строим M_1, симметричную M относительно прямой AB, после чего задача сводится к случаю I. Если $MN \perp AB$, то искомая точка X есть точка пересечения прямых MN и AB.

19.2. Даны прямая AB и точки M и N. Найдите на прямой AB такую точку, чтобы разность (по модулю) ее расстояний от точек M и N была наибольшая.

19.3. Через данные точки A и B проведите две прямые так, чтобы угол между ними делился данной прямой MN на два равных угла.

О б с у ж д е н и е. Предположим, задача решена и точка X искомая (рис. 84), тогда $\angle AXM = \angle MXB$. Если построить точку B_1, симметричную B относительно прямой MN, то B_1 будет лежать на прямой AX.

О т с ю д а п о с т р о е н и е: соединим A с точкой B_1 (симметричной B) и продолжим отрезок AB_1 до пересечения с прямой MN

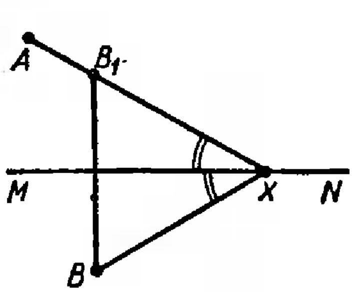


Рис. 84

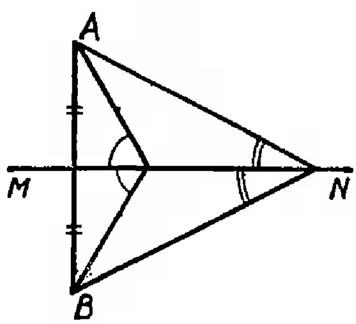


Рис. 85

в точке X. Прямые AX и BX искомые, так как образуют с прямой MN углы равной величины. Задача имеет решение, если A и B лежат по разные стороны от прямой MN.

Если A и B (рис. 85) находятся на равном расстоянии от прямой MN и если $AB \perp MN$, то таких прямых можно провести бесконечно много, так как лучи, исходящие из любой точки прямой MN и проходящие через A и B, образуют равные углы с прямой MN.

Задача не имеет решений в следующих случаях:

I случай. A и B расположены по одну сторону от прямой MN, или одна точка лежит на прямой MN.

II случай. A и B расположены по разные стороны от прямой MN на одинаковом от нее расстоянии, но прямая AB не перпендикулярна к прямой MN.

19.4. Даны угол ABC и точка M внутри него. Найти на сторонах данного угла такие точки D и E, чтобы $\triangle MDE$ имел наименьший периметр.

19.5. Вершина C треугольника ABC оказалась вне чертежа. Провести прямую, перпендикулярную прямой AB и проходящую через точку пересечения медиан треугольника (точка пересечения медиан не дана).

19.6. Из пунктов A и B, расположенных на двух пересекающихся прямых, движутся равномерно с одинаковой скоростью два пешехода. Постройте отрезок, длина которого является кратчайшим расстоянием между движущимися пешеходами.

Через сколько времени после начала движения пешеходы будут на кратчайшем расстоянии друг от друга, если $\angle AOB = 90°$, $AO = a$, $BO = b$, а скорость пешеходов равна v?

Обсуждение. Исходим из того, что пешеходы движутся в направлении точки пересечения прямых — точки O. Покажем, что пешеходы будут ближе всего друг к другу, когда они находятся в точках C и D на одинаковом расстоянии от точки O (рис. 86). Действительно, пусть они находятся в других точках: E и F. Построив отрезок DE', симметричный отрезку DE относительно прямой CD, видим, что $EF > FE' = CD$, так как EF — гипотенуза прямоугольного треугольника $FE'E$.

Если $\angle AOB = 90°$, $AO = a$, $BO = b$ и $a > b$, то минимальное расстояние между пешеходами достигается через время $\frac{a+b}{2v}$ после начала движения и равно $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

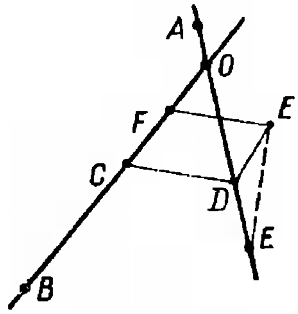


Рис. 86

19.7. Постройте треугольник ABC, зная три точки, симметричные центру описанного круга относительно сторон треугольника.

Часто при решении задач используются повороты фигур на некоторый угол,

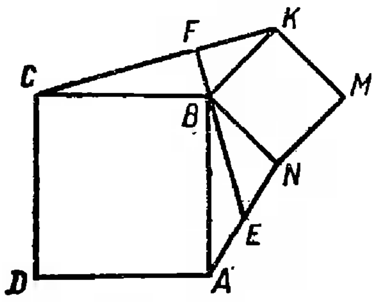


Рис. 87

частным случаем которого является центральная симметрия (поворот на 180°).

Можно начать с такой простой задачи, где речь идет о вращении и не требуется находить угол поворота, однако, ответив на вопрос задачи, можно будет указать и угол поворота.

19.8. Минутная и часовая стрелки часов совпадают ровно в 12 ч. В какой момент они совпадут впервые после 12 ч?

В следующей задаче также речь идет о процессе вращения, изучение которого можно осуществить при помощи поворота.

19.9. Стержень AB длина a шарнирно соединен в точке B со стержнем BC длиной b. На отрезке AC как на основании строится равносторонний треугольник ACE. При каком взаимном расположении стержней расстояние BE будет наибольшим?

Решим теперь несколько чисто геометрических задач, решение которых связано с использованием поворотов.

19.10. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что они пересекают стороны квадрата в точках, являющихся вершинами квадрата.

19.11. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Доказать, что они разбивают квадрат на равные фигуры.

19.12. Пусть $ABCD$ и $BKMN$ — два квадрата. Докажите, что, продолжая медиану BE треугольника ABN за вершину B, получим высоту в треугольнике KBC (рис. 87).

19.13. На сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены квадраты $CAMN$ и $CBPQ$. Докажите, что прямая, проведенная через точку C перпендикулярно к прямой AB, делит отрезок NQ пополам.

19.14. Найдите:

а) внутри треугольника ABC;

б) в плоскости этого треугольника точку X, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является наименьшей.

Нас могут интересовать фигуры, которые переходят сами в себя при некотором повороте, или способы нахождения центров поворотов, при которых одна из равных фигур переходит в другую. В том случае, когда существует поворот на 180°, при котором фигура переходит в себя, фигура называется центрально-симметричной, но фигура может переходить в себя и при поворотах на другие углы.

19.15. Даны два равных квадрата. Доказать, что в общем случае существуют четыре поворота, переводящих один квадрат в другой, и что центры этих поворотов принадлежат одной прямой.

19.16. Даны две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2 с радиусами R и на каждой из них по точке A_1 и A_2. Каким поворотом можно перевести одну окружность в другую, чтобы при этом точка A_1 перешла в точку A_2?

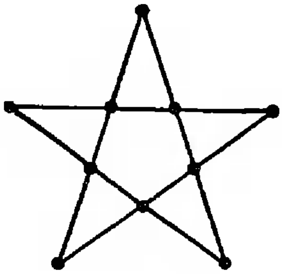


Рис. 88

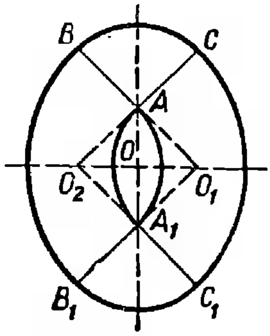


Рис. 89

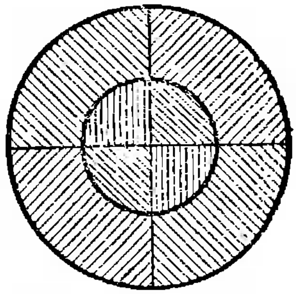


Рис. 90

При рассмотрении простых задач с практическим содержанием мы используем возможность фигур переходить в себя при поворотах на несколько различных углов. Особенно часто встречаются фигуры, которые, имея такие центры поворотов или центры симметрии, имеют еще и оси симметрии. Заметим, что у этих фигур может быть одна и более одной осей симметрии.

Начнем с простейших задач:

19.17. При изготовлении праздничной иллюминации как можно было бы красиво разместить 10 лампочек в 5 рядов, по 4 лампочки по одной прямой? Нужно, чтобы у полученной фигуры были бы центр и ось симметрии.

Ответ на этот вопрос дает пятиконечная звезда, изображенная на рисунке 88.

19.18. Задача столяра: «Столяру принесли 2 одинаковые овальные доски с продолговатым отверстием в центре (рис. 89) и заказали из них одну круглую сплошную крышку для стола».

Обсуждение. Доски оказались из дерева редкой дорогой породы, и мастеру хотелось употребить их в дело полностью, без каких бы то ни было обрезков.

Чтобы не делать лишних, необдуманных разрезов, столяр сначала вырезал из плотной бумаги выкройку доски, присмотрелся к форме, кое-что проверил циркулем. Оказалось, что намерение мастера вполне осуществимо, и притом с небольшим количеством разрезов каждой доски.

Как распилил столяр принесенные доски?

Сначала столяр заметил, что выкройка доски представляет собой симметричную фигуру с двумя осями симметрии.

Затем он обнаружил, что если половину продольной оси отверстия OA (рис. 89) отложить на поперечной оси $OO_1 = OA$ и $OO_2 = OA$ и соединить прямыми точки O_1 и A_1, а также O_2 и A, то каждая из фигур BO_1B_1 и CO_2C_1 будет в точности составлять четверть круга с радиусом O_1B, а каждая из фигур ABC и $A_1B_1C_1$ — четверть круга с радиусом A_1B_1, который равен половине радиуса O_1B_1.

Столяр распилил каждую доску по прямым BA, CA, B_1A_1 и C_1A_1 и из полученных 8 частей склеил аккуратную круглую крышку для стола, как показано на рисунке 90.

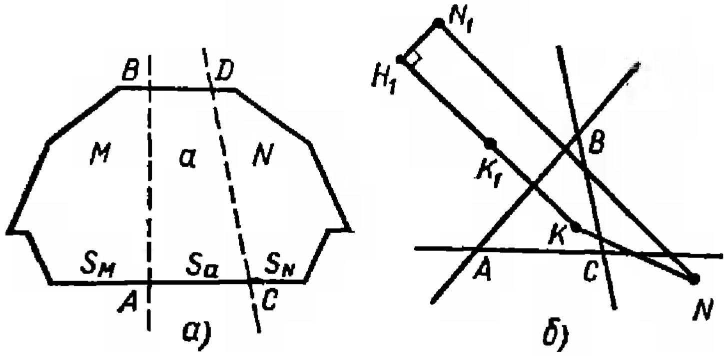


Рис. 91

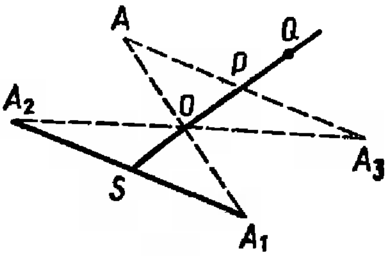


Рис. 92

Но не следует думать, что задачи об осях и центрах симметрии фигур лишь такие, как мы рассмотрели выше. Задачи могут быть и довольно трудными, а главное, имеющими теоретическое значение для построения геометрии.

19.19. Докажите, что если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

Обсуждение. Прежде всего ясно, что любые две оси симметрии пересекаются внутри многоугольника. Действительно, допустим, что это не так. Пусть AB и CD — две оси симметрии нашего многоугольника (рис. 91, *а*). Площади симметричных частей должны быть равны, следовательно,

$$S_N = S_M + S_a \text{ и } S_M = S_N + S_a.$$

Таким образом, с одной стороны, $S_N > S_M$, а с другой стороны, $S_M > S_N$, что быть не может.

Итак, любые две оси симметрии пересекаются внутри многоугольника. Покажем, что третья ось симметрии пройдет через точку пересечения первых двух.

Для доказательства предположим противное. Тогда три наши оси симметрии образуют некоторый треугольник ABC (рис. 91, *б*). Выберем внутри треугольника ABC произвольную внутреннюю точку K. Нетрудно проверить, что любая точка N плоскости лежит по ту же сторону, что и K, хотя бы от одной из осей симметрии. Соединим точку K с наиболее удаленной от нее точкой N нашего многоугольника.

Пусть K и N лежат по одну сторону оси AB. Точка N_1, симметричная N относительно прямой AB, очевидно, тоже принадлежит многоугольнику. Легко видеть, что $N_1K > N_1K_1$, где K_1 — точка, симметричная K относительно прямой AB. В самом деле, $KK_1 \perp AB$. Поэтому точка H_1 — основание перпендикуляра, проведенного через N_1 к прямой KK_1, лежит с той стороны оси AB, что и N_1, и K_1, поэтому проекция N_1K_1 на прямую KK_1 меньше проекции N_1K, откуда сразу и следует требуемое неравенство. Но в силу симметрии $N_1K_1 = NK$; таким образом, $NK < N_1K_1$, что противоречит тому, что N — самая далекая от K точка многоугольника. Полученное противоречие и доказывает теорему.

19.20. Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров симметрии (например, полоса между двумя параллельными прямыми). Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

Обсуждение. Допустим, что фигура имеет два центра симметрии S и O. Отразим точку S симметрично относительно O (рис. 92). Докажем, что полученная точка P также будет центром симметрии.

Пусть A — произвольная точка фигуры. Тогда точка A_1, симметричная A относительно O, тоже принадлежит фигуре, так как O — центр симметрии. Также принадлежит фигуре точка A_2, симметричная A_1, относительно S, и точка A_3, симметричная A_2 относительно O. Отрезок AP равен и параллелен SA_1, а следовательно, и A_2S. Но и отрезок PA_3 равен и параллелен отрезку A_2S, следовательно, $AP = PA_3$ и точки A, A_3, P лежат на одной прямой, т. е. A_3 симметрична A относительно P. Таким образом, точка A, симметричная произвольной точке A фигуры относительно P, сама принадлежит фигуре. Следовательно, P — центр симметрии.

Отразив теперь точку O относительно точки P, мы можем таким же образом построить еще один центр симметрии Q и т. д. Следовательно, если фигура имеет два центра симметрии, то она имеет их бесчисленно много. Поэтому более одного, но конечное число центров симметрии фигура иметь не может.

19.21. Сколько осей симметрии может иметь несамопересекающийся n-угольник?

19.22. а) Система из конечного числа точек плоскости такова, что ось симметрии любых двух точек одновременно является осью симметрии всей системы точек. Докажите, что все точки принадлежат одной окружности. Остается ли в силе это утверждение, если число точек является бесконечным?

б) Система из конечного числа точек плоскости обладает тем свойством, что для каждых двух точек существует движение, переводящее одну из них в другую, а всю систему точек переводящее в себя. Докажите, что все точки лежат на одной окружности. Остается ли в силе это утверждение, если число точек является бесконечным?

Тема 20. ИГРА В „МОРСКОЙ БОЙ"

Наверное, все школьники умеют играть в морской бой. Мы попробуем разобрать несколько задач, с помощью которых можно предложить некоторые практические рекомендации игрокам. Впрочем, мы увидим, что, хотя правила игры просты, математическая теория достаточно сложна, а некоторые особенности поведения игроков неизвестно как описать, так что гарантированного выигрыша мы не можем обещать.

У нас будут такие правила. У каждого из двух игроков есть две таблицы 10 × 10 клеток (иногда вместо «таблица» говорят «доска»). Клетки таблиц обозначаются так, как показано на рисунке

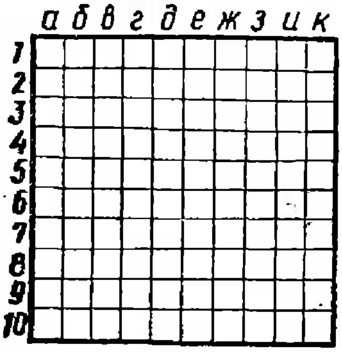


Рис. 93

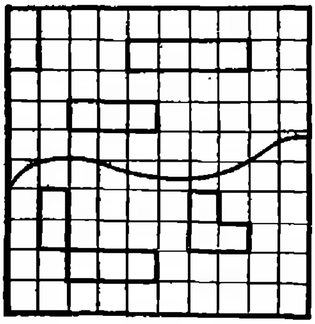


Рис. 94

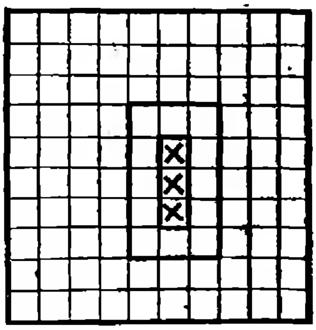


Рис. 95

93: строки обозначаются числами 1, 2, ..., 10 сверху вниз, столбцы — буквами *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*, *ж*, *з*, *и*, *к* слева направо, а клетка однозначно определяется, если известно, в каком столбце и в какой строке она стоит, и обозначается написанными рядом буквой столбца и номером строки. Например, *д*3 обозначает клетку, лежащую на пересечении столбца *д* и строки 3. Как видите, система обозначений напоминает принятую в шахматах.

Каждый игрок на одной из таблиц расставляет свой флот, корабли которого состоят из клеток, расположенных в ряд по горизонтали или в ряд по вертикали. Корабли *не должны иметь общих точек*. На рисунке 94 вверху «правильное» расположение кораблей, а внизу — «неправильное». Число кораблей и количество клеток в них определяется соглашением между игроками. Часто флот каждого состоит из четырехклеточного («линкор»), трехклеточного («крейсер»), двух двухклеточных («эсминцы») и четырех одноклеточных («подводные лодки») кораблей. Расположение кораблей составляет «военную тайну» игрока, который тщательно оберегает его от глаз противника.

Игроки по очереди обмениваются ударами. Каждый ход — это удар по одной из клеток таблицы противника, который говорит: «мимо», если названная клетка не является частью ни одного из его кораблей, «попал», если названная клетка входит в один из кораблей, и «убит», если эта клетка — последняя, оставшаяся не битой до этого момента клетка одного из кораблей. Если удар пришелся «мимо», то следующий ход противника. Если же «попал» или «убит», то игрок получает право нанести еще один удар (и, естественно, пользуется этим правом!). Выигрывает тот, кто первым потопит весь флот противника.

На одной таблице игрока стоит его собственный флот (двигать корабли во время боя не разрешается!), на второй отмечаются нанесенные удары и их результаты. Например, если «крейсер» потоплен («убит»), то (рис. 95) в прямоугольнике 3 × 5 клеток, центральные три клетки которого — клетки этого «крейсера», нет больше клеток вражеских кораблей, поэтому наносить по этим клеткам удары бессмысленно.

Мы подробно описали правила, которых будем придерживаться.

Существуют и другие варианты правил. Один из них описан в книге Я. И. Перельмана «Занимательные задачи и опыты» (М., Детгиз, 1959, с. 506—508).

Чем может помочь математика игроку в «морской бой»? Начнем с простой задачи:

20.1. На доске 10×10 клеток для игры в «морской бой» стоит «линкор» (корабль из четырех клеток, расположенных в ряд по горизонтали или в ряд по вертикали). Где именно он стоит, нам неизвестно. По скольким клеткам надо нанести удары, чтобы наверняка попасть в «линкор»?

Обсуждение. Что значит «наверняка попасть»? Если стрелять по всем клеткам нечетных горизонталей (т. е. по пятидесяти клеткам первой, третьей, пятой, седьмой и девятой горизонталей), то, если повезет, первый же выстрел может дать попадание, но может случиться и так, что будет пятьдесят промахов — вдруг линкор стоит как раз на четной горизонтали. А вот если раскрасить доску, как шахматную (точнее, как для игры в стоклеточные шашки), и стрелять по черным полям, то линкор наверняка будет задет, поскольку две его клетки из четырех черные. Черных клеток 50, значит, этот план стрельбы гарантирует попадание не более чем за 50 выстрелов. Можно ли обойтись меньшим числом ударов?

Уточнение 1 постановки задачи. Придумайте план из возможно меньшего числа выстрелов, гарантирующий попадание в линкор.

Обсуждение. Каким наименьшим числом выстрелов можно обойтись? Чтобы найти ответ на этот вопрос, надо предъявить план стрельбы, удовлетворяющий двум условиям:

а) он гарантирует попадание в линкор;

б) никакой план стрельбы из меньшего числа выстрелов не гарантирует попадания в линкор.

Уточнение 2 постановки задачи. Найдите план стрельбы, удовлетворяющий условиям а) и б).

Замечание. В задаче **20.12** найдены все планы стрельбы, удовлетворяющие условиям а) и б).

Обсуждение. Прежде всего, что такое план? Мы стреляем по клетке («выстрелить» и «нанести удар» — для нас одно и то же). Если противник отвечает «попал», то игра кончена, линкор задет. Если же он отвечает «мимо», то мы должны решить, по какой клетке стрелять дальше. Так почему бы не решить сразу, по каким клеткам и в каком порядке мы будем стрелять, пока не заденем «линкор»? Итак, план — это последовательность клеток доски (например, первая — *а*1, вторая — *б*2, третья — *с*3, четвертая — *д*4, ...) такая, что, сделав выстрелы по всем входящим в нее клеткам, мы обязательно заденем «линкор». Что значат слова «обязательно», «наверняка»? Мы ведь не знаем, где стоит линкор противника, и хотим действовать так, чтобы не оставить ему ни одного шанса ускользнуть. Может даже быть полезным «обратить» постановку: считать план заданным и располагать линкор самым невыгодным образом. Так уже делали при формулировке задачи: в план входили удары по 50 клеткам нечетных горизонталей, а невыгодным расположением линкора было расположение вдоль одной из четных горизонталей. Но довольно слов, перейдем к делу.

Естественным является план стрельбы по диагоналям, расположенным на возможно более дальнем расстоянии друг от друга, но таком, чтобы линкор не мог «втиснуться» между ними. Значит, на каждой горизонтали клетки, по которым наносятся удары, идут через три на четвертую. Поэтому раскрасим поля доски так, как на рисунке 96 (вместо цветов мы пишем буквы: *к* — красный, *с* — синий, *з* — зеленый, *ж* — желтый). Есть четыре естественных плана стрельбы — по красным клеткам, по синим, по зеленым, по желтым. Какой лучше? Непосредственный подсчет показывает, что на доске имеется 24 желтых, 26 синих, 25 зеленых и 25 красных полей. Понятно, что каждый четырехклеточный корабль занимает ровно по одной клетке каждого цвета. Поэтому, обстреливая последовательно желтые поля, мы не более чем за 24 выстрела попадем в корабль.

Докажем, что не существует способа нанесения 23 ударов, при котором наверняка будет поражен линкор. Доказательство проведем методом «от противного». Допустим, что такой способ существует. Из рисунка 97 видно, что на доске 10×10 клеток удается расставить 24 линкора, не имеющих общих клеток. Именно, в столбцах *а*, *б*, ..., *ж*, *з* можно расставить 20 линкоров, по два на горизонтали, а в столбцах *и*, *к* — по два линкора в вертикальном направлении. Поскольку в плане, существование которого мы предположили, всего 23 выстрела, то (по принципу Дирихле — см. тему 15) на клетки хотя бы одного из расставленных на рисунке 97 линкоров не приходится ни одного выстрела. Вернемся теперь к нащупыванию одинокого линкора. Если бы он стоял именно на тех клетках, на которых стоит тот линкор из системы на рисунке 97, внутри которого нет выстрелов из плана, то он, конечно, не был бы задет ни одним из 23 выстрелов. Значит, план из 23 выстрелов никогда не может гарантировать попадание в линкор.

к	с	з	ж	к	с	з	ж	к	с
с	з	ж	к	с	з	ж	к	с	з
з	ж	к	с	з	ж	к	с	з	ж
ж	к	с	з	ж	к	с	з	ж	к
к	с	з	ж	к	с	з	ж	к	с
с	з	ж	к	с	з	ж	к	с	з
з	ж	к	с	з	ж	к	с	з	ж
ж	к	с	з	ж	к	с	з	ж	к
к	с	з	ж	к	с	з	ж	к	с
с	з	ж	к	с	з	ж	к	с	з

Рис. 96

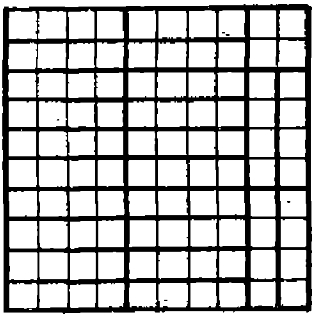


Рис. 97

20.2. На доске 10×10 клеток для игры в «морской бой» стоит «крейсер» (корабль из трех клеток, расположенных в ряд). По скольким клеткам надо нанести удары, чтобы наверняка задеть «крейсер»?

а) Придумайте план из возможно меньшего числа выстрелов, гарантирующий попадание в «крейсер».

б) Докажите, что меньшего числа ударов, чем у вас, может и не хватить.

20.3. Те же вопросы для «эсминца» (корабля из двух клеток, расположенных в ряд).

20.4. Те же вопросы для «подводной лодки» (одноклеточный корабль).

При решении задач типа 20.1 некоторые рассуждают примерно так: «Данный план позволяет наверняка попасть в «линкор». Если же наносить удары по всем клеткам плана, кроме одной, то можно и не попасть. Следовательно, меньшим числом выстрелов, чем на этом плане, не обойтись». Рассуждение неправильно. Планов много, и они не получаются друг из друга перестановкой одного-двух ударов. Каждый из четырех планов — стрелять по красным клеткам, по синим, по желтым, по зеленым (см. рис. 96) — таков, что при пропуске одного удара уже нельзя гарантировать попадание в «линкор». Однако один из этих планов состоит из 24 ударов, два — из 25 и один даже из 26... В чем причина появления подобных ошибочных рассуждений? Дело в том, что из плана с наименьшим возможным числом выстрелов нельзя выкинуть ни одного удара без потери гарантии попадания наверняка. Следовательно, для того чтобы данный план был планом с наименьшим возможным числом выстрелов (будем говорить: оптимальным планом), необходимо, чтобы из него нельзя было выкинуть ни одного удара без потери гарантии попадания наверняка. Однако это необходимое условие отнюдь не является достаточным! Из того, что нельзя выкинуть ни одного выстрела без потери гарантии попадания наверняка, отнюдь не следует, как показывают приведенные выше примеры, что план является оптимальным!

20.5. На доске 10 × 10 клеток для игры в «морской бой» стоит эскадра из двух кораблей — линкора и крейсера. По скольким клеткам надо нанести удары, чтобы наверняка задеть хотя бы один из кораблей эскадры?

а) Придумайте план из возможно меньшего числа выстрелов, гарантирующий попадание в один из кораблей эскадры.

б) Докажите, что меньшего числа выстрелов, чем у вас, может и не хватить.

Обсуждение. Решившие задачу 20.2 знают, что в охоте за крейсером гарантирован успех только тогда, когда число ударов не менее 33. А для поимки линкора достаточно 24 выстрелов. Поэтому сразу приходит в голову план — охотиться за флагманом. За 24 выстрела флагман будет обязательно задет.

Но неужели для гарантированного попадания в один из кораблей эскадры из линкора и крейсера нужно столько же выстрелов, сколько для одного линкора? Если мы случайно выберем одну клетку и выстрелим по ней, то за поражение линкора есть 4 шанса из 100, а за поражение одного из кораблей эскадры — 7 шансов из 100! Но тем не менее имеет место поразительное обстоятельство:

для попадания в один из кораблей эскадры необходимо не менее 24 выстрелов, как и для одного флагмана!

Докажем, что не существует способа нанесения 23 «ударов», при котором наверняка будет поражен хотя бы один корабль. Доказательство проведем «от противного». Допустим, что такой способ существует. Как показано при решении задачи 20.1, линкор может оказаться расположенным так, что он не будет обнаружен. Докажем, что при этом может случиться, что и «крейсер» не будет задет. Корабли не должны соприкасаться, поэтому «крейсер» может находиться на любой из 7 линий доски (линия — это горизонталь или вертикаль), параллельных «линкору» и не соприкасающихся с ним. На этих линиях можно расположить по крайней мере $3 \times 7 = 21$ «крейсер», никакие два из которых не имеют общих клеток. На трех остальных линиях можно расположить в направлении, перпендикулярном «линкору», еще по крайней мере 4 «крейсера». Значит, при рассматриваемом способе нанесения ударов может оказаться, что и «крейсер» не будет обнаружен: поскольку крейсеров 25, а ударов 23, то по принципу Дирихле по крайней мере на два из них не придется ударов — на месте одного из этих двух мог стоять крейсер первоначально. Итак, по рассматриваемому плану стрельбы нашли стоянки кораблей эскадры, «свободные от попаданий». Отметим, что это рассуждение не доказывает, что для попадания в эскадру из линкора и д в у х крейсеров надо не менее 24 выстрелов: хотя на две стоянки крейсеров не приходится выстрелов (см. выше), но нельзя утверждать, что на эти стоянки можно действительно поставить корабли, поскольку корабли не должны иметь общих точек, а от стоянок требовалось лишь, чтобы они не имели общих клеток.

20.6. На доске — эскадра из «линкора» и 10 «крейсеров». Найдите план стрельбы, гарантирующий попадание не более чем за 23 выстрела.

20.7. Для гарантированного попадания в эскадру из «линкора», «крейсера», «эсминца» и 4 «подводных лодок» необходимо 24 выстрела. Докажите.

20.8. Для гарантированного попадания в один из кораблей эскадры из «крейсера» и двух «эсминцев» необходимо не менее 33 выстрелов.

20.9. Корабли эскадры в сумме занимают 10 клеток. Какие корабли выбрать, чтобы как можно больше было то количество выстрелов, за которое можно наверняка обнаружить эскадру (попасть в один из кораблей)?

Результаты задач 20.5, 20.7, 20.8 парадоксальны — количество выстрелов, гарантирующее попадание в один из кораблей эскадры, совпадает с количеством выстрелов, гарантирующим попадание в ее флагман! Опытные игроки знают, что среднее число выстрелов до первого попадания в эскадру существенно меньше, чем среднее число выстрелов до попадания в флагман. Но у нас есть словечко «наверняка»!

На основе математической теории можно сформулировать рекомендацию: начинать бой с охоты на флагмана. В некоторых простых случаях эта рекомендация основывается на точных теоремах (задачи 20.5, 20.7, 20.8), другие же случаи оказываются слишком сложными, но мы надеемся, что закономерности, подмеченные в простых случаях, справедливы и в более сложных (считаем для начала, что мир устроен просто, природа не является злонамеренной).

С какого выстрела в оптимальном плане надо начинать? Для ответа на этот вопрос надо знать что-либо о психологии игроков в морской бой и, что более важно, уметь рассчитать оптимальное поведение после первого попадания, чего мы на настоящем этапе развития «теории морского боя» делать не умеем. Поэтому ограничимся несколькими замечаниями.

Пусть первое попадание в линкор произошло при выстреле по клетке *б*2. По какой клетке наносить следующий удар? Разберемся, как может стоять линкор, одна из клеток которого — *б*2. Он может быть расположен горизонтально и занимать клетки *а*2, *б*2, *в*2, *г*2 либо *б*2, *в*2, *г*2, *д*2. Он может быть расположен вертикально и занимать клетки *б*1, *б*2, *б*3, *б*4 либо *б*2, *б*3, *б*4, *б*5. По какой клетке стрелять: по *б*1 или по *б*3? Клетка *б*1 входит в 1 расположение из 4, а клетка *б*3 — в 2 из 4. Лучше бить по *б*3. Точно так же лучше *в*2, чем *а*2. И *в*2, и *б*3 встречаются 2 раза из 4, и мы не можем выбрать между ними, используя лишь возможные положения линкора.

Подсчитаем число различных положений линкора, при которых он попадает под удар по фиксированной клетке. Это число равно сумме количества клеток корабля, могущих находиться между ударом и ближайшим вертикальным краем, и количества клеток корабля, могущих находиться между ударом и ближайшим горизонтальным краем, плюс 2 (или: считая в обоих случаях саму клетку удара). Полученные числа приведены на рисунке 98. Если полагать все положения корабля равновозможными, то начинать охоту надо с центра. Если бы играли в морской бой с ЭВМ, для которой все положения корабля имеют одинаковые шансы появиться, то такой способ был бы хорош. Но, быть может, есть психологическое пристрастие к берегу. Тогда, конечно, такой способ не наилучший.

Если в борьбе участвует не один корабль, а флот, то имеется тенденция ставить часть кораблей у берегов, чтобы обеспечить остальным «свободное море»: ведь при гибели корабля противник узнает, что вокруг него в зоне шириной в одну клетку нет других судов, и количество клеток, где оставшиеся суда могут стоять, уменьшается. Число «выведенных из игры» клеток меньше всего, если одна из клеток подбитого корабля является угловой.

2	3	4	5	5	5	5	4	3	2
3	4	5	6	6	6	6	5	4	3
4	5	6	7	7	7	7	6	5	4
5	6	7	8	8	8	8	7	6	5
5	6	7	8	8	8	8	7	6	5
5	6	7	8	8	8	8	7	6	5
5	6	7	8	8	8	8	7	6	5
4	5	6	7	7	7	7	6	5	4
3	4	5	6	6	6	6	5	4	3
2	3	4	5	5	5	5	4	3	2

Рис. 98

20.10. Подсчитайте число положений крейсера, попадающего под данный удар (получите рисунок, аналогичный рисунку 98).

20.11. Сделайте то же самое для эсминца и подводной лодки.

Что же такое «теория морского боя»? По существу мы «планируем эксперимент» по обнаружению эскадры. Это можно сравнить с поисками полезных ископаемых, с поисками выгодного режима работы оборудования. Такие режимы обычно образуют область (корабль из нескольких клеток), но не сводятся к точке (одноклеточный корабль). Наука «планирование эксперимента» сейчас широко разрабатывается.

Можно «теорию морского боя» связать с поиском информации в автоматическом словаре ЭВМ. В реферативном журнале «Математика» за год публикуется около 30 000 рефератов статей и книг, содержащих новые результаты. Поэтому понятна необходимость автоматизированных систем поиска информации: нужно найти «эскадру» — нужную информацию — в море той, что пока не требуется.

Докажем один более сложный результат.

20.12. На доске 10×10 клеток для игры в «морской бой» стоит линкор. Найдите все планы стрельбы, гарантирующие попадание в линкор за 24 выстрела.

Обсуждение. а) Заметим сначала, что стоящий на любом месте линкор можно включить в систему 24 линкоров, не имеющих ни одной общей клетки. Действительно, всегда можно расположить три линкора параллельно данному так, чтобы они все вместе образовывали квадрат 4×4 клетки, который либо примыкает к одной из сторон доски, либо отстоит от нее ровно на 4 линии. Например, если линкор расположен по 3-й горизонтали, то приставим к нему линкоры на 1, 2 и 4-й горизонталях; если линкор расположен по вертикали *д*, то приставим линкоры по вертикалям *е*, *ж*, *з* — получим квадрат в 4 линиях от левого края доски. Дальнейшее ясно: если квадрат примыкает к стороне, то перпендикулярно этой стороне ставим 6 линкоров, вместе с ранее поставленными они заполняют прямоугольник 4×10 клеток, в соседнем прямоугольнике 4×10 клеток ставим еще 10 линкоров и в прямоугольнике 2×10 — 4 линкора; получаем расстановку, аналогичную изображенной на рисунке 97. Если же квадрат расположен в 4 линиях от края, то на этих 4 линиях ставим 10 линкоров, перпендикулярно 4 линиям ставим 6, вместе с квадратом они образуют второй прямоугольник 4×10 клеток, еще 4 линкора ставятся, как в предыдущем случае.

б) Докажем, что при любом положении линкора в него должен попадать ровно один выстрел из оптимального плана. Действительно, предположим противное. Пусть попало два выстрела. Включим линкор в систему 24 линкоров, не имеющих общих клеток. По принципу Дирихле по крайней мере на один из этих линкоров не достанется выстрела. Это противоречит тому, что план гарантирует попадание в линкор.

в) Пусть по некоторой клетке согласно оптимальному плану из

24 выстрелов надо произвести удар. Тогда по клеткам, стоящим через три на четвертую от битой по горизонтали и вертикали, также необходимо стрелять. Действительно, рассмотрим линкоры, один из концов которых находится в рассматриваемой битой клетке. Внутри них нет других клеток под боем, но вторые их концы примыкают к битым клеткам (рис. 99). Если бы клетки, к которым примыкают вторые концы линкоров, не были биты, то линкоры можно было бы сдвинуть так, чтобы в них не попал ни один выстрел.

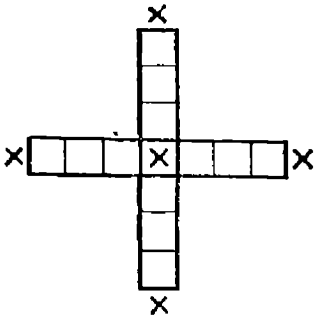


Рис. 99

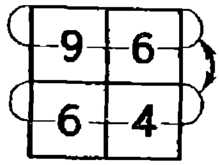


Рис. 100

г) Из предыдущего следует, что оптимальный план устроен так: в квадрате 4×4 клетки в левом верхнем углу на каждую горизонталь и вертикаль приходится по одному выстрелу, каждая битая клетка в этом квадрате «порождает» систему ударов на всей доске, в систему входят клетки, отстоящие от битой на три клетки по вертикали и по горизонтали, и вообще все клетки, полученные из уже отмеченных сдвигом через три на четвертую по вертикали и горизонтали. Например, клетка *а*2 «порождает» *а*6, *а*10, *д*2, *д*6; *д*10, *и*2, *и*6, *и*10. Другими словами, оптимальный план получается с помощью сдвигов квадрата 4×4 в левом верхнем углу на 4, 8 клеток вправо или вниз (всего 8 сдвигов, перечислите их), при этом части квадрата, выходящие за пределы доски, не учитываются.

д) Разобьем квадрат 4×4 на 4 квадрата 2×2. Каждая битая клетка в «угловом» квадрате 2×2 порождает еще 8 битых клеток, всего с нею 9; в соседних с ней квадратах — еще 5, всего 6; в оставшемся квадрате — всего 4 (рис. 100). В квадрате 4×4 в каждой горизонтали и в каждой вертикали по одной битой клетке. Если поменять местами две горизонтали (вырезать и переставить), то указанное свойство сохранится.

е) Докажем, что в угловом квадрате 2×2 нет ни одного выстрела. Предположим противное. Тогда по принципу Дирихле из двух ударов, приходящихся на горизонтали 3, 4, хотя бы один приходится на квадрат *в*3, *в*4, *г*3, *г*4. Переставим горизонтали, в которых лежат рассматриваемые удары в угловом квадрате и в квадрате *в*3 — *г*4. Что произойдет с числом битых клеток на всей доске? Оно изменится с $9 + 4 = 13$ на $6 + 6 = 12$, поскольку после перестановки удары придутся на клетки квадратов, соседних с угловым. Число битых клеток уменьшилось, значит, исходный план не был оптимальным.

ж) В квадрате 2×2 клетки разместить два удара (по одному на каждую вертикаль и на каждую горизонталь) можно только двумя способами — либо по одной диагонали, либо по другой. Поскольку из наличия удара в квадрате *в*3 — *г*4 следует, что один из выстрелов, приходящихся на вертикали *а*, *б*, находится в угловом квадрате, что в соответствии с пунктом е) невозможно, то все 4 удара — в квадратах, соседних с угловым, по два на квадрат, внутри каждого разместить выстрелы можно двумя способами, всего $2 \times 2 = 4$ способа. Планы стрельбы, соответствующие этим способам, изображены на рисунке 101, *а* — *г*. Каждый из них гарантирует попадание в линкор и содержит 24 выстрела. Два из них предлагают стрельбу по диагоналям и могли быть придуманы без математики. Два других, видимо, дар математики игрокам в «морской бой».

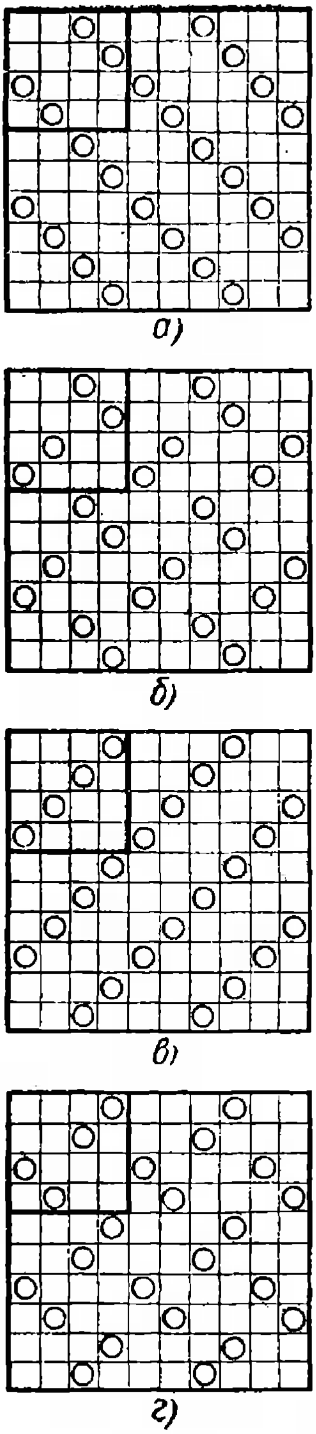


Рис. 101

Тема 21. ПРАВИЛО „КРАЙНЕГО"

Если вы хотите научиться решать математические задачи, вам надо попытаться овладеть более или менее общими подходами, приемами и методами математических рассуждений. Рассмотрим один весьма общий подход, который мы будем называть п р а в и л о м «крайнего».

Правило «крайнего» может быть кратко выражено словами: «Рассмотрите крайнее!» Это правило есть попросту рекомендация рассмотреть объект, обладающий какими-либо «крайними», или, как говорят математики, э к с т р е м а л ь н ы м и свойствами. Если речь в задаче идет о множестве точек на прямой, то правило «Рассмотри крайнее!» советует нам сосредоточить свое внимание на самой крайней точке множества, самой левой или самой правой. Если в задаче фигурирует некоторый набор чисел, то правило «крайнего» рекомендует рассмотреть наибольшее или наименьшее из этих чисел.

Рассмотрим применение этого подхода на некоторых п р и м е р а х.

21.1. На плоскости задано некоторое множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества M. Докажите, что множество M содержит бесконечно много точек.

О б с у ж д е н и е. Очень часто бывает так, что ключ к решению задачи находят, решая более простую аналогичную задачу. Поэтому, прежде чем решать данную задачу, попробуем решить следующую з а д а ч у:

21.2. На прямой задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.

Обсуждение. Будем, в противоречие с доказываемым, предполагать, что множество M конечное. Применим правило «крайнего»: если множество M конечное, то среди его точек есть крайние — самая левая и самая правая. Рассмотрим одну из них, например самую левую, обозначим ее буквой A. Точка A крайняя и потому не может лежать внутри отрезка, соединяющего две другие точки множества M, а значит, она не принадлежит M. Полученное противоречие и доказывает, что множество M не может быть конечным.

Приведем еще одно решение этой задачи, использующее правило «крайнего». Допустим снова, что множество M конечно, и рассмотрим длины отрезков, соединяющих точки из M. Этот набор чисел конечен. Применим к нему наше правило в форме: «Рассмотрите наибольшее!» — и рассмотрим отрезок BC наибольшей длины. Ясно, что вне отрезка BC нет точек из M, иначе существовали бы отрезки с большими длинами. Таким образом, все точки множества M лежат на отрезке BC и, значит, ни B, ни C не удовлетворяют условию, т. е. не принадлежат множеству M. Противоречие. Множество M должно быть бесконечным.

Вернемся теперь к задаче 21.1. Аналогично предыдущему допустим, что множество M конечно. Снова применим правило «крайнего» и рассмотрим самую левую точку множества M, а если «самых левых» точек несколько, рассмотрим самую нижнюю из них. Легко убедиться, что эта точка, обозначим ее A, не может лежать внутри отрезка, соединяющего две точки множества M. Действительно, если бы такой отрезок существовал, то один из его концов находился бы либо левее A, либо на одной с точкой A вертикали, но ниже ее. Ни того, ни другого не может быть в силу выбора точки A.

Здесь, как и в задаче 21.2, тоже существует решение, основанное на рассмотрении попарных расстояний между точками множества M. Если множество M конечно, то и попарных расстояний конечное число и среди них, руководствуясь правилом «крайнего», можно отыскать наибольшее. Пусть A и B — пара точек множества M, находящихся на этом наибольшем расстоянии друг от друга, т. е. расстояние между любыми двумя точками из M не превосходит $|AB|$. Пусть CE — тот отрезок, серединой которого является точка B. Точки C и E не могут лежать на прямой AB, иначе одна из них оказалась бы удалена от A на расстояние большее, чем $|AB|$. Поэтому точки A, C, E являются вершинами треугольника, в котором AB является медианой. Нетрудно доказать, что медиана, проведенная к одной из сторон треугольника, всегда меньше полусуммы двух других сторон и, значит, меньше хотя бы одной из этих сторон. (Для доказательства достаточно рассмотреть параллелограмм $ACKE$, построенный на сторонах AC и AE треугольника

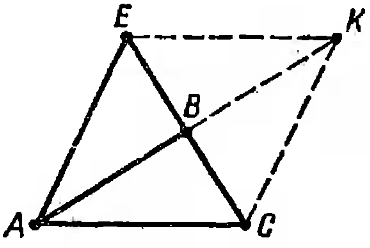


Рис. 102

CAE, как показано на рисунке 102: в нем длина диагонали AK равна удвоенной длине AB, но меньше суммы длин двух сторон $|AC| + |CK| = |AC| + |AE|$.) Отсюда следует, что $|AB|$ не является наибольшим из попарных расстояний. Противоречие.

21.3. На полях бесконечной шахматной доски записаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел — верхнего, нижнего, правого и левого. Докажите, что все эти числа равны между собой.

Обсуждение. Решить эту задачу нам поможет правило «крайнего» в форме: «Рассмотрите наименьшее!» Среди натуральных чисел, записанных на полях шахматной доски, непременно существует наименьшее. В этом нетрудно убедиться. Пусть K — одно из данных чисел. Если среди чисел, записанных на доске, имеется единица, то она и является таким наименьшим числом: не существует натуральных чисел, меньших единицы. Если единицы на доске нет, посмотрим, нет ли там двойки. Если есть, то она и является наименьшим числом, если же нет, то поищем на доске тройку и т. д. Не более чем за K шагов мы отыщем таким образом наименьшее число. (Вообще утверждение о том, что всякое непустое множество натуральных чисел содержит наименьшее число, называется «принципом наименьшего числа» и при аксиоматическом построении арифметики иногда принимается за аксиому.)

Обозначим наименьшее из чисел, записанных на доске, буквой m. Рассмотрим поле P, на котором записано это число. Обозначим числа, записанные на соседних полях, буквами a, b, c и d. По условию $m = \frac{a+b+c+d}{4}$. Отсюда $a+b+c+d = 4m$. В силу выбора числа m имеем: $a \geqslant m$, $b \geqslant m$, $c \geqslant m$, $d \geqslant m$. Если хотя бы одно из этих неравенств было строгим, то мы имели бы: $a + b + c + d > 4m$. Значит, $a = b = c = d = m$, т. е. соседние числа равны m. Таким образом, если на некотором поле записано число m, то и на соседних полях записано число m. Отсюда следует, что на горизонтали, содержащей поле P, записаны одни только числа m, а так как любая вертикаль пересекает эту горизонталь, то она содержит число m и, значит, все числа на ней равны m. Значит, все вообще числа равны m.

21.4. На квадратной шахматной доске размером $n \times n$ расставлены ладьи с соблюдением следующего условия: если некоторое поле свободно, то общее количество ладей, стоящих на одной с этим полем горизонтали или на одной с ним вертикали, не менее n. Докажите, что на доске находится не менее чем $\frac{n^2}{2}$ ладей.

Обсуждение. Эта задача трудная. Однако умелое применение правила «крайнего» может существенно облегчить поиски решения. Именно правило «крайнего» может натолкнуть вас на мысль рассмотреть ту из $2n$ линий доски — вертикалей и горизонталей, на которой стоит меньше всего ладей.

Итак, рассмотрим эту линию. Может случиться, что есть несколько таких линий, «одинаково нагруженных» ладьями. Тогда выберем одну из них, любую. Рассмотрим случай, когда эта линия — горизонталь (в противном случае повернем доску на 90° — вертикали станут горизонталями). Число ладей на этой горизонтали обозначим буквой k. Если $k \geqslant \frac{n}{2}$, то на каждой из n горизонтали не менее $\frac{n}{2}$ ладей, а всего на доске не менее $\frac{n^2}{2}$ ладей.

Пусть теперь $k < \frac{n}{2}$. На рассматриваемой горизонтали $n - k$ свободных полей, и каждая вертикаль, проходящая через такое свободное время, содержит, как видно из условия, не менее $n - k$ ладей, а все такие вертикали не менее $(n - k)^2$ ладей. Остальные k вертикалей содержат не менее чем по k ладей каждая в силу выбора числа k. Всего на доске находится не менее чем $(n - k)^2 + k^2$ ладей. Остается доказать, что $(n - k)^2 + k^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$. Это можно сделать разными способами. Вот один из них.

Обозначим число $\frac{n}{2} - k$ буквой x. Тогда $k = \frac{n}{2} - x$ и $n - k = \frac{n}{2} + x$. Отсюда

$$(n-k)^2 + k^2 = \left(\frac{n}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{n}{2} - x\right)^2 = \frac{n^2}{2} + x^2 \geqslant \frac{n^2}{2},$$

что и требовалось доказать.

Если n — число четное, то можно найти удовлетворяющую условию расстановку, содержащую в точности $\frac{n^2}{2}$ ладей, — достаточно поставить ладьи на все черные поля или на все белые. Если число n нечетное, то $\frac{n^2}{2}$ ладей расставить, удовлетворяя условию, нельзя, так как число $\frac{n^2}{2}$ нецелое, но $\frac{n^2+1}{2}$ ладей расставить можно: одну ладью ставим на одно из угловых полей, а остальные — на полях того же цвета.

Аналогично предыдущей решается следующая задача:

21.5. Пусть n^2 неотрицательных целых чисел расположены в виде квадратной таблицы, содержащей n строк и n столбиков. При этом выполнено следующее условие: если на некотором месте таблицы записан нуль, то сумма чисел столбца и строки, содержащих этот нуль, не меньше $\frac{n}{2}$. Докажите, что сумма всех чисел не меньше $\frac{n^2}{2}$.

Обсуждение. Решение этой задачи почти ничем не отличается от решения предыдущей. Если n — число четное, то условию удовлетворяет следующая таблица: на одной из ее диагоналей стоят числа, равные $\frac{n}{2}$, на остальных местах — нули. Сумма чисел этой таблицы равна $\frac{n^2}{2}$.

21.6. На плоскости заданы n точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из данных точек, не содержащая внутри ни одной из данных точек.

Обсуждение. Проведем окружность через каждую тройку точек. Получим некоторое количество окружностей (некоторые из них могут слиться в одну). Требуется доказать, что хотя бы одна из этих окружностей не содержит внутри себя ни одной из данных точек. Правило «крайнего» может навести на мысль рассмотреть наименьшую окружность, но это в данном случае ничего не дает. Достаточно рассмотреть конфигурацию из таких пяти точек: 4 вершины квадрата и его центр. Наименьшей здесь будет окружность, описанная около квадрата, а она условию не удовлетворяет.

Мы поступим иначе. Попробуем решить более простую задачу, а именно будем искать окружность, проходящую через две из данных точек и не содержащую внутри ни одной из данных точек.

Измерим расстояния между каждыми двумя данными точками и, воспользовавшись правилом «крайнего» в форме «Рассмотрим наименьшее!», рассмотрим пару точек A и B, находящихся на наименьшем расстоянии друг от друга. Легко убедиться, что окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, удовлетворяет условию: остальные $(n - 2)$ данные точки удалены от A и от B не менее чем на $|AB|$ и, значит, расположены вне этой окружности.

Воспользовавшись решением вспомогательной задачи, без большого труда найдем решение исходной задачи. Проведем окружности через найденные выше точки A и B и через каждую из остальных $(n - 2)$ точек. Среди этих окружностей выберем наименьшую, как нам подсказывает правило «Рассмотри наименьшее!» Пусть это будет окружность, проходящая через точки A, B, C. Докажем, что эта окружность искомая.

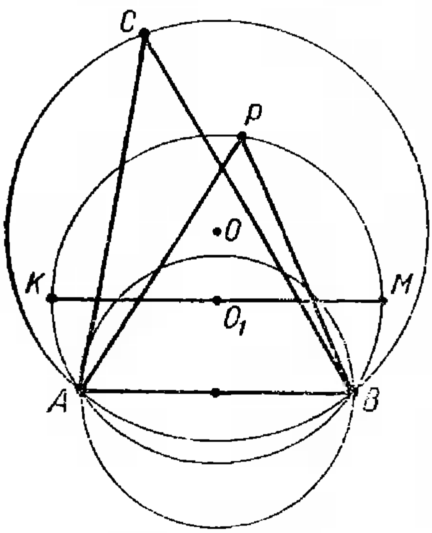


Рис. 103

Так как $|AC| \geqslant |AB|$ и $|BC| \geqslant |AB|$, то угол C в треугольнике ACB острый. Допустим, в противоречие с доказываемым, что одна из данных точек P лежит внутри окружности ACB (рис. 103). Аналогично предыдущему угол APB острый, откуда следует, что центры O и

O_1 окружностей ACB и APB расположены по одну сторону от общей хорды AB. Дуга APB второй окружности находится внутри окружности ACB. Проведем диаметр KM окружности APB параллельно хорде AB. Он лежит внутри окружности ACB, и, значит, окружность APB меньше окружности ACB в противоречие с выбором окружности ACB. Все доказано.

21.7. На плоскости проведено n прямых ($n > 3$). Никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезают плоскость на части. Докажите, что, какую бы из n прямых мы ни взяли, хотя бы одна из примыкающих к ней частей плоскости имеет форму треугольника.

Обсуждение. Пусть l_1 — одна из данных прямых. Руководствуясь правилом «крайнего», из точек, в которых пересекаются друг с другом остальные прямые, выберем ту, которая находится на наименьшем расстоянии от прямой l_1. Пусть в этой точке, обозначим ее буквой P, пересекаются прямые l_2 и l_3. Нетрудно проверить, что треугольник, образуемый прямыми l_1, l_2 и l_3, составляет одну часть плоскости и, следовательно, удовлетворяет условию задачи. В самом деле, если бы существовала прямая l, которая рассекала бы этот треугольник на части, она пересекала бы по крайней мере одну из сторон: l_2 или l_3 в точке, которая ближе к l_1, чем P, а это невозможно в силу выбора точки P.

21.8. Докажите, что не существует четверки натуральных чисел: x, y, z, u, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2).$$

Обсуждение. В приведенном ниже решении центральная идея — правило «крайнего». Допустим, в противоречие с доказываемым, что такие четверки существуют. Рассмотрим ту из них, для которой величина $x^2 + y^2$ минимальна. (Если есть несколько четверок, у которых эта величина одинакова и минимальна, рассмотрим одну из них, любую). Пусть это будет четверка: a, b, c, d.

Легко доказать, что $a^2 + b^2$ делится на 3 тогда и только тогда, когда числа a и b кратны трем (см. «Методические замечания»). Но из уравнения $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ видно, что $a^2 + b^2$ кратно трем, следовательно, a и b кратны трем, т. е. $a = 3m$, $b = 3n$. Отсюда

$$a^2 + b^2 = 9m^2 + 9n^2 = 3(c^2 + d^2).$$

Сокращая последнее равенство на 3, получим:

$$c^2 + d^2 = 3(m^2 + n^2).$$

Мы нашли четверку чисел:

$$x = c,\ y = d,\ z = m,\ u = n,$$

удовлетворяющих данному уравнению, причем для этой четверки:

$$x^2 + y^2 = c^2 + d^2 < a^2 + b^2,$$

а это невозможно в силу выбора четверки: a, b, c, d.

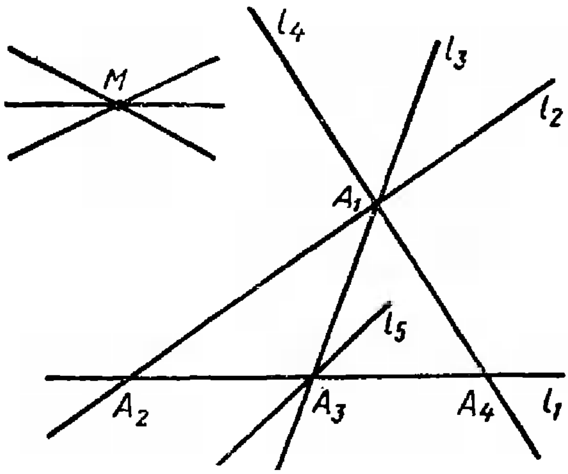


Рис. 104

21.9. На плоскости расположены n прямых ($n \geqslant 3$). Любые две прямые пересекаются и через каждую точку пересечения проходит не менее трех из данных прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.

Обсуждение. Попробуем доказать это способом «от противного». Пусть M — одна из точек пересечения. Мы допустим, в противоречие с доказываемым, что M — не единственная точка пересечения прямых. Тогда найдется прямая l_1 данной системы, не проходящая через M. Множество точек пересечения, не лежащих на l_1, не пусто — оно содержит, например, точку M. Рассмотрим точку этого множества, ближайшую к l_1, а если таких ближайших точек несколько (т. е. имеется несколько точек, находящихся на минимальном расстоянии от l_1), выберем одну из них, любую. Обозначим эту точку буквой A_1. В точке A_1 пересекаются три прямые: l_2, l_3 и l_4. Эти прямые пересекают прямую l_1 в точках A_2, A_3 и A_4 (рис. 104). Кроме прямых l_3 и l_1, через точку A_3 по условию проходит по крайней мере еще одна прямая l_5. Она пересекает l_2 или l_4 в некоторой точке B, которая ближе к l_1, чем A_1. Но этого не может быть в силу выбора точки A_1. Полученное противоречие доказывает, что M — единственная точка пересечения прямых.

Центральный пункт приведенного решения — рассмотрение «крайней», в данном случае ближайшей к l_1 точки пересечения.

Правило расположения

Развитием идеи рассмотрения «крайнего» является «правило расположения», которое приблизительно звучит так: «Расположите элементы исследуемого множества (данные задачи) в определенном порядке — в порядке возрастания или в порядке убывания (или еще как-нибудь)».

Центральной идеей решения следующей задачи является «расположение в порядке убывания».

21.10. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали по одинаковому числу грибов. Докажите, что есть трое, собравшие не менее 50 грибов.

Обсуждение. Составим «таблицу первенства», поместив в ней грибников в порядке убывания числа собранных ими грибов. Ясно, что грибники, занявшие первые три места, собрали грибов больше, чем любая другая тройка. Попробуем доказать, что они собрали не менее 50 грибов. Если грибник, занявший 3-е место, собрал 16 грибов или больше, то на 2-м месте грибник, собравший не менее 17 грибов, а на первом не менее 18 грибов. Всего они собрали не менее чем $16 + 17 + 18 = 51$ гриб. Если же грибник, занявший 3-е место, собрал не более 15 грибов, то, рассуждая аналогично, убедимся, что грибники, занявшие места с 4-го по 7-е, собрали не более $14 + 13 + 12 + 11 = 50$ грибов. На долю первой тройки и в этом случае остается не менее 50 грибов.

Тема 22. ПРО УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

Математика может помочь планировать работу заводов, складов и магазинов. Сейчас мы познакомимся с элементами теории управления запасами. На складах и в кладовых хранятся самые разные запасы: кирпичи и духи, тракторы и сахар, книги и хлеб, шины и сода... . Слишком много запасов — плохо, материалы лежат зря, а хлеб может и засохнуть. Слишком мало — может не хватить на всех, и слишком часто придется привозить новые партии, гонять транспорт. Значит, надо найти самую *лучшую величину запаса* — не слишком большую и не слишком малую.

Математическая теория управления запасами сейчас быстро развивается. Напечатаны тысячи книг и статей, созданы и используются самые разные модели. Мы рассмотрим самую простую модель — модель Вильсона, которая, несмотря на простоту, широко применяется и приносит большую пользу. Конечно, в теории управления запасами есть и весьма трудоемкие области, и даже у одной из самых мощных электронных вычислительных машин БЭСМ-6 не хватает сил досчитать часть программ до конца.

Перейдем к описанию реальной ситуации, для принятия решения в которой мы построим математическую модель.

В зоомагазине продают цыплят. Точно в назначенные директором магазина сроки привозят новые партии. Держать в магазине слишком много цыплят невыгодно — за ними надо тщательно ухаживать. И кормить, конечно. С другой стороны, за доставку каждого заказа приходится платить, так что привозить только одного цыпленка не стоит. Надо решить, какой размер партии выгоднее всего. Чтобы поставить математическую задачу, математику необходимо поговорить с директором магазина.

Математик. Сильно ли колеблется день ото дня число проданных цыплят?

Директор. Будем считать, что нет.

Математик. Обозначим буквой r ежедневный спрос. А что вы делаете, если покупатель есть, а цыплят нет?

Директор. Такого не может быть, мы дорожим честью магазина!

Математик. Значит, изменение запаса S цыплят в магазине можно изобразить ломаной (рис. 105). Вы получаете партии из Q_0, Q_1, Q_2, ... цыплят (вертикальные отрезки) в моменты времени $t_0 = 0$, t_1, t_2, ..., наклон остальных звеньев равен ежеднев-

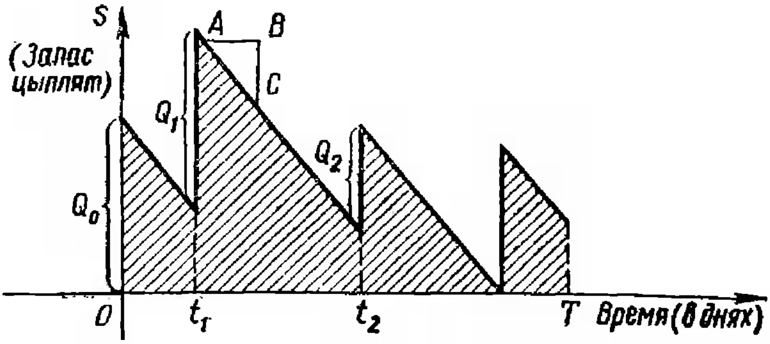


Рис. 105

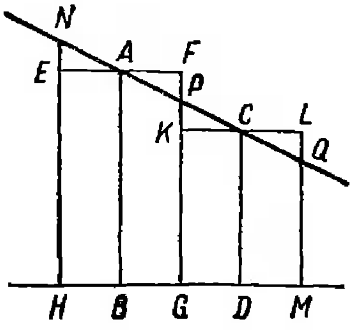


Рис. 106

ному спросу r $(BC/AB = r)$. Ломаная лежит выше оси времени, опускаясь до нее в отдельных точках, когда на мгновение цыплят в магазине не остается (в это же мгновение привезена новая партия). Во что обходится содержание цыплят?

Директор. Затраты за день пропорциональны их числу.

Математик. На одного цыпленка идет F руб. в день—еще одно обозначение. А сколько приходится платить за доставку?

Директор. Каков бы ни был размер партии, G руб.

Математик. Еще один параметр — время T, на которое вы хотите планировать работу.

Директор. М-м... Планировать стоит на достаточно продолжительное время. Но на сто лет вперед не стоит. А что, решение зависит от того, на какой именно интервал времени вперед планируется работа?

Математик. Да, есть примеры, когда решение очень сильно зависит от изменения горизонта планирования. Но в той модели, которую я хочу вам предложить, решения при больших T примерно одинаковы.

Итак, вы хотите сделать средние затраты за время T как можно меньше, выбрав оптимальный план поставок, т. е. размеры партий Q_0, Q_1, Q_2, ... и моменты доставки t_1, t_2, ... Согласны вы с такой моделью, с такой постановкой задачи?

Директор. Да.

Математик. Спасибо за беседу. Через некоторое время я сообщу вам оптимальный план.

Займемся решением поставленной задачи. Прежде всего, как подсчитать затраты на содержание цыплят? Рассмотрим изменение запаса цыплят за один день (рис. 106). Затраты на их содержание в течение дня пропорциональны числу цыплят в середине дня, т. е. длине отрезка AB, затраты на их содержание в течение следующего дня пропорциональны длине $[CD]$. Нам надо найти удобное выражение для вычисления затрат на несколько дней. Заметим, что площадь S_1 прямоугольника $EFGH$ равна $|AB| \cdot h$, где h — длина отрезка на оси абсцисс, соответствующего одному дню, а площадь S_2 прямоугольника $KLMG$ равна $|CD| \cdot h$. Значит, затраты на содержание цыплят за первый день пропорциональны S_1, а за следующий пропорциональны S_2. Затраты за 2 дня пропорциональны $S_1 + S_2$ с тем же коэффициентом пропорциональности. А теперь воспользуемся тем, что площади треугольников NEA и AFP равны, поскольку они прямоугольные, углы NAE и FAP равны, как вертикальные, $|NA| = |AP|$ (ибо $|HB| = |BG|$ по построению, прямые (EH), (AB), (FG) параллельны), и рассматриваемые треугольники равны. Следовательно, S_1 равно площади трапеции $NKGH$, и S_2 равно площади трапеции $PQMG$ по аналогичным причинам, а тогда $S_1 + S_2$ равно площади трапеции $NQMH$. Таким образом, мы получили удобное выражение для вычисления затрат за несколько дней: они пропорциональны площади под графиком величины запаса, ограниченной осью абсцисс и вертикальными прямыми, соответствующими началу первого дня и концу последнего. За время T все цыплята вместе пробудут в магазине столько дней, какова заштрихованная площадь под графиком на рисунке 105, если считать, что h — единица измерения на оси абсцисс. А затраты будут в F раз больше. Значит, за время T средние издержки (затраты) в день будут равны:

$$a = \frac{1}{T}\left\{G\left[\begin{matrix}\text{число доставок}\\ \text{за время } T\end{matrix}\right] + F\left[\begin{matrix}\text{площадь под}\\ \text{графиком}\end{matrix}\right]\right\}. \qquad (1)$$

Теперь мы уже полностью перешли на язык математики. Нужно решить чисто математическую задачу — минимизировать величину (1), найдя оптимальный план поставок, т. е. размеры партий Q_0, Q_1, Q_2, ... и моменты доставки t_1, t_2, ... Мы покажем, что в оптимальном плане все размеры партий равны и интервалы между их доставками также равны.

Как устроен оптимальный план?

Сначала в множестве планов выделим подмножество, в котором содержится оптимальный план.

Возьмем какой-нибудь план и попробуем его улучшить (рис. 107). Невыгодно иметь запас, когда приходит очередная партия. Если первый зубец на рисунке 107 (сплошная линия) заменить на изображенный штриховой линией, чтобы величина запаса в момент прихода поставки Q_1 равнялась 0, то затраты уменьшатся. Действительно, число заказов и моменты их доставки останутся прежними, а площадь под графиком уменьшится на заштрихованную. Ана-

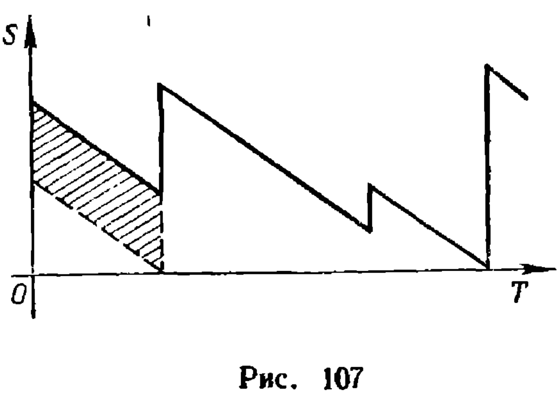


Рис. 107

логично можно поступить с остальными зубцами. Значит, оптимальный план надо искать среди тех, у которых все зубцы доходят до оси T. Другими словами, если у плана хотя бы один зубец не доходит до оси T, то этот план не является оптимальным.

Если все зубцы доходят до оси T, то мы можем определить величины поставок, зная моменты их прихода. Действительно, партия Q_i расходуется с момента t_i до момента t_{i+1} — прихода следующей партии. Ежедневный спрос равен r. Следовательно,

$$Q_i = r\,(t_{i+1} - t_i).$$

Затраты на содержание цыплят с момента t_i до момента t_{i+1} легко вычислить. Под графиком располагается треугольник с основанием $(t_{i+1} - t_i)$и высотой $Q_i = r\,(t_{i+1} - t_i)$. Площадь его равна: $\frac{1}{2}Q_i\,(t_{i+1} - t_i) = \frac{1}{2}\,r\,(t_{i+1} - t_i)^2$, а затраты на содержание цыплят в F раз больше и равны

$$\frac{1}{2}rF\,(t_{i+1} - t_i)^2.$$

За время T может быть 1, 2, 3, ... доставки цыплят в магазин (первая происходит в момент 0). Как уже установлено, оптимальный план находится среди тех, у которых все зубцы доходят до оси T. В частности, запас в момент T равен 0. Найдем теперь оптимальный план при условии, что за время T доставлено ровно k партий в моменты t_0, t_1, ..., t_{k-1} соответственно. После этого останется лишь выбрать оптимальное k.

Введем обозначения:

$$i = 1, \ldots, k-2,$$

$$\Delta_{i+1} = t_{i+1} - t_i,\ \Delta_1 = t_1,\ \Delta_k = T - t_{k-1}.$$

Затраты на доставку цыплят равны Gk и одинаковы для всех рассматриваемых планов. Затраты на содержание цыплят с момента t_i до момента t_{i+1} равны $\frac{1}{2}\,rF\Delta_i^2$, а за все время T равны

$$\frac{1}{2}rF\,(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_{k-1}^2 + \Delta_k^2). \qquad (2)$$

Чтобы минимизировать (1), достаточно минимизировать (2). Получаем следующую математическую з а д а ч у:

22.1. При каких неотрицательных числах Δ_i, $i = 1, \ldots k$, сумма которых равна T, достигает минимума величина

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_{k-1}^2 + \Delta_k^2?$$

О б с у ж д е н и е. Покажем, что сумма квадратов достигает минимума в случае, когда все числа Δ_i равны между собой.

Рассмотрим сначала частный случай $k = 3$. Введем числа α_1,

α_2, α_3 с помощью равенств: $\Delta_1 = \frac{T}{3} + \alpha_1$, $\Delta_2 = \frac{T}{3} + \alpha_2$, $\Delta_3 = \frac{T}{3} + \alpha_3$. Тогда $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \left(\Delta_1 - \frac{T}{3}\right) + \left(\Delta_2 - \frac{T}{3}\right) + \left(\Delta_3 - \frac{T}{3}\right) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - T = 0$.

А теперь вычислим сумму квадратов:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = \left(\frac{T}{3} + \alpha_1\right)^2 + \left(\frac{T}{3} + \alpha_2\right)^2 + \left(\frac{T}{3} + \alpha_3\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{T^2}{9} + 2\frac{T}{3}\alpha_1 + \alpha_1^2\right) + \left(\frac{T^2}{9} + 2\frac{T}{3}\alpha_2 + \alpha_2^2\right) + \left(\frac{T^2}{9} + 2\frac{T}{3}\alpha_3 + \alpha_3^2\right) =$$

$$= \frac{T^2}{3} + \frac{2T}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \frac{T^2}{3} + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

Следовательно, $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2$ достигает минимума тогда, когда достигает минимума $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$. А сумма квадратов $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ всегда неотрицательна и равна 0 только в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Значит, в рассматриваемом случае (2) достигает минимума, когда

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{T}{3}.$$

Доказательство в общем случае отличается от только что проведенного лишь тем, что в некоторых выкладках часть членов не выписывается, а вместо них ставится многоточие. А именно, определяем α_i с помощью равенств:

$$\Delta_i = \frac{T}{k} + \alpha_i, \quad i = 1, \ \ldots, \ k.$$

$$\text{Тогда } \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \left(\Delta_1 - \frac{T}{k}\right) + \ldots + \left(\Delta_k - \frac{T}{k}\right) =$$
$$= \Delta_1 + \ldots + \Delta_k - T = 0.$$

Вычислим сумму квадратов:

$$\Delta_1^2 + \ldots + \Delta_k^2 = \left(\frac{T}{k} + \alpha_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{T}{k} + \alpha_k\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{T^2}{k^2} + 2\frac{T}{k}\alpha_1 + \alpha_1^2\right) + \ldots + \left(\frac{T^2}{k^2} + 2\frac{T}{k}\alpha_k + \alpha_k^2\right) =$$

$$= \frac{T^2}{k} + \frac{2T}{k}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) + \left(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2\right) = \frac{T^2}{k} + \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2.$$

Сумма квадратов $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2$ всегда неотрицательна и равна 0 только в случае $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Значит, сумма квадратов $\Delta_1^2 + \ldots + \Delta_k^2$ достигает минимума в случае $\Delta_1 = \ldots = \Delta_k = \frac{T}{k}$.

Вернемся к управлению запасами. Мы выяснили, что оптимальный план следует искать среди тех, в которых партии приходят через одинаковые промежутки времени и имеют, следовательно, одинаковый размер Q (рис. 108). Промежуток Δ между приходами

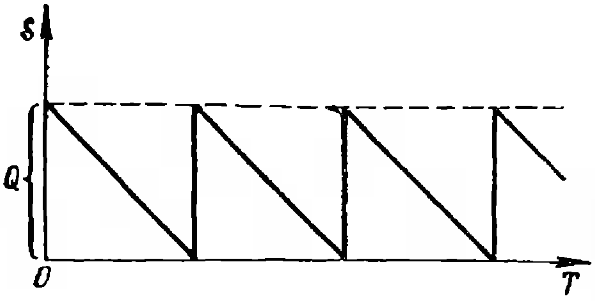


Рис. 108

партий выражается через Q следующим образом: $\Delta = \frac{Q}{r}$.

Пусть за время $T = l\Delta$ полностью расходятся l партий по Q цыплят. Вычислим средние издержки (1) для плана, в котором все партии имеют размер Q. Общий спрос за время T равен rT. За это время доставлено $l = \frac{rT}{Q}$ партий цыплят. Под графиком — $\frac{rT}{Q}$ треугольников, площадь каждого равна $\frac{Q^2}{2r}$, и общая площадь под графиком такова: $\frac{Q^2}{2r} \cdot \frac{rT}{Q} = \frac{QT}{2}$. На доставку и содержание цыплят за время T потрачено

$$Gl + F\frac{QT}{2} = G\frac{rT}{Q} + F\frac{QT}{2} = \left(\frac{Gr}{Q} + \frac{FQ}{2}\right) T,$$

и средние издержки (1) за один день равны:

$$a = f(Q) = \frac{Gr}{Q} + \frac{FQ}{2}. \qquad (3)$$

Какое Q самое выгодное? Сейчас мы снова займемся математикой.

22.2. При каком положительном y величина $y + \frac{1}{y}$ принимает наименьшее значение?

Обсуждение. Справедливо тождество (проверьте!)

$$y + \frac{1}{y} - 2 = \frac{(y-1)^2}{y}.$$

Правая часть неотрицательна (так как y положителен) и достигает минимума, равного 0, при $y = 1$. Минимальное значение $y + \frac{1}{y}$ равно 2.

22.3. Если x и y неотрицательны, то $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$. Доказать.

22.4. Когда достигает минимума $\frac{A}{x} + Bx$ $(A, B, x > 0)$?

Обсуждение. Справедливо тождество

$$\frac{A}{x} + Bx = \sqrt{AB}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{B}{A}x}} + \sqrt{\frac{B}{A}x}\right).$$

Заменой $y = \sqrt{\frac{B}{A}}\, x$ сводим дело к задаче 22.2, из которой следует, что минимум равен $2\sqrt{AB}$ и достигается при $\sqrt{\frac{B}{A}}x = 1$, $x = \sqrt{\frac{A}{B}}$. Для получения этих результатов можно применить также задачу 22.3.

Вернемся к управлению запасами. Применим результат задачи 22.4 к средним издержкам (3). Надо положить $A = Gr$, $B = \frac{F}{2}$. Значит, наивыгоднейший размер партии (при котором $f(Q)$ достигает минимума)

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2Gr}{F}}, \tag{4}$$

минимальные затраты равны $\sqrt{2FGr} = a$ в день, между поставками проходит $\frac{Q_{\text{опт}}}{r} = \sqrt{\frac{2G}{Fr}}$ дней, а расходы на содержание цыплят за время между поставками равны:

$$F\frac{Q^2_{\text{опт}}}{2r} = \frac{F}{2r}\cdot\frac{2Gr}{F} = 2G.$$

Формула (4) наивыгоднейшего размера партии носит имя американского ученого Р. Вильсона и получена еще в первой четверти нашего века. План, в котором размеры всех партий одинаковы и равны $Q_{\text{опт}}$, будем называть планом Вильсона. Планы Вильсона, несмотря на свою простоту, дают обычно большой экономический эффект и потому широко применяются.

О планах Вильсона

Изображенный на рисунке 108 план с $Q = Q_{\text{опт}}$, т. е. план Вильсона, часто применяют при планировании поставок на произвольное время T.

Следует ли из наших рассуждений, что при планировании на время T оптимальным планом будет план Вильсона? Конечно, нет! Если T не является кратным промежутку между поставками в плане Вильсона $\Delta = \sqrt{\frac{2Q}{Fr}}$, то в плане Вильсона последний зубец не доходит до оси T, запас в момент T не равен 0, а потому план Вильсона не может быть оптимальным. В чем же дело?

Формула (3) для средних издержек выведена в предположении, что интервал планирования T состоит из некоторого числа интервалов между приходами поставок, т. е. в момент T приходит очередная поставка. Интервал между поставками может равняться T, $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, $\frac{T}{4}$, ..., $\frac{T}{n}$, ..., и Q может принимать значения rT, $r\frac{T}{2}$, $r\frac{T}{3}$,

$r\frac{T}{4}$, ..., $r\frac{T}{n}$, ... соответственно. Затем среди $f(rT)$, $f\left(r\frac{T}{2}\right)$, $f\left(r\frac{T}{3}\right)$, $f\left(r\frac{T}{4}\right)$, ..., $f\left(r\frac{T}{n}\right)$, ... надо выбрать наименьшее число $f(Q_{\text{опт}}(T))$.

Наши предыдущие рассуждения показывают, что всегда $f(Q_{\text{опт}}(T)) \geqslant f(Q_{\text{опт}})$. Среди допустимых значений Q содержится $Q_{\text{опт}}$ только тогда, когда $\frac{rT}{Q_{\text{опт}}}$ — целое число. В этом случае, разумеется, $Q_{\text{опт}}(T) = Q_{\text{опт}}$.

22.5. Если $Q_{\text{опт}}$ не содержится среди допустимых значений Q, то при некотором n справедливы неравенства $nQ_{\text{опт}} < rT < (n+1)Q_{\text{опт}}$. Докажите, что оптимальным значением $Q_{\text{опт}}(T)$ является то из чисел $\frac{rT}{n}$, $\frac{rT}{n+1}$, для которого величина средних издержек $f(Q)$ меньше.

Указание. Докажите сначала, что функция $y + \frac{1}{y}$ $(y > 0)$ при $y < 1$ монотонно убывает, а при $y > 1$ монотонно возрастает.

Обозначим $щ_{\text{опт}}(T)$ затраты за время T для плана Вильсона, а $щ(T)$ — затраты некоторого другого плана. Если T кратко $\frac{Q_{\text{опт}}}{r}$, то обязательно $щ(T) > щ_{\text{опт}}(T)$, а если нет, то найдется такой план, что $щ(T) < щ_{\text{опт}}(T)$.

22.6. (Устно.) Укажите хотя бы один такой план.

Однако при возрастании T план Вильсона приближается к оптимальному. Что означает это утверждение?

22.7. Пусть $nQ_{\text{опт}} \leqslant rT < (n+1)Q_{\text{опт}}$. Тогда всегда

$$\frac{щ(T)}{щ_{\text{опт}}(T)} > 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Обсуждение. Для любого плана при увеличении интервала планирования затраты увеличиваются. Поскольку по условию

$$T \geqslant n\frac{Q_{\text{опт}}}{r}, \text{ то } щ(T) \geqslant щ\left(n\frac{Q_{\text{опт}}}{r}\right);$$

$$\text{и поскольку } T < (n+1)\frac{Q_{\text{опт}}}{r}, \text{ то}$$

$$щ_{\text{опт}}(T) < щ_{\text{опт}}\left(\frac{(n+1)Q_{\text{опт}}}{r}\right).$$

Следовательно, справедлива цепочка неравенств:

$$\frac{щ(T)}{щ_{\text{опт}}(T)} \geqslant \frac{щ\left(n\frac{Q_{\text{опт}}}{r}\right)}{щ_{\text{опт}}(T)} > \frac{щ_{\text{опт}}\left(n\frac{Q_{\text{опт}}}{r}\right)}{щ_{\text{опт}}(T)} >$$

$$> \frac{ш_{опт}\left(n\frac{Q_{опт}}{r}\right)}{ш_{опт}\left((n+1)\frac{Q_{опт}}{r}\right)} = \frac{2Gn}{2G(n+1)} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Первый и последний члены цепочки дают неравенство задачи 22.7.

Таким образом, использование вместо плана Вильсона любого другого плана дает выигрыш не более чем на $\frac{100}{n+1}$ процентов (по сравнению с планом Вильсона), где[1] $n = \left[\frac{rT}{Q_{опт}}\right]$. Чем больше T, тем меньше $\frac{1}{n+1}$, тем лучше план Вильсона. А мы планируем поставки надолго, причем точную величину интервала планирования определить нельзя. Следовательно, план Вильсона дает разумную политику пополнения запаса, оптимальную при некоторых значениях T и «почти оптимальную» при всех достаточно больших T.

Наш теоретический анализ привел к тому, что оптимальный план содержится среди планов с поставками одинаковых партий Q, среди которых особо важную роль играет план с $Q = Q_{опт}$. Однако не всегда удается использовать именно план с $Q = Q_{опт}$. Например, формула (4) может давать 36,2 цыпленка, что бессмысленно, ибо живые цыплята на части не делятся. Более существенное возражение таково: товар иногда поступает партиями определенного размера, например десятками или дюжинами. Поэтому полезно уметь вычислять возрастание издержек при использовании плана с Q, отличным от $Q_{опт}$, по сравнению с планом Вильсона. Мы будем сравнивать средние издержки за целое число периодов, вычисляемые по формуле (3).

22.8. Средние затраты возрастают на

$$f(Q) - f(Q_{опт}) = \frac{f(Q_{опт})}{2}\left(\frac{Q - Q_{опт}}{Q}\right)\left(\frac{Q - Q_{опт}}{Q_{опт}}\right). \quad (5)$$

Указание. Воспользуйтесь формулой (3), формулой Вильсона (4) и тождеством

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x}.$$

Формула (5) показывает, что если $Q = Q_{опт}(1+\varepsilon)$, где ε мало, то расходы возрастают на величину порядка ε^2, что при малых ε существенно меньше, чем ε. Так, если размер партии отли-

---

[1] Здесь квадратные скобки означают операцию взятия целой части числа. Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x, например: $[1{,}5] = 1$, $[\pi] = 3$, $\left[-\frac{1}{2}\right] = -1$, $[1] = 1$.

чается от оптимального не более чем на 10%, то затраты увеличиваются менее чем на 0,6%.

22.9. Проведите соответствующие вычисления.

22.10. Пусть используется план с равными партиями Q и промежутками между их приходом $\frac{Q}{r}$, причем число $\frac{rT}{Q}$ не является целым. Тогда средние затраты за время T равны

$$\frac{1}{T}\left\{G\left(\left[\frac{rT}{Q}\right]+1\right)+F\left(\frac{Q^2}{2r}\left[\frac{rT}{Q}\right]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(Q-\frac{r}{2}\left(T-\left[\frac{rT}{Q}\right]\frac{Q}{r}\right)\right)\left(T-\left[\frac{rT}{Q}\right]\frac{Q}{r}\right)\right)\right\}. \tag{6}$$

(Сравните формулу (6) с формулой (3).)

Обобщения основной модели

Обсудим некоторые обобщения рассмотренной нами модели.

У нас затраты на содержание S цыплят равны FS в день. Но ведь каков бы запас ни был, нужны склад и сторож! Разумнее считать, что расходы равны $A+FS$ в день, A — постоянный член. Однако оптимальный план не изменится при таком обобщении! Действительно, в формуле (1) добавится постоянный член A, и положение минимума функции не изменится от его добавления. Но расходы, конечно, изменятся — в формуле (3) в правой части появится свободный член A.

Директор считал, что цыплята всегда есть, — он очень дорожил честью магазина. Но, может быть, выгоднее сэкономить на расходах по хранению запаса, допустив небольшой дефицит, — несколько покупателей уйдут с пустыми руками?

Как подсчитать убытки от потери доверия покупателей? Оценить их в рублях довольно трудно. Поэтому модель с дефицитом разумнее рассматривать не для магазина, а для склада. Там четко определено: если нет продукта, склад платит штраф — каждый день пропорционально нехватке.

Сохраним все предположения основной модели, кроме отсутствия дефицита. Сохраним и обозначения. Неудовлетворенный спрос будем рассматривать как отрицательный запас. График изменения запаса изображен на рисунке 109. Для средних издержек за время T вместо формулы (1) надо использовать следующую:

$$a=\frac{1}{T}\left\{G\begin{bmatrix}\text{число доставок}\\ \text{за время } T\end{bmatrix}+F\begin{bmatrix}\text{площадь под графиком}\\ \text{выше оси времени}\end{bmatrix}+\right.$$
$$\left.+H\begin{bmatrix}\text{площадь над графиком}\\ \text{ниже оси времени}\end{bmatrix}\right\}. \tag{7}$$

Здесь H — плата за нехватку единицы продукта в день. Площадь, лежащая под графиком, но выше оси времени, соответствует времени, которое все цыплята вместе провели в магазине. Доказывается это утверждение так же, как в основной модели. Площадь, лежащая над графиком, но ниже оси времени, соответствует общему числу «цыплято-дней», которые пришлось ждать потребителям до получения своих порций продукта.

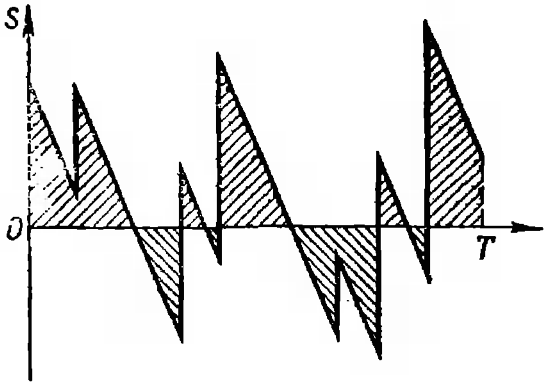


Рис. 109

22.11. Пусть S — запас в момент доставки очередной партии, а до прихода следующей пройдет Δ дней. Покажите, что затраты за эти Δ дней достигнут минимума, равного $\frac{\Delta^2 r}{2}\,\frac{FH}{F+H}$, при $S = \frac{H}{F+H} r\Delta$.

22.12. Покажите, что, как и в модели без дефицита, оптимальным является один из планов с равными интервалами между поставками.

22.13. Покажите, что при использовании плана с равными интервалами между поставками средние затраты за время T, кратное интервалу между поставками, выражаются формулой

$$f_1(Q) = \frac{Gr}{Q} + \frac{FH}{F+H}\cdot\frac{Q}{2}. \tag{8}$$

(Таким образом, из-за возможности дефицита роль F в формуле (3) играет $\frac{FH}{F+H}$.)

22.14. Покажите, что выражение (8) достигает минимума при

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2Gr\,(F+H)}{F\cdot H}}.$$

22.15. При каких T является оптимальным план, аналогичный плану Вильсона:

$$Q_1 = Q_2 = \ \dots = Q_{\text{опт}},\ Q_0 = \frac{H}{F+H}Q_{\text{опт}}? \tag{9}$$

22.16. С помощью неравенств, аналогичных полученным в задаче 22.7, покажите, что при возрастании T средние затраты в оптимальном за время T плане приближаются к затратам плана (9), аналогичного плану Вильсона.

Таким образом, по сравнению с основной моделью $Q_{\text{опт}}$ увеличивается в $\sqrt{1+\frac{F}{H}}$ раз.

Стоит еще отметить, что план Вильсона и аналогичный ему план (9) становятся наверняка близкими к оптимальным лишь при больших T. Если же интервал планирования мал и число доставок партий измеряется единицами, то использование этих планов вместо оптимальных может привести к увеличению затрат на несколько десятков процентов.

22.17. Как изменится ответ в модели с дефицитом, если плата в день за нехватку продукта в количестве s, $s > 0$, равна не Hs, а $Hs + I$, где I — штраф за наличие дефицита?

22.18. А если есть еще постоянный член в плате за хранение?

Модели и действительность

Любая модель описывает явление лишь приблизительно. Как проверить пригодность наших формул? Вдруг мы чего-нибудь не учли, и при использовании наших рекомендаций магазин понесет большие убытки? Можно действовать так.

У вас есть записи, как шла торговля в прошлом году. Предположим, что модель была введена уже тогда. Сравните, какие расходы были сделаны в действительности, а какие получаются при использовании теоретических рекомендаций (например, плана Вильсона), если спрос такой, какой был. И тогда решайте, полезна ли модель.

Зачем мы разработали так много моделей? Считать легче по более простой, а с помощью сложных можно исследовать, как влияют факторы, не учтенные в простой модели. Например, во всех обобщениях основной модели величина оптимального запаса либо больше, чем получается по формуле Вильсона, либо такая же, но никогда — меньше. Поэтому, пользуясь основной моделью, стоит «округлять» $Q_{\text{опт}}$ в сторону увеличения, но не уменьшения.

Все наши рассуждения велись для запасов одного продукта (например, цыплят). Однако обычно на складе хранятся запасы многих разных продуктов. Но если заказывание и доставка каждого из них не зависят от остальных, то можно пользоваться моделями для одного продукта.

Мы довольно подробно разобрали лишь самые простые модели. Есть масса других. Особенно интересны модели, в которых спрос случаен. Строить и изучать их вы сможете, познакомившись с теорией вероятностей.

Тема 23. КОМПОЗИЦИИ ДВИЖЕНИЙ

В курсе геометрии рассматриваются некоторые виды движений и их свойства. Среди этих свойств формулируется такое: два движения, выполненные последовательно, дают снова движение. Результат последовательного выполнения движений называется композицией движений[1]. Композиция движений f и g обозначается $g \circ f$. Обращаем внимание на порядок, в котором записаны движения: движение, которое выполняется первым, пишется справа.

---

[1] В учебном пособии «Геометрия, 6—10» А. В. Погорелова не употребляется термин «композиция движений», а говорится о последовательном их выполнении.

Сейчас мы изучим композиции движений подробнее, рассмотрим композиции различных движений и некоторые их свойства.

Начнем с рассмотрения некоторых основных законов, связанных с композициями движений.

Для любых движений выполняется ассоциативный закон:

$$f \circ (g \circ \varphi) = (f \circ g) \circ \varphi,$$

но коммутативный закон $f \circ g = g \circ f$ может и не иметь места, и в композиции всегда надо помнить о порядке элементов; так, например, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, а не $f^{-1} \circ g^{-1}$. (Это становится ясным, если мы представим себе f и g как операции одевания носков и ботинок.)

23.1. Докажите, что композиция симметрий относительно двух пересекающихся прямых представляет собой поворот на угол, равный удвоенному углу между прямыми (по часовой стрелке или против часовой стрелки).

Обсуждение. В самом деле, пусть точки A, B, C, D, ... расположены на равных расстояниях друг от друга на окружности с центром O, и пусть S_1 и S_2 — симметрии относительно прямых OB и OC (рис. 110). Ясно, что симметрия S_1 переводит треугольник OAB в треугольник OCB, а симметрия S_2 — треугольник OCB в треугольник OCD, поэтому движение $S_1 \circ S_2$ представляет собой поворот на $\angle AOC$ или $\angle BOD$, который вдвое больше, чем $\angle BOC$. Так как поворот полностью определяется центром и углом поворота, композиция $S_1 \circ S_2$ совпадает с композицией симметрий относительно любых двух прямых, пересекающихся в точке O и образующих такой же угол, как прямые OB и OC, и, наоборот, композиция двух осевых симметрий относительно перпендикулярных прямых есть центральная симметрия. В частности, симметрия относительно точки O представляет собой композицию симметрий относительно любых двух взаимно перпендикулярно прямых, проходящих через точку O.

Так как $S_1 \circ S_2$ — поворот против часовой стрелки, $S_2 \circ S_1$ является поворотом на такой же угол, но в направлении, совпадающем с направлением вращения часовой стрелки: в самом деле,

$$S_2 \circ S_1 = S_2^{-1} \circ S_1^{-1} = (S_1 \circ S_2)^{-1}.$$

Это выражение совпадает с $S_1 \circ S_2$, если две прямые (плоскости) образуют прямой угол. В этом случае преобразование $S_1 \circ S_2$ является центральной симметрией и $(S_1 \circ S_2)^2 = E$.

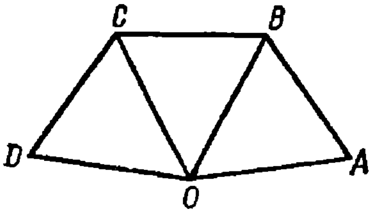


Рис. 110

23.2. Докажите, что композиция поворотов на прямой угол (в одну и ту же сторону) вокруг точек B и C есть симметрия относительно центра квадрата со стороной BC.

23.3. Пусть $ACPQ$ и $BARS$ — квадраты, построенные на сторонах AC и BA треугольника ABC. Если точки B и C фиксированы, то докажите, что при всех положениях точки A прямая P проходит через фиксированную точку.

23.4. Докажите, что параллельный перенос можно представить как композицию двух симметрий относительно различных точек O и O_1 (рис. 111, *а*).

Обсуждение. Первая симметрия переводит произвольную точку P в точку P_1, а вторая переводит P_1 в P_2, причем окончательно получается, что отрезок PP_2 параллелен отрезку OO_1 и в два раза длиннее его. Таким образом, длина и направление отрезка PP_2 постоянны, т. е. не зависят от положения точки P. Так как параллельный перенос полностью определяется длиной и направлением отрезка PP_2, композиция симметрий относительно точек O и O_1 совпадает с композицией симметрий относительно точек Q и Q_1, если только отрезок QQ_1 равен и параллелен отрезку OO_1. [Это означает, что OO_1Q_1Q — параллелограмм, возможно, вырождающийся в четверку точек одной прямой.] Таким образом, если мы хотим представить данный параллельный перенос в виде композиции двух центральных симметрий, центр одной из симметрий можно выбрать произвольно.

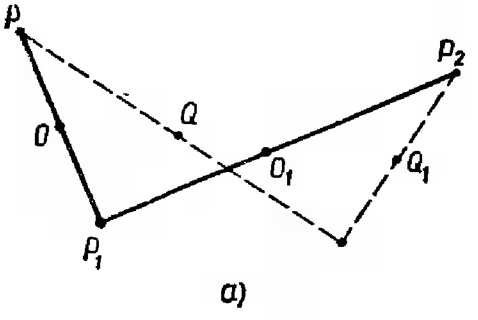
23.5. Докажите, что композиция двух параллельных переносов сама является параллельным переносом.

Обсуждение. Учитывая предыдущую задачу, представим первый параллельный перенос в виде композиции симметрий относительно точек O_1 и O_2, а второй — композиции симметрий относительно точек O_2 и O_3. При последовательном выполнении параллельных переносов композиция двух симметрий относительно точки O_2 даст тождественное преобразование и останется композиция симметрий относительно точек O_1 и O_3.

23.6. Докажите, что композиция двух поворотов около различных центров есть поворот или перенос. Постройте центр этого поворота и угол поворота или соответствующий вектор.

23.7. Докажите, что композиция поворота и переноса есть поворот на тот же угол. Постройте центр полученного поворота.

23.8. Даны два поворота $R^{\alpha}_{O_1}$ и $R^{\beta}_{O_2}$ с различными центрами.



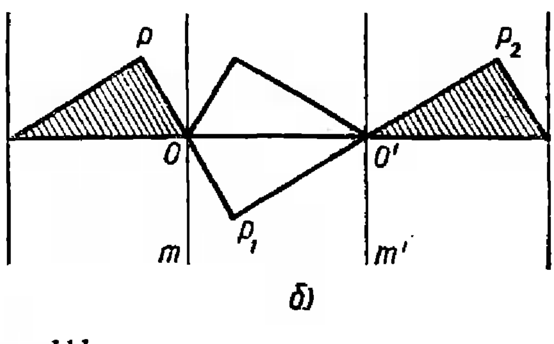


Рис. 111

Как расположены центры двух поворотов $R^{\beta}_{O_2} \circ R^{\alpha}_{O_1}$ и $R^{\alpha}_{O_1} \circ R^{\beta}_{O_2}$ по отношению к прямой O_1O_2?

23.9. Докажите, что композиция центральной симметрии и параллельного переноса представляет собой центральную симметрию.

23.10. Докажите, что композиция симметрий относительно двух параллельных прямых представляет собой параллельный перенос в направлении, перпендикулярном этим прямым, на расстояние, равное удвоенному расстоянию между прямыми.

Обсуждение. Пусть m и m' (рис. 111, *б*) — две прямые, проходящие через O и O' и перпендикулярные прямой OO'.

Симметрии относительно точек O и O' можно заменить композициями симметрий относительно прямых m и OO', соответственно OO' и m'. При последовательном выполнении центральных симметрий композиция двух симметрий относительно прямой OO' даст тождественное преобразование и останется композиция симметрии относительных прямых m и m'.

23.11. Докажите, что композиция параллельных переносов подчиняется коммутативному закону.

Обсуждение. Если параллельный перенос T переводит точку P в P_1, а точку Q в Q_1, то отрезок QQ_1 равен и параллелен отрезку PP_1, следовательно, PQQ_1P_1 — параллелограмм. Подобно этому, если другой перенос T_1 переводит точку P в Q, то он переводит также P_1 в Q_1. Поэтому $T_1 \circ T = T \circ T_1$. Подробнее: если $Q = T_1(P)$, то $Q_1 = T_1(T(P_1))$, параллельный перенос переводит точку P_1 в P. Значит, образы точки P совпадают при всех положениях точки P.

23.12. Докажите, что композиция трех центральных симметрий является центральной симметрией.

23.13. Докажите, что если Z_{O_1}, Z_{O_2}, Z_{O_3} — центральные симметрии, то $Z_{O_1} \circ Z_{O_2} \circ Z_{O_3} = Z_{O_3} \circ Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$.

Тема 24. СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ

«Математика случая» — так еще в XVII в. назвал теорию вероятностей один из ее основателей, французский ученый Блез Паскаль.

— Случай? А зачем его изучать? — может быть, спросите вы. Оказывается, еще в древности люди заметили, что случай — вовсе не исключение в жизни, а правило. Вот почему возникла наука о случайных явлениях. Знать законы случая необходимо. Вот пример.

«... Во всех крупных населенных пунктах имеются станции «скорой медицинской помощи». Нет возможности заранее предсказать моменты, когда потребуется оказать срочную помощь внезапно и остро заболевшим людям. Как много в течение заданного времени будет вызовов к таким больным? Как долго придется врачу и машине «Скорой помощи» задержаться у больного? Сколько врачей и машин необходимо иметь во время дежурства, чтобы, с одной стороны, больные не слишком долго ожидали помощи, а с другой — не наблюдалось бы слишком непродуктивного использования врачебного персонала? Мы сталкиваемся с типичной ситуацией, в которой случайными являются моменты вызовов, длительность пребывания врача у постели больного, длительность проезда машины от пункта «Скорой помощи» до дома, в котором живет больной...» (Б. В. Гнеденко).

Посмотрите, от скольких случайных событий зависит неотложная помощь. Что же делать? Разве можно отказать больным в помощи? Конечно, нет. Значит, путь один: чтобы эта помощь была действительно неотложной, надо уметь учитывать все случайности. Только тогда можно будет установить, сколько в среднем будет вызовов, сколько понадобится врачей и машин.

Но и в обычной жизни сколько случайностей вокруг нас, если внимательно посмотреть! Под потолком висит лампочка — вы не знаете, когда она перегорит. Будет ли завтра снег, никому наверняка не известно, и даже бюро прогнозов нередко ошибается. Учитель не знает, сколько ошибок сделает школьник в диктанте — одну или две, десять или ни одной...

Теория вероятностей — математическая наука, которая как раз и изучает математические модели случайных явлений, с ее помощью вычисляют вероятности наступления определенных событий. Попробуем решить несколько простых задач этой сложной науки. Повторим рассуждения основателей теории вероятностей — ученых XVII—XVIII вв.

Как поймать случай?

Возьмите 7 одинаковых шариков от настольного тенниса. На каждом напишите номер — 1, 2, ..., 7. Три из них (№ 1, 2, 3) пометьте чернилами — это будут «черные шары», а остальные — «белые». Теперь возьмите мешочек или ящичек — это будет ваша «урна» — и положите в нее шары.

Начинаем опыты.

Шарики надо перемешать и вытащить один. Посмотрите, какого он цвета, запишите цвет и положите шарик обратно. Это первый опыт. Снова перемешайте, достаньте шарик, заметьте цвет, положите обратно. Так можно делать много раз подряд — десять, сто, тысячу раз. Между прочим, всего за полчаса можно провести больше 100 опытов (проверьте, кто хочет!).

Мы хотим предсказать, сколько раз из 100 будет вынут черный шар. Какова его доля во всех опытах? Естественно, каждый раз результат зависит от случая — может попасться черный шар, а может и белый. Но при большом числе опытов примерную долю черных шаров можно предсказать!

Каждый раз вы вынимали из урны либо первый шар, либо второй, либо третий, ..., либо седьмой — всего семь возможных исходов каждого опыта. Шары тщательно перемешаны, на ощупь различить их нельзя, и нет никакой причины предпочесть один шар другому, значит, у всех одинаковые шансы быть вынутыми. Математики говорят так: все семь исходов равновозможны.

Теперь вам понятно, что каждый шар может появиться примерно в $^1/_7$ части всех опытов, и чем больше раз вы вынимаете шары, тем ближе к $^1/_7$ доля любого из семи исходов. Конечно, теоретически можно допустить, что все сто раз вы вынимаете, например, первый шар. Но это совершенно исключительный случай, а мы говорим сейчас о средних результатах.

Что же можно сказать о черном цвете? Он, очевидно, может в каждом опыте появиться одним из трех способов, в трех исходах из семи (ведь у нас три черных шара). Эти исходы называются благоприятными для появления черного шара.

В трех исходах из семи, значит, в среднем в $^3/_7$ всех опытов вынут черный шар. И чем дальше, чем больше опытов, тем ближе его доля к $^3/_7$!

Предельное значение — $^3/_7$ — очень важно для нас. Это и есть вероятность появления черного шара.

Вот мы и получили основную формулу классической теории вероятностей:

$$\text{Вероятность события} = \frac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Число всех равновозможных исходов}}$$

Эта формула получена с помощью рассуждений. Но соответствуют ли рассуждения действительности? Формулу проверяли ученые на многих опытах, и всегда она получала подтверждение. Доля опытов, в которых событие осуществлялось, была близка к расчетной. Если хотите, можно проверить ее на материале проведенных вами опытов. Сколько всеми вместе проведено опытов? А сколько раз был вынут черный шар? Поделим...

Этой формулой пользуются, когда исходы опыта равновозможны и надо только вычислить вероятность.

24.1. В урне лежат 5 красных, 12 белых и 9 синих шаров. Найти вероятность того, что: а) вынут белый шар; б) вынут красный шар; в) вынут синий шар; г) вынут цветной шар.

Обсуждение. В задаче имеется $5 + 12 + 9 = 26$ равновозможных исходов. Поэтому вероятности равны: а) $12/26 = 6/13$; б) $5/26$; в) $9/26$; г) $7/13$.

24.2. Двойное испытание. В урне по-прежнему 3 черных и 4 белых шара. Вы вынимаете один из них, кладете обратно, перемешиваете и вынимаете другой. Возможно одно из трех: либо оба шара черные, либо оба белые, либо они различных цветов. Каковы вероятности этих событий?

Обсуждение. Посмотрите на с. 126 таблицу, и будет ясен ответ. Черные шары носят номера 1, 2, 3, белые — 4, 5, 6, 7. Слева номера и цвет шаров при первом вынимании, вверху — при втором. Пары букв показывают цвет двух вынутых шаров (левая буква относится к первому выниманию).

	1 (Ч)	2 (Ч)	3 (Ч)	4 (Б)	5 (Б)	6 (Б)	7 (Б)
1 (Ч)	ЧЧ	ЧЧ	ЧЧ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ
2 (Ч)	ЧЧ	ЧЧ	ЧЧ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ
3 (Ч)	ЧЧ	ЧЧ	ЧЧ	ЧБ	ЧБ	ЧБ	ЧБ
4 (Б)	БЧ	БЧ	БЧ	ББ	ББ	ББ	ББ
5 (Б)	БЧ	БЧ	БЧ	ББ	ББ	ББ	ББ
6 (Б)	БЧ	БЧ	БЧ	ББ	ББ	ББ	ББ
7 (Б)	БЧ	БЧ	БЧ	ББ	ББ	ББ	ББ

Все 49 исходов равновозможны. Вероятность появления двух черных шаров равна 9/49, двух белых — 16/49, шаров разных цветов — 24/49.

24.3. Найдите вероятности того, что при двойном испытании, как в предыдущей задаче: а) вынут по крайней мере один черный шар; б) вынут хотя бы один белый шар; в) первым вынут черный шар; г) последним вынут белый шар.

Обсуждение. Для решения воспользуемся таблицей, построенной при обсуждении предыдущей задачи. Вероятности равны: а) 33/49, б) 40/49, в) 3/7, г) 4/7. Обратите внимание, что в в) и г) ответ тот же, что и при одном испытании.

О смысле формулы вероятности события

Мы вывели эту формулу с помощью некоторых рассуждений. Можно ли утверждать, что мы ее доказали, как доказывают теоремы в геометрии? Нет, конечно, мы сделали другое — построили модель реального явления (выниманий шаров из урны). Модель, как оказалось, подтверждается фактами и экспериментами. А с математической точки зрения формула дает определение вероятности. В чем же тогда смысл формулы, почему она полезна? Справа стоит частное двух величин, каждую из величин мы можем подсчитать либо непосредственно, либо с помощью правил комбинаторики. А число слева связывает модель с реальным миром — оно говорит, какова примерно доля тех опытов, в которых осуществляется рассматриваемое событие, среди всех опытов. Так комбинаторные подсчеты позволяют нам предсказывать некоторые результаты эксперимента. При этом мы, конечно, предполагаем равновозможность исходов.

24.4. Игральная кость — это кубик, на гранях которого написаны числа от 1 до 6. Если ее бросить, то любая из 6 граней может оказаться верхней. Для правильной (т. е. не жульнической) кости все эти шесть исходов равновозможны. Брошены независимо друг от друга две правильные кости. Найти вероятности того, что сумма очков на верхних гранях: а) меньше 9; б) больше 7; в) делится на 3; г) четна.

Обсуждение. При бросании двух костей имеется 36 равновозможных исходов, поскольку имеется $6 \times 6 = 36$ пар, в которых каждый элемент — целое число от 1 до 6. Составим таблицу, в которой слева число очков на первой кости, вверху — на второй, а на пересечении строки и столбца стоит их сумма.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Непосредственный подсчет показывает, что вероятность того, что сумма очков на верхних гранях меньше 9, равна $26/36 = 13/18$; что эта сумма больше 7 — $15/36 = 5/18$; что она делится на 3: $12/36 = 1/3$; наконец, что она четна: $18/36 = 1/2$.

24.5. В старинной индейской игре «Тонг» два игрока одновременно показывают друг другу либо один, либо два, либо три пальца на правой руке. Если для каждого игрока равновозможно показать один, два или три пальца, то чему равна вероятность того, что общее число показанных пальцев четно? Нечетно? Больше четырех? Меньше двух?

24.6. Какова вероятность того, что наудачу выбранное четырехзначное число составлено только из нечетных цифр?

Обсуждение. Четырехзначных чисел имеется 9000 — они идут в натуральном ряду с 1000 до 9999. Поскольку нечетных цифр имеется 5, то на месте тысяч в числе, составленном из нечетных цифр, может стоять любая из 5 цифр, на месте сотен тоже любая из 5 и т. д. Всего, таким образом, имеется $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ четырехзначных чисел, составленных только из нечетных цифр. Слова «наудачу выбранное четырехзначное число» означают, что все 9000 исходов равновозможны. Значит, искомая вероятность равна $625/9000 = 5/72$.

24.7. Что вероятнее — выиграть у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8?

24.8. Пусть вы забыли одну цифру нужного вам номера телефона и набираете ее наудачу. Какова вероятность того, что вам придется сделать не более двух звонков?

24.9. Бросают три игральных кубика. Что вероятнее: сумма очков на верхних гранях равна 11 или эта сумма равна 12? Каковы

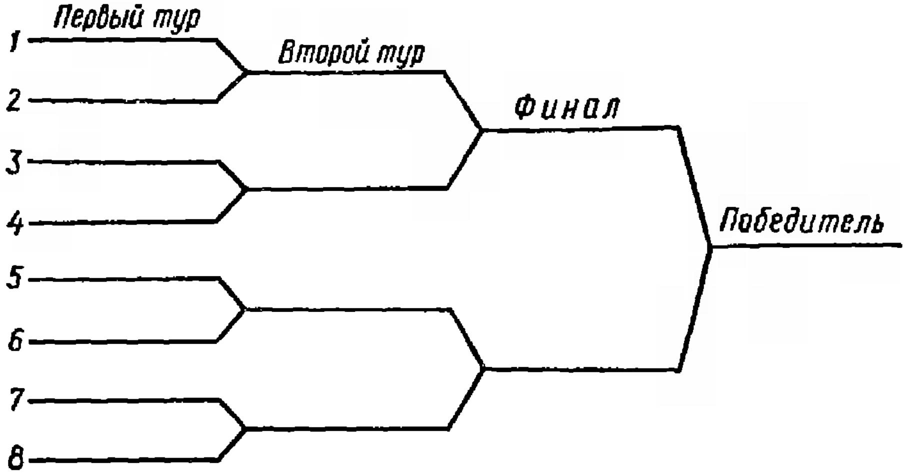


Рис. 112

вероятности этих событий? (Эту задачу знаменитый игрок в кости шевалье де Мере предложил Паскалю.)

Обсуждение. Прежде всего найдем, сколькими способами можно представить 11 и 12 в виде суммы трех натуральных слагаемых, каждое из которых не превосходит 6. Будем выписывать суммы в порядке возрастания слагаемых. Начнем с 11. Если наименьшее слагаемое — 1, то $11 = 1 + 4 + 6$ либо $11 = 1 + 5 + 5$. Если меньшее слагаемое — 2, то $11 = 2 + 3 + 6$ либо $11 = 2 + 4 + 5$. Если наименьшее слагаемое — 3, то $11 = 3 + 4 + 4$ либо $11 = 3 + 3 + 5$. Этими шестью случаями исчерпываются все представления 11 в виде суммы трех чисел, нанесенных на грани кубиков. Число 12 можно представить в таком виде также шестью способами: $12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 4 + 6 = 2 + 5 + 5 = 3 + 3 + 6 = 3 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4$. Шевалье де Мере заключил отсюда, что 12 в качестве суммы будет встречаться столь же часто, как и 11. Однако результаты многих игр показали, что, вопреки расчетам де Мере, 11 встречается чаще. Именно тогда шевалье де Мере усомнился в теории вероятностей и обратился к Паскалю за разъяснениями. Паскаль решил задачу. Оказалось, что теория вероятностей верна, а рассуждения де Мере ошибочны. Шевалье не учел, что, скажем, $4 + 4 + 4$ может выпасть одним способом: на всех трех кубиках 4, а $1 + 4 + 6$ — многими: на первом — 1, на втором — 4, на третьем — 6 или на первом — 6, на втором — 4, на третьем — 1 и т. д.

Найдем вероятности того, что сумма очков на верхних гранях равна 11, и того, что эта сумма равна 12. При бросании трех кубиков имеется $6 \times 6 \times 6 = 216$ равновозможных исходов. Событие «сумма очков равна 11» может осуществиться одним из шести способов: «выпали числа 1, 4, 6», «выпали числа 1, 5, 5» и т. д. Подсчитаем, сколько для каждого из этих способов имеется благоприятных исходов. Событию «выпали 1, 4, 6» соответствуют 6 исходов, которые можно записать так: 146 (на первом кубике на верхней грани стоит 1, на втором — 4, на третьем — 6), 164, 416, 461, 614,

641. Точно так же 6 исходов благоприятны для любого способа представления суммы в виде трех различных слагаемых. Событию «выпали 1, 5, 5» соответствуют три исхода: 155, 515, 551. Всего для события «сумма очков равна 11» благоприятны $6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27$ исходов. А событию «сумма очков равна 12» благоприятны $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ исходов, поскольку представлению $4 + 4 + 4$ соответствует только один исход — 444. Итак, вероятность того, что сумма очков равна 11, есть $27/216 = 1/8$, а вероятность того, что эта сумма равна 12, есть $25/216 = 1/8 - 1/108$. Решение этой задачи показывает, как важно правильно выделить равновозможные исходы.

24.10. В шахматном турнире участвуют 8 игроков. Номера игроков распределяются по жребию. Номер определяет положение игрока в турнирной лестнице (рис. 112). Предположим, что лучший игрок всегда побеждает второго по мастерству, а тот в свою очередь побеждает всех остальных. Второе место занимает проигравший в финале. Какова вероятность того, что это место займет второй по мастерству игрок?

24.11. Король Артур проводит рыцарский турнир, в котором порядок состязания определяется жребием (см. задачу 24.10). Среди восьми рыцарей, одинаково искусных в ратном деле, два близнеца. Какова вероятность того, что они встретятся в поединке?

24.12. Задача о разделе ставки (вторая задача шевалье де Мере, предложенная Паскалю). Подбрасывается монета. Первый игрок «набирает» гербы, а второй — решетки. Тот, кто первым «наберет» три единицы, забирает ставку. Игра была прервана, когда у первого игрока имелось два герба, а у второго — одна решетка. Ставка должна быть разделена пропорционально шансам на выигрыш. Как ее разделить?

24.13. Космонавт должен построить базу на одной из пяти планет. Он последовательно облетает их, выбирая наилучшую. Поскольку запасы топлива ограничены, возвращаться на уже отвергнутую планету не разрешается. Как действовать космонавту, чтобы вероятность выбора для базы наилучшей планеты была максимальна?

Обсуждение. Прежде всего надо ввести равновозможные исходы. Мы считаем, что планеты можно упорядочить по качеству. Космонавт посещает их в соответствии с заданным маршрутом. Но цель его состоит не в том, чтобы пройти весь маршрут, — ему надо остановиться на наилучшей планете. Всего имеется $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ способов упорядочения планет по качеству, поскольку первой по качеству может оказаться любая из 5 планет, второй — любая из 4 оставшихся и т. д. Эти-то 120 исходов и будем считать равновозможными.

Как может действовать космонавт? Он может построить базу на первой же планете. Вероятность того, что база построена на наилучшей планете, при такой стратегии космонавта равна 1/5. Он может лететь дальше. Назовем планету «хорошей», если она лучше всех ранее просмотренных. Ясно, что строить базу стоит только на «хорошей» планете. Очутившись на «хорошей» планете, космонавт должен решить, остаться ли на ней или же лететь дальше. Посмотрим, какое решение ему следует принимать.

Если космонавт попал на пятую планету, которая является «хорошей», то цель достигнута, пятая планета лучше всех, надо строить базу.

Пусть «хороша» четвертая осмотренная планета. Космонавт знает, как упорядочены по качеству четыре планеты. Этому событию благоприятны 5 исходов (какие?). В четырех из них четвертая планета является наилучшей, а в одном — второй по качеству. Надо строить базу на четвертой планете.

Пусть третья планета является «хорошей». Имеется $5 \times 4 = 20$ исходов с заданным упорядочением по качеству трех планет. Из них в двух и четвертая, и пятая планеты лучше третьей, в трех четвертая лучше, а пятая хуже третьей, и еще в трех, наоборот, пятая лучше третьей, а четвертая хуже. Значит, в 12 исходах из 20 третья планета — самая лучшая. Надо строить базу на третьей планете.

Пусть вторая планета является «хорошей». Благоприятными для этого являются $5 \times 4 \times 3 = 60$ равновозможных исходов. Из них только в $2 \times 3 \times 4 = 24$ вторая планета является самой лучшей. А что будет, если космонавт двинется дальше? В 24 исходах, как уже сказано, лучшей, чем вторая, планеты не найдется. Третья, четвертая и пятая планеты являются лучшими каждая в 12 исходах. Однако до самой лучшей планеты космонавт может и не добраться, остановившись на ранее встреченной «хорошей». Так, космонавт не доберется до самой лучшей четвертой планеты, если третья планета является «хорошей», т. е. в 4 исходах из 12. До самой лучшей пятой планеты космонавт долетит лишь тогда, когда третья и четвертая хуже второй, т. е. в 6 исходах из 12. Значит, если космонавт решит двигаться дальше, то найдет наилучшую планету в $12 + 8 + 6 = 26$ исходах. Поскольку 26 больше 24, выгоднее лететь дальше.

Итак, если космонавт не остался на первой планете, то ему надо осмотреть вторую, а затем остановиться на той из оставшихся, которая лучше всех ранее изученных. Подсчитаем вероятность того, что при этом космонавту удастся построить базу на самой лучшей планете.

Космонавт остановится на третьей планете, если она лучше первых двух, т. е. в 40 исходах. Из них в 24 третья планета действительно является самой лучшей. Он остановится на четвертой, если выполнены два условия: а) четвертая лучше первых трех; б) третья хуже первой или второй. Условие а) выполнено в 30 исходах, из них б) выполнено в 20. Из этих 20 четвертая является самой лучшей в 16. Наконец, до самой лучшей пятой планеты космонавт доберется в 12 исходах. Итак, построить базу на самой лучшей планете ему удастся в $24 + 16 + 12 = 52$ исходах. Вероятность этого равна $52/120 = 0{,}433\ldots$, т. е. в 2,17 раза больше, чем вероятность успеха при остановке на первой же планете. Значит, на первой планете останавливаться действительно не надо.

24.14. Монету бросают до первого выпадения герба либо до тех пор, пока три раза подряд не выпадет решетка. Сколько в среднем раз придется бросить монету?

Обсуждение. Обозначим $Г$ — герб, $Р$ — решетка. Возможны следующие исходы: $Г$, $РГ$, $РРГ$, $РРР$. Можно ли считать их равновозможными? Ясно, что нет, поскольку выпадение герба в первом бросании вероятнее выпадения трех решеток при трех бросаниях. Поэтому введем вспомогательный опыт, в котором всегда бросаются три монеты. Имеется 8 равновозможных исходов: $ГРР$, $ГРГ$, $ГГР$, $ГГГ$, $РГГ$, $РГР$, $РРГ$, $РРР$. Первые четыре исхода вспомогательного опыта соответствуют первому исходу основного, вероятность окончания опыта выпадением герба равна 1/2. Два исхода вспомогательного опыта соответствуют выпадению $РГ$ в основном, вероятность чего равна таким образом 1/4. Основной опыт кончается выпадением $РРГ$ и $РРР$ с вероятностями 1/8. Значит, монету бросают 1 раз с вероятностью 1/2, 2 раза — с вероятностью 1/4 и 3 раза тоже с вероятностью 1/4. А сколько в среднем? Требуется уточнить слова «в среднем». Если мы много раз, скажем n раз, проведем описанный опыт, то примерно в $n/2$ опытах понадобится бросать монету 1 раз, в $n/4$ опытах — 2 раза и в $n/4$ опытах — 3 раза. Значит, на n опытов придется примерно $n/2 + 2n/4 + 3n/4 = 7n/4 = 1{,}75n$, т. е. на один опыт приходится в среднем 1,75 бросаний монеты. Как видите, чтобы найти среднее значение, нужно возможные значения умножить на их вероятности и сложить.

Во всех предыдущих задачах мы вычисляли вероятности, подсчитывая число равновозможных исходов и число благоприятных исходов. В следующих задачах вероятности предполагаются заданными заранее.

24.15. Чтобы подбодрить дочку, делающую успехи в шахматной игре, отец обещает купить ей новую куклу, если она выиграет подряд по крайней мере две партии против своего отца и дяди по одной из схем: отец — дядя — отец или дядя — отец — дядя. Дядя играет лучше отца. Какую схему следует выбрать дочке?

24.16. Однорукий бандит. Игральный автомат (в Америке их называют «однорукими бандитами») имеет два окошка, в каждом из которых появляются картинки. В каждом окошке может появиться одна из трех картинок, которые называются «колокольчики», «яблоки» и «вишни». Машина устроена так, что картинки в окошках появляются независимо одна от другой. После того как автомат запущен, в каждом окошке появляется одна картинка, причем вероятности картинок для обоих окошек равны. «Колокольчики» появляются с вероятностью 0,4, «вишни» — с вероятностью 0,5, «яблоки» — с вероятностью 0,1. Для запуска автомата необходимо заплатить 5 центов и дернуть за ручку (отсюда название — «однорукий бандит»). Игрок получает 50 центов в случае появления двух картинок «яблоки», 10 центов — двух картинок «колокольчики» и

5 центов[1] — двух картинок «вишни». На какой средний выигрыш можно рассчитывать?

Тема 25. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ, ШИФРОВКИ, ТАИНСТВЕННЫЕ ИСТОРИИ

Математические ребусы

Требуется расшифровать запись арифметического равенства, в котором цифры заменены буквами, причем разные цифры заменены разными буквами, одинаковые — одинаковыми. Предполагается, что исходное равенство верно и записано по обычным правилам арифметики. В частности, в записи числа первая слева цифра не является цифрой 0; используется десятичная система счисления.

25.1. *ЧАЙ : АЙ* = 5.

Обсуждение. Из условия следует, что *ЧАЙ* = *АЙ* × 5, т. е. *Ч* × 100 + *АЙ* = *АЙ* × 5, откуда *Ч* × 100 = *АЙ* × 4 и *Ч* × 25 = *АЙ*. Так как число *АЙ* двузначное, то *Ч* может быть равно только 1, 2 или 3. Каждому значению *Ч* соответствует определенное решение: если *Ч* = 1, то *АЙ* = 25, *А* = 2, *Й* = 5; если *Ч* = 2, то *АЙ* = 50; если *Ч* = 3, то *АЙ* = 75. Значит, расшифровать запись можно тремя способами: *ЧАЙ* = 125, 250 или 375.

25.2. *КАКАК* × *КО* = *КОКОКО*.

25.3. *ЛИК* × *ЛИК* = *БУБЛИК*.

Обсуждение. Из обеих частей равенства вычтем *ЛИК*. Получим: *ЛИК* × (*ЛИК* — 1) = *БУБ* × 1000. Числа *ЛИК* и (*ЛИК* — 1) являются двумя последовательными натуральными числами, поэтому они взаимно просты. Так как их произведение делится на 1000 = 5 × 5 × 5 × 2 × 2 × 2, то одно из них делится на 5 × 5 × 5 = 125, но не делится на 2, а второе делится на 2 × × 2 × 2 = 8, но не делится на 5. Среди нечетных трехзначных чисел делятся на 125 только 125, 375, 625, 875. Среди соседних с ними чисел (больших на 1 или меньших на 1) делятся на 8 только 376, 624. Проверка показывает, что первое из этих чисел годится, а второе — нет. Получили расшифровку: 376 × 376 = 141 376.

25.4. *СУК* × *СУК* = *БАРСУК*.

25.5. *МЯУ* × *МЯУ* = *МЯУЯК* + *УЯЯ*.

Обсуждение. 1. Справа стоит сумма пятизначного и трехзначного чисел, поэтому *МЯУ* × *МЯУ* не превосходит 99 999 + + 999, что меньше 101 000. Поскольку 400 × 400 = 160 000 больше 101 000, то буквой *М* зашифрована одна из цифр: 1, 2, 3. Следовательно, сумма справа не превосходит 39 999 + 999, что меньше 41 000. Поскольку 300 × 300 = 90 000, что больше 41 000, то *М* ≠ 3, т. е. *М* = 2 или *М* = 1. Значит, сумма справа не прево-

[1] Цент — мелкая разменная монета США, Канады, Цейлона, Эфиопии и ряда других стран. Доллар равен 100 центам.

сходит 29 999 + 999 и меньше 31 000. Поскольку $200 \times 200 = 40\,000$, что больше 31 000, то $M \neq 2$. Итак, $M = 1$.

2. Таким образом,

$$(100 + 10Я + У) \times (100 + 10Я + У) = (10\,000 + 1000Я + 100У + 10Я + К) + (100У + 10Я + Я).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены в левой и правой частях равенства по отдельности:

$$10\,000 + 100Я^2 + У^2 + 2000Я + 20ЯУ + 200У = 10\,000 + 1000Я + 200У + 20Я + К + Я.$$

Сократим одинаковые члены в левой и правой частях равенства:

$$100Я^2 + У^2 + 1000Я + 20ЯУ = 20Я + К + Я. \qquad (*)$$

Поскольку $M = 1$, то $Я \neq 1$. Если $Я$ не меньше 2, то левая часть последнего равенства не меньше $100 \times 4 + 1000 \times 2 = 2400$, в то время как правая при любых $У$, $Я$, $К$ не превосходит $20 \times 9 + 9 + 9 = 198$. Остается единственная возможность: $Я = 0$.

3. Подставив в равенство (*) $Я = 0$, получим, что $У^2 = К$. Поскольку $4^2 = 16$, что больше 9, то для $У$ остается два значения: $У = 2$ и $У = 3$, тогда $К = 4$ и $К = 9$ соответственно. В каждом из этих двух случаев получаем расшифровку. Итак, существуют две расшифровки: $МЯУ = 102$ или $МЯУ = 103$.

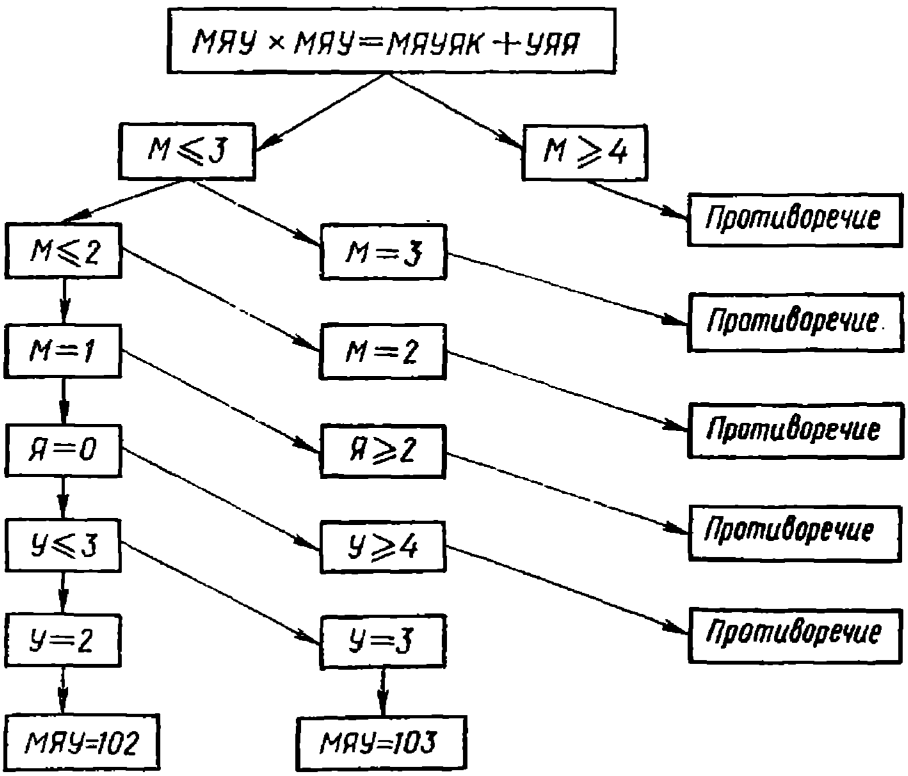


Рис. 113

4. Ход наших рассуждений можно изобразить в виде схемы (рис. 113). На ней наглядно видно, что мы разобрали все возможные случаи. Схема решения математического ребуса напоминает блок-схему программы для ЭВМ (см. также тему «Задача Пуассона»). Тот, кто хорошо и правильно решает ребусы, лучше справится и с программированием.

25.6.
$$\begin{array}{r} \text{БАРБОС} \\ +\ \text{БОБИК} \\ \hline \text{СОБАКИ} \end{array}$$

Обсуждение. Расшифровку можно проводить, например, так. (Здесь приведено краткое описание расшифровки. Запаситесь бумагой и ручкой, чтобы восстановить опущенные детали.)

Сложение в столбце сотен тысяч дает $С = Б + 1$. Сложение в столбце десятков тысяч показывает, что $А + Б = 10 +$ «$О$» либо $А + Б + 1 = 10 +$ «$О$» (букву $О$ мы заключаем в кавычки, чтобы не спутать с нулем).

При сложении в столбце единиц получаем либо $С + К = И$, либо $С + К = 10 + И$. Разберем сначала первый случай. В столбце десятков «$О$» $+ И =$ «$О$» $+ С + К$, т. е. больше $К$, поэтому «$О$» $+ И = 10 + К$. Следовательно, $С +$ «$О$» $= 10$, $Б + 1 +$ «$О$» $= 10$, «$О$» $= 9 - Б$. Из столбца сотен видно, что либо $2Б + 1 = А$, либо $2Б + 1 = 10 + А$. Комбинируя каждое из этих двух уравнений с одним из двух уравнений, полученных выше при рассмотрении столбца десятков тысяч (с заменой «$О$» $= 9 - Б$), получаем четыре системы двух уравнений с двумя неизвестными. Из них натуральные решения имеет только одна, которая дает $А = 5$, $Б = 7$. Следовательно, $С = 8$, «$О$» $= 2$. Подставляя расшифрованные цифры, получаем, что

$$\begin{array}{r} 75Р728 \\ +\ 727ИК \\ \hline 8275КИ \end{array}$$

Из столбца тысяч получаем: $Р = 4$. Поскольку $8 + К = И$, то $К = 1$, $И = 9$. Получаем расшифровку:

$$\begin{array}{r} 754728 \\ +\ 72791 \\ \hline 827519 \end{array}$$

Разберем теперь второй случай: $С + К = 10 + И$. Тогда «$О$» $+ И =$ «$О$» $+ С + К - 10$, но «$О$» $+ И + 1 = К$ или «$О$» $+ И + 1 = 10 + К$. Поскольку равенство «$О$» $+ С = 19$ невозможно, то «$О$» $+ И + 1 = К$ и «$О$» $+ С = 9$, «$О$» $= 8 - Б$. Сопоставляя последнее соотношение со сложением в столбце десятков тысяч, получаем, что либо $А + 2Б = 17$, либо $А + 2Б = 18$. Поскольку из столбца десятков в столбец сотен ничего не переносится, то $2Б = А$ либо $2Б = 10 + А$. Взяв по одному уравнению каждой пары, получим четыре системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Только одна из них имеет натуральные решения: $Б = 7$, $А = 4$. Следовательно, $С = Б + 1 = 8$, «$О$» $= 8 - Б = 1$. Подставим расшифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} 74Р718 \\ +\quad 717ИК \\ \hline 8174КИ \end{array}$$

Из столбца тысяч получаем: $Р = 5$. Далее, $8 + К = 10 + И$ (столбец единиц), $К = 2 + И$, причем буквами $К$ и $И$ зашифрованы какие-то из цифр: 0, 2, 3, 6, 9. Есть единственная возможность: $К = 2$, $И = 0$. Получили вторую (и последнюю) расшифровку:

$$\begin{array}{r} 745718 \\ +\quad 71702 \\ \hline 817420 \end{array}$$

25.7. $\begin{array}{r} АНДРЕЙ \\ +\quad ЖАННА \\ \hline ДРУЖБА \end{array}$ **25.8.** $\begin{array}{r} КОРОВА \\ +\quad ТРАВА \\ \hline МОЛОКО \end{array}$

а) Докажите, что у ребуса 25.8 нет ни одной расшифровки.

б) В порядке исключения пусть буквами «$А$» и «$Т$» зашифрована одна и та же цифра. Расшифруйте запись.

25.9. $БЕ \times РУ \times 4 = БУЕР$. (Здесь $\times$ — знак умножения.)

25.10. $\begin{array}{r} ТРУД \\ +\quad ВОЛЯ \\ \hline УДАЧА \end{array}$

Дополнительное условие: числа $ТР$ и $ВО$ делятся на 13.

25.11. $КО + ЛЯ = ОЛ - Я$.

а) Расшифруйте при дополнительном условии $К + О + Л + Я = 21$.

б) Расшифруйте без этого дополнительного условия (более 10 ответов).

25.12. $\begin{array}{r} РЕШИ \\ +\quad ЕСЛИ \\ \hline СИЛЕН \end{array}$ **25.13.** $\begin{array}{rl} ИГРЕК & \big|\,ИКС \\ -\,ИКС & \big|\,\overline{ЗЕТ} \\ \hline ГИЕ & \\ -\,УЗК & \\ \hline ЗЕЕК & \\ -\,ЗЕЕК & \\ \hline 0 & \end{array}$

25.14. $\begin{array}{r} СТОЛ \\ +\quad СТУЛ \\ \hline КЛАСС \end{array}$

Задачи типа «сбежали цифры»

Требуется восстановить поврежденные записи арифметических действий, в которых часть цифр заменена звездочками. Восстановление зачастую можно провести несколькими способами.

25.15.

$$\begin{array}{r} 3*86\\ +\ *2*7\\ \hline 804* \end{array}$$

Обсуждение. Поскольку $6+7=13$, то сумма равна 8043. Остальные цифры восстанавливаем последовательно — сначала в столбце десятков, потом — сотен, затем — тысяч. Из столбца единиц в столбец десятков переносится единица, поэтому $1+8+ + * = 14$, а звездочку в столбце десятков надо заменить цифрой 5. В столбце сотен $1 + * + 2 = 10$, поэтому вместо звездочки надо подставить цифру 7. Наконец, в столбце тысяч $1 + 3 + * = 8$, $* = 4$. Ответ. $3786 + 4257 = 8043$.

25.16.

$$\begin{array}{r|l} 7**0 & ** \\ \cline{2-2} -\ *6*\ \ & *4 \\ \cline{1-1} *8*\ & \\ -\ 3**\ & \\ \cline{1-1} 0\ & \end{array}$$

Обсуждение. «Снесем» 0, получим следующую запись второго вычитания:

$$\begin{array}{r} *80\\ -\ 3**\\ \hline 0 \end{array}$$

Следовательно, вычитается число 380. Оно равно делителю, умноженному на 4. Следовательно, делитель равен $380 : 4 = 95$. Цифра сотен в первом вычитаемом либо 6, либо 7. Посмотрим, при умножении 95 на какие числа получается трехзначное число с цифрой сотен 6 или 7. Таких чисел два: 7 и 8, $95 \times 7 = 665$, $95 \times 8 = 760$. Следовательно, «подозрительными» делимыми являются числа 7980 и 7030. У чисел 95×7 и 95×8 в разряде десятков стоит 6, что совпадает с цифрой, стоящей в поврежденной записи. Легко проверить, что из записей делений $7980 : 95$ и $7030 : 95$ можно получить исходную запись со «сбежавшими цифрами». Так, восстановление записи проводится двумя способами.

25.17.

$$\begin{array}{r} 235\\ \times\ \ **\\ \hline ****\\ +\ ****\ \\ \hline **56* \end{array}$$

25.18.

$$\begin{array}{r} 2*\\ \times\ *2\\ \hline *8\\ +\ 7*\ \\ \hline 7*8 \end{array}$$

25.19.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 6 & * \\
\times & & * & * & * \\
\hline
 & & & * & * \\
+ & & * & * & \\
 & * & * & & \\
\hline
 & * & * & * & 6
\end{array}
$$

25.20.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & * & * & * & 7 \\
\times & & & & & * & * & * \\
\hline
 & & & * & * & * & * & 6 \\
+ & & * & * & 2 & 0 & 3 & \\
 & * & 3 & 7 & * & * & & \\
\hline
 & * & * & * & * & * & * & *
\end{array}
$$

Обсуждение задачи 25.20. Из таблицы умножения видно, что из произведений 7 на однозначные числа оканчивается на 6 только одно — 7×8, а на 3 — только 7×9. Следовательно, последние две цифры множителя таковы: 98.

Какова цифра десятков в множимом? Обозначим ее буквой X. Нам известно, что $(10X + 7) \cdot 9 = 10(9X + 6) + 3$ оканчивается на 03. Значит, $9X + 6$ оканчивается цифрой 0, а $9X$ — цифрой 4. Из таблицы умножения видно, что для X есть единственная возможность: $X = 6$.

Цифру сотен множимого обозначим $У$. Мы видим, что $9(100У + 67)$ оканчивается на 203. Значит, $9У + 6$ оканчивается цифрой 2, а $9У$ оканчивается цифрой 6. Значит, $У = 4$.

Какова цифра сотен множителя? Обозначим ее A. Тогда по условию цифра сотен в произведении $467\,A$ равна 7. Поскольку $467 \times 2 = 934$, $467 \times 3 = 1401$, $467 \times 4 = 1868$, $467 \times 5 = 2335$, $467 \times 6 = 2802$, $467 \times 7 = 3269$, $467 \times 8 = 3736$, $467 \times 9 = 4203$, то $A = 8$.

Обозначим буквой B цифру тысяч в множимом. Надо найти такое B, чтобы в числе $8(1000B + 467)$ на месте тысяч стояла цифра 3. Поскольку $467 \times 8 = 3736$, то число $8B + 3$ должно оканчиваться на 3, а $8B$ должно оканчиваться 0. Значит, $B = 5$.

Ответ:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 5 & 4 & 6 & 7 \\
\times & & & & & 8 & 9 & 8 \\
\hline
 & & & 4 & 3 & 7 & 3 & 6 \\
+ & & 4 & 9 & 2 & 0 & 3 & \\
 & 4 & 3 & 7 & 3 & 6 & & \\
\hline
 & 4 & 9 & 0 & 9 & 3 & 6 & 6
\end{array}
$$

Один из видов шифровок

Опишем один многократно проверенный на опыте способ шифровки. Одна из одиннадцати букв — *а*, *е*, *ё*, *и*, *й*, *о*, *у*, *ы*, *э*, *ю*, *я* — отбрасывается, остальные как-то разбиваются на пары (обычно отбрасывают букву *ё*, вместо нее, как обычно в печатном тексте, используют *е*; однако в задаче 25.21 отброшена буква *й*, в задаче 25.22 отброшена буква *ю*). Остальные двадцать две буквы тоже както разбиваются на пары. Каждая буква в тексте заменяется другой буквой из той же пары. Требуется расшифровать текст.

25.21. *Мяжя Дяма клёнгё брящэд,*
Юлёмыря ф лэщгю нащыг.
Дыжэ, Дямэщгя, мэ брящъ,
Мэ юдёмэд ф лэщгэ нащ.

25.22. *Стакни.*

Ьу ысьыш куцысэ тулырубя ртя стапу: дбэдутн, рызутн ядцутчяз. Яъ жушябяя Лытядыц, Яццыц я Дэшйьыц. А дбэдути ьэр ья лтурнэц, ья дэдрйт. Ыь — душоё шбусмяё як стакэё. Дэшйьыц, фэьуроё ьу дэдртэ Лытядыцу, друтмэ рызути. Ьукыцярэ жушябяя дбэдути, рызути я дцутчязу.

Обсуждение. Расшифровка может проходить, например, так. Во второй фразе три слова написаны с большой буквы, все они оканчиваются сочетанием «*ыц*». Это имена собственные, второе и третье соединяет слово «*я*». Поскольку окончания одинаковы, то естественно предположить, что буква *я* заменяет в шифре букву ***и***, т. е. *я* и ***и*** составляют одну из пар, о которых говорилось в описании способа шифровки. В третьей фразе встречается дважды слово «*ья*». Поскольку вместо *я* надо поставить ***и***, то приходит в голову, что это слово означает ***ни***, т. е. ***н*** и ***ь*** образуют пару. В тексте дважды встречается слово «*ьу*». Оно может означать: ***на, не, но, ну***. Однако маловероятно, чтобы текст начинался с ***не, но, ну***. Примем, что «*ьу*» — это ***на***. Получаем еще одну пару — *а* и ***у***. Рассмотрим третью фразу, расшифрованные буквы подставим, выделив их жирным шрифтом (или подчеркнув), чтобы отличить от еще зашифрованных: ***У*** *дбэдат****я*** *нэр* ***ни*** *лтарьэц*, ***ни*** *дэдрйт*. Естественно, возникает гипотеза, что третье слово — это слово ***нет***. Получаем еще две пары: *э* и ***е***, *р* и ***т***. Тогда пятое слово таково:

л ***р а т ь е*** *ц*.

Видимо, это слово: ***б р а т ь е в***. Еще две пары найдены: *л* и ***б***, ***ц*** и ***в***. Подставим в текст расшифрованные буквы.

С ***р у*** *к* ***ь я***.

Н а *ы с н ы ш к* ***а в*** *ы с* ***е р а б*** *ы* ***т а л и т р и*** *с* ***р у*** *п* ***а***: *д* ***л е*** *д* ***а р ь***, ***т*** *ы з* ***а р ь и*** *д* ***в а р ч и*** *з*. ***И*** *ъ ж* ***а*** *ш* ***и л и и Б*** *ы* ***р и*** *д ы* ***в***, ***И в а н*** *ы* ***в и Д е*** *ш й* ***н*** *ы* ***в***. ***У*** *д* ***л е*** *д* ***а р я н е т н и б р а т ь е в***, ***ни д е*** *д* ***т*** *й* ***р***. *Ы* ***н*** — *д* ***а*** *ш о ё ш* ***л а*** *с м* ***и*** *ё* ***и*** *к с* ***р у*** *к* ***е*** *ё*. ***Д е*** *ш й* ***н*** *ы* ***в***, *ф* ***е н а т*** *о ё* ***н а д е*** *д* ***т р е Б*** *ы* ***р и*** *д ы* ***в а***, *д* ***т а р*** *м э* ***т*** *ы з* ***а р я***. ***Н а*** *к ы* ***в и т е*** *ж* ***а*** *ш* ***и л и и*** *д* ***л е*** *д* ***а р я***, ***т*** *ы з* ***а р я и*** *д* ***в а р ч и*** *з* ***а***.

При взгляде на вторую фразу сразу становится ясно, что имена собственные — это фамилии ***Боридов***, ***Иванов и Дешйнов***. Получаем пару *ы* и ***о***. Первые два слова во второй фразе, видимо, таковы — ***их фамилии***. Получаем пары: *ъ* и ***х***, *ж* и ***ф***, *ш* и ***м***. Первая фраза начинается так: «***Н а о*** *с* ***н о м*** *к* ***а в о*** *с* ***е р а б о т а л и***...», по-видимому, в одну пару входят *с* и ***д***, а также *к* и *з*. Такая расшифровка подтверждается многими словами в дальнейшем тексте.

Третья фраза теперь выглядит так: ***«У слесаря нет ни братьев, ни сестйр»***. Значит, *й* и *ё* входят в одну пару. Слова первой фразы ***«друпа»*** и ***«сварчик»*** показывают, что в пары объединяются *п* и *г*, *ч* и *щ*.

Теперь все буквы текста расшифрованы, все буквы, кроме *ю*, объединены в пары. Приведем список всех пар — полученную нами таблицу, с помощью которой шифровалось сообщение:

а — ***у***	*д* — ***с***	*з* — ***к***	*л* — ***б***
б — ***л***	*е* — ***э***	*и* — ***я***	*м* — ***ш***
в — ***ц***	*ё* — ***й***	*й* — ***ё***	*н* — ***ь***
г — ***п***	*ж* — ***ф***	*к* — ***з***	*о* — ***ы***
п — ***г***	*у* — ***а***	*ч* — ***щ***	*ы* — ***о***
р — ***т***	*ф* — ***ж***	*ш* — ***м***	*ь* — ***н***
с — ***д***	*х* — ***ъ***	*щ* — ***ч***	*э* — ***е***
т — ***р***	*ц* — ***в***	*ъ* — ***х***	*я* — ***и***

Итак, сообщение таково:

Друзья.

На одном заводе работали три друга: слесарь, токарь и сварщик. Их фамилии Борисов, Иванов и Семенов. У слесаря нет ни братьев, ни сестер. Он — самый младший из друзей. Семенов, женатый на сестре Борисова, старше токаря. Назовите фамилии слесаря, токаря и сварщика.

Решение этой задачи предлагаем найти читателю.

25.23. — *Берпи э йдемгоквэы бибео-жакйпч звеле, — збисив Фивмиу-Кевмиу пелевчже дгосгамовчже, — еже есжиьиом мевчбе ме, ьме э цеьй, ьмекю еже екесжиьиве, — жа кевчфо, жа тожчфо.* (Буква *ё* не встречается.)

Тема 26. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

26.1. Футбольный чемпионат. Золотой призер этого чемпионата набрал 7 очков, серебряный — 5, бронзовый — 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? (За выигрыш дается, как обычно, 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Если две команды набрали одинаковое количество очков, места определяются по разности забитых и пропущенных мячей.)

26.2. Вверх по лестнице. В этой задаче участвуют Трое Неизвестных — Икс, Игрек и Зет, постоянные персонажи математического отдела журнала «Пионер», который так и называется: «Встречи с Тремя Неизвестными».

Итак, Трое Неизвестных — Икс, Игрек и Зет — бегут вверх по лестнице, они торопятся на открытие Олимпиады. При этом Икс перепрыгивает через одну ступеньку, Игрек — через две, а Зет —

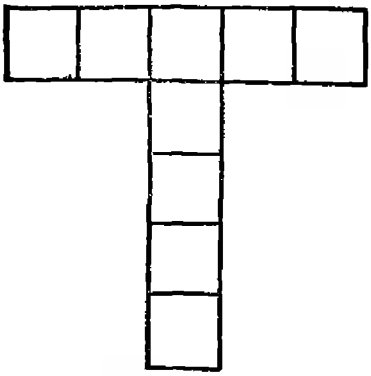


Рис. 114

через четыре. Докажите, что, какие бы восемь идущих подряд ступенек мы ни взяли, среди них есть ступенька, на которую не ступала нога ни одного из Трех Неизвестных.

26.3. Что больше: 31^{11} или 17^{14}?

26.4. Удивительное число. Первая цифра десятизначного числа равна числу единиц в десятичной записи этого числа, вторая — числу двоек, третья — числу троек и т. д., наконец, десятая — числу нулей. Найдите это число.

26.5. Кратчайший путь. Из Ашхабада в Сан-Франциско отправляется самолет. Стюардесса объявляет: «Наш самолет летит по кратчайшему пути». Среди пассажиров был известный полярный путешественник Морозов-Стужин. Услышав ее слова, он попросил разбудить его, когда самолет будет над Северным Ледовитым океаном. Все кругом засмеялись: Ашхабад, Сан-Франциско и вдруг — Ледовитый океан! А как вы считаете, шутил полярник или говорил серьезно?

26.6. Пять чисел. Сумма пяти натуральных чисел равна 25. Докажите, что их произведение меньше 3200.

26.7. Какое наибольшее число шашек можно расставить на черных полях доски 10×10 клеток так, чтобы ни одна из них не могла бить другую и хотя бы одно черное поле оставалось свободным?

26.8. Костя утверждает, что он придумал признак делимости на 81: «Если сумма цифр числа делится на 81, то и само это число делится на 81». Верно ли Костино утверждение? Если да, то докажите его. Если нет, приведите пример, опровергающий утверждение Кости.

26.9. Таня пытается вымостить плоскость «тэшками» (фигура, напоминающая букву «т э»). Все «тэшки» одинаковы и имеют вид, изображенный на рисунке 114. Уложить «тэшки» надо без пробелов и в один слой, чтобы никакие две «тэшки» не перекрывались. Сможет ли Таня вымостить плоскость? Если сможет, то как? Если не сможет, то почему?

26.10. Числа p, $p^2 + 4$, $p^2 + 6$ простые. Найдите p.

26.11. Дан параллелограмм $ABCD$. Где могут быть расположены вершины выпуклого четырехугольника, середины сторон которого совпадают с точками A, B, C, D?

26.12. Среди 1969 натуральных чисел 1, 2, 3, ..., 1969 надо выбрать побольше таких, чтобы сумма любых двух выбранных делилась на 26. Как надо выбирать? Какое наибольшее количество чисел удастся выбрать?

26.13. Решите в целых неотрицательных числах уравнение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

26.14. На клетках шахматной доски размером 8×8 написаны числа: на нижней горизонтали слева направо написаны 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; каждое число, стоящее на второй горизонтали, вдвое больше стоящего под ним числа на первой горизонтали; каждое число, стоящее на третьей горизонтали, втрое больше стоящего под ним числа на первой горизонтали, и т. д. На доске расставлены 8 ладей так, что никакие две не бьют друг друга. Найдем сумму чисел в клетках, на которых стоят ладьи. Как нужно расставить ладьи, чтобы эта сумма была: а) наибольшей; б) наименьшей?

26.15. В стране шесть городов. Между любыми двумя из них имеется прямое железнодорожное сообщение, так что из любого города в любой другой можно попасть по прямолинейному пути, не проезжая через остальные города. Найдите такую схему железнодорожного сообщения этой страны, чтобы на ней было как можно меньше пересечений дорог. (В одном месте могут пересекаться не больше двух дорог.)

26.16. Какое наименьшее число королей можно расставить на шахматной доске 1969×1969 клеток так, чтобы они били всю доску? (Считается, что король бьет также ту клетку, на которой он стоит.)

26.17. Даны 9 точек на плоскости. При повороте вокруг некоторой точки O на угол α в направлении часовой стрелки эта система из девяти точек переходит в себя, т. е. каждая из этих точек оказывается в положении, в котором до этого находилась другая данная точка. Докажите, что угол α отличен от $37°$.

26.18. На отрезке AB отмечены точки C, D, E, F (никакие две из шести точек A, B, C, D, E, F не совпадают). Точка O не лежит на прямой AB. Точка O соединена с каждой из точек A, C, D, E, F, B. а) Сколько получилось углов, меньших развернутого, вершины которых находятся в O? б) Докажите, что если измерить эти углы в градусах и сложить полученные числа, то сумма будет меньше $1620°$.

26.19. По краям каждого поля обычной шахматной доски лежат спички, длина каждой спички равна стороне поля. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы с любого поля можно было пройти на любое другое, не перешагивая через спички?

26.20. Во всех точках пола в зале 10×20 м, отстоящих от стен на целое число метров, поставлены тонкие столбы, на которые навешаны двери шириной 1 м — по одной двери на каждом столбе (к стенам двери не привешиваются). Докажите, что, как бы ни были двери расположены, мышь всегда может пробежать из одного угла зала в противоположный.

26.21. Решить в натуральных числах уравнения:

а) $xy^2 + 3y^2 - x = 108$; б) $x! + 12 = y^2$.

26.22. Выпуклый четырехугольник с площадью, большей 1/2, заключен в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдется отрезок длины, большей 1/2, с концами на границе четырехугольника, параллельный одной из сторон квадрата.

26.23. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3 красными и 7 синими шариками. Две погремушки принадлежат к одному типу, если, поворачивая погремушки и передвигая шарики вдоль колец, можно добиться, чтобы эти погремушки выглядели одинаково. Сколько различных типов погремушек может быть выпущено?

26.24. На квадратном поле размером 9×9, разграфленном на клетки 1×1, играют двое. Первый игрок ставит крестик на центр поля, вслед за этим второй игрок ставит нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока, затем первый ставит крестик на одну из свободных клеток, окружающих нолик, и т. д. Таким образом, каждый игрок при очередном ходе ставит свой значок на любую из восьми клеток, окружающих только что поставленный значок противника (разумеется, если эта клетка свободна). Игрок выигрывает, если он первым поставил свой значок на одну из четырех угловых клеток или если его противнику некуда ходить. Докажите, что при любой игре второго игрока первый всегда может выиграть.

26.25. Клетчатая плоскость раскрашивается десятью красками так, что клетки, имеющие общую сторону (соседние), покрашены в разные цвета, причем все десять красок использованы. Две краски называются соседними, если ими где-нибудь покрашены соседние клетки. Каково наименьшее возможное число пар соседних красок?

26.26. Докажите, что при всех натуральных $n \geqslant 3$ несократима дробь

$$\frac{2n-3}{n^2-3n+2}.$$

26.27. У продавщицы было 12 гирь, их общая масса составляла 2 кг 700 г, массы отдельных гирь не превышали 500 г. Продавщица разложила эти гири на 3 кучки так, что масса гирь в каждой кучке превышала 600 г. Но потом потерялась одна гирька в 100 г, и продавщице уже не удавалось разложить гири на 3 кучки массой свыше 600 г каждая. Как это могло случиться? Приведите пример, указав массы отдельных гирь.

26.28. Пусть для некоторого выпуклого многоугольника удалось найти две такие прямые, что через каждую точку, расположенную на границе многоугольника, т. е. на стороне или в вершине, можно провести параллельно одной из этих прямых луч, рассекающий многоугольник на две части. Условимся называть такие многоугольники «хорошими». Докажите, что все треугольники «нехорошие», а все прочие выпуклые многоугольники «хорошие».

26.29. В десяти мешках монеты настоящие, а в одиннадцатом все монеты фальшивые. Все настоящие монеты одинаковы по массе. Все фальшивые монеты также имеют одинаковые массы, но отличные от масс настоящих монет. Имеются весы с чашками и стрелкой, но без гирь, позволяющие узнать, на какой чашке груз имеет большую массу и на сколько. С помощью двух взвешиваний определите, в каком мешке фальшивые монеты.

26.30. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превышает 0,34.

26.31. Два равных между собой прямоугольника расположены так, что их границы пересекаются в восьми точках. Докажите, что площадь пересечения этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.

26.32. Даны выпуклый n-угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Докажите, что через эту точку нельзя провести больше n прямых, каждая из которых делит площадь n-угольника пополам.

26.33. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята произвольная точка P. Через вершину A_1 проведен перпендикуляр к прямой A_2P, через вершину A_2 — к прямой A_3P, через A_3 — к прямой A_4P, через A_4 — к прямой A_1P. Докажите, что все четыре перпендикуляра пересекаются в одной точке.

26.34. Докажите, что на плоскости нельзя расположить семь прямых и семь точек так, чтобы через каждую из точек проходили три прямые и каждой прямой принадлежали три точки.

26.35. Точка M — центр симметрии фигуры, состоящей из равных окружностей K_1 и K_2. В параллельном переносе, переводящем K_1 в K_2, точка A_1, принадлежащая K_1, переходит в точку A_2, принадлежащую K_2. Докажите, что точка B_1, симметричная точке A_2 относительно M, диаметрально противоположна точке A_1.

26.36. Дан равносторонний $\triangle ABC$. Выполняются последовательно три поворота плоскости в положительном направлении около вершин A, B и C на углы 60°. Какая точка плоскости в результате этих трех поворотов вернется в исходное положение?

26.37. Для всякого ли $\triangle ABC$ найдется такая точка P, что все три точки, симметричные точке P относительно прямых AB, BC и AC, лежат на окружности, описанной около треугольника ABC?

26.38. Многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса r, каким-то образом разрезан на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r.

26.39. В плоскости параллелограмма $ABCD$ найти все прямые l, обладающие следующим свойством: сумма расстояний от вершин A и C до прямой l равна сумме расстояний от вершин B и D до этой прямой.

26.40. Найдите все такие треугольники, которые можно разрезать на три равных между собой треугольника.

26.41. Прямой, проходящей через данную точку стороны треугольника, разделите этот треугольник на две равновеликие части.

26.42. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника

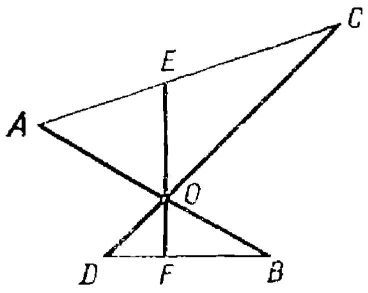


Рис. 115

вдвое больше площади четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон данного.

26.43. В выпуклом десятиугольнике, вписанном в окружность, четыре пары противоположных сторон параллельны. Докажите, что стороны, входящие в пятую пару, также параллельны.

26.44. Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон четырехугольника, не больше полусуммы длин двух других сторон.

26.45. Три отрезка AB, EF и CD проходят через одну точку O, причем точка E лежит на отрезке AC, а точка F — на отрезке BD. Докажите, что EF меньше хотя бы одного из отрезков — AB или CD (рис. 115).

26.46. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Известно, что $KH = a$ и $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH.

26.47. На плоскости нарисован правильный шестиугольник, сторона которого равна 1. При помощи только линейки постройте отрезок длиной $\sqrt{7}$.

26.48. Три окружности, центры которых не даны, попарно касаются в точках A, B и C. При помощи одной линейки постройте центры этих окружностей.

26.49. Окружность с указанным центром разделите на 12 равных частей с помощью одного циркуля.

26.50. Даны точки A и B и окружность с центром O (прямая AB пересекает данную окружность). Постройте с помощью одного циркуля точки пересечения прямой AB с окружностью.

26.51. Пять отрезков таковы, что из любых трех можно построить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

26.52. На плоскости нарисован угол с вершиной A и внутри него задана точка M. Укажите на сторонах угла точки B и C такие, что $AB = AC$ и $MB + MC$ принимает наименьшее значение.

26.53. Даны два отрезка AB и A_1B_1, причем $AB = A_1B_1$. Пусть M_1 — центр поворота, переводящего A в A_1 и B в B_1, а M_2 — центр поворота, переводящего A в B_1 и B в A_1. Докажите, что прямая M_1M_2 делит пополам отрезок, соединяющий середины данных отрезков.

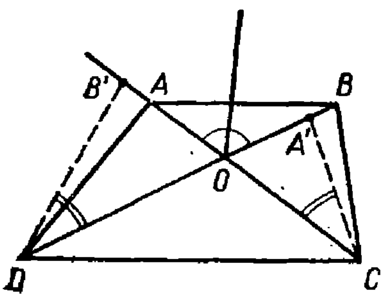


Рис. 116

26.54. Докажите, что если перемещение F не имеет неподвижных точек, то композиция $F \circ F$ также не имеет неподвижных точек.

26.55. В плоскости даны точки A и B.

Произвольная точка M плоскости повернута около A и B на углы по 90° в положительном направлении. Около полученных точек A_1 и B_1 другая произвольная точка N повернута в положительном направлении также на 90° в положение A_2 и B_2. Докажите, что $A_2B_2 = 2AB$.

26.56. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$), A' и B' — точки, симметричные точкам A и B относительно биссектрисы угла AOB. Докажите, что $\angle ACA' = \angle BOB'$ (рис. 116).

26.57. Поворот треугольника ABC на угол φ вокруг точки P, принадлежащей окружности, описанной около этого треугольника, переводит его в треугольник $A_1B_1C_1$, а поворот вокруг точки P на угол φ переводит треугольник ABC в треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке M.

Выясните взаимное расположение точек P, M и O (O — центр окружности) и опишите все такие точки M, если φ меняется от 0 до 2π.

26.58. Докажите, что если пятиугольник имеет две оси симметрии, то он правильный. Выясните истинность этого утверждения для многоугольников с нечетным числом сторон.

26.59. Докажите, что число

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$$

меньше трех.

26.60. Пусть a, b, c — три положительных числа, причем $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что $a^3 + b^3 < c^3$.

26.61. Решите в натуральных числах уравнение

$$5^n + 12^n = 13^n.$$

26.62. Что больше:

$$\frac{10^{1977}+1}{10^{1978}+1} \text{ или } \frac{10^{1978}+1}{10^{1979}+1}?$$

26.63. В порядке возрастания выписаны n чисел $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, сумма которых равна n. Докажите, что при любом натуральном $k < n$ имеет место неравенство $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leqslant k$.

26.64. Докажите, что в любом выпуклом восьмиугольнике найдутся две диагонали, образующие угол, меньший 10° (если диагонали не пересекаются, то их надо продолжить; угол между параллельными прямыми считается равным нулю).

26.65. Вычислите с точностью до 0,001 корень пятой степени из числа 0,999.

26.66. Найдите приближенные значения трех корней уравнения

$$0{,}001x^3 + x^2 - 1 = 0$$

с точностью до 0,1.

26.67. Вычислите с точностью до 0,005 число $\sqrt[100]{2}$.

26.68. Докажите, что сумма n слагаемых

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

неограниченно растет с ростом n (т. е., сколь бы большое положительное число M мы ни взяли, эта сумма при некотором n станет больше M).

26.69. Докажите, что сумма обратных квадратов

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

меньше двух, каково бы ни было натуральное число n.

26.70. Найдите все такие четверки действительных чисел x, y, z, u, для которых $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 1$.

26.71. Докажите, что сумма

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

убывает с ростом n (n — натуральное число).

26.72. Длины сторон двух прямоугольников являются целыми числами. В каждом прямоугольнике длина одной стороны не превосходит 60, а длина другой больше 2000. Докажите, что стороны этих прямоугольников равны, если равны их диагонали.

26.73. Все натуральные числа от 1 до 99999 выписали одно за другим на длинной полоске бумаги. Получилось число-великан

$$1234567891011121314\ldots999979999899999.$$

а) Найдите сумму цифр этого числа.

б) Сколько раз в записи этого числа встречается цифра 7?

26.74. Можно ли выложить в цепь в соответствии с правилами игры в домино все кости, не содержащие шестерок?

26.75. Семеро ребят играли в настольный теннис «двое на двое». Каждые трое встречались не более чем в одной игре. Какое наибольшее число игр могло быть сыграно?

26.76. В школе работают три кружка. Каждый из тридцати учеников одного класса выбирает себе один, и только один кружок.

а) Сколько существует способов распределения учеников этого класса по трем кружкам?

б) А каково число способов в том случае, когда каждый кружок посещает хотя бы один ученик данного класса?

26.77. Каждая из шести граней куба окрашивается в один из двух цветов — красный или синий. Сколько существует различных способов раскраски куба? Мы считаем, что два куба окрашены одинаково, если нам удастся так расположить их на плоскости, например на плоскости стола, что одинаково расположенные грани окажутся окрашенными в один цвет — обе нижние грани одинаково окрашены, обе верхние, обе задние, обе передние, обе левые и обе правые. Если же такого расположения кубов не существует, то считаем, что кубы раскрашены по-разному.

26.78. Решите предыдущую задачу в случае, когда каждая из граней куба окрашивается одной из шести красок — белой, красной, оранжевой, желтой, синей или зеленой, причем разные грани куба окрашиваются в разные цвета.

26.79. Сосчитай-ка.

Чему равна дробь

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 4\cdot 6+4\cdot 8\cdot 12+7\cdot 14\cdot 21}{1\cdot 3\cdot 5+2\cdot 6\cdot 10+4\cdot 12\cdot 20+7\cdot 21\cdot 35}?$$

26.80. В ряд выписаны 1977 чисел, представляющих собой последовательные степени числа 2: 2, 4, 8, 16, 32 и т. д. до числа 2^{1977} включительно (в десятичной записи этого числа более 500 цифр). Можно ли часть из этих чисел зачеркнуть, а часть из оставшихся подчеркнуть так, чтобы сумма зачеркнутых чисел была равна сумме подчеркнутых? Если можно, то как? Если нельзя, то почему?

26.81. Докажите, что $a^5 - a$ делится на 5 при любом натуральном a.

26.82. В комнате 10 живых существ — людей, собак и мух, у них вместе 46 ног. (У каждого человека 2 ноги, у каждой собаки 4 и у мухи 6 ног.) Как это могло получиться? Найдите все возможности.

26.83. Может ли быть точным квадратом число, сумма цифр которого равна 1985?

26.84. Некоторое натуральное число дает при делении на 1967 в остатке 69, а при делении на 1968 — 68. Найдите остаток от деления этого числа на 21.

26.85. Помните сказку Р. Киплинга «Маугли» о мальчике, воспитанном волчьей стаей? Однажды Маугли попал в плен к Бандар-Логам — так в джунглях называли обезьян.

— Мне хочется есть, — сказал Маугли. — Я чужой в этих местах, принесите мне поесть или позвольте здесь поохотиться.

Обезьяны бросились за орехами и дикими плодами для Маугли. Часть из них разбежалась по дороге, а остальные сорвали орехов поровну. На обратном пути Бандар-Логи подрались, и каждая бросила в каждую большой и тяжелый орех. Скажите, сколько орехов сорвала каждая из обезьян, если Маугли получил всего 26 штук?

26.86. Отряду солдат надо переправиться с левого берега реки на правый. Саша и Сережа предложили свою лодку. Но в ней могут поместиться или только один солдат, или только мальчики. И все же всем удалось переправиться именно на этой лодке. Как они действовали?

26.87. На большом листе бумаги проведено X параллельных прямых, а потом под углом 60° к ним — еще Y параллельных прямых. Сколько различных параллелограммов можно обнаружить на этом листе?

26.88. Найдите сумму всех трехзначных чисел, все цифры которых нечетны.

26.89. У какого прямоугольника периметр численно равен площади, а стороны выражены целыми числами?

26.90. Из города *Ы* выехали два автомобиля («Волга» и «Жигули») в одном направлении, но с разными скоростями. Через час в том же направлении выехал «Москвич». Еще через час расстояние между «Волгой» и «Москвичом» сократилось в 1,5 раза, а между «Жигулями» и «Москвичом» — в 2 раза. Найдите отношение скоростей «Волги» и «Жигулей».

26.91. Найдите определенную на множестве натуральных чисел функцию A такую, что $A(1) = 1$ и $A(x + y) = A(x) + A(y) + xy$ для любых натуральных чисел x и y.

26.92. Пусть A — произвольное 1984-значное число, делящееся на 9. Сумму цифр этого числа обозначим буквой a. Сумму цифр числа a — буквой b, сумму цифр числа b — буквой c. Найдите c.

26.93. Ребята решили пристроить к стене школы физкультурный зал, который, конечно, должен быть прямоугольным. Подсчитали материалы, и оказалось, что кирпича у них хватит только на 100 м стены. Хотят они, чтобы зал был как можно больше по площади. Что вы им посоветуете? Какие размеры зала выбрать?

26.94. Как известно, на автобусном билете указано шестизначное число, от 000000 до 999999. Назовем билет «интересным», если сумма всех цифр равна числу, записанному в двух последних разрядах. Докажите, что «интересные» билеты обладают следующими свойствами:

а) количество их делится на 10;

б) сумма номеров всех «интересных» билетов делится на 5;

в) число, записанное в первых четырех разрядах «интересного» билета, делится на 9.

26.95. Десять участников турнира играют в морской бой. Проигравший партию выбывает из игры. Сколько партий должно быть сыграно, чтобы определился чемпион? Какое наибольшее число участников могло выиграть не менее чем по две партии? Напоминаем: каждая игра кончается только победой одной из сторон. Ничьих не бывает.

26.96. Вася Петров недавно научился играть в шахматы. Тем не менее он утверждает, что сможет дать чемпиону мира по шахматам и претенденту на это звание сеанс одновременной игры и при этом набрать не менее 1 очка (за победу дается 1 очко, за ничью — 1/2, за поражение — 0 очков). Неужели он прав?

26.97. Вдоль прямого шоссе стоят 6 домов. Где вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей? Тот же вопрос, если домов 7.

26.98. Первый задумывает n цифр $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Второй называет n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Первый в ответ сообщает сумму $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$. Сколько вопросов должен задать второй первому, чтобы отгадать цифры $x_1, x_2, \ldots, x_n$? Как действовать, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — не обязательно цифры, а натуральные числа, меньшие 1000? А если про $x_1, x_2, \ldots, x_n$ известно лишь, что это — натуральные числа?

26.99. Есть ровно 57 способов выдать x рублей купюрами (денежными знаками) по 3 и 5 рублей. Чему равно x (укажите все возможности)?

26.100. Найдите все функции f такие, что для любых чисел x, y справедливо равенство

$$f(x)f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1.$$

26.101. Про точки A, B, C известно, что для любой четвертой точки M отрезок AM меньше по длине хотя бы одного из отрезков BM и CM. Докажите, что точка A лежит на отрезке BC.

26.102. Подберите числа a, b, c, d, e так, чтобы уравнение $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = e$ имело корни $x = 3$ и $x = 4$.

26.103. Натуральное число n делится на 12 и имеет 14 различных положительных делителей. Найдите n.

26.104. Дан треугольник ABC. Через точку A проведена параллельно BC прямая, на которой взята точка D. Перпендикуляр BE опущен на CD. Докажите, что площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} CD \cdot BE$.

26.105. Существует ли треугольник, высоты которого равны 1 м, 2 м, 3 м?

26.106. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$ такие, что $(n-2)!$ не делится на n (обозначение $n!$ введено в теме 17).

26.107. Имеется некоторое количество гирь, массы которых не превосходят A. Известно, что если все гири каким-либо способом разбить на две кучки, то обязательно одна из кучек имеет массу не больше A. Найдите наибольшую возможную общую массу гирь.

26.108. По случаю пятидесятилетия Вечерней математической школы был устроен обед. За круглый стол сели 666 человек. Назовем двух сидящих рядом с человеком — его первыми соседями, двоих, сидящих через одного от этого человека, — его вторыми соседями, двоих, сидящих через трех от него, — четвертыми соседями. Некоторые из гостей — лысые. Для каждого лысого ровно один из его вторых соседей — лысый и ровно один из четвертых соседей — тоже лысый. Сколько лысых могло быть на обеде?

26.109. Поле имеет форму четырехугольника. Шоссейные дороги — они идут по диагоналям — разбивают его на 4 участка. Площади трех из них — 2 га, 4 га, 6 га. Какой может быть площадь четвертого?

26.110. Есть девять чисел $A, B, C, D, E, H, K, M, P$, отличных от нуля. Докажите, что среди чисел AEP, DMC, BHK, $-KEC$, $-AMH$, $-BDP$ есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное.

26.111. Даны точки A и B на плоскости. Найдите геометрическое место точек C на плоскости таких, что треугольник ABC — остроугольный.

26.112. Найдите все выпуклые многоугольники, обладающие следующим свойством: основание перпендикуляра, опущенного из любой точки внутри многоугольника на любую сторону, лежит на этой стороне, а не на ее продолжении.

26.113. Докажите, что плоскость можно раскрасить 9 красками так, что никакие две точки одного цвета не будут находиться на расстоянии 1 м.

26.114. Расположите на плоскости одиннадцать одинаковых квадратов, не налегающих друг на друга, так, чтобы выполнялось следующее условие: как бы ни покрасить эти квадраты тремя красками, обязательно какие-нибудь два квадрата одного цвета будут иметь общий участок границы.

26.115. — У нас в классе 35 человек. И можешь себе представить, каждый дружит ровно с 11 одноклассниками...

— Не может этого быть, — сразу ответил своему приятелю Витя Иванов, победитель математической олимпиады.

Почему он так решил?

26.116. В олимпиаде участвовало 55 школьников. Все они сдали свои работы. При проверке каждой задачи ставилась одна из трех оценок: «+» — задача решена, «—» — задача решалась, но не решена, «0» — задача не решалась. После проверки всех работ оказалось, что ни в каких двух работах не совпало одновременно количество оценок «+» и количество оценок «—». Какое наименьшее число задач могло быть предложено на олимпиаде?

26.117. Поп и Балда играют на щелчки следующим образом. Они, не показывая друг другу, пишут каждый последовательность из 1984 знаков «плюс» или «минус». После этого выписывают знаки по кругу: первый знак из набора Попа, первый знак из набора Балды, второй знак из набора Попа, второй знак из набора Балды, и так далее. Балда дает Попу столько щелчков, в скольких местах плюс находится рядом с минусом. Как должен играть Поп, чтобы в наихудшем для себя случае получить поменьше щелчков?

26.118. Дана доска 19×19 клеток. На каждой клетке поставлено по шашке. Можно ли переставить шашки так, чтобы каждая шашка оказалась на соседней клетке (по горизонтали или по вертикали, но не по диагонали)?

26.119. Докажите, что если в параллелограмме $ABCD$ сумма углов ABD и BCA равна $90°$, то либо $AB = BC$, либо $AC = BD$.

26.120. На самом левом поле клетчатой полосы 1×1984 клеток лежат три пуговицы. Саша и Люся играют в следующую игру: каждый из них в свой ход может перенести любую пуговицу (но только одну за ход) вправо на любое число полей. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что Люся, начиная, может обеспечить себе победу.

26.121. Натуральное число A замечательно одним свойством: если разделить на A сначала любое нечетное число, а потом куб этого нечетного числа, то получим одинаковые остатки. Найдите все такие числа A.

26.122. Великий писатель Лев Николаевич Толстой был замечательным педагогом. Он организовал в Ясной Поляне школу для крестьянских детей, сам вел уроки и написал учебники «Азбука» и «Книга для чтения». Очень интересно, по-своему он учил арифметике.

Вот что пишет сын писателя, Сергей Львович Толстой: «Таблицу умножения он (Лев Николаевич) заставлял нас выучить наизусть только до пяти, а умножение чисел от шести до девяти производить на пальцах следующим образом: вычесть из каждого множителя число пять, остатки отложить на пальцах обеих рук, загнув их, и сложить загнутые пальцы — это будут десятки произведения; остальные незагнутые пальцы обеих рук перемножить и приложить к десяткам. Например, требуется помножить 7×9. Вычитая по 5 из каждого множителя, получается 2 и 4. На одной руке загибается 2 пальца, на другой — 4. Сумма их — 6. Это десятки. Остальные незагнутые пальцы перемножаются: $3 \times 1 = 3$. Следовательно, произведение $7 \times 9 = 60 + 3 = 63$». (С. Л. Толстой. Очерки былого. — Тула; Приокское книжное изд-во, 1975, с. 31.)

Докажите правильность умножения по способу Л. Н. Толстого. Попробуйте обнаружить математическую неточность в описании Сергея Львовича.

Часть II

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ. ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Тема 1. КАК ИГРАТЬ, ЧТОБЫ НЕ ПРОИГРАТЬ

Учебно-воспитательные цели. Математическая теория игр — молодая, бурно развивающаяся наука, имеющая многочисленные приложения. На этом занятии рассматриваются так называемые «конечные игры с полной информацией», теория которых проста и доступна школьникам. На занимательном материале участники кружка знакомятся с такими важными понятиями теории игр, как «стратегия» и «выигрышная стратегия», а также на простом и наглядном примере «изоморфизма игр» с важнейшим для всей математики понятием изоморфизма.

Поиски выигрышной стратегии требуют настойчивости и упорства в достижении поставленной цели, они развивают логические, комбинаторные и вычислительные способности учащихся.

Методические замечания. В начале занятия предложите участникам кружка поиграть друг с другом в игру «Кто первым назовет число 100». Затем, вызвав одного или двух учеников к доске, продемонстрируйте выигрышную стратегию в действии и лишь после этого переходите к обсуждению игры.

Решения

1.3. Ответы показаны на рисунке 117.

1.7. Расстановка плюсов и минусов, соответствующая выигрышным и проигрышным положениям, показана на рисунке 118. Выигрышная стратегия, как и прежде, формулируется просто: «Ставь на минус!»

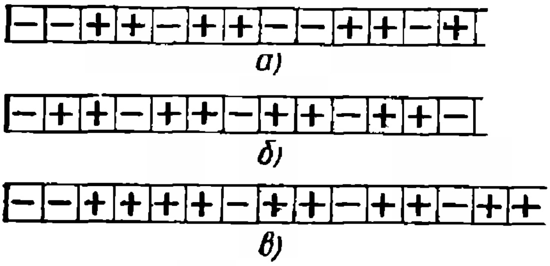


Рис. 117

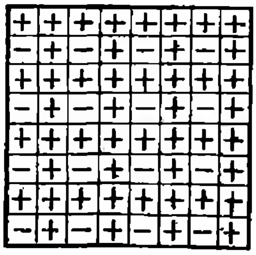


Рис. 118

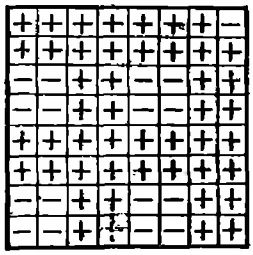


Рис. 119

Этой игре изоморфна следующая игра с камнями: есть две кучки камней; одним ходом можно взять камень из любой кучки или по одному камню сразу из обеих кучек. Остальные условия, как в игре «Две кучи камней».

1.8. Ответ на рисунке 119.

Тема 2. КРУГИ ЭЙЛЕРА

Учебно-воспитательные цели. Тема эта тесно связана с алгеброй множеств. Применение кругов Эйлера придает задачам алгебры множеств наглядность и простоту. Круги Эйлера с успехом применяются также в логических задачах для изображения множеств истинности высказываний и во многих других случаях. Изображение условий задачи в виде кругов Эйлера, как правило, упрощает и облегчает путь к ее решению.

Данная тема, безусловно, расширяет математический кругозор учащихся, обогащает арсенал средств, используемых в решении разнообразных задач.

Методические замечания. Задачи расположены в данном занятии по принципу «от простого к сложному». В первой задаче, самой простой, круги Эйлера появляются естественным образом, как реальные круги на школьном дворе, где мы располагаем учеников. Проверив усвоение этой идеи с помощью «Вопросов для проверки», можно переходить к следующей задаче.

В задачах вводится, по сути дела, символика алгебры множеств. Объемлющий круг изображает основное множество данной задачи, меньшие круги и их пересечения — его подмножества. Для упрощения записи пересечения множеств обозначаются без помощи знака $\cap$: вместо $A \cap B$ мы пишем просто AB. Дополнение подмножества A до основного множества обозначается $\overline{A}$ и читается «не A».

При желании можно поменять местами задачи 2.3 и 2.6: задачу 2.6 разобрать в классе, а задачу 2.3 дать на дом. Быть может, стоит обратить внимание учащихся на то, что в решении задачи 2.6 используется принцип Дирихле.

Настоящая тема может послужить хорошим поводом для того, чтобы рассказать учащимся о Леонарде Эйлере и его трудах.

Решения

2.5. Воспользуемся кругами Эйлера. Внутри большого круга, изображающего всех учеников класса, поместим три меньших круга M, P и Φ, изображающие учеников, имеющих тройки по математике, по русскому языку и по физике соответственно.

Дальнейшие расчеты не представляют труда (рис. 120). Ответ на первый вопрос задачи: 4 человека; на второй вопрос — 12 человек.

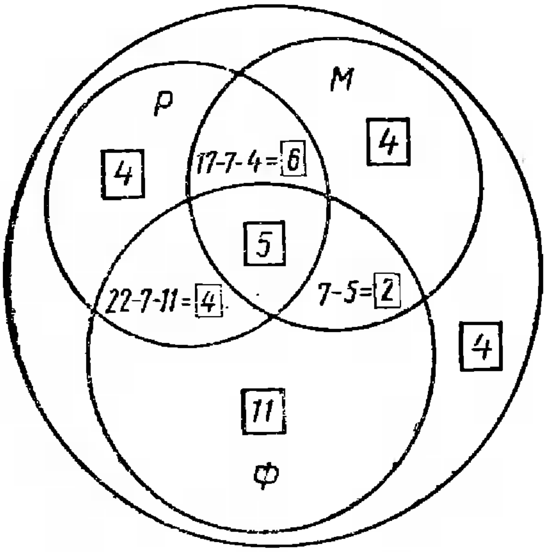


Рис. 120

2.6. Изобразим данные задачи при помощи кругов Эйлера: круг C изображает скрипачей, круг X —хомяководов, круг $П$ — пловцов. Число ребят, о которых рассказывается в условии задачи, равно $25 + 1 + 2 + 7 = 35$, и они составляют весь класс, так как по условию в классе 35 человек. Теперь нетрудно ответить на вопросы задачи: в классе 14 скрипачей, 26 ребят посещают бассейн «Москва», а хомяководов, не плавающих и не играющих на скрипке, вообще нет — множество их пусто (рис. 121).

2.7. Воспользуемся кругами Эйлера. Круги $М$, $Д$, $К$ и $П$ на рисунке 122 изображают мальчиков, девочек, комсомольцев и пионеров соответственно. Круги $М$ и $Д$ на рисунке, естественно, не пересекаются: мальчики не бывают девочками. Точно так же не имеют общих точек круги $К$ и $П$. Фигура $ДП$ изображает пионерок, фигура $МП$ — мальчиков в пионерских галстуках, фигура $ДК$ — комсомолок, и, наконец, фигура $МК$ изображает множество всех мальчиков с комсомольскими значками. Из условия видно, что фигуры $МК$ и $МП$ вместе изображают 16 ребят (мальчиков всего 16), фигуры $МК$ и $ДК$ вместе — 24 человека (комсомольцев и комсомолок 24), а фигура $МК$ изображает такое же количество ребят, как и фигура $ДП$ (комсомольцев столько же, сколько и пионерок). Значит, фигуры $ДП$ и $ДК$ вместе изображают тоже 24 человека, т. е. девочек в экскурсии участвовало 24, а всего было $16 + 24 = 40$ участников.

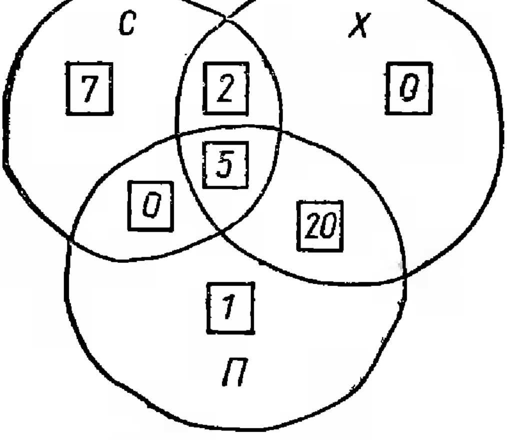


Рис. 121

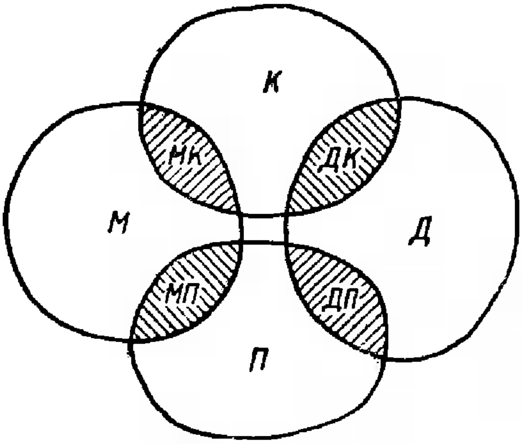


Рис. 122

Тема 3. ЛИСТ МЁБИУСА

Учебно-воспитательные цели. У каждого из нас есть интуитивное представление о том, что такое «поверхность». Поверхность листа бумаги, поверхность стен класса, поверхность земного шара известны всем. Может ли быть что-нибудь неожиданное и даже таинственное в таком обычном понятии? Пример листа Мёбиуса показывает, что может.

Лист Мёбиуса очень легко сделать, подержать в руках, разрезать, проэкспериментировать как-нибудь еще. Изучение листа Мёбиуса — хорошее введение к элементам топологии: теореме Эйлера, раскраскам, уникурсальности, представлению о непрерывных отображениях, которые представляют собой хорошие темы занятий кружков в VII—VIII классах. Лист Мёбиуса в качестве учебного пособия должен быть в каждой школе.

Всесоюзный институт научной и технической информации (ВИНИТИ) издает реферативный журнал «Математика». Каждый год в нем реферируется около тридцати тысяч математических статей и книг. Около 5% из них относится к топологии («геометрии положения»). Топология необходима математикам почти всех специальностей, она весьма красива, ее методы по сравнению с другими дают одновременно более общие, более сильные и более простые теоремы.

Знакомство с топологией необходимо как специалистам в чистой математике, так и прикладникам.

Методические замечания. К занятию, посвященному листу Мёбиуса, полезно подготовить достаточное количество бумажных лент, с которыми будут проводиться эксперименты. Хороши ленты, у которых длина примерно в 4 раза больше ширины. При разрезании листов Мёбиуса, склеенных из более узких лент, получатся слишком тонкие «кольца». Если позволяют условия, можно предложить набор лент, клей и ножницы каждому школьнику для экспериментальной работы.

3.1. Ответ. Если на обеих сторонах ленты на равном расстоянии от краев провести по две пунктирные линии, а затем склеить лист Мёбиуса, то при разрезании по пунктирным линиям получатся два сцепленных кольца. Одно из них вдвое длиннее первоначальной ленты и вдвое перекручено. Оно получилось из краев исходной ленты. Другое — лист Мёбиуса — состоит из центральной части исходного листа Мёбиуса. Если бы лента не была перекручена, то после резки было бы два тонких кольца-края и центральная часть. А при разрезании листа Мёбиуса отрезанные края соединяются вместе!

Тема 4. ЗАДАЧА ПУАССОНА

Учебно-воспитательные цели. На простых и занимательных примерах решения задач «на переливание» удается рассмотреть такие важные понятия, как «команда», «блок-схема», «программа».

Решая задачи, участники кружка обучаются построению простейших алгоритмов. Эти навыки им пригодятся в дальнейшем, при изучении программирования на ЭВМ. Решение задач этого цикла требует смекалки, дисциплинирует мысль, развивает комбинаторное мышление.

Методические замечания. В начале занятия следует лишь сформулировать задачу Пуассона, рассказать ее историю, но не пытаться ее решать. Решение задач следует начать с простой задачи 4.2, постепенно подводя к о б щ е м у м е т о д у.

Особое внимание обратить на составление блок-схем, объяснить учащимся роль программ и их блок-схем при вычислениях на ЭВМ.

Решения

4.6. Выполняя лишь операции *НМ*, *ПМБ* и *ОБ*, получим последовательно: 7 : 0 — 0 : 7 — 7 : 7 — 2 : 12 — 2 : 0 — 0 : 2 — 7 : 2— — 0 : 9 — 7 : 9 — 4 : 12 — 4 : 0—0 : 4—7 : 4 — 0 : 11 —7 : 11 — — 6 : 12 — 6 : 0 — 0 : 6 — 7 : 6 — 1 : 12,
и в меньшем сосуде окажется 1 л.

4.7. Выполняя лишь операции *НБ*, *ПБМ* и *ОМ*, получим последовательно:

0 : 8 — 5 : 3 — 0 : 3 — 3 : 0 — 3 : 8 — 5 : 6,

и в большем сосуде окажется 6 пинт вина.

Тема 5. РАССТОЯНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

Учебно-воспитательные цели. Учащиеся должны понять естественность понятия расстояния и его свойств. При этом важно показать, что в большинстве случаев, решая практические задачи, мы имеем дело именно с тем самым «расстоянием», которое изучается в геометрии. Вот почему мы начинаем с решения задач, внешне совершенно не геометричных. Можно обратить внимание на возможность под расстоянием от одной точки до другой понимать и другие объекты, не обязательно длину отрезка. Это послужит основой к восприятию учащимися абстрактного характера геометрических понятий и усвоения в дальнейшем основных требований к логическому строению курса геометрии. Кроме того, важно показать на примере этой первой геометрической темы, как, используя простейшие свойства расстояний, решаются довольно серьезные геометрические задачи, которые послужат первым примером красоты и стройности геометрической науки.

Методические указания. Задача 5.2 имеет своей целью приучить учащихся к четкому анализу текста задачи или анализу конкретной ситуации.

Очень важно показать учащимся развитие конкретной задачи, показать, как можно ставить дополнительные вопросы к той же задаче, как можно обобщить поставленную проблему. Это можно сделать, например, при разборе задачи 5.3. Ясно, что желание развить постановку задачи, обобщить ее может привести к использованию знаний, выходящих за рамки VI класса. Однако к этим задачам следует возвращаться и в последующих классах, если учесть, что учитель обычно ведет кружок с VI по VIII, а может быть и по X класс.

В задаче 5.5, которая интуитивно должна быть понятна шестикласснику, преследуются следующие цели:

1) показать, как можно применять метод координат к решению задач;

2) развить в сознании ученика идею непрерывности, без которой невозможно говорить о всем дальнейшем математическом образовании учащегося. Особенно существенным для решения геометрических задач является свойство, называемое неравенством треугольника, которое в пособии А. В. Погорелова доказывается в VIII классе.

Ответы и решения

5.2. Самое интересное в задаче то, что для ответа на нее не нужно знать скорость машины. Пусть x — число деревьев, промелькнувших в течение одной минуты. За час машина пройдет мимо $60x$ деревьев. Скорость машины, как известно из условия задачи, равна $10x$ км/ч. Пройдя расстояние в $10x$ км, машина пройдет мимо $60x$ деревьев, следовательно, на расстоянии 1 км она пройдет мимо $60x/10x$, или 6 деревьев. Это и означает, что расстояние между деревьями равно 1/6 км.

5.3. Примем за единицу длины ширину (или равную ей глубину) строя курсантов, а за единицу времени — то время, которое требуется им, чтобы пройти единицу длины. В принятых единицах скорость передвижения строя также будет единичной.

Пусть x — полное расстояние, пройденное терьером (его скорость будет выражаться той же величиной x). Когда пес бежит к первой шеренге, его скорость относительно курсантов равна $x - 1$. При возвращении в последнюю шеренгу скорость терьера составит $x + 1$. Каждый раз он пробегает (относительно строя) расстояние 1 и на путешествие в оба конца затрачивает единицу времени. Это позволит нам составить уравнение

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1,$$

которое можно переписать в виде квадратного уравнения

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен $1 + \sqrt{2}$. Умножив его на 15, получим окончательный о т в е т: 36,15 м. Иначе говоря, терьер пробегает расстояние, равное длине стороны квадрата, в форме которого выстроены курсанты, плюс расстояние, равное длине диагонали того же квадрата.

Решив эту задачу, вы можете испытать свои силы в решении более сложного ее варианта. В этом варианте задачи щенок бегает не вперед и назад через строй марширующих курсантов, а с постоянной скоростью бегает по периметру квадрата, держась все время как можно ближе к своей роте. Как и в предыдущем случае, к моменту его возвращения в точку A курсанты успевают пройти 15 м. Какое расстояние пробегает пес?

Решения

Аналогичным образом получается приближенный ответ и для этого варианта задачи, когда собачка бегает вокруг марширующего строя.

Пусть, как и прежде, ширина строя равна единице и единице равно время, за которое курсанты проходят 15 м. Тогда и скорость их также равна 1. Пусть x — расстояние, пройденное собакой (и скорость собаки). Скорость собаки относительно строя равна $x-1$, когда собака бежит от последней шеренги к первой, $\sqrt{x^2-1}$, когда собака бежит поперек строя, и $x+1$, когда собака возвращается в последнюю шеренгу. Так как собака обегает строй за единицу времени, можно составить уравнение

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x+1}=1,$$

которое можно переписать в виде уравнения четвертой степени

$$x^4-4x^3-2x^2+4x+5=0.$$

Только один положительный корень $x=4{,}18112$ не является посторонним. Умножив его на 15, получим о т в е т: 62,7168... м. Исходную формулу полученного выше уравнения можно привести к виду:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=1,$$

очень похожему на уравнение, возникающее в первом варианте задачи. Чтобы выполнить преобразование, нужно лишь извлечь квадратные корни из правой и левой частей исходного уравнения.

Возможны многочисленные варианты этой задачи: для строя, марширующего в направлении, параллельном диагонали квадрата; для строев, имеющих форму правильных многоугольников с числом сторон, превышающим 4; для построений по кругу, вращающихся строев и т. п.

5.4. Пусть O — точка пересечения данных прямых (считаем, что точки P и Q движутся по направлению к точке O); P_0 и Q_0 — положения точек в тот момент времени t_0, когда они находятся на одинаковом расстоянии от точки O (t_0 находится ровно посередине

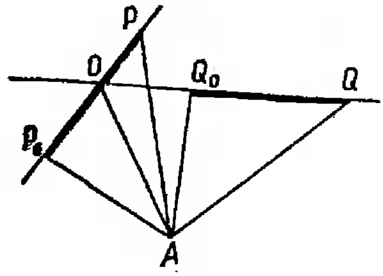


Рис. 123

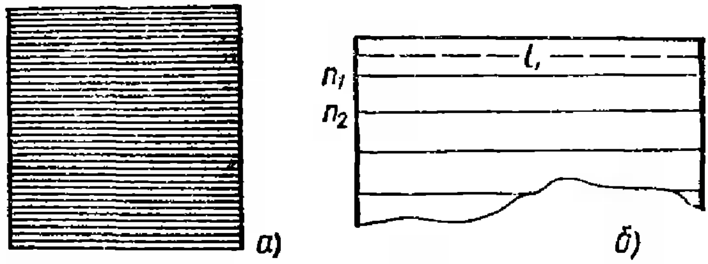


Рис. 124

между моментами времени, когда одна и другая точки проходят через точку O); A — точка пересечения перпендикуляров к данным прямым, проведенных соответственно в точках P_0 и Q_0.

Докажем, что точка A — та самая неподвижная точка, существование которой утверждается в условии.

Частный случай, когда точки P_0, Q_0 и A совпадают с O, очевиден. В общем случае (рис. 123) ясно, что треугольники AP_0O и AQ_0O равны, потому $AP_0 = AQ_0$. Пусть P и Q — положения точек в произвольный момент времени t (отличный от t_0). Тогда $PP_0 = QQ_0$ (точки движутся с одинаковой скоростью), треугольники PP_0A и QQ_0A равны, следовательно, $AP = AQ$.

Из нашего решения видно, что на самом деле верно более сильное утверждение, чем равенство расстояний от точки A до соответствующих друг другу точек P и Q: если повернуть одну из данных прямых вокруг точки A (на $\angle P_0AQ_0$) так, чтобы она совпала с другой, то в любой момент времени точка P совпадет с соответствующей точкой Q.

5.6. Пусть M_1 и M_2—две произвольные диаметрально противоположные точки окружности S радиуса 1. В таком случае

$M_1M_2 = 2$ и, следовательно,

$M_1A_1 + M_2A_1 \geqslant M_1M_2 = 2$,

$M_1A_2 + M_2A_2 \geqslant 2$, ... $M_1A_{1000} + M_2A_{1000} \geqslant 2$.

$M_1A_1 + M_2A_1 = 2$, если точка A_1 принадлежит отрезку. M_1M_2 и $M_1A_1 + M_2A_1 > 2$ (во всех случаях).

Поэтому

$(M_1A_1 + M_2A_1) + (M_1A_2 + M_2A_2) + \ldots + (M_1A_{1000} + M_2A_{1000}) = (M_1A_1 + M_1A_2 + \ldots + M_1A_{1000} + M_2A_1 + M_2A_2 + \ldots + M_2A_{1000}) \geqslant 2000$, и, значит, хоть одна из двух точек M_1 и M_2 наверняка удовлетворяет условию задачи: сумма расстояний от нее до точек A_1, A_2, A_{1000} не меньше 1000.

5.8. Разобьем наш участок на 50 полос $n_1, n_2, \ldots, n_{50}$ ширины 2 (рис. 124, *а*) и рассмотрим какую-либо одну из этих полос, скажем полосу n_1 (рис. 124, *б*). Ясно, что если центр дерева расположен вне полосы n_1 (в этом случае мы будем говорить, что «дерево растет вне полосы»), то дерево не задевает центральной линии l_1 полосы.

А так как внутри участка нельзя проложить тропинки длиной 10, не задевающие ни одного дерева, то вдоль линии l_1 нельзя

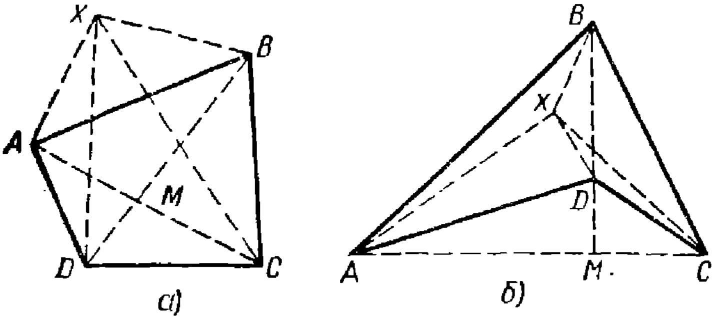


Рис. 125

указать свободного от дерева отрезка длиной 10, что было бы невозможно, если бы эта линия была разбита деревьями меньше чем на 9 частей: ведь даже восемь отрезков длиной 10 + семь отрезков длиной 2 (последнее слагаемое указывает максимум длины участков линии l_1, проходящих внутри 7 деревьев, разбивающих l_1 на 8 частей) не составят в сумме длину 100-й линии l_1. Поэтому внутри полосы n_1 растут максимум 8 деревьев (разбивающих линию l_1 на 9 частей).

Аналогично этому внутри каждой из полос n_2, n_3, ..., n_{50} также растет не меньше 8 деревьев, в силу чего общее число деревьев на участке не может быть меньше, чем $50 \cdot 8 = 400$.

5.9. Пусть $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, X — какая угодно другая точка плоскости (рис. 125). Ясно, что $XA + XC \geqslant AC = MA + MC$ и $XB + XD \geqslant BD = MB + MD$, так что $XA + XB + XC + XD \geqslant MA + MB + MC + MD$, где равенство имеет место лишь в том случае, когда точка X совпадает с точкой M.

Таким образом, искомой точкой является точка M пересечения диагоналей четырехугольника.

5.10. Может. Для доказательства достаточно выполнить построение. Идея доказательства: надо три вершины A, B, C четырехугольника поместить очень близко друг от друга, а четвертую вершину D и точку O — далеко от A, B и C и близко друг от друга. Пусть расстояние от места, где находятся A, B, C, до места, где находятся D и O, равно l. Тогда

$$AB \approx 0,\ BC \approx 0,\ CD \approx l,\ DA \approx l,\ OA \approx l,\ OB \approx l,$$
$$OC \approx l,\ OD \approx 0,\ AB + BC + CD + DA \approx 2l.$$
$$OA + OB + OC + OD \approx 3l, \text{ а } 2l < 3l.$$

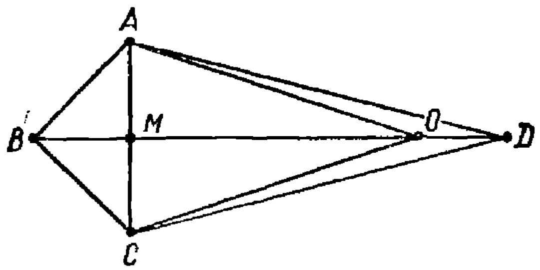


Рис. 126

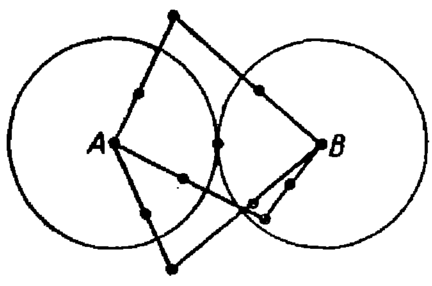


Рис. 127

То, что здесь написано, только наметка решения. Точное решение этой задачи может быть, например, таким: построим четырехугольник $ABCD$ и точку O внутри него, как показано на рисунке 126, где $BD \perp AC$, $AM = BM = CM = 1$, $OM = 100$, $DM = 101$.

Тогда легко проверить, что:

$$AB + BC + CD + DA = \\ = 2\sqrt{2} + 2DC < 2\sqrt{2} + 2 \cdot 102 < 209,$$

в то время как

$$OA + OB + OC + OD = 102 + 2OC > 102 + 2 \cdot 100 = 302.$$

5.11. Рассмотрим всевозможные расстояния между заданными N точками и выберем среди этих расстояний наибольшее — пусть это расстояние между какими-то двумя точками A и B. Соединим точку A с остальными $N - 1$ точками; получим $N - 1$ отрезков. Середины этих отрезков различны и все лежат внутри или на границе круга с центром в точке A радиуса $\frac{1}{2}AB$ (рис. 127).

Аналогично, соединив точку B с остальными $N - 1$ точками, получим $N - 1$ отмеченных точек (середин), расположенных внутри или на границе круга того же радиуса с центром в точке B.

Построенные два круга имеют только одну общую точку — середину отрезка AB. Следовательно, всегда имеется по крайней мере $2(N - 1) - 1$ (так как середину отрезка AB мы учитываем дважды) отмеченных середин, т. е. не менее $(2N - 3)$ отмеченных точек.

Покажем, что $(2N - 3)$ — это наименьшее число отмеченных точек. Пусть заданные N точек лежат на одной прямой, причем расстояния между соседними точками одинаковы. Легко видеть, что в этом случае число отмеченных точек-середин равно $(N - 2) + (N - 1) = 2N - 3$. Тем самым все доказано.

В заключение мы предлагаем читателям подумать над следующей задачей. При каких N можно расположить на плоскости N точек так, чтобы они не лежали на одной прямой и чтобы при этом количество отмеченных середин отрезков с концами в этих точках равнялось $2N - 3$?

Тема 6. «ВСЕ», «НЕКОТОРЫЕ» И ОТРИЦАНИЕ

Учебно-воспитательные цели. Умение логически грамотно рассуждать становится все более важным в условиях стремительно развивающейся научно-технической революции, важным для каждого, а не для избранных. Хотя весь школьный курс математики пронизан логическими идеями (постоянно доказываются теоремы и т. д.), но наиболее важные или трудные приемы логических рассуждений заслуживают специального внимания.

Тема посвящена образованию отрицаний утверждений, в которых используются слова «все» и «некоторые». На языке математиков «все» соответствует квантору всеобщности, «некоторые» — квантору существования.

В зависимости от грамматической конструкции фразы вместо «все» употребляется иногда слово «любой». Например, в определении предела последовательности:

«Последовательность a_n имеет при $n \to \infty$ предел a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при любом натуральном $n > N(\varepsilon)$ $|a_n - a| < \varepsilon$».

На этом же примере видно, что вместо «некоторые» иногда говорят «существует». Определение предела можно сформулировать и так: «При всех $\varepsilon > 0$ и некоторых числах $N(\varepsilon)$ для всех натуральных $n > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$».

Достаточно спросить нескольких старшеклассников: «Что значит утверждение: число a не является пределом последовательности a_n?», чтобы убедиться в недостаточном развитии умения обращаться с кванторами.

Далее, необходимо укреплять в сознании учащихся связь математики с реальным миром. Именно поэтому с учебы хоккеистов, а не с арифметических или геометрических примеров начинается занятие.

Методические замечания. Фактически занятие является комментарием к таблице, которую желательно изготовить в виде плаката и вывесить в классе.

Включенные в занятие 18 задач являются упражнениями (устными!) на применение таблицы. Заключительные, более трудные задачи 6.19 и 6.20 могут быть предложены в качестве домашнего задания.

Ответы и решения

6.1. Есть хотя бы один белый шар.

6.2. Все шары — белые.

6.3. Все шары — красные.

6.4. Некоторые равнобедренные треугольники не являются прямоугольными.

6.5. Некоторые ученики класса не были на собрании.

6.6. Ни одной девочки не было на собрании.

6.7. Некоторые углы данного шестиугольника — прямые или острые.

6.8. По крайней мере для одного x из A число x^2 не превосходит 4.

6.9. Все люди — не дети.

6.10. Некоторые люди не являются смертными, то есть бессмертны.

6.11. Для всех x из A $x^2 - 2x + 1 \neq 0$.

6.12. Некоторые мужчины не выше 5 футов.

6.13. Некоторые простые числа четны.

6.14. Квадрат любого натурального числа имеет нечетное число делителей.

6.15. Неверно. Может быть один белый шар, а остальные — синие.

6.16. Верно.

6.17. Чтобы наверняка попался белый шар, надо вынуть по крайней мере 20 шаров. Меньшего числа может не хватить, ибо первыми могут быть вынуты красные и черные шары — их 19. Чтобы наверняка попались шары всех трех цветов, надо вынуть как минимум 22 шара; 21 может не хватить, если первыми вынуты все белые шары и черные шары: их 21.

6.18. Надо вызвать 31 человека. Меньше нельзя — может случиться, что к доске выйдут лишь троечники и хорошисты (их $10 + 20 = 30$) и каждый получит минимальную возможную отметку. Если же вызвать 31 человека, то по крайней мере один из них окажется отличником и ответит на 5.

6.19. Если выполнено условие а) или условие б), то выполнено и условие в), т. е. выполнены одновременно два условия а) и в) либо б) и в), что противоречит условию задачи. Значит, а) и б) не выполнены. Тогда в) также не выполнено, г) не выполнено, д) обязательно выполнено, е), ж) и з) не выполнены, про и) ничего нельзя сказать. Поскольку выполнено может быть только одно условие из девяти, то и) не выполнено. Значит, надо из данного множества отобрать те n, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 11. Таких чисел имеется пять, именно: 487, 491, 493, 497, 499.

6.20. Составим т а б л и ц у итогов соревнования:

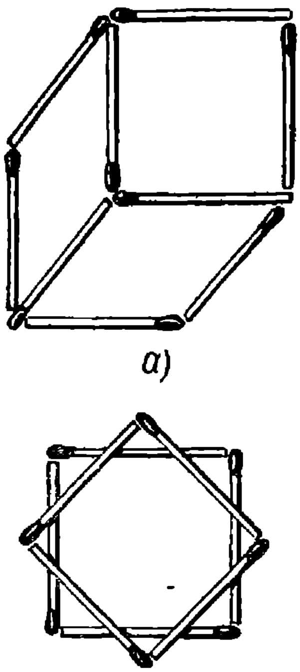
Миша		I
	Симаков	II
Коля		III
	Блинов	IV
	Чигрин — не попал в четверку сильнейших	

Поскольку Чигрин не попал в четверку сильнейших, II и IV места заняли Симаков и Блинов, то I и III места заняли Копылов и Зимин. Но знатоки, предсказавшие, что на первом месте будет Копылов, ошиблись (так сказано в условии), значит, первым был Миша Зимин, а Коле Копылову досталось III место.

Знатоки считали, что II место займет Валерик, III — Чигрин, а IV — Эдик. Значит, Чигрина зовут не Эдик и не Валерик. Остается последняя возможность — имя Чигрина — Игорь. Имена ребят, завоевавших II и IV места, — Валерик и Эдик. Прогноз об имени мальчика, занявшего второе место, неверен, значит, фамилия Эдика — Симаков, а Валерика — Блинов.

Тема 7. МНОГОУГОЛЬНИКИ

Учебно-воспитательные цели. Название этой темы повторяет название одной из центральных глав курса геометрии восьмилетней школы. Задачи, рассматриваемые здесь, призваны в значительной мере развить представления учащихся о многоугольниках и их свойствах. Дело в том, что здесь учащийся встретится с нестан-



а)

б)

Рис. 128

дартными ситуациями, более глубоко познакомится с многоугольниками, число сторон которых произвольно. Это явится одним из средств развития абстрактного мышления учащихся.

Отдельно следует сказать еще об одной очень важной направленности этих задач. Многие из них носят комбинаторный характер. За последнее время получило широкое развитие и применение такое направление, как комбинаторная геометрия. Говоря об этом направлении, кстати, наиболее близком к элементарной, «школьной геометрии», следует отметить ее удивительную наглядность, чрезвычайную простоту ее результатов, опирающуюся на представления, доступные школьникам. Вместе с тем простота формулировок не означает их тривиальности. Большинство предложений комбинаторной геометрии являются весьма глубокими и подчас неожиданными. Не следует думать, что мы здесь изложим сколько-нибудь последовательную теорию. Вместе с тем несколько рассмотренных здесь задач позволяет в дальнейшем перейти к последовательному изучению данного раздела.

Методические указания. Тема «Многоугольники» изучается начиная с VII класса. Так, в VII классе мы изучаем четырехугольники и их свойства. В VIII классе рассматриваются понятия многоугольника, суммы углов многоугольников, площадей многоугольников, правильных многоугольников. Таким образом, задачи, представленные в этой теме, могут быть использованы на протяжении работы кружка в разных классах.

Остановимся подробнее на характеристике рассматриваемых здесь задач. Задачи в этой теме можно условно разбить на группы:

1. Задачи на свойства ломаных. Это задачи 7.1 и 7.2.

2. Задачи на само понятие многоугольника. Выпуклые и невыпуклые фигуры. Это задачи с 7.3 по 7.9. Здесь есть и простые задачи, как 7.3, 7.4, 7.5, но есть и более трудные задачи, например 7.8 и 7.9.

3. Задачи на свойства внешних и внутренних углов многоугольника. Это задачи 7.12, 7.13, 7.14.

Задачи 7.15, 7.16 и 7.17 используют различные свойства многоугольников. Практически все задачи темы посильны учащимся VII—VIII классов.

7.4. Решение представлено на рисунках (рис. 128, *а*, *б*).

7.5. а) Одно из возможных решений представлено на рисунке 129.

б) Несколько видоизменив рисунок, можно получить решение и второй части задачи (рис. 130).

7.6. Заметьте, что если бы такая прямая существовала, то по

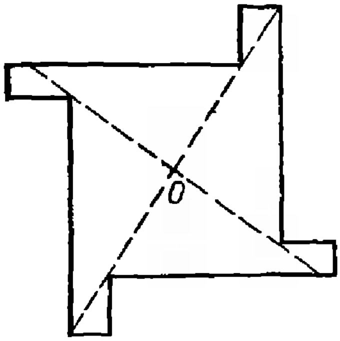


Рис. 129

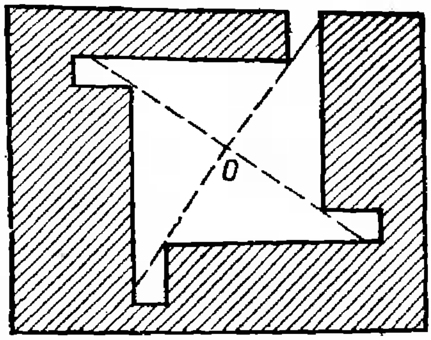


Рис. 130

обе стороны от нее лежало бы одно и то же число вершин многоугольника.

7.7. Многоугольника, у которого длины трех или более сторон равны длине наибольшей диагонали, не существует, поскольку две стороны, длины которых равны длине наибольшей диагонали, обязательно должны иметь общую вершину (рис. 131, *а*), а три стороны, каждые две из которых имеют общую вершину, могут быть только у треугольника, но у него нет диагоналей. Таким образом, может быть две, одна или ни одной стороны.

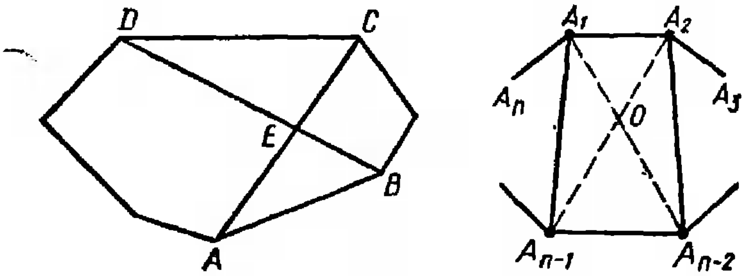
7.8. Докажем, что многоугольник с указанным свойством не может иметь более пяти сторон.

Обозначим через n число сторон многоугольника и допустим, что $n \geqslant 6$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ — вершины многоугольника. Рассмотрим вершины $A_1, A_2, A_{n-2}, A_{n-1}$.

Отрезки A_1A_2 и $A_{n-2}A_{n-1}$ являются сторонами, а отрезки A_1A_{n-1}, A_2A_{n-2} — диагоналями нашего многоугольника в силу предположения о числе n (см. рис. 131, *б*).

В выпуклом четырехугольнике $A_1A_2A_{n-2}A_{n-1}$ сумма длин диагоналей A_1A_{n-2} и A_2A_{n-1} всегда больше суммы длин двух его сторон A_1A_{n-1} и A_2A_{n-2}, а это противоречит тому, что $A_1A_{n-1} = A_1A_{n-2} = A_2A_{n-1} = A_2A_{n-2}$ по условию задачи. Значит, $n < 6$. Очевидно, что $n > 3$ (в треугольнике нет диагоналей).

Для случаев же $n = 4$ и $n = 5$ многоугольники с указанным свойством легко строятся: ими являются квадрат и правильный пятиугольник.



а) б)

Рис. 131

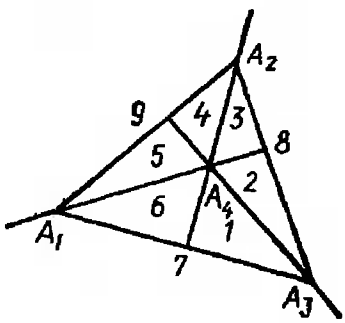


Рис. 132

Итак, о т в е т в задаче таков: число сторон может быть равным 4 или 5.

7.9. Рассмотрите произвольные четыре точки и докажите, что они либо образуют выпуклый четырехугольник, либо одна из них лежит внутри треугольника, образованного тремя другими. В последнем случае пятая точка может располагаться в одной из 9 областей, изображенных на рисунке 132. Проверьте, что при любом положении этой точки можно построить требуемый четырехугольник.

7.10. Пусть такое разбиение возможно, тогда общее число сторон черных треугольников будет на 10 больше общего числа сторон белых. Между тем оба эти числа должны быть кратны трем. Мы пришли к противоречию.

7.11. Если прямая пересекает две смежные стороны квадрата, то, очевидно, она разрезает квадрат на треугольник и пятиугольник. Но по условию каждая из 9 прямых разрезает квадрат на четырехугольники.

Следовательно, такая прямая пересекает две противоположные стороны квадрата, т. е. разбивает квадрат на две трапеции (или два прямоугольника), основания которых лежат на сторонах квадрата и высоты равны стороне квадрата. Ясно, что прямая делит «среднюю линию» квадрата в отношении 2 : 3 (рис. 133), поскольку отношение площадей этих трапеций равно отношению их средних линий, лежащих на средней линии квадрата.

На средней линии квадрата имеются две точки, делящие ее в отношении 2 : 3. Рассмотрев две другие противоположные стороны квадрата, мы найдем еще две точки на параллельной им средней линии.

В результате мы получаем, что каждая из 9 данных прямых проходит через одну из 4 указанных точек (рис. 134). Безусловно, через одну из этих точек проходит не менее трех прямых.

Действительно, если бы через каждую точку проходило не больше двух прямых, то всего было бы не больше $2 \cdot 4 = 8$ прямых, что противоречит условию.

7.13. Вычислим сумму внутренних углов всех треугольников. Углы треугольников, имеющие вершину в данной внутренней точке, в сумме составляют 360°. Так как имеется 30 таких точек, то

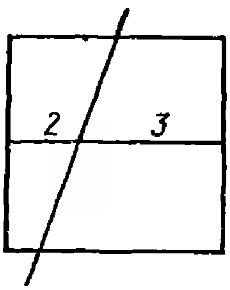


Рис. 133

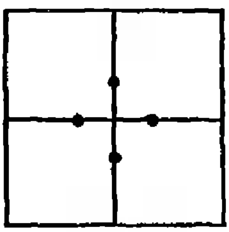


Рис. 134

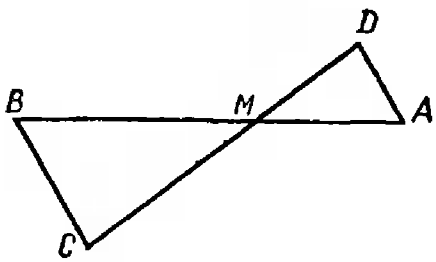


Рис. 135

им соответствуют углы, сумма которых равна $360° \cdot 30 = 10\,800°$. Остаются неучтенными углы, вершины которых совпадают с вершинами стоугольника.

Понятно, что они составляют в сумме $180° (100 - 2) = 17\,640°$. Сумма внутренних углов всех треугольников равна $10\,800° + 17\,640° = 28\,440°$. Сумма внутренних углов одного треугольника $180°$, значит, число треугольников $\frac{28440}{180} = 158$.

7.15. а) Докажем, что не может пересечь каждое свое звено четырехзвенная ломаная $ABCD$. Звенья BC и AD не могут, конечно, пересечь звено BA. Но если звено CD пересекает звено BA в точке M (рис. 135), то точки B и A находятся по разные стороны от прямой CD; поэтому звено DA не может пересечь звена BC.

Отсутствие трехзвенных и пятизвенных ломаных, пересекающих каждое свое звено в точности один раз, устанавливается задачей б).

б) Пусть число точек самопересечения ломаной есть n. Согласно условию в каждой точке пересечения сходятся ровно два звена, так как если бы их сходилось больше, то каждое из них пересекало бы больше одного звена. Таким образом, считая звенья ломаной «по точкам пересечения», мы придем к (четному) числу $2n$ звеньев. Но таким образом мы пересчитаем все звенья ломаной, так как каждое из них имеет одну и только одну точку пересечения с другими звеньями.

7.16. Докажем даже несколько больше, чем утверждается в условии задачи. А именно покажем, что при любом разбиении n-угольника (где $n > 3$) на треугольники непересекающимися диагоналями найдутся две несмежные вершины, из которых не исходит ни одна из проведенных диагоналей. Для четырехугольника это утверждение, очевидно, выполняется (рис. 136, a). Воспользуемся теперь методом математической индукции: предположим, что наше утверждение доказано для всех k-угольников, где $k < n$, и рассмотрим n-угольник M. Пусть AB — одна из диагоналей, разбивающих M на треугольники; она разбивает M на два многоугольника M_1 и M_2 с меньшим числом сторон (рис. 136, $б$), каждый из которых проведенными непересекающимися диагоналями разбит на треугольники. По условию у каждого из них найдутся по

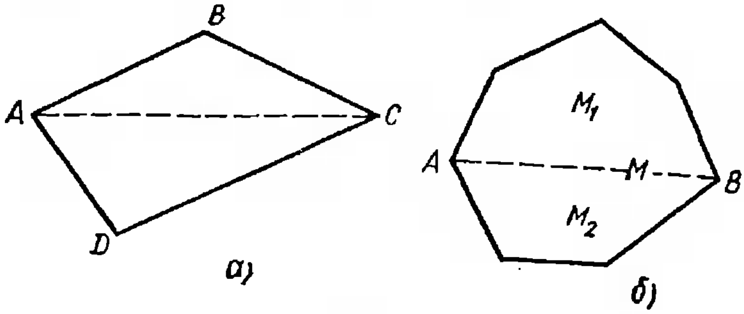


Рис. 136

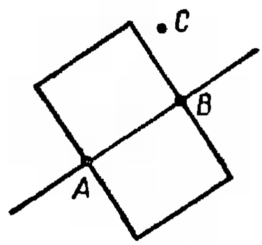


Рис. 137

Рис. 138

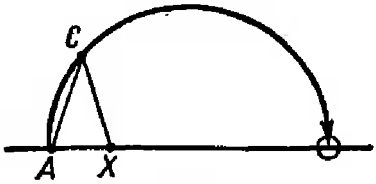


Рис. 139

две вершины, из которых не выходит ни одна из проведенных диагоналей. Однако вершины A и B нам не подходят, поскольку из них исходит диагональ AB, являющаяся стороной многоугольников M_1 и M_2. Но лишь одна из интересующих нас вершин многоугольников M_1 или M_2 может совпадать с A или с B, поскольку в M_1 или M_2 эти вершины соседние. Отсюда и следует наличие у многоугольника M двух несмежных вершин, из которых не выходит ни одна из проведенных диагоналей. (Если, скажем, M_1 — треугольник ABC, то роль вершины, из которой не выходит ни одна диагональ, играет вершина C.)

7.17. а) Отметим, что для заданных точек A и B точка C, лежащая вне прямой AB и вне полосы, образованной перпендикулярами к прямой AB в точках A и B, образует с точками A и B невырожденный тупоугольный треугольник (рис. 137). Для каждой пары точек из заданного конечного множества построим полосу и прямую в соответствии с рисунком 137. Конечное число полос конечной ширины и прямых, очевидно, не покроет всей плоскости, следовательно, существует точка, образующая с каждой парой точек из заданного множества тупоугольный треугольник, что и требовалось доказать.

б) О т в е т: вообще говоря, несправедливо.

Приведем следующий п р и м е р. Рассмотрим все точки полуокружности, за исключением одного конца диаметра (рис. 138). Легко видеть, что такие точки удовлетворяют условиям задачи. Докажем, что к ним нельзя добавить уже ни одной точки. В самом деле, если точка лежит внутри полуокружности на ее диаметре (рис. 139, точка X), то всегда можно найти такую точку C на полуокружности, что треугольник ACX будет остроугольным. То же самое имеет место для всех точек, лежащих вне полуокружности или внутри, но вне ее диаметра (рис. 140, точки X' и X''; соответствующие точки B', C' и B'', C'' выбираются «достаточно близкими»).

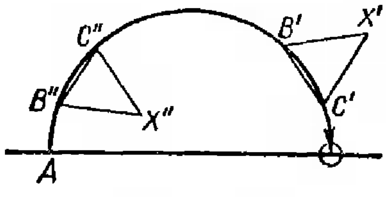


Рис. 140

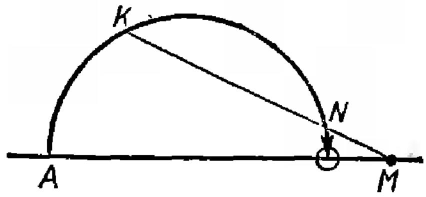


Рис. 141

Если же точка выбирается на диаметре вне полуокружности (рис. 141, точка M), то имеет место вырождение — на рисунке 141 точки M, N, K оказываются на одной прямой.

Тема 8. ГРАФЫ

Учебно-воспитательные цели. Теория графов находит применение в различных областях современной математики и ее многочисленных приложений, особенно в экономике. Не приходится сомневаться в полезности ознакомления учащихся с основными понятиями теории графов. Решение многих математических задач упрощается, если удается использовать графы. Представление данных в виде графа придает им наглядность. Многие доказательства также упрощаются, приобретают убедительность, если воспользоваться графами. В особенности это относится к комбинаторике. Таким образом, изучение этой темы имеет большое общеобразовательное и общематематическое значение.

Методические замечания. В начале занятия имеет смысл рассказать условия задач 8.1, 8.2 и 8.3 и лишь затем перейти к решению задачи 8.1. Понятие графа вводится при обсуждении задачи 8.4, а затем вы снова возвращаетесь к задаче 8.1 и уже теперь решаете ее вместе с кружком, разумеется, при помощи графов. Решая задачи 8.2 и 8.3, вы получаете тот же самый граф (если аккуратно выбрать обозначения, например, так, как это сделано у нас: 1 — Ляпкин-Тяпкин и т. д.).

Решение

8.6. Один из возможных способов обхода показан на рисунке 142. Ребра занумерованы в той последовательности, в которой мы их обходим. Направление обхода указано на рисунке стрелками.

8.7. Ребра и вершины куба образуют граф, все 8 вершин которого имеют кратность 3 (см. обсуждение задачи 8.6), и, следовательно, требуемый условием обход невозможен.

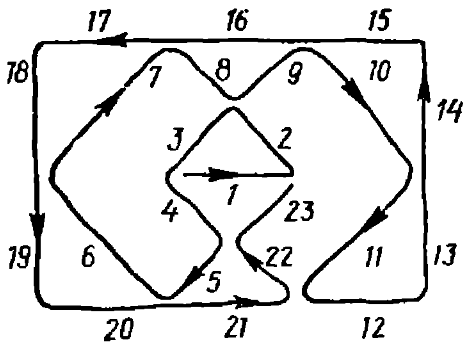


Рис. 142

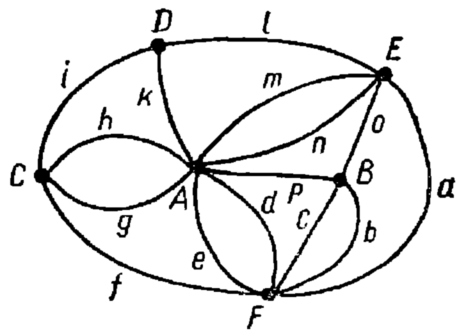


Рис. 143

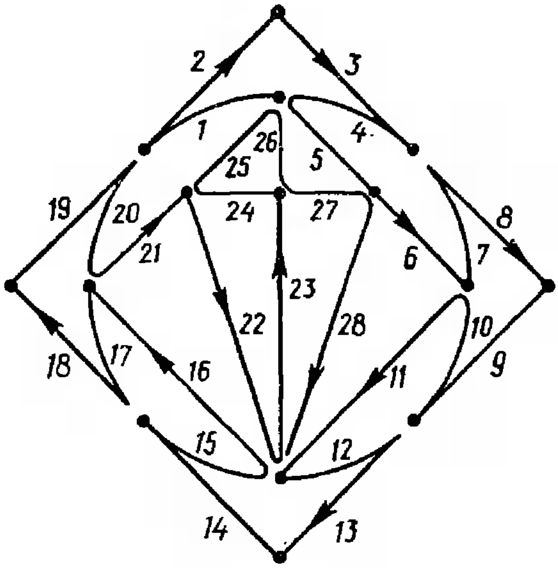


Рис. 144

8.8. Изобразим план города в виде графа, подобно тому как это сделано в задаче 8.5. Мы видим (рис. 143), что на этом графе имеются две вершины нечетной кратности: D и E. Как следует из обсуждения задачи 8.6, требуемый условием обход должен начинаться в одной из этих точек и заканчиваться в другой. Вот, например, один из таких обходов:

$$lafikhgedpcbonm.$$

8.9. На рисунке 144 дан один из возможных способов обхода графа. Ребра занумерованы в той последовательности, в которой они вычерчиваются. Направление движения карандаша показано стрелками.

8.10. Сопоставим каждому из данных шести людей одну из вершин правильного шестиугольника. Если двое знакомы друг с другом, то соответствующие им вершины соединим красным отрезком, если не знакомы — синим. Очевидно, предлагаемая задача 8.10 свелась к задаче 8.11.

8.11. Рассмотрим три отрезка одного цвета, о которых говорится в подсказке. Они имеют общую вершину. Вторые концы этих отрезков образуют треугольник. Если его стороны одного цвета, все доказано; если же разных цветов, то одна из его сторон окрашена в тот же цвет, что и рассматриваемые отрезки, и, значит, образует с двумя из этих отрезков «одноцветный» треугольник.

8.12. См. решение задачи 8.10.

Тема 9. АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ

Учебно-воспитательные цели. Арифметика сравнений, или арифметика остатков, как она у нас называется, — одна из глав высшей арифметики. Но она, конечно, имеет прямое отношение не только к высшей, но и к элементарной арифметике. Многие вопросы элементарной арифметики связаны с этой темой: и деление с остатком, и вопросы делимости, в частности признаки делимости, и отыскание наибольшего общего делителя, и многое другое. Но эта тема имеет и самостоятельную ценность — арифметика сравнений представляет собой простой пример «необычной», «экзотической» арифметики, в которой действуют сложение и умножение, подчиняющиеся тем же законам, что и в обычной арифметике. Необычность ее в том, что в ней имеется лишь конечное число не равных друг другу или несравнимых друг с другом чисел. Преподавание этой темы призвано расширить математический кругозор и облегчить усвоение трудных вопросов элементарной арифметики.

Методические замечания. Важно дать понять школьникам, что, несмотря на кажущуюся «странность», «неестественность» арифметики остатков, нам приходится иметь с ней дело постоянно. Этой цели служат примеры первый, второй и третий. Подобные примеры можно продолжить.

Решения

9.6. Невисокосный год — 52 недели и один день в остатке, високосный — два дня в остатке. Период из четырех лет дает $2+1+1+1=5$ дней в остатке. С 1 января 1984 г. по 1 января 2000 г. пройдет 16 лет, 4 раза по 4 года, и остатки составят $5\times 4 = 20$ дней, или 2 полные недели и еще 6 дней. Так как 1 января 1984 г. — воскресенье, то 1 января 2000 г. — суббота. (Ср. с решением задачи 9.2.)

9.7. Задача решается аналогично задаче 9.5. Последние цифры степеней числа 333 образуют последовательность 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, ..., в которой периодически повторяется группа цифр 3, 9, 7, 1. Так как 333 дает при делении на 4 в остатке 1, т. е. $333 \equiv 1 \pmod 4$, то 333^{333} оканчивается цифрой 3.

9.8. Найдем сначала ответ на первый вопрос задачи. Как мы уже видели, решая задачу 5, последние цифры степеней семерки образуют последовательность 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ..., в которой периодически повторяется группа цифр 7, 9, 3, 1, т. е. цифры повторяются через четыре. Остается узнать, какой остаток получится от деления 7^7 на 4. Так как $7 \equiv 3 \pmod 4$ и $7^2 \equiv 1 \pmod 4$, то $7^7 = 7^2\times 7^2\times 7^2\times 7 \equiv 1\times 1\times 1\times 3 \pmod 4$, то этот остаток равен 3. Так как в группе цифр 7, 9, 3, 1 на третьем месте стоит тройка, то последняя цифра результата — 3.

Какова последняя цифра числа 4^{444}? Последние цифры степеней четверки образуют последовательность 4, 6, 4, 6, 4, 6, ..., т. е. на нечетных местах — 4, на четных — 6. Значит, последняя цифра числа 4^{444} — шестерка. Так как уменьшаемое оканчивается тройкой и вычитаемое — шестеркой, то разность оканчивается цифрой 7.

9.9. Так как $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$, то $2^{999} \equiv 1^{999} \equiv 1 \pmod 7$, а $2^{1000} \equiv 2 \pmod 7$.

9.10. Последние две цифры произведения определяются последними двумя цифрами сомножителей. Выпишем последние две цифры первых одиннадцати степеней девятки:

09, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09.

Так как 9^{11} оканчивается теми же цифрами, что и 9^1, то при дальнейшем возведении девятки в степень эта последовательность будет периодически повторяться с периодом 10. Значит, последние две цифры числа 9^{999} те же, что и у числа 9^9, т. е. 89, а число $9^{999}+1$ оканчивается на 90, т. е. одним нулем.

В этом решении мы пользовались, по сути дела, арифметикой вычетов по модулю 100.

9.11. Воспользуемся арифметикой вычетов по модулю 3. Так как $776 \equiv 2 \pmod 3$, то $776^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$, а $776^{776} = (776^2)^{388} \equiv$ $\equiv 1^{388} = 1 \pmod 3$.

Далее, $778 \equiv 1 \pmod 3$ и $778^{778} \equiv 1^{778} = 1 \pmod 3$.

Наконец, $777 \equiv 0 \pmod 3$ и $777^{777} \equiv 0 \pmod 3$. Складывая эти сравнения, получим: $776^{776} + 777^{777} + 778^{778} \equiv 1 + 0 + 1 =$ $= 2 \pmod 3$, т. е. данная сумма дает при делении на 3 остаток, равный 2.

Добавление. Разложение на простые множители

Настоящее добавление связано также с темами 4, 6 и др.

Теорема 1. *Любое натуральное число, отличное от единицы, либо является простым, либо его можно представить в виде произведения простых чисел.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Наименьшее натуральное число, отличное от единицы, — это 2. Оно простое, и, значит, для него теорема справедлива.

Допустим теперь, что доказываемая теорема справедлива для всех натуральных чисел от 2 до k включительно, и докажем, что в этом случае она справедлива и для числа $k + 1$. Если число $k + 1$ простое, то нечего и доказывать; если же оно составное, то его можно разложить в произведение двух натуральных множителей, каждый из которых не превосходит k: $k + 1 = ab$.

По предположению индукции числа a и b можно представить в виде произведения простых чисел (это «произведение», в частности, может оказаться состоящим из одного множителя):

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m,$$
$$b = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n.$$

Следовательно,

$$k + 1 = ab = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n,$$

и мы получаем представление числа $k + 1$ в виде произведения простых чисел. Теорема доказана.

Другое доказательство основано на следующем замечании. Пусть натуральное число k составное. Тогда его можно представить в виде произведения нескольких натуральных множителей, больших 1:

$$k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m.$$

Но число этих множителей не может быть сколь угодно велико: из неравенств $a_1 \geqslant 2$, $a_2 \geqslant 2$, ..., $a_m \geqslant 2$ следует, что

$$k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m \geqslant 2^m,$$

и, значит, число множителей m не может быть столь велико, чтобы 2^m превзошло k.

Пусть теперь k — любое отличное от единицы натуральное число. Если k простое, то теорема верна, поэтому рассмотрим случай, когда число k составное. В этом случае k можно представить в виде произведения натуральных множителей, отличных от единицы. Те из этих множителей, которые сами являются составными, можно заменить их разложениями на множители; если среди последних будут составные числа, вновь заменяем каждое из них произведением и т. д. Этот процесс рано или поздно оборвется, так как согласно доказанному выше число множителей, на которые разлагается данное число k, не может быть сколь угодно велико. Другими словами, мы рано или поздно придем к разложению числа k на простые множители, а это и требовалось доказать.

Второе доказательство в одном отношении лучше, чем первое, — здесь в явном виде присутствует процесс разложения числа на простые множители, который часто используется на практике.

Единственность разложения числа на простые множители

Итак, всякое натуральное число, кроме 1, можно представить в виде $k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые числа (если k простое, то «произведение» состоит из единственного множителя p_1).

Разложения числа k на множители могут отличаться друг от друга порядком множителей, например: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ и т. д. Но если договориться располагать множители в разложении в некотором фиксированном порядке, например в порядке возрастания ($p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$), то такое разложение будет единственным.

Это утверждение кажется на первый взгляд тривиальным, но это не так. Попробуйте доказать его, и вы убедитесь в обратном. Нетрудно свести доказательство к такой теореме: *если произведение натуральных чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p*. Но и эта теорема доказывается совсем не просто.

Ниже приводится остроумное доказательство единственности разложения на простые множители, использующее так называемый «принцип наименьшего числа». Этот принцип состоит в следующем:

Любое непустое множество M натуральных чисел содержит наименьшее число.

Иногда при аксиоматическом построении арифметики это свойство натурального ряда принимают за аксиому, а принцип математической индукции выводят из этой аксиомы. (Подробнее об этом см.: Курант Р. и Роббинс Г. Что такое математика? М., «Просвещение», 1967, с. 43.)

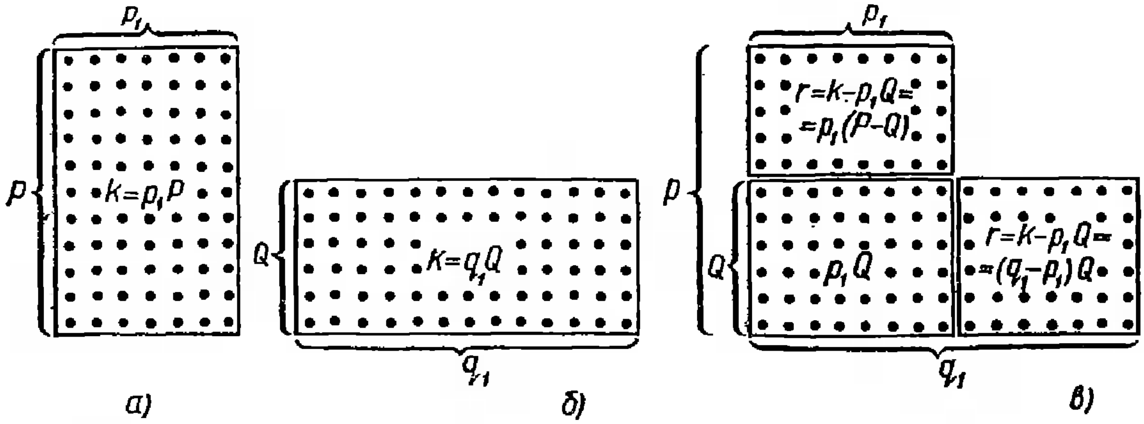


Рис. 145

Переходим к теореме о единственности разложения на простые множители.

Т е о р е м а 2. *Всякое составное натуральное число k может быть представлено в виде произведения простых чисел однозначно с точностью до порядка сомножителей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем эту теорему методом «от противного». Допустим, существуют натуральные числа, разлагаемые в произведение простых множителей не единственным образом, и пусть k — наименьшее из таких чисел. Выпишем два существенно различных (т. е. отличающихся не только порядком) разложения числа k на простые множители:

$$k = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n. \qquad (1)$$

Ясно, что ни один из множителей первого разложения не совпадает ни с одним множителем второго, иначе можно было бы сократить на общий множитель обе части последнего равенства, и мы получили бы меньшее, чем k, натуральное число, разлагаемое на простые множители двумя различными способами. Допустим, что $p_1 < q_1$. (Если $p_1 > q_1$, то во всех последующих рассуждениях надо буквы p и q поменять местами.)

Запишем равенство (1) в виде $k = p_1 \cdot P = q_1 \cdot Q$ (буквами P и Q обозначены числа $p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m$ и $q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$). Нам удалось представить число k в «прямоугольной» форме двумя способами: см. рисунок 145, на котором первое представление изображается «высоким» прямоугольником, а второе — «низким».

Теперь рассмотрим число $r = k - p_1Q$, меньшее, чем k. Мы докажем, что это число тоже допускает два различных разложения на простые множители, в противоречие с выбором числа k.

В самом деле, число r, с одной стороны, можно представить в виде

$$r = k - p_1Q = p_1P - p_1Q = p_1(P - Q),$$

т. е. число r изображается верхним прямоугольником на рисунке 145, *в*. Заменив число $P - Q$ его разложением на простые множители, получим представление числа r в виде произведения простых чисел, одно из которых — число p_1.

С другой стороны, число r можно представить в виде

$$r = k - p_1 Q = q_1 Q - p_1 Q = (q_1 - p_1) \cdot Q = (q_1 - p_1) \times \times q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n,$$

т. е. число r изображается правым прямоугольником на рисунке 145, *в*. В разложении числа $q_1 - p_1$ на простые множители не может присутствовать p_1, в противном случае число $q_1 = (q_1 - p_1) + p_1$, равное сумме двух чисел, кратных p_1, само бы делилось на p_1, что невозможно, ибо q_1 — число простое. Заменив в последнем равенстве число $q_1 - p_1$ его разложением на простые множители, получим разложение числа r на простые множители, среди которых множитель p_1 отсутствует. Таким образом, имеем два разложения числа r на простые множители — в одном из них число p_1 есть, в другом нет. Но этого не может быть, так как по определению число k наименьшее из чисел, допускающих различные разложения на простые множители. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теоремы 1 и 2 обычно формулируют как одну теорему, которую в силу ее особой важности называют основной теоремой арифметики.

Основная теорема арифметики. *Любое натуральное число, отличное от единицы, может быть разложено в произведение простых чисел, причем два различных разложения одного числа могут отличаться лишь порядком множителей.*

Следствие. *Если произведение двух (или нескольких) чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.*

В самом деле, если число $a \times b$ делится на p, то в его разложении на простые множители должно присутствовать число p. Заменив в произведении $a \times b$ числа a и b их разложениями на простые множители, получим разложение числа $a \times b$ на простые множители.

Так как в этом разложении непременно присутствует число p, то в разложении числа a или в разложении числа b обязано присутствовать число p, а это и требовалось доказать.

Тема 10. ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Учебно-воспитательные цели. В этой теме рассматриваются некоторые задачи на построение геометрических фигур с использованием тех или иных инструментов или средств построения. Геометрические построения в основном затрагивают вопросы построения фигур (прямых; n-угольников, окружностей и др.), удовлетворяющих определенным условиям: при этом средства построения заранее предписаны.

Это в основном классические инструменты: циркуль, линейка (односторонняя или двусторонняя), угольник и т. д. При решении

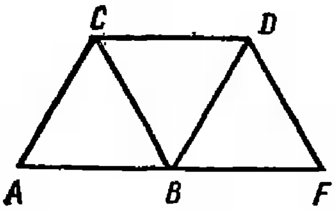


Рис. 146

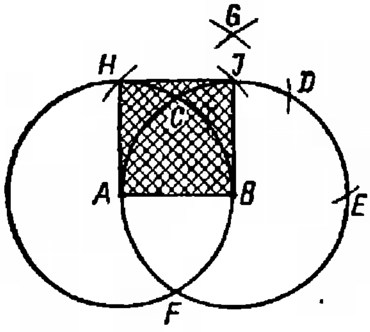


Рис. 147

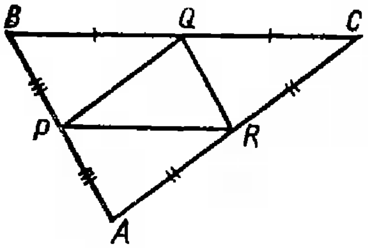


Рис. 148

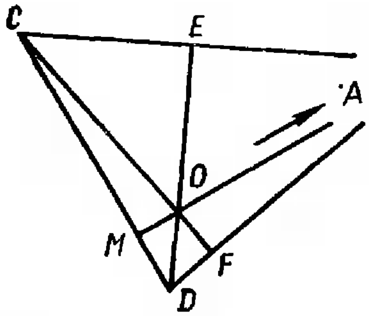


Рис. 149

задач учащиеся знакомятся с основными методами построений, рассматривают задачи на построение, выполняемые с помощью только одного циркуля — построения Мора-Маскерони, только одной линейкой — построения Штейнера (при этом еще необходимо иметь начерченную окружность и ее центр). Особо выделены задачи, не решаемые с помощью циркуля и линейки, а также задачи построения правильных многоугольников.

Методические замечания. Программа по геометрии предусматривает знакомство учащихся с наиболее важными задачами на построение — это в основном задачи на построение треугольников по трем элементам, построение перпендикуляра к прямой и биссектрисы угла. Кроме этих задач, еще встречаются моменты, где в результате доказательства какой-либо теоремы мы получаем удобный способ построения (например, построение касательной к окружности или возможность деления отрезка на равные части после изучения теоремы Фалеса и т. д.). Вместе с тем ограниченность времени не позволяет рассмотреть интересные задачи на построение и подавно не позволяет рассмотреть историю этого вопроса с иллюстрацией ее несколькими классическими задачами. Задачи в данной теме подобраны именно так, чтобы в той или иной степени решить указанные вопросы.

10.2. Указание. Дополните угол до прямого.

10.3. Постройте точки C, D, F так, чтобы $\angle CBA = 60°$, $\angle DBA = 120°$, $\angle FBA = 180°$ (рис. 146). Получим, что $AF = 2\,AB$.

10.4. Воспользуйтесь построением предыдущей задачи.

10.9. Решение задачи изображено на рисунке 147. Для построения двух смежных вершин квадрата требуется 8 дуг. Вершины квадрата A и B заданы. Приняв каждую из них за центр; проведем две окружности радиусом, равным стороне квадрата. Не меняя радиуса, отметим на окружностях точки D и E; радиусом, равным длине отрезка CF, проведем из точек A и E две дуги, пересекающиеся в точке G, затем радиусом GB из точек A и B — две дуги, пересекающие окружности в точках H и I. Эти точки и будут двумя искомыми вершинами квадрата.

10.12. Указание. Покажите, что центром окружности, удовлетворяющей условию задачи, может быть либо точка пересечения перпендикуляров к серединам диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$, либо одна из точек, в которых пересекаются перпендикуляры к серединам любых двух сторон этого четырехугольника.

10.13. Указание. Из точки C четырехугольника $ABCD$ проведите отрезок CF, равный и параллельный AB. Рассмотрите треугольник CFD.

10.14. Соединим данные точки P, Q и R (рис. 148). Отрезки PQ, QR и PR — средние линии искомого треугольника, поэтому через точки P, Q и R проводим прямые, соответственно параллельные QR, PR и PQ. Полученный треугольник ABC искомый.

10.15. Пусть точка A недоступна (рис. 149). Соединим C и D. В треугольнике ADC проведем высоты CF и DE соответственно на стороны AD и AC. Из точки O — пересечения высот — проведем перпендикуляр к прямой CD, получим отрезок MO. Это и есть искомая высота.

Тема 11. ГРАФИКИ ДВИЖЕНИЯ

Учебно-воспитательные цели. Методы решения задач «на движение», использующие графики, обладают большой простотой и изяществом. Здесь весьма естественным образом вводится система координат. Усвоение темы облегчит учащимся изучение кинематики, в особенности раздела, связанного с равномерным движением. Применение графиков движения в решении многих математических задач придает содержанию задачи наглядность и прозрачность, что особенно бросается в глаза при сравнении подобных решений с решениями, использующими другие методы.

Методические замечания. В обсуждении задачи 11.1 вы, по сути дела, вводите в рассмотрение декартову прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс откладывается время, а по оси ординат — пройденное расстояние, отсчитываемое от некоторой фиксированной точки. Движущийся объект в любой момент времени занимает определенное положение, т. е. находится на определенном расстоянии от этой фиксированной точки и, значит, изображается некоторой точкой в данной системе координат. В процессе перемещения объекта изменяет свое положение и изображающая его точка, вычерчивая некоторую линию — график движения. В разбираемых задачах движение равномерное и графики движения прямолинейные. Вряд ли целесообразно давать на занятии кружка строгое доказательство этого факта, тем более что систематическое изучение декартовых координат входит в программу старших классов.

11.1. Первая встреча происходит, как это видно из графика движения, в 1400 км от Ливерпуля, вторая — в 3850 км, третья — в 6300 км (полдень субботы), четвертая — в 8750 км (в полночь со вторника на среду).

11.2. Как показывает график движения (см. рис. 46), эти встречи происходят на расстоянии 4900 км.

11.3. Построив график движения, убедимся, что судно, вышедшее из Рио-де-Жанейро, скажем, в понедельник 15 марта 18... года, встретит в океане все суда, оставившие Ливерпуль со вторника, 2 марта, по воскресенье, 28 марта.

11.4. Первый способ (без применения графиков движения). К 12 ч ночи часовая стрелка сделает один оборот, а минутная — 12, следовательно, минутная обгонит часовую на 11 кругов. Значит, за это время минутная стрелка обходила часовую 11 раз, а на один круг она ее обгоняла за $\frac{12}{11}$ ч, т. е. за 1 ч 5 мин $27\frac{3}{11}$ с.

Второй способ (с применением графиков движения). Построим график движения каждой стрелки. С этой целью по горизонтальной оси отложим время в часах, по вертикальной оси — положение стрелки на циферблате (в минутах). Тонкими линиями изобразим положения (график движения) минутной стрелки, а жирной линией — часовой стрелки. Моментам совпадения стрелок соответствуют точки пересечения этих линий. Из рисунка 150 видно, что эти точки делят жирную линию на 11 равных частей. Значит, ответ в задаче — $\frac{12}{11}$ ч.

11.5. а) Представим себе, что к часовой стрелке намертво приделана еще одна стрелка, образующая с ней развернутый угол. Изобразим ее движение на графике штрих-пунктирной линией.

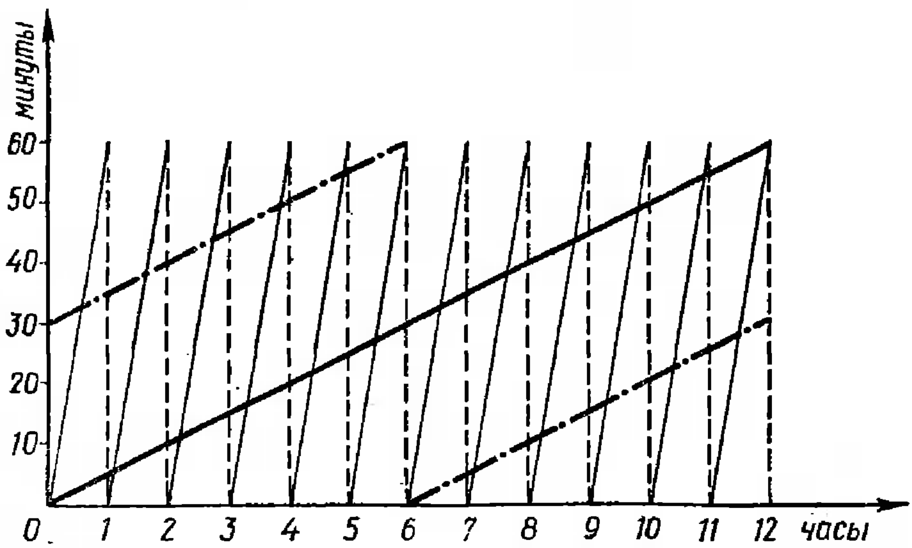


Рис. 150

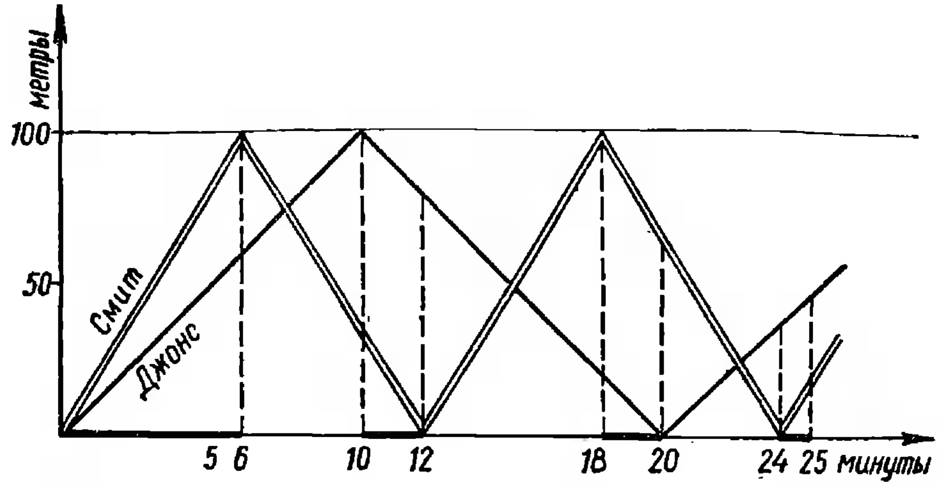


Рис. 151

Точки, в которых эта линия пересекает тонкую линию — график движения минутной стрелки, соответствуют искомым моментам (см. рис. 150).

б) Нужно поступить аналогично, приделав две стрелки, образующие с часовой стрелкой прямой угол.

в) Решается аналогично б).

11.6. Построим графики движения двух джентльменов. Как видно из этих графиков (рис. 151), джентльмены раскланивались трижды и шли в одном направлении 11 мин (соответствующие промежутки отмечены на оси времени жирной линией).

11.7. Скорость первого почтальона $3\frac{1}{2}$ миль/ч, скорость второго $2\frac{2}{3}$ миль/ч. Когда *B* отправился в путь, *A* уже прошел $3\frac{1}{2}$ мили, и расстояние между ними стало $59 - 3\frac{1}{2} = 55\frac{1}{2}$ мили. Они приближаются друг к другу со скоростью $3\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} = 6\frac{1}{6}$ миль/ч и встретятся через $55\frac{1}{2} : 6\frac{1}{6} = 9$ ч. К этому моменту *A* пройдет $(1 + 9) \times 3\frac{1}{2} = 35$ миль.

Можно решить ту же задачу по-другому, применяя графики движения. Построив графики движения почтальонов, видим, что к моменту встречи *A* покрыл расстояние 35 миль (рис. 152).

Тема 12. МАШИНА ПОСТА

Учебно-воспитательные цели. Эта тема непосредственно вводит учащихся в круг вопросов, связанных с вычислительными машинами и программированием. Научившись составлять программы для машины Поста, ученики смогут без особого труда перейти к состав-

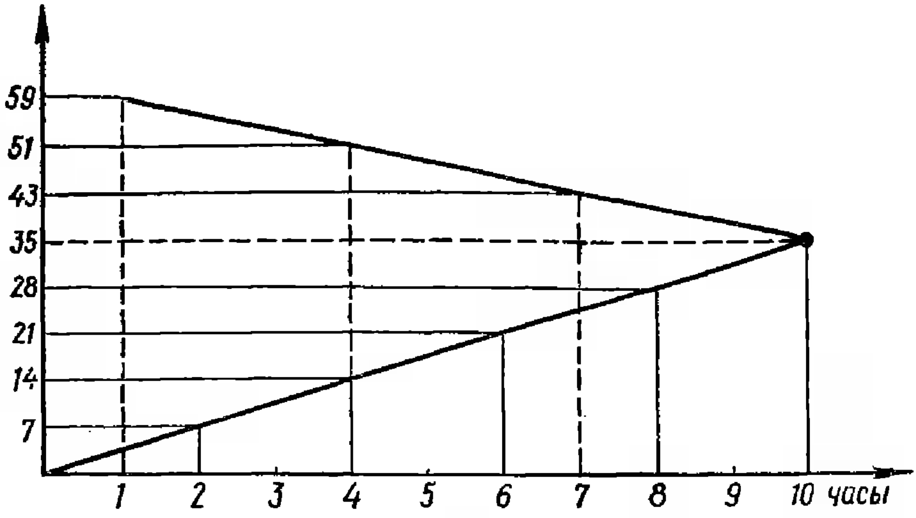


Рис. 152

лению программы для ЭВМ. Данная тема представляет собой хорошее введение в теорию алгоритмов и алгоритмических языков.

Методические замечания. При изложении темы «Машина Поста» мы взяли за основу статьи В. А. Успенского («Математика в школе», 1967, № 1—4). В этих статьях имеются и подробные методические указания для преподавателей.

Руководитель кружка может по своему усмотрению несколько изменить порядок изложения и обозначения. Ради экономии места мы записывали команды в строчку, но лучше писать команды в столбик, как у В. А. Успенского, — это и нагляднее, и отпадает необходимость в разделительном знаке ■.

Чтобы приблизить наш словарь к словарям алгоритмических языков, в частности к АЛГОЛу, мы ввели в команду условного перехода слово «ИНАЧЕ». Но это вовсе не обязательно. Преподаватель может по своему вкусу выбрать обозначение для команды условного перехода, отличное от нашего. Вместо

$$N_1)?\ \Pi\ N_2\ \text{ИНАЧЕ}\ N_3$$

можно писать, как у В. А. Успенского,

$$N_1)?\begin{matrix} \nearrow N_2 \\ \searrow N_3 \end{matrix}$$

или, например, так:

$$N_1)?\ \Pi\ N_2 \vee N_3.$$

Последнюю запись легко прочесть: «Смотри! Если «пусто», переходи к N_2, если метка — к N_3».

Заключительный пункт темы «Прибавление единицы (общий случай)» несколько сложнее остальных. Поэтому в классе стоит решить лишь задачи 12.16 и 12.17, а задачу 12.18 предложить в качестве конкурсной.

Одно из условий такого конкурса — программа должна быть как можно более короткой. Другое условие — решение должно содержать не только программу, но и блок-схему. Не следует рассчитывать, что многие найдут решение, содержащее 23 команды, хорошо, если кому-нибудь удастся «уложиться» в 25 команд. Чем большее число кружковцев примет участие в таком конкурсе «на самую короткую программу», тем интереснее пройдет разбор приведенной в тексте программы из 23 команд. Прежде чем излагать это решение, стоит вместе с классом решить задачу 12.19 — переход от нее к задаче 12.18 не представляет большого труда.

В заключение приведем сводку команд для машины Поста:

$N_1) \rightarrow N_2$
$N_1) \leftarrow N_2$
$N_1) \vee N_2$
$N_1)\ C\, N_2$
$N_1)$ СТОП
$N_1)$? П N_2 ИНАЧЕ N_3

Здесь N_1, N_2, N_3 — натуральные числа, N_1 — номер команды, N_2, N_3 — отсылки. Непустая конечная последовательность команд, расположенных в порядке возрастания номеров, называется *программой*, если каждая отсылка совпадает с номером одной из команд. Машина выполняет сначала команду с наименьшим номером, а в дальнейшем руководствуется отсылками. Отсюда следует, что нумерация команд в программе не обязательно начинается с 1, и если N — наибольший из номеров, то это не значит, что все номера от наименьшего до N использованы.

Тема 13. ПЛОЩАДИ

Учебно-воспитательные цели. Данная тема, как и все другие геометрические темы, призвана прежде всего воспитать у учащихся интерес к решению геометрических задач. Кроме этого, задачи на нахождение площадей — наиболее распространенные задачи геометрии, при их решении требуется пользоваться всем арсеналом геометрических знаний. В этом плане они носят обучающий и развивающий характер.

Ответы и решения

13.2. *Указание.* Соедините точки M и B, P и C, A и K.

13.4. *Указание.* Пусть точки K, L, M и N взяты соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма. Предположим, что прямая LN не параллельна прямой AB. Заметьте, что если точка K зафиксирована, а M двигается по стороне CD от C к D, то площадь $KLMN$ меняется монотонно: или все время увеличивается, или все время уменьшается. Поэтому только один раз

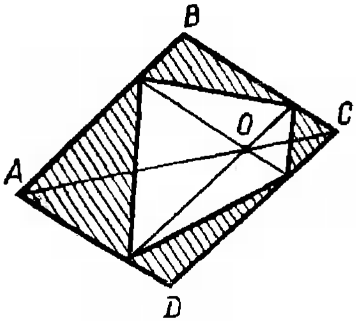


Рис. 153

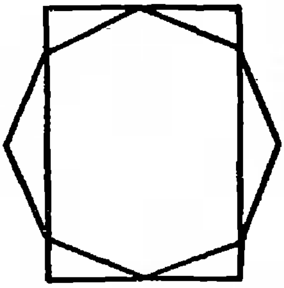


Рис. 154

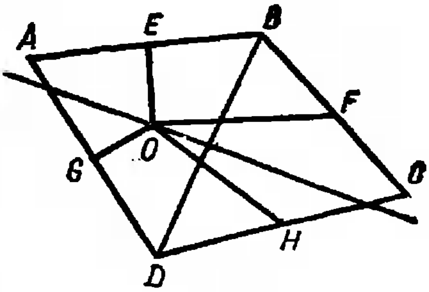


Рис. 155

она может равняться половине площади $ABCD$. Докажите, что это будет тогда, когда отрезок MK станет параллельным отрезкам AD и BC.

13.7. Указание. Воспользуйтесь тем, что диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника (рис. 153).

13.9. Указание. Взгляните на рисунок 154.

13.11. Указание. Докажите, что прямая, проходящая через середину диагонали BD, параллельна прямой AC (рис. 155), является геометрическим местом точек O, для которых площади четырехугольников $HOGD$ и $EOFB$ равны $\frac{1}{4}$ полной площади.

13.13. Указание. Проведите через точку D прямую, параллельную диагонали AC.

13.14. Указание. Докажите сначала, что высота треугольника AMD, проведенная к отрезку AD, равна полусумме высот треугольников ABN и NCD. Выведите отсюда, что площадь треугольника AMD равна сумме площадей треугольников ABN и NCD.

13.15. Пусть $S_{\triangle ABC} < S_{\triangle ACD}$. Рассмотрите равновеликий треугольнику ABC треугольник ACE с основанием EC, лежащим на продолжении отрезка DC. В треугольнике EAD провести медиану AF (рис. 156).

13.19. Десантник заведомо выйдет из леса, если он будет идти по окружности радиуса $r = \sqrt{S/\pi}$. Действительно, если бы вся эта окружность помещалась внутри леса, то площадь леса была бы больше $\pi r^2 = S$.

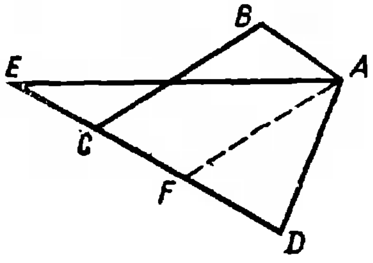


Рис. 156

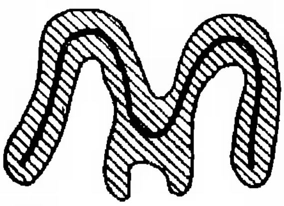


Рис. 157

Формально задача решена, но мы покажем, как можно было бы естественно прийти к такому решению, заодно убедимся в том, что оценка $2\sqrt{\pi S}$ в некотором смысле наилучшая из возможных.

Заметим, что путь

должен быть обязательно замкнутым или по крайней мере содержать точки самопересечения. В самом деле, в противном случае, каким бы длинным ни был путь l, существует лес в виде столь узкой полосы вдоль пути l, что его площадь не превосходит S (см. рис. 157). Уточняя эти рассуждения, можно показать, что десантник должен идти по некоторому замкнутому маршруту l. Для того чтобы при любой форме леса можно было гарантировать выход на опушку леса, необходимо и достаточно, чтобы площадь, ограниченная линией l, была не меньше S. При этом, если маршрут l выбран кратчайшим из возможных, то в самых неблагоприятных ситуациях десантнику до выхода на опушку придется пройти весь (или почти весь) маршрут l.

Итак, задача о выборе «хорошей стратегии» сводится к следующему вопросу: среди всех замкнутых кривых, ограничивающих площадь S, найти кривую наименьшей длины. О т в е т, как известно, даст окружность.

Тема 14. КОЗА НА ПРИВЯЗИ

Учебно-воспитательные цели. Занятие полезно в нескольких направлениях.

1. Оно содержит ряд упражнений на пересечение множеств и на разность множеств, естественным образом появляющихся при развитии «теории голодной козы».

2. Вводится понятие «окрестность множества», используемое в различных областях математики, существенно опирающееся на понятия расстояния между точками и между точкой и множеством и тем самым закрепляющее эти понятия в сознании учащихся.

3. Обсуждаются вопросы, связанные с построением математических моделей реальных явлений, а также показывается польза знакомства с математическими понятиями при разработке подобных моделей.

Методические замечания. Занятие содержит примерный текст выступления руководителя кружка. Задачи 14.2, 14.3, 14.6 можно решать в классе, остальные предназначены для домашней работы, в том числе задачи 14.5, 14.7, 14.13, доступные лишь наиболее сильным ученикам. При выполнении чертежей (рис. 64 и др.) можно либо пользоваться цветными мелками, либо применять сплошные, штриховые, пунктирные линии.

Решения, указания, ответы

14.1. Достаточно сослаться на то, что перпендикуляр короче любой наклонной, а из наклонных та короче, основание которой ближе к основанию перпендикуляра (эта фраза написана на, так сказать, сокращенном языке — предполагается, что перпендикуляр и наклонные опущены из одной и той же точки на одну и ту же прямую; поскольку мы предполагаем, что читатели обладают некоторой математической культурой, то зачастую пользуемся сокращенным языком).

14.2. Параллелограмм можно представить как пересечение фигур, изображенных на рисунке 64.

14.3. Треугольник — это пересечение параллелограмма и фигуры на рисунке 64.

14.4. Правильный шестиугольник — пересечение трех окрестностей отрезков. Как и для получения треугольника, достаточно 6 колышков. Получать шестиугольник как пересечение двух равносторонних треугольников неэкономно, ибо требует затраты 12 колышков и соответствующего числа веревок.

14.5. Любой выпуклый многоугольник можно представить в виде пересечения полуплоскостей или, если угодно, в виде пересечения прямоугольников. Можно действовать так. Для каждой стороны многоугольника построим прямоугольник, на одной из сторон которого лежит рассматриваемая сторона многоугольника, а сам многоугольник является подмножеством прямоугольника, т. е. все точки многоугольника лежат внутри или на границе прямоугольника. Это возможно в силу выпуклости рассматриваемого многоугольника. Пересечение прямоугольников, соответствующих сторонам многоугольника, совпадает с многоугольником. Прямоугольники мы получать умеем, значит, сумеем получить и многоугольник.

14.6. Окрестность креста изображена на рисунке 158 (размеры проставьте сами). Окрестность окружности — кольцо. Окрестность границы прямоугольника изображена на рисунке 63. Окрестность прямоугольника есть объединение прямоугольника и окрестности его границы.

14.7. Окрестность выпуклого многоугольника состоит из следующих частей: самого многоугольника; прямоугольников, основания которых — стороны многоугольника, а высоты равны R; секторов радиуса R с центрами в вершинах многоугольника. Из формулы для суммы углов выпуклого многоугольника следует, что объединение этих секторов составляет полный круг. О т в е т: площадь окрестности равна $S + PR + \pi R^2$.

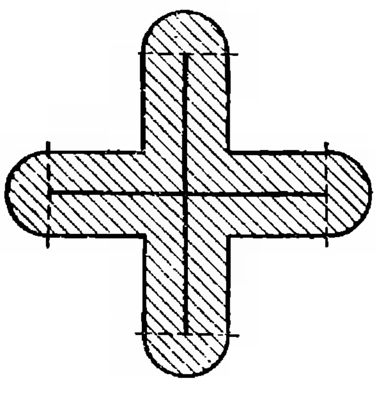


Рис. 158

14.8. Сектор с углом, меньшим развернутого, есть пересечение параллелограмма и круга.

14.9. Полукруг есть пересечение круга и окрестности отрезка.

14.10. Если длина веревки, которой привязана коза, достаточно велика, участок имеет тот же вид, что и окрестность креста в задаче 14.6. Что будет при малой длине веревки?

14.11. Воспользуйтесь тем, что разность сегмента круга и окрестности его границы тоже сегмент, и подберите параметры сегмента.

14.12. Полумесяц можно «зажать» между двумя кольцами (считаем, что собаки сторожат козу, а не дерутся между собой). Способ удержания в кресте следует из задачи 14.13.

14.13. Поместим данный многоугольник внутрь некоторого прямоугольника. Продолжая стороны многоугольника, разобьем разность прямоугольника и данного многоугольника на некоторое количество выпуклых многоугольников. В каждый из них посадим собаку — мы можем ограничить свободу ее передвижения соответствующим многоугольником точно таким же способом, как ограничивали козу (см. задачу 14.5), только используя цепи вместо веревок. И собаки удержат козу в данном многоугольнике.

Описанный способ общий. В частных случаях можно существенно сократить число собак.

Тема 15. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Учебно-воспитательные цели. Каждый участник математического кружка должен обладать арсеналом методов решения задач. В этот арсенал входят, например, метод математической индукции, метод координат, арифметика остатков, «принцип перемножения» в комбинаторике... При решении многих задач используются сходные между собой приемы рассуждений, получившие название «принципа Дирихле» (или «принципа выдвижных ящиков»), по имени известного немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле (1805—1859), применявшего подобные приемы рассуждений в своих математических работах. Название «принцип выдвижных ящиков» объясняется следующей формулировкой основного утверждения: «Если в n ящиках имеется не меньше, чем $n+1$ вещь, то, открывая эти ящики, мы хотя бы в одном обнаружим не меньше двух вещей».

Целесообразно выделить принцип Дирихле в особую тему и специально учить школьников умению применять его при решении задач. Кроме того, задачи на принцип Дирихле воспитывают у учащихся умение устанавливать соответствие между элементами двух множеств.

Методические замечания. Тема представляет собой примерный текст выступлений руководителя кружка на занятиях. Задачи, решения которых не приводятся в основном тексте, предназначены для самостоятельной работы в классе и для домашних заданий. Целесообразно посвятить принципу Дирихле два занятия (задачи 15.1—15.15 и 15.16—15.29 соответственно), которые могут быть разделены занятиями на другие темы. «Дополнительные задачи» даются в течение учебного года, обеспечивая непрерывное повторение.

В некоторых задачах второй части темы используются теорема Пифагора, теорема об объемлющей ломаной и т. д. Руководитель кружка вправе сообщить необходимые сведения без доказательства (и тем самым «подогреть» интерес к курсу математики в более старших классах).

Решения

15.2. На 13 «клеток» — для сделавших 0 ошибок, 1 ошибку, ..., 12 ошибок, — приходится 40 учеников. Если бы в каждой «клетке» было не более трех учеников, их всего было бы не более $3 \times 13 = 39$.

15.3. Построим 100 001 «клетку» для тех, у кого на голове нет волос вообще (0 волос), для тех, у кого на голове ровно 1 волос, ровно 2 волоса, ..., ровно 100 000 волос. Распределим население города по «клеткам» (мысленно, разумеется). Если бы в каждой «клетке» находилось не более 80 человек, то всего в городе было бы не более $80 \times 100\,001 = 8\,000\,080$ человек. Ясно, что утверждение задачи можно усилить — есть по крайней мере 82 человека с одинаковым числом волос на голове.

15.4. Оценим сначала число секунд за 100 лет. В соответствии с ныне действующим календарем за 100 лет бывает 24 високосных и 76 простых лет (год, оканчивающийся на 00, считается простым). Впрочем, для наших целей достаточно знать, что в каждом из них менее 370 дней. А за 100 лет пройдет меньше чем 37 000 дней. В минуте 60 с, в часе 60 мин, значит, в часе $60 \times 60 = 3600$ с. В сутках 24 ч, или $3600 \times 24 = 86\,400$ с. Значит, в сутках меньше 90 000 с, а за 100 лет пройдет меньше $90\,000 \times 37\,000 = 3\,330\,000\,000$ с, т. е. 3,33 миллиарда с. Из условия следует, что не старше 100 лет по крайней мере 99% населения Земли, т. е. по крайней мере $4 \times 0{,}99 = 3{,}96$ миллиарда людей. Для завершения доказательства достаточно сослаться на принцип Дирихле.

15.5. Эта задача, приведенная А. Н. Колмогоровым в брошюре «О профессии математика» (М., Изд-во МГУ, 1959, с. 11), решается мгновенно по принципу Дирихле.

15.7. Строим n клеток: для имеющих 0 знакомых, для имеющих одного знакомого, для имеющих 2 знакомых, ..., для имеющих $n - 1$ знакомого. Как и в задаче 15.6, замечаем, что в клетках для имеющих 0 знакомых и для имеющих $n - 1$ знакомых не могут одновременно находиться люди. В каждом из двух случаев — клетка 0 пуста или клетка $n - 1$ пуста — на $n - 1$ клетку приходится n человек. Остается сослаться на принцип Дирихле.

15.8. Построим десять клеток: для команд, сыгравших к рассматриваемому моменту состязаний 0 матчей; для сыгравших ровно 1 матч; для сыгравших 2 матча; ...; для сыгравших 9 матчей (максимально возможное число матчей). Заметим, что не может быть, чтобы в один и тот же момент одна из команд не сыграла еще ни одного матча в первенстве, а другая сыграла 9 матчей, т. е. встречалась со всеми. Как и в предыдущей задаче, получаем, что либо клетка 0 пуста, либо клетка 9 пуста. В обоих случаях на 9 оставшихся клеток приходится 10 команд. Остается сослаться на принцип Дирихле.

15.9. У нас имеется 10 сумм и 10 возможностей для последней цифры числа. Проведем доказательство от противного. Утверждение задачи не выполнено тогда и только тогда, когда среди последних цифр сумм встречаются в с е десять цифр 0, 1, 2, ..., 9 (иначе по принципу Дирихле по крайней мере две суммы оканчиваются одной и той же цифрой). Значит, из невыполнения утверждения задачи следует, что сумма всех десяти сумм оканчивается той же цифрой, что и сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 = 45$ (ведь на последнюю цифру суммы влияют только последние цифры слагаемых). Однако, чтобы получить сумму всех сумм, достаточно сложить сумму чисел от 1 до 10, которые мы расставляли, и сумму номеров мест чисел, т. е. опять сумму чисел от 1 до 10. Значит, сумма всех сумм равна $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 + 10) = 2 \times 55 = 110$ и оканчивается на 0, а не на 5. Противоречие.

15.11. Т е о р е м а. *Пусть n — натуральное число. Из любых $n + 1$ натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При делении на n получается один из n остатков: $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Нам же дано $n + 1$ чисел, и по принципу Дирихле остатки от деления на n у каких-то двух из них совпадают. Разность этих двух чисел делится на n.

15.13. Рассмотрим числа 5, 1, 5, 1, 5. Каждая сумма нескольких рядом стоящих чисел содержит наряду с пятерками либо одну, либо две единицы и потому не делится на 5.

15.14. Как доказательство теоремы в задаче 15.11 почти буквально повторяет решение задачи 15.10 (единственное изменение — замена 11 на n и 12 на $n + 1$), так решение задачи 15.14 повторяет решение задачи 15.12 (с заменой 5 на n).

15.15. Построим 51 «клетку»: «клетка» 0 — для чисел, оканчивающихся на 00; «клетка» 1 — для чисел, оканчивающихся на 01 или 99; «клетка» 2 — для оканчивающихся на 02 или 98; ...; «клетка» 49 — для оканчивающихся на 49 или 51; «клетка» 50 — на 50. Какие-то два числа из 52 данных попадут по принципу Дирихле в одну клетку. Тогда либо их разность (если они оканчиваются одинаково), либо их сумма (в противном случае) оканчивается на 00. Среди 51 числа такой пары может и не быть — пример: 1, 2, 3, ..., 49, 50, 100.

15.17. В задаче 15.16 доказано существование квадрата со стороной 0,2 м, внутри которого лежат по крайней мере 3 точки из 51. Опишем вокруг этого квадрата окружность. Ее диаметр равен диагонали квадрата. По теореме Пифагора квадрат длины диагонали квадрата равен удвоенному квадрату длины стороны, т. е. равен $2 \times 0{,}04 = 0{,}08$ (м²). Квадрат длины диаметра круга, которым мы хотим накрыть 3 точки, равен $\frac{2^2}{7^2} = \frac{4}{49}$, т. е. больше $\frac{4}{50} = 0{,}08$. Следовательно, круг радиуса $\frac{1}{7}$ м с центром в центре рассматриваемого квадрата содержит по крайней мере 3 точки.

15.18. Разобьем квадрат на 50 равных прямоугольников площади $\frac{1}{50}$, например, со сторонами 0,2 м и 0,1 м. По принципу Дирихле, как легко видеть, в какой-то из этих прямоугольников попадет не менее 3 точек из 101 (внутрь или на границу). Докажем, что треугольник с вершинами в трех из этих точек имеет площадь не более половины площади прямоугольника, т. е. не более $\frac{1}{100}$. Более того, докажем теорему.

Теорема. *Пусть вершины треугольника находятся внутри или на границе прямоугольника. Тогда площадь треугольника не превосходит половины площади прямоугольника.*

Доказательство. Если одна сторона треугольника лежит на стороне прямоугольника, то длина этой стороны не превосходит длины соответствующей стороны прямоугольника, а высота, опущенная на рассматриваемую сторону, не превосходит второй стороны прямоугольника. Следовательно, площадь треугольника не превосходит половины произведения сторон прямоугольника, т. е. половины площади прямоугольника.

Чтобы свести общий случай к рассмотренному, проведем через вершины треугольника прямые, параллельные одной из сторон прямоугольника. Та из них, что лежит между двумя другими, делит прямоугольник на два новых прямоугольника, а треугольник — на два новых треугольника, одна из сторон которых лежит на стороне соответствующего (содержащего этот треугольник) прямоугольника. Следовательно, площадь каждого из построенных треугольников не превосходит половины площади содержащего его прямоугольника. Поскольку площадь объединения многоугольников, не имеющих общих внутренних точек, равна сумме площадей объединяемых многоугольников, то требуемое неравенство верно и для исходных фигур. Теорема доказана.

15.19. Граница квадрата длиной 4 содержит внутри себя границу выпуклого многоугольника. Поскольку длина объемлющей ломаной больше длины объемлемой, то периметр многоугольника меньше 4. Вершины выпуклого многоугольника обозначим $A_1, A_2, A_3, \ldots, \ldots, A_{100}$ (предполагаем, что вершины, номера которых отличаются на 1, а также вершины A_1 и A_{100} соединены сторонами). Рассмотрим числа $|A_1A_2| + |A_2A_3|$, $|A_2A_3| + |A_3A_4|$, $|A_3A_4| + |A_4A_5|$, $\ldots, \ldots$, $|A_{99}A_{100}| + |A_{100}A_1|$, $|A_{100}A_1| + |A_1A_2|$. Сумма этих 100 чисел равна удвоенному периметру, следовательно, не превосходит 8. По принципу Дирихле существует n такое, что $|A_nA_{n+1}|+|A_{n+1}A_{n+2}|$ не превосходит 0,08. Покажем, что точки A_n, A_{n+1}, A_{n+2} образуют треугольник, площадь которого не превосходит 0,0008.

Отметим прежде всего, что площадь треугольника не превосходит половины произведения его сторон. Действительно, площадь равна половине произведения основания на высоту, а высота не длиннее стороны, с которой она имеет общую вершину (из каковой и опускается высота). Значит, площадь треугольника $A_nA_{n+1}A_{n+2}$

не превосходит $\frac{1}{2}ab$, где $a = |A_nA_{n+1}|$, $b = |A_{n+1}A_{n+2}|$, $a + b$ не превосходит 0,08.

Нам понадобится неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, точнее, то, что ab не превосходит $(a+b)^2:4$.

Из этого неравенства следует, что площадь рассматриваемого треугольника не превосходит $\frac{0,08^2}{8} = 0,0008$, что и требовалось доказать.

15.20. В квадрате со стороной длиной 1 взята произвольно $2n + 1$ точка (не обязательно внутри квадрата, возможно, часть на сторонах), причем никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $\frac{1}{2n}$.

В квадрате со стороной 1 содержится выпуклый n-угольник. Докажите, что существует треугольник с вершинами в вершинах этого n-угольника, площадь которого не больше $\frac{8}{n^2}$.

Доказательства только что сформулированных утверждений отличаются от решений задач 15.18 и 15.19 только лишь заменой конкретных чисел на n (прямоугольники в аналоге задачи 15.18 можно брать со сторонами $\frac{1}{n}$ и 1).

15.22. Спроектируем окружности на сторону BC квадрата. Проекция окружности — отрезок, длина которого равна диаметру. Сумма диаметров равна 1,2 м. Следовательно, найдется точка, принадлежащая по крайней мере двум проекциям окружностей (принцип Дирихле!). Параллельная AB прямая, проходящая через эту точку, имеет непустое пересечение по крайней мере с двумя окружностями.

15.23. Расположим мысленно в ряд листья по величине отбрасываемой ими на землю тени. Для этого сначала необходимо установить, какую часть тени отнести за счет данного листа: ведь тени частично перекрываются. Мы будем действовать так. Присвоим листьям номера. Первому листу поставим в соответствие всю его тень (т. е. тень, которую он отбрасывал бы, оставшись на дереве в одиночестве). Второму листу поставим в соответствие множество, являющееся разностью между его собственной тенью и тенью, отнесенной к первому листу. Вообще, n-му листу поставим в соответствие разность между его собственной тенью (т. е. тенью, которую он отбрасывал бы, оставшись на дереве в одиночестве) и объединением теней, приписанных 1-му, 2-му, ..., $(n-1)$-му листу. Возможно, некоторым листьям будет поставлено в соответствие пустое множество (площадь которого, естественно, равна нулю). По величине площади приписанной каждому листу тени и упорядочим листья. А затем оборвем 8/15 из них, начиная с «наименее теневого» конца ряда. Оставшиеся 7/15 листьев дадут не менее 7/15 тени. Действительно, предположим противное, тогда все оставшиеся листья отбрасывают менее 7/15 тени, и последний необорванный лист тоже менее $7/15 : 7\,m/15 = 1/m$ тени по площади (здесь m — общее число листьев). Поскольку оборванные листья дают не больше тени, чем последний из необорванных, то все оборванные листья вместе занимают менее 8/15 тени. Значит, все листья вместе отбрасывают менее $7/15 + 8/15 = 1$ всей тени, что противоречит условию. (См. также задачи 15.30, 15.31.)

15.24. Центр клумбы должен находиться на расстоянии не меньшем, чем 5 м, от строений и забора. Часть двора, где не может находиться центр клумбы, назовем запретной зоной. Оценим площадь запретной зоны. Для этого найдем площадь окрестностей радиуса 5 м строений во дворе и площадь окрестности забора, пересеченной со двором. (Понятие «окрестность фигуры» введено и изучено в теме 14 «Коза на привязи».) Площадь запретной зоны, порождаемой забором, равна 2500 м^2. Запретная зона, порождаемая бензохранилищем, — круг радиуса 15 м. Площадь этого круга меньше $15^2 \times 4 = 900$ м^2. Площадь запретной зоны, порождаемой цехом или складом, т. е. площадь окрестности радиуса 5 м прямоугольников, считается по формулам, выведенным в теме «Коза на привязи» (задача 14.7). Легко установить, что площадь зоны, порождаемой складом, меньше 900 м^2, а площадь запретной зоны, порождаемой цехом, меньше 1000 м^2. Площадь всей запретной зоны не превосходит суммы площадей запретных зон, порождаемых забором и строениями (она будет меньше, если некоторые строения расположены ближе чем в 10 м друг от друга или от забора). Значит, эта площадь меньше $2500 + 900 + 10 \times 900 + 4 \times 1000 = 16\,400$ м^2. А площадь двора — 16 500 м^2. Остается участок (или участки) площадью больше 100 м^2, в каждой точке которого можно расположить центр клумбы. Здесь используется следующий вариант принципа Дирихле: если сумма площадей фигур меньше площади двора, то найдется точка двора, не принадлежащая ни одной из фигур.

15.26. Решается аналогично задаче 15.25, в которой $n = 4$. Необходимо рассмотреть $10^{2n} + 1$ пар остатков, а не $100\,000\,001 = 10^8 + 1$.

15.27—28. Задача 15.27 является частным случаем задачи **15.28** (при $A = 29$, $n = 5$). По принципу Дирихле остатки от деления степеней A на 10^n рано или поздно повторятся, т. е. существуют p и k — натуральные числа такие, что p больше k, при которых совпадают остатки от деления A^p и A^k на 10^n (достаточно рассмотреть $A, A^2, A^3, \ldots, A^{10n+1}$). Поскольку A и 10^n взаимно просты, то A^{p-1} и A^{k-1} также имеют одинаковые остатки. Доказать последнее утверждение можно с помощью методов, развитых в теме «Арифметика остатков». Именно, пусть a — остаток от деления A^{p-1} на 10^n, b — остаток от деления A^{k-1} на 10^n. Тогда aA при делении на 10^n дает тот же остаток, что и A^p, а bA — тот же остаток, что и A^k.

Поскольку A^p и A^k дают один и тот же остаток, то $A^p - A^k$ делятся на 10^n. Следовательно, $aA - bA = (a - b)A$ делится на 10^n. Поскольку A взаимно просто с 10^n, то $(a - b)$ делится на 10^n. Поскольку $(a - b)$ не превосходит по абсолютной величине $10^n - 1$, то $a = b$, что и требовалось доказать. Аналогично получаем, что A^{p-2} и A^{k-2} имеют одинаковые остатки, A^{p-3} и A^{k-3} имеют одинаковые остатки, ..., A^{p-k+1} и A имеют одинаковые остатки, A^{p-k} и $A^0 = 1$ имеют одинаковые остатки. Требуемое доказано.

15.29. Рассмотрим ряд 1, 11, 111, 1111, ... По принципу Дирихле найдутся два числа из этого ряда, дающие одинаковый остаток при делении на 1984. Остается из большего вычесть меньшее.

15.30. Расположим жильцов по возрасту и возьмем сто самых старших. Как и при решении задачи 15.23, возраст самого молодого из этой сотни не меньше, чем возраст тех, кого не включили в сотню. Предположим, что сумма возрастов отобранной сотни меньше 3100 лет. Тогда возраст самого молодого из них меньше $3100 : 100 = 31$ года. Следовательно, возраст каждого из не вошедших в сотню старших тоже меньше 31 года. Значит, сумма возрастов жильцов, не вошедших в сотню, меньше $31 \times 23 = 713$ лет, а сумма возрастов всех жильцов меньше $3100+713 = 3813$ лет, что противоречит условию задачи. Отметим также, что сумма возрастов старейших равна 3100 годам тогда и только тогда, когда все жильцы имеют один и тот же возраст — 31 год.

15.31. Решается аналогично задачам 15.23, 15.30. Если все углы одинаковы, то каждый из них равен $\frac{180}{7}$ (градуса), это число больше 25 и меньше 26 (расчет проведите сами). Поэтому наименьший угол не больше $\frac{180}{7}$ (градуса). Но нельзя утверждать, что он не больше 25°.

15.32. Сколько орехов надо раздать, чтобы ни у каких двух мальчиков не было поровну орехов? Один из способов раздачи: первому мальчику не дать орехов, второму — один орех, третьему — два, ..., двадцать первому — двадцать. При этом нужно иметь 210 орехов. Докажите, что при любом другом способе раздачи нужно еще больше орехов.

15.33. Расположим отрезки по величине: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_7$. Докажите, что из отрезков $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$ можно составить треугольник тогда и только тогда, когда $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$. Предположим, утверждение задачи неверно. Значит, $a_k + a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Докажите, что длина a_7 будет наименьшей, если $a_1 = a_2 = 10$ см, $a_{k+2} = a_k + a_{k+1}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Но даже в этом случае $a_7 = 130$ см. Противоречие.

15.34. Ровно 100 нечетных чисел меньше 200. Для каждого числа a «кустом a» назовем совокупность чисел a, $2a$, $4a$, $8a$, $16a$, ... Каждый член рассматриваемого ряда попадает в один из «кустов» нечетных чисел, меньших четного числа 200. Ясно, что из двух чисел «куста» одно делится на другое. Остается применить принцип Дирихле.

15.35. Рассмотрим любые 986 чисел, удовлетворяющих условиям задачи. Пусть a — наибольшее из этих чисел. Рассмотрим разности между числом a и всеми остальными выбранными числами. Таких разностей 985, все они различны и не превосходят 1969. Так как сумма числа выбранных чисел и числа разностей равна 1971, а это больше, чем 1969, то найдется такая разность $a - b$, которая совпадает с одним из выбранных чисел, которое обозначим c ($b \neq c$, поскольку a нечетно). Нами среди выбранных 986 чисел найдены три числа a, b, c такие, что $b + c = a$, что и требовалось доказать. Утверждение задачи становится неверным, если 986 в условии заменить на 985. Достаточно выбрать все нечетные числа, не превосходящие 1969; их как раз 985, а сумма двух любых нечетных чисел есть число четное.

15.36. а) От клетки, где стоит 1, до клетки, где стоит 100, можно добраться, «перешагнув» не больше чем 18 раз: 9 раз — по вертикали, 9 — по горизонтали, из клетки в соседнюю (имеющую с ней общую сторону). За 18 шагов число в клетке увеличивается на 99, поэтому по принципу Дирихле на каком-то шаге оно увеличивается не менее чем на $\frac{99}{18} = 5{,}5$. Поскольку в клетках стоят натуральные числа, то при каком-то шаге разность между числами, стоящими в соседних клетках, равна по крайней мере 6.

б) Опять рассмотрим клетки, в которых стоят 1 и n^2. От одной из них до второй можно добраться, «перешагнув» не более чем $2n - 2$ раза из клетки в соседнюю. За $2n - 2$ шагов число увеличивается на $n^2 - 1$, значит, на каком-то шаге — не менее чем на $(n^2 - 1)$: $:\{2(n-1)\} = \frac{n+1}{2}$. При n, большем 10, $\frac{n+1}{2}$ больше 5, что и доказывает требуемое.

в) При переходе от клетки с 1 к клетке с 81 число увеличивается на 80. Если на переход нужно не больше 15 шагов, то на каком-то шаге по принципу Дирихле число увеличивается не менее чем на $80 : 15 = 5{,}33\ldots$, значит, по крайней мере на 6, так что рассматриваемое утверждение справедливо.

Остается рассмотреть случай, когда на переход нужно ровно 16 шагов. Это возможно только в случае, когда клетки с 1 и 81 занимают диаметрально противоположные углы таблицы. В среднем на переходе в соседнюю клетку число увеличивается на $80 : 16 = 5$. Если хотя бы раз число увеличилось менее чем на 5, то на остальные 15 шагов приходится по крайней мере 76 единиц увеличения и на какой-то из этих шагов не менее $76 : 15 = 5{,}06\ldots$, т. е. не менее 6, ибо в клетках натуральные числа.

Значит, если утверждение задачи неверно, то на каждом шагу увеличение ровно на 5, т. е. числа при переходе от 1 к 81 идут так: 6, 11, 16, ... Однако от клетки в одном углу к клетке в диаметрально противоположном идет много различных путей из 16 шагов!

И на каждом из них числа должны встречаться в только что указанном порядке.

Ясно, что это невозможно и предположение о неверности утверждения задачи привело к абсурду.

При $n = 5$ числа в таблице расставим естественным образом: в первой строке — 1, 2, 3, 4, 5, во второй — 6, 7, 8, 9, 10 и т. д. Максимальная разность равна 5. Утверждение опровергнуто.

Утверждение справедливо при $n = 6, 7, 8$. Более того, справедлив следующий результат: «В таблице $n \times n$ произвольно расставлены числа 1, 2, ..., n^2. Тогда найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше n (мы называем два числа соседними, если клетки таблицы, в которых они стоят, имеют общую сторону)».

Доказательству этого утверждения посвящена одна из многих статей, например опубликованная в журнале «Квант» (1971, № 12, с. 24—27).

Тема 16. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Учебно-воспитательные цели. Главная учебно-воспитательная цель настоящей темы — показать роль понятия параллельности в построении курса геометрии. Вместе с тем эта тема связана с целой эпохой в развитии математики. Поэтому другой важной учебно-воспитательной целью этой темы является показ эволюции развития геометрической науки, показ роли великих ученых Гаусса, Бойяи, Лобачевского.

Методические указания. Приступая к рассмотрению этой темы, учитель должен вооружить себя необходимыми знаниями по истории рассматриваемого вопроса. Очень желательно, чтобы разбор задач перемежался интересными фактами из жизни математиков, посвятивших свою научную деятельность изучению данного вопроса. В имеющейся литературе довольно широко представлен материал по проблеме «пятого постулата», по геометрии Лобачевского и т. д.

В нашей разработке полностью отсутствует материал, связанный с геометрией Лобачевского, так что в этом плане следует ограничиться общими замечаниями. Остановимся кратко на основных этапах в историческом развитии данного вопроса.

Попытки создания стройного курса геометрии относятся еще к V—IV вв. до нашей эры. Такие ученые, как Гиппократ и др., пытались выводить все геометрические факты из небольшого числа аксиом. Эти попытки были завершены появлением замечательного труда греческого ученого Евклида «Начала» около 300 г. до нашей эры. Введенные в «Началах» постулаты заканчивались «пятым постулатом», который у Евклида формулировался так:

Если прямая на плоскости, пересекающая два данных прямолинейных отрезка, образует с ними внутренние односторонние углы, *сумма которых меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих отрезков они пересекутся (и притом по ту же сторону, где лежат эти углы).*

Формулировка этого постулата в виде нашей аксиомы параллельных была предложена лишь две тысячи лет спустя английским математиком Плейфером.

По поводу пятого постулата в течение многих веков велись многочисленные дискуссии. Мнение многих ученых тех веков сводилось к тому, что этот постулат может быть доказан и что Евклид просто не сумел его доказать, поэтому следует п о п ы т а т ь с я его доказать.

Доказательством пятого постулата занимались крупнейшие математики прошлых веков, но удивительным было то обстоятельство, что каждый раз их «доказательства» содержали какую-нибудь ошибку.

И вот, наконец, 24 февраля 1826 г. в Казанском университете был прочитан доклад Николаем Ивановичем Лобачевским. Основное содержание его заключалось в том, что пятый постулат вообще не может быть доказан на основании других аксиом и постулатов. Иначе говоря, пятый постулат н е з а в и с и м от других аксиом геометрии.

Рассмотрим некоторые методические замечания по поводу расположения и содержания задач.

Первые задачи вводят учащихся в круг вопросов, связанных с расположением прямых на плоскости.

Рассматривая всевозможные случаи расположения прямых, учащиеся выделяют среди них параллельные прямые. Одновременно эти задачи носят комбинаторный характер, что способствует общему математическому развитию. При решении задачи 16.3 в явном виде используется аксиома параллельных, а при решении задачи 16.4 утверждение, эквивалентное аксиоме параллельных. Об утверждениях, эквивалентных аксиоме параллельных, можно посмотреть в методическом пособии по геометрии[1].

После решения задач на расположение прямых на плоскости мы переходим к задачам, связанным с использованием параллельности при изучении свойств четырехугольников, это задачи 16.6—16.11. Все остальные задачи решаются с использованием параллельного переноса.

Решения

16.2. Точек пересечения может не быть, может быть одна или любое количество от 6 до 21. Приводим пример с 8 точками пересечения: 6 прямых, идущих по сторонам и диагоналям трапеции, и еще одна прямая, параллельная основаниям и проходящая через точку пересечения диагоналей (рис. 159). Остальные примеры найдите сами.

[1] См.: Л а п т е в Б. Л. Н. И. Лобачевский и его геометрия. — М.: Просвещение, 1976.

16.5. Допустим, что не все прямые проходят через точку O, являющуюся точкой пересечения некоторых двух прямых (рис. 159). Пусть, например, прямая l через O не проходит. Среди точек пересечения прямых, не лежащих на l, выберем ближайшую к l точку, обозначим ее A (рис. 160). По условию через нее проходят по крайней мере три прямые. Пусть эти прямые пересекают l в точках B, C и D, причем C лежит между B и D. Через точку C, кроме l и AC, должна проходить еще одна прямая. Эта прямая пересечет еще одну сторону треугольника ABD в точке E, которая ближе к l, чем A. Но мы предположили, что точка A — ближайшая к l точка пересечения. Противоречие.

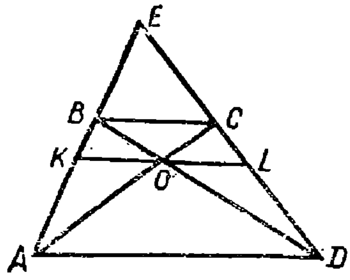


Рис. 159

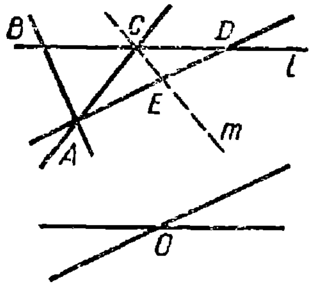


Рис. 160

16.6. Указание. Достройте $\triangle ABC$ до параллелограмма и докажите, что $2m_a < b + c$.

16.7. Докажите, что если на продолжении отрезка AK, где K — середина отрезка EF, отложить отрезок KC такой, что $KC = \frac{1}{3}AK$, то получится вершина C параллелограмма. Затем находятся вершины B и D (см. рис. 161).

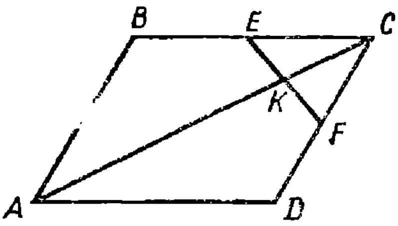


Рис. 161

16.8. Указание. Воспользоваться свойством медиан треугольника.

16.9. Указание. Пусть K — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, а M — точка пересечения медиан. Докажите, что площади треугольников AKC и AMC равны $1/3$ площади треугольника ABC. Для этого воспользуйтесь тем, что площадь треугольника выражается через периметр и радиус вписанной окружности, а длина стороны AC равна $1/3$ периметра треугольника ABC (последнее легко вывести из условия).

16.10. Указание. Проведите через точку P отрезок $A'B'$, равный и параллельный AB (рис. 162). Приложите параллелограмм $AA'B'B$ к стороне CD так, чтобы точка A совпала с C, а точка B с D.

16.11. Указание. Докажите предварительно следующее утверждение. Отрезки, соединяющие середины последовательных сторон произвольного четырехугольника, образуют параллелограмм. Применив это правило к четырехугольнику $BCDE$ (см. рис. 163), покажите, что HK — средняя линия треугольника MPL, где L — середина отрезка BE. Таким образом, отрезки AE, ML и HK параллельны и $AE = 2MA = 4HK$.

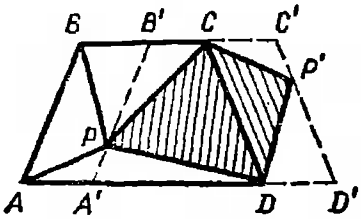


Рис. 162

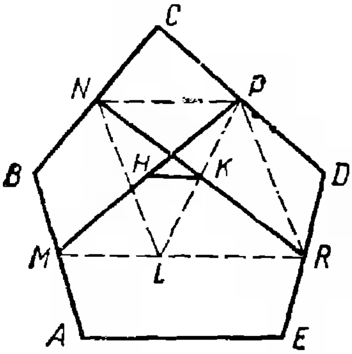


Рис. 163

16.13. Указание. Докажите, что если a, b и c — числа отражений луча от трех сторон треугольника, то справедливо неравенство $c-1 < a+b < 3c+3$.

Числа x и y могут принимать любые значения при условии, что тройка чисел x, y и 4 удовлетворяет данному неравенству. (Проверить это!)

16.14. Указание. Перенесите боковую сторону параллельно самой себе в направлении луча AB на расстояние, равное длине меньшего основания.

16.18. Указание. Сторону угла, на которой лежит точка M, перенесите в направлении другой стороны так, чтобы она пересекала эту сторону в доступной точке.

16.19. Перенесите одну из прямых a или b параллельно третьей прямой на расстояние, равное длине данного отрезка.

Тема 17. КОМБИНАТОРИКА

Учебно-воспитательные цели. В последние годы необычайно возросла роль комбинаторных методов не только в самой математике, но и в ее многочисленных приложениях: в физике, химии, биологии, лингвистике, технике, экономике. Расчет вероятностей во многих случаях приводит к комбинаторным задачам. Поэтому важно как можно раньше начать знакомить учащихся с комбинаторными методами и комбинаторным подходом.

Введение элементов комбинаторики в младших классах — важнейшая учебно-методическая задача. Изучение этой темы способствует развитию у учащихся «комбинаторного» мышления, расширению их математического кругозора, облегчает усвоение в дальнейшем элементов теории вероятностей. Целью занятий является также ознакомление учащихся с основными понятиями и основными формулами комбинаторики, применяемыми в вероятностных расчетах.

Методические замечания. Как показывает опыт преподавания элементов комбинаторики на кружковых занятиях учащихся VI—VIII классов, часть школьников воспринимает эту тему, особенно на первых порах, с некоторым трудом. Связано это с тем, что здесь применяются новые, поначалу непривычные соображения и рассуждения, да и не все в равной мере обладают «комбинаторными» способностями, склонностью к «комбинаторному» типу мышления. Но, разумеется, упражнениями можно развить «комбинаторное» мышление почти у каждого учащегося, у одних легче, у других труднее. Вот почему приходится обращать особое внимание на методику проведения занятий. Чтобы не «засушить» тему, приходится демонстрировать комбинаторные методы на большом количестве простых и конкретных примеров, продвигаясь вперед осторожно и постепенно. Центральный пункт рассуждений — правило перемножения возможностей. Не следует переходить к введению понятий «размещения» и «перестановки», пока это правило не усвоено всеми учащимися. Правило перемножения возможностей можно проиллюстрировать на таком простом примере:

«У каждой обезьяны 4 лапы, на каждой лапе по 5 пальцев. В стае 20 обезьян. Сколько у них пальцев?»

Ответ прост: у двадцати обезьян $20 \times 4 = 80$ лап и $20 \times \times 4 \times 5 = 400$ пальцев. Но можно рассуждать и по-другому. Палец на лапе можно выбрать пятью способами — любой из пяти; одну лапу из четырех можно выбрать четырьмя способами и одну обезьяну из двадцати можно выбрать тоже двадцатью способами. Умножая, получим $20 \times 4 \times 5$, опять 400, и это не случайно: ведь мы можем сначала выбрать обезьяну одним способом из двадцати, а затем уже выбирать одну из четырех ее лап. Комбинируя любой способ выбора обезьяны с любым способом выбора лапы, получаем $20 \times 4 = 80$ способов выбрать лапу, соответственно общему числу лап. Комбинируя один из восьмидесяти способов выбора лапы с любым из пяти способов выбора пальца, получим $80 \times 5 = 400$ способов, соответственно числу пальцев.

Решения

17.7. Занумеруем места за столом последовательно числами от 1 до 10. Допустим, что юноши сидят на нечетных местах, а девушки — на четных. Существует $P_5 = 5! = 120$ способов рассадить юношей на нечетных местах (см. задачу 17.6) и столько же способов размещения пяти девушек на четных местах. Каждый способ размещения юношей можно скомбинировать с любым способом размещения девушек, поэтому получаем всего («правило перемножения возможностей»!) $120 \times 120 = 14\,400$ способов размещения. Столько же существует способов размещения в случае, когда юноши сидят на четных местах. Всего получается 28 800 способов.

17.8а. Ответ: $A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ сообщений.

17.8б. Первый способ. Располагая синий флажок сверху, а три из оставшихся четырех на остальных местах, получим $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ сообщения. Точно так же, располагая синий флажок на втором, третьем или четвертом месте сверху, получим еще 3×24, а всего $4 \times 24 = 96$ сообщений.

Второй способ. Число сообщений, не использующих синий флажок, равно числу перестановок четырех остальных флажков на четырех местах, т. е. $P_4 = 4! = 24$ сообщения. В остальных $120 - 24 = 96$ сообщениях синий флажок используется.

Использованный здесь принцип часто применяется в вероятностных расчетах и называется «переход к противоположному событию».

17.9. Применяя «правило перемножения возможностей», получим $20 \times 10 \times 20 \times 10 \times 20 = 800\,000$ «слов».

17.10. Первый способ. Если место девятки зафиксировать, скажем, ставить девятку на первое место, то получим $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$ набора из четырех цифр (так как существует 9 цифр, отличных от девятки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). Так как девятку можно зафиксировать на любом из четырех мест, то всего получим $504 \times 4 = 2016$ наборов.

Второй способ. Общее число наборов из четырех цифр равно $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$, а наборов, в которых нет девятки, существует $A_9^4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$. Значит, в $5040 - 3024 = 2016$ наборах девятка имеется (сравните с решением задачи 17.8б).

Тема 18. ПОИСК ПРЕДМЕТА

Учебно-воспитательные цели. За внешне несерьезными формулировками задач скрываются идеи, приводящие к большим и бурно развивающимся разделам современной математики — теории информации, теории планирования эксперимента. Отгадывание номера телефона — на самом деле поиск способа кодирования информации, требующего наименьшего времени для передачи по каналу связи с сигналами двух типов, соответствующих ответам «да» и «нет». Подчеркивается также, что математические задачи возникают при обдумывании явлений реального мира. Учащиеся знакомятся с недесятичными позиционными системами счисления, прежде всего с двоичной.

Методические замечания. Занятия кружка стоит начать с рассказа Люси, который может прочитать учитель, или он может быть инсценирован подготовленными заранее участниками кружка. Рассказ заинтересовывает школьников и показывает им, что найти оптимальный способ задавания вопросов не так-то просто.

Вслед за первой задачей полезно разобрать задачу 18.2, решение которой не даст закрепиться стереотипу «дели число возможностей на два» как недостаточно гибкому. Задача 18.4 — упражнение, которое можно решать устно. Задачи 18.6, 18.7, 18.10 существенно более трудные. Задача 18.8 стоит несколько в стороне. Задача 18.5 может быть инсценирована на математическом вечере. В математическом кабинете школы в качестве наглядного пособия хорошо иметь рисунок 82. На занятии кружка в роли отгадчика может выступить учитель или один из участников, подготовивший доклад по этой задаче и естественно появляющейся при ее разборе двоичной системе счисления.

Ответы, указания, решения.

18.3. Естественно, надо задавать вопросы так, чтобы каждый последующий вопрос уменьшал вдвое количество «подозрительных» номеров. Так как по условию имеется всего 10^7 вариантов, что больше 2^{23}, но меньше 2, то 24 вопросов хватит, а 23 может и не хватить. Сами вопросы можно задавать по-разному. Например, можно спросить: «Верно ли, что ваш номер не меньше 5 000 000?» Если ответили «да», то следующий вопрос может быть такой: «Не меньше ли он 7 500 000?»

18.4. Естественно, необходимо и достаточно двух взвешиваний, по одному на кучку. В каждом случае на чашки кладутся две монеты одной кучки. Та, чья чашка поднимется, фальшивая. Если чашки в равновесии, то фальшивая — не участвовавшая во взвешивании. Пару фальшивых монет можно выбрать девятью способами, поэтому одним взвешиванием не обойтись.

18.6. Занумеруем монеты числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Среди них есть пара фальшивых монет. Это или пара 1, 2, или пара 1, 3, или 1, 4, или 1, 5, или 1, 6, или 2, 3 и т. д. — всего 15 возможных пар (выпишите их все). Будем записывать слева от тире номера монет на левой чашке, справа — на правой.

Первое взвешивание: 1, 2, 3 — 4, 5, 6, второе — 1, 2, 4 — 3, 5, 6. Если хотя бы при одном взвешивании равновесие нарушилось, то на чашке, которая перевесила, две из трех монет фальшивые, на другой чашке все монеты настоящие. Докажем, что в этом случае для выделения фальшивых монет достаточно еще двух взвешиваний. Пусть, скажем, на чашке, которая перевесила, лежат монеты 1, 2, 3. Из них можно образовать три пары: первая — 1, 2, вторая — 1, 3, третья — 2, 3. Обе монеты одной из этих пар фальшивые. Сравним пары 1, 2 и 1, 3 с «хорошей» парой 5, 6. Если перевесила пара 1, 2, то фальшивые монеты 1 и 2, если же 1, 3 — 1 и 3. Если в обоих случаях равновесие, то фальшивые монеты 2 и 3.

Если при первых двух взвешиваниях (троек монет) равновесие ни разу не нарушалось, то две монеты «фальшивой» пары при обоих взвешиваниях находились на разных чашках весов. Значит, «фальшивыми» могут быть лишь пять пар: первая — 1, 5, вторая — 1, 6, третья — 2, 5, четвертая — 2, 6, пятая — 3, 4. Сравним массу пар 1, 5 и 2, 6, а затем массу пар 1, 6 и 2, 5. Если одна из этих пар перевесит, то она «фальшивая», в случае равновесия при обоих взвешиваниях фальшивые монеты 3 и 4.

18.7. О т в е т: четыре взвешивания (доказать, что трех не хватит, довольно трудно).

18.8. О т в е т: гири массой 1, 3, 9 и 27 кг (попробуйте связать взвешивание с помощью этих гирь с представлением чисел в троичной системе счисления).

18.10. Для решения задачи достаточно 29 вопросов. При этом можно действовать, например, так. Сначала 15 вопросами выясняете 15 из 24 цифр, содержащихся в двоичной записи телефонного номера (вопросы типа: «Верно ли, что на k-м месте в двоичной записи стоит 0?» — если ответ «да», то на этом месте стоит 0; если же «нет», то стоит 1). Затем спрашиваете: «Солгали ли вы в одном из 15 ответов?» Если отвечаю «да», то ложен либо один из 15 ответов, либо последний. Методом «деления пополам» вы четырьмя вопросами узнаете, в каком же из 16 ответов ложь, а затем девятью вопросами выясните оставшиеся цифры. Если же на 16-й вопрос ответил «нет», значит, действительно я ни разу не лгал и полученные вами 15 цифр верные (в противном случае ложь содержалась бы в двух ответах: в одном из первых 15 и в 16-м, а это противоречит условию). Далее спросите про следующие семь цифр и опять зададите вопрос: «Солгали ли вы в одном из последних семи ответов?»

Если ответ «да», то тремя вопросами узнаете, где ложь, и еще двумя — последние две цифры. Если же ответ «нет», то спрашиваете про оставшиеся две цифры и «не лгали ли вы в этих двух ответах». Если ответ (на последний вопрос) «да», то двух вопросов хватит, чтобы узнать, где ложь, если же «нет», то больше вопросов задавать не надо — номер телефона известен полностью.

Тема 19. СИММЕТРИИ И ПОВОРОТЫ

Учебно-воспитательные цели. Решать задачи, а тем более интересные задачи, требующие значительных затрат времени, в решении которых определяющее значение имеют движения, на уроках практически не удается. Вот почему основной целью данной темы является показ той роли, которую движения, в частности симметрии и повороты, играют при решении геометрических задач.

Кроме того, следует иметь в виду, что решение таких задач не самоцель. Во-первых, учащиеся овладевают одним из ведущих методов рассуждений и доказательств в геометрии, а во-вторых, развивают свои представления о геометрии.

19.2. I случай. Точки M и N (рис. 164) лежат по одну сторону от прямой AB (и притом на разных расстояниях от нее). Тогда точка X прямой AB, для которой разность расстояний от точек M и N наибольшая, есть точка пересечения прямой AB с продолжением отрезка MN. Тогда $XM - XN = MN$. Всякая другая точка X_1 прямой AB не обладает этим свойством, так как $X_1M - X_1N < MN$ (неравенство треугольника). Если M и N находятся на одинаковом расстоянии от прямой AB, задача не имеет решения.

II случай. Точки M и N (рис. 165) лежат по разные сторо-

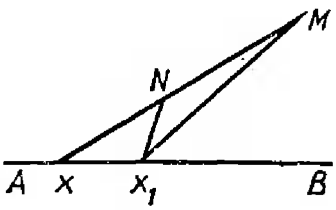


Рис. 164

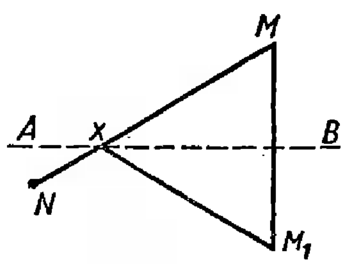


Рис. 165

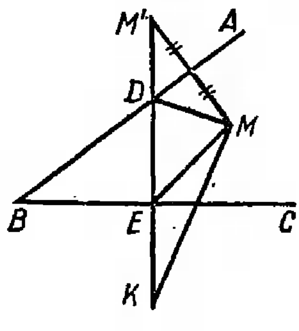


Рис. 166

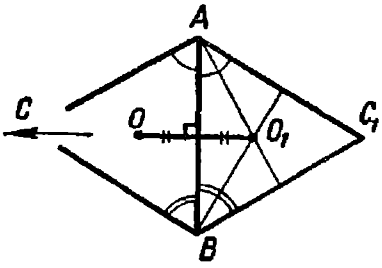


Рис. 167

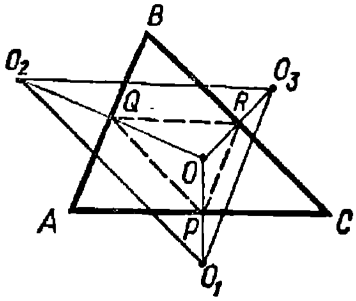


Рис. 168

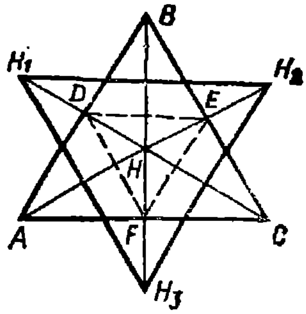


Рис. 169

ны от прямой AB. Тогда искомая точка есть точка пересечения прямой M_1X с прямой AB, где M_1 — точка, симметричная точке M относительно прямой AB.

Если точки M и N находятся по разные стороны от прямой AB и на одинаковом от нее расстоянии, то задача не имеет решений.

19.4. Указание. Смотрите рисунок 166.

19.5. Строим треугольник ABC_1, симметричный треугольнику ABC относительно прямой AB (рис. 167). В треугольнике ABC_1 строим точку пересечения медиан, затем строим точку, ей симметричную относительно прямой AB. Прямая, соединяющая эти две точки, и будет искомой.

19.7. Пусть ABC — искомый треугольник, O_1, O_2, O_3 — точки, симметричные центру описанной вокруг треугольника окружности относительно его сторон (рис. 168). Легко видеть, что перпендикуляры, проведенные через середины сторон треугольника ABC, являются высотами треугольника $O_1O_2O_3$. В самом деле, пусть P, Q, R — середины сторон треугольника ABC; следовательно, $OO_3 \perp PQ$. Но, с другой стороны, $PQ \parallel O_1O_2$, как средняя линия треугольника O_1O_2O; следовательно, $O_3O \perp O_2O_1$. Точно так же доказывается, что $O_2O \perp O_1O_3$ и $O_1O \perp O_2O_3$.

Отсюда вытекает следующее построение.

Проведем высоты треугольника $O_1O_2O_3$ и найдем его ортоцентр (точку пересечения высот) O. Найдем точки P, Q, R — середины отрезков O_1O, O_2O, O_3O; через P проведем прямую параллельно прямой O_2O_3, через Q — параллельно прямой O_1O_3 и через R — параллельно прямой O_2O_1, тем самым мы получим искомый треугольник.

Развитие задачи. Условие задачи то же, но даны точки, симметричные относительно сторон треугольника его ортоцентру.

Решение. Пусть H_1, H_2, H_3 — точки, симметричные ортоцентру H треугольника ABC относительно его сторон (рис. 169). Стороны треугольника $H_1H_2H_3$ параллельны сторонам треугольника DEF, где D, E, F — основания высот искомого треугольника ABC ($DE \parallel H_1H_2$, как средняя линия треугольника HH_1H_2; аналогично $EF \parallel H_2H_3$, $DF \parallel H_1H_3$). Но легко видеть, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника DEF:

из рассмотрения четырехугольника $ADHF$, вокруг которого можно описать окружность, следует: $\angle HFD = \angle HAD$ (как опирающиеся на одну дугу), $\angle HFE = \angle HCE$; $\angle HAD = \angle HCE$ (следует из рассмотрения треугольников HAD и HCE). Биссектрисы же треугольника $H_1H_2H_3$ совпадают с биссектрисами треугольника DEF, т. е. с высотами треугольника ABC.

Отсюда вытекает следующее построение.

Проведем биссектрисы треугольника $H_1H_2H_3$ и через середины отрезков HO, H_2O и H_3O (O — точка пересечения биссектрис) проводим перпендикуляры к ним. Эти перпендикуляры и являются сторонами искомого треугольника.

Примечание 1. На рисунке 169 треугольник ABC остроугольный. Но нетрудно убедиться, что во всех случаях, когда точки H_1, H_2, H_3 все различны, задача имеет четыре решения, одно из которых представляет собой остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H, а три других — тупоугольные треугольники, получаемые из треугольников ABH, BCH и CAH параллельными переносами, переводящими H в C, соответственно в A и в B. Полный разбор этого вопроса мы предоставляем читателю.

Примечание 2. Решения задачи 19.7 и ее второго варианта очень похожи и могут быть записаны едино, если P, Q, R — точки, симметричные центру описанной окружности (ортоцентру) треугольника ABC относительно его сторон, то стороны треугольника ABC суть перпендикуляры, проведенные к отрезкам PO, QO, RO, где O — есть ортоцентр (центр вписанной окружности) треугольника PQR, через их середины.

19.8. Ответ: стрелки впервые совпадут в 13 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

19.9. Указание. При вращении стержня BC точка C описывает окружность. Воспользовавшись тем, что точку E можно получить, повернув отрезок AC на 60° вокруг точки A, докажите, что точка E также описывает окружность. Найдите на этой окружности точку, наиболее удаленную от B (рис. 170).

Ответ: максимальное значение BE равно $a + b$. В этом случае $\angle ABC = 120°$.

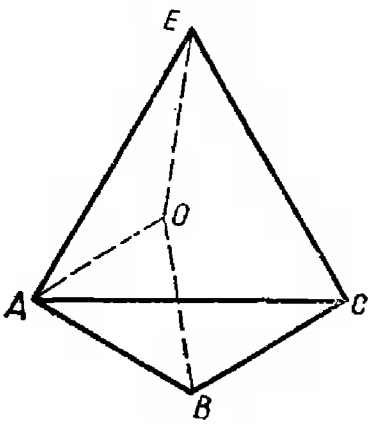


Рис. 170

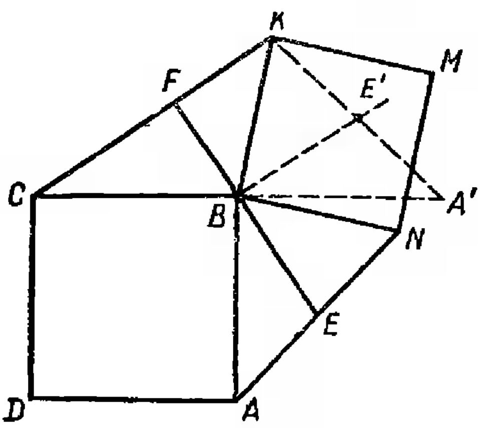


Рис. 171

19.10. Указание. Поворотом на 90° около центра квадрата фигура переходит в себя.

19.11. Указание. Осуществите поворот на 90°.

19.12. Указание. Поверните треугольник ABN вокруг точки B на 90° так, чтобы отрезок BN совпал с отрезком BK, и докажите, что фигура CA^1K — треугольник, а BE^1 — его средняя линия. Выведите отсюда, что $\angle FBE=180°$ (рис. 171).

19.13. Указание. Пусть H — основание высоты CH. Двумя поворотами на 90° и —90° соответственно с центром в точке C переведите точку A в N и точку B в Q. Рассмотрите трапецию H_1NQH_2, где H_1, H_2 — образы точки H в каждом из двух поворотов.

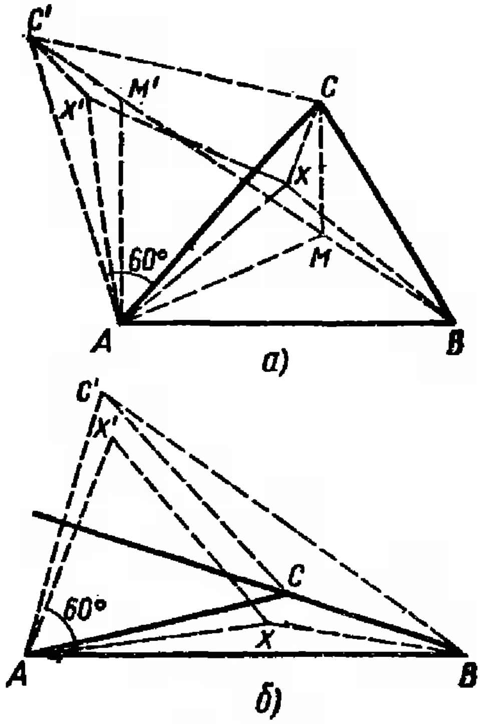


Рис. 172

19.14. а) Пусть X — произвольная точка внутри треугольника ABC (рис. 172). Повернем треугольник ACX вокруг точки A на 60° в направлении от отрезка AB к AC; пусть после этого он займет положение AC^1X^1.

Так как $AX = XX^1$ (треугольник AXX^1 равносторонний) и $CX = C^1X^1$, то сумма $AX + BX + CX$ расстояний от точки X до вершин треугольника ABC равна длине ломаной $BXX'C$. Остается выбрать точку X так, чтобы длина ломаной BXX^1C^1 была наименьшей: это положение точки X назовем M.

Рассмотрим отдельно два случая.

I случай. Отрезок C^1B пересекает сторону AC треугольника ABC; этот случай имеет место, когда $\angle BCC^1 < 180°$ и $\angle BAC^1 < 180°$ или, так как $\angle BCC^1 = \angle BCA + \angle ACC^1 = \angle BCA + 60°$ и $\angle BAC^1 = \angle BAC + \angle CAC^1 = \angle BAC + 60°$, когда углы C и A треугольника ABC меньше 120°. В этом случае если на отрезке C^1B можно найти такую точку M, что $\angle AMC=60°$, то для этой точки M (рис. 172, *а*) $MA = AM^1 = MM^1 = M^1C^1$ и, следовательно, $AM + MC + MB = BM + MM^1 + M^1C^1 = BC^1$, поэтому точка M и будет искомой. При этом, очевидно, $\angle AMB = \angle CMB = \angle AMC = 120°$, т. е. M — точка, из которой все стороны треугольника ABC видны под углами равной величины. Для того чтобы на отрезке C^1B была такая точка M, нужно, чтобы $\angle CBA$ был меньше 120°. Если же $\angle CBA \geqslant 120°$, то искомой точкой будет вершина B треугольника ABC.

II случай. Отрезок C^1B не пересекает сторону AC треугольника ABC: например, точка C^1 расположена по другую сторону от прямой BC, чем треугольник ABC, т. е. $\angle C \geqslant 120°$ (рис. 172, *б*).

В этом случае кратчайшей ломаной C^1X^1XB будет ломаная C^1CB и искомой точкой будет вершина C треугольника ABC. Точно так же, если $\angle A \geqslant 120^\circ$, то искомой точкой будет вершина A.

б) Если X — какая угодно точка вне треугольника ABC, то нетрудно указать такую точку X_1 на границе треугольника, что $X_1A + X_1B + X_1C < XA + XB + XC$. Если точка X принадлежит углу, вертикальному с одним из углов треугольника, например с $\angle C$, то роль X_1 будет играть вершина C этого угла (рис. 172, *а*). В самом деле, $AC + BC < XA + XB$, ибо ломаная AXB объемлет выпуклую ломаную ACB, и $CC = 0 < XC$. Если же X принадлежит, скажем, $\angle C$ треугольника, но находится по другую сторону от стороны AB, чем точка C, то роль точки X_1 будет играть точка пересечения прямой CX со стороной AB (рис. 172, *б*). В самом деле, в этом случае $X_1A + X_1B = AB < XA + XB$ и $X_1C < XC$. Поэтому при отыскании в плоскости треугольника ABC точки, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является наименьшей, мы можем ограничиться рассмотрением лишь внутренних (и граничных) точек треугольника, чем настоящая задача сводится к задаче а).

19.15. Указание. Четыре центра поворотов находятся как пересечения серединного перпендикуляра отрезка, соединяющего центры квадратов с серединными перпендикулярами отрезков AA_1, AB_1, AC_1, AD_1, где A — вершина первого квадрата, A_1, B_1, C_1, D_1 — вершины второго.

19.16. Указание. Центр поворота лежит на пересечении серединных перпендикуляров отрезков O_1O_2 и A_1A_2.

19.21. Пусть наш n-угольник имеет p осей симметрии. Из утверждения задачи 19.19 следует, что все они пересекаются в одной точке O. Эта точка разбивает каждую ось симметрии на два луча, которые мы будем называть полуосями. $2p$ полуосей, взятых по порядку, начиная от какой-то одной из них и далее обходя вокруг O по часовой стрелке, мы обозначим через $l_1, l_2, \ldots, l_{2p}$.

Заметим, что если l и l_1 — две оси симметрии многоугольника Φ, то прямая l^1, симметричная l относительно l_1, также является осью симметрии M. В самом деле, если K — произвольная точка многоугольника M, точка K_1 симметрична K относительно l_1, точка K_2 симметрична K_1 относительно l и точка K^1 симметрична K_2 относительно l_1, то точка K^1 симметрична K относительно l^1 (рис. 173, *а*), где точки K_1, K_2 и прямая l симметричны точкам K_1, K^1 и прямой l^1 относительно прямой l.

Поэтому наряду с каждой точкой K многоугольник M содержит и симметричную K относительно l^1 точку K^1, т. е. прямая l^1 является осью симметрии многоугольника M. Отсюда следует, что луч l_2 симметричен лучу l_1 относительно прямой l_2 и т. д., т. е. что углы (l_1l_2), (l_1l_3), ..., $(l_{2p}l_1)$ все равны между собой.

Пусть некоторая вершина A n-угольника не принадлежит ни одной из полуосей $l_1, l_2, \ldots, l_{2p}$. Будем считать для определенности, что она лежит внутри угла, образованного полуосями l_1 и l_2

(рис. 173, *б*). При отражении от любой оси симметрии вершина n-угольника переходит снова в вершину; в частности, после отражения от l_2 точка A переходит в некоторую вершину A_1, лежащую, очевидно, между полуосями l_2 и l_3.

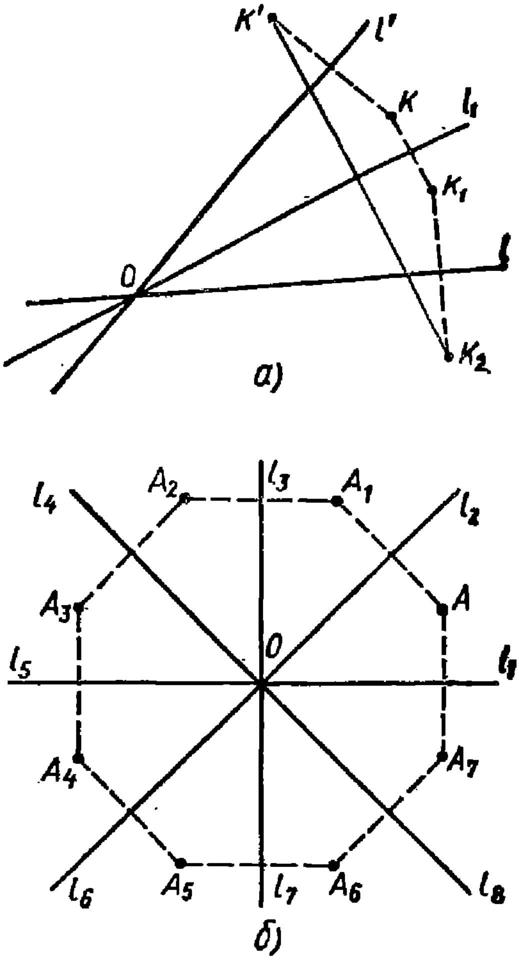


Рис. 173

В самом деле, если бы полуось l_3 лежала между прямой OA_1 и полуосью l_2, то симметричная ей относительно l_2 полуось (назовем ее l_3) лежала бы между прямой OA и l_2, что противоречит выбору полуоси l_2.

Отразим A_1 от l_3; она перейдет в вершину A_2, лежащую между l_3 и l_4. Продолжим этот процесс до вершины $A_{2p} - 1$, лежащей между l_{2p} и l_2, которой симметричны относительно l_1 вершины A_{2p}, лежащие между l_1 и l_2. Точка A_{2p} совпадает с A, ибо $2p$ отражений от p пересекающихся в одной точке и попарно образующих одинаковые углы (рис. 173, *б*) прямых — p отражений от этих прямых и затем еще p отражений от тех же прямых, взятых в том же порядке, — переводят каждую точку плоскости снова в себя. Кроме того, вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{2p} = A$ все различны, так как они отделяются друг от друга полуосями $l_1, l_2, \ldots, l_{2p}$.

Итак, все вершины нашего n-угольника, не лежащие на осях симметрии, можно разбить на пересекающиеся между собой группы по $2p$ вершин, и, следовательно, общее их число делится на p.

Пусть теперь некоторая вершина A принадлежит полуоси l_1. При отражении от l_2 она перейдет в вершину A_1, принадлежащую l_3, при отражении от l_4 — в вершину A_2, принадлежащую l_5, и т. д.

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, мы получим цепочку из p не совпадающих между собой вершин $A_1, A_2, \ldots, A_p$, где A_p совпадает с A. Исключением здесь может являться лишь случай, когда вершина A сама совпадает с точкой O, но легко видеть, что у несамопересекающегося многоугольника такой вершины не может существовать. Отсюда вытекает, что n делится на p.

Обратно, если $n \neq p$ делится на p, то можно построить n-угольник, имеющий ровно p осей симметрии. Для этого достаточно выбрать $2p$ полуосей $l_1, \ldots, l_{2p}$, образующих между собой равные углы; при четном q выбрать произвольно q вершин n-угольника

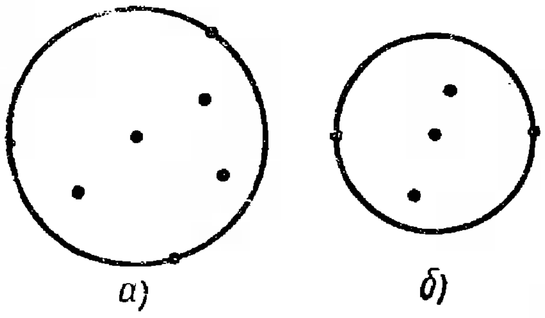


Рис. 174

внутри образованного осями l_1 и l_2 угла; при нечетном—добавить сюда еще одну вершину на оси l_1 (при $q = 1$ — выбрать одну вершину на оси l_1) и затем остальные вершины n-угольника построить, как указано выше.

19.22. Рассмотрим большую окружность, охватывающую все наши точки, и будем уменьшать ее до тех пор, пока это будет можно сделать, оставляя все точки внутри окружности. Мы получим так называемую «замыкающую окружность» S нашей точечной совокупности — наименьшую окружность, содержащую все точки внутри себя. Нетрудно понять, что эта окружность проходит через три точки, являющиеся вершинами вписанного в нее остроугольного треугольника (рис. 174, *а*), или через две точки, располагающиеся в концах одного диаметра окружности (рис. 174, *б*); в самом деле, в противном случае охватывающую все наши точки окружность можно было бы еще уменьшить (рис. 175, *а* — *в*). При этом замыкающая окружность однозначно определяется заданной совокупностью точек: это есть наибольшая среди всех окружностей, проходящих через тройки наших точек, и всех окружностей, построенных как на диаметрах на отрезках, соединяющих пары точек.

[Две несовпадающие из этих окружностей не могут иметь одинакового радиуса, так как иначе все n точек заключались бы внутри «линзы», образованной пересечением двух окружностей, а такую «линзу» всегда можно заключить в окружность, меньшую двух первоначальных (рис. 176).]

Отсюда следует, что каждое движение, переводящее совокупность точек в себя, должно переводить в себя и замыкающую окружность S. Поэтому:

а) Симметрия относительно перпендикуляра p, проведенного к отрезку AB через его середину, где A, B — две какие угодно из наших точек, переводит всю совокупность точек в себя, а значит, она переводит в себя и окружность S. Поэтому p проходит через центр окружности S, т. е. точки A и B равноудалены от O. Таким

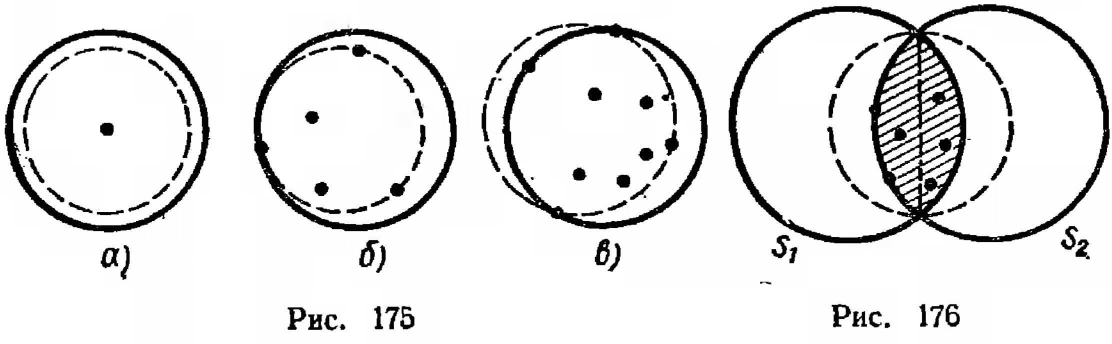


Рис. 175 Рис. 176

образом, любые две из наших точек равноудалены от O, откуда и следует, что все точки принадлежат одной окружности с центром O.

б) Каждое из рассматриваемых движений должно оставлять на месте и центр O окружности S, следовательно, представляет собой либо поворот вокруг точки O, либо симметрию относительно прямой, проходящей через O. Но если поворотами вокруг O и симметриями относительно проходящих через O прямых перевести в себя любую точку нашей совокупности точек, то все эти точки равноудалены от O, т. е. принадлежат одной окружности с центром O — окружности S. Ясно, что если число точек системы бесконечно, то утверждения задачи а) и б) теряют силу — достаточно рассмотреть, например, все точки плоскости (или все точки, имеющие в заданной системе декартовых координат целочисленные координаты).

Тема 20. ИГРА В «МОРСКОЙ БОЙ»

Учебно-воспитательные цели. Надо учить школьников применять математические методы рассуждений в реально встречающихся ситуациях. Известная большинству ребят игра в «морской бой» позволяет показать как силу математических методов, так и трудность полного теоретического исследования явления. Игра в «морской бой» связана с автоматическим поиском информации. «Найти план действий и показать, что более хорошего плана не существует», «найти все оптимальные планы» — стандартные постановки в оптимизационных моделях, разрабатываемых для различных отраслей народного хозяйства (как для технологических процессов, так и для управления экономикой).

Методические замечания. Задачи 20.2—20.4, 20.10—20.11— для решения в классе, задачи 20.6—20.9 домашние. Результат задачи 20.12 интересен всем, однако довольно длинная цепочка рассуждений, составляющая решение, доступна, видимо, лишь наиболее сильным.

Опыт журнала «Пионер» (1974, № 2, 5) показывает, что эта задача доступна шестиклассникам.

Для демонстрации различных планов стрельбы полезно приготовить доску для игры в «морской бой», на которой можно писать мелом.

Решения, указания, ответы

20.2. Раскрасим поля доски в три цвета так, как на рисунке 177 (вместо цветов мы пишем буквы: *к* — красный, *с* — синий, *ж* — желтый). Понятно, что каждый крейсер занимает ровно по одной клетке каждого цвета. Поэтому, обстреливая последовательно красные поля (33 поля), мы не более чем на 33 выстрела попадем в корабль. Доказательство того, что меньше чем 33 выстрелами не обойтись, основывается на возможностях поставить на доске 33 крейсера, не имеющих общих клеток. Одна из расстановок такова:

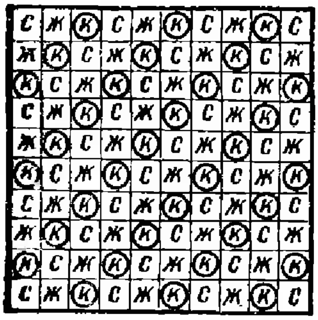


Рис. 177

в прямоугольник 3 × 10 клеток ставим 10 крейсеров, 3 таких прямоугольника дают 30 кораблей, а в оставшемся прямоугольнике 1 × 10 клеток размещаем 3 крейсера. Дальнейшие рассуждения повторяют решение задачи 20.1.

20.3. Раскрасим доску, как шахматную (точнее, как для игры в стоклеточные шашки). Эсминец занимает одну черную и одну белую клетку. Открыв огонь по 50 черным клеткам, обязательно попадем в эсминец. Поскольку на доске можно поставить 50 эсминцев (5 прямоугольников 2 × 10 клеток, в каждом из которых 10 эсминцев), не имеющих общих клеток, то меньше чем 50 выстрелами не обойтись.

20.4. Чтобы гарантировать попадание в подводную лодку, необходимо не менее 100 выстрелов.

20.7. В задаче 20.5 показано, что при любом фиксированном плане из 23 выстрелов может случиться так, что ни линкор, ни крейсер не будут задеты. Рассуждения, аналогичные проведенным в этой задаче, показывают, что может случиться так, что и остальные корабли не будут задеты. Рассуждения длинны и скучны, мы их опустим.

20.8. Поскольку на доске можно поставить 33 крейсера, не имеющих общих клеток (см. решение задачи 20.2), то при любом фиксированном плане из 32 выстрелов может случиться так, что крейсер не будет задет. Покажем, что при этом эсминцы также могут не попасть под удар. Эсминцы расположены вне «запретного» прямоугольника размером не более 3 × 5 клеток. Покажем, что вне этого прямоугольника можно поставить по крайней мере (100—15—3):2=41 эсминец, каждые два из которых не имеют общих точек и расположены параллельно друг другу (оба по горизонтали или оба по вертикали). Рассмотрим линию, на которой находится большая сторона запретного прямоугольника. На этой линии по крайней мере с одной стороны от края доски до запретного прямоугольника лежит четное число клеток. Значит, с этой стороны можно поставить на линии четное число эсминцев, параллельных крейсеру. Затем мы заполняем эсминцами, параллельными крейсеру, всю доску, кроме, быть может, 3 или 2 клеток, примыкающих к меньшей стороне запретного прямоугольника, от которой до параллельного ей края доски лежит нечетное число клеток. Отметим, что 41 эсминец стоит только в том случае, когда остались три свободные клетки, в остальных случаях поставлено по крайней мере 42 эсминца. А в трех свободных клетках поставим эсминец, перпендикулярный всем остальным. На доске не менее 42 эсминцев, а в плане 32 удара. По принципу Дирихле найдется эсминец, на который не приходится ни одного удара. Поставим на эту стоянку эсминец из эскадры, он не будет задет. Покажем, что можно поставить и второй эсминец. Со сколькими стоянками имеет общие

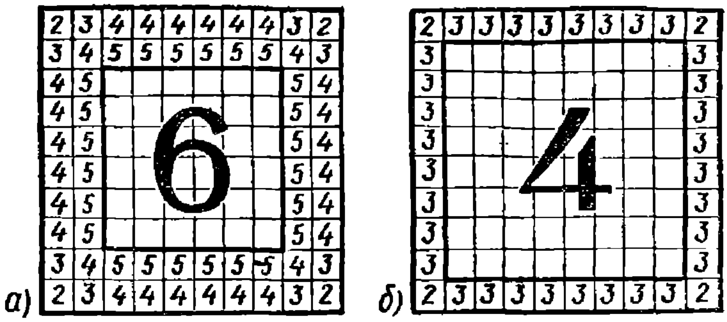


Рис. 178

клетки «запретная зона» эсминца? Если этот корабль стоит параллельно крейсеру, то не более чем с 8, а если перпендикулярно, то с 5 (проверьте это утверждение, разобрав все возможные случаи). Значит, остаются доступными по крайней мере $42 - 8 - 1 = 33$ стоянки, а ударов 32, и можно поставить второй эсминец.

20.9. Надо взять 10 подводных лодок, тогда для гарантированного попадания, как мы покажем ниже, нужно более 50 выстрелов, в то время как при наличии по крайней мере одного корабля более чем из одной клетки 50 выстрелов гарантируют попадание (можно использовать план стрельбы, описанный в решении задачи 20.3). Покажем, что 50 выстрелов для попадания в эскадру из 10 подводных лодок может и не хватить. Рассмотрим две группы клеток: горизонтали 1, 3, 5, 7, 9 и остальные горизонтали. По принципу Дирихле по крайней мере на одно из этих множеств приходится не более 25 ударов. Будем размещать подводные лодки только на горизонталях этого множества. Ясно, что на горизонталь, на которую приходится a ударов, можно поставить не менее $(10 - a) : 2$ подводных лодок, не имеющих общих точек. Очевидно, с подводными лодками на других горизонталях рассматриваемого множества горизонталей они также не имеют общих точек. Следовательно, можно поставить не менее $25 : 2$, т. е. не менее 13 подводных лодок. Доказали даже более сильное утверждение: для гарантированного попадания в эскадру из 13 подводных лодок необходимо более 50 выстрелов.

20.10—20.11. Для крейсера и эсминца — ответ на рисунке 178, *а*, *б*, а для подводных лодок вся доска заполнена единицами.

Тема 21. ПРАВИЛО «КРАЙНЕГО»

Учебно-воспитательные цели. В обучении методике решения математических задач большое значение придается общим подходам и методам рассуждений и доказательств. Один из таких весьма общих подходов — рассмотрение «крайнего» элемента множества. Верно, что ученику, не подозревающему о существовании правила «крайнего», доступны все задачи этой темы, но ему придется продвигаться к решению ощупью, наугад, изобретая этот подход каждый раз заново и в новой ситуации. Ученик, овладевший методом, даже и в незнакомой ситуации найдет путь к верному решению, руководствуясь, как путеводной нитью, правилом «крайнего».

Методические замечания. Ключом к овладению методом является довольно простая задача 21.2. С нее и следует начинать. После того как учащиеся самостоятельно ее решат, задайте вопрос: «Каков центральный пункт решения?» Получив верный ответ — рассмотрение крайней точки, можно перейти к решению задачи 21.1 и сформулировать общее правило. В обсуждении решений остальных задач всякий раз выяснять, в каком месте решения использовалось правило «крайнего».

В решении задачи 21.8 используется такое утверждение: сумма квадратов двух целых чисел делится без остатка на 3 тогда и только тогда, когда каждое из чисел кратно 3. Докажем это. Так как из трех последовательных чисел одно кратно 3, то любое целое число a можно записать в виде $a = 3k$, или в виде $a = 3k + 1$, или в в виде $a = 3k - 1$; соответственно $a^2 = 9k^2$ или $a^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$. Мы видим, что квадрат любого числа либо кратен 3, если само число кратно 3, либо при делении на 3 дает остаток, равный 1. Сумма двух квадратов кратна 3, если оба числа кратны 3, либо при делении на 3 дает остаток 1, если только одно из чисел кратно 3, либо остаток 2, если ни одно из чисел не кратно 3. Отсюда и следует доказываемое.

Добавление. Замечания об общей методике решения задач

Одна из основных целей руководителя математического кружка — научить решать задачи. Как этого добиться? Можно ограничиться «разучиванием» специальных методов и приемов, предназначенных для решения определенных классов задач, иными словами, «натаскиванием» учащихся. Вред такого «натаскивания» очевиден — оно развивает шаблонность мышления, подавляет самостоятельность, инициативу учащихся. Увы, встречаются еще преподаватели, предпочитающие этот относительно легкий путь обучения. Их питомцы совершенно теряются, встретившись с нестандартной задачей, с необычной формулировкой. Их обычная реакция в этих случаях: «Мы таких задач не решали!»

Может быть, вообще отказаться от какой-либо методики обучения решению задач и поступать проще — решать и решать задачи, «много задач, хороших и разных», пока ученики не научатся всему сами собой? Но здесь есть другая опасность: большинство учащихся захлебнутся и утонут в безбрежном море задач, так ничему и не научившись.

Правильный путь, по-видимому, состоит в разумном сочетании самостоятельной работы учащихся с обучением их приемам и методам решения задач под руководством преподавателя, причем предпочтение следует отдавать общим методам и подходам. Да и сам процесс обучения должен быть организован так, чтобы он в наибольшей степени развивал самостоятельность учащихся, пробуждал их любознательность, стимулировал их творческую активность. Именно на этих принципах основана общая методика обучения решению задач, разработанная выдающимся современным педагогом, известным математиком Д. Пойа. Эта методика изложена в книге Д. Пойа «Как решать задачу», а также в его книгах «Математика и правдоподобные рассуждения» и «Математическое открытие».

Методика Пойа «Как решать задачу» оформлена в виде таблицы. Таблица эта состоит из стереотипных указаний, выраженных в форме советов или наводящих вопросов, предназначенных для того, чтобы направить усилия решающего в нужную сторону. «Если вы обращаетесь к самому себе с этими вопросами и советами, — пишет Пойа, — они могут помочь вам решить задачу. Если вы обращаетесь с теми же вопросами и советами к одному из ваших учеников, вы можете помочь ему решить эту задачу».

Согласно Пойа, процесс решения задачи разбивается на 4 фазы: 1) понимание постановки задачи (нужно ясно понять задачу), 2) составление плана решения или «анализ» (найти связь между данными и неизвестными), 3) осуществление плана или «синтез» и, наконец, 4) взгляд назад (изучение полученного решения). Вот, например, некоторые советы и вопросы, относящиеся к первой фазе: «Что гласит задача? Что дано? Что нужно найти? Определено ли неизвестное данными задачи? Или они недостаточны, или же чрезмерны?.. Сделайте чертеж. Введите подходящие обозначения. Разделите условие на части».

Приведем выдержку из второй части таблицы: «Если не удается решить данную задачу, попытайтесь сначала решить сходную. Нельзя ли придумать более доступную сходную задачу? Более общую? Более частную? Аналогичную задачу? Нельзя ли решить часть задачи? Сохраните только часть условия, отбросив остальную часть: насколько определенным окажется тогда неизвестное?»

А вот вопросы, относящиеся к четвертой фазе решения: «Нельзя ли проверить результат? Нельзя ли получить тот же результат иначе? Нельзя ли усмотреть его с одного взгляда? Нельзя ли в какой-нибудь другой задаче использовать полученный результат или метод решения?»

Обратите внимание на последний вопрос: каждая решенная задача — это еще и шаг на пути к овладению м е т о д о м.

Рекомендации Пойа отличаются весьма большой общностью. «Их применение, — пишет Пойа, — не ограничивается никаким конкретным содержанием задачи. Она может быть алгебраической или геометрической, математической или нематематической, теоретической или практической, серьезной задачей или головоломкой; это все безразлично; вопросы сохраняют смысл и могут помочь нам решить ее».

Мы настоятельно рекомендуем руководителям кружков ознакомиться с методикой Пойа, например, по книге «Как решать задачу» и внедрить ее в преподавание. Имеет смысл оформить таблицу Пойа из этой книги в виде плаката, который учащиеся имели бы перед глазами при обдумывании решения задачи.

Овладение общей методикой, общим подходом к решению самых разных задач чрезвычайно важно, но это еще не все. Большую роль в математическом образовании учащихся играют сугубо математические методы и подходы. Сюда относятся и метод полного перебора, и метод математической индукции, и метод координат. Активное владение этими методами необыкновенно расширит и обогатит арсенал тех средств, которыми располагает учащийся, приступающий к решению новой задачи. Некоторую пользу, несомненно, принесут и такие подходы, как «принцип Дирихле» и правило «крайнего».

По форме правило «Рассмотрите крайнее!» несколько напоминает советы-рекомендации из таблицы Пойа, например «Рассмотрите неизвестное!». Однако оно не имеет такого всеобщего характера, как эвристические принципы Пойа, и применимо лишь к некоторому, хотя и довольно широкому классу математических задач. С другой стороны, эта рекомендация не носит столь конкретного характера, как, скажем, «Воспользуйтесь методом математической индукции!» или «Введите систему координат!», поэтому правилом она может быть названа лишь с некоторой натяжкой.

Тема 22. ПРО УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ

Учебно-воспитательные цели. Оптимальное управление системами материального снабжения, и в частности складским хозяйством, составляет предмет отрасли экономической науки, которая получила название «теория управления запасами». Тема 22 посвящена популярному рассказу о классических моделях математической теории управления запасами. Различным аспектам этой теории посвящены тысячи статей и книг. Экономический эффект ее применения достаточно высок. Приведем один пример.

Была построена модель планирования оптимального размера начального запаса на базе материально-технического снабжения. Были собраны статистические данные. Для шин одной марки издержки в оптимальном плане составили 500 руб., а в действительности издержки были равны 2257 руб., т. е. более чем в 4,5 раза больше. Для шин другой марки издержки в оптимальном плане — 473 руб., а в действительности — 997 руб., т. е. более чем в 2 раза больше. (Орлов А. И., Пейсахович Э. Э. Некоторые модели планирования оптимальных размеров поставок и начального запаса. — В журн. «Экономика и математические методы», т. XI, вып. 4, с. 681—694, 1975.)

Между тем рассказать об одной из основных формул теории управления запасами — формуле Вильсона — можно школьнику, знающему лишь неравенства и квадратные корни! Насколько нам известно, настоящее изложение является первой попыткой (по крайней мере на русском языке) популяризировать результаты Вильсона для школьников.

Приведем небольшой список литературы для тех, кто хочет подробнее познакомиться с управлением запасами:

1. Букан Дж., Кенигсберг Э. Научное управление запасами. — М.: Наука, 1967.

2. Рыжиков Ю. И. Управление запасами. — М.: Наука, 1969.

3. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. — М.: Наука, 1969.

4. Хэнсменн Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами. — М.: Прогресс, 1966.

Построение математической модели реального явления — достаточно сложное дело, которому необходимо специально учить. Классические модели управления запасами являются удачными объектами для подобного обучения, поскольку они достаточно просто формулируются, достаточно просто изучаются математически и вместе с тем широко используются в практике. Возможно, из всех возникающих в экономике математических моделей именно модели управления запасами больше всего подходят для популяризации школьникам. В теме подробно обсуждаются предположения, лежащие в основе рассматриваемых моделей.

При анализе моделей возникают математические задачи. Это минимизация суммы квадратов при фиксированной сумме переменных, минимизация функции $Y + 1/Y$ и др. Ясно, что умение решать подобные задачи необходимо каждому участнику математического кружка.

Методические замечания. Стержнем темы является изучение математических моделей управления запасами. На этот стержень «нанизаны» математические задачи, возникающие при изучении моделей реальных явлений, но сами по себе относящиеся целиком к математике и решаемые обычными математическими методами. Желательно каждый раз подчеркивать, что рассматриваемая задача является чисто математической и потому при решении не должно быть ссылок на свойства цыплят, поведение директора магазина, поломки транспортных средств и т. д. Однако результат задачи применяется уже при принятии решений в реальной ситуации.

Разбор основной модели и связанных с нею математических задач составляет содержание одного-двух занятий кружка (в зависимости от уровня подготовки участников) и проводится под руководством преподавателя. Обобщения основной модели могут быть также разобраны на занятиях кружка под руководством преподавателя, могут быть предметом докладов участников, математических сочинений, а также «исследовательских работ» школьников. Основную модель можно обобщать в различных направлениях. Некоторые из них разобраны в основном тексте, другие, в более кратком изложении, приводятся ниже. Для удобства большинство результатов сформулировано в виде задач (задачи 22.19—22.39), нумерация которых продолжает нумерацию в основном тексте. Задачи 22.36, 22.37, 22.38 и в несколько меньшей степени 22.16, 22.26, 22.31 представляют собой скорее формулировки проблем для исследования, чем задачи в обычном школьном смысле.

Дальнейшее обобщение основной модели. Дальнейшее обобщение — заказ поступает не весь сразу, а постепенно, q единиц в день.

Естественно, должно быть $q \geqslant r$. Займемся сначала моделью без дефицита.

22.19. Начертите график (типа рис. 105) для какого-нибудь плана поставки, когда партии размерами Q_0, Q_1, Q_2, ... начинают поступать в моменты 0, t_1, t_2, ...

22.20. (Устно.) Что будет в случае $q = r$?

22.21. Покажите, что оптимальный план следует искать среди тех, у которых в момент начала поступления очередной партии запас на складе равен 0.

22.22. Покажите, что в оптимальном плане размеры всех партий равны.

22.23. Выведите формулу типа (3) для средних издержек за целое число периодов при использовании планов с размерами партий, равными одной и той же величине Q.

22.24. Покажите, что средние издержки, определенные в предыдущей задаче, достигают минимума при

$$Q = Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2Gr}{F}\frac{q}{q-r}}.$$

22.25. При каких T план с $Q = Q_{\text{опт}}$ оптимален?

22.26. Покажите, что план с $Q = Q_{\text{опт}}$ близок к оптимальному за время T при всех достаточно больших T.

Указание. Выведите неравенства, аналогичные неравенствам в задаче 22.7.

Таким образом, переход к постепенной доставке заказа приводит к увеличению оптимального размера заказа по сравнению с основной моделью в $\sqrt{\dfrac{q}{q-r}}$ раз.

В основной модели, в модели с дефицитом и в модели с постепенной доставкой заказа оптимальными являются планы с равными промежутками между моментами прихода партий и с равными размерами партий. Сравним величины оптимальных размеров партий. Они равны соответственно:

$$Q^1_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2Gr}{F}},\quad Q^2_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2Gr}{F}}\sqrt{1+\frac{F}{H}},\quad Q^3_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2Gr}{F}}\sqrt{\frac{q}{q-r}}.$$

Мы видим, что переход к более сложным моделям приводит к увеличению размера оптимальной партии. Далее, если плата за дефицит очень велика, то $Q^2_{\text{опт}} : Q^1_{\text{опт}} = \sqrt{1+\dfrac{F}{H}}$ весьма близко к 1, оптимальный план близок к плану в модели без дефицита. Так что слова директора: «Мы дорожим честью магазина» — показывают, что, по его мнению, плата за дефицит H велика настолько, что план в модели без дефицита практически не отличается от плана (оптимального) в более общей модели. Аналогично, при высокой скорости q доставки заказа оптимальный план, как и следовало ожидать, практически не отличается от оптимального плана в случае доставки партии одновременно всей целиком.

Рассмотрим некоторые дальнейшие обобщения основной модели. Пусть и дефицит разрешен, и доставка проводится постепенно.

22.27. Пусть фиксированы моменты, когда запас, увеличиваясь, проходит через 0. Каковы оптимальные моменты окончания очередной поставки и, после перерыва, начала следующей в промежутке между двумя соседними фиксированными моментами?

22.28. Покажите, что в оптимальном плане величины всех партий равны.

22.29. Выведите формулу для средних издержек за целое число периодов при использовании плана с одинаковыми размерами партий.

22.30. Покажите, что эти средние издержки достигают минимума при

$$Q = Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2Gr}{F}}\sqrt{1+\frac{F}{H}}\sqrt{\frac{q}{q-r}}.$$

22.31. Изучите свойства оптимальности плана с $Q = Q_{\text{опт}}$.

22.32. Что изменится, если есть постоянные члены в плате за хранение и за дефицит?

Далее, может существовать скидка на размер заказа или, наоборот, надбавка. Пусть выполнены все предположения основной модели, кроме одного: плата за доставку партии величиной Q равна не G, а $G + G_1 Q + G_2 Q^2$.

22.33. Покажите, что в оптимальном плане размеры всех партий равны.

22.34. Средние издержки за целое число периодов при использовании плана с одинаковым размером партий Q равны:

$$f(Q) = \frac{Gr}{Q} + Q\left(\frac{F}{2} + G_2 r\right) + G_1 r.$$

22.35. Эти издержки достигают минимума при

$$Q = Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2Gr}{F + 2G_2 r}}.$$

22.36. Попытайтесь обобщить основную модель во всех четырех направлениях сразу: а) допускается дефицит; б) заказ поступает с конечной скоростью, а не весь сразу; в) есть постоянные члены в платах за хранение и дефицит; г) учитывается скидка на размер заказа.

22.37. Исследуйте, как возрастут затраты в описанных выше моделях (с дефицитом; с конечной скоростью доставки заказа; и с тем, и с другим; и т. д.) при использовании плана с одинаковыми размерами партий Q, где Q отлично от $Q_{\text{опт}}$, по сравнению с использованием оптимальной для рассматриваемой модели величины партии.

22.38. Обычно коэффициенты F, G, H, ... известны лишь с какой-то степенью точности. Вычисления ведутся с искаженными значениями F^*, G^*, H^*, ..., которые, однако, достаточно близки к точным. Какова при этом погрешность в определении оптимального размера партии? Как увеличиваются средние затраты?

22.39. При изучении поставленных в задаче 22.38 проблем полезны неравенства:

$$|\sqrt{1+x}-1|\leqslant|x| \text{ при } x\geqslant-1;$$
$$\left|1-\frac{1}{1+x}\right|\leqslant 2|x| \text{ при } x\geqslant-\frac{1}{2}.$$

Докажите их.

Ответы, указания, решения

Все основные идеи, необходимые для решения задач, содержатся в «обсуждениях» разбираемых в теме задач, а также в «указаниях» в теме. Поэтому нет необходимости подробно разбирать большинство задач. Кроме того, мы воздерживаемся от обсуждения задач «проблемного направления» (22.36 и др.).

22.3. Неравенство следует из того, что $x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

22.5. Докажем утверждение, содержащееся в указании. Справедливо тождество ($y_1>0$, $y_2>0$)

$$y_1+\frac{1}{y_1}-y_2-\frac{1}{y_2}=(y_1-y_2)\left(1-\frac{1}{y_1y_2}\right).$$

Если y_1 и y_2 больше 1, то $\left(1-\frac{1}{y_1y_2}\right)$ больше 0, если y_1 и y_2 меньше 1, то это выражение меньше 0, откуда и следует требуемое. Поскольку при соответствующей замене переменных $f(Q)$ пропорционально $y+\frac{1}{y}$, то претендентами на минимум могут быть только непосредственные соседи единицы, что и утверждается в задаче.

22.6. Пусть Q_0 — запас в момент T. Тогда $щ(T)<щ_{\text{опт}}(T)$ для плана, полученного из плана Вильсона заменой величины последней поставки с $Q_{\text{опт}}$ на $Q_{\text{опт}}-Q_0$.

22.8. Справедлива цепочка равенств:

$$f(Q)-f(Q_{\text{опт}})=\frac{Gr}{Q}+\frac{FQ}{2}-\frac{Gr}{Q_{\text{опт}}}-\frac{FQ_{\text{опт}}}{2}=$$
$$=\sqrt{Gr\cdot\frac{F}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{F}{2Gr}}Q}+\sqrt{\frac{F}{2Gr}}Q\right)-\sqrt{Gr\cdot\frac{F}{2}}\cdot 2=$$
$$=\sqrt{Gr\cdot\frac{F}{2}}\,\frac{\left(\sqrt{\frac{F}{2Gr}}Q-1\right)^2}{\sqrt{\frac{F}{2Gr}}Q}=\frac{f(Q_{\text{опт}})}{2}\,\frac{\left(\frac{Q}{Q_{\text{опт}}}-1\right)^2}{\frac{Q}{Q_{\text{опт}}}}=$$
$$=\frac{f(Q_{\text{опт}})}{2}\,\frac{(Q-Q_{\text{опт}})^2}{QQ_{\text{опт}}}.$$

22.9. В соответствии с формулой (5) затраты увеличиваются не более чем в $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{0,1}{1,0}\cdot\frac{0,1}{0,9}=1+\frac{1}{180}\approx 1{,}005555\ldots$ раз.

22.16. Рассуждения незначительно отличаются от проведенных при выводе формулы (3).

22.17—22.18. Затраты за время Δ между поставками — квадратный трехчлен от Δ, поэтому в оптимальном плане одинаковы промежутки между поставками. Наивыгоднейший размер партии — тот же, что и в задаче 22.14. От постоянных членов в платах за хранение и дефицит зависят только начальный запас Q_0 и затраты.

22.32. Влияние этих членов такое же, как в задачах 22.17 — 22.18, с единственным различием — наивыгоднейший размер партии дается в задаче 22.30.

Тема 23. КОМПОЗИЦИИ ДВИЖЕНИЙ

Методические указания. Понятие композиции движений в новом учебном пособии А. В. Погорелова «Геометрия, 6 — 10» специально не определяется. В пункте «Свойства движений» изучается последовательное выполнение двух движений, в неявном виде композиция движений и гомотетии используется при доказательстве признаков подобия треугольников. С композициями движений учащиеся сталкиваются и в различных других моментах изучения геометрического материала. Так, уже довольно рано они производят поворот сначала по часовой стрелке, а затем против часовой стрелки, их спрашивают, что получится в результате выполнения осевой симметрии, а затем обратного ей движения и т. д. Вместе с тем представления учащихся об этом важном понятии весьма ограниченны, так как не доказываются основные факты о том, что композицией параллельных переносов является параллельный перенос, а композицией поворотов с общим центром является поворот и. т. д. Композиции различных других движений практически не рассматриваются, и полностью отсутствуют свойства композиции движений. В данной теме вовсе не рассматривается этот вопрос в теоретическом плане полными доказательствами всех необходимых теорем, а лишь на конкретных задачах показаны как сами композиции движений, так и некоторые их свойства.

Прежде всего следует обратить внимание на само понятие композиции движений, на порядок выполнения преобразований, на преобразование, обратное композиции движений. В первых шести задачах рассматриваются композиции одинаковых движений (двух осевых симметрий, двух поворотов, двух параллельных переносов), при этом важно на примере задачи 23.4 показать возможность представить некоторое движение в виде композиции двух других движений. В остальных задачах рассматриваются композиции уже различных движений и трех движений.

Решения

23.2. Первый поворот на 90° можно представить в виде композиции симметрий относительно прямых CO и CB (где O — центр одного из двух квадратов, построенных на отрезке BC как на стороне), а второе — в виде композиции симметрий относительно прямых BC и BO.

23.3. При повороте на 90° вокруг точки C точка P перейдет в A, а эта точка перейдет в S при повороте на 90° вокруг точки B. Следовательно, точка S является образом точки P при фиксированной центральной симметрии.

23.6. Представьте каждый из поворотов в виде композиции двух осевых симметрий так, чтобы вторая симметрия в представлении первого поворота совпала с первой симметрией в представлении второго поворота (таковым может быть только симметрия от прямой, проходящей через центры двух данных поворотов).

В полученной композиции четырех симметрий две средние взаимно обратны и вследствие сочетательного закона уничтожаются. Оставшиеся две симметрии дадут поворот или перенос, если их оси окажутся параллельными. Центром поворота является точка пересечения осей, угол равен сумме углов данных поворотов. Вектор находится традиционно.

23.7. Представьте каждое из данных движений в виде композиции двух осевых симметрий. Осью общей симметрии в обоих представлениях является прямая, проходящая через центр поворотов и перпендикулярная направлению переноса.

23.9. Композиция центральной симметрии Z_O и параллельного переноса T представляет собой некоторую другую центральную симметрию: в самом деле, мы можем представить параллельный перенос в виде композиции двух центральных симметрий, одной из которых является Z_O. Пусть $T = Z_O \circ Z_{O_1}$. Тогда

$$Z_O \circ T = (Z_O \circ Z_{O_1}) \circ Z_{O_1} = Z_{O_1}.$$

23.12. Любой параллельный перенос можно представить в виде композиции двух центральных симметрий, одну из которых можно выбрать произвольно. Следовательно, если Z_{O_1}, Z_{O_2}, Z_{O_3} — центральные симметрии, то

$$Z_{O_2} Z_{O_3} = Z_{O_1} Z_{O_4}$$

для некоторого Z_{O_4}; при этом $Z_{O_1} \circ Z_{O_2} \circ Z_{O_3} = Z_{O_4}$.

23.13. Указание. Так как $Z_{O_2} \circ Z_{O_3} = Z_{O_1} \circ Z_{O_4}$, то

$$Z_{O_3} \circ Z_{O_2} \circ Z_{O_1} = Z_{O_4}.$$

Смотрите задачу 23.12.

Тема 24. СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ

Учебно-воспитательные цели. Теория вероятностей является едва ли не наиболее важной из применяющихся в практических задачах математических дисциплин.

Одна шестая реферативного журнала «Математика» посвящена теории вероятностей и ее приложениям.

Тем самым ясна важность преподавания начал теории вероятностей школьникам. По нашему мнению, знакомство с элементами этой теории надо начинать еще в средних классах.

Отметим связь темы 24 с теорией множеств и комбинаторикой.

Обсуждаются также вопросы, связанные с построением математических моделей реальных явлений. Несколько задач связано с оптимизацией.

Методические замечания. При рассказе о любой достаточно развитой математической теории возникает дилемма: ограничиться ли рассмотрением нескольких задач, относящихся к этой области математики, или же попытаться дать представление о некоторых ее методах и результатах. В теме 24 мы выбрали первое.

В большинстве задач используется классическое определение вероятности через равновозможные исходы, только в двух последних вероятности предполагаются заданными. Обращается внимание на необходимость правильного выделения равновозможных исходов (задачи 24.9, 24.12, 24.14). Задача 24.13 является частным случаем «задачи о выборе наилучшего элемента», имеющей многообразные практические приложения. В этой задаче, а также в задаче 24.15 отыскивается оптимальное поведение в случайной ситуации. «На уровне здравого смысла» вводится понятие «среднего значения» (математического ожидания) и поясняется закон больших чисел (задачи 24.14, 24.16).

Тема 24 может быть изучена за д в а - т р и занятия. Первое занятие наряду с занятием по теме «Лист Мёбиуса» наполовину экспериментальное. Эксперименты можно проводить не только с шариками, но и с одинаковыми по форме карточками (которые надо тщательно перемешивать перед очередным вытаскиванием), свернутыми в одинаковые трубочки полосками бумаги (их часто используют при «бросании жребия»), и т. д.

Урны — мешочки или ящички — нетрудно приготовить заранее. Урна может быть одна на кружок или на каждого участника своя, что, конечно, предпочтительнее. Некоторые задачи, например 24.13 и 24.16, а также задачи де Мере, могут быть предметом доклада участника кружка.

Дополнение «Вероятности выигрыша в «Спортлото»» существенно опирается на тему 17 «Комбинаторика». Вычисление вероятностей требует более трудоемких расчетов, чем в решениях задач основной части темы. Однако в настоящее время с лотереей «Спортлото» может познакомиться любой зритель телевидения. Для школьника «Спортлото» является, видимо, наиболее известным «реальным» явлением, в котором, с одной стороны, определяющую роль играет случай, с другой стороны, к которому классическая теория вероятностей может быть применена. Дополнение целесообразно использовать для подготовки доклада школьника на заседании математического кружка.

В обращении имеется большое количество книг по теории вероятностей. Однако необходимо отметить, что в некоторых из них имеются неточности и ошибки. Поэтому мы приводим небольшой список рекомендуемой литературы.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1982 (9-е изд.).

2. Гнеденко Б. В., Журбенко И. Г. Теория вероятностей и комбинаторика. — Математика в школе, 1968, № 2, с. 72—84 и № 3, с. 30—49.

3. Колмогоров А. Н. Введение в теорию вероятностей и комбинаторику. — Математика в школе, 1968, № 2, с. 63—72.

4. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. — М.: Мир, 1969.

5. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М.: Наука, 1971.

6. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1968.

7. Реньи А. Трилогия о математике. — М.: Мир, 1980.

8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1964, т. 1.

9. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей. Изд-во МГУ, 1972.

10. Кордемский Б. А. Математика изучает случайности. — М.: Просвещение, 1976.

11. Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1982.

12. Хургин Я. И. Как объять необъятное. — М.: Знание, 1979.

13. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях.— М.: Просвещение, 1979.

14. Орлов А. И. Вероятностное пространство, неравенство Чебышева и закон больших чисел — основа курса теории вероятностей для школьников. — В кн.: Подготовка студентов педагогических институтов к внеурочной работе по математике. Вып. 2. Вологда, 1976, с. 13—29.

Материалы по теории вероятностей и математической статистике иногда печатаются в журналах «Математика в школе» и «Квант».

Решения

24.5. Составим таблицу, в которой номер строки — число пальцев, показанных первым игроком, номер столбца — число пальцев, показанных вторым игроком, а на пересечении строки и столбца стоит общее число показанных пальцев, т. е. сумма номеров строки и столбца.

Всего имеется девять равновозможных исходов, соответствующих девяти элементам таблицы. Общее число показанных пальцев четно в 5 исходах, нечетно — в 4, больше четырех — в 3 исходах, меньше двух — ни в одном. Вероятности равны соответственно 5/9, 4/9, 1/3, 0.

	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

24.7. Прежде всего надо ввести равновозможные исходы. Противники равносильны — это значит, что из большого числа партий примерно половина кончается победой первого, а половина — второго. Мы считаем, кроме того, что результаты нескольких партий не влияют на результаты остальных. Это соглашение дает нам возможность установить, что, скажем, в матче из четырех партий все $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ возможных последовательностей побед и поражений имеют одинаковую вероятность.

Рассмотрим в качестве примера большое число матчей из двух партий. Из n матчей примерно в $n/2$ в первой партии победит первый игрок. Поскольку результат первой партии не влияет на результат второй, то примерно в половине тех матчей, где первый игрок победил в первой партии, он проиграет во второй, всего примерно в $n/2 \times 1/2 = n/4$ матчах. Аналогично события «победил в обоих партиях первый игрок», «победил в первой партии второй игрок, а во второй — первый», «в обоих партиях победил второй игрок» будут иметь место примерно в $n/4$ матчах, т. е. вероятности всех этих событий равны 1/4.

В дальнейшем в задачах мы будем сталкиваться со случаями, когда несколько опытов проводятся независимо друг от друга. Как в предыдущем абзаце, можно показать, что вероятность события «исход первого опыта есть A, а второго — B» равняется произведению вероятности события «исход первого опыта есть A» и вероятности события «исход второго опыта есть B».

Вернемся к задаче. В матче из 4 партий имеется 16 равновероятных исходов — последовательностей побед и поражений первого игрока. Событию «первый игрок победил в трех партиях» благоприятны 4 исхода, поскольку единственное поражение может стоять на одном из четырех мест. Значит, вероятность выиграть 3 партии из 4 у равносильного противника равна 1/4.

В матче из 8 партий имеется $2^8 = 256$ равновозможных исходов — последовательностей побед и поражений первого игрока. В скольких из них ровно 5 побед? Другими словами, сколько существует подмножеств из 5 элементов в множестве из 8 элементов? Как можно показать рассуждениями типа приведенных в теме «Комбинаторика», это число равно $(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4) : (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 8 \times 7 = 56$. Значит, вероятность выиграть 5 партий из 8 у равносильного противника равна $56/256 = 7/32$, что меньше $1/4 = 8/32$ — вероятности выиграть три партии из четырех.

24.8. Вероятность того, что первый же раз вы наберете правильный номер, равна 1/10, поскольку цифр всего десять, все десять исходов — набор 1, набор 2 и т. д. — равновозможны, а благоприятным является только один из них. Если первый раз забытая цифра была набрана неправильно, при втором звонке вы будете набирать одну из девяти оставшихся цифр и вероятность успеха будет равна 1/9. Ровно два звонка будут сделаны с вероятностью $\frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$. Вероятность того, что придется сделать не более двух звонков, равна $1/10 + 1/10 = 0{,}2$.

24.10. Второй по мастерству игрок занимает второе место тогда и только тогда, когда он находится в той половине турнирной лестницы (верхней или нижней), в которой нет первого по мастерству игрока, поскольку в противном случае второй проиграет первому ранее финала. Поскольку имеется семь ступеней турнирной лестницы (кроме ступени, занятой первым по мастерству игроком), которые может занимать второй по мастерству игрок, все эти исходы равновозможны, а 4 из них являются благоприятными для выхода в финал, то искомая вероятность равна 4/7.

24.11. Обозначим близнецов через A и B. Если A и B входит в одну пару в турнирной лестнице, что происходит с вероятностью 1/7 (для B равновозможны 7 мест, не занятых A), то близнецы заведомо встречаются в первом же туре. Вероятность того, что B находится в соседней паре, равна 2/7. В этом случае близнецы встречаются (во втором туре) только тогда, когда они оба выиграют поединки первого тура, что происходит с вероятностью 1/4. Значит, вероятность события «близнецы встречаются во втором туре» равна $2/7 \times 1/4 = 1/14$. Наконец, вероятность того, что B находится в другой половине турнирной лестницы, равна 4/7, и в этом случае вероятность встречи равна $1/4 \times 1/4 = 1/16$, поскольку оба должны победить в обоих турах, так что вероятность события «близнецы встречаются в финале» есть $4/7 \times 1/16 = 1/28$. Все возможности перечислены, вероятность встречи в одном из туров есть сумма вероятностей встреч в первом, втором турах и финале, т. е. $1/7 + 1/14 + 1/28 = 1/4$.

24.12. Как и в обсуждении задачи 24.14, нам полезно ввести вспомогательный опыт, состоящий в двукратном бросании монеты. Из четырех равновозможных исходов *ГР* (при первом бросании выпал герб, при втором — решетка), *ГГ*, *РГ*, *РР* в первых трех победа принадлежит первому игроку (в первых двух случаях в самой игре монету второй раз не бросают), в четвертом — второму. Шансы игроков на выигрыш относятся как 3 к 1, в этом же отношении надо разделить ставку.

24.15. Пусть a есть вероятность того, что дочка выиграет у отца, а b есть вероятность ее выигрыша у дяди. Чтобы заработать куклу, дочка может либо выиграть все три партии, либо выиграть первые две, а третью проиграть, либо первую проиграть, а вторую и третью выиграть. Если она действует по схеме отец — дядя — отец, то вероятность выигрыша трех партий есть a^2b, вероятности остальных двух событий равны $a(1-a)b$. (Здесь мы пользовались тем, что результаты различных партий независимы между собой, так что вероятность того, что в нескольких партиях будут определенные победители, равна произведению соответствующих вероятностей, относящихся к отдельным партиям.) Вероятность заработать куклу равна: $a^2b + 2a(1-a)b = ab(2-a)$.

При схеме дядя — отец — дядя вероятность выигрыша трех партий есть ab^2, вероятность выиграть две партии есть $2ab(1-b)$, соответственно вероятность получить куклу равна: $ab^2 + 2ab(1 -$

— b) = ab (2 — b). Поскольку дядя играет лучше отца, то b меньше a. Значит, 2 — b больше 2 — a, и вероятность получить куклу больше при схеме дядя — отец — дядя (хотя, как можно показать, среднее число побед при этой схеме меньше!).

24.16. Поскольку картинки появляются независимо одна от другой, то вероятность появления двух картинок «яблоки» равна $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$, вероятность появления двух «колокольчиков» равна $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$, а вероятность появления двух «вишен» равна $0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$. Значит, игрок получает 50 центов с вероятностью 0,01, 10 центов с вероятностью 0,16, 5 центов с вероятностью 0,25 и ничего не получает с вероятностью $1 - 0{,}01 - 0{,}16 - 0{,}25 = 0{,}58$. Как показано при обсуждении задачи 24.14, среднее значение равно сумме возможных значений, умноженных на их вероятности. Значит, средний выигрыш равен $50 \times 0{,}01 + 10 \times 0{,}16 + 5 \times 0{,}25 = 0{,}5 + 1{,}6 + 1{,}25 = 3{,}35$ цента. Поскольку для запуска «однорукого бандита» необходимо уплатить 5 центов, то игрок теряет в среднем 1,65 цента за одну игру. За 100 игр игрок потеряет в среднем 1 доллар 65 центов.

Дополнение. Вероятности выигрыша в «Спортлото». Как известно, в «Спортлото» играют следующим образом. Участник лотереи покупает карточку, на которой три раза повторена таблица 7×7 клеток, в которых выписаны натуральные числа от 1 до 49, отмечает в каждой таблице шесть клеток, одних и тех же для всех таблиц, затем сдает две таблицы оргкомитету, одну оставляет себе. Через некоторое время проводится тур — из барабана, содержащего 49 шаров, занумерованных числами от 1 до 49, случайным образом извлекаются 6 шаров. Премии выдаются тем участникам, у которых все шесть отмеченных чисел совпадают с номерами извлеченных шаров; тем, у кого среди отмеченных ими чисел пять совпадают с номерами каких-либо пяти из извлеченных шаров; и тем, у кого среди отмеченных чисел есть четыре номера вытащенных шаров; наконец, тем, кто угадал три номера из шести. Отметим, что при этом совершенно не важно, в каком именно порядке извлекались шары.

Лотереи — одна из областей применения классической теории вероятностей. Дело в том, что устроители лотереи делают все возможное, чтобы исходы тура были равновозможными. Сколько же исходов в «Спортлото»? Ясно, что их столько, сколькими способами можно выбрать 6 предметов из 49, т. е. C_{49}^6 — «число сочетаний из 49 по 6». С помощью методов, развитых в теме 17 «Комбинаторика», можно подсчитать, что в «Спортлото» имеется $C_{49}^6 = 13\,983\,816$ равновозможных исходов. Для вычисления вероятностей выигрыша необходимо найти число исходов, в которых из шести данных чисел все шесть являются номерами извлеченных шаров; пять из шести данных чисел являются номерами извлеченных шаров; четыре являются номерами извлечённых шаров; три являются номерами извлеченных шаров.

Только один исход благоприятен событию: «все шесть данных чисел являются номерами извлеченных шаров». Следовательно, вероятность этого события такова:

$$\frac{1}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,000\,071\,511.$$

Подсчитаем теперь вероятность того, что номера пяти вытащенных шаров содержатся среди данных шести чисел. Номера шаров распределяются так: пять из них содержатся среди данных шести чисел, а шестой — среди оставшихся 43 чисел. Пять номеров из 6 можно выбрать C_6^5 способами, а один номер из 43 — C_{43}^1 способами. Всего благоприятных исходов имеется $C_6^5 \times C_{43}^1 = 6 \times 43 = 258$. Вероятность угадать пять из шести номеров равна:

$$\frac{258}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,018\,45.$$

Подсчитаем теперь вероятность угадать четыре номера из шести. Номера вытащенных шаров распределяются так: четыре из них содержатся среди данных шести чисел, а два — среди оставшихся 43 чисел. Четыре номера из шести можно выбрать C_6^4 способами, а два номера из 43 — C_{43}^2 способами. Всего благоприятных исходов имеется $C_6^4 \times C_{43}^2 = 15 \times 903 = 13\,545$. Вероятность угадать четыре из шести номеров равна:

$$\frac{13\,545}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,986\,62.$$

Наконец, займемся вероятностью угадать три номера из шести. В этом случае три номера вытащенных шаров содержатся среди шести данных чисел, а три — среди остальных 43 чисел. Три номера из шести можно выбрать $C_6^3 = 20$ способами, а три номера из 43 можно выбрать $C_{43}^3 = 43 \times 42 \times 41 : 6 = 43 \times 7 \times 41 = 43 \times$ $\times\, 287 = 11\,480 + 861 = 12\,341$ способами. Всего благоприятных исходов имеется $20 \times 12\,341 = 246\,820$. Вероятность угадать три из шести номеров равна:

$$\frac{246\,820}{13\,983\,816} \approx 0{,}017\,650\,40.$$

Подсчитаем вероятность выигрыша данного билета. Она равна сумме вероятностей угадать 3, 4, 5, 6 номеров:
$\approx 0{,}017\,650\,40 + 0{,}000\,968\,62 + 0{,}000\,018\,45 + 0{,}000\,000\,07 =$
$= 0{,}018\,637\,54.$

Точное значение этой вероятности таково:

$$\frac{1 + 258 + 13\,545 + 246\,820}{13\,983\,816} = \frac{260\,624}{13\,983\,816}.$$

Обычно покупают не один билет «Спортлото», а несколько. На каждом из них отмечают шесть чисел. Мы только что установили, что вероятность выигрыша одного билета не зависит от того, какие именно числа отмечены. Как лучше действовать в случае двух билетов: отметить одни и те же числа или же сделать так, чтобы множества отмеченных чисел не имели ни одного общего элемента?

Перед тем как отвечать на этот вопрос, надо условиться, что означает слово «лучше». Будем считать здесь, что тот способ лучше, у которого больше вероятность выигрыша хотя бы одного билета.

Полезным окажется один факт из элементарной теории множеств. Число элементов множества A (из конечного числа элементов) обозначим $n(A)$. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в теме 2 «Круги Эйлера», нетрудно показать, что

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

для любых множеств A и B. Из этой формулы следует, что

$$n(A \cup B) \leqslant n(A) + n(B),$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $A \cap B$ — пустое множество. Ясно также, что $n(A \cup B)$ не меньше, чем максимальное из чисел $n(A)$ и $n(B)$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда одно из множеств A, B полностью лежит в другом или они совпадают.

Применим эти результаты к теории «Спортлото». Пусть A — множество исходов, при которых выигрывает первый билет, B — второй. Тогда, как показано выше, $n(A) = n(B) = 260\,624$. Ясно, что $A = B$ означает, что отмечены одни и те же числа, а $A \cap B$ пусто тогда и только тогда, когда пересечение множеств чисел, отмеченных на билетах, состоит не более чем из двух элементов. Множество исходов, при которых выигрывает хотя бы один билет, есть $A \cup B$. С помощью результатов предыдущего абзаца получаем, что

$$260\,624 \leqslant n(A \cup B) \leqslant 521\,248$$

и вероятность выигрыша хотя бы одним из двух билетов лежит между $260\,624 : 13\,983\,816$ и $521\,248 : 13\,983\,816$, достигая нижней границы, если отмечены одни и те же числа, достигая верхней границы, если множества отмеченных чисел имеют пересечение, состоящее не более чем из двух элементов.

Из теории следует практическая р е к о м е н д а ц и я: чтобы максимизировать вероятность выигрыша хотя бы одного из билетов, можно на каждом новом билете отмечать те числа, которые *не были* отмечены на предыдущих.

З а д а ч а. В каких границах заключена вероятность того, что хотя бы один из k билетов выиграет (будет угадано не менее 3 номеров), если $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$?

Рассмотренный критерий оптимальности — максимизация вероятности выигрыша хотя бы одного из билетов, — разумеется, не единственный и даже не самый естественный. Естественнее максимизировать средний выигрыш за много туров. Однако можно доказать, что, как ни покажется это странным, при любом способе заполнения двух карточек — отмечены ли одни и те же номера или различные — средний выигрыш за много туров один и тот же (при условии, что величины выплат фиксированы, как в задаче 24.16).

Тема 25. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ, ШИФРОВКИ, ТАИНСТВЕННЫЕ ИСТОРИИ

Математические ребусы

Учебно-воспитательные цели. В большинстве предлагаемых задач имеется несколько правильных расшифровок (обычно 2—5). Это сделано специально с целью борьбы с решениями путем подбора. В результате каждая задача может быть предложена для работы на двух уровнях: а) найти какое-нибудь решение, как можно больше решений; б) найти все решения и доказать, что других нет. Для правильного доказательства в пункте б) обычно необходимо разобрать все случаи в разветвленной логической схеме. Математические ребусы — удобный объект для тренировки учеников в проведении достаточно сложных (разветвленных, трудоемких) логических рассуждений, в которых необходимо разобрать все возможные случаи. Трудно переоценить важность подобной тренировки — на одних «блестящих идеях» в математике «далеко не уедешь»! Опыт олимпиад журнала «Пионер», где математические ребусы постоянно предлагались, показал, что ученики средних классов вполне способны провести и записать подобные рассуждения.

Подавляющее большинство возникающих в практической деятельности проблем можно решать многими разными способами. Необходимо рассматривать все эти способы, дабы сравнить их и выбрать наилучший. Однако исследователи и инженеры часто останавливаются на каком-либо одном варианте и не изучают альтернативы. В результате принимаются решения, отличающиеся от оптимальных. Трудно не увидеть роль школы в воспитании вредной привычки ограничиваться нахождением какого-либо *одного* ответа. Только наличие *нескольких* правильных расшифровок позволяет показать ученикам необходимость строгого логического рассуждения и недостаточность слепого подбора цифр.

Как показали специальные исследования, в частности проведенный нами анкетный опрос победителей Всесоюзной заочной математической олимпиады журнала «Пионер» (1972 г.), учеников средних классов привлекают математические ребусы, среди наиболее запомнившихся победителям олимпиады «Пионера» задач они составили более одной трети. Кроме нестандартной занимательной формы, ребят привлекает возможность повозиться с цифрами, «построить» ответ. В этом проявляется присущее ученикам средних классов предпочтение «алгоритмических» задач (в которых требуется что-либо найти, построить, указать алгоритм действий) задачам на доказательство.

Методические замечания. Математические ребусы можно использовать во время разминки на занятиях кружка, включать в домашние задания, помещать в математических стенгазетах и т. д. Устраивать специальные занятия по решению математических ребусов не представляется целесообразным.

При записи произведения знак умножения часто опускается, и школьники иногда путают, например, зашифрованное трехзначное число ABC и произведение $A \times B \times C$. Чтобы не допускать путаницы, часто трехзначное число отмечают чертой сверху: $\overline{ABC}$. В настоящем тексте мы всегда будем употреблять знак умножения $\times$.

В различных источниках имеется большое число задач типов «математические ребусы» и «сбежали цифры» (см., например, журналы «Квант», «Пионер», «Наука и жизнь»). Не слишком трудно их и составлять. Однако публикуемые и рассказываемые решения часто неудовлетворительны, ибо не содержат полного логически строгого разбора всех возможных случаев. Поэтому мы сочли необходимым и полезным поместить полностью решения некоторых задач.

Ответы, указания, решения

25.2. Поскольку $КОКОКО : КО = 10\,101$, то $К = 1$, $А = 0$, а буквой «$О$» зашифрована любая из цифр 2, 3, ..., 9. Всего восемь расшифровок.

25.4. Решение совпадает с решением задачи 25.3 вплоть до проверки чисел 376, 624. В отличие от задачи 25.3 второе из этих чисел годится, а первое нет. Ответ: $625 \times 625 = 390\,625$.

25.7.
$$\begin{array}{r} 748190 \\ +\ 67447 \\ \hline 815637 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 546290 \\ +\ 75445 \\ \hline 621735 \end{array}$$

25.8.
$$\begin{array}{r} 186859 \\ +\ 96959 \\ \hline 283818 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 385869 \\ +\ 95969 \\ \hline 481838 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 387869 \\ +\ 97969 \\ \hline 485838 \end{array}$$

25.9. $БУЕР$ — это 1972, 5472 или 8632.

25.10. Ответ: заменить буквы цифрами можно двумя способами: $ТРУД = 7814$, $ВОЛЯ = 6509$, $УДАЧА = 14\,323$ или $ТРУД = 6514$, $ВОЛЯ = 7809$, $УДАЧА = 14\,323$. Ответы отличаются только тем, что числа $Т$ и $В$, $Р$ и число, обозначенное буквой $О$, одновременно поменялись местами. С самого начала можно было предсказать, что при такой замене расшифровка останется правильной (почему?).

Указание. Ясно, что $У = 1$, а $Д \neq 0$ (почему?). Значит, $ТР + ВО$ не меньше 119. Но $ТР$ и $ВО$ делятся на 13, значит, они среди чисел 26, 39, 52, 65, 78 (почему здесь нет 13 и 91?). Остается проверить две комбинации: $ТР + ВО = 78 + 52$ и $ТР + ВО = 78 + 65$ ... .

Любящим числа. Попробуйте найти все способы расшифровки, а не только те, в которых числа TP и BO делятся на 13. Подсказка — всего 16 ответов.

25.11. Нуль впереди числа не пишется, поэтому буквы K, $Л$ и O заменять нулем нельзя. Вспомнив, что запись AB означает $10A+B$, легко получим равенство

$$2(5K+Я)=9(«O»-Л),$$

в котором буква O взята в кавычки, чтобы невзначай не смешать с похожим на нее по написанию нулем. Левая часть делится на 2, поэтому $(«O»-Л)$ тоже делится на 2 (ведь 9 на 2 не делится!). Все буквы различны, поэтому $(«O»-Л)$ может быть равно 2, 4, 6, 8 (но не 0). Тогда $(5K+Я)$ равно соответственно 9, 18, 27, 36. Если $5K+Я=9$, то $K=1$, $Я=4$. Поскольку разные буквы должны быть заменены разными цифрами, то для «O» и $Л$ остаются четыре возможности: $«O»=5, 7, 8, 9$ и соответственно $Л=3, 5, 6, 7$. Разобрав остальные три случая, получим одиннадцать способов расшифровки: $КОЛЯ=1534$, 1754, 1864, 1974, 2518, 2738, 2958, 4827, 4937, 5712, 5932. Из них только для двух: $КОЛЯ=1974$ и $КОЛЯ=4827$ сумма $K+O+Л+Я$ равна 21.

25.12.

$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}5782\\7192\\\hline 12974\end{array}\end{array}\qquad\begin{array}{r}+\begin{array}{r}9382\\3152\\\hline 12534\end{array}\end{array}\qquad\begin{array}{r}+\begin{array}{r}9675\\6185\\\hline 15860\end{array}\end{array}$$

25.13. $ИГРЕК=37\,820$, $ИКС=305$, $ЗЕТ=124$.

25.14. 1. Сумма двух четырехзначных чисел не превосходит 19 998. Нуль в начале числа не пишется. Поэтому $K=1$.

2. Поскольку $4999+4999$ меньше 10 000, то C не меньше 5. Запись столбца единиц показывает, что C — четная цифра. Поэтому $C=6$ или $C=8$.

3. Рассмотрим сначала случай $C=6$. Поскольку запись столбца единиц показывает, что $2Л=C$ или $2Л=10+C$, то $Л=3$ или $Л=8$.

4. Случай $C=6$, $Л=8$ невозможен, поскольку $6999+6999=$ $=13\,998$ меньше $18\,000=10\,000K+1000Л$.

5. Рассмотрим случай $C=6$, $Л=3$. Заменим в равенстве буквы K, C и $Л$ соответствующими цифрами:

$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}6\,T\,«O»\,3\\6\,T\;\;У\;\;3\\\hline 1\,3\,A\;\;6\;\;6\end{array}\end{array}$$

Нам осталось расшифровать равенство

$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}T\,«O»\\T\;\;У\\\hline 1\,A\;\;6\end{array}\end{array}\qquad(*)$$

при условии, что цифры, зашифрованные буквами T, «O», $У$, A, не содержатся среди цифр 1, 3, 6 (соответствующих буквам K, $Л$, C).

6. Возможны два случая: «O» $+$ $У = 6$ и «O» $+$ $У = 16$. Рассмотрим сначала первый из них. Тогда буквой «O» зашифрована цифра, не превосходящая 6. Значения 0, 1, 3, 5, 6 отпадают, поскольку разные буквы обозначают разные цифры. Действительно, если «O» $= 0$, то $У = 6 - 0 = С$; если «O» $= 1$, то «O» $= К$; если «O» $= 3$, то $У = 6 - 3 =$ «O»; если «O» $= 5$, то $У = 6 - 5 = К$; если «O» $= 6$, то «O» $= С$. Следовательно, «O» $= 2$ или «O» $= 4$. Тогда $У = 4$ или $У = 2$ соответственно.

7. В случае «O» $+ У = 6$ в следующий столбец ничего не переносится, поэтому $Т + Т = 10 + А$, причем цифры, зашифрованные буквами $Т$ и $А$, не содержатся среди цифр 1, 2, 3, 4, 6. Итак, для $Т$ и $А$ возможны значения 0, 5, 7, 8, 9. Подставим вместо $Т$ каждое из этих значений. Если $Т = 0$, то $А = -10$. Если $Т = 5$, то $А = 0$. Если $Т = 7$, то $А = 4$. Если $Т = 8$, то $А = 6$. Если $Т = 9$, то $А = 8$. Мы видим, что $А$ попадает в множество допустимых значений только тогда, когда $Т = 5$ или $Т = 9$. Итак, либо $Т = 5$, $А = 0$, либо $Т = 9$, $А = 8$.

8. Мы установили, что в случае «O» $+ У = 6$ либо «O» $= 2$, $У = 4$, либо «O» $= 4$, $У = 2$; одновременно либо $А = 0$, $Т = 5$, либо $А = 8$, $Т = 9$. Комбинируя каждую возможность для «O» и $У$ с каждой возможностью для $А$ и $Т$, получаем четыре расшифровки равенства (*):

$52 + 54 = 106$; $54 + 52 = 106$; $92 + 94 = 186$; $94 + 92 = 186$.

Следовательно, исходную запись можно расшифровать следующими четырьмя способами:

$$\begin{array}{r}6523\\+\;6543\\\hline 13066\end{array}\qquad\begin{array}{r}6543\\+\;6523\\\hline 13066\end{array}\qquad\begin{array}{r}6923\\+\;6943\\\hline 13866\end{array}\qquad\begin{array}{r}6943\\+\;6923\\\hline 13866\end{array}$$

В случае $С = 6$, $Л = 3$, «O» $+ У = 6$ других способов расшифровки, как мы показали, не существует. Осталось рассмотреть случай $С = 6$, $Л = 3$, «O» $+ У = 16$ и случай $С = 8$.

9. Если «O» $+ У = 16$, то максимальная из цифр, зашифрованных буквами «O» и $У$, равна 9. Действительно, если бы максимальная цифра не превосходила бы 7, то сумма «O» $+ У$ была бы не больше 14. Если бы максимальная цифра равнялась 8, то вторая цифра также равнялась бы $16 - 8 = 8$, что невозможно. Если же максимальная цифра равняется 9, то вторая равна $16 - 9 = 7$. Значит, «O» $= 7$, $У = 9$ либо «O» $= 9$, $У = 7$.

10. Если «O» $+ У = 16$, то в следующий столбец переносится единица. Следовательно, $Т + Т + 1 = 10 + А$, причем для $А$ и $Т$ запрещены значения 1, 3, 6, 7, 9. Поскольку $А$ неотрицательно, то $2Т$ не меньше 9, и цифра $Т$ может принимать значения 5 и 8. Тогда $А = 1 = К$ и $А = 7 =$ «O» или $А = 7 = У$ соответственно. Следовательно, нет ни одной расшифровки, в которой «O» $+ У = 16$.

11. Осталось проверить случай $С = 8$. Сложение в столбце единиц исходного равенства показывает, что в этом случае $2Л =$

$= 8$, $Л = 4$ или $2Л = 18$, $Л = 9$. Однако $8000 + 8000$ больше 14 999, поэтому случай $Л = 4$ не дает расшифровки. Итак, если $С = 8$, то $Л = 9$. Однако $8999 + 8999$ меньше 19 000, и случай $Л = 9$ также невозможен.

12. Все случаи рассмотрены, все ответы найдены (их оказалось четыре), доказано, что других расшифровок нет. Мы видим, что для полного решения необходимо провести достаточно длинные рассуждения.

Решение является правильным, если в нем разобраны все возможные случаи. Распространенная ошибка школьников состоит в том, что исследуется только одна ветвь графа логических возможностей, ведущая к некоторой расшифровке.

13. Четыре расшифровки разбиваются на две пары, в каждой из которых фиксированы значения всех букв, кроме «*О*» и *У*. При взгляде на ребус можно было сразу отметить, что буквы «*О*» и *У* входят только в столбец десятков в слагаемых и, следовательно, из одной расшифровки можно получить другую, поменяв местами цифры, соответствующие буквам «*О*» и *У*.

Задачи типа «сбежали цифры»

Учебно-воспитательные цели: совпадают с таковыми для «математических ребусов».

Методические замечания. Как показал опыт «Пионера», дети весьма любят сами составлять задачи типа «сбежали цифры», что, разумеется, нетрудно — достаточно взять произвольную запись арифметического действия и часть цифр заменить звездочками. Участникам математического кружка необходимо дать возможность составлять ребусы этого типа и предлагать их товарищам на заседаниях кружка. Возможно, составление задач на «сбежавшие цифры» полезно и на обычных уроках, например при повторении арифметики (ср.: Эрдниев П. М. Методика упражнений по математике. М., «Просвещение», 1970).

Ответы.

25.17. $235 \times 96 = 22\,560$ или $235 \times 79 = 18\,565$.

25.18. $24 \times 32 = 768$.

25.19. $66 \times 111 = 7326$.

Один из видов шифровок

Учебно-воспитательные цели. Разгадывание зашифрованных сообщений, вообще говоря, не относится к математике. В отличие от «математических ребусов» и задач типа «сбежали цифры» не имеет смысла разбирать все возможные варианты, ибо вряд ли можно какое-либо достаточно длинное сообщение расшифровать двумя способами и получить два различных осмысленных текста. Однако школьники средних классов любят шифры, и для воспитания умения искать решение применение шифров оправдано. Весьма быстро школьники овладевают навыком самостоятельного сочинения шифров, что может быть использовано при организации математических боев, елок, вечеров...

Методические замечания. Способ шифровки сообщается школьникам, разумеется, без указания конкретных пар букв. Шифруемые сообщения должны быть записаны в соответствии со всеми правилами современного русского языка.

Ответы

25.21. Наша Таня громко плачет,
Уронила в речку мячик.
Тише, Танечка, не плачь,
Не утонет в речке мяч.

25.23. — Когда я употребляю какое-нибудь слово, — сказал Шалтай-Болтай довольно презрительно, — оно означает только то, что я хочу, чтобы оно обозначало, — ни больше, ни меньше.

«Таинственные истории»

Эмоциональная сфера школьников за 2 ч занятий математического кружка приходит в сильное возбуждение. Поэтому большое значение имеет правильная организация конца занятия.

Необходимо *снять напряжение* и перевести мысли учеников в обычное русло. Эмоциональное напряжение сочетается с усталостью, что при внезапном прекращении работы вызывает неприятные ощущения. Между тем необходимо, чтобы о занятии математического кружка осталось приятное воспоминание. В вечерней математической школе при Московском математическом обществе применяется следующий прием организации окончания занятия.

Руководитель кружка рассказывает «таинственную историю» и просит восстановить пропущенные факты. Школьники задают вопросы, начинающиеся словами «верно ли, что...». Руководитель отвечает только «да», «нет» или «вопрос некорректно поставлен» (если нельзя ответить ни «да», ни «нет»). Если в разгадывании участвуют 10—20 человек, то очередные вопросы возникают быстро и беседа идет в быстром темпе. На одну «таинственную историю» уходит обычно 15—20 мин. Через некоторое время ученики начинают сами придумывать «таинственные истории», используя сказки, анекдоты, детективы...

«Таинственные истории» *учат логически мыслить* в нематематических ситуациях. Их разгадывание напоминает работу ученого в экспериментальных науках. Коллективное разгадывание «таинственной истории» находится «между» занятиями математикой и обычной детской игрой, и потому с его помощью решаются указанные выше педагогические задачи организации конца занятия.

Примеры

1. Ковбой вошел в бар и знаками попросил воды. Вместо ответа хозяин выхватил кольт и выстрелил в потолок. Ковбой поблагодарил и вышел. В чем дело?

2. Человеку пришла посылка, в которой лежала мертвая мышь. Он сообщил об этом в полицию, и отправителя посылки привлекли к суду за мошенничество. В чем дело?

3. Каждую ночь человек набирает номер телефона и дожидается, пока на другом конце провода снимут трубку. Ничего не говоря, он кладет трубку и засыпает. В чем дело?

4. Джон любил Дженни. Но однажды он, с силой закрыв наружную дверь, услышал странные звуки в комнате. Он вбежал туда и увидел Дженни, бьющуюся в агонии на полу, залитом водой. Что произошло?

Разгадки

1. У ковбоя в горле застряла кость. От неожиданного выстрела он вздрогнул, и кость выскочила.

2. Отправитель должен был послать драгоценности. Он надеялся, что мышь прогрызет дыру и убежит и почту удастся обвинить в потере драгоценностей.

3. Человек живет в гостинице. Звонит он соседу, храп которого не дает ему уснуть.

4. Дженни — золотая рыбка. Аквариум упал от сотрясения, когда Джон захлопнул дверь.

Тема 26. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ
(решения и ответы)

26.1. Футбольный чемпионат. Пусть в чемпионате участвуют x команд. Каждая команда играет с каждой из остальных $x - 1$ матчей. В каждом матче разыгрываются 2 очка — их получает команда-победительница, а при ничьей команды делят их поровну. Если бы все игры закончились вничью, то каждая команда набрала бы $x - 1$ очков, а всего было бы набрано $x(x - 1)$ очков. Значит, общее число очков, набранных всеми командами, равно $x(x - 1)$. Если число команд $x = 4$, то общее число очков $4(4 - 1) = 12$. В нашем случае число очков не меньше, чем $7 + 5 + 3 = 15$, значит, команд не меньше пяти.

С другой стороны, 3 призера набрали 15 очков, в среднем по 5 очков на команду, а остальные команды набрали не более чем по 3 очка. Это значит, что если все набранные очки поделить поровну, то каждая команда получит менее пяти очков, т. е. $x - 1$ меньше пяти, а x меньше шести. Итак, число команд $x = 5$, общее число очков $x(x - 1) = 20$, последние две команды набрали $20 - 15 = 5$

очков. Ясно, что одна из них, занявшая 4-е место, набрала 3 очка, а команда, занявшая последнее, 5-е место, набрала 2 очка.

26.2. Вверх по лестнице. Занумеруем любые восемь ступенек, идущих подряд, числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Икс наступал на ступеньки 1, 3, 5, 7 или 2, 4, 6, 8. Разберем первую возможность (вторая рассматривается аналогично).

Игрек наступал на ступеньки 1, 4, 7, или 2, 5, 8, или 3, 6. В каждом из этих случаев найдутся две ступеньки, идущие через одну, на которые не наступал ни Икс, ни Игрек. В первом случае это ступеньки 6-я и 8-я, во втором — 4-я и 6-я, в третьем — 2-я и 4-я. Зет перепрыгивает через четыре ступеньки, значит, и он не наступал хотя бы на одну из этих двух ступенек.

26.3. Ясно, что 31^{11} меньше, чем 34^{11}. Но $34^{11} = 17^{11} \times 2^{11} = 17^{11} \times 2048$, в то время как $17^{14} = 17^{11} \times 17^3 = 17^{11} \times 4913$. Отсюда видно, что 17^{14} больше, чем 34^{11}, и, значит, больше, чем 31^{11}.

26.4. Удивительное число! Ответ: 2 100 010 006.

Из условия следует, что сумма цифр искомого числа равна 10. Это замечание облегчает поиск требуемого числа.

26.5. Полярник не шутил. Можно доказать строго, хотя мы этого делать не будем, что кратчайший путь, соединяющий любые две точки A и B на сфере, — это дуга окружности большого круга, проходящей через A и B. (Большим кругом называют сечение шара плоскостью, проходящей через его центр.) Впрочем, можно убедиться в этом экспериментальным путем, натягивая между точками A и B глобуса тонкую резинку (рис. 179). В частности, если точки A и B лежат на одном меридиане, то кратчайший путь от A к B идет по меридиану. Так как меридианы Ашхабада и Сан-Франциско почти совпадают, то кратчайший путь из Ашхабада в Сан-Франциско проходит вблизи от северного полюса.

Линии, вдоль которых располагаются кратчайшие пути на данной поверхности, называются г е о д е з и ч е с к и м и. На плоскости геодезическими являются прямые, на сфере — окружности больших кругов. Попытаемся найти геодезические линии на поверхности прямого кругового цилиндра. С этой целью рассмотрим развертку цилиндрической поверхности на плоскости. При этом геодезические линии на цилиндрической поверхности превратятся в геодезические линии на плоскости, т. е. в отрезки прямых. Отсюда следует, что геодезическими на цилиндрической поверхности являются образующие, окружности сечений, параллельных основаниям цилиндра, и винтовые линии (рис. 180). Аналогично решается вопрос о геодезических на поверхности конуса.

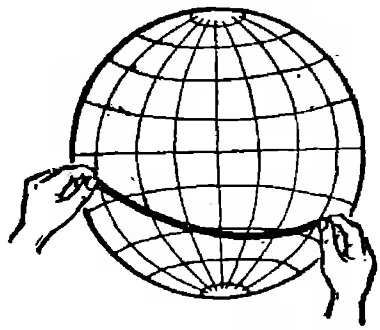


Рис. 179

26.6. Пусть a — наименьшее из данных чисел, а b — наибольшее. Заметим прежде всего, что если $a = 5$, то и остальные числа равны по 5, иначе сумма была бы

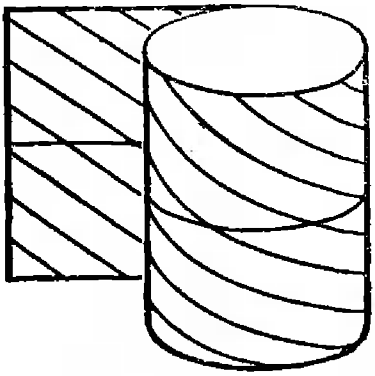


Рис. 180

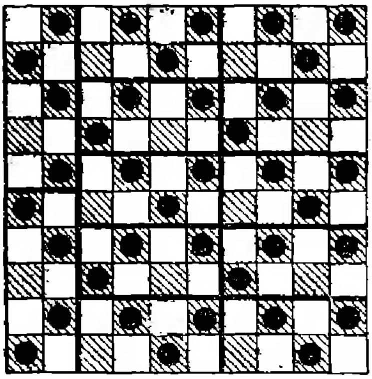


Рис. 181

больше 25. Точно так же, если $b = 5$, то и все остальные числа равны 5, а их произведение равно $5^5 = 3125$, т. е. меньше 3200.

Рассмотрим случай, когда a меньше 5, а b больше 5. Заменим числа a и b числами $a + 1$ и $b - 1$. Сумма чисел при этом не изменится, а произведение увеличится, так как

$$(a + 1) \times (b - 1) = ab + (b - a - 1),$$

$b - a$ не меньше двух и число $b - a - 1$ положительно. Если в новом наборе чисел, получившемся при такой замене, не все числа равны 5, повторим ту же процедуру еще раз и будем это делать до тех пор, пока все числа не уравняются. Легко понять, что такой момент рано или поздно наступит, ведь при каждой процедуре два числа из пяти «приближаются» к числу 5 на единицу. (Строгое доказательство: сумма абсолютных величин отклонений данных чисел от числа 5 на каждом шагу уменьшается на 2 и через конечное число шагов станет равной 0.) В этот момент произведение пяти чисел достигнет своего наибольшего значения — 3125, так как на каждом шагу оно только возрастало.

26.7. На рисунке 181 показано, как можно расставить на доске 38 шашек, удовлетворив сформулированному в задаче условию. Докажем, что больше 38 шашек таким образом расставить нельзя. Пусть на доске поставлены шашки (их меньше 50), и ни одна не бьет другую. Если при этом на некоторой диагональной линии (так мы называем прямую, параллельную одной из диагоналей доски) рядом стоят две шашки, то все поля этой линии должны быть заняты, иначе шашка, с одной стороны от которой поле свободно, а с другой — занято, была бы бита.

Далее, не может быть двух соседних диагональных линий, занятых шашками, в противном случае из предыдущего вытекало бы, что все черные поля заняты. Этих двух замечаний достаточно, чтобы утверждать, что в каждом из 12 прямоугольников, на которые разделена доска на рисунке 181, должно быть хотя бы одно свободное черное поле. Значит, число занятых полей не более $50 - 12 = 38$, что и требовалось доказать.

26.8. Опровергающий пример: 9 999 999 918.

26.9. Нет, не сможет. Это можно доказать, рассмотрев всевозможные способы замещения внутреннего угла «тэшки».

26.10. Указание. Если $p > 5$ и $p = 5n \pm 1$, где n — натуральное число, то p^2+4 делится на 5. Если $p>5$ и $p=5n\pm 2$, то p^2+6 делится на 5. Ответ: $p=5$.

26.11. Ответ: искомое множество — объединение четырех параллелограммов, равных $ABCD$ и имеющих с ним общую сторону.

26.12. Указание. Докажите, что любые два числа среди выбранных должны при делении на 26 давать одинаковые остатки. Эти остатки могут быть равны 0 или 13. Ответ: надо выбрать 76 чисел: 13, 39, 65, ...

26.13. Запишем данное уравнение в виде

$$(x+1)(x^2+1)=2^y.$$

Так как x и y — целые неотрицательные числа, то оба множителя левой части — степени числа два: $x+1=2^m$, $x^2+1=2^n$, где m и n — целые неотрицательные числа. Подставим значение $x=2^m-1$, найденное из первого равенства, во второе и сократим обе части полученного равенства на 2. Получим:

$$2^m(2^{m-1}-1)+1=2^{n-1}.$$

Последнее равенство невозможно, если n больше 1, так как в этом случае справа четное число, а слева — нечетное (при $m\neq 0$) или даже нецелое (при $m=0$). При $n=0$, 1 получаем два решения:

$$x=0,\ y=0 \text{ и } x=1,\ y=2.$$

26.14. Максимум и минимум достигается при расстановке ладей по главным диагоналям.

26.15. Одна из возможных схем приведена на рисунке 182.

26.16. Ответ: 657^2 королей $(1969=3\times 656+1)$.

26.17. Ответ: α кратен $\frac{360°}{9}$ или $\frac{360°}{8}$.

26.18. Указание. Число углов равно числу способов выбора двух точек из шести.

26.19. Переформулируем задачу. Вместо шахматной доски рассмотрим квадратное озеро, а вместо спичек — дамбы. Озеро разделено дамбами на 64 части, не сообщающиеся между собой. Можно считать, что каждая из частей представляет собой маленькое озеро. Спрашивается, какое наименьшее число дамб надо разрушить, чтобы из любой из 64 частей можно было проплыть на лодке в любую другую, т. е. чтобы 64 маленьких озера слились в одно. При разрушении одной дамбы, разделяющей два озера, они сливаются в одно и общее число озер уменьшается на 1. Для того чтобы 64 озера слились в одно, надо число озер уменьшить на 63, а для этого надо разрушить по крайней мере 63 дамбы.

На рисунке 183 показано, как можно добиться этой цели, разрушив ровно 63 дамбы (разрушенные дамбы показаны штриховыми линиями).

26.20. Мы выпускаем мышь в одном углу и хотим доказать, что она сможет прибежать в противоположный. В том углу, где выпуска-

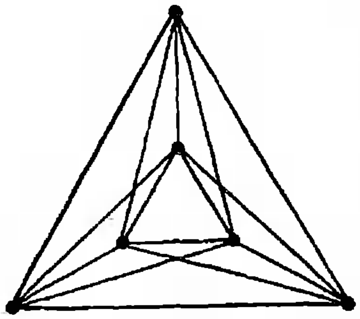


Рис. 182

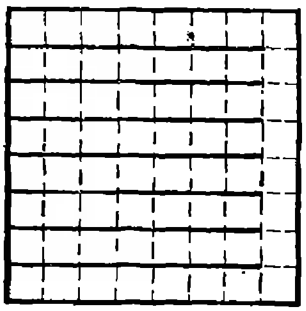


Рис. 183

ем мышь, проведем пожарный шланг и включим воду. Условимся, что если струйка воды просочится через щелку, то и мышь там пролезет.

Будем вести доказательство методом «от противного». Предположим, что мышь пробежать в противоположный угол не сможет. Тогда в противоположном углу будет сухо. И вся комната разделится на две части — затопленную и сухую. Эти две части разделяет «забор», состоящий из дверей (а что же еще может разделить их?). Обратим внимание на ту дверь «забора», которая примыкает к стене. Так как ее столб отстоит от стены на расстоянии 1 м и ширина двери тоже 1 м, то эта дверь перпендикулярна стене. Так как она составляет часть «забора», то к ней должна примыкать какая-нибудь другая дверь, являющаяся частью того же «забора» и висящая на одном из ближайших соседних столбов, отстоящих от первого столба на 1 м. Ясно, что вторая дверь не может прикасаться к первой, а только к столбу, на котором первая дверь висит. Продолжая рассуждать таким же образом, мы видим, что на каждом шагу появляется новая дверь, примыкающая к последнему из уже рассмотренных столбов и висящая на одном из еще не рассмотренных столбов. Так как столбов (и дверей) всего 171, то рано или поздно наступит момент, когда к очередному столбу не будет примыкать никакая дверь. Противоречие.

26.21. а) Вычтем число 3 из обеих частей уравнения и разложим левую часть на множители:

$$(y^2 - 1)(x + 3) = 105.$$

Следовательно, $y^2 - 1$ есть один из делителей 105, т. е. одно из чисел 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Значит, y^2 — одно из чисел 2, 4, 6, 8, 16, 22, 36, 106. Квадратами из этих восьми чисел являются только три: 4, 16, 36. При этом второй множитель, т. е. $x + 3$, равен 35, 7, 3 соответственно. В последнем случае $x = 0$, т. е. не является натуральным числом. Два остальных случая дают два решения: $x = 32$, $y = 2$ и $x = 4$, $y = 4$.

б) Если $x = 1, 2, 3, 4, 5$, то $x! + 12 = 13, 14, 18, 36, 132$ соответственно. Найдено одно решение: $x = 4$, $y = 6$.

Покажем, что больше решений нет. Доказать это утверждение можно по крайней мере двумя различными способами. Во-первых, если x больше или равен 5, то $x!$ содержит в себе множители 2 и 5 и потому делится на 10, следовательно, $x! + 12$ оканчивается на 2. Может ли квадрат натурального числа оканчиваться на 2? Последняя цифра квадрата определяется последней цифрой самого числа, и нетрудно проверить, что квадрат натурального числа может оканчиваться только на 0, 1, 4, 5, 6, 9, поскольку на эти цифры оканчиваются квадраты чисел 0, 1, 2, ..., 8, 9. Следовательно, при x, большем или равном 5, уравнение не имеет решений.

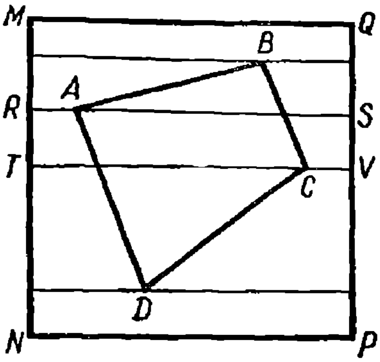


Рис. 184

Второй способ основан на изучении делимости на 3 и на 9. Начиная с $x = 6$, в $x!$ есть 3 и 6, а потому $x!$ делится на 9. Поскольку 12 делится на 3, но не делится на 9, то и $x! + 12$ делится на 3, но не делится на 9. Однако, как доказано в методических замечаниях темы 21, из делимости квадрата на 3 следует делимость его на 9. Противоречие.

26.22. Проведем через вершины данного четырехугольника $ABCD$ прямые, параллельные одной из сторон данного квадрата $MNPQ$, скажем NP (рис. 184). По крайней мере две из этих прямых имеют с четырехугольником общий отрезок. Докажем, что длина хотя бы одного из этих отрезков больше 1/2. Действительно, прямые RS и TV разбивают квадрат на три части: верхнюю, среднюю и нижнюю. Часть четырехугольника, лежащая в верхней части квадрата, является треугольником (может быть, даже отрезком, если AB и NP параллельны) и не может занимать более 1/2 площади этой части квадрата. То же можно сказать и про нижнюю часть квадрата. Часть четырехугольника, попавшая в среднюю часть квадрата, есть трапеция, площадь которой должна быть больше 1/2 площади средней части квадрата, иначе площадь четырехугольника была бы не больше 1/2. Так как площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту, а площадь средней части квадрата численно равна этой высоте, то по крайней мере одно из оснований трапеции имеет длину, большую 1/2.

26.23. Между каждыми двумя соседними красными шариками расположено несколько синих (может быть и ни одного): обозначим числа синих шариков в таких группах в порядке убывания буквами a, b, c так, что: $a \geqslant b \geqslant c$, $a + b + c = 7$, причем может быть $c = 0$, а может быть и $c = b = 0$. Легко убедиться, что к одному типу принадлежат те и только те погремушки, у которых одинаковы наборы (a, b, c). Соответственно этому существует 8 различных типов погремушек: (7, 0, 0), (6, 1, 0), (5, 2, 0), (5, 1, 1), (4, 3, 0), (4, 2, 1), (3, 3, 1) и (3, 2, 2).

26.24. Выделим по углам квадраты 2×2 и центральную клетку. Остальные клетки разобьем на пары, как показано на рисунке 185, входящие в пару клетки соединены черточкой.

Опишем, как первый игрок может играть, чтобы всегда выигрывать.

Сначала первый игрок поставит крестик в центр поля, а второй где-то рядом поставит нолик. Тогда пусть первый поставит свой

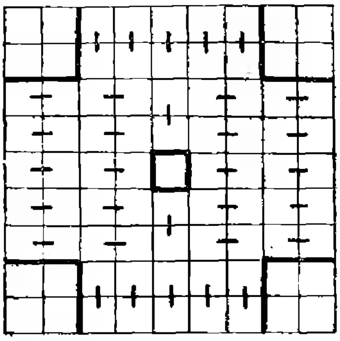


Рис. 185

крестик на второе поле той пары, где второй поставил нолик. Второй опять где-то рядом поставил нолик, а первый снова поставит крестик на второе поле той пары, где второй только что поставил нолик, и т. д. Первому игроку всегда есть куда ходить, потому что перед ходом второго каждая пара либо целиком заполнена, либо целиком свободна. Значит, либо второму игроку после какого-то хода некуда будет ходить (т. е. первый выиграет), либо он первым поставит нолик внутрь одного из угловых квадратов, но не в угловую клетку (ибо угловую клетку окружают только три остальные клетки углового квадрата). Но тогда первый игрок поставит крестик в угловую клетку и выиграет.

Замечание. Рассмотрим эту игру на прямоугольном поле $m \times n$ клеток. Докажите, что:

а) на поле 99×99 первый игрок всегда может выиграть;

б) на поле 9×10 (начало — с одной из двух центральных клеток) второй игрок всегда может выиграть.

26.25. Будем двигаться по плоскости, переходя из каждой клетки в соседнюю так, чтобы посетить клетки, окрашенные каждой из десяти красок. При этом будем нумеровать краски в той последовательности, в которой они встречаются, и заодно будем подсчитывать встреченные нами пары соседних красок. Так, из клетки, окрашенной 1-й краской, мы попадем в клетку, окрашенную 2-й, значит, 1-я и 2-я краски образуют пару соседних красок. Впервые в клетку, окрашенную 3-й краской, мы попадем из клетки, окрашенной 1-й или 2-й, при этом мы зафиксируем еще одну пару соседних красок. Каждая новая краска, встречающаяся на нашем пути, образует пару соседних красок с одной из встреченных прежде. Значит, существует не менее 9 пар соседних красок. Легко указать такую раскраску клетчатой плоскости, когда имеется ровно 9 пар соседних красок. Вот пример такой раскраски. Окрасим плоскость, как шахматную доску, а затем белые поля перекрасим в 9 различных цветов (исключая черный). У каждой из этих 9 красок лишь один сосед — черная краска.

26.26. Доказательство будем вести методом «от противного». Допустим, что при некотором $n \geqslant 3$ дробь оказалась сократимой, т. е. нашелся делитель $d > 1$, общий и для числителя, и для знаменателя. Так как $(2n - 3)$ — число нечетное, то и d нечетно. Ясно, что d является делителем также и для числа $2(n^2 - 3n + 2) = 2n^2 - 6n + 4 = n(2n - 3) + 4$. Так как сумма $n(2n - 3) + 4$ делится на d и первое слагаемое делится на d, то и второе слагаемое, равное 4, должно делиться на d. Но число 4 не может делиться на нечетное число $d > 1$. Противоречие.

26.27. Пусть, например, у продавщицы было 5 гирь массой по

500 г каждая, 1 гиря в 100 г, 1 гиря в 50 г и 5 гирь по 10 г каждая. Если общая масса гирь в кучке превышает 600 г, то в этой кучке либо имеются 2 гири по 500 г, либо 1 гиря массой 500 г и 1 гиря в 100 г (так как общая масса более легких гирь равна 100 г). Если гиря в 100 г потеряна, то вторая возможность отпадает и, значит, в каждой кучке массой свыше 600 г должно быть не менее двух гирь по 500 г. Так как есть всего 5 таких гирь, то таких кучек может быть не больше двух.

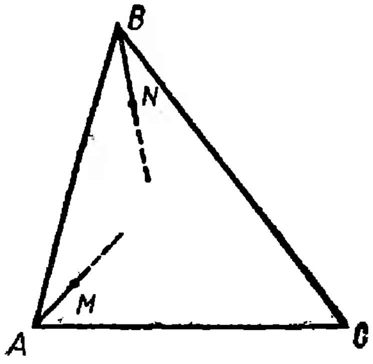


Рис. 186

26.28. Сначала докажем методом «от противного», что любой треугольник ABC «нехороший». Допустим, что для треугольника ABC в противоречие с доказываемым, нашлись две прямые, удовлетворяющие условию. Проведем через вершины A, B и C три луча, каждый из которых параллелен одной из двух прямых и рассекает треугольник на две части. Два из этих лучей, скажем AM и BN (рис. 186), параллельны (совпадать они не могут). Но луч AM пересекает сторону BC, а луч BN — сторону AC, поэтому лучи AM и BN внутри треугольника должны пересечься. Противоречие.

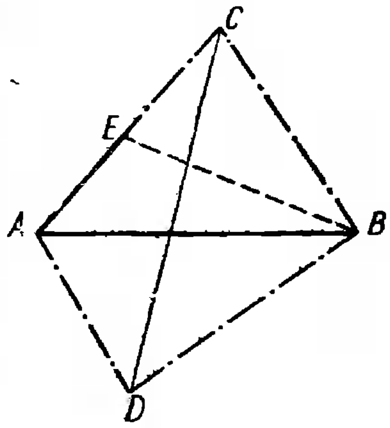


Рис. 187

Докажем, что если выпуклый многоугольник не треугольник, то он «хороший». В самом деле, в таком многоугольнике должны быть диагонали. Рассмотрим наибольшую диагональ AB многоугольника и сторону AE (рис. 187). Тогда BE — либо сторона, либо диагональ. В последнем случае BE не превосходит AB, а потому угол AEB не меньше угла EAB. Это возможно только, если угол EAB острый. Продолжим каждые две стороны многоугольника, прилежащие к вершинам A и B и лежащие по одну сторону от прямой AB, до пересечения в точках C и D. Из сказанного выше следует, что получится выпуклый четырехугольник $ACBD$, внутри которого лежит исходный многоугольник.

Условию задачи удовлетворяют прямые AB и CD. Действительно, из любой точки границы, кроме A и B, можно выпустить луч, параллельный прямой CD и пересекающий диагональ AB, т. е. рассекающий многоугольник на две части. Что же касается точек A и B, то, очевидно, многоугольник рассекается на две части лучом AB. Поэтому рассматриваемый многоугольник действительно «хороший».

26.29. Занумеруем мешки числами от 1 до 11. При первом взвешивании положим на левую чашку весов по одной монете из первых десяти мешков, а на правую — десять монет из одиннадцатого мешка. Пусть масса одного груза больше массы другого на l г. При втором взвешивании на правую чашку положим 55 монет из одиннадцатого мешка, а на левую из каждого из остальных мешков положим по стольку монет, каков номер мешка, — тоже получится 55 монет. Пусть масса одного груза больше массы другого на m г. Если фальшивые монеты находятся в одном из первых десяти мешков, то, очевидно, $m = Nl$, где N — номер мешка, в котором лежат фальшивые монеты. Если же фальшивые монеты находятся в одиннадцатом мешке, то фальшивая монета отличается от настоящей на $0{,}1\,l$ г и $m = 55 \cdot 0{,}1\,l = 5{,}5\,l$. Итак, если $N = \frac{m}{l}$ — число целое, то N — номер мешка с фальшивыми монетами; если же $\frac{m}{l} = 5{,}5$, то фальшивые монеты в одиннадцатом мешке.

26.30. Постарайтесь получить более точную оценку и доказать аналогичную теорему в пространстве.

Обозначим через F нашу фигуру, а через S — ее площадь.

Рассмотрим фигуру F_1, полученную при параллельном переносе F на расстояние 0,001 в направлении 1, заданном смежными вершинами квадрата.

Фигура F_2 — это образ F при параллельном переносе на расстояние 0,001 в направлении 2, составляющем угол 60° с направлением 1. Фигуры F_1 и F не имеют общих точек. Действительно, пусть точка A принадлежит F и в то же время принадлежит F_1, т. е. получена параллельным переносом какой-то точки B фигуры F на расстояние 0,001. Тогда расстояние между A и B будет равно 0,001 вопреки условию задачи. Аналогично не пересекаются F с F_2 и F_1 с F_2. Все три рассматриваемые фигуры имеют одинаковую площадь S и лежат в пределах квадрата со стороной 1,001. Поэтому верно неравенство $3S < 1{,}001^2$, откуда $S < 0{,}335$.

Эту оценку можно несколько уточнить (в третьем или четвертом знаках после запятой).

26.31. Пусть стороны прямоугольника a и b. Заметим, что на сторонах каждого из прямоугольников лежат ровно две точки пересечения с двумя соседними сторонами другого (легко доказать, что если всего точек пересечения восемь, то на каждой стороне должно лежать не меньше двух точек и что пересечение стороны одного прямоугольника с двумя параллельными сторонами другого невозможно).

Пусть A и C — точки, в которых пересекаются стороны равных прямоугольников длиной a; B и D — точки, в которых пересекаются стороны длиной b (рис. 188). Тогда, очевидно, отрезок AC служит биссектрисой угла между сторонами длиной a, проходящими через точку A (для доказательства достаточно провести перпендикуляры через точку C и рассмотреть пару образовавшихся при этом равных треугольников). Точно так же BD — биссектриса угла между сторонами длиной b, проходящими через точку B. Следовательно,

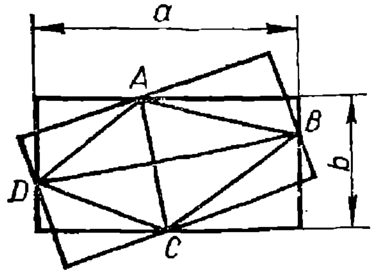


Рис. 188

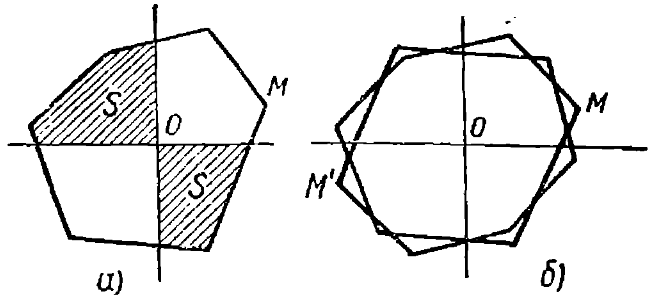


Рис. 189

$AC \perp BD$, и поэтому площадь выпуклого четырехугольника с диагоналями AC и BD равна $\frac{AC \cdot BD}{2}$. Поскольку $AC \geqslant b$ и $BD \geqslant a$, даже эта площадь (и уже подавно вся площадь пересечения прямоугольников) больше $\frac{ab}{2}$.

26.32. Если через точку O проходят две прямые, каждая из которых делит площадь многоугольника M пополам, то в симметричных друг другу углах между этими прямыми лежат одинаковые по площади куски многоугольника M (они закрашены на рис. 189, *а*).

Рассмотрим вместе с M еще и многоугольник M', симметричный ему относительно точки O (рис. 189, *б*). Внутри любого из углов, образованных двумя нашими прямыми, контуры многоугольника M и M' должны пересекаться (в противном случае площадь одного из кусков больше площади другого; совпадать даже частично контуры M и M' не могут, поскольку у M по условию нет параллельных сторон).

Пусть всего таких прямых k штук. Тогда существует $2k$ углов, в каждом из которых должны лежать различные точки пересечения контуров M и M' (на рис. 189 $k = 3$). Но на каждой стороне многоугольника M, очевидно, лежит не более двух таких точек: M' — выпуклый, а контур выпуклого многоугольника пересекается с прямой не более чем в двух точках.

Следовательно, всего точек пересечения не более $2n$ (на рис. 189, *б* их как раз $2 \cdot 6 = 12$). Поэтому $2k = 2n$, а значит, $k = n$. Задача решена.

26.33. Повернем квадрат (рис. 190) вокруг его центра на 90° так, чтобы вершина A_2 перешла в A_1, A_3 — в A_2, A_4 — в A_3 и A_1 — в A_4.

Тогда каждая из прямых A_2P, A_3P, A_4P, A_1P перейдет в соответствующий перпендикуляр (ведь она повернется на 90°), поэтому ясно, что все четыре перпендикуляра пройдут через одну точку P', на которую перейдет при повороте точка P.

26.34. Предположим, что такое расположение семи точек и семи прямых существует. Прежде всего докажем, что каждые две из данных точек принадлежат одной из данных прямых. Действительно, если A — одна из этих точек, то через A проходят три прямые и на каждой из них лежит по две из данных точек (не считая A); тем самым A и любая из шести точек, отличных от A, лежат на одной из данных прямых. Точно так же доказывается, что каждые две из данных прямых пересекаются в одной из данных точек. Если a — одна из прямых, то через каждую из трех лежащих на ней точек проходит по две прямые (не считая a), и поэтому каждая из этих прямых пересекается с a в одной из данных точек.

Рассмотрим теперь наименьшую выпуклую фигуру, содержащую эти семь точек.

Это будет некоторый выпуклый n-угольник, где $n \leqslant 7$. Его можно получить так: вбить в данные семь точек гвозди и затем натянуть резиновую нитку, охватывающую все эти гвозди; нитка натянется по контуру многоугольника с вершинами в некоторых n из данных точек, а все остальные $(7 - n)$ точек будут лежать внутри или на границе этого многоугольника (рис. 191). Ясно, что случай $n \geqslant 4$ невозможен: ведь на каждой стороне n-угольника должна лежать еще одна, третья точка, кроме вершин, а всего точек семь. Случай $n = 3$, когда выпуклой оболочкой является некоторый треугольник ABC, тоже невозможен. Действительно, если E и F — точки (из числа данных семи), которые лежат на сторонах AB и BC, то EF и AC — две из данных прямых — должны пересекаться в одной из данных семи точек, но они будут пересекаться с продолжением стороны AC, т. е. вне треугольника ABC. Получим противоречие.

26.35. 1) Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей K_1 и K_2. Согласно условию точка O_1 симметрична O_2, а точка A_2 симметрична B_1 относительно точки M. Следовательно, $A_2O_2 \parallel B_1O_1$. Кроме того, точка A_1 переходит в A_2, а точка O_1 переходит в O_2 при параллельном переносе K_1 в K_2. Следовательно, $A_1O_1 \parallel A_2O_2$. Тогда $A_1O_1 \parallel A_2O_2 \parallel B_1O_1$. Значит, A_1O_1 и O_1B_1 лежат на одной прямой, откуда следует, что A_1 и B_1 — диаметрально противоположные точки окружности K_1.

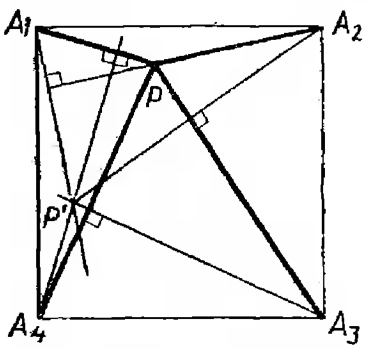


Рис. 190

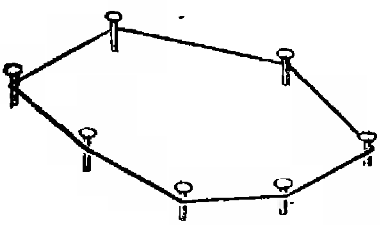


Рис. 191

2) Точка A_1 переходит в точку B_1 в перемещении, представляющем собой композицию переноса и центральной симметрии. Но эта композиция есть центральная симметрия, переводящая окружность K_1 в себя. Поэтому точка O_1 — центр симметрии, вследствие чего точки A_1 и B_1 диаметрально противоположны.

26.36. Повороты плоскости около вершин A, B и C в положительном направлении на углы $60°$ обозначим для краткости $R_A^{60°}$, $R_B^{60°}$, $R_C^{60°}$. Воспользуемся тем, что композиция двух поворотов есть в общем случае поворот на угол, равный сумме углов данных поворотов. Если эта сумма равна 360°, имеем параллельный перенос (если центры различные) или тождественное преобразование (если центры совпадают).

Возможны два случая.

1. Направление обхода $\triangle ABC$ положительное. В этом случае неподвижной является точка B. В самом деле, $R_A^{60°}(B) = C$, $R_B^{60°}(C) = A$, $R_C^{60°}(A) = B$, т. е. $R_C^{60°} \circ R_B^{60°} \circ R_A^{60°}(B) = B$.

2. Пусть направление обхода $\triangle ABC$ отрицательное. В этом случае неподвижной точкой является точка M — середина отрезка AC.

В самом деле, $R_A^{60°}(A) = A$, $R_B^{60°}(A) = C$, $R_C^{60°}(C) = C$, т. е. $R_C^{60°} \circ R_B^{60°} \circ R_A^{60°}(A) = C$.

Но композиция поворотов $R_C^{60°} \circ R_B^{60°} \circ R_A^{60°}$ есть центральная симметрия (т. е. поворот на 180°). Центром же центральной симметрии, переводящей точку A в C, является середина M отрезка AC.

26.37. Точка P должна удовлетворять трем требованиям:

1) точка P_1, симметричная P относительно прямой AB, лежит на описанной окружности;

2) точка P_2, симметричная P относительно прямой BC, лежит на описанной окружности;

3) точка P_3, симметричная относительно прямой CA, лежит на описанной окружности.

Найдем сначала все точки P, удовлетворяющие требованию 1). Все такие точки P образуют окружность, симметричную описанной окружности относительно прямой AB (проведена на рис. 192, *а*).

Таким образом, требование 1), предъявляемое к точке P, можно переформулировать так: точка P лежит на окружности O_1, симметричной описанной окружности относительно прямой AB.

Совершенно аналогично убеждаемся в том, что требования 2), 3) можно переформулировать в требования о том, чтобы точка P лежала на окружностях O_2, O_3, симметричных описанной окружности относительно прямых BC и CA.

Надо выяснить, для всякого ли треугольника найдется точка P, лежащая сразу на всех трех окружностях O_1, O_2, O_3, иными словами, для всякого ли треугольника эти три окружности O_1, O_2, O_3 проходят через одну точку. Докажите, что это действительно так для любого треугольника ABC.

Придумать такое рассуждение, которое годилось бы сразу для всех треугольников ABC, довольно трудно (дело в том, что мы заранее не знаем, где лежит точка P пересечения окружностей O_2 и O_3 — внутри треугольника или вне его, по какую сторону от каждой из прямых AB, BC и CA и т. п., и если рассуждение зависит от расположения точки P, то нужно разбирать несколько

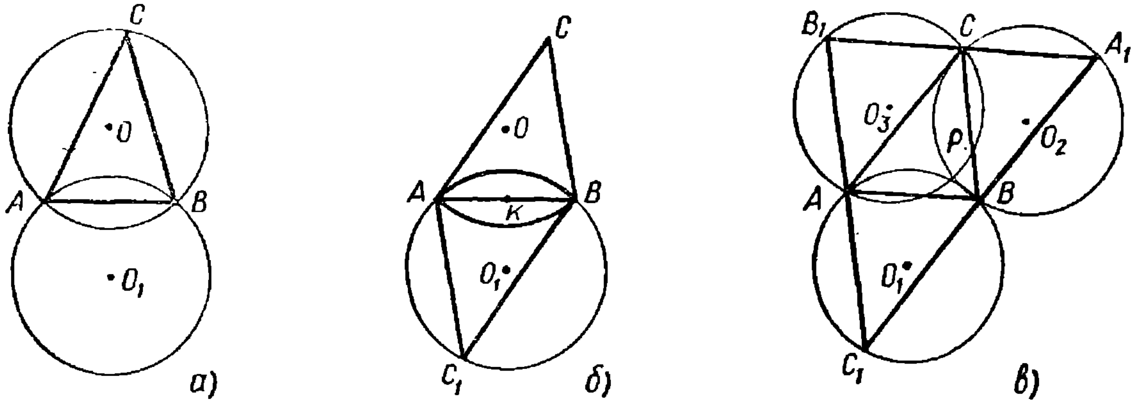


Рис. 192

частных случаев). Но для экономии места мы все-таки приведем именно такое решение, которое годится сразу для всех случаев, правда, несколько искусственное.

Заметим, что окружность O_1 можно получить из окружности O не только симметрией относительно стороны AB, но и симметрией относительно точки K — середины стороны AB, т. е. поворотом относительно точки K на $180°$. А что будет, если вместе с окружностью O повернуть и $\triangle ABC$?

Ясно, что он перейдет в $\triangle ABC_1$, который дополняет $\triangle ABC$ до параллелограмма AC_1BC, причем $\triangle ABC_1$ вписан в окружность O_1 (рис. 192, *б*). Проделав такие же построения около сторон BC и CA, мы получим четыре равных треугольника, вместе составляющих один большой $\triangle A_1B_1C_1$ (рис. 192, *в*). (Мы еще не знаем, проходят ли окружности O_1, O_2 и O_3 через одну точку!)

Рассмотрим две равные окружности O_1 и O_2, и пусть P — точка их пересечения.

Тогда, поскольку $AB_1 = AC_1$ и дуги AP в обеих окружностях равны, легко доказать, что $\triangle AB_1P = \triangle AC_1P$ и точка P диаметрально противоположна точке C_1 в окружности O_1.

Точно так же доказывается, что окружность O_1 пересекается с O_2 в той же точке, диаметрально противоположной точке C_1. Значит, все три окружности O_1, O_2, O_3 пересекаются в одной точке P.

П р и м е ч а н и е. Нетрудно доказать, что эта точка P — центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, и что эта же точка P — точка пересечения высот треугольника ABC. Если догадаться хотя бы об одном из этих фактов, то можно предложить другие решения этой задачи.

26.38. 1) Пусть S — площадь данного многоугольника, p — половина его периметра; S_i, p_i, r_i — соответственно площади, полупериметры и радиусы вписанных окружностей треугольников, на которые он разрезан ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда $S = pr$, $S_i = p_ir_i$ и $p > p_i$ для всех i (нетрудно доказать, что периметр многоугольника больше периметра любого выпуклого многоугольника, в нем содержащегося). Поэтому (см. рис. 193)

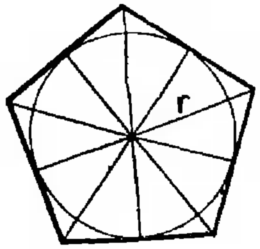


Рис. 193

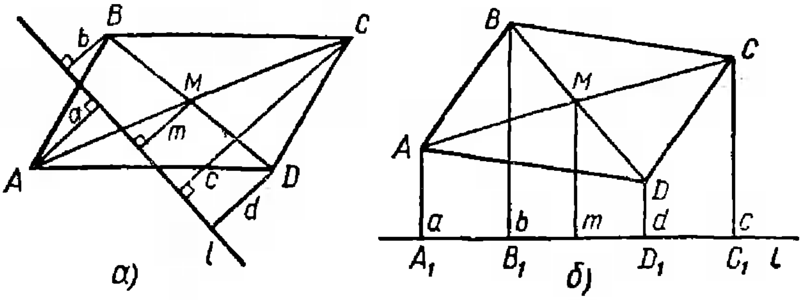


Рис. 194

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = \frac{S_1}{p_1} + \frac{S_2}{p_2} + \ldots + \frac{S_n}{p_n} >$$

$$> \frac{S_1}{p} + \frac{S_2}{p} + \ldots + \frac{S_n}{p} = \frac{S}{p} = r.$$

26.39. Пусть расстояния от вершин параллелограмма $ABCD$ и точки M пересечения его диагоналей до прямой l равны соответственно a, b, c, d и m. Рассмотрим три случая расположения прямой относительно параллелограмма.

1) Прямая l не пересекает сторон параллелограмма или проходит только через одну из его вершин. В этом случае (рис. 194, *б*) $a + c = b + d = 2m$. Это следует из свойства средней линии трапеции (треугольника).

2) Прямая l пересекает смежные стороны AB и AD и не проходит через вершину A. В этом случае (рис. 194, *а*)

$$c - a = b + d = 2m.$$

3) Прямая l пересекает противоположные стороны AB и DC параллелограмма. Докажем, что в этом случае

$$a + d = b + c \quad (1),$$

где $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$, $DD_1 = d$. Через точки B и D проведем прямые BE и DF, параллельные прямой l. Легко видеть, что $CE = AF$, откуда следует равенство (1). По условию задачи

$$a + c = b + d \quad (2).$$

Равенства (1) и (2) одновременно выполняются только в том случае, когда $a = b$ и $c = d$.

Итак, прямые, удовлетворяющие условию задачи, состоят из всех прямых, параллельных сторонам параллелограмма, всех прямых, не пересекающих сторон параллелограмма, и прямых, проходящих только через одну из его вершин.

26.40. Нетрудно видеть, что при разрезании треугольника на три (каких угодно) треугольника по крайней мере один разрез должен проходить через вершину треугольника. Этот разрез (пусть он проходит через вершину B данного треугольника ABC) может либо дойти до точки D противоположной стороны AC, либо закончиться внутри треугольника ABC. В первом случае треугольник ABC разбивается на два треугольника ABD и BCD, и теперь надо один из этих треугольников разрезать на два треугольника — это можно сделать тремя способами (рис. 195, *б*, *в*, *г*). Во втором случае (рис. 195, *а*) дальнейшее разрезание треугольника ABC проводится единственным способом — по отрезкам AD и CD.

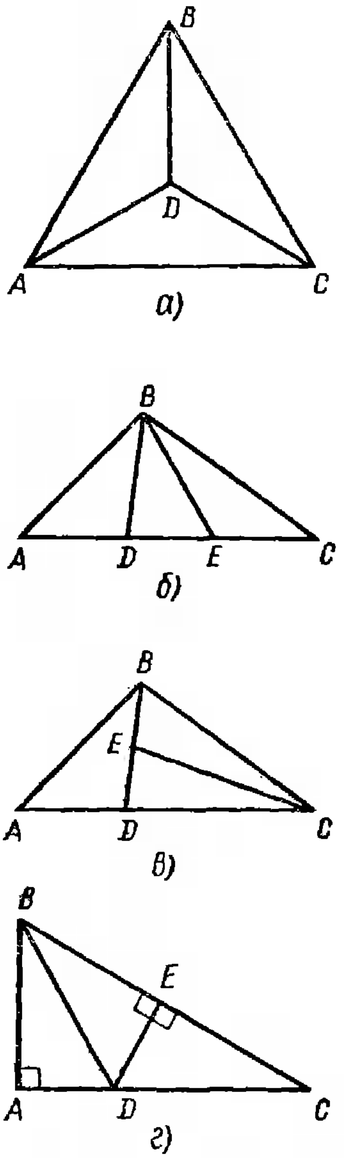


Рис. 195

Рассмотрим поочередно все описанные случаи. Очевидно следующее утверждение: если два равных треугольника имеют общую боковую сторону, а их основания лежат на одной прямой по разные стороны от нее, то эти треугольники представляют собой две «половинки» равнобедренного треугольника, т. е. являются прямоугольными.

Из этого утверждения сразу же следует, что на рис. 195, *б* углы BDA, BDE, DEB и BEC прямые, чего не может быть, и, следовательно, этим способом ни один треугольник нельзя разрезать на три равных. На рисунке 195, *в* прямыми являются углы BEC и CED. Но тогда угол ADB тупой, а тупоугольный треугольник не может быть равен прямоугольному, так что и этим способом разрезание треугольника на три равных невозможно. На рисунке 195, *г* прямыми являются углы BAD и CED, следовательно, треугольник ABD прямоугольный, причем, поскольку он равен треугольнику BDE, его гипотенузой является отрезок BD, угол BAD прямой. Используя далее равенство треугольников ABD, BDE и DEC, получаем, что $\angle ADB = \angle BDE = \angle EDC$ и каждый равен 60°. Отсюда следует, что ABC — прямоугольный треугольник с острым углом в 30°. Наконец, на рисунке 195, *а* $\angle ADC > \angle ABD$ ($\angle ADC$ — внешний угол треугольника ABD), и, следовательно, $\angle ADC$ больше $\angle BAD$ и $\angle ABD$. Поэтому $\angle BDC = \angle ADB$ и аналогично равен $\angle ADC$. Отсюда следует, что треугольник ABC равносторонний.

Таким образом, на три равных треугольника можно разрезать только равносторонний треугольник и прямоугольный треугольник с острым углом в 30°, причем разрезание возможно только способами, указанными в приведенном решении.

26.41. Пусть данная точка K лежит на стороне BC (рис. 196). Если K — середина отрезка BC, то AK — искомая прямая. Если

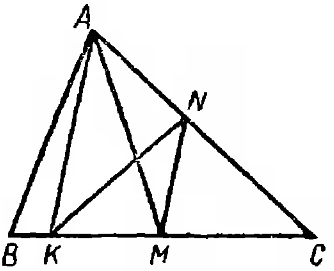


Рис. 196

$BK < BM$ $(BK > BM)$, где M — середина отрезка BC, то, построив $MN \parallel AK$, получим искомую прямую KN. Действительно, $S_{\triangle AMN} = S_{\triangle KMN}$, так что $S_{\triangle KCN} = S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

26.42. Первое решение. Пусть E, F, K, L — середины сторон данного четырехугольника $ABCD$ (рис. 197). Средняя линия EF треугольника ABC отсекает от него треугольник BEF, площадь которого составляет $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC: $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$. Аналогично $S_{\triangle DLK} = \frac{1}{4} S_{\triangle ACD}$. Сложив эти равенства почленно, получим: $S_{\triangle BEF} + S_{\triangle DLK} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

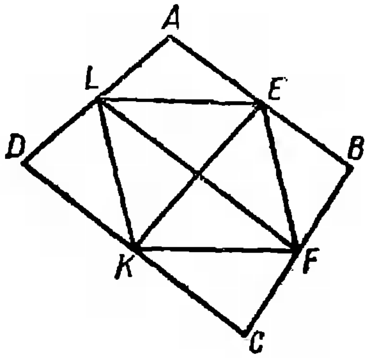


Рис. 197

Точно так же докажем, что $S_{\triangle AEL} + S_{\triangle CKF} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. Таким образом, сумма площадей треугольников, отсекаемых от четырехугольника $ABCD$ сторонами параллелограмма $EFKL$, равна $\frac{1}{2} S_{ABCD}$. Следовательно, $S_{EFKL} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

26.43. Пусть $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CD \parallel C_1D_1$, $DE \parallel D_1E_1$. Требуется доказать, что $A_1E \parallel AE_1$. Действительно, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle CDE = \angle C_1D_1E_1$, как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно, $\smile AB_1C = \smile A_1BC_1$, откуда $\smile ABC = \smile A_1B_1C_1$. Аналогично докажем, что $\smile CDE = \smile C_1D_1E_1$. Складывая полученные равенства, имеем: $\smile ACE = \smile A_1C_1E_1$. Проводя прямую EE_1, заметим, что $\angle A_1EE_1 = \angle AE_1E$. Но равенство этих углов и доказывает параллельность сторон A_1E и AE_1.

26.44. Первый способ. Пусть M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, стороны AD и BC которого не параллельны (рис. 198, *а*). Путем параллельного переноса отрезков AD и BC образуется треугольник A_1NB_1: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DN}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CN}$. Далее докажите, что точки A_1 и B_1 симметричны относительно M.

Второй способ. Постройте четырехугольник AMN_1C_1, симметричный четырехугольнику $BMNC$ относительно точки M (рис. 198, *б*). Пусть $AD = a$, $BC = b$, $MN = m$, тогда $AC_1 =$

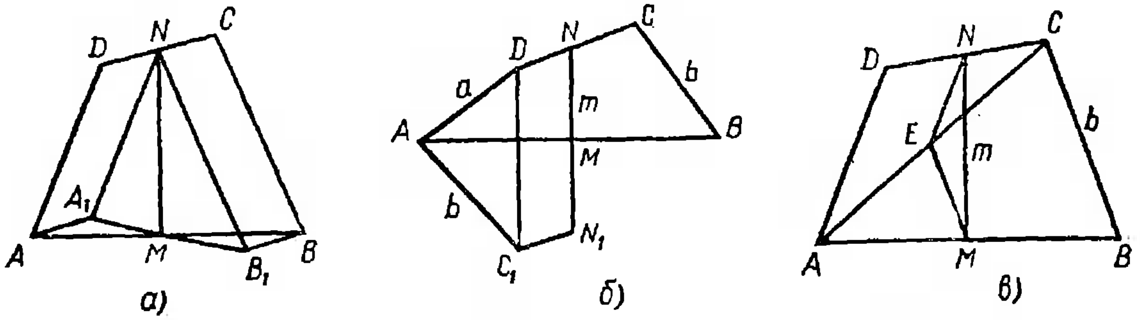


Рис. 198

$= b$, $DC_1 = NN_1 = 2m$. Если $AD \nparallel BC$, то $a + b > 2m$; если же $AD \parallel BC$, то $a + b = 2m$.

Третий способ. Соедините середину E одной из диагоналей четырехугольника с точками M и N (рис. 198, в). Тогда получится треугольник EMN со сторонами, равными $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ и m. Следовательно, $m < \frac{a+b}{2}$. В частном случае, когда $AD = BC$, треугольник EMN вырождается, точка E будет принадлежать отрезку MN и, следовательно, $m = \frac{1}{2}(a + b)$. Длина средней линии MN четырехугольника $ABCD$ равна полусумме длин сторон AD и BC тогда и только тогда, когда эти стороны параллельны.

26.45. Мы воспользуемся тем, что длина биссектрисы в треугольнике не превосходит полусуммы длин заключающих ее сторон (докажите это!). Предположим, что отрезок EF больше большего из отрезков AB и CD (max AB, CD). Пусть $\angle AOE \neq \angle EOC$ — в противном случае $EF \leqslant \frac{AB + CD}{2}$ и EF не может быть больше max (AB, CD). Пусть для определенности $\angle AOE \neq \angle EOC$. Построим тогда такой отрезок E_1F_1 (рис. 199, а), что $\angle E_1OE = \angle EOC$. Ясно, что точка E_1 принадлежит отрезку AC, а точка F_1 — отрезку BD. $EF \leqslant \frac{CD + E_1F_1}{2}$, поэтому E_1F_1 по крайней мере на 2Δ больше max (AB, DC).

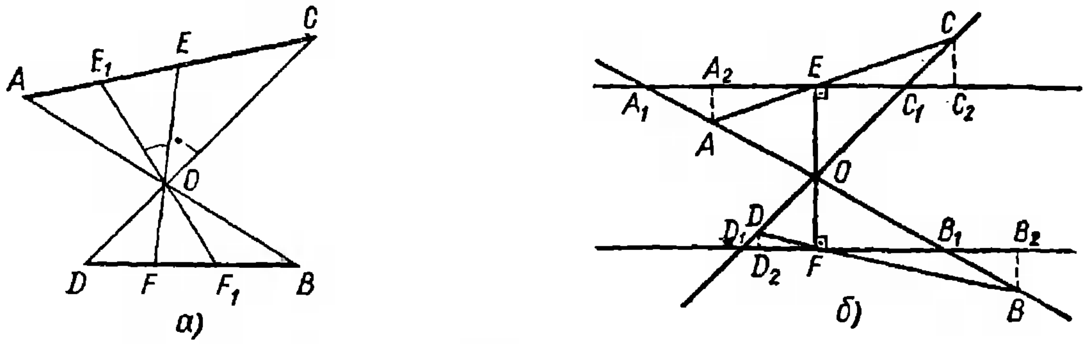


Рис. 199

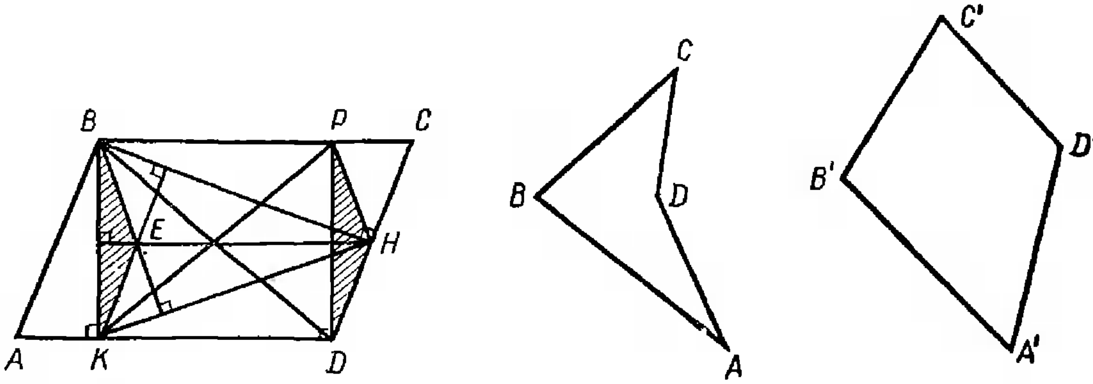


Рис. 200

Таким образом, мы сумели перейти от отрезка длиной «большего на Δ» к отрезку длиной «большему на 2Δ», где Δ — некоторое положительное число. Повторив такой переход k раз, мы получим отрезок E_kF_k, который длиннее $\max(AB, CD)$ по крайней мере на $2^k\Delta$.

Выбрав k достаточно большим, мы можем сделать длину отрезка E_kF_k большей $AB + CD$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что длина отрезка EF не может быть больше $\max(AB, CD)$.

Второй способ. Проведем через точки E и F прямые, перпендикулярные прямой EF. Продолжим отрезки OA, OB, OC, OD до пересечения с этими прямыми и введем обозначения, как показано на рисунке 199, *б*. Пусть точка A лежит внутри полосы между прямыми, C — вне ее, тогда D должна лежать внутри полосы (иначе, очевидно, $CD > EF$), а B — вне ее.

Из неравенств

$$\frac{AA_2}{CC_2} = \frac{A_2E}{EC_2} \leqslant \frac{A_1E}{EC_1} = \frac{B_1F}{FD_1} \leqslant \frac{B_2F}{FD_2} = \frac{BB_2}{DD_2}$$

следует, что либо $AA_2 \leqslant BB_2$ (и тогда $AB > EF'$), либо $CC_2 \geqslant DD_2$ (и тогда $CD > EF$).

26.46. Проведем перпендикуляр DP через точку D параллелограмма к стороне BC и проведем три высоты в треугольнике BKH, пересекающиеся в точке E (рис. 200). Заметим, что если параллельно перенести треугольник BKE так, чтобы точка K перешла в точку D, то он полностью совпадет с треугольником PDH, поскольку отрезок KE параллелен и равен DH (ведь $EHDK$ — параллелограмм), а отрезок BK параллелен и равен отрезку PD. Следовательно, $BE = PH$. Но PH легко найти из прямоугольного треугольника KHP.

$$PH^2 = KP^2 - KH^2,$$

где

$$KP = BD = b,$$

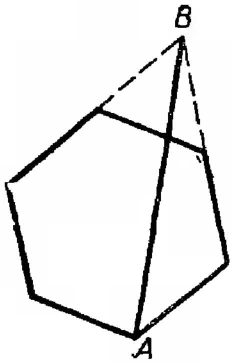


Рис. 201

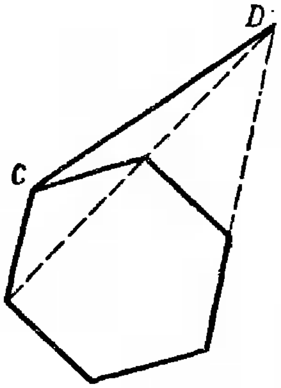


Рис. 202

$KH = a$. Поэтому $BE = \sqrt{b^2 - a^2}$. Это решение годится и для того случая, когда угол B тупой, и для того случая, когда угол B острый, при этом точки K и H лежат на продолжении сторон.

26.47. Вы без труда докажите, что длина жирных отрезков AB и CD на рисунках 201 и 202 равна $\sqrt{7}$.

26.48. Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним или внутренним образом в точке A, K — произвольная точка одной окружности, L — вторая точка пересечения прямой KA с другой окружностью. Тогда $\angle O_1KA = \angle O_2LA$, и, следовательно, $O_1K \parallel O_2L$.

Пусть теперь даны три окружности, попарно касающиеся друг друга внешним образом в точках A, B, C. Взяв произвольно точку K на первой окружности, проводим прямые KA, LB и MC, где L, M, N — точки пересечения прямых KA, LB и MC с окружностью. Тогда по доказанному $O_1K \parallel O_2L$, $O_3M \parallel O_1N$. Следовательно, отрезки O_1K и O_1N лежат на одной прямой, т. е. отрезок KN — диаметр первой окружности. Точно так же можно построить еще один диаметр первой окружности и тем самым ее центр. Заметим, что точки O_1, O_2, O_3 использованы лишь для доказательства того, что отрезок KN — диаметр, но не для самого построения этого диаметра. Аналогично проводится построение в случае, когда две пары из данных окружностей касаются внутренним образом, а одна — внешним; третьего случая при различных точках касания A, B, C, очевидно, быть не может.

26.49. На данной окружности (рис. 203) выберем произвольную точку A и построим вершины правильного шестиугольника $ABCDEF$. Далее строим точку M $(AM = DM = AD)$, точку

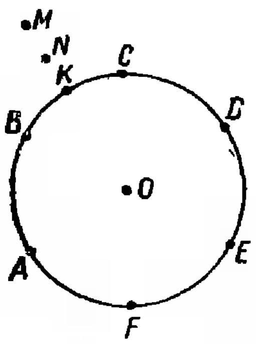


Рис. 203

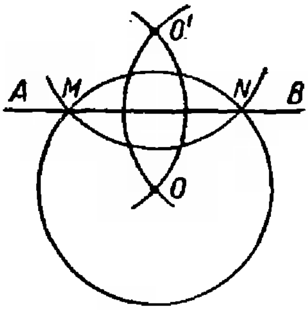


Рис. 204

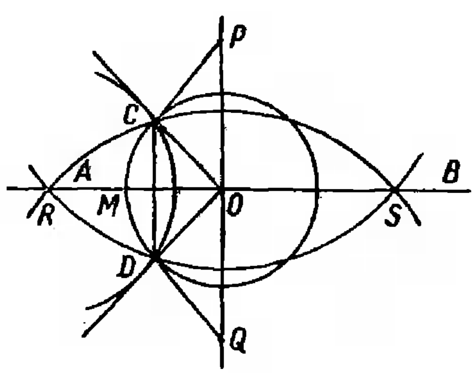


Рис. 205

N ($AN = DN = MO$) и точку K ($AK = DK = NO$). Имеем: $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = R\sqrt{3}$, $NO = \sqrt{AN^2 - AO^2} = \sqrt{AM^2 - 2AO^2} = R\sqrt{2}$.

Следовательно, $AK = R\sqrt{2}$ есть сторона квадрата. Отсюда $\smile BK = \smile KC$, а это означает, что точки B, K, C есть вершины правильного двенадцатиугольника. Дальнейшее построение очевидно.

26.50. Рассмотрим два возможных случая:

а) Точки A, B и O не лежат на одной прямой. Опишем окружности с центром в точке A и радиусом AO и с центром в точке B и радиусом BO, пересекающиеся в точках O и O', симметричных относительно прямой AB (рис. 204). Точки M и N пересечения окружностей с центром в точке O и радиусом r и с центром в точке O' и радиусом r (r — радиус данной окружности) являются искомыми.

б) Точки A, B и O лежат на одной прямой. Опишем окружность с центром в точке A так, чтобы она пересекала данную окружность (рис. 205). Достаточно теперь разделить дугу CD на две равные части. Для этого строим параллелограммы $DOPC$ и $COQD$ (точка P находится на пересечении окружностей с центром в точке C и радиусом r и с центром в точке O_1 и радиусом CD_1, а точка O на пересечении окружностей с центром в точке D и радиусом r и с центром в точке O_1 и радиусом CD). Далее опишем окружности с центром в точке P и радиусом PD и с центром в точке Q и радиусом QD, пересекающиеся в точках R и S. Точки M и N пересечения окружностей с центром в точке P и радиусом OR и с центром в точке Q и радиусом OR будут искомыми.

В самом деле, легко убедиться, что точки O, P и Q лежат на одной прямой и трапеция $CDQP$ симметрична относительно прямой AO. Покажем, что $OM = ON = r$. Так как $OM^2 = PM^2 - PO^2$, то $OM^2 = OR^2 - CD^2$. (1)

В параллелограмме $CDOP$ $OC^2 + PD^2 = 2CD^2 + 2OD^2$ или $r^2 + PD^2 = 2CD^2 + 2r^2$, откуда $PD^2 = 2CD^2 + r^2$. (2)
С другой стороны, $OR^2 = PR^2 - OP^2 = PD^2 - CD^2$. (3)
Из (2) и (3) находим: $OR^2 = CD^2 + r^2$. (4)

Из (1) и (4) следует, что $OM^2 = r^2$. Отсюда $OM = ON = r$, что и требовалось доказать.

26.51. Из трех отрезков, длина которых $x \leqslant y \leqslant 2$, можно построить треугольник, если $z < x + y$, причем он будет остроугольным, если $z^2 < x^2 + y^2$. Предположим, что существуют пять отрезков, длина которых $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$ и a_5, таких, что из любых трех можно построить не остроугольный треугольник. Тогда $a_5^2 \geqslant a_4^2 + a_3^2$, $a_4^2 \geqslant a_3^2 + a_2^2$, $a_3^2 \geqslant a_2^2 + a_1^2$, и поэтому $a_5^2 \geqslant 2a_3^2 + a_2^2 \geqslant 3a_2^2 + 2a_1^2 \geqslant a_2^2 + 2a_1a_2 + a_1^2 = (a_2 + a_1)^2$, т. е. $a_5 \geqslant a_2 + a_1$, и, следовательно, из отрезков a_1, a_2, a_5 нельзя построить треугольник.

26.52. Пусть M' — точка, которая получается из точки M при повороте вокруг точки A на угол, равный данному. Тогда за точку C нужно взять точку пересечения отрезка MM' со стороной

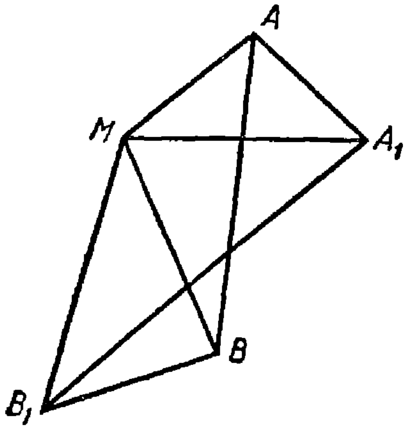


Рис. 206

данного угла. Для доказательства воспользуемся тем, что если $AB = AC$, то $MB + MC = M'C + MC$.

26.53. Поворот с центром M_1 переводит середину S отрезка AB в середину S_1 отрезка A_1B_1. Следовательно, точка M принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку SS_1. Аналогично и M_2 принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку SS_1.

26.54. Предположим, что композиция $f \circ f$ имеет неподвижную точку A, т. е. $f \circ f\,(A) = A$. Так как f неподвижных точек не имеет, то $f\,(A)=B$, $B \neq A$. Тогда $f\,(B) = A$. В перемещении f отрезок AB перейдет в себя: $A \to B$, $B \to A$, и, следовательно, середина отрезка AB перейдет в себя, т. е. f имеет неподвижную точку. Но это противоречит условию.

26.55. Обозначив расстояния AM и BM соответственно через a и b (рис. 206), получим: $A_1M = a\sqrt{2}$, $B_1M = b\sqrt{2}$. Кроме того, $\angle A_1MB_1 = \angle AMB$, так как оба они равны $\angle A_1MB + 45°$; следовательно, треугольники AMB и A_1MB_1 подобны, откуда $A_1B_1 = AB\sqrt{2}$. Поскольку с точкой N совершается такое же преобразование, как с точкой M, то $A_2B_2 = A_1B_1\sqrt{2}$, тогда $A_2B_2 = 2AB$.

26.56. Поскольку $ABCD$ — трапеция, то $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$. Обозначим это отношение через k. Пусть F — композиция двух симметрий относительно биссектрисы угла AOB и гомотетии с центром O и коэффициентом k. Нетрудно видеть, что $F\,(A) = B$, $F\,(C) = D$, $F\,(A') = B'$, т. е. $F\,(\triangle ACA') = \triangle BDB'$, поэтому $\angle ACA' = \angle BDB'$.

26.57. Треугольник $A_2B_2C_2$ переходит в треугольник $A_1B_1C_1$ при повороте $R_p^{2\alpha}$. При этом окружность ω_2, описанная около треугольника $A_2B_2C_2$, переходит в окружность ω_1, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 207, *а*). Так как центр поворота p принадлежит окружностям ω_1 и ω_2, то любая точка окружности ω_4 и ее образ на окружности ω_1 в повороте $R_p^{2\alpha}$ принадлежат прямой, проходящей через вторую точку пересечения окружностей (обозначим ее M).

Если O — центр окружности ω_2, O_1 — центр окружности ω_1, то $\angle O_2PO_1 = 2\alpha$ и луч PM — биссектриса угла O_2PO_1. Окружность ω, описанная около треугольника ABC, переходит в ω_1 при повороте R_p^{α}, поэтому центр O принадлежит прямой PM.

Так как точка M принадлежит прямой OP, а ее положение не зависит от величины угла α, то M можно рассматривать как точку пересечения прямой A_1A_2 и прямой OP. Искомое геометрическое место M есть отрезок прямой OP, заключенный внутри полосы,

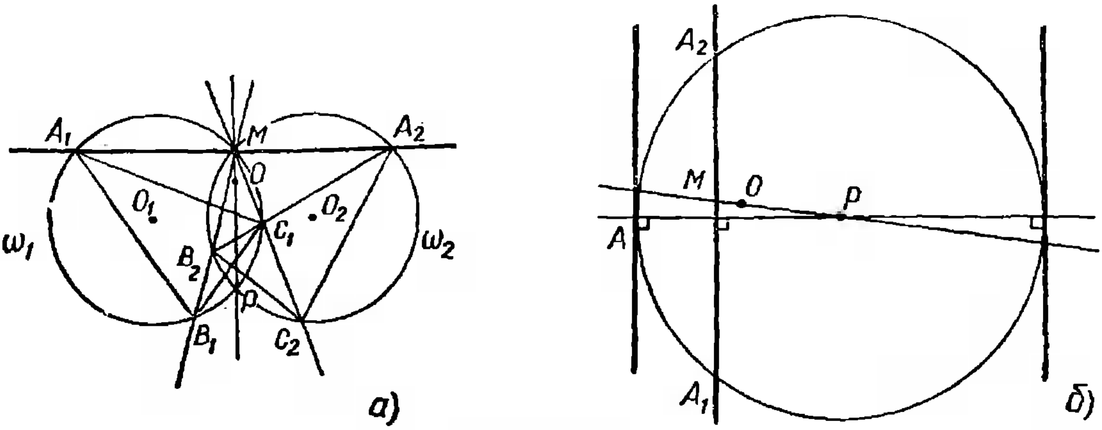


Рис. 207

края которой касаются окружности с центром P радиуса PA в точке A, диаметрально ей противоположной (рис. 207, *б*). Условие $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ избыточно. Достаточно рассмотреть $0 \leqslant \varphi < \pi$.

26.58. Пусть пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ имеет две оси симметрии (рис. 208). Каждая из них проходит через одну из вершин и середину противоположной стороны. Если одна ось проходит через вершину A_1 и середину стороны a_3, то имеем:

$$a_1 = a_5,\ a_2 = a_4 \text{ и } \angle A_2 = \angle A_5,\ \angle A_3 = \angle A_4. \qquad (1)$$

Не нарушая общности, можно считать, что вторая ось проходит через вершину A_2 и середину стороны a_4. Тогда

$$a_1 = a_2,\quad a_3 = a_5 \quad \text{и} \quad \angle A_1 = \angle A_3,\quad \angle A_4 = \angle A_5. \qquad (2)$$

Учитывая равенства (1) и (2), получим, что пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ правильный.

Утверждение оказывается верным для любого многоугольника с нечетным числом сторон, так как для $A_1A_2, \ldots, A_{2n+1}$ получим равенства:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{2n+1},\ \angle A_2 = \angle A_{2n+1},\\ a_2 &= a_{2n},\ \angle A_3 = 2\angle A_{2n},\\ a_3 &= a_{2n-1},\ \angle A_4 = \angle A_{2n-1}, \qquad (3)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_n &= a_{n+1},\ \angle A_{n+1} = \angle A_{n+2},\\ a_2 &= a_1,\ \angle A_3 = \angle A_1,\\ a_3 &= a_{2n+1},\ \angle A_4 = \angle A_{2n+1},\\ a_4 &= a_{2n},\ \angle A_5 = \angle A_{2n}, \qquad (4)\\ a_{n+1} &= a_{n+2},\ \angle A_{n+2} = \angle A_{n+3}. \end{aligned}$$

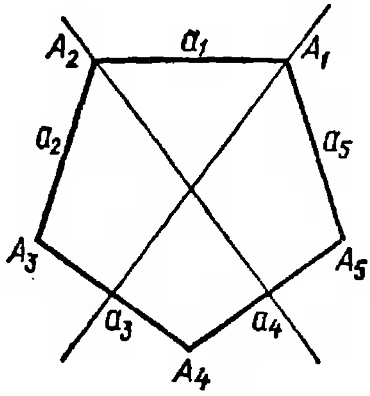


Рис. 208

Из равенств (3) и (4) следует, что в $(2n + 1)$-угольнике все стороны равны и все углы равны, следовательно, он правильный.

26.59. Доказательство от противного. Пусть данное в условии задачи положительное число не меньше трех. Тогда его квадрат не меньше девяти, откуда следует, что

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} \geqslant 3.$$

Из этого неравенства точно так же выводим, что $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} \geqslant 3$, затем $\sqrt{6+\sqrt{6}} \geqslant 3$ и, наконец, $\sqrt{6} \geqslant 3$. Противоречие.

26.60. Очевидно, $c = \sqrt{a^2+b^2} > \sqrt{a^2} = |a| = a$. Точно так же $c > b$. Поэтому $a^3 < a^2c$ и $b^3 < b^2c$, т. е.

$$a^3 + b^3 < a^2c + b^2c = (a^2 + b^2)\,c = c^3.$$

У этой задачи есть любопытная геометрическая интерпретация. Построим прямоугольный треугольник с катетами a и b. Согласно теореме Пифагора, его гипотенуза равна $\sqrt{a^2+b^2} = c$. Сумма площадей квадратов, построенных на катетах этого прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе. Рассмотрим теперь кубы, построенные на этих квадратах как на основаниях. Площадь основания большего из этих кубов равна сумме площадей оснований двух других кубов, а высота его больше, значит, и объем его превосходит сумму объемов двух других кубов: $c^3 > a^3 + b^3$.

26.61. Запишем данное уравнение в виде $\left(\frac{5}{13}\right)^n + \left(\frac{12}{13}\right)^n = 1$. При $n = 2$ левая часть этого уравнения равна правой, при $n = 1$ больше, а при $n > 2$ меньше, так как при этом $\left(\frac{5}{13}\right)^n < \left(\frac{5}{13}\right)^2$, $\left(\frac{12}{13}\right)^n < \left(\frac{12}{13}\right)^2$ и, значит, $\left(\frac{5}{13}\right)^n + \left(\frac{12}{13}\right)^n < \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$. Отсюда следует, что $n = 2$ — единственный корень уравнения. (Сравните с решением предыдущей задачи.)

26.62. Докажем, что при любом положительном c, а значит, и при $c = 10^{1977}$ число $\frac{c+1}{10c+1}$ больше, чем $\frac{10c+1}{100c+1}$. С этой целью увеличим оба эти числа в $(10c+1)(100c+1)$ раз. Получим легко проверяемое неравенство $(c+1)(100c+1) > (10c+1)^2$, эквивалентное доказываемому. Отсюда и следует, что первое из данных в условии чисел больше.

26.63. Рассмотрим число a_k. Если $a_k \leqslant 1$, то числа $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_{k-1}$ также не превосходят 1, откуда и следует доказываемое неравенство. Пусть теперь $a_k > 1$. Тогда $n-k$ чисел $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, \ldots, a_n$, каждое из которых не меньше a_k, в сумме дают число, большее $n-k$, а на долю остальных k чисел остается меньше, чем k:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n - (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n) <$$
$$< n - (n-k) = k.$$

26.64. Число диагоналей выпуклого восьмиугольника равно 20.

В самом деле, в каждой из восьми вершин восьмиугольника сходятся 5 диагоналей, но в произведении $5 \times 8 = 40$ каждая диагональ учитывается дважды, так как соединяет две вершины.

Проведем через фиксированную точку M плоскости 20 прямых, параллельных диагоналям данного восьмиугольника. Они разделят полный угол вокруг точки M на 40 частей, наименьшая из которых не будет превосходить $\frac{360^\circ}{40} = 9^\circ$.

26.65. Мы хотим найти такое число x, что $x^5 = 0{,}999$. Число x должно быть меньше 1, в противном случае было бы $x^5 \geqslant 1$. Но если положительное число меньше 1, то его пятая степень меньше его самого: $x^5 < x < 1$. Отсюда следует, что число x заключено между 0,999 и 1.

26.66. Наша задача — найти с заданной точностью корни x_1, x_2 и x_3 многочлена третьей степени

$$f(x) = 0{,}001x^3 + x^2 - 1.$$

Эта функция представляет собой сумму двух таких функций: квадратного трехчлена $y_1 = x^2 - 1$ и кубической функции $y_2 = 0{,}001x^3$. При небольших значениях x основной вклад в эту сумму вносит слагаемое y_1: при $|x| < 2$ абсолютная величина y_2 не превышает 0,01. Это дает нам основание предполагать, что числа x_1 и x_2 мало отличаются от корней квадратного трехчлена $y_1 = x^2 - 1$, т. е. от чисел $+1$ и -1. И действительно, $f(1) = 0{,}001 > 0$, а $f(0{,}9) = 0{,}001 \times 0{,}729 + 0{,}81 - 1 < 0$, значит, один из корней x_1 данного уравнения заключен между 0,9 и 1. Точно так же доказывается, что $-1{,}1 < x_2 < -1$.

Для нахождения третьего корня полезно заметить, что уравнение $0{,}001x^3 + x^2 = 0$ имеет корень -1000. Поэтому $f(-1000) = -1 < 0$. Несложные расчеты показывают, что

$$f(-999{,}9) = f(-1000 + 0{,}1) =$$
$$= 0{,}001(-1000 + 0{,}1)^3 + (-1000 + 0{,}1)^2 - 1 > 0.$$

Отсюда $-1000 < x_3 < -999{,}9$.

26.67. Докажем, что при любом натуральном $n \geqslant 2$ имеет место двойное неравенство $\frac{1}{2n} < \sqrt[n]{2} - 1 < \frac{1}{n}$. Из этого неравенства при $n = 100$ сразу находим, что $1{,}005 < \sqrt[100]{2} < 1{,}01$.

Доказательство двойного неравенства основано на следующем легко проверяемом тождестве:

$$(a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^2 + a^1 + 1) = a^n - 1.$$

(Для его доказательства достаточно раскрыть скобки в левой части.) Положив в этом тождестве $a = \sqrt[n]{2}$, получим

$$(\sqrt[n]{2} - 1)(\sqrt[n]{2^{n-1}} + \sqrt[n]{2^{n-2}} + \ldots + \sqrt[n]{2} + 1) = 1,$$

откуда

$$\sqrt[n]{2}-1=\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}+\sqrt[n]{2^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{2}+1}.$$

Каждое из n слагаемых в знаменателе дроби, стоящей справа, заключено между 1 и 2, откуда и следует доказываемое двойное неравенство.

26.68. Обозначим данную сумму через S_n. Умножив S_n на $\sqrt{n}$, получаем $S_n\sqrt{n}=\sqrt{n}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$. Здесь каждое из n слагаемых больше или равно 1 и вся сумма больше n. Из полученного неравенства $S_n\sqrt{n}>n$ вытекает, что $S_n>\sqrt{n}$, откуда и следует доказываемое.

26.69. Так как $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ при любом $k\geqslant 2$, то данная в условии задачи сумма не превосходит суммы

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n},$$

откуда и следует доказываемое.

26.70. Так как $x^2+y^2+z^2+u^2=1$, то каждое из чисел x^2, y^2, z^2, u^2 не превосходит 1, а значит, $x\leqslant 1$, $y\leqslant 1$, $z\leqslant 1$, $u\leqslant 1$. Из этих неравенств вытекает, что $x^3\leqslant x^2$, $y^3\leqslant y^2$, $z^3\leqslant z^2$, $u^3\leqslant u^2$, причем знак равенства достигается лишь для значений 0 и 1. Отсюда следует, что $x^3+y^3+z^3+u^3\leqslant x^2+y^2+z^2+u^2$, причем знак равенства достигается лишь тогда, когда одно из чисел x, y, z, u равно 1, а остальные 0. Значит, данная система уравнений имеет в точности четыре решения:

1) $x=1,\ y=z=u=0,$ 3) $z=1,\ x=y=u=0,$
2) $y=1,\ x=z=u=0,$ 4) $u=1,\ x=y=z=0.$

26.72. Меньшие стороны прямоугольников обозначим a_1, a_2, бо́льшие b_1, b_2. Будем считать, что $b_1\leqslant b_2$, иначе говоря, $b_2=b_1+x$, где $x=b_2-b_1\geqslant 0$. Из теоремы Пифагора следует, что

$$a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2,$$

откуда $b_2^2-b_1^2=a_1^2-a_2^2$. Если $x\geqslant 1$, то

$$b_2^2-b_1^2=(b_1+x)^2-b_1^2=2b_1x+x^2\geqslant 4000.$$

Но $a_1^2-a_2^2<a_1^2\leqslant 60^2=3600$, и, значит, равенство $b_2^2-b_1^2=a_1^2-a_2^2$ невозможно. Отсюда следует, что $x=0$, $b_1=b_2$, а значит, и $a_1=a_2$, что и требовалось доказать.

26.73. а) Все числа от 1 до 99 998 разобьем на пары, сопоставив каждому числу x число $99\,999-x$. Сумма цифр двух чисел, попавших в одну пару, равна $9\times 5=45$, а сумма всех цифр числавеликана (учитывая число 99 999, оставшееся без пары) равна 2250000.

б) Выпишем в таблицу (столбиком) все целые числа от 00000 до 99999 включительно, так чтобы в записи каждого числа было 5 цифр, при этом нам придется иногда спереди дописывать нули. Например, число 121 запишем в виде 00121. Цифру 7 нам придется писать столько же раз, сколько раз она содержится в данном числе-великане. Нетрудно доказать, что все 10 цифр встречаются в нашей таблице одинаково часто. Действительно, допустим, что мы все семерки переправили на нули, а нули на семерки. При этом все числа в таблице сохранятся, лишь некоторые поменяются местами, как, например, 07430 и 70437. Значит, семерок столько же, сколько и нулей. То же относится и к остальным цифрам. Так как в таблице содержится $5 \times 100\,000 = 500\,000$ цифр, то 50 000 из них — семерки.

26.74. Нельзя.

26.75. Семь игр могло быть сыграно. Допустим, участники имеют номера от 1 до 7. Пусть, например, в первой игре встречаются номера 1, 2, 3, 4, во второй — 1, 2, 5, 6, в третьей — 1, 3, 5, 7, в четвертой — 1, 4, 6, 7, в пятой — 2, 3, 6, 7, в шестой — 2, 4, 5, 7, в седьмой — 3, 4, 5, 6. Легко проверить, что этот список удовлетворяет условию. Можно доказать, что восемь игр не удастся сыграть, удовлетворяя условию задачи.

26.76. а) Пусть в классе n учеников и мы хотим распределить их по k кружкам. Занумеруем учеников числами от 1 до n. Первый ученик может выбрать себе кружок k способами, второй тоже k способами. Каждый из способов выбора первого ученика можно скомбинировать с любым способом выбора второго, всего получим k^2 способов распределить двух учеников. Точно так же получим k^3 способов распределить троих, k^4 способов распределить четверых и т. д. и, наконец, k^n способов распределить n учеников. В случае, когда $k = 3$, $n = 30$, получим 3^{30} способов.

б) Если в школе не 3, а 2 кружка, то существует 2^n способов распределить учеников по кружкам, но 2 способа не удовлетворяют условию б) задачи — когда все ученики посещают первый кружок, или когда все они посещают лишь второй. Значит, существует $2^n - 2$ способов, удовлетворяющих условию б).

Если в школе 3 кружка, то существует 3^n способов распределить учеников по кружкам, но условию б) не удовлетворяют $3(2^n - 2)$ способа, при которых ученики посещают лишь два кружка — 1-й и 2-й или 1-й и 3-й или 2-й и 3-й, а также 3 способа, при которых все они посещают лишь один кружок — 1-й, 2-й или 3-й. Остаются $3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$ способов, удовлетворяющих условию б). В случае $n = 30$ получаем $3^{30} - 3 \cdot 2^{30} + 3$ способов.

26.77. Существуют следующие 10 способов раскраски куба:

1) все грани синие;

2) одна грань красная;

3) две смежные грани — красные;
4) две противоположные грани — красные;
5) три грани, имеющие общую вершину, — красные;
6) три грани, две из которых противоположные, — красные;
7) две смежные грани — синие (остальные красные);
8) две противоположные грани — синие;
9) одна грань — синяя;
10) все грани красные.

26.78. Существуют ровно 30 способов раскраски куба, удовлетворяющие условию задачи. Докажем это. Поставим куб белой гранью на плоскость, например на плоскость стола. Существует 5 возможностей для окраски верхней грани. Рассмотрим одну из них. Пусть, например, верхняя грань окрашена в красный цвет. Повернем куб вокруг вертикальной оси так, чтобы спереди оказалась оранжевая грань. Для трех остальных граней существует $3! = 6$ способов окраски в желтый, синий и зеленый цвета. Всего, таким образом, имеем $5 \times 6 = 30$ способов раскраски куба шестью красками.

26.79. Вынесем в числителе дроби $1 \cdot 2 \cdot 3$ за скобки, а в знаменателе $1 \cdot 3 \cdot 5$. Получим

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3\,(1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7 \cdot 7)}{1 \cdot 3 \cdot 5\,(1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7 \cdot 7)},$$

откуда видно, что данная дробь равна $\frac{2}{5}$.

26.80. Нельзя. Для того, чтобы это доказать, полезно заметить, что в последовательности степеней двойки 2, 4, 8, 16, ... каждое число превосходит сумму всех предыдущих. Среди всех зачеркнутых и подчеркнутых чисел выберем наибольшее число M. Если оно — зачеркнутое, то оно одно больше суммы всех подчеркнутых, если число M подчеркнуто, то оно больше суммы всех зачеркнутых.

26.81. Разложим на множители:

$$a^5 - a = a\,(a^4 - 1) = (a - 1)\,a\,(a + 1)\,(a^2 + 1).$$

Пусть b — остаток от деления a на 5. Число b принимает одно из пяти значений: 0, 1, 2, 3, 4. Если $b = 0$, то a делится на 5. Если $b = 1$, то $a - 1$ делится на 5. Если $b = 4$, то $a + 1$ делится на 5. Если $b = 2$ или $b = 3$, то, как легко видеть, a^2 имеет при делении на 5 остаток 4, а потому $a^2 + 1$ делится на 5. Итак, при любом b один из множителей в разложении $a^5 - a$ делится на 5.

26.82. Ноги естественно считать парами. Перевяжем красной ленточкой по одной паре ног у каждого из «присутствующих». Тогда неперевязанных пар ног останется 13 — по одной паре у каждой собаки и по две у каждой мухи. Понятно, что мух не меньше 2 и не больше 6. И если в комнате 2, 3, 4, 5, 6 мух, то собак соответственно 9, 7, 5, 3, 1. Первые два случая не подходят (люди-то есть!), остальные дают три решения: 1 человек, 4 мухи, 5 собак; 2 человека, 5 мух, 3 собаки; 3 человека, 6 мух, 1 собака.

26.83. Как легко показать с помощью «арифметики остатков», натуральное число и сумма его цифр дают при делении на 3 одинаковые остатки. Значит, число, о котором идет речь в условии задачи, при делении на 3 дает остаток 2. С другой стороны, квадрат натурального числа либо делится на 3, либо при делении на 3 дает в остатке 1. Отсюда следует, что рассматриваемое число не может быть точным квадратом.

26.84. Обозначим это число буквой a. При делении $a+1$ на 1967 получается остаток 70, а при делении на 1968 остаток 69. Обозначая частные от деления $a+1$ на 1967 и 1968 буквами b и c, имеем равенства: $a+1=1967b+70=7(281b+10)$, $a+1=1968c+69=3(656c+23)$. Так как $a+1$ кратно 7 и 3, то $a+1$ кратно 21, и при делении a на 21 получается в остатке 20.

Продолжим исследование. Какие a удовлетворяют условиям задачи? Чтобы ответить на этот вопрос, найдем все решения в натуральных числах уравнения

$$1967b+69=1968c+68.$$

Положим $b=c+d$. Ясно, что d — целое неотрицательное число. Заменим в уравнении b на $c+d$, раскроем скобки и сократим подобные члены. Получим:

$$1967d+1=c.$$

Подставляя в последнее равенство $d=0, 1, 2, \ldots$, найдем все a, удовлетворяющие условиям задачи. Они имеют вид:

$$a=1968(1967d+1)+68, \quad d=0, 1, 2, \ldots .$$

При этом

$$b=1968d+1.$$

26.85. Обозначим число обезьян, сорвавших орехи для Маугли, через x, а число орехов, сорванных каждой из них, — через y. Всего сорвано xy орехов. Каждая из обезьян бросила в остальных $x-1$ орехов, а всего брошено $x(x-1)$ орехов. Для Маугли осталось $xy-x(x-1)=x(y-x+1)=26$ орехов. Отсюда видно, что число обезьян x является делителем 26, то есть x может равняться 2, 13 или 26. Если $x=2$, то $y-x+1=13$, и $y=13+x-1=14$; если $x=13$, то аналогично находим $y=14$, а если $x=26$, то $y=26$. Ответ: каждая обезьяна сорвала 14 или 26 орехов.

26.86. Пусть вначале мальчики находятся на правом берегу. Можно действовать по следующему алгоритму:

1. Саша подплывает к левому берегу.
2. Солдат переправляется на правый.
3. Сережа возвращает лодку к левому берегу.
4. Мальчики переплывают на правый.
5. Если еще не все солдаты переправлены, то все повторяется, начиная с пункта 1.

26.87. Будем считать, что первые X параллельных прямых расположены горизонтально. Выбрав две горизонтали и две наклонные, мы получим параллелограмм. Проверьте, что таким способом можно получить любой параллелограмм на листе, а разные способы выбора прямых приводят к различным параллелограммам. Задача свелась к такой: сколькими способами можно выбрать из данных прямых четыре — две горизонтальные и две наклонные. Первую горизонталь можно выбрать X способами, после этого вторую $X - 1$ способами. Всего $X(X-1)$ способов. Но в этом подсчете каждая пара горизонталей встречается дважды (почему?). Следовательно, имеется $\frac{X(X-1)}{2}$ способов выбора пары горизонталей. Точно так же есть $\frac{Y(Y-1)}{2}$ способов выбора пары наклонных. Каждый способ выбора пары горизонталей можно комбинировать с каждым способом выбора пары наклонных. Следовательно, параллелограммов имеется $\frac{X(X-1)Y(Y-1)}{4}$.

26.88. Трехзначное число запишем в виде $100a + 10b + c$. Трехзначные числа, все цифры которых нечетны, будем складывать «по разрядам» — отдельно сотни, отдельно десятки, отдельно единицы. Каждая из цифр может принимать любые из пяти значений: 1, 3, 5, 7, 9. Сколько раз встречается, скажем, цифра 5 в разряде сотен? Очевидно, $5 \cdot 5 = 25$ раз, поскольку для каждой из остальных двух цифр трехзначного числа имеется пять возможностей, и любой способ выбора цифры десятков можно комбинировать с любым способом выбора цифры единиц. Остальные цифры в разряде сотен встречаются также 25 раз. Значит, суммирование сотен дает $100 \cdot 25 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 100 \cdot 25 \cdot 25 = 100 \times \times 625 = 62\,500$. Аналогично суммирование десятков дает $10 \times \times 25 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 6250$, а суммирование единиц — 625. Итак, сумма всех трехзначных чисел, все цифры которых нечетны, равна $62\,500 + 6250 + 625 = 69\,375$.

26.89. Пусть x и y — длины сторон прямоугольника. Требуется решить в натуральных числах уравнение $2(x + y) = xy$. Перепишем это уравнение в виде $xy - 2x - 2y = 0$ и прибавим к обеим частям 4, после чего левая часть раскладывается на множители: $(x - 2) \cdot (y - 2) = 4$. Каждый из множителей левой части — делитель 4, причем не обязательно положительный, т. е. одно из чисел $-4, -2, -1, 1, 2, 4$. Поскольку x и y положительны, то, как легко проверить, значения множителя $-4, -2, -1$ отпадают. Если $x - 2$ равно 1, 2, 4, т. е. x равен 3, 4, 6, то y принимает соответственно значения 6, 4, 3. Значит, условию задачи удовлетворяет квадрат со стороной 4 и прямоугольник со сторонами 3 и 6.

26.90. Пусть скорость «Волги» a км/ч, «Жигулей» — b км/ч и «Москвича» — c км/ч. Надо найти отношение a/b. В момент выезда «Москвича» расстояние от города и от него до «Волги» равнялось a км, а до «Жигулей» — b км. Через час «Волга» была в $2a$ км от города, «Жигули» — в $2b$ км, «Москвич» — в c км от города. Значит, расстояние между «Волгой» и «Москвичом» равнялось $|2a - c|$ км, а между «Жигулями» и «Москвичом» $|2b - c|$ км. Получаем систему уравнений

$$1{,}5\,|2a - c| = a,$$
$$2\,|2b - c| = b.$$

Надо по отдельности рассмотреть четыре случая:

1) $2a - c < 0,\ 2b - c < 0$; 3) $2a - c \geqslant 0,\ 2b - c < 0$;
2) $2a - c < 0,\ 2b - c \geqslant 0$; 4) $2a - c \geqslant 0,\ 2b - c \geqslant 0$.

Выражая в каждом из этих случаев a и b через c, получаем, что a/b равно 15/16, 9/16, 15/8 и 9/8 соответственно. Надо еще проверить, что во всех четырех случаях полученные значения удовлетворяют соответствующим неравенствам.

26.91. Положив $y = 1$, получим $A(x + 1) = A(x) + x + 1$. Следовательно, $A(x) = A(x - 1) + x = A(x - 2) + (x - 1) + x = \ldots = 1 + 2 + \ldots + (x - 1) + x = \frac{x(x+1)}{2}$. Легко проверить, что эта функция удовлетворяет условию задачи.

26.92. Известно, что сумма цифр делящегося на 9 числа сама делится на 9. Следовательно, a, b и c делятся на 9. Поскольку сумма цифр 1984-значного числа не превосходит $9 \times 1984 = 17856$, то число a записывается не более чем пятью цифрами. Следовательно, сумма цифр числа a не более $9 \times 5 = 45$ и b не превосходит 45, а сумма цифр числа b не более $3 + 9 = 12$. Поскольку c делится на 9 и не превосходит 12, то $c = 0$ или $c = 9$. Если $c = 0$, то $b = a = A = 0$, что противоречит условию. Ответ: $c = 9$.

26.93. Обозначим буквой x длину поперечной стены. Противоположная стена, как во всяком прямоугольнике, тоже равна x. Поскольку кирпича, идущего на три стены, хватает на 100 м, то длина третьей стены равна $(100 - 2x)$ м. (Четвертая стена не нужна — зал пристраивается к зданию школы.) Площадь зала равна $x(100 - 2x)$ м^2. Надо выяснить, при каком x величина $x(100 - 2x)$ принимает свое наибольшее значение. Для этого достаточно выделить полный квадрат: $x(100 - 2x) = 1250 - 2(x - 25)^2$. Отсюда ясно, что $x(100 - 2x)$ достигает своего максимального значения, равного 1250, при $x = 25$.

26.94. Обозначим буквой a цифру сотен тысяч номера автобусного билета, буквой b — цифру десятков тысяч, c — цифру тысяч, e — сотен, k — десятков, n — единиц. «Интересные» билеты — те, у которых цифры их номеров подчиняются такому равенству:

$$a + b + c + e + k + n = 10k + n.$$

Равенство можно упростить: $a + b + c + e = 9k$. Отсюда легко вывести все требуемые свойства «интересных» билетов. Во-первых, они идут сериями по десять номеров подряд (цифра единиц каждой серии меняется от 0 до 9). Значит, количество билетов делится на 10. Во-вторых, сумма номеров билетов одной серии кончается той же цифрой, что и сумма их последних цифр, т. е. $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 9 = 45$, значит, кончается цифрой 5. Таким образом, эта сумма делится на 5, а потому и сумма номеров всех билетов, составленная из сумм номеров в сериях, тоже делится на 5. В-третьих, число, записанное в первых четырех разрядах билета, делится на 9, поскольку сумма его цифр делится на 9.

26.95. После каждой сыгранной партии один из игроков выбывает из турнира. Чемпион определится тогда, когда будут исключены 9 участников из 10. Значит, должно быть сыграно 9 партий. Поскольку $9:2=4{,}5$, то не менее чем по две партии могли выиграть максимум четверо. Вот как это могло произойти.

Пусть Первый выиграл у Второго и Третьего, Четвертый выиграл у Первого и Пятого, Шестой выиграл у Четвертого и Седьмого, Восьмой выиграл у Шестого и Девятого, Десятый выиграл у Восьмого. В этом случае четверо — Первый, Четвертый, Шестой и Восьмой — выиграли ровно по две партии.

Отметим, что если в турнире девять участников, а не десять, то тоже максимум четверо могли выиграть не менее чем по две партии.

26.96. Вася поступит очень просто: он заставит чемпиона и претендента играть этот матч между собой. А сделает он это так: каждый ход чемпиона он тут же повторит в партии с претендентом, потом подождет ответа претендента и сразу повторит этот ход в партии с чемпионом. Ведь он играет с чемпионом и претендентом фигурами разного цвета! Так что в своей партии с чемпионом Вася будет играть за претендента, а в партии с претендентом Вася будет играть за чемпиона. Ясно, что кто-нибудь — чемпион или претендент — выиграет, или же они сыграют вничью. В любом случае Вася выполнит свое обещание.

26.97. Чтобы выбрать место для колодца, проденем через кольцо три веревки. Концы одной дадим жильцам первого и шестого домов, концы второй — жильцам второго и пятого домов, концы третьей — жильцам третьего и четвертого домов. Попросим натянуть веревки. Сумма длин веревок равна сумме расстояний от колодца до домов, если расположение колодца определяется местом нахождения кольца. Длина каждой веревки не может быть меньше расстояния между соответствующими домами. Хотя веревки натянуты до отказа, кольцо, показывающее место колодца, может двигаться между третьим и четвертым домами. Колодец можно рыть в любом месте между этими домами.

Если домов семь, то возьмем четыре веревки, при этом оба конца четвертой веревки придется дать жильцу среднего из домов — у его дома и придется рыть колодец.

26.98. У к а з а н и е. Для отгадывания цифр достаточно одного вопроса: $a_1=1$, $a_2=10$, $a_3=100$, ..., $a_n=10^{n-1}$. Если известно лишь, что загаданы натуральные числа, то одного вопроса не хватит (докажите!), хватит двух: первым узнаем сумму этих чисел, пусть она меньше 10^k, во втором вопросе $a_1=1$, $a_2=10^k$, $a_3=10^{2k}$, ..., $a_n=10^{kn}$.

26.99. У к а з а н и е. Любой способ выдачи можно получить из любого другого, несколько раз меняя пять трешек на три пятерки. О т в е т: $x=840+5a+3b$, где $a=0, 1, 2$, $b=0, 1, 2, 3, 4$.

26.100. Подставив $y = 1$, после несложных преобразований получим, что

$$f(x) = 1 + \frac{x}{f(1) - 1}.$$

Подставив в исходное равенство $x = y = 1$, получим, что $f(1) = 2$ или $f(1) = 0$. О т в е т: $f(x) = 1 + x$ или $f(x) = 1 - x$. (Не забыли ли проверить, что эти функции удовлетворяют условию?)

26.101. У к а з а н и е. Для любой точки A, не лежащей на отрезке BC, подберите точку M такую, что длина отрезка AM больше длины отрезка BM и длины отрезка CM.

26.102. Например, $a = -1$, $b = 4$, $c = 1$, $d = -3$, $e = 1$.

26.103. Как известно (см. добавление к теме 9), любое натуральное число n можно разложить на простые множители, т. е. представить в виде

$$n = p_1^{a(1)} p_2^{a(2)} \ldots p_k^{a(k)},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, $a(1), a(2), \ldots, a(k)$ — натуральные числа, $k \geqslant 1$. Все положительные делители числа n имеют вид:

$$p_1^{b(1)} p_2^{b(2)} \ldots p_k^{b(k)},$$

где $b(i)$ — целые числа, $0 \leqslant b(i) \leqslant a(i)$, $i = 1, \ldots, k$. Поскольку разложение на простые множители единственно, то количество $\varphi(n)$ положительных делителей числа n задается формулой

$$\varphi(n) = (a(1) + 1)(a(2) + 1) \ldots (a(k) + 1).$$

Применим эти общие результаты к нашей задаче. Поскольку $14 = 2 \cdot 7$, причем числа 2 и 7 простые, то $k = 2$, $a(1) = 1$, $a(2) = 6$. Поскольку n делится на $12 = 3 \cdot 2^2$, то $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $n = 3 \times 2^6 = 192$.

26.104. У к а з а н и е. Опущенные на (BC) высоты треугольников ABC и DBC равны.

26.105. Поскольку площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, то стороны треугольника обратно пропорциональны опущенным на них высотам, следовательно, равны A, $A/2$, $A/3$ при некотором A. Однако $A/2 + A/3 = 5A/6$, что меньше A, так что искомого треугольника не существует.

26.106. Если n можно разложить в произведение двух различных множителей, не равных 1, то каждый из них не превосходит $n - 2$ (почему?) и, следовательно, входит в $(n-2)!$, т. е. $(n-2)!$ делится на n. Указанное разложение невозможно, только если n — простое число или же квадрат простого числа. Легко видеть, что $(n-2)!$ не делится на n, если n простое. Рассмотрим случай $n = p^2$, где p — простое число. При $p \geqslant 3$ справедливо неравенство $2p < p^2 - 2$, следовательно, $(n-2)!$ содержит в качестве множителей p и $2p$, а потому делится на $2p^2 = 2n$. При $p = 2$ число

$(n-2)! = 2! = 2$ не делится на $n = p^2 = 4$. Ответ: n — простое число или $n = 4$.

26.107. Общая масса гирь может достигать $3A$, если мы возьмем три гири массой A. Покажем, что общая масса гирь не может быть больше $3A$. Предположим противное. Возьмем одну из гирь и будем добавлять к ней по одной гире. Остановимся в тот момент, когда масса получившейся кучки впервые превысит A. В этот момент масса кучки не может быть больше $2A$, поскольку иначе на предыдущем шаге масса была больше A, ибо масса одной гири не превышает A. Поскольку масса всех гирь больше $3A$, то масса оставшихся гирь (не включенных в кучку) больше A. Итак, мы построили разбиение гирь на две кучки, масса каждой из которых больше A. Противоречие.

26.108. Рассмотрим лысого гостя и его вторых, четвертых, шестых и т. д. соседей. Один из двух его вторых соседей тоже лысый. Пусть для определенности им является второй сосед слева. Применяя сокращения: Л — лысый, В — волосатый, запишем расположение этих трех гостей: Л — Л — В. Вторым соседом слева левого лысого (он же четвертый сосед слева правого лысого) должен быть волосатый: В — Л — Л — В. Тогда четвертым соседом справа правого лысого является обязательно лысый: В — Л — Л — В — — Л. Ясно, что вторым соседом справа самого правого лысого является лысый: В — Л — Л — В — Л — Л. Продолжая цепочку в обе стороны, получаем расположение лысых и волосатых среди четных соседей лысого: ... Л — Л — В — Л — Л — В — Л — Л — В... На двух лысых приходится один волосатый. Значит, из 332 четных соседей лысого равно 221 тоже лысых. Среди нечетных соседей исходного лысого гостя могут быть лысые — и тогда их 222, — а могут и не быть. Значит, всего лысых либо 222, либо 444.

26.109. Указание. Участки можно разбить на пары не имеющих друг с другом общих сторон. Докажите, что произведения площадей участков каждой пары равны между собой. Ответ: площадь четвертого участка может быть равна 4/3 га, 3 га, 12 га (участок, входящий в пару с четвертым, имеет площадь 6 га, 4 га, 2 га соответственно). (Не забудьте проверить, что рассматриваемые четырехугольники существуют.)

26.110. Произведение шести указанных в условии тройных произведений равно $(-A^2B^2C^2D^2E^2H^2K^2M^2P^2)$, т. е. отрицательно. Значит, шесть рассматриваемых чисел не могут быть все положительными или все отрицательными.

26.111. Проведем через точки A и B перпендикуляры к прямой AB. Углы A и B треугольника ABC являются острыми тогда и только тогда, когда C лежит внутри полосы, заключенной между двумя описанными выше перпендикулярами. Рассмотрим круг, для которого отрезок AB является диаметром. Угол C треугольника ABC является острым тогда и только тогда, когда точка C лежит вне упомянутого круга. Итак, искомое геометрическое место является разностью полосы, заключенной между перпендикулярами к прямой AB, проведенными через точки A и B, и круга, построенного на отрезке AB как на диаметре.

26.112. Указание. В многоугольнике не должно быть тупых углов. Воспользовавшись формулой для суммы углов выпуклого многоугольника и принципом Дирихле, получите, что условию удовлетворяют лишь остроугольные и прямоугольные треугольники и прямоугольники.

26.113. Разбейте плоскость квадратной сеткой со стороной квадратов 60 см, в квадрате 180 см $\times$ 180 см квадратики раскрасьте в разные цвета, а потом периодически продолжайте раскраску.

26.114. Указание. Одно из возможных расположений можно описать следующим образом. Оно симметрично относительно вертикальной прямой и состоит из трех рядов квадратов. В верхнем ряду — три квадрата подряд. Во втором ряду — четыре квадрата, посередине — просвет в половину длины стороны квадрата. В нижнем ряду — четыре квадрата.

26.115. Витя Иванов мог рассуждать так:

— Докажу от противного. Принесу в класс много длинных веревок. Попрошу каждых двух друзей взять в руки по концу веревки, соединяющей их. Тогда у каждого из 35 ребят будет в руках 11 концов веревок. А всего в классе $35 \times 11 = 385$ концов. Но у веревки два конца, и общее число концов тоже должно быть четным. Вот и противоречие.

26.116. Пусть было предложено a задач. Тогда работ, в которых все задачи решались, будет не более $a + 1$ (от a плюсов и 0 минусов до 0 плюсов и a минусов); работ, в которых лишь одна задача не решалась (одна оценка «нуль»), будет не более a (от $a - 1$ плюсов и 0 минусов до 0 плюсов и $a - 1$ минусов); и т. д. Сумма $(a+1) + a + \ldots + 1$ равна $\frac{(a+1)(a+2)}{2}$. При $a=9$ будет $\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$.

Ответ: 9 задач.

26.117. Рассмотрим два соседних знака из набора Попа. Между ними встанет один знак из набора Балды. Если знаки Попа различны, то, какой бы знак ни написал Балда, Поп получит на этом один щелчок. Если же знаки Попа одинаковы, то в лучшем случае (когда знак Балды совпадает с его знаками) он не получит ни одного щелчка, но зато в худшем случае (когда знак Балды отличается от его знаков) он получит целых два щелчка. Значит, Попу надо чередовать знаки, тогда он получит ровно 1984 щелчка.

26.118. Раскрасим доску как шахматную. Тогда шашки, стоящие на белых полях, должны попасть на черные, а шашки, стоящие на черных полях, — на белые. Но число белых полей не равно числу черных, поэтому требуемую перестановку невозможно осуществить.

26.119. Надо доказать, что параллелограмм $ABCD$ — либо ромб ($|AB| = |BC|$), либо прямоугольник ($|AC| = |BD|$). Легко видеть, что и для ромба, и для прямоугольника сумма углов ABD и BCA действительно равна 90°. Рассмотрим все параллелограммы с данным углом BCA и данной диагональю AC. Покажем, что из них не более чем для двух сумма углов ABD и BCA равна 90°. Действительно, вершина B должна лежать на пересечении стороны угла BC и дуги окружности, проходящей через A и середину AC и вмещающей угол $90° - \angle BCA$. Ясно, что эти две линии могут иметь не более двух точек пересечения. С другой стороны, по диагонали AC и углу BCA можно построить ромб и прямоугольник, которые исчерпывают эти возможности. Значит, никакие параллелограммы, кроме ромбов и прямоугольников, не удовлетворяют условию.

26.120. Первым ходом Люся переносит одну из пуговиц на крайнее справа поле. Затем она «дублирует» ходы Саши, и после ее хода две оставшиеся пуговицы оказываются на одном поле.

26.121. Число 3 — нечетное, куб его равен 27. Из условия известно, что 27 и 3 дают при делении на A одинаковые остатки. Значит, $27 - 3 = 24$ делится на A, т. е. A — это или 24, или один из положительных делителей этого числа: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.

Докажем теперь, что если разделить на 24 сначала любое нечетное число, а потом его куб, то всегда получатся одинаковые остатки. Любое нечетное число можно записать как $2n - 1$, где n — натуральное число. Нам достаточно доказать, что $(2n-1)^3 - (2n-1)$ делится на 24. Разложим на множители: $(2n-1)^3 - (2n-1) = (2n-1)((2n-1)^2 - 1^2)) = (2n-2)(2n-1)2n$. Получили произведение трех последовательных целых чисел. Два из них — четные. Из двух последовательных четных чисел одно обязательно делится на 4, а второе всегда делится на 2, значит, их произведение делится на $4 \times 2 = 8$. Одно из трех последовательных чисел всегда делится на 3. Значит, $(2n-2)(2n-1)2n$ делится на $8 \times 3 = 24$, что и требовалось доказать. Ясно, что $(2n-2) \times \times (2n-1) 2n$ делится также на любой делитель 24, а потому $(2n-1)$ и $(2n-1)^3$ дают одинаковые остатки при делении на любой делитель 24.

О т в е т: 24 и все его положительные делители.

26.122. Можно, конечно, перебрать все произведения двух множителей — чисел от 6 до 9. Как нетрудно подсчитать, придется перебрать 10 произведений. Но можно действовать методами алгебры. Пусть x — первый множитель, y — второй. Вычтем из каждого множителя число 5, получим $x - 5$ и $y - 5$. Сложив полученные числа: $x + y - 10$, получим десятки произведения.

Займемся теперь незагнутыми пальцами. Если загнуто $x - 5$ пальцев, то незагнутых пальцев осталось, естественно, $5 - (x-5) = 10 - x$. Значит, произведение незагнутых пальцев равно $(10 - x) \times (10 - y)$. Следовательно, произведение равно

$$10(x + y - 10) + (10 - x)(10 - y).$$

Теперь уже легко проверить, всегда ли это выражение равно xy. Надо просто раскрыть скобки: $10(x + y - 10) + (10 - x)(10 - y) = 10x + 10y - 100 + 100 - 10x - 10y + xy = xy$. При приведении подобных членов все члены, кроме xy, сократились. Способ умножения Л. Н. Толстого всегда дает правильные результаты.

Внимание! Все ли мы проверили? Нет, не все. Мы считали, что десятки произведения — это $x + y - 10$. Но это верно только в том случае, когда произведение $(10 - x)(10 - y)$ меньше 10. Может быть, оно всегда меньше 10? Давайте разберемся. Поскольку x и y могут принимать значения 6, 7, 8, 9, то $(10 - x)$ и $(10 - y)$ — это числа из множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Легко видеть, что их произведение больше 10, если один из множителей 4, а другой 3 или 4. Поэтому при умножении по способу Л. Н. Толстого 6×6 или 6×7 (а также 7×6) число десятков в произведении не равно сумме загнутых пальцев. Но и в этом случае, как мы доказали, произведение можно найти, приложив (т. е. прибавив) к числу десятков, равному сумме загнутых пальцев, произведение незагнутых пальцев.

Итак, мы с помощью алгебры не только доказали правильность умножения по способу Л. Н. Толстого, но и обнаружили неточность в описании Сергея Львовича.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В этом разделе, завершающем книгу, собраны задачи, которые в разное время предлагались учащимся на различных конкурсах и олимпиадах. Большинство задач довольно трудные. Каждая задача снабжена комментарием. Как правило, комментарий содержит подробное решение задачи, но иногда ход решения лишь намечен, а иногда сообщаются некоторые наводящие соображения, облегчающие поиск решения. Близкие по смыслу задачи расположены в непосредственной близости друг от друга.

При отборе задач для конкурсов и олимпиад наряду с нетрудными задачами, с которыми может справиться почти каждый учащийся, следует включать и более трудные задачи, подобные тем, которые приведены ниже. Это приносит пользу даже в том случае, когда ту или иную задачу никто не смог решить: узнав решение задачи, над которой ученик долго и безуспешно ломал голову, он это решение запомнит и потом сможет приобретенное знание использовать, решая похожие задачи.

Наконец, в разделе содержится некоторое число сравнительно легких задач. Номера этих задач выделены курсивом.

1. На шахматной доске 8×8 клеток надо расставить побольше коней так, чтобы они не били друг друга. Какое наибольшее число коней удастся так расставить? (Приведите пример расстановки.) Докажите, что большее число коней расставить так не удастся.

Комментарий. Заметим, что конь, стоящий на белом поле, бьет черные поля, а конь, стоящий на черном, — белые. Поэтому, если мы поставим 32 коня на все черные поля (или белые), то они не будут бить друг друга.

Докажем, что на доске нельзя расположить больше чем 32 коня так, чтобы они не били друг друга. Рассмотрим две горизонтали, следующие через одну. Переставим каждого коня с нижней горизонтали на одно из битых им полей на верхней горизонтали следующим образом (эти поля не заняты конями по условию): если конь стоял на первом, третьем, пятом или седьмом слева поле нижней горизонтали, то переставим его на второе, четвертое, шестое или восьмое, считая слева, поле верхней горизонтали, т. е. на следующую вертикаль; если же конь стоял на втором, четвертом, шестом или восьмом поле нижней горизонтали, то передвинем его на верхнюю горизонталь так, чтобы он оказался на предыдущей вертикали. Очевидно, никакие два коня не окажутся на одном поле верхней горизонтали. Теперь на верхней горизонтали стоит не больше восьми коней, а на нижней коней нет. Но всю доску можно разбить на 4 пары горизонталей, идущих через одну, — первая и третья, вторая и четвертая, пятая и седьмая, шестая и восьмая. Значит, всего коней на доске не больше, чем $4 \times 8 = 32$.

2. Имеется семь одинаковых по виду монет, но среди них пять монет настоящие, а две фальшивые. Настоящие монеты весят по 10 г, а фальшивые по 9,8 г. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь надо сделать, чтобы наверняка определить фальшивые монеты?

Комментарий. Сначала докажем, что из трех монет одну монету, более легкую, удается найти при помощи одного взвешивания. В самом деле, положим по одной монете на каждую чашку весов. Либо одна монета окажется более легкой, либо чашки весов уравновесятся, тогда более легкой окажется третья монета. Точно так же из трех монет удается найти одним взвешиванием две более легкие.

Теперь докажем, что при помощи двух взвешиваний удается из четырех монет найти две более легкие. В самом деле, положим на каждую чашу весов по монете. Если одна из двух монет окажется более легкой, то мы положим на весы третью и четвертую монеты и при втором взвешивании найдем фальшивую монету. Если монеты уравновесятся, то каждая из них либо тяжелее, либо легче, чем каждая из остальных. Положив на обе чашки весов по одной монете из каждой пары, мы вторым взвешиванием выясним, монеты какой из пар легче.

Для того чтобы определить две фальшивые монеты из семи, достаточно трех взвешиваний. Докажем это. Положим на весы шесть монет, по три на каждую чашку. Одна или две из шести монет фальшивые, более легкие. Пусть одна из чашек перевесила, тогда на ней монеты настоящие. Среди остальных четырех монет удается найти две более легкие двумя взвешиваниями, как показано выше. Остается рассмотреть случай, когда весы уравновесились. Это значит, что одна фальшивая монета — на одной чашке весов, а вторая — на другой. Для того чтобы выявить по одной фальшивой монете из каждой тройки, достаточно двух взвешиваний.

Докажем теперь, что двух взвешиваний недостаточно для того, чтобы наверняка определить обе фальшивые монеты. У одного взвешивания может быть три различных результата: *Л* — левая чашка перевесила, *П* — правая чашка перевесила, *Р* — массы равны. Таким образом, результат одного взвешивания можно записать одной из трех букв *Л*, *П*, *Р*. Результат двух взвешиваний можно записать двумя из этих трех букв: *ЛЛ*, *ЛП*, *ЛР*, *ПЛ*, *ПП*, *ПР*, *РЛ*, *РП*, *РР*, всего девять различных результатов. По результату двух взвешиваний мы должны дать однозначный ответ, какие две из семи монет фальшивые: первая и вторая, или первая и третья, или первая и четвертая, или первая и пятая, или первая и шестая, или первая и седьмая, или вторая и третья и т. д. — всего имеется 21 возможность. Каждой из этих возможностей отвечает один из девяти результатов двух взвешиваний, но так как число возможностей — 21, а число таких результатов — 9, то некоторым из результатов отвечают две или более возможностей, и, получив такой результат двух взвешиваний, мы не сможем определить, какая из отвечающих этому результату возможностей имеет место. Значит, двух взвешиваний недостаточно. Заметьте, что в последнем рассуждении использован принцип Дирихле (тема 15).

3. Сто фишек положены в один ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно менять местами. Удастся ли переставить фишки в обратном порядке?

Комментарий. По условию местами могут обменяться лишь две фишки, стоящие на четных местах, или две фишки, стоящие на нечетных местах, и никакая фишка не может таким образом перейти с нечетного места на четное. В частности, первую фишку не удастся переставить на последнее, сотое место, ибо 1 — число нечетное, а 100 — четное. Значит, переставить фишки в обратном порядке не удастся.

4. Докажите, что не существует одиннадцати правильных бесконечных десятичных дробей, каждые две из которых совпадают лишь в конечном числе разрядов.

Комментарий. Допустим, в противоречие с доказываемым, что такие одиннадцать дробей существуют. Выведите из условия задачи, что начиная с некоторого разряда любые две дроби различаются в каждом разряде. Но этого не может быть, так как существует лишь десять различных цифр, а из любых одиннадцати цифр по крайней мере две одинаковы. Противоречие. В последнем рассуждении вновь применен принцип Дирихле (см. тему 15).

5. Можно ли натуральные числа, записываемые при помощи цифр 1 и 2, разбить на две группы так, чтобы десятичная запись суммы любых двух различных чисел, взятых из одной группы, содержала не менее двух троек?

Комментарий. Нетрудно доказать, что это возможно. В самом деле, разобьем все такие числа на две группы следующим образом: к первой группе отнесем числа, в записи которых имеется нечетное число двоек, ко второй группе — все остальные числа, т. е. те, в записи которых имеется четное число двоек. Тройка в записи суммы двух чисел появится тогда и только тогда, когда на соответствующих местах в слагаемых стоят различные цифры. Поэтому в записи суммы нет троек лишь тогда, когда складываются одинаковые числа. Если же запись суммы содержит лишь одну тройку, то слагаемые различаются лишь в одном разряде, число двоек в одном слагаемом на одну больше, чем в другом; значит, в одном слагаемом нечетное число двоек, а в другом — четное, т. е. слагаемые принадлежат разным группам. Все доказано.

6. Можно ли выписать в строку 50 целых чисел так, чтобы сумма любых 10 последовательных чисел была положительна, а сумма любых 7 последовательных чисел была отрицательна?

Комментарий. Нельзя. Это может быть доказано методом «от противного». Допустим, что в строку выписаны 50 чисел так, как сказано в условии. Докажем, что сумма любых трех рядом стоящих чисел должна быть положительна. Действительно, каждые такие три числа можно включить в десятку последовательных чисел в качестве первых или последних трех. Сумма остальных семи рядом стоящих чисел в этой десятке по условию отрицательна, а сумма всех чисел десятки положительна. Это может быть только, если сумма трех рассматриваемых чисел положительна. Пользуясь тем, что сумма любых семи рядом стоящих чисел отрицательна, а сумма любых трех — положительна, точно так же докажем, что сумма любых четырех последовательных чисел отрицательна. Далее, каждое число является первым или последним в некоторой четверке рядом стоящих чисел, сумма трех остальных чисел в четверке положительна, а сумма всех четырех — отрицательна, значит, каждое число отрицательно. А тогда и сумма любых десяти чисел отрицательна. Противоречие.

Способ, использованный при доказательстве, аналогичен алгоритму Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел.

7. Найдите такие два натуральных числа, сумма квадратов которых равна 16 000. (Указать все решения.)

Комментарий. Квадрат четного числа $2n$ равен $(2n)^2 = 4n^2$, а квадрат нечетного $2n+1$ равен $4n^2+4n+1$. Отсюда видно, что сумма двух квадратов либо кратна 4, если оба числа четные, либо при делении на 4 дает остаток 1, если одно из чисел нечетное, либо остаток 2, если оба числа нечетные.

Обозначим x — большее из двух искомых чисел, y — меньшее: $x^2+y^2 = 16\,000$. Из предыдущего следует, что x и y — числа четные: $x = 2m$, $y = 2n$, откуда получаем $m^2+n^2 = 4000$. Аналогично $m = 2m_1$, $n = 2n_1$ и $m_1^2+n_1^2 = 1000$; $m_1 = 2m_2$, $n_1 = 2n_2$ и $m_2^2+n_2^2 = 250$. Числа m_2 и n_2 должны быть нечетными, причем $m_2 \geqslant n_2$, а значит $m_2{}^2 \geqslant 125$. Есть всего 2 нечетных числа, квадрат которых заключен между 125 и 250 — это 13 и 15. Если $m_2 = 13$, то $n_2 = \sqrt{250-13^2} = 9$, а если $m_2 = 15$, то $n_2 = 5$. Так как $x = 8m_2$, а $y = 8n_2$, то задача имеет 2 решения: $x = 104$, $y = 72$ или $x = 120$, $y = 40$.

8. Натуральное число $n > 1$ является одновременно полным кубом, четвертой и пятой степенью, то есть $n = a^3 = b^4 = c^5$, где a, b, c — натуральные числа. Найдите наименьшее n, удовлетворяющее этому условию.

Комментарий. Пусть p — некоторый простой делитель числа n, p^k — наивысшая степень p, делящая n. Выведите отсюда, воспользовавшись основной теоремой арифметики (с. 175), что k кратно трем, четырем и пяти, и, следовательно, кратно 60. Значит, всякое число n, удовлетворяющее условию, кратно p^{60}, где $p \geqslant 2$. Отсюда следует, что $n \geqslant 2^{60}$. Так как число $2^{60} = (2^{20})^3 = (2^{15})^4 = (2^{12})^5$, то оно и является наименьшим n, удовлетворяющим условию задачи.

9. Шесть цифр вписаны по кругу. Если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого места, то полученное шестизначное число делится на 27. Доказать, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное шестизначное число также будет делиться на 27.

Комментарий. Будем обозначать цифры полученного шестизначного числа буквами a, b, c, d, e, f, где a — число сотен тысяч, b — число десятков тысяч, c — число тысяч, d — число сотен, e — число десятков и f — число единиц. Все число обозначается так: $\overline{abcdef}$. Известно, что это число делится на 27. Если самую левую цифру числа переставить на правый конец, то новое число $\overline{bcdefa}$ опять будет делиться на 27. В самом деле,

$$\overline{bcdefa} = 10\overline{bcdef} + a = 10\overline{abcdef} + a - 1\,000\,000a = 10\overline{abcdef} -$$
$$-999\,999a = 10\overline{abcdef} - 9 \cdot 111\,111a = 10\overline{abcdef} - 27 \cdot 37\,037a.$$

Уменьшаемое по условию делится на 27. Вычитаемое также делится на 27, значит, и разность делится на 27. Если в получившемся числе переставить левую цифру на самый правый конец, то снова, по уже доказанному, получится число, делящееся на 27. Отсюда и следует доказываемое.

Отметим в заключение, что это решение проходит также и в том случае, если по кругу выписаны не 6, а 3, 9, 12, 15 или любое другое число цифр, кратное трем.

10. В равенстве $\dfrac{\text{фут}}{\text{бол}} = 0,\text{голголгол}\ldots$

вместо каждой из семи букв поставить определенную цифру, отличную от 0, так, чтобы получилось тождество. (Разные буквы означают разные цифры, перед запятой в периодической дроби стоит нуль.)

Комментарий. Превратив периодическую дробь в обыкновенную, получаем $\dfrac{\text{фут}}{\text{бол}} = \dfrac{\text{гол}}{999}$,

откуда *фут* $\times$ 999 = *гол* $\times$ *бол*. Рассмотрим всевозможные разложения числа 999 на множители:

$999 = 9 \times 111 = 27 \times 37 = 3^3 \times 37$, где 37 число простое. Так как *гол* $\times$ *бол* = *фут* $\times 3^3 \times 37$, то согласно основной теореме арифметики (с. 175) один из множителей, *гол* или *бол*, делится без остатка на 37. Так как $37 \times 3 = 111$, $37 \times 6 = 222$, $37 \times 9 = 333$ и т. д., то тот из множителей, который делится на 37, не может делиться на 3, иначе он бы записывался одинаковыми цифрами. Таким образом один из двух множителей *гол*, *бол* делится на 37, а другой на 27. Нам остается выписать трехзначные числа, кратные 37, затем трехзначные числа, кратные 27, и найти в той и другой группе числа, два последних разряда которых совпадают. Из всех таких пар надо выбрать пару чисел, которые сами записываются различными цифрами (не 0) и произведение их тоже записывается различными цифрами, отличными от цифр сомножителей. Этим условиям удовлетворяет пара 918 и 518, их произведение равно 476×999. Отсюда *фут* = 476, *ол* = 18, *г* = 9, а *б* = 5 или, наоборот, *г* = 5, *б* = 9.

11. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

принимающий нечетные значения при $x = 0$ и $x = 1$, ни при каком целом x не может равняться нулю.

Комментарий. Очевидно, $P(0) = a_0$, значит число a_0 — нечетное. Число $P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, равное сумме всех коэффициентов, тоже, по условию, нечетное. Пусть число x четное. Тогда $P(x) = a_0 + x(a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1})$ есть сумма нечетного числа a_0 и четного числа $x(a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1})$, т. е. является нечетным числом и, следовательно, нулем быть не может. Пусть теперь x — число нечетное, значит, и любая степень x, как произведение нечетных чисел, есть число нечетное. Заметим, что при умножении любого числа a_k на нечетное число x^k четность произведения оказывается одинаковой с четностью числа a_k. С другой стороны, четность или нечетность суммы целочисленных слагаемых зависит не от величины отдельных слагаемых, а только от их четности или нечетности: если нечетных слагаемых четное число, то и сумма четная, а если нечетное число — нечетная. Отсюда следует, что сумма $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^{n-1}$ имеет ту же четность, что и $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, т. е. является числом нечетным. Значит, и в этом случае $P(x)$ не может быть нулем. Все доказано.

12. Выписаны в ряд n натуральных чисел так, что каждое следующее число в этом ряду, начиная со второго, в полтора раза больше предыдущего. Докажите, что первое из чисел делится на 2^{n-1}.

Комментарий. Обозначим данные числа буквами $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$a_2 = \frac{3}{2}a_1,\ a_3 = \frac{3}{2}a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 a_1,\ a_4 = \frac{3}{2}a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 a_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} a_1.$$

Из последнего равенства видно, что целое число $a_n = \dfrac{3^{n-1}a_1}{2^{n-1}}$, и так как 3^{n-1} на 2 не делится, то a_1 делится на 2^{n-1}.

13. Найдите все числа вида $\overline{aabb}$, являющиеся точными квадратами.

Комментарий. Одно из возможных решений — выписать квадраты всех двузначных чисел и среди них отыскать числа вида $\overline{aabb}$. Попробуем найти другое решение. Допустим, число $\overline{aabb}$ удовлетворяет условию. Так как данное число $\overline{aabb} = 11 \cdot \overline{a0b} = 11\,(100a + b)$ — точный квадрат, то число $100a + b$ должно делиться на 11. Но

$$100a + b = 99a + (a + b),$$

а значит, $a + b$ должно делиться на 11, откуда $a + b = 11$, $100a + b = 99a + 11 = 11\,(9a + 1)$ и искомое число равно $\overline{aabb} = 11^2\,(9a + 1)$.

Остается среди чисел вида $9a + 1$ найти точные квадраты. Такое число только одно: $9 \cdot 7 + 1 = 64 = 8^2$, откуда $a = 7$, $b = 11 - 7 = 4$, и искомое число равно $7744 = 88^2$.

14. Последние две цифры десятичной записи точного квадрата одинаковы и не равны нулю. Какие это цифры? (Исследуйте все возможности.)

Комментарий. Легко проверить, что квадраты однозначных чисел, а значит, и любых целых чисел, могут оканчиваться только такими цифрами 0, 1, 4, 5, 6, 9. В самом деле, если число оканчивается пятеркой, то его квадрат — тоже пятеркой, если число оканчивается четверкой или шестеркой, то его квадрат — шестеркой и т. д. Любое натуральное число n можно представить в виде $n = 10a + b$, где b — цифра, стоящая в последнем разряде. Значит,

$$n^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 20\,(5a^2 + ab) + b^2.$$

Отсюда видно, что разность между квадратом натурального числа и квадратом последней его цифры делится на 20.

Посмотрим, может ли десятичная запись точного квадрата оканчиваться на 11. Если последняя цифра квадрата некоторого числа — единица, то последняя цифра самого числа — 1 или 9, а квадрат последней цифры — 1 или 81. Если из числа, оканчивающегося цифрами 11, вычесть 1 или 81, то разность на 20 делиться не будет. Значит, последние две цифры квадрата не могут быть единицами. Точно так же проверяется, что они не могут быть пятерками, шестерками и девятками. Остается единственная возможность — четверка, и эта возможность реализуется: например, $12^2 = 144$.

15. Найдите все двузначные числа, квадраты которых оканчиваются тремя одинаковыми цифрами, отличными от нуля.

Комментарий. Из предыдущей задачи следует, что квадраты этих чисел должны оканчиваться четверками, то есть иметь вид

$$n^2 = 1000a + 444,$$

где a — первая цифра числа n^2 (или нуль). Так как $n^2 = 4\,(250a + 111)$, то число $250a + 111$ тоже должно быть точным квадратом (рассмотрите разложение числа n на простые множители: разложение числа n^2 содержит те же множители, что и n, в удвоенных степенях: см. с. 175). Из результата предыдущей задачи следует, что число a не может быть чётным, так как точный квадрат $250a + 111$ не может оканчиваться цифрами 11. Далее $a \neq 3$ и $a \neq 9$, иначе число n^2 делилось бы на 3 и не делилось на $3^2 = 9$, в то время как разложение n^2 на простые множители содержит 3 в четной степени. Остается проверить $a = 1$, $a = 5$ и $a = 7$. Из этих трех возможностей только одна дает точный квадрат: $a = 1$, $250 \cdot 1 + 111 = 361 = 19^2$. В этом случае $n^2 = 4 \cdot 19^2 = 1444$.

16. Что больше: $(1977!)^2$ или 1977^{1977}?

Комментарий. Представим первое число в виде произведения 1977 чисел следующим образом:

$(1977!)^2 = (1 \times 1977) \times (2 \times 1976) \times \ldots \times (1976 \times 2) \times (1977 \times 1)$.

Каждый из сомножителей справа сам является произведением двух чисел, сумма которых равна 1978. Первый и последний сомножители равны по 1977. Каждый из остальных сомножителей больше 1977, так как является произведением двух чисел, меньшее из которых не меньше 2, а большее — не меньше $1978 : 2 = 989$. Так как 1977^{1977} — произведение 1977 чисел, каждое из которых равно 1977, то это число меньше, чем $(1977!)^2$.

17. Какое наименьшее значение может иметь сумма всевозможных попарных произведений тысячи чисел, если известно, что все эти числа по абсолютной величине не превосходят единицы?

Комментарий. Квадрат суммы нескольких чисел равен сумме их квадратов плюс сумма удвоенных попарных произведений этих чисел. Поэтому сумма попарных произведений тысячи чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ равна числу $b = \frac{1}{2}[(a_1 + a_2 + \ldots + a_{1000})^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{1000}^2)]$. Уменьшаемое здесь неотрицательно, а вычитаемое не превосходит числа 1000, так как числа $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ не превосходят по абсолютной величине единицы. Отсюда видно, что $b \geqslant -500$. Если среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ пятьсот чисел равны по 1, а каждое из остальных равно -1, то $b = -500$. Значит, ответ на вопрос задачи: -500.

* * *

Многие интересные задачи связаны с функцией $y = x + \frac{1}{x}$, график которой есть суперпозиция графиков функций $y_1 = x$ и $y_2 = \frac{1}{x}$, хорошо известных школьникам. Во многих задачах используется следующий результат (см., например, тему 22).

18. При любом $x > 0$ имеет место неравенство $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, причем знак равенства имеет место лишь тогда, когда $x = 1$. Докажите это.

Комментарий. Так как $x > 0$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 1 \geqslant 2x$, которое после перенесения $2x$ в левую часть превращается в очевидное неравенство $(x - 1)^2 \geqslant 0$. Последнее неравенство является строгим всегда, когда $x \neq 1$.

Иногда приходится применять более тонкий результат.

19. Функция $y = x + \frac{1}{x}$ монотонно убывает в интервале $(0, 1)$ и монотонно возрастает при $x > 1$.

Комментарий. Приведем доказательство последнего утверждения. Пусть $1 < x_1 < x_2$. Для доказательства неравенства

$$x_1 + \frac{1}{x_1} < x_2 + \frac{1}{x_2}$$

перейдем к равносильному неравенству

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} < x_2 - x_1, \text{ откуда } \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} < x_2 - x_1.$$

Деля обе части последнего неравенства на положительное число $x_2 - x_1$, получим очевидное неравенство, равносильное исходному при $x_2 > x_1 > 1$:

$$\frac{1}{x_1x_2} < 1.$$

20. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right), \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{1}{x_3}\right), \\ x_3 = \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{1}{x_4}\right), \\ x_4 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right). \end{cases}$$

Комментарий. Введем в рассмотрение такую функцию:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Теперь данную систему можно переписать так:

$$x_1 = \varphi(x_2), \quad x_2 = \varphi(x_3), \quad x_3 = \varphi(x_4), \quad x_4 = \varphi(x_1).$$

Если известно, чему равен x_1, то можно найти $x_4 = \varphi(x_1)$, затем $x_3 = \varphi(x_4)$ и затем $x_2 = \varphi(x_3)$. При этом x_1, x_2, x_3, x_4 оказываются числами одного знака. Ограничимся поиском положительных решений системы. Заметим прежде всего, что $\varphi(x) \geqslant 1$ при любом $x > 0$, причем $\varphi(x) = 1$ только в том случае, когда $x = 1$. Действительно, из результата задачи 19 это следует сразу. Так как правые части уравнений не меньше 1, то и левые части также: $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 1$, $x_3 \geqslant 1$, $x_4 \geqslant 1$. Если $x_1 = 1$, то $x_4 = \varphi(x_1) = 1$, $x_3 = \varphi(x_4) = 1$, $x_2 = \varphi(x_3) = 1$. Значит, одно из решений $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Докажем, что система не имеет других положительных решений. Это следует из того, что $\varphi(x) < x$ при любом $x > 1$. Для доказательства достаточно выписать следующую цепочку равносильных (при $x > 1$) неравенств:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) < x, \quad x + \frac{1}{x} < 2x, \quad \frac{x^2+1}{x} < 2x, \quad x^2 + 1 < 2x^2, \quad 1 < x^2.$$

Последнее неравенство очевидно.

Из доказанного свойства в случае $x > 1$ имеем:

$$x_4 = \varphi(x_1) < x_1, \quad x_3 = \varphi(x_4) < x_4, \quad x_2 = \varphi(x_3) < x_3, \quad x_1 = \varphi(x_2) < x_2,$$

откуда получаем $x_1 < x_1$. Но этого не может быть.

Если числа x_1, x_2, x_3, x_4 образуют решение данной системы, то и числа $-x_1, -x_2, -x_3, -x_4$ также образуют решение. Отсюда следует, что данная система имеет только два решения: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ и $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$.

21. Докажите, что при $0 < a < 1$ уравнение $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = a$ имеет единственное решение.

Комментарий. Представив левую часть уравнения в виде $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$, видим, что это выражение с ростом x убывает от наибольшего своего значения, равного 1 при $x = 0$, до 0. Отсюда и вытекает доказываемое.

22. Решить в целых числах уравнение $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} = m$.

Комментарий. Одно решение данного уравнения очевидно: $n = 0$, $m = 0$. Докажем, что других целочисленных решений это уравнение иметь не может. Допустим, в противоречие с доказываемым, что существует целое число $n > 0$, обращающее левую часть уравнения в целое число m. Подставим эти числа n и m в уравнение и возведем обе части получившегося тождества в квадрат

$$n + \sqrt{n + \sqrt{n}} = m^2, \quad \text{откуда} \quad n + \sqrt{n} = (m^2 - n)^2 \text{ и, наконец,}$$
$$n = [(m^2 - n)^2 - n]^2.$$

Из последнего равенства видно, что число n является точным квадратом, а из предпоследнего — что число $n + \sqrt{n}$ тоже является точным квадратом. Но этого не может быть: если $n = k^2$, то $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 = n + 2\sqrt{n} + 1 > n + \sqrt{n}$, то есть следующим по величине после точного квадрата $n = k^2$ будет точный квадрат $n + 2\sqrt{n} - 1 > n + \sqrt{n}$. Противоречие.

23. Всякий ли треугольник можно разрезать на равнобедренные треугольники?

Комментарий. Докажем, что любой треугольник можно разрезать на четыре равнобедренных треугольника. В самом деле, пусть A — наибольший угол треугольника ABC. Тогда углы B и C острые, а высота AH разрезает треугольник ABC на два прямоугольных треугольника. Длина медианы прямоугольного треугольника равна половине длины гипотенузы, и, значит, медиана разрезает прямоугольный треугольник на два равнобедренных. Отсюда и следует доказываемое.

24. Докажите, что нельзя квадрат $ABCD$ разрезать на девять треугольников равной площади, все вершины которых лежали бы на сторонах AB и CD.

Комментарий. Допустим, в противоречие с доказываемым, что это возможно. Так как по условию две вершины каждого треугольника лежат на одной стороне квадрата, а третья на противоположной, то высоты всех треугольников равны — они равны AD. Так как площади треугольников равны, то равны и основания и на долю каждого основания приходится $\frac{1}{9}(AB + CD) = \frac{2}{9}AB$. Отрезками такой длины не удастся полностью «вымостить» сторону AB, так как $AB : \frac{2}{9}AB = 4{,}5$ — число нецелое. Противоречие.

25. Плоскость разделена на части n прямыми ($n > 3$), никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди этих частей найдутся по крайней мере две, имеющие форму треугольника.

Комментарий. Доказываемое легко следует из утверждения задачи 21.7. Согласно этому утверждению к каждой прямой примыкает часть плоскости, имеющая форму треугольника.

Рассмотрим один из таких треугольников. Прямые, образующие его стороны, обозначим l_1, l_2, l_3. Так как число прямых $n > 3$, то существует прямая l_4, отличная от l_1, l_2, l_3. Треугольник, примыкающий к l_4, отличен от рассмотренного.

26. Можно ли поместить в квадрат 1×1 некоторое число непересекающихся кругов, сумма радиусов которых больше 2000?

Комментарий. Можно. Разрежем квадрат вертикальными и горизонтальными прямыми на большое число, например на $10\,000 \times 10\,000 = 100\,000\,000$ одинаковых квадратиков. Внутри каждого квадратика поместим по кругу с центром в центре квадратика и диаметром $\frac{1}{20000}$. Сумма радиусов всех таких кружков равна 2500. Увеличивая число разрезов, можно поместить в квадрате непересекающиеся круги со сколь угодно большой суммой радиусов.

27. Для каждого нечетного $n \geqslant 5$ постройте пример самопересекающейся n-звенной ломаной, которая каждое свое звено пересекает 2 раза.

Комментарий. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — последовательные вершины правильного n-угольника с нечетным числом сторон $n \geqslant 5$. Нетрудно доказать, что условию задачи удовлетворяет правильный звездчатый многоугольник $A_1A_3A_5 \ldots A_{n-1}A_2 \ldots A_{n-2}A_n$, образуемый диагоналями многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$, соединяющими вершины через одну.

28. Докажите, что на плоскости нельзя расположить пять выпуклых многоугольников так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

Комментарий. Допустим, в противоречие с доказываемым, что такое возможно. Назовем один из многоугольников первым и пройдем по его контуру, нумеруя остальные многоугольники в той последовательности, в которой они будут нам встречаться: второй, третий, четвертый и пятый. Выберем на общих сторонах первого и второго, второго и четвертого, четвертого и первого многоугольников по точке, обозначим их A, B и C. Отрезок AB принадлежит второму многоугольнику, отрезок BC — четвертому, отрезок AC — первому. Легко видеть, что третий многоугольник лежит внутри треугольника ABC, а пятый — вне и, значит, третий и пятый многоугольники не могут иметь общих точек.

Отметим, что требование выпуклости многоугольников в условии задачи не является обязательным. Для невыпуклых многоугольников доказательство почти то же самое, только вместо прямолинейных отрезков AB, BC и AC надо будет проводить внутри соответствующих многоугольников линии другой формы, например ломаные или криволинейные дуги. При этом придется использовать теорему Жордана, утверждающую, что любые две точки, расположенные внутри или на границе многоугольника, можно соединить ломаной, все точки которой, кроме, быть может, концов, лежат внутри этого многоугольника.

Аналогично предыдущему доказывается, что третий многоугольник лежит внутри замкнутого пути $ABCA$, а пятый — вне.

29. Докажите, что выпуклый многоугольник, имеющий центр симметрии, можно разрезать на параллелограммы.

Комментарий. Если выпуклый многоугольник имеет центр симметрии, то для каждой его стороны можно указать симметричную — равную и параллельную ей сторону. Все стороны многоугольника разбиваются таким образом на пары. Центрально-симметричный многоугольник с наименьшим числом сторон — параллелограмм, для него доказываемое утверждение тривиально.

Рассмотрим теперь произвольный выпуклый центрально-симметричный многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$, где n — четное число, большее четырех.

Пусть сторона A_1A_2 симметрична стороне A_{k+1}, A_k. Построим отрезки B_3A_3, B_4A_4, ..., $B_{k-1}A_{k-1}$, равные и симметричные отрезку A_1A_2. Отрезав от данного многоугольника параллелограммы $A_1A_2A_3B_3$, $B_3A_3A_4B_4$, ..., $B_{k-1}A_{k-1}A_kA_{k+1}$, получим многоугольник $A_1B_3B_4 \ldots B_{k-1}A_{k+1} \ldots A_n$ с меньшим числом сторон, который, как легко видеть, также удовлетворяет условиям задачи.

С этим многоугольником можно повторить ту же процедуру отрезания параллелограммов; с многоугольником, который после этого останется, снова проделать то же самое. Рано или поздно останется многоугольник с четырьмя сторонами, а он сам — параллелограмм. Мы получили требуемое разбиение.

30. Если многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то он имеет центр симметрии. Докажите.

Комментарий. Мы докажем, что для каждой стороны такого многоугольника можно указать равную ей параллельную сторону. Отсюда без труда выводится наличие центра симметрии.

Итак, пусть многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ удалось разрезать на параллелограммы. Для определенности рассмотрим сторону A_1A_2, причем будем считать, что она расположена горизонтально и является верхней стороной многоугольника. Рассмотрим следующую совокупность параллелограммов S: первая группа (S_1) — параллелограммы, примыкающие снизу к стороне A_1A_2, вторая группа (S_2) — параллелограммы, примыкающие снизу к горизонтальным сторонам параллелограммов из S_1, третья группа (S_3) — параллелограммы, примыкающие снизу к горизонтальным сторонам параллелограммов из S_2, и т. д.

При этом мы, не ограничивая общности, можем считать, что все параллелограммы одной группы имеют одинаковые высоты. Если это не так, то, проведя всевозможные горизонтали через горизонтальные стороны параллелограммов из семейства S, разрежем эти параллелограммы на части, также имеющие форму параллелограммов. Получили новое разбиение многоугольника на параллелограммы, удовлетворяющее условию.

Так как число параллелограммов конечно, то и число групп S_1, S_2, S_3, ... тоже конечно и к последней группе S_m снизу никакие параллелограммы не примыкают, значит, нижние стороны параллелограммов из S_m примыкают к некоторой стороне $A_{k+1}A_k$ многоугольника. Отсюда видно, что эта сторона параллельна стороне A_1A_2.

Нам осталось доказать, что $A_{k+1}A_k = A_1A_2$.

Так как верхние стороны параллелограммов из S_1 «мостят» сторону A_1A_2, то сумма их длин равна A_1A_2. Сумма длин верхних сторон параллелограммов из S_2 не может быть меньше, так как они «мостят» нижние стороны параллелограммов группы S_1. Продолжая эти рассуждения, получим, наконец, $A_{k+1}A_k \geqslant A_1A_2$. Проводя те же рассуждения «снизу вверх», от S_m к S_1, получим $A_1A_2 \geqslant A_{k+1}A_k$. Следовательно, $A_1A_2 = A_{k+1}A_k$. Все доказано.

31. Докажите, что среди всех прямоугольных треугольников с данной длиной гипотенузы c наибольший периметр имеет равнобедренный прямоугольный треугольник.

К о м м е н т а р и й. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника. Периметр его $P = a + b + c$ максимален тогда, когда максимальна сумма длин катетов $a + b$ или квадрат этой суммы:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab = c^2 + 4S,$$

где $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ — площадь треугольника.

Мы воспользовались здесь теоремой Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$. Рассмотрим прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу длины c. Вершины прямых углов таких треугольников лежат на окружности, построенной на этой гипотенузе, как на диаметре. Среди этих треугольников равнобедренный прямоугольный треугольник имеет наибольшую высоту $h_c = \frac{c}{2}$, а значит, и наибольшую площадь. Отсюда и следует доказываемое.

* *
*

Задачи на клетчатой бумаге. Следующие несколько задач — так называемые «задачи на клетчатой бумаге». Введем необходимую терминологию. Мы считаем, что вся плоскость разбивается на одинаковые квадратные клетки семейством попарно параллельных, вертикальных прямых, называемых вертикалями, отстоящих друг от друга на расстоянии 1, и таким же семейством горизонтальных прямых — горизонталей. Соседние вертикали высекают на плоскости вертикальную полосу ширины 1, соседние горизонтали — горизонтальную полосу ширины 1. Таким образом, клетка есть пересечение вертикальной полосы с горизонтальной. Всю плоскость в этом случае называют «клетчатой плоскостью», а вертикали и горизонтали — линиями клетчатой плоскости или линиями клетчатой бумаги. Совокупность вертикалей и горизонталей называют «сеткой», а точки пересечения вертикалей с горизонталями — «узлами сетки».

32. Какое наибольшее число клеток может разрезать (на две части) отрезок длины 15, лежащий на клетчатой бумаге (сторона клетки равна, как обычно, 1)?

К о м м е н т а р и й. Прежде всего доказывается, что число разрезанных клеток на 1 меньше числа пересечений данного отрезка с линиями клетчатой плоскости. В самом деле, если двигаться от одного из концов отрезка к другому, подсчитывая точки пересечения, встречающиеся по ходу движения, то можно заметить, что каждая новая точка пересечения, начиная со второй, прибавляет к числу уже разрезанных нашим путем клеток единицу.

Подсчитаем теперь максимальное число точек пересечения отрезка с линиями клетчатой плоскости. Сначала заметим, что горизонтально расположенный отрезок длины x разрезает $[x]$ или $[x] - 1$ вертикальных полос в зависимости от того, как он расположен, и при этом образует $[x] + 1$ или $[x]$ точек пересечения с вертикалями. (Здесь, как и обычно, $[A]$ обозначает целую часть числа A, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее A.) То же самое относится и к вертикально расположенным отрезкам.

Построим на данном в условии отрезке, как на гипотенузе, прямоугольный треугольник с горизонтально расположенным катетом длины x и вертикально расположенным катетом длины y, так что $x^2 + y^2 = 15^2$.

Очевидно, гипотенуза пересекает столько же вертикалей, сколько и «горизонтальный» катет, и столько же горизонталей, сколько «вертикальный» катет. Из предыдущего следует, что общее число точек пересечения данного отрезка с линиями сетки не превосходит $[x] + [y] + 2$. Полезно заметить, что число точек пересечения становится еще меньше, если отрезок проходит через узел, в этом случае точка пересечения вертикали совпадает с точкой пересечения горизонтали.

Из определения целой части $[A]$ следует, что $[x] + [y] \leqslant [x + y]$, а наибольшее значение $x + y$, как это следует из задачи 31, достигается при $x = y = 7{,}5\sqrt{2}$ и равно приблизительно 21,2. Отсюда следует, что число точек пересечения данного отрезка с линиями сетки не превосходит 23, а число разрезанных клеток не более 22.

Покажем теперь, что 22 разрезанные клетки могут получиться. Пусть $x = 11{,}1$. Тогда $y = \sqrt{225 - 123{,}21} > 10$ и $[x] = 11$, $[y] = 10$. Данный в условии отрезок можно так расположить на сетке, чтобы он разрезал 11 вертикальных полос, 10 горизонтальных и нигде не проходил через узлы сетки. Тогда общее число точек пересечения с линиями сетки будет равно 23, а число разрезанных клеток 22.

33. На клетчатой бумаге лежит многоугольник, площадь которого меньше 1. Доказать, что его можно сдвинуть так, чтобы он не закрывал ни одного узла сетки (сторона клетки равна 1).

Комментарий. Разрежем бумагу на отдельные клетки и положим эти клетки аккуратно друг на друга так, чтобы границы клеток совпали. Так как площадь многоугольника меньше 1, то можно тонкой иглой так проколоть все клетки, чтобы не задеть многоугольника (заметьте, что в этом рассуждении использован принцип Дирихле, см. с. 67). Теперь вернем все клетки на прежние места, туда, где они находились до разрезания. Многоугольник также займет прежнее положение. Легко понять, что точки прокола образуют точно такую же сеть, как и узлы нашей клетчатой плоскости. Если совершить параллельный перенос всей сетки так, чтобы узлы совпали с точками прокола, а многоугольник оставить на прежнем месте, то он уже не будет закрывать ни одного узла сетки. Затем можно бумагу вместе с сеткой и прикрепленным к бумаге многоугольником вернуть в начальное положение. При этом многоугольник сдвинется так, как требует условие.

34. Какую наибольшую площадь может иметь многоугольник периметра $4p$, стороны которого лежат на линиях клетчатой бумаги (сторона клетки равна 1; p — целое число)?

Комментарий. Пусть M — многоугольник наибольшей площади, удовлетворяющий условиям задачи. Докажем, что это квадрат со стороной p и площадью p^2. Пусть l_1 — самая верхняя горизонталь, содержащая точки многоугольника M, l_2 — самая нижняя, m_1 — самая левая вертикаль, m_2 — самая правая. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, образуемый этими прямыми: AB лежит на l_1, BC — на m_2, CD — на l_2, AD — на m_1. Обойдем многоугольник M

по периметру. Чтобы пройти с линии l_1 на l_2 и затем вернуться обратно, надо не менее чем $2BC$ раз пересекать горизонтальные полосы, двигаясь по вертикальным отрезкам длины 1. Точно так же доказывается, что наш путь содержит не менее $2AB$ горизонтальных отрезков длины 1, пересекающих вертикальные полосы. Значит, периметр M не менее чем $2BC + 2AB$. Если бы многоугольник M не совпадал с прямоугольником $ABCD$, то этот прямоугольник имел бы бо́льшую, чем у M, площадь при том же или даже меньшем периметре.

Итак, M — прямоугольник. Пусть длина его большей стороны равна $p + x$. Тогда длина меньшей равна $\frac{1}{2}[4p - 2(p + x)] = p - x$, а площадь $(p + x)(p - x) = p^2 - x^2 \leqslant p^2$. Так как M — многоугольник наибольшей площади, то $x = 0$, т. е. M — квадрат.

35. Докажите, что площадь любого треугольника, вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги со стороной клетки длины 1, есть число полуцелое. (Полуцелыми называются числа вида $\frac{m}{2}$, где m — число целое, иначе говоря, полуцелые числа имеют вид n или $n + \frac{1}{2}$, где n — целое число.)

Комментарий. Стороны треугольника, непараллельные линиям сетки, будем называть наклонными. Пристроим к каждой наклонной стороне данного треугольника снаружи по прямоугольному треугольнику так, чтобы эта сторона стала гипотенузой, а катеты проходили по линиям сетки. Построенная таким образом фигура состоит из целого числа клеток и имеет площадь, выражающуюся целым числом N. Площадь каждого пристроенного треугольника — число полуцелое, оно равно половине произведения длин катетов, выражающихся целыми числами. Вычитая из целого числа N полуцелые числа — площади пристроенных треугольников, получим в результате полуцелое число, равное площади данного треугольника.

36. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник, вершины которого лежат в узлах клетчатой бумаги?

Комментарий. Треугольник, вершины которого расположены в трех из четырех узлов одной клетки, имеет площадь $\frac{1}{2}$. Из результата предыдущей задачи следует, что треугольник с вершинами в узлах сетки не может иметь меньшей площади, так как наименьшее положительное полуцелое число — это $\frac{1}{2}$.

37. Проведем на клетчатой плоскости (со стороной клетки 1) всевозможные прямые, соединяющие левый нижний узел каждой клетки с ее правым верхним узлом. Они образуют семейство параллельных прямых, находящихся на расстоянии $\frac{\sqrt{2}}{2}$ друг от друга и составляющих с горизонтальными и вертикальными линиями сетки углы 45°. По плоскости движется прямоугольник размерами $a \times b$ так, что его стороны во все время движения остаются параллельными сторонам клеток. Докажите, что суммарная длина отрезков наклонных линий, накрытых прямоугольником, остается при его перемещении неизменной тогда и только тогда, когда из двух чисел a, b хотя бы одно целое.

Комментарий. Рассмотрим сначала прямоугольник размерами $a \times 1$ (здесь a — длина горизонтальной стороны). Нетрудно убедиться, что суммарная длина отрезков наклонных, накрытых таким прямоугольником, всегда равна $a\sqrt{2}$. В самом деле, горизонтальные проекции таких отрезков не перекрываются и полностью «мостят» горизонтальную сторону. Пусть теперь прямоугольник имеет размеры $a \times b$, где b — целое число. Разрежем этот прямоугольник горизонталями на b прямоугольников размерами $a \times 1$. Каждый из них накрывает отрезки наклонных длиной $a\sqrt{2}$, а все вместе — $ab\sqrt{2}$. Мы доказали таким образом, что если длина одной из сторон прямоугольника выражается целым числом, то сумма длин накрытых отрезков остается неизменной и равной $a\sqrt{2}$. Аналогично доказывается более общая.

Лемма. Пусть многоугольник M может быть разрезан на прямоугольники размерами $a_i \times b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) с попарно параллельными сторонами, причем из двух чисел a_i, b_i по крайней мере одно целое. Пусть многоугольник M движется по клетчатой плоскости так, что его стороны остаются параллельными сторонам клеток. Тогда общая длина отрезков наклонных, накрытых M, остается неизменной.

В самом деле, эта длина равна сумме длин отрезков, накрытых отдельными прямоугольниками, из которых составлен многоугольник M, слагаемые, входящие в сумму, при движении M, по доказанному, не изменяются, значит, и вся сумма остается неизменной.

Допустим теперь, что оба числа a и b нецелые. Пусть

$$a = [a] + \{a\},\ b = [b] + \{b\},\ \text{где } 0 < \{a\} < 1,\ 0 < \{b\} < 1.$$

(Здесь, как и обычно, $[A]$ — целая часть числа A, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее A, $\{A\}$ — дробная часть A, т. е. $\{A\} = A - [A]$. Значит, всегда $0 \leqslant \{A\} < 1$.

Разрежем наш прямоугольник горизонталью на два меньших прямоугольника размерами $[a] \times b$ и $\{a\} \times b$. Затем второй из этих прямоугольников разрежем вертикалью на два еще меньших прямоугольника размерами $\{a\} \times [b]$ и $\{a\} \times \{b\}$. Весь прямоугольник разрезался на три прямоугольника, причем для двух из них теорема верна, так как длина одной из сторон каждого прямоугольника целая. Для третьего прямоугольника размерами $\{a\} \times \{b\}$ теорема неверна: его размеры меньше размеров клетки, и, двигая его внутри клетки по одной из ее сторон, мы можем изменять длину отрезка диагонали, накрытой этим прямоугольником. Значит, и общая длина наклонных, накрытых всеми тремя прямоугольниками, составляющими данный прямоугольник, может изменяться при движении данного прямоугольника. Все доказано.

38. На плоскости расположен прямоугольник размерами $a \times b$. Оказалось, что его удалось «вымостить» прямоугольниками размерами $a_i \times b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), причем один из размеров a_i или b_i у каждого такого прямоугольника — число целое. Докажите, что из чисел a, b по крайней мере одно — целое.

Комментарий. Доказательство этого утверждения вытекает из доказанной в предыдущем комментарии леммы. Действительно, наш прямоугольник представляет собой многоугольник M, удовлетворяющий условию леммы, значит, если его перемещать по клетчатой плоскости так, чтобы его стороны оставались параллельными сторонам клеток, то сумма длин отрезков наклонных, о которых говорится в условии задачи 37, остается неизменной, а тогда согласно утверждению той же задачи из двух чисел a, b по крайней мере одно — целое.

* * *

39. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до вершин многоугольника больше половины его периметра.

Комментарий. Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — некоторый многоугольник, O — произвольная точка плоскости. Сложив очевидные неравенства

$$\begin{aligned} OA_1 + OA_2 &\geqslant A_1A_2, \\ OA_2 + OA_3 &\geqslant A_2A_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ OA_n + OA_1 &\geqslant A_nA_1, \end{aligned}$$

получим:

$$2(OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_n) > A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1.$$

(Заметьте, что хотя бы одно из складываемых неравенств строгое.) Сумма в правой части последнего неравенства равна периметру многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$. Отсюда и следует доказываемое.

40. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до его вершин меньше периметра этого треугольника.

Комментарий. Пусть ABC — данный треугольник, O — произвольная точка внутри него. Пользуясь тем, что длина объемлющей ломаной всегда больше длины выпуклой объемлемой, получим:

$$AO + BO < AC + BC,$$
$$BO + CO < AB + AC,$$
$$CO + AO < BC + AB.$$

Складывая эти неравенства, получим:

$$2(AO + BO + CO) < 2(AB + AC + BC).$$

Сокращая на 2, получаем то, что и требовалось доказать.

Объединяя этот результат с результатом предыдущей задачи, можно сказать, что сумма расстояний от произвольной точки внутри треугольника до его вершин меньше его периметра, но больше полупериметра.

41. На биссектрисе AK треугольника ABC взята произвольная точка M. Докажите, что разность расстояний от точки M до B и C не больше, чем разность сторон AB и AC (по абсолютной величине).

Комментарий. Воспользуемся тем, что биссектриса AK является осью симметрии для сторон угла BAC. Пусть B' — точка, симметричная B относительно AK. Очевидно, $MB = MB'$. Если B' совпадает с C, то обе разности, о которых говорится в условии, равны нулю. Если точка B' с C не совпадает, то получаем треугольник $B'MC$, в котором всякая сторона, в частности $B'C$, больше разности двух других сторон. Отсюда и следует доказываемое.

42. В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены. Найдите углы треугольника.

Комментарий. Пусть h_a и h_b — две высоты, о которых говорится в условии, a и b — стороны, на которые они опущены. По условию $h_a \geqslant a$, $h_b \geqslant b$. Так как длина высоты, опущенной на основание, не превосходит каждой из боковых сторон, то $h_a \leqslant b$, $h_b \leqslant a$. Все 4 неравенства можно записать в виде одной цепочки: $a \leqslant h_a \leqslant b \leqslant h_b \leqslant a$. Отсюда видно, что h_a, b и h_b не меньше a и не больше a, значит, они равны a: $b = a = h_a$, т. е. данный треугольник равнобедренный и прямоугольный (его сторона совпадает с высотой). Значит, один из углов данного треугольника 90°, а два других — по 45°.

43. Пусть ABC — произвольный треугольник, M — любая точка стороны BC. Докажите, что справедливо по крайне мере одно из двух неравенств: $AM \leqslant AB$ или $AM \leqslant AC$. Иначе говоря, расстояние от вершины треугольника до любой точки на его основании не превосходит хотя бы одной из боковых сторон.

Комментарий. Пусть H — основание высоты AH треугольника. Так как $M \in BC$, то либо $HM \leqslant HB$, либо $HM \leqslant HC$, либо выполняются оба эти неравенства. Как известно, та из наклонных больше, у которой проекция больше, поэтому $AM \leqslant AB$, или $AM \leqslant AC$, или выполняются оба эти неравенства.

44. **Диаметром** геометрической фигуры называется отрезок, соединяющий две наиболее удаленные друг от друга точки фигуры. (Если AB — диаметр, то для любых точек фигуры X, Y справедливо неравенство $XY \leqslant AB$.) Докажите, что диаметром выпуклого многоугольника является отрезок, соединяющий две его наиболее удаленные друг от друга вершины, — наибольшая сторона или наибольшая диагональ этого многоугольника.

Комментарий. Пусть X, Y — две точки внутри или на границе данного многоугольника, A и B — две его наиболее удаленные друг от друга вершины. (Чтобы найти AB, надо сравнить наибольшую сторону и наибольшую диагональ: AB — наибольший из этих двух отрезков.) Мы хотим доказать, что $XY \leqslant$

$\leqslant AB$. Пусть X_1Y_1 — пересечение XY с многоугольником, тогда $XY \leqslant X_1Y_1$, но точки X_1, Y_1 лежат на границе многоугольника. Допустим, что точка X_1 принадлежит некоторой стороне MN многоугольника. Если Y_1 тоже лежит на MN, то $X_1Y_1 \leqslant MN \leqslant AB$ и все доказано.

Если же Y_1 не лежит на MN, то, применив теорему из условия задачи 43 к треугольнику MNY_1, получим $X_1Y_1 \leqslant MY_1$ или $X_1Y_1 \leqslant NY_1$. Обозначим сторону, на которой лежит Y_1, через PQ. Применив ту же теорему к треугольнику PMQ или PNQ, найдем, что X_1Y_1 не превосходит одного из отрезков MP, MQ, NP, NQ.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Из массы изданий, полезных руководителям математических кружков, а также доступных (полностью или частично) ученикам средних классов, мы укажем лишь некоторые, наиболее соответствующие методическому направлению, развиваемому в книге.

Журналы

Квант (особенно отдел «Квант» для младших школьников). Изд-во «Наука».

Математика в школе. Изд-во «Педагогика».

Книги для руководителя кружка

Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков. — М., 1971.

Подготовка студентов педагогических институтов к внеурочной работе по математике. Сборники статей. — Вологда, 1975, 1976.

Пойа Д. Как решать задачу. — М.: Учпедгиз, 1959, 1961.

Пойа Д. Математическое открытие. — М.: Наука, 1970.

Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: Наука, 1975.

Чесноков А. С., Шварцбурд С. И., Головина В. Д., Крючкова И. И., Литвачук Л. А. Внеклассная работа по математике в 4—5 классах. — М.: Просвещение, 1974.

Многие книги для учащихся объединяются в серии.

Серия «Библиотека математического кружка» (изд-во «Наука»).

Серия «Библиотечка физико-математической школы» (изд-во «Наука»).

Серия «Математическое просвещение» (изд-во «Просвещение»).

Серия «Популярные лекции по математике» (изд-во «Наука»).

Библиотечка «Квант» (изд-во «Наука»).

Серия «Библиотечка физико-математической школы» (Киев, изд-во «Вища школа»).

Серия «В мире науки и техники» (изд-во «Мир»).

Книги о работе математика

Винер Н. Я — математик. — М.: Наука, 1967.

Колмогоров А. Н. О профессии математика. — Изд-во МГУ, 1959.

Хургин Я. Ну и что? — «Молодая гвардия», 1970 (о деятельности математика-прикладника).

Книги «начального этапа» интереса к математике

Перельман Я. И. Живая математика. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1948.

Перельман Я. И. Занимательная алгебра. — М.: ГИТТЛ, 1955.

Перельман Я. И. Занимательная геометрия. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1951.

Кордемский Б. А. Математическая смекалка. — М.: ГИТТЛ, 1958.
Бобров С. Волшебный двурог. — М.: Детгиз, 1948.
Бобров С. Архимедово лето. — М.: Детгиз, 1959.

Сборники задач

Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975.

Делоне Б., Житомирский О. Задачник по геометрии. — М.: ГИФМЛ, 1959.

Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад. — М.: Просвещение, 1971 («городские» олимпиады).

Леман А. А. (сост.). Сборник задач московских математических олимпиад. — М.: Просвещение, 1965 («университетские» олимпиады).

Морозова Е. А., Петраков И. С. Международные математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1971 (и др. издания).

Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ш. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1981.

Книги по разным вопросам.

Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. — М.: Наука, 1969.
Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975.
Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.
Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971.
Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 1972.
Гарднер М. Математические новеллы. — М.: Мир, 1974.
Депман И. Я. Рассказы о решении задач. — Л.: Детгиз, 1957.
Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. — М.: Просвещение, 1968.
Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1978.
Штейнгауз Г. Сто задач. — М.: Физматгиз, 1959.
Штейнгауз Г. Задачи и размышления. — М.: Мир, 1974.
Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. — М. — Л.: ГИФМЛ, 1963.

Многие из перечисленных книг выдержали ряд изданий.

Кроме того, ссылки на некоторые книги приведены в основном тексте.

Конечно, наш список ни в коей мере не исчерпывает множество добротных изданий, которые можно порекомендовать руководителю или участнику математического кружка VI—VIII классов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Валерий Александрович Гусев
Александр Иванович Орлов
Александр Львович Розенталь

ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ В 6—8 КЛАССАХ

Пособие для учителя

Заведующий редакцией *Р. А. Хабиб*
Редактор *Э. К. Викулина*
Мл. редактор *Н. Т. Протасова*
Художник *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *В. Ф. Коскина, Л. М. Абрамова*
Корректоры *Л. С. Вайтман, О. В. Ивашкина*

ИБ № 8086

Сдано в набор 23.12.83. Подписано к печати 03.10.84. Формат 60×90[1]/16. Бум. тип. № 2. Гарнит. литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 18. Усл. кр.-отт. 18,19. Уч.-изд. л. 19,70. Тираж 240 000 экз. Заказ № 4556. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с матриц саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59, в областной ордена «Знак Почета» типографии им. Смирнова Смоленского облуправления издательств, полиграфии и книжной торговли. 214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.

Гусев В. А. и др.
Г96 Внеклассная работа по математике в 6—8 классах: Книга для учителя / В. А. Гусев, А. И. Орлов, А. Л. Розенталь. — 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1984. — 286 с., ил.

Пособие согласовано с программами по математике для 6—8 классов, утвержденными Министерством просвещения СССР. В книге отражен материал кружковых занятий по математике, олимпиад и математических вечеров.

Г $\frac{4306030400-771}{103(03)-84}$ 139—84

ББК 74.262
51(07)